

SIRKKA KUMPULA

# Elämismaailmasta luokkahuoneisiin

*Uusi näkökulma koulumatematiikkaan*



SIRKKA KUMPULA

Elämismaailmasta  
luokkahuoneisiin

*Uusi näkökulma koulumatematiikkaan*

AKATEEMINEN VÄITÖSKIRJA

Esitetään Tampereen yliopiston  
Kasvatustieteiden ja kulttuurin tiedekunnan  
suostumuksella julkisesti tarkastettavaksi  
Tampereen yliopiston Päätalon  
auditoriossa D10b, Kalevantie 4,  
Tampere 13.12.2019 klo 12

# AKATEEMINEN VÄITÖSKIRJA

Tampereen yliopisto, Kasvatustieteiden ja kulttuurin tiedekunta

<i>Vastuuohjaaja ja Kustos</i>	Professori Anja Heikkinen Tampereen yliopisto Suomi	
<i>Esitarkastaja(t)</i>	Professori (emeritus) Harry Silfverberg Turun yliopisto Suomi	Professori (emerita) Pirjo Korhokangas Jyväskylän yliopisto Suomi
<i>Vastaväittäjä(t)</i>	Dosentti Osmo Pekonen Jyväskylän yliopisto Suomi	

Tämän julkaisun alkuperäisyys on tarkastettu Turnitin OriginalityCheck -ohjelmalla.

Copyright ©2019 Sirkka Kumpula

Kannen suunnittelu: Roihu Inc.

ISBN 978-952-03-1346-3 (painettu)

ISBN 978-952-03-1347-0 (verkkojulkaisu)

ISSN 2489-9860 (painettu)

ISSN 2490-0028 (verkkojulkaisu)

<http://urn.fi/URN:ISBN:978-952-03-1347-0>

PunaMusta Oy – Yliopistopaino  
Tampere 2019

Omistan tutkimustyöni esivanhempieni sekä  
äitini Aunen ja isäni Erkin elämäntyölle.



# ESIPUHE

Tutkija oli ihanneammattini 1970-luvulla. Omaehtoinen tutkimuspolku oli alkanut hahmottua jo aikaisemmin. Elämäntilanteisiin yhdistyvällä tutkimuspolulla olen viipyillyt jo yli 60 vuotta tutkien todellisuuden rakentumista, kuten antiikin matemaatikot aikoinaan. Elinikäinen käyttövoima ilmentää matematiikkaa kokemuksessani. Tällöin minulla ja matematiikalla on läheinen suhde. Matematiikkaan kouluvuosina rakastuneen innolla kuljen tutkimuspolkua elämänyhteyksissä. Tällöin matematiikka tuntuu, tarkoittaa ja indikoi jotakin mentaalisesa mielessä. Matematiikkaa on kaikkialla, jolloin se voi olla vielä keksimätöntä säännönmukaisuutta maailmassa. Matematiikan opettajana olen terminaalivaiheen saavuttanut ja tutkin menneisyyden opetustyötäni. Prosessini väitöskirjaksi kirjoittaminen käynnistyi 10 vuotta sitten alkaen elämäkerrasta (autoetnografia), jonka yhteenveto on monografiani liitteenä (luku 11). Henkilökohtainen matematiikka ja yleinen koulumatematiikan menneisyys ohjaavat tutkimuspolkua.

Ensimmäiset muistikuvani itsestäni oppijana sukulaisten kommentoimina koskevat taipumustani pohtia asioiden välisiä yhteyksiä, jotka liitän matematiikkaan. Hölmöläissatujenkin tarinat olivat tunnistettavissa itsestä ja muiden ihmisten toiminnoista. Varhaiset kokemukset vaikuttavat yleisesti todellisuuteen suuntautumiseen. Ihmisten suuntautumistaipumusten taustavaikuttajana on kokemuksellinen elämismaailma, jonka merkitykset vaikuttavat yleisesti matemaattikkokokemukseen lamaanuttavasti, vahvistavasti tai jotain siltä väliltä.

Tutkimuksellinen heräämiseni ja yhteiskunnan rationalisointi kohtasivat 1970-luvulla. Rationalisointi kohdistui elämismaailmani talonpoikauskulttuuriin sekä koulujärjestelmään ja koulumatematiikkaan. Tuolloin aktivoitunut tiedonintressi yhteiskunnan ja koulumatematiikkaan merkitysyhteyksistä säilyi harrastuneisuutena. Tuo yhteiskunnallinen muutosvaihe on jättänyt myös yleisesti merkitysjälkiä, joita kohtaa edelleen koululuokissa. Tutkimuspolku, oma kokemus ja tutkimuskirjallisuus, on avautunut elämäntilanteissa vaikuttavilla ehdoilla. Elämismaailmasta luokkahuoneisiin paljastaa empiirisen ja rationaalisen tieteen perinteestä poiketen ymmärtämisyhteyksiä koulutodellisuudesta fenomenologiaan ja rehellisellä tyyllillään.

Elämismaailma on läsnä, mikä tuo juonteita tunnistaa koulumatematiikan oppimisen ja opetuksen merkityksiä luokka- ja opettajainhuoneissa. Kiitän kollegoitani ja oppilaitani antoisista keskusteluista. Olen häivyttänyt yhteisöjen ja henkilöiden tunnistamisen, muutamia poikkeuksia lukuun ottamatta. Tutkimuspolulla kohtaan edesmenneet matematiikan professori Paavo Malisen ja opetusneuvos Reino Seppälän merkitysten tuojina. Kiitän kaikkia opetus-, koulutus- ja opiskeluyhteyksissä sekä matemaattisten aineiden opettajien (MAOL) tilaisuuksissa kohtaamiani henkilöitä, jotka olette antaneet virikkeitä tutkimukselleni.

Erityiskiitokseni kuuluu ohjaajalleni professori Anja Heikkiselle ja hänen tutkimusseminaariryhmälleen rakentavasta kannustuksesta. Hyvistä keskusteluista kiitokset ansaitsevat Heidi, Antti, Jenni, Sini, Johanna, Marko, Katriina, Marja, Eenariina, Outi, Anitta ja Leena. Olette vaikuttaneet tutkimustyöni etenemiseen. Anja, Jenni ja Sini, muistan monia kannustavia kommenttejanne loppuelämäni. Superkiitos kuuluu etenkin Heidille ja Antille mielenkiintoisista sessioista ja tuesta prosessini aikana. Kiitos esitarkastajilleni, matemaattisten aineiden didaktiikan professori Harry Silfverbergille ja etnologian professori Pirjo Korkiakan-kaalle, hyvistä huomioistanne ja korjausehdotuksistanne. Olen ottanut palautteenne huomioon parhaani mukaan. Kiitos myös KT Vesa Huotari ja Tampereen yliopiston täydennyskoulutuskeskuksen esimieheni KM Marjatta Jokisuu kannustuksesta tutkimukseni jatkamiseen LUMA -työni jälkeen vuonna 2006. Kiitän myös ystäviäni kärsivällisyydestä tutkimukseni vaiheissa.

Lähiyhteisöni, etenkin poikani Hannu, ansaitsee erityiskiitoksen. ”Ootko kirjoittanut”, oli tyypillinen kysymys hänen soittaessaan kuulumisiaan maailmalta. Omistan työni hänen tulevaisuudelleen valitsemallaan polulla. Kiitän häntä myös tietoteknisestä tuesta ja piirrosteni viimeistelystä. Toivon, että työni antaa tukea myös muille oman tiensä kulkijoille. Lämmin kiitos myötälämisestä kuuluu myös sisaruksilleni, Heikille, Esalle, Ullalle, Juhalle ja Päiville perheineen. Olette olleet aina ja edelleen läheinen osa elämäni. Kiitos kannustavalle suvulle, etenkin Heleenalle, Leenoille, Kaijoille ja Tuulalle, sekä Könnin suvun oltermannikunnalle. Suvun perinnöllä on merkitystä tutkimukselleni. Alkuperäinen jatkotutkimushakemukseni oli nimeltään Könnin konseptio, miltä perustalta tutkimuspolku tukee edelleen kekseliäisyyden ja innovatiivisuuden voimaannuttamista suhteessa koulumatematiikkaan.

Seinäjoella juhannusviikolla 2019  
Sirkka Kumpula

# TIIVISTELMÄ

Huoli oppivelvollisuuskoulun matematiikan oppimistulosten heikentymisestä herättää tutkimaan, miten tilanteeseen on jouduttu. Opetussuunnitelman perusteiden (2014) laaja-alaiset taitotavoitteet ja matematiikan oppimistavoitteet ovat ristiriidassa. Oppimisen laaja-alaisuus on suhteessa elämismailmaan (käytäntö). Matematiikan oppimistavoitteet painottavat teoreettista osaamista. Ristiriitoja koululuokissa aiheuttavat oppilaan elämismailmassa kokemat ja opetussuunnitelmassa tarkoitetut merkitykset. Matematiikan merkitys ei välity. Tutkimusongelma, *miten matematiikka ilmenee*, riippuu havainnon merkityksistä havait-sijalle. Kansallista oppivelvollisuuskoulun matematiikkaa koskeva arvokeskus-telu on jäänyt tulevaisuuden rakentamisen näkökulmasta keskeneräiseksi.

Metodologinen rakenne jäsentyy tutkimuspolkuna elämismailmassa. Fenome-nologinen metodi, ajattelu (Heidegger), paljastaa matematiikan oppimi-seen ja opetukseen liittyviä merkityksiä, merkitysketjuja ja vastakohtaisuuksia. Tutkimuspolulla (oppimispolulla) tavoitteena on kätkeytyneiden merkitysten tiedostaminen (Husserl) ja mieltäminen (Heidegger). Näkökulma menneisyy-destä tulevaisuuteen avautuu kulttuurin, politiikan ja tieteen ehdoin.

Uusi näkökulma avaa kulttuuriperäistä yksilöllisyyttä (matematiikan keksimi-nen, horisontaalinen). Yleisesti näkökulma koulumatematiikkaan laajentaa ma-tematiikan mahdollisuuksia ja vaikuttavuutta. Näkökulma suosittelee matema-tiikkakasvatusta taipumusten tukemisena ja yläkouluvaiheen niveltämisenä var-hais-, esi- ja alkuopetuksessa saavutettuihin valmiuksiin. Tutkimuspolku ilmen-tää opettajaa työnsä tutkijana, missä on mukana autenttisia tilannekuvauksia (*kursiivi*). Aikuiskasvatuksen alaan kuuluva tutkimus tukee matematiikan oppi-misen kautta oppilaan yksilöllistyvää ihmisenä kasvua elinikäisellä oppimispo-lulla. Tällöin koulumatematiikka lähenee tiede- ja tietoisuuskasvatusta, joka val-mistaa tulevaisuuden matemaattisen tiedon, taidon, tahdon ja tunteen tarpeisiin.

Asiasanat: koulumatematiikka, matematiikkailmiö, matematiikkakasvatus, tie-dekasvatus, tietoisuuskasvatus, yksilöllistäminen, horisontaalinen matematiikka.



# ABSTRACT

Concern for the decline of learning results in mathematics in compulsory education awakens an interest to study the cause of the present situation. The wide-ranging objectives for skills set out in the national core curriculum (2014) and the learning objectives in mathematics are in conflict. The scope of learning is in relation to lifeworld (practice). The learning objectives in mathematics emphasize theoretical learning. The meanings experienced by the student in lifeworld and the meanings included in the curriculum cause contradictions in classrooms. The significance of mathematics is not conveyed. The research problem of, *how mathematics is manifested*, depends on the meanings of the observation to the observer. The discussion of values concerning mathematics in the national compulsory education remains unfinished from the point of view of building the future.

The methodological structure appears as a research pathway in the lifeworld. The phenomenological method, thinking (Heidegger), reveals meanings, sequences of meaning and contradictions concerning the learning and teaching of mathematics. The aim of the research pathway (learning pathway) is to recognize (Husserl) and perceive (Heidegger) the hidden meanings. The point of view from the past to the future opens up by means of culture, politics and science.

A new perspective opens up cultural individuality (discovering mathematics, horizontal). In general the perspective to school mathematics broadens the possibilities and impact of mathematics. The viewpoint suggests that mathematics education should support natural inclinations and link the abilities acquired in the early childhood education, preschool and primary school together with the lower secondary education. The research pathway shows the teacher as the researcher of his or her own work with authentic descriptions of situations. Through learning of mathematics research belonging in the field of adult education promotes the student's individualized growth as a person on his or her lifelong pathway of studies.

School mathematics education thus converges scientific and awareness education which prepares for the future needs of mathematical knowledge, skills, will and emotion.

Keywords: school mathematics, mathematical phenomenon, mathematics education, science education, awareness education, personalization, horizontal mathematics

# SISÄLLYS

1 Johdanto.....	13
1.1 Koulumatematiikka tieteellisen tutkimuksen kohteena.....	13
1.2 Koulumatematiikkaa koskeva arvokeskustelu.....	16
1.3 Matematiikkakasvatus.....	18
1.4 Tutkimuspolun ajattelemisen tapa.....	21
2 Tutkimusongelman tunnistaminen.....	24
2.1 Huoli koulumatematiikasta.....	24
2.2 Matematiikan kiehtovuus.....	29
2.3 Miten koulumatematiikka ilmenee esiyymmärryksessä.....	33
2.4 Matematiikan tiedonintressit hakuteoksissa 1963-2018.....	39
3 Tutkimusongelman ratkaisun suunnittelu.....	45
3.1 Tutkimuspolku ongelmanratkaisuprosessina.....	45
3.2 Tutkimusongelma.....	49
3.3 Tutkimuskontekstin ja -lähteiden kuvaus.....	51
3.4 Tutkimusmetodi.....	56
3.5 Tutkimuseettinen näkökulma.....	60
4 Matematiikka kulttuurin kentässä (1. alaongelman ratkaisua).....	64
4.1 Kulttuurin kenttä sfäärien riitasointuina.....	64
4.2 Matemaattinen sivistys kulttuurin osana.....	69
4.2.1 Talonpoikainen sivistys suomalaisuuden juonteena.....	69
4.2.2 Talonpoikaisjärki valistusaatteen perintönä.....	74
4.2.3 Matematiikka funktionalisoituu kulttuureiksi.....	80
4.3 Miten matematiikka ilmenee kulttuurin kentässä.....	85
4.3.1 Matematiikka sisäisenä ymmärryksenä eli intuitionona.....	85
4.3.2 Matematiikka kokemuksen reflektiona.....	89
4.3.3 Matematiikka ulkoisina vaikutuksina kulttuuriin.....	94
4.3.4 Ihmiset ovat kulttuurin kentän näkymättömiä vaikuttajia.....	102
5 Koulumatematiikka politiikan kentässä (2. alaongelman ratkaisua).....	108

5.1 Suunnittelutaloudesta kasvatuskeskusteluun.....	108
5.1.1 Koulutuspolitiikkaa oppivelvollisuuskoulusta.....	108
5.1.2 Opetussuunnitelman tavoitteiden asettaminen.....	114
5.2 Matematiikan opetussuunnitelmasta.....	119
5.2.1 Oppivelvollisuuskoulun matematiikan kasvatustavoitteista.....	119
5.2.2 Arkimatematiikka kansakoulussa ja peruskoulussa.....	125
5.2.3 Itsenäiset ajattelutaidot ja matemaattinen ajattelu.....	131
5.3 Miten koulumatematiikka ilmenee politiikan kentässä.....	138
5.3.1 Matematiikan funktiot elämismailmassa.....	138
5.3.2 Matematiikan tehtävä yhteiskunnassa.....	145
6 Koulumatematiikka tieteen kentässä (3. alaongelman ratkaisua).....	154
6.1 Matemaattisen tiedon alkuperä.....	154
6.2 Koulumatematiikkaa uudistamassa.....	159
6.2.1 Descartes matematiikan uudistajana (1600- ).....	159
6.2.2 Koulumatematiikan rakentamisen 1900 -luku.....	166
6.3 Miten koulumatematiikka ilmenee tieteen kentässä.....	174
6.3.1 Matematiikan keksiminen.....	174
6.3.2 Matematiikan löytäminen.....	181
7 Tutkimusongelman ratkaisujen yhteenveto.....	187
7.1 Miten koulumatematiikka ilmenee tutkimuspolulla matematiikkailmiönä.....	187
7.2 Matematiikkailmiö kulttuurin, politiikan ja tieteen kentässä.....	194
7.3 Horisontaalinen ja vertikaalinen matematiikka elämismailmassa.....	204
8 Tutkimuksen pohdinta.....	212
8.1 Tutkimuksen teoreettinen merkitys.....	212
8.2 Tutkimuksen käytännöllinen merkitys koulumatematiikan tulevaisuudelle.....	218
8.3 Tutkimuksen itsearviointi ja jatkotutkimusehdotuksia.....	225
9 Tulevaisuuden matematiikkakasvatus.....	233
9.1 Opetuksen ja kasvatuksen yleiset arvoperusteet.....	233
9.2 Dialoginen matematiikkakasvatus.....	239
9.3 Normatiivinen ja soveltava etiikka.....	247
10 Lähteet.....	252
11 Liite: Matematiikkailmiö elämismailmassani.....	269

11.1 Miten matematiikka ilmenee kokemuksessani.....	269
11.2 Talonpoikaisyhteisö matematiikkaan suuntautumisen perustana.....	273
11.3 Tiedonintressit matematiikkaan suuntautumisen funktiona.....	277
11.4 Miten minun matematiikkani syntyi ja kehittyi.....	282
11.5 Matematiikan arvotodellisuus on monitieteinen ongelma.....	286
11.6 Subjektiiivinen tarkoituksenmukaisuus intersubjektiiivisuutena.....	289



# 1 JOHDANTO

## 1.1 Koulumatematiikka tieteellisen tutkimuksen kohteena

Tutkimuksellinen suuntautuminen oppivelvollisuuskoulun matematiikan yhteiskunnallisiin taustoihin jäsenyyty tutkimuspolulla. Tutkimuspolku ilmentää elinikäistä suhdetta matematiikkaan 1950-luvulta lähtien. Matematiikkaan sisältyvä yksilöllinen luovuus on sekä tutkimuspolun kohteena, että systeemisenä rakenteellisena perustana. Yleisesti matematiikan synnyn, ymmärtämisen, edistymisen ja soveltamisen edellytyksenä on luovuus. Luovuus käsitteenä toistuu opetussuunnitelman perusteissa (2014), mutta sen merkitys ei välity tekstistä. Luovuus ennakoimattomuutena liittyy oppimisen laaja-alaisuuteen. Matematiikkani juurtuu talonpoikaiseen kasvuympäristöön, missä luova toiminta liittyi kekseliäisyyteen arjen toiminnoissa. Lapsuuden yhteisöissä ja kansakoulussa luovuus ilmeni sallitummin kuin nyky-yhteiskunnassa ja nykykoulussa, mikä kokemuksellinen ristiriita johdattaa tutkimusongelman tunnistamiseen.

Talonpoikaisyhteisössä matematiikka keksittiin sisäisesti, subjektilähtöisesti eli horisontaalisesti toiminnallisessa ja tutkivassa käytännön työympäristössä. Peruskoulu-uudistuksen jälkeen koulumatematiikan teoretisoituminen tarkoitti valmiin matematiikan löytämistä, mitä kutsun objektilähtöiseksi eli matematiikkatieteenalalähtöiseksi vertikaaliseksi näkökulmaksi. Yhteiskunnallisessa rakennemuutoksessa ihmisestä riippuva matematiikka muuttui ihmisestä riippumattomaksi, mihin näkökulmamuutokseen liittyvä dialogi on jäänyt Suomessa keskeneräiseksi. Talonpoikaisyhteisössä tiedostamaton toiminnan ja itseoppimisen valmius päätellä ilmiöiden välisiä yhteyksiä (talonpoikaisjärki) muuttui yleistämään pyrkiväksi käsitteelliseksi ajattelurakenteeksi (tiedollisen ajattelun formaalisuus). Oppivelvollisuuskoulun matematiikkaa koskevana nimeämäni rat-

kaisujen yhteenveto, *matematiikkailmiö*, vahvistaa koulumatematiikan yksilölähtöisiä merkityksiä tulevaisuuden nopeasti muuttuvan yhteiskunnan tarpeissa.

Merkitykset ovat laadullisia ja liittyvät ihmisen kokemukseen matematiikasta. Dialogi ideaalisen ja reaalisen eli merkitysten ja elämismaailman välissä tuo mentaalille mielelle mahdollisuuksia suuntautua eri tavoin matematiikkaan. Ihmisen kokemus matematiikasta on aina yksilöllinen, kun taas matematiikkatieteenalana on totuuskäsityksensä ja perinteisesti tulkitun objektiivisuutensa perusteella riippumaton ihmisestä. Tutkimuspolku ideaalisen ja reaalisen dialogissa eksistentiaaliontologiassa on ihmislähtöinen näkökulma koulumatematiikkaan. Tällöin tutkimuspolun intersubjektiivisuus tarkoittaa tutkimusongelman jäsennostapaa ja merkitysten yleispätevyyttä, joita toiset voivat ymmärtää.

Tutkimuspolulla koulumatematiikkaa jäsentävät elämismaailman perusta (kulttuuri), tavoitteet (politiikka) ja tieto (tiede). Tarkastelen (koulu)matematiikkaa osana sivistys-, koulutus- ja tiedekehitystä. Merkitykset, jotka vaikuttavat koulumatematiikkaan, ovat monituhatuotisen kulttuurisen, poliittisen ja tieteellisen kehityksen tulosta, missä pitkittäisesti eri aikakausien ajattelulla ja tieteisiin soveltamisella (etenkin fysiikka, tietojärjestelmätiede) on merkitystä siihen, miten matematiikka ilmenee elämismaailmassa. Tutkimuspolulla tiedonintressit koulumatematiikkaan eivät kohdistu pelkästään luonnontieteisiin, vaan kaikkiin tietisiin, yhteiskunnalliseen kehitykseen ja ihmisen henkiseen kasvuun.

Tutkimusongelmani, *miten matematiikka ilmenee*, on kehittynyt tutkimusprosessissani. Vastaavaa en ole löytänyt tutkimuksista tai tiedekirjoista. Näkökulma mieltää ja tiedostaa matematiikkaa koulumatematiikkaan yhdistettynä. Matematiikka tieteenä tulkitaan yleensä totuuden laadun mukaan tarkkana (eksaktina), jolloin sen ei ole tulkittu ilmenevän. Tutkimusongelma on näin matematiikan tietoteoreettiselle rakenteelle vieras. Havaittaja, jolle jotakin ilmenee, on välttämätön. Vaikka (koulu)matematiikka ilmenee eri tavoin eri ihmisille, tutkimuspolku avaa yleisesti matematiikan käyttökelpoisuutta elämismaailmassa. Subjektiiivinen näkökulma rajaa, jäsentää ja merkitsee tutkimuskohteensa havaittajan ja elämismaailman ehdoilla. Tunnistamani merkitykset ovat luonteeltaan dynaamisia ja antavat samaistumiskohteita ja virikkeitä ajattelulle myös toisin ajatteleville. Matematiikka on abstraktin ominaisuutensa perusteella näkymätön, mutta sen vaikutukset näkyvät kaikkialla. Ajattelemisella matematiikan näkyvyys paranee. Ihmisen osuus tai ohittaminen on yhteinen eettinen ongelma, jonka tulkinta koskettaa koulumatematiikkaa ja matematiikkaa yleisesti. Koulumatematiikkaa opetetaan kouluissa opetus suunnitelmaperustaisesti. Matematiikka tarkoittaa tutkimuspolulla sen laajentamista elämismaailmassa.

Miten matematiikka ilmenee, on pohdinnan kohteena netin keskustelupalstoilla. Aihe on selvästi kiinnostava ja ajankohtainen, mutta tieteellisesti hankalasti hahmottuva. Vastaus *miten* ongelmaan käynnistyy havaitsijan näkökulmastani. Tällöin elämismailmani kokonaisuutena toimii matematiikan kasvualustana. Tulkitsen kokemukseni riittäväksi suhteessa koulumatematiikkaan, koska kokemukseni matematiikasta on elinikäinen. En perustele tietoa kokemukseeni vedoten, vaan käytän käytännön tilanteita tutkimuspolun dialogissa ja juurieni tunnistamisessa. Opetustyössäni eri kouluasteet (I-III), eri koulutyypit (peruskoulu, lukio, vapaa sivistystyö, ammattisivistävä koulutus, yliopisto) ja eri oppilaitokset (yli 17) ovat olleet koulumatematiikan tunnistamista ja tutkimuksellisuutta tukeva konteksti. Opettaja on työnsä tutkija opettaessaan, mihin tutkimuspolku viittaa. Olen opettajana terminaalivaiheessa, jolloin tarkastelen kokemuksiani matematiikan opettajana menneisyyteen peilaten ja tulevaisuuteen suunnistaen.

Tutkimuspolun rakennemallina toimii ongelmanratkaisu, jonka ratkaisuihin vaikuttavat lähtökohtaoletukset. Tutkimusongelman tunnistaminen (luku 2) liittyy huoleen koulumatematiikan osaamisesta (objektiivinen) ja kokemukseen matematiikan kiehtovuudesta (subjektiivinen). Taustalla vaikuttaa arvoristiriita, joka on yksilön kokemuksen ja osaamisen mittaamisen välillä. Tällöin merkitysten väliin jää kohtaanto-ongelma (vrt. työmarkkinapolitiikka).

Kouluajanani koin kiehtovaksi matematiikan holistisen rakenteen ja halusin ymmärtää yhä paremmin, miten matematiikka ilmenee yhteiskunnassa ja minussa. Ihmisten elämismailmassa suuntautuminen matematiikkaan on välineellistä tai periaatteellista (itseisarvoista) (alaluku 2.3). Yhteiskunnallisen päätöksenteon perustana on usein esitys, laskelma, talousarvio, ennuste, sovellusmalli, rakennuskaavio, algoritmi, animaatio tai tietojärjestelmä, mikä on matematiikan soveltamista välineellisesti. Matematiikan soveltaminen itseisarvoisessa merkityksessä korostaa pyrkimystä totuuteen; toisten, itsen ja maailman ymmärtämiseen sekä luovuuteen. Matematiikan voi yhdistää vuorovaikutukseen itseisarvoisena keinona välttää hierarkioiden luomia vääristymiä, kuten kiusaamista, juonittelua tai sanatonta vallankäyttöä, joita yksikäsitteisyys odotuksena saattaa tuottaa. Matematiikalla on yhteiskunnassa vallankäytön funktio, jolla on yhteys yhteiskunnan polarisoitumiseen. Tutkimukseni tarkoitus on vahvistaa ja tukea vuorovaikutteista koulumatematiikkakeskustelua sekä ylläpitää suomalaisten osallistamista ja potentiaalien tunnistamista. Elämismailmaan siirrettynä jokaisella on oma matematiikka, päättelysystemi, vaikka sitä ei täysin tiedostaisikaan.

## 1.2 Koulumatematiikkaa koskeva arvokeskustelu

Olen osallistunut kouluissa ja koulutuksissa koulumatematiikkaa koskeviin arvokeskusteluihin vuodesta 1980 alkaen. Keskustelu koulumatematiikasta on painottunut enemmän opetussisältöihin ja -tuntimääriin kuin tutkimukseni kohteena olevaan näkymättömään ja käsitteettömään matematiikkaan ympärillämme. Tutkimuspolku osoittaa matematiikan yhteyksiä elämismailmaan. Tällöin katse kohdistuu koulumatematiikkaan suuntautumiseen. Opetushallituksen opetussuunnitelman perusteiden käyttöönottoa valmistelleen päällikön, Irmeli Halisen, mukaan (5.2.2015) kouluoppimisen ohjeistamisessa on meneillään oppimisen laaja-alaistaminen ja todellisiin elämänilmiöihin kytkeminen.

Keskeiset koulumatematiikan merkitykset eli oppimisen kehystekijät löytyvät kulttuurin, politiikan ja tieteen kentästä (Kumpula 2006, 25-36). Kulttuurin kenttä edustaa juuria, perustaa, perusarvoja ja perintöä ihmisen ja hänen yhteisönsä elämässä, mitkä ohjaavat tietoisesti tai tiedostamattomasti suhdetta maailmaan ja matematiikkaan. Poliitiikan kenttä edustaa tavoitteita ja tahtotiloja yhteiskunnassa, mitkä koulumatematiikan kohdalla löytyvät opetussuunnitelmasta, koululaeista ja asetuksista sekä ohjaavista kansallisista ja kansainvälisistä (koulutus)poliittisista linjauksista. Tieteen kenttä on kolmiulotteisen kenttämallini kolmas ulottuvuus ja keskeisin oppivelvollisuuskoulun matematiikkaan vaikuttaja, koska koulumatematiikan sisältöä ja tavoitteita perustellaan tieteen lähtökohdista. Peruskoulussa tieteelliset perusteet ovat tosin keventyneet 1970-luvulta oppikirjojen käyttäjäystävällisyyden lisääntyä.

Kulttuurin kenttä (luku 4) avaa kulttuurin ristiriitaisia sfäärejä (alueita), sivistyksemme talonpoikaista juonetta, kulttuurievoluutiota, matematiikkaa sisäisenä ymmärryksenä (intuitio) ja tieteen kehitystä, jonka taustalla ihminen vaikuttaa. Kansansivistystyöllä on ollut merkittävä rooli suomalaisuuden synnyssä sekä koulumatematiikan (laskento) käytännöllistämässä ihmisten elämismailmoissa. Kulttuuriperintömme vahvistaa käsityksiämme suomalaislasten hyvistä ongelmanratkaisuvalmiuksista (PISA), minkä perustalta on myös oltava huolissaan heikentyvistä matemaattisista taidoista. Suomalaisen kulttuurin merkitykset koulumatematiikkaan ovat jääneet keskeisiltä osiltaan tunnistamatta tai vähälle huomiolle. Tutkimuspolulla tarkastelen kulttuuria talonpoikaisen sivistyksen lähtökohdista.

Politiikan kentässä (luku 5) peilaan opetussuunnitelman kehitystä ennen ja jälkeen koulutussuunnittelun taloustieteellistä (suunnittelutalous) vahvistumista. Käännösvaiheessa koulutuksen hyöty yksilölle ja yhteisölle vahvistui hyödyksi

yhteiskunnalle. Koulu-uudistus rinnakkaiskoulusta peruskouluun 1970-luvulla toi tasa-arvoiset kouluttautumismahdollisuudet. Arviointiraportti peruskoulun opetussuunnitelmauudistuksesta (Norris, Aspland, MacDonald, Schostak, Zamarski 1996, 27-28) ja koulutuksen säätelyjärjestelmät Euroopassa (Kivinen, Rinne, Järvinen, Koivisto, Laakso 1995, 371) tuovat esiin, että koulutussuunnittelukäytäntö Suomessa on tarkkaa ja yksityiskohtaista. Opettajien yhteisen tietoisuuden puutteet opetuksen suunnasta näyttäytyvät heikkoutenamme. Koulumatematiikan funktioiden (oppilas) ja tehtävien (yhteiskunta) erittely mahdollistaa opiskelijan kokemuksen ja opetussuunnitelman tavoitteiden välisen dialogin, minkä tavoitteena on yhtenevä tietoisuus kehittämisen yksilöllistyvistä oppimispoluista.

Matematiikka tieteenä on tutkimusongelmana tieteen kentässä (luku 6), jossa käsittelyssä ovat matemaattisen tiedon alkuperä rationalismin ja empirismin rajankäynnissä sekä koulumatematiikkaa koskevia tieteellisiä lähtökohtia uudelta ajalta. Koulumatematiikan rakentamisen aika (1900-) pohtii koulumatematiikan tiedeperustan vaiheita. Tieteen kentässä matematiikka ilmenee keksimisenä tai löytämisenä, joista ensimmäisessä korostuvat yksilölliset ja luovat ajattelutaipumuksukset, yksilölliset konstruktiot. Jälkimmäisessä painottuvat tieteenalalähtöiset formaaliset tavoitteet, mitä käytännön opetustyö usein vieläkin behaviorismiin perustuen edustaa. Matematiikan oppimisessa keksimisen ja löytämisen välinen dialogi tukee oppimaan oppimisen valmiuksia ja tietoisuusprosessin tunnistamista yksilöllisen oppimispolun rakentamiseksi.

Tutkimuspolku luo ja tuo ihmislähtöisiä näkökulmia koulumatematiikkaan. Kouluopetuksessa toteutuva koulumatematiikka rakentuu opettajien koulutuksen, (koulutus)suunnittelijoiden, oppimateriaalien tekijöiden, koulutusten (esim. LUMA -keskukset) ja opettajien työssä. Uusimman opetussuunnitelman yksilöllisyys on herättänyt myös kritiikkiä perinteisten tieteenalaa edustavien opettajien keskuudessa. Kouluvaikuttajat (mm. Matemaattisten aineiden opettajien liitto, MAOL ry) ovat haasteen edessä, miten opetussuunnitelman uusi opetusfilosofia saadaan rakentamaan keskusteluun. Tutkimuspolku mallintaa dialogisen keskustelun kehystä elämismaailman näkökulmasta. Tällöin vastakohtien ja ristiriitojen tunnistaminen tuo mahdollisuuksia, joiden välissä uudistava keskustelu mahdollistuu.

Tutkimuspolku saattaa lukijaa koulumatematiikan kiehtovaan monimuotoisuuteen ja keksimisen katoavaan kansanperintöön. Dialogiin yllyttävä tutkimuspolku koulumatematiikan todellisuuteen on tieteellisesti omaperäinen ja kouluma-

tematiikan kehittämisen kannalta ajankohtainen. Tutkimus koskee matematiikan arvo-ongelmaa, johon liittyvät ihmisenä kasvaminen ja huoli matemaattisten potentiaalien tunnistamisesta ja tukemisesta osana oppivelvollisuuskoulun elinikäisiä oppimistavoitteita. On tärkeää tunnistaa matemaattisesti lahjakkaat, jotka ovat usein kriittisiä osaamisestaan. Ehdottamani ratkaisu elämismaailmassa ilmenevään ongelmaan on suuntautumistavan muutos. Muutoksen lähtökohtina ovat tällöin elämismaailmoissa koetut merkitykset.

### 1.3 Matematiikkakasvatus

Onko matematiikan ymmärtäminen oppimista vai kasvamista? Karkeasti käsitteitä voi luonnehtia oppiainelähtöisyyden (opetus) ja ihmislähtöisyyden (kasvatus) näkökulmista kehittyvällä erolla. Sen mukaan peruskoulun varhais-, esi- ja alkuopetuksessa kasvatetaan ja yläkoulussa opetetaan. Yläkoulun matematiikka saa pääosin vaikutteensa matematiikkatieteenalalta. Aineenopettajakoulutuksen tavoitteena on oppiaineen opetus. Varhaiskasvatuksen sekä esi- ja alkuopetuksen tavoitteet viittaavat opettajan kasvatustehtävään ja oppilaan monialaisten oppimisvalmiuksien tukemiseen.

Didaktiset toimenpiteet suuntautuvat yleensä opetusaineeseen, mitä kohdetta kasvatuksen näkökulma laajentaa. Tutkimuspolun matematiikkakasvatus on kokonaisvaltaista pedagogista toimintaa. Kehystekijöiksi koulumatematiikkaan olen valinnut sfäärien kentän (kulttuuri, politiikka, tiede), mikä ilmentää elämismaailmallista suhdetta koulumatematiikkaan. Kentällä toimivien välinen vuorovaikutus on tavoiteltavaa. Tutkimuspolku luo kasvatusteoriaa koulumatematiikan todellisuudesta eksistentiaaliontologiassa, jossa olemme osallisina.

Matematiikan tieteenfilosofia ohjaa koulumatematiikkaa logiikan, totuuden ja oikeuttamisen suuntaan. Kasvatusnäkökulma painottaa oppilaan kulttuurisia vahvuuksia, valmiuksia ja taipumuksia. Tutkimuspolun eksistentiaaliontologiassa olen itse osallisena, jolloin tarkastelen koulumatematiikkaa elämismaailman, tulevaisuuden arjen ja työelämän tarpeiden näkökulmasta. Matematiikan opettajaksi opiskellessaan ja matematiikkaa opettaessaan opettaja käyttää tieteenfilosofisia matematiikan erityisluonteeseen liittyviä perusteita. Tällöin lähtökohtana on tieteenala. Eksistentiaaliontologia tukee itse itsestään ja tietämisestään tietoisemmaksi kasvamista, jolloin ihmislähtöisyys on tulevaisuuden rakentamista koulumatematiikan eväin elinikäisellä oppimispolulla. Ihmislähtöisyyttä mate-

matiikkakasvatuksessa perusteleo oppilaiden elinikäisen kasvun kannalta merkittävä vaihe, yläkouluvaihe (luokat 7-9, 10 ja aikuislukio).

Tieteenfilosofinen keskustelu matematiikasta on painottunut analyttisen filosofian kehukseen 1900-luvun lopussa. Vaikutusvaltaa linjauksissa analyttiseen suuntaan osoittivat Wienin piirin (1928-1934) jäsenet (Schlick, Reichenbach, Carnap). Loogisena positivismina, myöhemmin loogisena empirisminä tunnettu suuntaus johti analyttisen filosofian voimistumiseen, jonka vaikutusvalta Suomessa on ollut merkittävä suomalaisten arvostamien filosofien, Eino Kailan (1890-1958) ja etenkin hänen oppilaansa, Georg Henrik von Wrightin (1916-2003) ansiosta. Vähemmälle huomiolle vuosisadan jälkipuoliskolla ovat jääneet fenomenologian, hermeneutiikan, eksistentialismin ja pragmatismien tuomat ihmislähtöiset mahdollisuudet matematiikkaan.

Tutkin koulumatematiikkaa fenomenologisella asenteella ja talonpoikaisjärjellä painottaen elämänläheisiä merkityksiä. Tutkimuspolulla filosofia ja matematiikka ovat yhteen kietoutuneita. Henkilökohtaiset ja holistiset lähtökohdat eivät ole olleet koulumatematiikan keskiössä, vaikka filosofia ja matematiikka ovat kekseliäään luovuuden tuotoksia, siten ihmislähtöisiä ja yksilöllisiä. Ihminen on filosofinen luonnostaan, kyselevä ja tutkiva, kun sille annetaan tilaa. Filosofia ja fenomenologia yhdistettynä matematiikkaan ovat laajentaneet koulumatematiikkaa vasta 2000-luvulla. Muistan edellisiltä vuosikymmeniltä useitakin matematiikan opettajien koulutus- ja keskustelutilaisuuksia, joissa filosofeja, ontologeja, kasvatustieteilijöitä ja tieteen sosiologeja on suorastaan pilkattu suhteessa koulumatematiikkaan.

Koulumatematiikkaan liittyvät tavat, taidot, tyyli, tunteet, arvot, uskomukset tai heuristiikat ovat olleet matematiikan didaktiikan tutkimuskohteina, mutta kuitenkin yleensä rajattuina tutkimuskohteina. Matematiikkaan liittyviä osia on tutkittu erikseen ihmisen kokemisen kokonaisuudesta erotettuina. On tutkittu myös asenteita, ennakkokäsityksiä, representaatioita, affektiivisiä tekijöitä, sosiaalisia tekijöitä, oppimisongelmia, oppimistyylejä, oppimisstrategioita, arviointitaitoja, virhekäsityksiä, ongelmanratkaisukykyä, päättelyä, analysointitaitoja tai matemaattista osaamista strukturoiduilla kokeilla. Osien tai piirteiden kautta ei välity inhimillinen kokemisen kokonaisuus, joka on jotakin muuta kuin osiensa summa (Suvanto 2018).

Viime vuosikymmeninä ihmislähtöinen koulumatematiikka Suomessa on vahvistunut (Malinen 1992; Toivola, Peura & Humaloja 2017; Pehkonen & Rossi 2018, Joutsenlahti, Silfverberg & Räsänen 2018). Matematiikan didaktiikan pro-

fessorit, kuten Oikkonen, Haapasalo, Pehkonen, Keranto, Tossavainen, Silfverberg ja dikaktiikan yliopiston opettajat Portaankorva-Koivisto, Laine ja Hannula ovat julkaisseet oppilaslähtöisiä artikkeleita. Yksilön toiminta ja toimintaan integrointi korostuvat tutkimuspolulla. Käsittelen matematiikkaa kokemuksellisen kokonaisuutena, jolloin tutkimukseni on fenomenologinen. Fenomenologisen matematiikan didaktiikan pioneeri Hans Freudenthal (1905-1997) on taustavai-kuttajani, vaikka keskityinkin elämismaailmaa ympäröiviin kehyksiin (kulttuuri, politiikka, tiede).

Fenomenologinen tutkimus edellyttää kokemusta koulumatematiikan opettamisesta ja kehittämisestä. Opettajakokemukseni (35 vuotta) kautta on tunnistettavissa koulumatematiikkaan liittyvää oppilaiden otteen helytymistä. Työni opettajana on ollut uskon valamista siihen, että kaikki voivat osata matematiikkaa. Huoleni koskee etenkin koulumatematiikan oppimistulosten painottuneesti mitateoreettista tulkintaa laadullisten perusteiden ensisijaisuuden sijasta. Oppilaan itsearviointitaidon tukeminen on askel oikeudenmukaisempaan suuntaan. Kaikkien osallistaminen ja potentiaalien tunnistaminen vaatii aikaisempaa laajempaa ymmärrystä koulumatematiikan mahdollisuuksista.

Yksilöllinen kasvaminen ja kehitys suhteessa (koulu)matematiikkaan on muuttuva havaintokokemusten jatkumo. Oppilaiden kasvamaan saattaminen oppimispoluillaan merkitsee tilaisuuksien suomista kasvumahdollisuuksien toteutumiselle, luonnollisen kasvamisen tielle sattuvien esteiden poistamista ja muita auttavia toimenpiteitä. (Hollo 1931b, 65.) Kasvamaan saattaminen sopii tutkimuspolun matematiikkakasvatuksen perustaksi. Henkinen kasvu korostuu Herderin (1744-1803), Hegelin (1770-1831) ja Snellmannin (1806-1881) ajattelussa, joissa kasvaminen on yhteydessä aikaan ja paikkaan (praksis). Menneisyys on läsnä, elämä on nykyhetkessä ja kestävä tulevaisuus on kasvutavoitteena. Matematiikkakasvatus vahvistaa ajattelutapaa, joka tukee yksilöiden elinikäistä henkistä kasvua sekä tiede- ja tietoisuuskasvatusta. Tutkimuspolun tulosten perusteella tulevaisuuden koulu hyötyy dialogisesta matematiikkakasvatuksesta yläkouluvaiheessa. Matematiikkakasvatus tukee tulkinassani yksilöllistyvää ja luovaa oppimista sekä uusien oppimisympäristöjen käyttöönottoa.

## 1.4 Tutkimuspolun ajattelemisen tapa

Tutkimuspolun ajattelemisen tapa perustuu havaintokokemuksen konstruktiviiseen luonteeseen (Kumpula 2006, 39-50). Tällöin yksilöllinen havainto tarkoittaa, että eri ihmisten havainnot samasta kohteesta saattavat olla erilaisia. Havaintokokemukseen vaikuttavat tiedonintressit, aikaisemmat kokemukset, muistikyky, tunteet, aistit ja yksilöllinen tapa hahmottaa todellisuutta. Matematiikan opetuksen ja oppimisen todellisuutta koskevat havainnot ohjaavat tutkimuspolkua. Opetussuunnitelmaperustaisesti rajattua koulumatematiikkaa ja kulttuuri-peräisesti rajatonta matematiikkaa koskeva todellisuus paljastuu ajattelemisen metodilla kohti dialogista matematiikan keksimistä (tai löytämistä).

Ajattelemisen on fenomenologinen metodi ja fenomenologisen filosofian mukainen asenne todellisuuteen. Ajattelemisen on tällöin suhde havaintotodellisuuteen. Ajattelemisen fenomenologian mukainen filosofinen asenne on maailman hahmottamisen tapa. Filosofista asennetta luonnehtivat peilaukset eli heijastukset (Kaila 1967, 133-134). Tällöin havaitsija peilaa kokemaansa matematiikkaa ja maailman ymmärrystään havainnoistaan ja toisten ihmisten havainnoista, kuten teksteistä, sanoista, ilmeistä, eleistä, valinnoista, teoista, töistä, tunteista tai havaitsematta jättämisistä. Havaitsija mieltää kuin peilistä merkityksen, minkä hän havainnolleen antaa. Havaittujen peilauksien kautta ihminen kasvattaa itseään sisäisesti ajatusten avulla tai ulospäin ilmaisten ajatuksiaan. Havaitsija sopeutuu tai itsenäistyy ajattelemaan itse. Filosofinen asenne tavoittelee itsenäisiä ajattelutaitoja. Tutkimuspolulla vastakkain asettaminen tarkoittaa yksilöllisten erojen tunnistamista reflektiivisen ajattelemisen avulla.

Deweyn (1910, 9) reflektio on omien merkitysten arviointia. Filosofinen suhde todellisuuteen, ajattelemisen, vahvistui reflektioksi 1990-luvulla (Mezirow 1998; Rauste - von Wright 1996), jolloin myös oppimisteoreettinen ajattelu vahvistui tiedon rakentamisena (konstruktio). Reflektiivistä ajattelutapaa kutsutaan myös projektioiksi eli heijasteeksi (Kaila 1967, 133; von Wright 1996, 13-17), filosofoimiseksi (Herakleitos 500 eKr; Husserl 1940), ajattelemiseksi (Varto 1995), pohdinnaksi (Vaherva 1997), mietiskelyksi (Kassara 2018) tai transformaatioksi (Mezirow 1998). Käytettyjen käsitteiden runsaus symboloi lähinnä ajattelemiseen sisältyvien yksilöllisten merkitysten eroja. Reflektio viittaa heikosti tai vahvasti uudistavaan oppimiseen. Tutkimuspolulla käytän metodisessa merkityksessä käsitettä ajattelemisen, joka avaa tutkimusprosessia keskusteluvampaan suuntaan. Ajattelemisen on kuin valon kulku heijastavassa kuidussa, ei

suoraviivaista, vaan heijastavasta pinnasta peilautuvaa eli refleктоituvaa (fys.) siksakkia. Siksak eteneminen tarkoittaa reflektionia kenttien välillä, jos merkityksillä on ymmärtämysyhteys.

Ajattelemisen tukee ihmisen valmiutta tiedostaa itseään, matematiikkaa ja maailmaa. Ihminen toki altistuu vaikutteille tiedostamattaankin, jolloin hän ei tule tietoiseksi merkityksistä. Tiedostamisprosessi voi aktivoitua vasta pitkän ajan kuluttua oppimiskokemuksesta, mikä viittaa prosessin elinikäisyyteen. Tutkimuspolun keskeisenä tavoitteena on tietoisemmaksi kasvaminen prosessin kautta. Tutkimuspolku eletyn elämän läpi kulkee kuin kysellen itseltään, mitä kokemukset ovat minulle merkinneet tai mitä tutkimuslähteiden tieto tarkoittaa opetuskäytännöissä. Ymmärtämysyhteydet rakentuvat kuin säikeinä tai juonteina merkkien ja merkityssuhteiden päälle kietoutuen poluksi taustanaan matematiikka elämisaailmassa. Erilaisten mentaalisten horisonttien viidakossa keskenään ristiriitaiset merkitykset sotkevat polun löytämistä.

Ihminen kasvattaa itseään ulkoisten vaikutteiden kautta, etsii omintaan samais- tumatta tai toimii tilanteissa intuitiivisesti. Viestintä suuntautuu ulkoisista virik- keistä sisäiseen tajuamiseen, sisäisistä mielteistä ulkomaailman arviointiin tai yhteen kietoutuneina merkityksinä sisäisistä ja ulkoisista havainnoista. Vaikutel- mat synnyttävät mielteitä ja mielikuvia siitä, millaisena havaitsija kokee mate- matiikan, maailman ja itsensä tajunnassaan. Suunnistautuminen ajattelussa kul- kee sisäisten kysymysten kautta. Tällöin kuvainnollisesti toimii kuin itse itsel- leen peilinä. Tutkimuspolulla ajattelemisen koskien matematiikkaa on sekä oman ajattelemisen ajattelemista että elämisaailmasysteemin tunnistamista, missä matematiikka on tiede- ja yhteiskuntakehityksen sekä kulttuurievoluution keskeinen suuntaaja.

Elämäni alkuvuosiin sisältyy merkittäviä itsen peilaustilanteita, elämään oppi- misen ja ympäristöön sopeutumisen vaiheita, jotka vaikuttavat tausta-ajatteluna koko elämän ajan. Vaikka uudelleen oppiminen on mahdollista koko elämän ajan, kumulatiivisesti ensimmäiset kokemukset toimivat kaiken perustana. Koe- tut merkitykset, elämykset ja ymmärryksen tilat tallentuvat muistiin ja toimivat ennakkojäsentäjinä tulevissa tilanteissa. Mieli tallentaa elämää puhuttelevan tie- don välittömästi, olipa tieto sitten eduksi tai haitaksi. Tietämys rakentuu sen tie- don, tunteen ja tahdon kautta, mitä kukin ihminen holistisesti ja historiallisesti edustaa. Elämän perustavat eksistentiaaliset oletukset ja kysymykset ovat läsnä arjen tilanteissa syntymästä kuolemaan tietoisesti, esitietoisesti tai tiedostamat- tomasti. Ajattelemisen on näin kokonaisoppimista eli holistinen oppimisen tapa.

Ajattelemisen on fenomenologinen metodi, joka Heideggerin (2000, 58) mukaan on sekä tulkitseva eli hermeneuttinen että historiallisia merkityksiä purkava (konstruktiiivinen ja destruktiivinen). Fenomenologia on tapa, jossa olevaa osoitetaan sellaisena kuin se itsessään näyttäytyy (emt. 59). Fenomenologiassa on pyrkimys ymmärtää kaiken merkityksellisyyden rakentumista. (Miettinen 2007, 36.) Peilaan kulttuurisia merkityksiä koulumatematiikkaa koskevaan tietoon ja tieteeseen. Miten matematiikka kokemuksessani ilmenee, välittyy ajattelemisessa. Käyn dialogia merkitysten, tieteellisten- tai asiakirjatekstien ja kokemukseni (*kursiivi*) välillä. Dialogia tutkimuspolulla kuvaavat kursiivilla kirjoitetut kappaleet ylläkkeenä keskusteluun. Tutkimuksen liitteenä (luku 11) on elämissä maailmani kuvaus, joka konkretisoi omaa matematiikkakuvaani ja suhdettani koulumatematiikkaan.

## 2 TUTKIMUSONGELMAN TUNNISTAMINEN

### 2.1 Huoli koulumatematiikasta

Huoli koulumatematiikasta kohdistuu matematiikan osaamisen tilaan, mikä näyttää kansainvälisten (vuodesta 1964 lähtien) ja kansallisten (vuodesta 1998 lähtien) arviointitutkimusten valossa olevan laskusuunnassa. Kansainvälisten arviointitutkimusten tehtävänä on arvioida oppilaiden oppimistulosten tasoa ja laatua osallistuvissa maissa ja samalla selvittää mahdollisimman kattavasti sitä ympäristöä, jossa oppiminen tapahtuu (Kupari & Hiltunen 2018, 19). Kansallisten oppimistavoitteiden saavuttamisen tasoa seuraa Suomessa opetushallitus. Yliopistot ja koulutuksen julkisyhteisöt osallistuvat opetuksen ja oppimisen kehittämiseen. Katsaukseni matemaattisen tiedon ja taidon arviointiin suuntaa tutkimuspolkua kohti elämismailmassa ilmeneviä matematiikan merkityksiä.

Opetushallitus seuraa systemaattisesti otantatutkimuksilla kansallisia peruskoulun matematiikan päättövaiheen oppimistuloksia vertailemalla perättäisten vuosien tuloksia. Mittateoreettisen perinteen mukaan strukturoiduin kokein ja tilastollisin menetelmin toteutetut päättöarviointien seurantatutkimukset vastaavat yleisesti matematiikan oppisisältöjen osaamisen kartoitustarpeisiin sekä tasa-arvon toteutumiseen. Asenne oppimiseen on tulkittu myös mittateoreettisesti. Osaaminen ja myönteisten asenteiden muokkaamiseen käytetty aika ovat yhteydessä toisiinsa (Mattila & Rautopuro 2013, 64). Seurannoissa ei ole ollut tapana kysellä subjektiivisia perusteita, kuten miten matematiikka on kiehtonut, palvelut tai vaikuttanut omassa elämässä ja yhteiskunnan ymmärtämisessä.

Opetushallituksen seuranta-arvioinneissa keskimääräiset ratkaisuosuudet ovat laskeneet kaikilla koulumatematiikan osa-alueilla (Hirvonen 2012, 5-7; Rautopuro 2013, 5-7). Viidennen seuranta-arvion mukaan samoilla tehtävillä tehty ratkaisuosuus on pienentynyt 59 prosentista 54 prosenttiin (Hirvonen 2012, 5). Vuonna 2012 ratkaisuosuus on vähentynyt 52 prosenttiin, maan eri alueilla ratkaisuosuudet vaihtelivat 49-53 prosentin välillä (Rautopuro 2013, 6). Ratkaisu-

osuuksien prosentit eivät korreloineet annettuihin arvosanoihin, poikkeamat koulujen välillä ovat 1 - 2 arvosanayksikköä (Hirvonen 2012, 6; Rautopuro 2013, 119). Seuranta-arvioiden mukaan matematiikka ei ole pidetty oppiaine (Rautopuro 2013, 6). Helsingin yliopiston opettajakoulutuslaitoksen tutkimuksen päättöarviointi (Korhosen 1994) ennakoii päättöarviointien toteuttamista Suomessa systemaattisesti. Korhosen mukaan geometrian sisältöalueen keskiarvo (9,23), osaamisprosentti (51,3%) ja hajonta (5,48) on suurin (emt.48). Koulumatematiikan geometrian sisältöalue oli tuolloin laajempi kuin 2000-luvulla.

Perusopetuksessa yläkouluvaiheen osaaminen on 30 vuodessa heikentynyt yhden koulutyövuoden verran (Metsämuuronen 2014, 12-16). Suurin osa oppilaisista saavuttaa edelleen tyydyttävän osaamistason, mutta päässälaskussa, geometriassa ja ongelmanratkaisutehtävissä osaaminen on merkittävästi heikentynyt. Pojat menestyivät tyttöjä erittäin merkittävästi paremmin päässälaskussa ja tytöt poikia paremmin ongelmanratkaisutehtävissä. Matematiikan osa-alueista parhaiten hallittiin luvut ja laskutoimitukset (65%), heikoimmin geometriaan liittyvät tehtävät (42%). (Hirvonen 2012, 5, 58-60.) Geometrian sisältöalueen vähentäminen opetussuunnitelmassa näkyy oppimistuloksissa. Heikoimmin osattu sisältöalue, geometria, indikoi päättelytaitojen ja säännönmukaisuuksien tunnistamisen heikentyä taitoa.

Suomi on osallistunut osana ulkoista peruskoulutuksen järjestelmätason arviointia kansainvälisiin FIMS (1964), SIMS (1981), Kessel (1993), TIMMS (1999, 2011, 2015, 2019), PISA (2000, 2003, 2006, 2009, 2012, 2015, 2018) ja PIAAC (2012, 2015, 2018) arviointeihin. Matematiikan osaamisen tuloksissa (2003, 2012) on keskimäärin havaittu lievää matematiikan taitojen laskua. Tulostensa perusteella yleisesti matemaattisen ajattelun kehittämiseen liittyvää pohdintaa on syytä syventää.

International Association for the Evaluation of Educational Achievement (IEA) tutkimuksen Trends in International Mathematics and Science Study (TIMSS) kohteena on opetussuunnitelmaan sisältyvä koulumatematiikka. Tutkimuksen perusteella koulumatematiikan taidoissa ei ole tapahtunut kehitystä. Vuonna 2011 Suomi oli sijalla 8. opetussuunnitelmaan perustuvissa koulumatematiikan taidoissa, kun vuonna 2006 Suomi oli sijalla 6. (Kupari 2013.) Testistön tarkoitus on tukea koulumatematiikan opetuksen kehittämistä päivittämällä koulumatematiikan (ja luonnontieteiden) osaamisen tasoa 4., 7. ja 8. luokilla.

Organisation for Economic Co-operation and Development (OECD) arvioi laajojen ja tarkkaan suunniteltujen testien avulla 15 -vuotiaiden osaamisen tasoja

(Suomessa 9. luokat) tiedoissa ja taidoissa eri maissa. Programme for International Student Assessment (PISA) on luonteeltaan arkielämän taitojen tutkimusta, missä testit antavat tietoa opiskelijoille, vanhemmille, rehtoreille ja opettajille. Tutkimus kokoaa tietoja myös opiskelijoiden kotitaustasta, opiskelun lähestymistavoista ja opiskeluympäristöstä (PISA 2015). PISA -tutkimus kohdistui erityisesti matematiikan taitoihin vuosina 2003 ja 2012. Kokonaissijoitus matematiikassa vuonna 2012 on edelleen 10:n kärjessä. (Väljærvi & Kupari 2012.) Vuonna 2003 Suomi sijoittui sijalle 2., vuonna 2006 sijalle 2. ja vuonna 2009 sijalle 6. Suomalaislasten kiinnostus matematiikan opiskeluun (sisäinen motivaatio) on kansainvälisesti vertaillen vähäistä ulkoisen motivaation korostuessa. Tutkimusten mukaan myös säännönmukaisuuksien ja lainalaisuuksien tunnistaminen matemaattisessa tehtävänannossa näyttäytyy koululaisten heikkouksina. Oppijälähtöisen pedagogiikan etsiminen on mainittu PISA -tutkimustulosten johtopäätöksissä. (Kupari 2013.)

*Sisäisen motivaation puutteet ovat tunnistettavissa koululuokissa. Sisäiset motivaatioperusteet ovat muuttuneet 1980-luvulta lähtien hyvien arvosanojen tavoitteluksi niillä oppilailla, jotka eivät ole vielä luopuneet matematiikan opiskelusta. Vaikka muutos on tunnistettavissa koululuokissa, edelleen mitataan osaamista strukturoiduilla kokeilla ja harjoitteilla. Tutkimuspolulla oppijälähtöisyyttä kuvaa koulumatematiikan kiehtovaksi kokeminen. Oppijälähtöisyys tarkoittaa tällöin kontekstuaalisten ja yksilöllisten tekijöiden huomioimista.*

*Opettajakokemukseni vahvistaa saatuja seurantatuloksia ja asenteen muutoksia. Ympäröivän luonnon säännönmukaisuuksien tunnistaminen kuului työhön talonpoikaiskulttuurissa. Vaatimukset työtehtäviin ovat muuttuneet ja muuttumassa, koska länsimaissa on tapahtunut yhteiskunnan rakennemuutoksia. Suomessa elinkeinorakennemuutos oli Euroopan nopein, jolla tulkitseen olevan merkitystä koulumatematiikan kokemuksellisiin sisäisiin muutoksiin. Kulttuuriin (järjen rakennemuutos, luku 4.2.2), koulutuspolitiikkaan ja tieteeseen sisältyvä sivistyskäsitely on muuttunut yhteiskunnallisten rakennemuutosten mukana.*

Kasvava huoli matematiikan osaamisen kehityksestä kantautuu työnantajien, kouluammattilaisten, tutkijoiden, ammattikorkeakoulu- ja yliopisto-opettajien, poliitikkojen ja vanhempien keskusteluista. Oppilaat itse eivät juuri valita. Löytyy myös kasvava joukko toimittajia ja kansalaisvaikuttajia, jotka peräänkuuluttavat humanistisempia painotuksia. Yleisesti matematiikkaa on tulkittu huma-

nismin vastakohtana, mikä vastakohtaisuus ei edusta tämän tutkimuksen viitekehystä, jossa matematiikkaa tulkitaan humanismin, ihmisen näkökulmasta.

MAOL (Matemaattisten aineiden opettajien liitto ry) on järjestänyt matematiikan päättökokeita ja -kilpailuja halukkaille kouluille vuodesta 1993 lähtien osana arvioinnin ja seurannan ennakointia. Matemaattista yleissivistystä painottavat MAOL -vuosittaiset matematiikkakilpailutehtävät ovat PISA -tehtävien tyyppisiä. Koulujen osallistuminen päättökokeisiin tai matematiikkakilpailuihin on vapaaehtoista ja riippuvainen kunnallisista tai koulukohtaisista käytännöistä. Kilpailut motivoivat usein parhaita oppilaita. MAOL -päättökokeisiin osallistujat ovat valikoituneita, eivätkä useinkaan vastaa koko ikäluokan osaamista. Osaamistaitojen heikentyminen ilmenee myös MAOL -kilpailuista ja -päättökokeista (mm. Latva 2002; Korhonen 2015).

*Olen opettajana järjestänyt kilpailukokeen koko ikäluokalle, jos se on sopinut käytäntöihin kouluissa. Tällöin usein on löytynyt myös yllätyksiä. Olen kannustanut kaikkia osallistumaan ja luottamaan itseensä. Useat oppilaat ovat ottaneet tehtävät haasteena itselleen. Opetusryhmieni oppilaiden ratkaisuosuudet eivät korreloi arvosanojen kanssa kaikilla keskitasoisilla ja heikoilla opiskelijoilla, vaan tulokset ovat usein arvosanoja parempia. Tulosta voi arvioida piiloon jääneinä potentiaaleina.*

Käytössä olevat matematiikan oppimistulosten mittarit eivät tavoittele kokemuksen tasoa. Vaikka matematiikka yleisesti oppiaineena koetaan tärkeäksi (Clarkson 1995, 2013), kokemus sen harjoittamisesta ei vahvista sen arvoa. Matematiikan merkitys kokemukselle ei välity. Taustaselvitysten mukaan opiskeluasenteissa ja työskentelymotiiveissa on puutteita, millä saattaa olla yhteyksiä oppimistuloksiin ja myös opettajien asenteisiin.

Eurudice (2012) raportti tuo esiin oppimisen yksilöllistämiseen liittyviä ongelmia. Raportin mukaan yleisesti ongelmalähtöinen oppiminen, tutkiminen ja opitun kontekstualisointi parantavat saavutuksia ja vaikuttavat opiskeluasenteeseen. Henkilökohtaisempi ote opiskeluun näyttää tutkimusraportin mukaan parantavan oppimistuloksia (emt.). Suomessakin 2000-luvulla asiantuntijoiden lausunnot yksilöllisyyden lisäämisen puolesta ovat lisääntyneet (mm. Kahanpää 2014; Peura 2017).

Matematiikkaan liitettäviä yksilötajunnasta johtuvia elämäkokonaisuuden ja opiskeluprosessin laadullisia merkityksiä on raportoinut Suomessa Niilo Mäki

Instituutti (Haapasalo, Lehto, Malinen, Pehkonen, Keranto 2004) ja (Joutsenlah-tti, Silfverberg, Räsänen 2018). Matematiikan ymmärtäminen kulttuurilähtöisesti (myös etnomatematiikka) on jäänyt viime vuosikymmeninä yhä tieteellisemmin ymmärretyn matematiikan marginaaliin. Matematiikan oppimistutkimus on kiin-nostunut oppimisen lähivyöhykkeen merkityksestä, käänteisestä arvioinnista ja oppimisen itseohjautuvuuden luonteesta (Humaloja, Peura & Toivola 2015). Tällöin huomio kohdistuu oppimiseen, oppimisen kontekstiin, yksilön toimin-nallisiin funktioihin ja kulttuurisiin lähtökohtiin (oppimispolku, tutkimuspolku). Koulumatematiikan voimaannuttavat tai lamaannuttavat merkitykset ovat olleet harvoin tutkimuksen kohteena. Koulumatematiikan kiehtovaksi kokemisen kriit-tinen vaihe elinikäisyyden ja jatko-opintojen kannalta on peruskoulun yläkoulu-vaihe, missä matematiikan oppiminen jää Suomessa usein vajaaksi potentiaalei-hin nähden. Tällöin peruskouluopintoja täydennetään aikuiskoulutuksessa, opin-not keskeytyvät (noin 15 % ikäluokasta) tai oppimispolku ei jatku peruskoulun jälkeen (noin 10 % ikäluokasta) (Suomen tilastollinen vuosikirja 2012). Huoli koulupudokkaista kohdistuu etenkin koulumatematiikkaan.

Huoli koulumatematiikasta on lisääntyvä – potentiaalit eivät tule tunnistetuiksi ja matematiikkaa ei koeta kiinnostavaksi. Yleisesti käytetyt strukturoidut koe-tehtävätestit eivät anna tietoa yksilön havainnoista, ajatteluprosessista, ajattelu-prosessiin vaikuttavista tekijöistä tai kyvystä korjata virheitään, jotka henkilö-kohtaisella tasolla luovat mielen, merkityksen ja mielekkyyden vaikuttaen näin myös oppimistuloksiin.

Huoli koulumatematiikasta välittyy myös kansalaisten kohtaamistilanteissa kä-sityksinä matematiikasta. Matematiikka on oppiaine, josta jokaisella koulua käyneellä on kokemusta. Jokaisella on mielikuva matematiikasta, riippumatta tarkoittavatko he puheessaan omaa kokemustaan koulumatematiikasta, näke-mystään matematiikkatieteenalasta, kulttuurissa ja politiikassa ilmenevää mate-matiikan valtaa, tieteen naturalisoitumista, arkielämän numeroistumista tai yh-teiskunnan teknologisoitumista. Kohtaamisissa ihmisten kanssa aihealueesta syntyy helposti keskustelu ja oppiaineesta on muistikuvia kaikilla: Matematiikan opettaja on ollut hyvä tai huono, oppiaine on ollut kivaa tai tylsää, oppimi-sesta on ollut hyötyä tai ei hyötyä, arvosana on ollut hyvä tai huono, kertoja on osannut tai ei ole osannut matematiikkaa, opettaja on tulkinnut oikein tai väärin kertojan osaamista. Kansalaisten kuvauksissa koulumatematiikka ilmenee usein kaksijakoisuutena tai kaventuneena käsityksenä sen merkityksistä. Tällöin mate-matiikan merkitysten tunnistamiselle, matematiikkakasvatukselle on yhteiskun-nallinen tilaus.

## 2.2 Matematiikan kiehtovuus

Tutkimusongelman tunnistaminen sijoittuu kehyksiin huoli koulumatematiikasta ja yksilöllinen matematiikan *kiehtovaksi* kokeminen. Kiehtova viittaa usein matematiikan historialliseen jatkumoon, tässä luvussa elämismaailmalliseen koulumatematiikan yksilöllisen kiehtovuuden kokemuksen mahdollisuuteen. Matematiikka mahdollistaa luovaa yksilöllistä ennakoimattomuutta, jota koulumatematiikka voi tukea. Opetussuunnitelman perustalta koulumatematiikan yleiset oppimistavoitteet eivät välttämättä kohtaa matematiikan laaja-alaisia mahdollisuuksia yhteiskunnassa. Jos oppilaan kokemus matematiikan kiehtovuudesta ei toteudu mikrotasolla, huoli koulumatematiikan tulevaisuudesta kasvaa koulun ja kunnan mesotasolla sekä kansan ja kansainvälisyyden makrotasolla.

Matematiikka on ollut olemassa historiallisesti tuhansia tai kymmeniä tuhansia vuosia ihmisten elämismaailmoissa ainakin Kreikassa, Egyptissä, Kiinassa ja Intiassa. Kreikkalaisperäisyys on vahvistunut länsimaissa. (Aspelin 1963; Näreaho 2004.) Antiikissa ja keskiajalla matematiikka painottui Aristoteleen perintöön. Vuonna 1644 Descartes suunnitteli koulumatematiikkaa *Filosofian periaatteissaan* (Principia philosophiae). Koulumatematiikallaan Descartes halusi vaikuttaa yhteiskuntaan (Yrjönsuuri 2002, 7-17). Kouluissa opetettavalla koulumatematiikalla on yhteyksiä tieteelliseen matematiikkaan, joka on vaikuttanut yleisesti tieteiden ja yhteiskuntien kehitykseen ja muutoksiin (luvut 4, 5 ja 6).

Suomessa on ollut akatemian perustamisesta lähtien vuosina 1640-1926 kerrallaan yksi matematiikan professori (Elfving 1982, 63). Kansalaisia kouluttava koulumatematiikka kehittyi 1800-luvun lopulta alkaen osana kansallisen koulujärjestelmän kehitystä. Vuodesta 1921 lähtien oppivelvollisuuskouluissa toteutunut koulumatematiikka on opiskelua ja oppimista, jonka perustana on opetussuunnitelma, kasvatus- ja tieteenfilosofia. Yleiskäsite matematiikka tuli koulun oppiaineena käyttöön peruskoulu-uudistuksessa 1968 lähtien. Koulumatematiikka rakentui 1900-luvulla teoreettiseen suuntaan (luku 6.2.2).

Ennen peruskoulu-uudistusta kansalaiset opiskelivat kansa-, kierto-, jatko- ja kansalaiskouluissa käytäntöön sovellettavaa luvunlaskua, laskentoa ja mittausoppia sekä oppikoulussa tieteellisyyttä tavoitellen aritmetiikkaa, algebraa, geometriaa ja trigonometriaa. Aikaisemmin ennen kansanopetusta ja koulujärjestelmän kehittämistä matemaattiset kansalaistaidot opittiin tutkien työtä tekemällä,

kuten oppipoikina, itsenäisesti opiskellen, arjen havainnoista tai kauppa- ja tutkimusmatkoilla. 1600-luvulta lähtien pedagogiot (21), triviaali- ja katedraaliskoulut (7) ja kymnaasi (1) olivat toiminnassa.

Matematiikan kiehtovuus toteutui elämismaailmoissa 1700-1800 -luvuilla ilman koulumatematiikkaa. Suomessa Könnin talonpojat rakensivat matemaattista osaamista vaativia laitteita, kuten erilaisia kelloja (mm. 7 ajannäyttöviisaria), varkaudet estäviä lukkoja, laadukkaita kiesejä, lääkärin kojeita, koruja ja kattokruunuja, joiden rakentaminen edellytti materiaan ja matematiikkaan liittyvää tietoa. Könnit olivat uudistajia kekseliäiden tuotostensa perusteella (Björk 1841; Kivi 1870; Ojajärvi 1952; Alanen 1953; Laaksonen 1997; Ahoniemi 1998; Keltanen 2011; Uotila 2018). Kekseliäisyys on kiehtovaksi kokemista. Kekseliäisyys on yhteydessä elämismaailmassa tunnistettuihin uudistamistarpeisiin.

Kokemus matematiikasta tarkoittaa omaksutun tiedon ja tietämyksen mentaalista merkitystä. Tietämys ilmaisee tiedon kokonaisuutta (Niiniluoto 1991, 61), jolla on toiminnallinen funktio. Mentaalinen matemaattisen tiedon käsittely liittyy yksilölliseen ajattelemiseen, mikä on vastakkainen behavioristiselle, ohjelmoidulle tai koneen automaattiselle tiedon käsittelylle. Yksilö on kuin seula, joka tietoisesti tai tiedostamattaan erottelee, kompensoi, luokittelee, järjestää tai valikoi tietoa. Tällöin yksilö ei ole mekanismi vaan orgaaninen systeemi, joka toimii kulttuurisista lähtökohdistaan (Kaila 1967, 27).

Koulumatematiikan kiehtovaksi kokeminen on yksilöllisesti henkilökohtaista. Opettajaa kiehtova ei välttämättä kiehdo oppilasta tai tieteellisesti kiehtovaksi tunnustettu ei kiehdo oppilasta. Matematiikkaa voi pyrkiä esittämään kiehtovasti oppilaan aisteja ja ajattelua aktivoiden. Opettajalla on tällöin haaste tavoittaa erilaisten oppilaiden kokemusmaailmaa. Kiehtovaa on kaikki sellainen, minkä kukin itse löytää tai keksii. Idea kiehtovasta matematiikasta on opettajan pedagogista vapautta, jossa opettajan henkilökohtainen suhde koulumatematiikkaan paljastuu. Tällöin matematiikka koulumatematiikan taustalla on fokuksessa.

*Olen paljastanut opetustyössäni yksilöllisen suhteeni koulumatematiikkaan. Tällöin kasvatustavoitteenani on ollut oppilaan luovuuden, itseluottamuksen ja tarkkaavaisuuden tukeminen. Noin viisi tuhatta oppilasta, joiden opettajana olen toiminut eri oppilaitoksissa, ovat saaneet ratkaistavakseen kokoamiani ja kehittämiäni tehtäviä. Monisteessani ”matematiikkaa luovasti” olen säännönmukaisuuksia tutkivien tehtävien lisäksi pohtinut luovuuden olemusta: ”Luovuudessa yhdistyvät äly, herkkyyys, kyky analysoida ja ajatella abstraktisti, taito vapautua arkiajattelusta sekä kaikki persoonallisuuteen liittyvät ominaisuudet.*

*Luovuus ilmenee ongelmanratkaisemisena, ihmissuhteisiin liittyvän pulmatilanteen ratkaisemisena tai asioiden uudenaikaisina yhdistelminä. Ajattelu on inhimillinen etuoikeus, joka toimii juurena kaikelle kasvulle. 'Juuria vailla ja ilman itua, ei synny edes lutukan litua' (Viita 1950).” Luovuus tarvitsee kasvualustan, jossa kiehtovuus itää. Elämä, arki ja työ sisältävät koulumatematiikalle uusia kasvualustoja.*

Luovuus, mielikuvitus ja innovatiiviset ajattelurakenteet kuuluvat kiehtovaan koulumatematiikkaan. Uudet yhteiskuntamuutoksia ennakoivat avaukset, kuten suurien tietokantojen käsittely, keinoäly, koodaus, ohjelmointi, tietotekniset oppimissovellutukset, lohkokehitykset, arkimatematiikka, vuorovaikutustaidot tai tieteen metodinen ymmärrys tarvitsevat koulumatematiikan uudistamista, mitä tarkoitusta myös tiede- ja tietoisuuskasvatus tukevat.

*Matematiikan pitkän kehityshistorian aikana vakiintuneet rakenteelliset ja formaaliset säännöt ja sopimukset saattavat osittain rajoittaa matematiikan vapautta, kiehtovuutta ja käytäntöön soveltamista. Oppilas saattaa kokea formaaliset vaatimukset keinotekoisina luonnolliseen järkeensä suhteutettuina.*

Miten matematiikka kiehtoo? Kun matematiikka kiinnostaa, hurmaa tai kiehtoo, kokemus sisältää tunteita, mielellisiä liikutuksia, älyllisiä oivalluksia ja uskollisuutta omalle persoonallisuudelle. Matematiikan kiehtovuus on kokemus, johon ei aina löydy sanoja – se vain on. Matematiikan kiehtovuus on mielen työtä. Tutkimuspolulla opiskelijan johdattaminen kiehtovuuteen on enemmän elinikäisen kasvun kuin matematiikan kysymys – ihmislähtöinen kysymys. Tutkimuspolun aikajanalla (1950- ) yhteiskunta, koulujärjestelmä ja koulumatematiikka ovat muuttuneet ja tutkimukseni lähtökohdista etääntyneet ihmisen kokemusmaailmasta.

Yksilön näkökulmasta matematiikan kiehtovuudella ei ole yleisiä lakeja. Käsitettä 'kiehtova' ovat käyttäneet oppikirjantekijät, populaarit matemaatikot ja monet matematiikan kiehtovuudesta voimaantuneet ihmiset. Matematiikan kiehtovuutta voi ulkopuolisesti havainnollistaa, mutta sen keksiminen on sisäisesti koettava. Tällöin olennaista on, että matematiikan kiehtovuus liittyy yksilölliseen kokemukseen, jonka oikeellisuutta ulkopuolinen voi arvioida, mutta ei arvostella. Mentaalinen matematiikka on itseään korjaava kokemus, joka on osa elämän kokonaisuutta. Mentaalinen matematiikka ei ole mittateoreettinen omi-

naisuus, jolloin sitä ei voi mitata eikä arvostella, vaan arvioida, suhteuttaa ja ymmärtää. Tällöin matematiikka on olemassa mielensisäisesti, jota voi kokea ja itsearvioida. Matematiikan kiehtovuuden kokemuksesta minulla on eniten tietoa suhteessa itseeni, mistä syystä rakennan tutkimuspolkua omalähtöisesti erilaisia vaihtoehtoisia suuntautumisia tunnistellen.

Henkilökohtainen suhde matematiikkaan tarkoittaa oppijan kokemuksellisia merkityksiä. Matematiikkaa tunnistellaan tunteilla, mikä ohjaa sekä orientaatiota että prosessia. Kokemusten kautta matematiikka ei näyttäydy pelkästään järjen oppiaineena, kuten matematiikka usein tulkitaan. Koululuokissa kerrotut kokemukset ovat pääsääntöisesti tunneperustaisia – matematiikka tuntuu joltakin. Jokaisella on henkilökohtaista ympäristölähtöistä kokemusta matematiikasta. Opiskeluprosessi käynnistyy oppilaan oman havainnon, tiedon ja kokemuksen tunnistamisesta. Oppilaan autenttisuus saattaa hukkaa yleisiä lainalaisuuksia ymmärtämään pyrkivässä matematiikan tieteenalälähtöisessä opiskelussa.

*Koulumatematiikan kietovuuden pohdinta toteutui Ilmajoen kansalaisopistossa syksyllä 1988 ja myöhemmin kansanopistossa Hauskaa matematiikkaa – kursilla, missä tavoitteenani oli löytää matematiikan synnyn saloja. Keräsin tuolloin matematiikan kulttuurisiin yhteyksiin liittyviä mielestäni kivoja tehtäviä ja pohdinnan aiheita. Aiheinani olivat itämaisen kulttuurin taikaneliöt, niiden yhteydet kiinalaiseen mystiikkaan, Albrecht Dürerin taiteeseen ja taikaneliöiden ongelmasovellutuksiin (mm. sudokut); Pythagoralaisten löydöt ja salaseurat; Diofantoksen yhtälöt; algebran ja geometrian synty; todennäköisyyslaskennan synty ruletin ja muiden pelien kehittyessä; loogiset probleemat ja totuustaulut sekä valikoima ongelmatehtäviä julkaisusta Antero Vipunen. (Karilas 1982) Opetuskeskustelussa keskeisessä roolissa olivat eri aikakaudet ja matemaatikkojen persoonat (Bell 1963). Puhuin matematiikan laajoista sovellutusmahdollisuuksista, joissa vain mielikuvitus on rajana.*

Matematiikka on yksilöllisen luovuuden tuote. Matemaattiset teoriat kantavat usein keksijänsä nimeä noustuaan yleisesti tiedeyhteisön hyväksymiksi. Monet keksinnöt ovat saattaneet jäädä syrjään keskeneräisyydellään tai yhteisymmärryksen puutteillaan. Matematiikka on ollut pitkään keksijän pään sisäistä toimintaa ennen sen julkista käsittelyä. Matemaattinen keksintö on pitkä ja intensiivinen prosessi ennen merkitysmaailmojen kohtaamista. Intersubjektiivinen tila voi jäädä tavoittamatta. On mahdollista, että merkitysmaailmat eivät kohtaa ja yksilölliset löydökset jäävät tunnistamatta myös kouluissa. Vaikka koulu ei ole tutki-

jayhteisö, erilaiset esiyymmärrykseen liittyvät tekijät voivat vääristää opiskelijan ymmärrystä itsestään matematiikan oppijana jo varhais-, esi-, alku- ja perusopiskeluvaiheessa.

## 2.3 Miten koulumatematiikka ilmenee esiyymmärryksessäni

Koulumatematiikan nykytila herättää kysymään, miten tilanteeseen on jouduttu. Koetut, tavoitellut ja objektiivisesti olevat merkitykset vaikuttavat siihen, miten (koulu)matematiikka ilmenee elämismaailmassa. Huoli koulumatematiikan osaamisesta kohdistuu yksilölliseen sisäiseen kokemukseen (kiehtovuus/kiehtomattomuus), joka on heijastusta jostakin ympärillä olevasta.

Oppilailla on erilaisia ideoita ja tiedonintressejä kasvamisen polullaan, joista he eivät ole muutostilanteissa välttämättä aina tietoisia. Opettajan tehtävä on tukea tietoisuuden kehitystä matematiikasta ja sen merkityksistä yhteiskunnassa. Kokemus koulumatematiikan kiehtovuudesta ja tietoisemmaksi kasvaminen on esiyymmärrykseni mukaan yhteydessä yksilön tiedonintresseihin ja henkisen kasvun tavoitteisiin. Tällöin ote koulumatematiikkaan vahvistuu merkitykselliseksi kokemisen seurauksena.

*Sisäinen kokemus on yksilöllinen, mitä yleistämään pyrkivät tutkimusmenetelmät eivät tavoita. Sisäinen kokemus tutkimuksen kohteena edellyttää koulumatematiikan kokemuksellista ymmärtämistä omassa sisäisyydessä ja siihen suuntautunutta tiedonintressiä. Tutkimuspolulla matkaoppaanani on toiminut Eino Kailan holistinen persoonallisuusfilosofia ja syvähenkisyys vuodesta 1970 lähtien, mistä lähtien olen tutkinut myös omaa sisäisyyttäni suhteessa matematiikkaan.*

Kysymyspronomini 'miten' tarkoittaa tapaa, muotoa tai keinoa (NSSK 1980, 495-496). Miten uutta tietoa saa käyttöönsä ja käsiinsä, liittyy matematiikkaan käsitehistoriallisesti. Etymologisesti käsite matematiikka (Μαθηματικά, mathēmatik) on johdettu kreikan käsitteestä μάθημα, mathēma, joka tarkoittaa tiedettä, tietoa tai oppimista. Kreikan käsite μαθηματικός, mathematik merkitsee oppimishaluista. Käsite mathesis tarkoittaa opinalaa. (Luoma-aho 2010). Englannin käsite 'mathematic' tarkoittaa lukujen ja abstraktien rakenteiden tutkimista kaikkein yleisimmässä mielessä (MLSS 2018). Etymologisesti matematiikka tarkoittaa

taa näin oppimishalua ja taitavuutta tiedon käsittelyssä. Matematiikka merkitsee yleisesti tiedettä, jolla on historiassaan yhteys filosofiaan. Etymologiansa perusteella matemaattisen tiedon perustana on yksilön sisäinen oppimiskokemus.

Käsite *miten* voi viitata tiedon hankinnan formaalisiin perusteisiin, kieleen, tiedon käsittelyn heuristiikkoihin, oppimisteorioihin, metakognitiivisen tiedon käsittelyyn sekä kognitiivisiin strategioihin ja tyyliin, joista on runsaasti tutkimustietoa koskien matemaattista tiedonmuodostusta yleisesti (mm. Haapasalo 2000). Elämismaailmallisessa viitekehyksessäni yleiset teoriat sisältyvät tutkimuskohteeseen kokonaisuutena. Yksilöllinen kokemus poikkeaa yleisistä malleista (keskiarvo). Yksilöllisten sisäisten merkitysten tunnistaminen on itsetiedostamista, mikä ei hyödy toisiin vertaamisesta (Kahanpää 2014, 36-40) tai yleisiin oppimisteorioihin vertaamisesta.

Ongelmalla, *miten*, on yhteys fenomenologiaan (Hirsjärvi 1985) ja sivistystahtona ymmärrettyä humanismiin. Tutkimuspolulla matematiikka on läsnä jokaisessa hetkessä minussa ja ulkoisessa maailmassa aktuaalisesti, potentiaalisesti ja prosessuaalisesti. Matematiikka elää ajassa ja arjessa, tietoisesti ja tiedostamatta. Tällöin taustalla vaikuttaa humanismin arvofilosofia tavoitteenaan henkinen kasvu, itseohjautuva ja itsenäinen kokonaispersoonallisuuden kehitys ja kehityspotentiaalin täyttyminen (ks. Alanen 1981; Harva 1983; von Wright 1981; Elias & Merriam 1980; Heikkinen & Kallio 2014). *Miten* kysymykselläni on yhteys myös metodiin (luku 3.4), joka juurtuu Georg Wilhelm Friedrich Hegelin (1770-1831) hengen fenomenologiaan ja Eino Kailan syvähenkisyteen. Hegelin absoluuttinen henki ja Kailan syvähenkisyys ovat tapoja ymmärtää kehityksen korkein aste.

Liitän *miten*-ongelman humanistisen oppimisteorian yksilölliseen henkiseen kasvuun (Elias & Merriam 1980; von Wright 1981). Yleisesti oppimisteoriat, kuten behavioristiset, kognitiiviset, konstruktivistiset, kontekstuaaliset, konatiiviset tai eksperimentaaliset oppimisteoriat ovat pyrkineet löytämään oppimista-pahtuman yleisiä sääntöjä. Yksilön kontakti ja suuntautuminen tietoon voi jäädä tällöin pinnalliseksi tai ulkoistetuksi. Itsetiedostaminen yksilön ominaisuutena on humanistisen oppimiskäsityksen perustana. Syventämismerkityksessä kohdistan tarkastelun elämänkentällä ilmenevään ja usein näkymättömään matematiikkaan. Tällöin kysymys koskee matematiikan 'näyttäytymistä' pitkäjänteislinjoina – säikeinä – elinikäisellä aikajanelalla, sisäisessä ja ulkoisessa tarkkailussa. Tällöin elämismaailmallisuus tarkoittaa yksilön ja yhteisön suuntautuneisuutta, jonka tuloksena kulttuuri, politiikka ja tiede syntyvät ja kehittyvät.

Von Wrightin (1976; 1981) mukaan humanismi on ajassa muuttuva (dynaaminen) ja intellektuaalinen asenne, joka pohjautuu todellisuuden kriittiseen ja rationaaliseen tarkkailuun. Humanistinen asenne mahdollistaa tietoisien harkinnan suhteessa itseen, luontoon ja yliluonnolliseen. 1600-luvun alussa elettiin ihmisen, luonnon ja yliluonnollisen kolmiyhteisössä. (von Wright 1976.) Uuden ajan alussa vakiintuneen käsityksen mukaan erityinen metafysiikka käsittelee luontoa, sielua ja Jumalaa (Juti 2001, 14). Tutkimuspolulla humanismi matematiikkaan yhdistettynä tarkoittaa elämismaailmojen merkitysten huomioon ottamista. Tällöin ihmisen mentaaliseen kokemukseen liittyvän metafysiikan tunnistaminen kuuluu elämismaailmaan.

Humanismia painottava yksilöllinen aktiivisuus on oppimispolun rakentamisen perustana opetussuunnitelman perusteissa (2014). Aktiivisuus tarkoittaa suuntautuneisuutta tietämisen kohteisiin. Humanismin lähtökohdista fenomenologisesti tulkittuna ihmisen ja matematiikan suhde sisältää intentioita, joita opetussuunnitelmien perusteissa ei mainita. Käsite *intentio* (idea, aikomus, tarkoitus, pyrkimys) vakiintui filosofien keskusteluun vasta 1950-luvulla (Niiniluoto 1989, 3). Brentanon (1874) mukaan mentaalisia ja fysikaalisia ilmiöitä erottaa toisistaan intentionaalisuus. Tällöin jokainen mentaalinen ilmiö sisältää itsessään jotakin kohteena (Niiniluoto 1989, 4). Keskiajan latinassa *intentio* tarkoitti mielessä olevaa ideaa tai kuvaa, jolloin *intentio* ei ole aikomuksellisuutta, vaan kuvan mielessä olemista (Sajama & Vihjanen 1989, 76). Keskiajan jälkeen *intentio* hävisi kielenkäytöstä ja mielessä olevia kuvia alettiin kutsua ideoiksi (emt.). Koulumatematiikkaan kohdistuvana *intentio* viittaa koettuun merkitykseen. Hannula & Holm (2018, 135) tutkimuksiinsa perustuen muistuttavat matematiikkakuvan (uskomukset, tunteet, motivaatio, arvot) merkittävää vaikutusta oppilaan opinto- ja uravalintoihin.

Rauhalan (1989, 128) Husserl -analyysia soveltaen *intentio* on:

- 1) transsendentti *intentio* (intuitio, alaluvut 4.3.1 ja 4.3.2),
- 2) merkityksen täyttymistä toteuttava funktio (alaluvut 4.2.3 ja 5.3.1),
- 3) merkityssisällön synty eli tapa *intentoida* ulkoista objektia (alaluvut 6.3.1, 6.3.2 ja 7.3),
- 4) todellisuuden olion mentaalinen merkitys eli matematiikkailmiö (alaluku 7.1) ja/tai
- 5) intersubjektiiivinen merkityksenanto (alaluku 7.2).

Rauhalan analyysissä ilmenee Husserlin *intention* monitulkintaisuus. Tulkitsen *intention* yksilön taipumuksina, joilla on tilanteeseen, aikaan ja paikkaan sitou-

tunut perusta. Myös yksilön tiedonintressit voi yhdistää intention, joka vaikuttaa eri elämänvaiheissa yksilöllisesti. Yhdistän yksilöllisen intention motivaatioperustaan (tiedonintressit) kulttuurin kentän intuition, politiikan kentän funktion, tieteen kentän matematiikan keksimisen tai löytämisen. Yleisesti tutkimuksi ratkaisujen yhteenveto, matematiikkailmiö, yhdistää koulumatematiikkaan liittyvän monimuotoisuuden. Tutkimuspolulla en keskity pohtimaan, mitä Husserl tarkoitti transsendentilla intentiolla, vaan kutsun syvyysulottuvuutta intuitioksi, mikä on lähellä Husserlin osittain tiedostamatonta mentaalista mieltä.

Petterssonin (2019, 242) lähtökohta intuition analyysiin on immediacy (välittömyys), mikä on myös mukana käyttämässäni Bahmin (1995) analyysissä. Tutkimuspolulla sisäinen tarkkailu tarkoittaa intuitiota (alaluvut 4.3.1 ja 4.3.2) ja ulkoinen tarkkailu matematiikan vaikutuksia (alaluvut 4.3.3 ja 4.3.4) kulttuurin kentässä. Yksilön intuition liittyvä merkitysten täyttymistä kuvaava funktio voi välittyä eri tavoin elämänympäristöön. Habermasin (1968) yhteiskunnalliset tiedonintressit (saksan Erkenntnisinteressen) ja niihin liittämäni sisäiset laajennukset avaavat intentionaalisen suuntautumisen mahdollisia merkityksiä.

Koulumatematiikkaan suuntautumista ohjaavat erilaiset ihmisten elämään liittyvät intressit, jotka jäsentyvät eri tavoin, koska matematiikka liittyy erilaisin tarkoituksin yhteiskuntaan ja yksilöiden elämään. Habermas (1968) kutsuu tiedonhankintaa koskevia vaatimuksia eli orientaatio- ja motivaatioperustaa tiedonintresseiksi (Habermas 1968; Kangas 1986, 10-14). Pietarinen (2002a, 63; 2012, 6) kutsuu tiedonintressejä kognitiivisiksi strategioiksi, jotka ohjaavat tiedonmuodostusta. Tiedonintressit ilmentävät suuntautumista koulumatematiikkaan yksilön elämismaailmassaan omaksumallaan tavalla.

Habermasin mukaan erityiset näkökulmat ohjaavat systemaattista tutkimusta ja pohjautuvat aina sosiokulttuurisen elämänmuodon uusintamiseen, sekä elämän tyydyttämiseen: työhön, vuorovaikutukseen ja valtaan (Kangas 1989, 11). Habermas kutsuu *tekniseksi intressiksi* yhteisön materiaalista uusintamista koskevaa todellisuuden hahmotustapaa. Tästä näkökulmasta todellisuus rakentuu tahtaamisesta ja niiden välisistä kausaalisuhteista, joiden tunteminen tekee mahdolliseksi yleisiä lainalaisuuksia koskevan (nomologisen) tiedon tuottamisen, luonnon manipuloinnin, kontrollin ja ennustamisen. (Kangas 1989, 11.) Tekninen intressi tarvitsee erityisesti matematiikkaa työkalukseen.

Sosiaalinen yhteisö on myös tradition ja kulttuurin rakentama ja integroima kokonaisuus, jonka jatkuvuuden turvaaminen edellyttää uusien sukupolvien sosiaalistamista yhteisön elämänmuotoon samoin kuin riittävän laajaa yhteisymmärrystä tulkinnoista, joita kulttuuri maailmasta tarjoaa. Habermas kutsuu *prak-*

*tiseksi intressiksi* yhteisön uusintamista vuorovaikutuksen (interaktion) ja kommunikatiivisen toiminnan välityksellä. Praktisen intessin kautta maailma konstituoituu havaintojen, henkilöiden, ilmausten, tekojen, muotojen, symbolien tai rakenteiden todellisuutena. Se on usein historiallis-hermeneuttisten tieteiden ytimenä, jotka ovat orientoituneet ihmisyyteen perinteen jatkamiseen, yhteisymmärryksen turvaamiseen ja laajentamiseen yksilöiden ja yhteisöjen välillä. (Kangas 1986, 11-12.) Pietarinen (2012, 6) kuvaa praktista intressiä keskinäisen ymmärtämisen ja itseymmärryksen mahdollisuuksien turvaajana ja edistäjänä. Praktinen intressi liittyy matematiikan talonpoikaisjärkeen (alaluku 4.2.2), kansakoulupedagogiikkaan (alaluku 5.2.2) ja toiminnalliseen funktioon (5.3.1).

Habermas erottaa edellisistä vielä *emansipatorisen* tiedonintessin, joka liittyy yhteiskunnalliseen valtaan. Esineellistyneinä yhteiskunnalliset suhteet vääristävät systemaattisesti kommunikaatiota, estävät yhteiskunnallisilta subjekteilta tarpeittensa autenttisen artikuloinnin ja estävät näkemästä valtasuhteiden konventionaalista luonnetta niin, että ne näyttäytyvät luonnon välttämättömyyksiä. (Kangas 1989, 12.) Emansipatorinen intressi tarkoittaa tarvetta tai pyrkimystä päästä eroon kahlitsevista voimista. Se ohjaa kriittistä ja vapautumista edistävää tietoa. Sosiaaliset valtarakenteet muodostuvat usein yhteisön jäsenten omaehtoisesta toiminnasta esteiksi, esimerkiksi tutkimustoiminta törmää niihin usein, ja tiedostamattomat voimat saattavat hallita pakonomaisella tavalla yhteisöjen ja yksilöiden elämää. (Pietarinen 2012, 6.) Emansipatorinen tiedonintressi matematiikkaan liittyvänä tarkoittaa pyrkimystä vapautua perinteen ja taipumusten mahdollisista kahlitsevista voimista yksilötasolla tai laajemmin tieteellisen matematiikan hierarkiasta vapautumista.

Täydennän Habermasin teoriaa yhteiskuntaan suuntautuvista tiedonintresseistä (tekninen, praktinen ja emansipatorinen) seuraavasti: *veristinen* (Niiniluoto), *metafyysinen* (Pietarinen) ja *persoonallinen* (Kumpula) tiedonintressi. Veristisen (tosiasiat) intessin mukaan tietämyksen käyttöä kuvaa selittäminen ja tavoitetta totuuden etsintä, millaista teorian muodostusta edustavat etenkin matematiikka ja filosofia (Järvinen & Järvinen 2000, 202-203). Koulumatematiikan käsitteellinen ja formaalinen tiedonhankinnan korostus ilmentää verististä intressiä. Metafyysinen intressi tarkoittaa tieteen keskeistä tehtävää koskien maailmankuvan rakentamista, ilmiöiden selittämistä ja elämäntutkimuksen muodostamista. (Pietarinen 2012, 6.) Veristinen ja metafyysinen intressi motivoivat tiedekasvatusta suhteessa koulumatematiikkaan tutkimuspolulla. Tällöin totuuden ja todellisuuden tutkimuksen perustana on tieteellinen metodi ja tiede.

Lisään mainittuihin tiedonintresseihin vielä persoonallisen intressin, joka tukee etenkin luovuuden voimaannuttamista, yksilöllistä henkistä kasvua, tiedostamista, identiteettikasvatusta, aktiivisuutta maailmaan vaikuttamisessa, omaperäisten ideoiden ja merkitysten keksimistä sekä ongelmanratkaisun tahtotilaa. Intressi tukee autenttisten idea-aihioiden ja tiedon uudenlaisten monitieteisten yhdistelmien, kuten soveltamisen, sisäisen synteessin, ulkoisen integroinnin ja tietämysten yhtenäisyyden rakentamista. Yksilön persoonallinen intressi yhdistää tiedonsäikeitä ollen näin luonteeltaan holistinen olennaista selvittävä ja rakentava. Uudet teknologiset ratkaisut kouluissa edellyttävät ja mahdollistavat persoonallisten intressien tukemisen. Innovaatioiden luomisen prosessi ja uusien toimintamallien käyttöönotto edellyttävät persoonallisia tiedonintressejä. Persoonallinen tiedonintressi tukee tietoisuuskasvatusta ja on näin keskeinen suhteessa yksilöllistymiseen ja matematiikkaan.

TAULUKKO 1. Matematiikkaan suuntautuminen tiedonintresseinä.

<b>Ulkoiset tiedonintressit</b>	<b>Sisäiset tiedonintressit</b>
Tekninen (tieto, työ)	Veristinen (totuus, metodi)
Praktinen (tulkinta, toiminta)	Metafyysinen (tiede, todellisuus)
Emansipatorinen (valta, vapaus)	Persoonallinen (minuus, luovuus)

Metafysiikka ja siihen liittyvä kokemuksellisuus (synteettinen) ei ole enää viime vuosisadan lopulla kuulunut tieteelliseen matematiikkaan, jolloin koulumatematiikka on kehittynyt teoreettiseen ja käsiteformalismia suosivaan suuntaan. Tällöin tiedonintressejä, etenkin persoonallista tiedonintressiä, ei ole yhdistetty matemaattisen tiedon sisältöön tai alaan. Uuden ajan matemaatikon Descartesin (1596-1650) tavoitteena on matemaattinen yleistiede, jolloin hänen tiedonintressinsä luokitukseni perusteella on ainakin persoonallinen ja veristinen (alaluku 6.2.1).

Habermas liitti tiedonintressit eri tieteenalojen tiedollisiin vaatimuksiin. Matemaattinen tieto elämismailmassa on yhteydessä arvoihin, siten politiikkaan. Tutkimuspolun näkökulma tukee oppimisen yksilöllistämistä erilaisista lähtökohdista ja erilaisista tavoitteista lähtien. Yhteiskunnallinen vaikuttavuus jää oppilaille tai opettajille. Matematiikkaa tarvitaan elämismailmoissa ja kaikilla tieteenaloilla välineenä (tekninen, praktinen ja emansipatorinen) ja periaatteena

eli arvokkaana itsenään (veristinen, metafyyssinen, persoonallinen). Esiymmärrykseni tiedonintressit suuntautumisena matematiikkaan koskevat matemaattisen tiedon alueita, joille elämässä ilmenee merkityksiä. Suuntautuneisuus jäsenyytensä elinikäisesti tietoisuuden syventyessä.

Koulumatematiikkaa koskevan tutkimusongelmani tunnistaminen alkoi 1960-luvulla keskikoulussa. Muistan ihmetelleeni ääneen, että perustelu puuttuu sille, miksi binomikaavat ovat tärkeitä elämässä. Samaa kysymystä oppilaat kyselevät edelleen. Kun koulukirjat ja opettajat eivät antaneet perusteluita oppikirjan sisällöllisille ratkaisuille, etsin vastauksia tietosanakirjoista. Tietosanakirjatkään eivät antaneet vastauksia ongelmalleni, mutta toimivat tutkimusongelmani ennakoijäsentäjänä. Katsaus tietosanakirjoihin toimii johdatuksena pohdinnoilleni. Miten hakusana matematiikka on kuvattu tietosanakirjoissa? Tutkimusongelman tunnistamista tukevat kuvauksiin yhdistämäni tiedonintressit ja niiden puutteet.

## 2.4 Matematiikan tiedonintressit hakuteoksissa 1963-2018

Tavallisen kansalaisen mielikuva matematiikasta, toistuvasti käymieni keskustelujen perusteella, muodostuu koulussa saadun kokemuksen perusteella. Arjen tilanteissa hakuteokset toimivat subjektiivisten käsitysten ja koulussa opetetun laajentajina silloin, kun lähipiirissä ei ole matematiikan asiantuntijoita. Miten matematiikkaa yleisesti on esitelty tavalliselle kansalle, välittyy yleisesti hakuteoksista, joita viime vuosisadalla ilmestyi runsaasti. Hakuteoksissa ei esitellä koulumatematiikkaa, vaan tieteellistä matematiikkaa, josta oletin koulumatematiikan rakentuvan. Hakuteosten lisäksi kansalaisen käsityksiin matematiikasta vaikuttavat koulumatematiikan arviointi, arvostelu ja kehittäminen kouluissa, mitkä ilmentävät poliittisia ja tieteellisiä arvostuksia – siis tiedonintressejä. Tutkimusongelman tunnistamiseksi ja orientaatioksi haravoin matematiikkaa hakuteosten yleisten luonnehdintojen kautta.

*Hakuteoksia tutkimalla olen opinpolkuni alkuvaiheessa (1965) yrittänyt selvittää, mitä heräävä – sisäisistä keksinnöistä kumpuava – kiinnostukseni kohde, matematiikka, tarkoittaa laajemmin ymmärrettynä kuin koulussa. Olen halunnut yhä uudelleen tarkistaa, kuvataanko kirjoissa matematiikkaa siten kuin olen itse matematiikkani kokenut.*

Uuden tietosanakirjan mukaan (1963) matematiikka on lähtöisin käytännön tarpeita palvelevasta laskutaidosta (kreikan *mathematike tekhne*) sekä rakennustöissä ja maanmittauksessa (kreikan *geometron*) tarvittavista mittauksista. Uuden ajan alusta lähtien matematiikan päähaaroiksi on katsottu lukuja ja niiden järjestelmiä käsittelevä analyysi sekä kuvioita käsittelevä geometria. Näiden järjestelmien analogioita on tunnettu tieteellisen matematiikan alusta alkaen. Analyttinen geometria on niiden johdonmukainen yhdistys. (emt.) Matematiikan tulkinnassa korostuu tässä käytännön elämä ja siitä kumpuavat tarpeet. Tiedonintressi on lähinnä praktinen ja tekninen.

Tiedot portaat (1970) kuvaa matematiikkaa tietoteoreettisesta näkökulmasta. Matematiikka on eksakti tiede. Kun on sovittu eräistä peruskäsitteistä ja määritelmistä, voidaan niistä ja vain niistä logiikan lakien avulla ja inhimillisen ajattelutyön suomissa rajoissa johtaa tutkittavana oleva matemaattinen teoria. Mitkä logiikan lait ja mitkä käsitteet hyväksytään käsiteltävän teorian pohjaksi, riippuu olennaisesti paitsi itse teorian laatijasta myös siitä, mihin pyritään. (emt.) Subjektiivinen perusta ja tavoite on mainittu tekstissä. Intressi on lähinnä veristinen.

Spektrum (1978) kuvaa matematiikkaa historiallisen kehityksen tuloksena syntyneenä tieteenalana. Alun alkaen matematiikka käsittelee toisaalta lukuja ja niillä suoritettavia laskutoimituksia, ja toisaalta pinta-alojen ja kappaleiden mittoja ja keskinäisiä suhteita. Nykyisin matematiikka muodostaa laajan teoreettisen järjestelmän, jolle on ominaista deduktiivisten lauseiden johtaminen toisista lauseista sekä täten saatujen lauseiden yhdistelmien rakenneominaisuuksien tutkiminen. Käsitys siitä, minkä tyyppisiä lauseiden ja implikaatioiden järjestelmiä pidetään nimenomaisesti matematiikan alaan kuuluvina, saadaan ainoastaan matematiikan keskeisiä struktuureja tutkimalla. Matematiikalle on lisäksi ominaista, että sitä voidaan käyttää ulkomaailman rakenteiden ymmärtämisessä sekä teknisten probleemien yhteydessä esiintyvien numeeristen ongelmien ratkaisemisessa. (emt.) Laaja teeman käsittely kuvaa matematiikan kehitystä, missä matematiikka liittyy yhteiskunnalliseen elämään ja sen arvostuksiin. Kuvauksesta ilmenee teorian ja käytännön yhdistämisen intressi, jota voi luonnehtia tekniseksi. Kuvaus sisältää myös matematiikan teoreettiseen rakenteeseen liittyvää verististä intressiä.

Nyky-suomen sanakirjan (1980) mukaan matematiikka on oppi suureista ja niiden keskinäisistä suhteista. Sanakirja kuvaa matematiikan lyhyesti, joskin käsite suure on nykyisin käytössä pääosin fysiikassa. Ranskalainen matemaatikko Méray (1853-1911) käyttää kuitenkin käsitettä suure rationaalilukujen itsessään

suppenevissa jonoissa (Suomela 1991, 94) ja saksalainen matemaatikko Grassmann (1815-19019) muoto-oppinsa perustana (Vilkko 2003, 86). Suure-käsitettä käyttivät myös uuden ajan matemaatikot ja suomalaiset matemaatikot (mm. Bonsdorff 1898), joiden matemaattisia löydöksiä fysiikka tuolloin hyödynsi. Suure-käsite ilmentää matematiikan soveltamista fysiikkaan, missä matematiikkatieteen edistymisen vaikutus on ollut merkittävin. Hakusanan tulkinnassa on tekninen intressi.

Junior-tietosanakirja (1988) kirjoittaa kansantajuisesti: ”Matematiikkaa voi oikeastaan pitää kielenä, jolla ilmaistaan lukuja koskevia asioita. Se on hyvin johdonmukainen kieli. Suuret ovat sen sanoja. Kaikki, mitä voidaan mitata ja punnita, voidaan muuttaa luvuiksi ja suureiksi. Matematiikka onkin tieteenä saanut alkunsa käytännön laskuista ja mittauksista. Fysiikan tuleminen tärkeämmäksi tieteenä on vienyt matematiikankin kehittämiseen. Matematiikkaa käytetään apuna myös muissa tieteissä.” Tietosanakirjan kuvasarja esittelee eri kansojen lukujärjestelmiä. Muinaiset babylonialaiset käyttivät laskujensa peruslukuna kuuttakymmentä (60). Me käytämme lukujärjestelmän perustana kymmentä. Muinaisilla roomalaisilla peruslukuna oli myös kymmenen, mutta he eivät käyttäneet nollaa. Intialaiset keksivät nollan. Useimmissa tietokoneissa käytetään binääria lukujärjestelmää (emt.). Lähinnä alakoululaisille tarkoitettu teksti on elämänläheinen ja korostaa loogiseksi kehittyvää kieltä. Intressi on tekninen, mutta tekstistä on tunnistettavissa myös praktinen ja metafyyminen intressi.

Matematiikan käsikirjan (1993, 251) mukaan vakiintunut käsitys matematiikasta on oppi luvuista, avaruudesta ja niistä monista näiden käsitteiden yleistyksistä, jotka ihmisäly on luonut. Modernin matematiikan pohjalla on käsite rakenne: matematiikka voidaan ymmärtää opiksi joukkojen rakenteista (emt.). Kuvauksessa on mukana ihmisen älyllinen luovuus ja matematiikan rakenne. Myöhemmässä tekstissä esitellään deduktiivinen päättelymetodi ja matematiikan osalueet. Tiedonintressi on siis tämän mukaan veristinen ja myös persoonallinen.

Ison tietosanakirjan (1996) mukaan matematiikka on tiede, joka vanhalla ajalla lähti kehittymään käytännön tarpeita palvelevasta laskentataidosta sekä rakentamisessa ja maan mittauksessa tarvittavista mittauksista. Nykyään on päädytty siihen toteamukseen, että matematiikka voi periaatteessa käsitellä mitä oliota ja olioiden järjestelmiä tahansa. (emt.) Tässä kuvauksessa matematiikalla on tekninen, praktinen, emansipatorinen ja metafyyminen intressi. Matematiikan mahdollisuutta maailman ja todellisuuden rakentamisessa voi nimittää metafyyksiseksi

intressiksi (Pietarinen 2012) tai laajemmin emansipatoriseksi intressiksi (Habermas).

Factum (2004) määrittelee matematiikan tieteenalaksi, jonka puitteissa tutkitaan järjestelmällisesti lukujen, kuvioiden ja kappaleiden sekä niistä muodostettujen yleistysten välisiä yhteyksiä symbolien avulla. Matematiikan merkitys perustuu siihen, että siinä saatuja tuloksia voidaan soveltaa mitä erilaisimmissa käytännöllisissä ja teoreettisissa tilanteissa. Toisaalta matematiikkaa soveltavat tieteet, kuten fysiikka tai taloustiede antavat jatkuvasti virikkeitä eri matematiikan alojen kehittämiseksi. (emt.) Määritelmässä ei varsinaisesti ole mitään uutta edellisiin määritelmiin nähden. Tekninen intressi on vallitseva, mutta myös emansipatorinen ja metafyyminen intressi välittyvät.

Suomenkielisen Wikipedian (2015) mukaan matematiikka on deduktiiviseen päättelyyn perustuva looginen järjestelmä. Wikipedian matematiikkaa määrittävälle sivustolle on lisätty esittely alan arvostetuimmasta palkinnosta, Fieldsin mitalista. Arvostetuin palkinto -kuva on poistettu vuonna 2019 ja lisätty Rafaelin teos Ateenan koulusta. Fieldsin mitali ilmentää matematiikan tietoteoreettista perustaa korostavaa tulkintaa ja Ateenan koulu kulttuurista perustaa. Tiedonintressi on kuvauksessa veristinen, mutta tieteenalan monimuotoisuus välittyi, mikä ilmentää inhimillisyyttä. Koulumatematiikan tutkimuksen aiheina ovat olleet oppimisen yksilöllistäminen ja ilmiölähtöisyys erityisesti 2000-luvulla.

Merriam Webster (2017) määrittelee: ”Mathematics is the science of numbers and their operations; interrelations, combinations, generalizations; abstractions of space; configurations and their structure; measurement, transformations and generalizations. Algebra, arithmetic, calculus, geometry, and trigonometry are branches of mathematics” (emt.). Kuvaus kattaa lähes kokonaan koulumatematiikan haarat, mutta vain osan siitä, mitä tieteellinen matematiikka nykymaailmassa edustaa, kuten tietojenkäsittelytieteessä, modernissa fysiikassa, genetiikassa, laajojen tietokantojen tieteellisessä laskemisessa, sääilmiöiden-, vuorovaikutuksen-, evoluution- ja kosmologian mallintamisessa. Modernit matematiikan sovellukset osana tieteidenvälisyyttä ja poikkitieteellisyyttä odottavat uudistuneita osajia. Erilaiset matematiikan määrittelyt eivät välttämättä kata kaikkia sen alaan kuuluvia tutkimuskohteita.

Hakuteosten mukaan matematiikan määrittely tietoteoreettisesti (epistemologisesti) deduktiivisena tieteenä on vahvistunut ja sen esiympäristönsä kontekstuaalisten käytännön lähtökohtien huomioimiset ovat vähentyneet tarkastelupe-riodilla (1963-2017). Tietoteoreettiset lähtökohdat korostuvat inhimillisten lähtökohtien kustannuksella. Se tarkoittaa, että totuuden ehdot ovat ankarat ja tie-

teellisellä perustelulla on sovitut standardit. Matematiikan riippumattomuutta havaittajasta halutaan suojella, jolta perustalta matematiikka on merkittävä valan käytön väline. Odotus voi kohdistua myös erilaisten tutkimus- ja oppimispolkujen sekä toisistaan poikkeavien havaintojen keksimiseen, jotka lisääisivät vuorovaikutuksen tarvetta ja keskustelevaa työtettä koulumatematiikassa.

Kuvauksien aikakaudella tunnistettava matematiikan intressimuutos on edennyt teknisestä ja praktisesta veristiseen suuntaan. Yleisesti tiedonintressi on etäännyntä ihmisen arjesta ja lähentynyt tieteenalan verististä tiedonintressiä. Tiedonintresseinä välittyvät niukasti emansipatorinen, metafyyminen ja lisäämääni persoonallinen intressi. Kuvauksissa ilmenee myös matematiikan määrittelyn välttäminen ja aikajanalla (1963-2017) lisääntyvä varovaisuus intressien paljastamisessa (paitsi fysiikka ja taloustiede). Kuvausten muutos veristiseen suuntaan heijastaa myös koulumatematiikan muutosta kohti 1900-luvun loppua.

Hakusanojen kuvaukset on laadittu tieteenalan perspektiivistä, ei yksilöllisen kokemisen mahdollisista merkityksistä. Tietosanakirjat eivät tyydyttäneet persoonallista tiedonintressiäni, eivätkä antaneet vastausta kysymyksiini koulumatematiikan merkityksistä yhteiskunnassa, joten tutkimuspolku jatkuu. Yksilöllinen lähestymistapa matematiikkaan hallitsevan yleistävän tietoteoreettisen lähestymistavan sijasta tarvitsee lisää matematiikan maailman ja oman ymmärtämisen ymmärtämistä eli tiedostamispyrkimystä ja dialogia. Juntunen (1987, 149) muistuttaa positivismin kritiikissään erilaisesta ihmistieteiden ymmärtämisen ja tulkinnan metodista. Säännöt, joita ihminen käyttäytymisessään noudattaa, eroavat ratkaisevasti luonnonlakien säännönmukaisuudesta. Oman ymmärtämisen ymmärtämisestä voi saada tietoa vain itseltään kysymällä, vastausta ei löydy kirjoista tai tutkimuksista, koska yksilönäkökulmaan on suhtauduttu kriittisesti tieteen perinteessä. Tutkimukseni tarkoitus ei ole puuttua matematiikan todistettuun aksiomaattiseen järjestelmään ja sen rakenteeseen, vaan auttaa tunnistamaan yksilön esiyymmärryksessä olevaa merkitysmaailmaa, jolla on yhteys matemaattisen oppimispolun vähittäiseen löytämiseen tai keksimiseen. Matematiikan ymmärtäminen ja soveltaminen tulevaisuuden haasteissa edellyttää tulkinassani lähtökohtaisesti sen jotenkin mieltämistä.

Monet tieteeseen liittyvät käsitteet, kuten tieto tai totuus, ovat arvottavasti lautauneita (Kiikeri & Ylikoski 2011, 24-27). Tieteenalana matematiikan luonne edustaa käsitteellisesti tarkkaa epistemologiaa, mikä hakuteosten kuvausten mukaan ilmentää matematiikan statusta ja ankaruutta veristisessä merkityksessä. Kuvaukset tarkoittavat ajattelun lopputuloksia, jotka ovat tieteentekijöiden työ-

näytteitä. Matematiikka kuvataan ristiriidattomana ja neutraalina. Opetustilanteissa voi tunnistaa koulumatematiikkaan liittyviä ristiriitaisia tunteita, merkityksiä ja tiedonintressejä, jotka syntyvät oppilaiden elämismaailmoista. Koulumatematiikkaan liittyy sisäisiä ja ulkoisia tiedonintressejä, joita ei ole ollut tapana tuoda näkyviksi, vaikka teoreettinen ymmärtäminen on mahdollista vain edellä käyvän ymmärtämisen, esiymmärtämisen perusteella.

# 3 TUTKIMUSONGELMAN RATKAISUN SUUNNITTELU

## 3.1 Tutkimuspolku ongelmanratkaisuprosessina

Tutkimuspolku ongelmanratkaisuprosessina kuvaa tutkimuksen rakennetta, joka on analoginen oppilaan oppimispolulle. Oppilas (yksilö) rakentaa oppimispolkunsu omista lähtökohdistaan vahvistaen vähitellen omia metakognitiivisia oppimaan oppimisen taitojaan. Tutkimuspolku ongelmanratkaisuprosessina on tutkimuksen rakennemalli, joka viittaa matematiikasta siirtyneeseen kuvaani tutkimusprosessista. Tutkimuspolku muistuttaa vastakkaisten vaihtoehtojen mahdollisuudesta (inversio-ongelma) ja oppilaan valinnan yksilöllisyydestä. Tutkimuspolku on osa elämismailmaa, minkä tavoite on tunnistaa matematiikan sisäisiä ja ulkoisia merkityksiä sekä koulumatematiikkaan liittyvää säätelyä. Tutkimuspolulla ilmenee ristiriitoja ja vastakohtia, jotka pitävät tutkimusta jatkuvasti viireillä. Tässä luvussa käsitelen lisäksi tutkimusongelmaa, tutkimuskontekstia ja lähteitä, tutkimusmetodia sekä tutkimusetiikkaa.

Huoli matematiikan osaamisesta (alaluku 2.1) aktivoi pohtimaan, miten koulumatematiikan tila on ymmärrettävä elämismailmallisessa kontekstissa. Ensivaikeutema opettajakokemukseni perusteella on, että otteen saaminen koulumatematiikkaan on häiriintynyt elämismailmallisten muutosten seurauksena. Huoli oppivelvollisuuskoulun matematiikan osaamisesta fokuoitetu yksilöllisiin taipumuksiin ja valmiuksiin, jotka ovat yksilön matematiikasta otteen saamisen perustana. Suhde koulumatematiikkaan on henkilökohtainen, mikä tarkoittaa oppilaan oppimiskokemuksia, suuntautumista ja mentaalisiä merkityksiä.

Oppimistavoitteiden asettaminen perustuu yhteiskunnan tavoitteisiin, jotka eivät välttämättä kohtaa oppilaan herkkää mentaalista kokemusmailmaa. Yhteiskunnan rakennemuutosten seurauksena koululuokissakin on syntynyt kohtaantongelma (vrt. työmarkkinapolitiikka), missä oppilaan mieli ja matematiikka eivät kohtaa. Peruskoulun opetussuunnitelman perusteiden (2014, 18) mukaan jokaista oppilasta autetaan tunnistamaan omat mahdollisuutensa ja rakentamaan oppimispolkunsu omista perusteistaan ja tavoitteistaan lähtien. Tällöin jokaisen

oppilaan taipumusten ja potentiaalien tunnistaminen on avainroolissa. Kohtaanto-ongelman tunnistamisella on merkitystä nyky-yhteiskunnan koulumatematiikan kehityshaasteissa.

Huoleen tarttuminen ja kohtaanto-ongelman tunnistaminen on prosessi, jonka taustalla vaikuttaa monia samanaikaisia ja eriaikaisia syitä ja merkityksiä. Kohtaanto-ongelmalle ei myöskään ole yhtä ratkaisua, vaan mahdollisuuksia on useita, koska yksilölliset oppimispolut ovat erilaisia lähtökohdiltaan ja tavoitteiltaan. Matematiikan harjoittamiseen liittyy yksilötasolla ja muuttuvan yhteiskunnan tarpeissa erilaisia intressejä. Oppilaiden erilaiset intressit johtavat erilaisille oppimispoluille, jotka erilaisuudestaan huolimatta ovat yhdenvertaisia. Tällöin peruskoululain korostamat tasa-arvoiset mahdollisuudet tarkoittavat yksilöllisten valmiuksien ja taipumusten ottamista huomioon.

Käyttämäni käsite tutkimuspolku on analoginen opetussuunnitelman oppimispolulle. Tällöin polku on itseohjautuva, elinikäinen, luova ja ongelmalähtöinen. Tutkimuspolku ei ole kuin suora tie, jonka määränpää on tiedossa, vaan se tunnistelee perustaa ja suuntia. On olemassa vaihtoehtoisia ideoita ja ratkaisuja. Tutkimuspolku ei pyri löytämään vain yhtä polkua. Tällöin ajattelutapa on enemmän divergenttiä kuin konvergenttiä. Tutkimuspolku kuvaa pitkittäistä aikajatkumoa 1950-luvun kansakoulusta nykyperuskouluun tutkien, miten talonpoikaisten juuriemme juonteet ja kansakoulun kasvatusajattelu elävät näkymättöminä, mutta rekonstruoitavina ja modifioitavina ympärillämme elämissämaailmoissa.

Käsite *polku* on metafora, joka kuvaa tutkimusprosessia. Se on todellisuuden kokemuksessa löytynyt, tallautunut juonne, ura tai säie, joka tuntuu kotoiselta. Tutkimuspolkua ilmentäviä metaforisia ilmauksia ovat myös ”kulkea omia polkujaan” tai ”tieteen ohdakkeinen polku” (NSSK 1981). Polku on kokemuksien analyysistä ja synteesisistä rakentuva merkityksien ketju; mutkittileva, tuttu ja tallattu, tai kokonaan uusi reitti. Se vie aina johonkin, mutta aina ei tiedä mihin löydöksiin. Polkumallia voi luonnehtia luovuuden oikeuttamiseksi. Kokemuksellinen jälki jää vain todella merkityksellisistä elämyksistä, joiden vaikutuksen voi tunnistaa jälkeensä. Elämykset ja tiedostaminen jättävät jäljen.

Tutkimuspolku on kokonaisuutena rakenteeltaan ongelmanratkaisuprosessi, mikä paljastaa luovuuden olemusta – ennakoimattomuutta. Yksilöllisestä yleiseen ja yleisestä yksilölliseen etenevä pitkittäistutkimus on koulumatematiikan kulttuurisia, poliittisia ja tieteellisiä juuria tutkiva. Tutkimuspolun luovuuden lähtökohtana on omaksumani havainnointitapa elämänympäristössä arjen lähtö-

kohdista. Taipumuksenani on enemmän innovoida kuin imitoida, keksiä enemmän kuin löytää, tehdä enemmän synteesiä kuin analyysia.

Tutkimuspolun rakenne muistuttaa matemaattisen ongelmanratkaisun ja geometrian päättelyrakenteen muotoa (ei sisältöä). Matemaattisen ongelmanratkaisun pioneerin, unkarilaissyntyisen matemaatikko George Polyan (1887-1985) ongelmanratkaisu noudattaa neliportaista rakennetta: ongelman tunnistaminen, ongelman ratkaisun suunnittelu, ongelman ratkaisu ja ratkaisun tarkistaminen (Polya 1957). Polyan heuristista mallia (1957, 92-93) innoittaa keksiminen (ingenius inventions), jolla hän viittaa Descartesin julkaisemattomaan tutkimukseen, *Rules for the Direction of the Mind*.

Polyan ongelmanratkaisun vaiheissa kertaautuu Eukleideen (n. 330-275 eKr.) geometrian päättelyrakenne. Sen mukaan *todistustehtävissä* on oletus, väitös, todistus, tulosten tarkastelu ja *ongelmanratkaisutehtävissä* oletus, vaatimus (pyrkimys), ratkaisu ja tulosten tarkastelu. Neljäs vaihe Eukleideen mukaan on, mitä oli todistettava (mot.) tai mitä oli ratkaistava, jotka sisältävät taaksepäin katseen eli ratkaisun oikeellisuuden tarkastelun. Polyan (1957) neliportaisen mallin mukaan tutkimuspolku jäsentyy:

- ongelman tunnistaminen: luku 2
- ongelman ratkaisun suunnittelu: luku 3
- ongelman ratkaisua: luvut 4, 5 ja 6
- tulosten tarkastelua: luvut 7, 8, 9 ja 11

Tutkimuspolku edustaa ongelmanratkaisun rakennemallia ja on esimerkki ongelmanratkaisun sanallistamisesta. Tunnistamisvaihe on ongelmanratkaisuprosessissa pullonkaula, joka vie prosessia eteenpäin. Ongelman tunnistamisesta (huoli ja kiehtovuus) käynnistyy koulumatematiikkaan suuntautumista tutkiva elämismaailmallinen prosessi, missä ulkoinen ja sisäinen – näkyvä ja näkymätön – reflektioivat. Tutkimuspolun ideana on tunnistaa kulttuurista (suomalaisen sivistyksen talonpoikaiset juuret), politiikasta (matematiikan opetussuunnitelmasta) ja tieteestä (matematiikan filosofisista juurista) yksilöllisyyden ja luovuuden merkityksiä. Ongelmanratkaisun luonteen mukaisesti tutkimus kokonaisuutena on tutkimuspolku.

Oppilas tunnustele ja arvottaa koulumatematiikkaa oppiaineena eli päättää, miten paljon hän käyttää aikaansa matemaattiseen harjaannuttamiseensa. Opettaja arvioi ja arvostelee oppilaan suorituksia. Tällöin opettaja käyttää merkittävää valtaa suhteessa oppilaaseen, jolla matematiikka on vielä osa tiedostamatonta oman ajattelun tunnustelua. Tutkimuspolku ei erottele merkityksiä hyvinä tai

huonoina, oikeina tai väärinä, vaan luonnollisina seurauksina toiminta- tai ajattelutaipumuksista. Merkitykset ovat usein luonnostaan polarisoituneita ihmisen tajunnassa, heijastuksina vastakkaismerkityksistä (Kumpula 2006, 39-59).

Fenomenologinen ja eksistentiaalinen tutkimuspolku, joka on alkanut yli 60 vuotta sitten, on lähellä Heideggerin syväontologiaa. Näkökulma ei Suomessa ole kuulunut akateemisen filosofian valtavirtaan (Varto 1995; Pihlström 2004, 5; Rauhala 2007). Heidegger matkaoppaana ei tarjoa yksikäsitteistä polkua, mutta antaa viitteitä siitä, miten hahmotustaipumusta voi jäsentää merkityksistä tilanteesta ja aikahetkestä lähtien. Elämismaailma tarjoaa mahdollisuuksia tunnistaa ja luoda matematiikkaa.

*Eri elämänvaiheissa olen tunnistanut matematiikkaa ilmiöiden taustavaikuttajana. Kokemus matematiikan ihmeellisyydestä muistuu mieleeni kasvien keräilykesiltä 1966 ja 1967. Linnén morfologisissa luokitteluperusteissa on kasvien muotoon ja rakenteeseen perustuva logiikka, minkä säännönmukaisuudet ja lainalaisuudet yhdistyvät mielessäni matematiikan rakenteeseen. Tutkimuspolun hahmotustaipumusta merkityksistä lähtien ilmentää kasvien morfologinen järjestelmä. Tuolloin ymmärsin, että kasvien muoto ja rakenne on seurausta kasvien sopeutumisesta tarkoituksenmukaisuusperustein ympäristöönsä. Kasvin kasvu mahdollistuu kasvuympäristön ehdoilla, kuten ihmisenkin. Ulpukka optimoi valonsaannin kelluttamalla lehtiään veden pinnalla. Kuivilla tienvarsilla kasvava kannusruoho optimoi pölyttäjiensä huomion kauniin huulikukkaisen kukkan keltaisella ja violetilla värillä. Luonto on yksityiskohdissaan ja kokonaisuutena tarkoituksenmukainen ja säännönmukainen, mitkä ominaisuudet liitän matematiikkaan.*

Prosessityyppisessä pitkittäistutkimuksessa ongelma liittyy koulumatematiikan muutokseen menneisyydessä, nykyisyydessä ja tulevaisuudessa. Tutkimuspolku johdattaa ymmärrystä staattisesta matematiikkakäsityksestä dynaamisempaan suuntaan. Tieteellinen matematiikka absoluuttisen ja abstraktin totuuden vaalijana ei ilmene arjen todellisuudessa täsmällisenä matemaattisena rakenteena. Tällöin tutkimuspolun taustalla vaikuttavan oman matematiikkakuvan ja koulumatematiikan kenttä on kuin sähkömagneettinen energiakenttä (fysiikka) erilaisten merkitysten maailmassa, jossa voimat vaikuttavat vetäen toisiaan puoleensa tai hylkiä toisiaan (alaluvut 3.2 ja 3.3).

## 3.2 Tutkimusongelma

Edellä kuvasin tutkimuspolkua ongelmanratkaisuprosessina. Luvussa 2 kuvasin tutkimusongelman tunnistamista: huolta koulumatematiikan osaamisesta ja matematiikan kiehtovuutta, joiden dialogia taustoittaa esiymmärrykseni. Koulumatematiikan yhteydet elämismaailmaan näyttäytyvät sisäisesti koettavina ja ulkoisesti vaikuttavina. Opettajan pedagogisen vapauden alueelle sijoittuva oppilaan yksilöllinen oppiminen näyttäytyy yksilöllisen erityisyyden ongelmana.

Matematiikka elämänympäristöissä kietoutuu koettuihin merkityksiin ja niistä luotuihin peilauksiin. Matematiikan opiskelua motivoi ymmärrys sen merkityksistä elämismaailmassa, jolloin otetta oppimiseen voi vahvistaa. Otteen saaminen matematiikkaan tukeutuu yksilöllisiin merkityksiin, intresseihin ja symboleihin, joilla on yhteys oppilaan elämismaailmaan. Jokaiselle matematiikka tarjoaa merkityksen, joka on orientaatio- ja motivaatioperustana kannustaen eteenpäin tai taantuen. Olennainen lähtökohtaoletus on, että merkitykset ovat erilaisia eri ihmisille. Tällöin koulumatematiikan symbolijärjestelmä kohtaa tai ei kohtaa oppilaan omaksumaa symbolijärjestelmää tai jotain siltä väliltä.

Opettajakokemukseni perusteella 1980-luvulta lähtien keskeinen havaitsemani koulumatematiikkaan liittyvä muutos liittyy oppilaiden hahmotustaipumuksiin. Epäilyni muutoksen aiheuttajista kohdistuu koulumatematiikan ohjausjärjestelmään, mikä tutkimuspolun jäsenyksin tarkoittaa kulttuurin, politiikan ja tieteen kenttää. Tutkimuksen johtopäätös, yksilöllisyyttä tukeva matematiikkakasvatus, saa vaikutteensa elämismaailmallisen taustan tunnistamisesta. Miten matematiikka ilmenee yksilöllisyyden ja luovuuden näkökulmasta. Matematiikan hahmottamisessa tieto ennen käsitteitä on elämismaailmallinen, missä primäärisin on yksilöllinen intuitio, joka on oppilaan matematiikan oppimisen lähtökohta.

Ontologinen pääongelma:

Miten matematiikka ilmenee tutkimuspolulla?

Pääongelmaa jäsentävät alaongelmat:

Miten matematiikka ilmenee kulttuurin kentässä? (luku 4)

Miten koulumatematiikka ilmenee politiikan kentässä? (luku 5)

Miten koulumatematiikka ilmenee tieteen kentässä? (luku 6)

Miten tulokset palvelevat matematiikkakasvatusta? (luku 9)

Tutkimuspolun ontologinen päätutkimusongelma, *miten matematiikka ilmenee tutkimuspolulla*, hahmottuu alaongelmien kautta. Päätutkimusongelman ratkaisua jäsentävät alaongelmat kulttuurin, politiikan ja tieteen kentissä, joiden tutkimuslähteet määräytyvät tutkimusongelman perusteella. Kulttuurin kenttä edustaa matematiikan ymmärtämysyhteyksiä, joilla on yhteys kokemukseeni. Poliitiikan ja tieteen kentissä analysoin yleisiä koulumatematiikan perusteita, yhdistäen niitä kulttuuriin. Näkökulma painottaa olennaisen löytämistä koulumatematiikan taustavaikuttajista yksilön kannalta. Lisäksi reflektoin dialogissa muistikuvia koulun eri aikakausilta, mikä ilmentää elämismaailmallista suhdetta tutkimuskohteeseen. Tutkimuspolulla 1970-luku sisältää merkittäviä muutoksia arjen elämismaailmoissa, koulujärjestelmässä ja opetussuunnitelmissa sekä matematiikkatieteenalalla.

Tutkimuspolku ilmentää tutkimuksen pitkästä luonnetta ja uudelleen tallautuvaa olemusta eri kentissä. Tutkimuslähteistä ja oman kokemukseni reflektiosta välittyy koulumatematiikan muutos ja uudistamistarve, mitä kuvaan lopuksi yksilöllisyyttä tukevana dialogisena matematiikkakasvatuksena. Tällöin ymmärrystapaani ohjaa käsitys yksilöllisestä hahmotustaipumuksesta.

Yleisesti matematiikan opetus on perustunut tieteellisen paradigman mukaisen ajattelun kehittämiseen, jolloin luonnollinen mentaalinen mieli, yksilötajunta rönsyineen ja opitun siirtovaikutusten merkitykset helposti ohitetaan. Miten oppilas antaa merkityksiä ajattelutyölleen, voi välittyä itsereflektiosta, oppilaan ja opettajan tai oppilaiden välisestä keskustelusta. Usein merkitykset ovat saattaneet jäädä oppilaan mentaaliseen mieleen tunnistamatta. Millaisia merkityksiä oppilas ajattelutyölleen antaa, on jäänyt perinteisen matematiikan formaalisen ja kvantitatiivisen painotuksen vuoksi kokonaisuutena tutkimuksen ulkopuolelle.

Tutkimuspolulla avaan yksilöllisen elinikäisen kokemuksen kautta matematiikan merkitystä. Tällöin matematiikka toimii sekä yleisen maailmaan jäsentymisen että henkisen kasvun tukijana. Tarkastelutapa yksilökokemuksen kautta eroaa lähtökohtaisesti tieteellisen paradigman mukaisen ajattelun orientaatiosta. Matematiikan tutkimus on painottunut tieteellisen paradigman mukaisen ajattelun kehittämiseen, jolloin taitojen opettelu arki- ja elämäympäristöissä on jäänyt vähemmälle huomiolle tai kokonaan tunnistamatta ainakin yläkoulussa, jossa formaalisten taitojen opiskelu vahvistuu.

Tiedostamisen puutteiden ratkaisua (4. alaongelma) tutkimuspolulla edustaa matematiikkakasvatus, joka on johtopäätös tutkimukseni tuloksista. Tavoitteena on auttaa oppilasta tiedostamaan itseään ja pyrkimystään lähtökohtaisten valmiuksien jatkuvaan huomioimiseen ja vahvistamiseen yksilöllistyvällä oppimis-

polulla. Fokuksessa on tällöin tieto ennen matemaattisten käsitteiden muodostamista. Huomioni kohdistuu etenkin yksilöllisiin ja luovuutta edistäviin merkityksiin, jotka oppilaan oppimispolulla ovat läsnä kokoaikaisesti.

Matematiikasta vaikutteita saaneen tieteellisen maailmankuvan seuraukset näkyvät ympärillämme. Matematiikan sovellutukset ovat tukeneet enemmän koneen toimintaa kuin tutkimuspolun ihmisen itsetiedostamista. Matemaattisilla malleilla on kuvattu ihmisen mielen, yhteisöjen toiminnan, havaittujen ilmiöiden, maailmankaikkeuden ja luonnon säännönmukaisuuksia ulkopuolisen havaitsijan tulkinnoin. Asettamani tutkimusongelmien ratkaisua laajentaa ja syventää sisäpuolinen menneisyyden merkitysten tarkastelu, mitkä tuovat perspektiiviä suuntautua tulevaisuuteen.

### 3.3 Tutkimuskontekstin ja -lähteiden kuvaus

Tutkimuskonteksti on (koulu)matematiikan sfäärien kokonaisuus elämismailmassa, missä kasvu ja kasvatus sitoo *kokemuksellisia* sfäärejä. Sfäärien alue ei ole selvärajainen, vaan merkityksiä sitova ja ymmärtävä alue. Kasvatus on tavoitteellista toimintaa, mikä toteutuu elämismailmassa itsekasvatuksena; koti-, koulu-, yhteisö- tai tiede- ja tietoisuuskasvatuksena. Elämismailmassa kasvatus toteutuu eri näkökulmista samanaikaisesti, mutta toteutuvaa kasvuaan yksilö ohjaa itse. Yksilön tietoisuuden kehitykseen vaikuttavat merkitykset syntyvät ja muuttuvat elämismailmassa. Kasvaminen edellyttää tiedonsiemeniä, jotka itävät ja tulevat ravituiksi kasvulleen ominaisella tavalla.

Kehitysajattelua suhteessa matematiikkaan tukee kulttuurievoluutioon perustuva ymmärrys kasvun luonteesta (ks. luku 4.2.3). Tällöin yksilön ympäristö, perimä ja minuus säätelevät kehitystä. Luonnollinen kasvuympäristö, olosuhteet ja omaksutut taipumukset ovat kokonaisuutena koulumatematiikkaan kiinnittymisen ja matematiikan oppimisen lähtökohtia. Tutkimalla oppiminen (Comenius), valistusaate (Rousseau), luonnollisen kasvatuksen idea (Pestalozzi) ja merkitysoppiminen (Dewey) sopivat oppilaan funktionaalisen eli merkitysvälittöisyyden (ks. alaluku 5.3.1) kokonaiskehityksen ymmärtämisen lähtökohdiksi, jotka vaikuttivat vielä 1960-luvun kansakoulussa. Talonpoikaisyhteisön sivistys kulttuurievoluution perustalta tarkoittaa, että kulttuuriyhteisössä syntyneet toiminta- tai taipumukset funktionaalisina toimintoina ovat suhteessa koulussa opiskeltavaan

matematiikkaan eli koulumatematiikkaan. 2000-luvun koulumatematiikan kehityksen ymmärtäminen kulttuurievoluutiona on uudelleen ajankohtainen. Kasvaminen suhteessa koulumatematiikkaan toteutuu elämismaailman sfääreissä. Ihmisten suuntautuminen sfäärien kentässä on tietoisesti tai tiedostamatta elämismaailmalähtöistä. Elämismaailman sfäärejä kuvaa malli:

**Elämismaailman sfäärit:** kokemuksen alue

**Kentät:** kulttuuri, politiikka ja tiede

**Yhteisöt:** suku-, koulu- ja tiedeyhteisö

**Ryhmät:** lähipiiri, luokka ja tieteenala

**Yksilöt:** Intuitio, funktiot ja keksiminen

Sfääritaso on yhdessä toimimisen taso, jossa yksilöiden merkitysketjut keskustelevat. Koska yksilölliset merkitysketjut rakentuvat eri konteksteista, käytännön opetus- ja oppimistilanteissa on mahdollista syntyä kohtaanto-ongelmia. Arjessa ja opetustilanteissa elämismaailmojen sfääritasojen matematiikkaan liittyvien merkitysten kokemukselliset rajat ovat epätarkimmat, jolloin voi syntyä väärinymmärryksiä, merkitysten katoamista ja riitasointuja. Sfäärien tasolla tapahtuu matemaattisen tietämyksen merkitysten ulkoinen ja sisäinen sopeutuminen ympäristöön eli oppiminen, jolloin on mahdollista, että jotakin tulevaisuuden kannalta merkittävää jää huomioon ottamatta. Evoluutio ei välttämättä etene edistyksen suunnassa.

Yksilön tietämyksen rakentumista merkityksistä lähtien kuvaava malli saa vaikutteita evoluutioteorioista. Evoluutio tarkoittaa ajan kuluessa sukupolvien välillä tapahtuvaa perinnöllisten ominaisuuksien muuttumista (Vuorisalo 1992, 59, 9). Evoluution mukaan yksilö sopeutuu elämismaailmassa tapahtuviin muutoksiin tai vähitellen menehtyy. Mahdollinen tulevaisuus on tällöin menneisyyden funktio. Evoluutioon perustuva ymmärrys kehityksestä toimii taustalla kentissä, joissa on pyrkimyksenä tunnistaa kehitykseen vaikuttavia merkityksiä.

Tutkimuskonteksti sisältää monitieteisiä näkökulmia sekä makrososiologisia ja filosofisia aineksia, joilla on merkityksiä koulumatematiikan järjestelmään. Ontologinen metateoreettinen tutkimustehtävä kietoutuu eksistentiaalisesti koettuihin kenttiin ja niissä tapahtuviin kohtaamisiin ja peilauksiin. Tutkimuspolun itseäni koskevalla eksistentiaalisella ihmiskäsityksellä tarkoitan kuvauksessani perusteltua kokonaiskäsitystä suhteestani koulumatematiikkaan, luontoon, yhteiskuntaan, itseeni ja matematiikkakokemukseeni (vrt. Nurmi 1996, 89).

Tutkimuspolun sfäärit rakentuvat kolmesta toisiinsa limittyvästä kentästä:

- 1) Kulttuurin kenttä (luku 4)
- 2) Poliitiikan kenttä (luku 5)
- 3) Tieteen kenttä (luku 6)

Karkeasti näkökulmia ja tutkimuskenttiä, jotka limittyvät tutkimuspolulla toisiinsa, on kolme näkökulmaa ja kolme kenttää. Näkökulmat ovat toteutuneet myös elämäni työrooleissa. Tällöin tarkastelen kasvua ja kasvatusta kontekstin sisältä ylöspäin suunnistaen. Kansalaisen näkökulmasta tutkimuspolku kulkee kulttuurin kentässä, koulutussuunnittelijan näkökulmasta politiikan kentässä ja opettajan näkökulmasta tieteen kentässä. Kansalaisen matematiikka sekä koulutussuunnittelijan ja opettajan koulumatematiikka ovat läsnä eri tavoin. Tällöin kulttuuriperäinen yksilöllinen matematiikka on usein tiedostamatonta potentiaalia, jonka vahvistamista kasvatus voi tukea suhteessa koulumatematiikkaan. Elämismaailmallinen tutkimuskonteksti (kulttuurin, politiikan ja tieteen kenttä) liittyy koulumatematiikkaa ohjaaviin kehyksiin. Tutkimuskonteksti on näin monitieteinen, moninäkökulmainen ja elämismaailmalähtöinen.

Tutkimuskonteksti edellyttää jäsenyäkseen eri tyyppisiä käsitteitä ja tutkimuslähteitä. Tutkimusmatkalla ollessani huomioin, miten matematiikka on (kulttuurin), miten koulumatematiikka on ollut (politiikka, tiede) ja miten koulumatematiikka näistä lähtökohdista ilmenee. Tutkimuspolun konteksti hahmottaa matematiikan todellisuutta kansalaisen näkökulmasta kulttuurin kentässä (luku 4, perusta), koulumatematiikan opiskelun kontekstia koulutussuunnittelijan näkökulmasta politiikan kentässä (luku 5, tavoitteet) ja opettajan näkökulmasta tieteen kentässä (luku 6, tieto). Tutkimuslähteet ovat elinikäisellä tutkimuspolulla jäljen jättäneitä ja valikoituvat kontekstien perusteella, yksilöllisen oppimisen ja ajattelun kehittymisen kannalta keskeistä sisältöä tutkien. Hegelin ajattelu antaa tukea keskenään ristiriitaisten sfäärien dialogiin (Kotkavirta 2002, 25).

Kulttuurin kentässä toimintatapumukset liittyvät arjessa matematiikkaa määrittäviin sisäistyneisiin perusteisiin. Sisäisyys on kulttuurilähtöistä ja yksilöllistä; samatkin kulttuuriset lähtökohdat voivat synnyttää erilaisia jälkiä yksilölliseen kokemukseen. Sisäisyyden syvällisyyden merkityksessä kulttuuristen merkitysten tiedostaminen edellyttää itseanalyysia, joka on tutkimuspolulla osa talonpoikaisten juurieni ja intuitioni analyysia. Ymmärtääkseni, miten matematiikka ilmenee, tutkin omaa kokemustani suhteessa sivistyshistoriaan. Tutkimusongelma jäsenyyä eri tieteiden ja kulttuurilähteiden kautta, mitä edustavat kasvatusfilosofian, filosofian, aikuiskasvatuksen, kulttuuritutkimuksen, sivistys- ja tiedehisto-

rian, sosiologian, tieteen sosiologian ja -filosofian, kvanttifysiikan, kulttuurievoluution, maatalouden historian ja psykologian tieteelliset julkaisut. Kulttuurin kentän matematiikka on merkityksiltään laajempi kuin kouluperinteen mukainen koulumatematiikka.

Politiikan kentässä merkitykset kuvaavat tavoitteita ja tahtotiloja, jotka ohjaavat ja säätelevät koulumatematiikkaa, sekä niitä koskevia tutkimustuloksia. Tutkimuslähteinä ovat tällöin komitea- ja komissiomietinnöt ja tutkimukset, koulutuspolitiikkaa ja opetussuunnitelmateoriaa käsittelevät tieteelliset julkaisut sekä koululait, asetukset, opetussuunnitelmat ja niiden tutkimus. Mukana on yksi muistelmateos, kasvatustieteiden filosofiaa, matematiikan didaktiikkaa ja kansakoulun opetusoppia. Poliitiikan kentän analyysin kohteina ovat kulttuurin kentässä tulkittu yksilöllisyys suhteessa opetussuunnitelmamuutoksiin kansakoulusta vuoden 2014 opetussuunnitelmaan. Koulumatematiikan funktiot elämismaailmassa ovat suhteessa valistuksen ajan koulupedagogien ja kansakoulun kokonaisopetukseen. Koulumatematiikan tehtävät ovat suhteessa opetussuunnitelmiin ja komissioesityksiin yhteiskunnassa. Koulumatematiikka ilmenee funktiona opetussuunnitelmien ja komissioesityksen painotuksissa.

Tieteen kentässä tutkimuksen kohteena on matemaattisen tiedon alkuperä järjen ja kokemuksen välillä kohti koulumatematiikan mahdollista uudistamista: matematiikan keksimistä tai matematiikan löytämisen ja keksimisen välistä dialogia. Tällöin huomion kohteina ovat tulkinnat ja niistä seuraavat merkitykset. Matemaattisen tiedon alkuperä, uuden ajan Descartesin matematiikka ja koulumatematiikan rakentamisen 1900 -luku kuvaavat koulumatematiikan kehitystä nykyisen oppivelvollisuuskoulun matematiikkaan. Tieteen kentän tutkimuslähteet ovat tieteenfilosofiaa ja filosofian historiaa sekä matematiikan didaktiikkaa ja kasvatustieteitä. Koulumatematiikka ilmenee tieteilijöiden työssä eri tavoin yksilöllisen kokemuksen merkityksissä.

Sfäärien kokonaisuuteen (kulttuuri, politiikka ja tiede) sijoittuu yksilöiden ja yhteisöjen elämismaailmassa oleminen. Elämismaailmassa oleminen on olemusrakenne, missä on mahdollista nähdä yksilön tai yhteisön olemassaolo – itselleen oleminen, Dasein (Kauppi 2001, 297). Elämismaailmassa oleminen on ihmisen olemisen perusstrukturi, jota jäsenän kulttuurin, politiikan ja tieteen kenttänä. Olemismahdollisuuksissaan ihminen on suunnitelma (Entwurf). Heideggerin mukaan suunnitelma edellyttää olemismahdollisuuksien ymmärtämistä omista mahdollisuuksista, sikäli kuin ihminen voi tulla niistä tietoiseksi. Ihminen ymmärtää ja tulkitsee mielen (Sinn), joka määrää ihmisen suunnitelmaan liittyvän suunnan. (Kauppi 2001, 297-299.)

Daseinin olemiseen (ks. luku 2.1) kuuluu huoli (Sorge), mikä on yksi Heideggerin eksistentialaaleista, jonka perustalta maailmassa oleminen on perusolemuksestaan huolta ja huolehtimista kanssaoilijoista ja tavaroista. Huoli kuuluu itselleen olemisen (Dasein) ajallisuuteen suhteessa tulevaan (Heidegger 2000, 228-232; Kauppi 2001, 300). Huoli on suuntautunut eteenpäin elämässä, jolloin se on kuin asenne olemiseen, olemista jo itsensä edellä maailmassa. Huolehtimisen jokapäiväisyys voi tulla sokeaksi mahdollisuuksille ja tyytyä vain aktuaaliseen (Heidegger 2000, 244). *Theoria* ja *praxis*, teoria ja käytäntö, ovat sellaisen olevan olemismahdollisuuksia, jonka oleminen on määritettävä huoleksi. Huolen ilmiö on olemuksestaan kokonainen (emt. 243). Tutkimuspolkua suuntaa huoli koulumatematiikan tulevaisuudesta yhteiskunnassa.

Matematiikka on tutkimuspolulla näkyvä tai näkymätön, pääosin näkymätön, mutta läsnä kaikessa, vaikka sitä ei nimeltä kutsuttaisi. Laadullinen tutkimus pyrkii tunnistamaan laatuja, joilla matematiikan kouluopetuksessa on keskeinen merkitys. Tutkimuskontekstissa koulumatematiikan kokonaisuus kohtaa ja koskettaa eksistentialista, eettistä, emotionaalista, ekonomista, esteettistä, emergenttiä, empiiristä ja edistyvää maailmassa olemista. Heideggerin mukaan maailmassa olemiseen (In der Welt Sein) kuuluvat itselleen oleminen (Dasein) ja kanssaoleminen (Mitsein, Mitdasein) (Kauppi 2001, 182, 297).

Koulumatematiikka torjuttuna tai rakastettuna tai jotain siltä väliltä on läsnä oppilaiden eksistentialisessa elämismaailmassa, missä Dasein ja Mitsein kohtavat. Tutkimuskontekstissani kysyn, miten matematiikka ilmenee? Tutkimus suuntautuu luettuun, nähtyyn, kuultuun ja koettuun elämänyhteyksissä elinikäisesti. Useat lähteet kiinnittyvät todellisiin käytännön tilanteisiin. Autenttisuus on tärkeä lähtökohta, koska pyrkimys on olla imitoimatta muita. Luova ajattelu syntyy lähtökohdista, joissa ei ole imitointimahdollisuutta. Tutkimuskontekstia luonnehtii eksistentialionologia (ideaalinen ja reaalinen), missä olemisen ja olemassaolon yksilöllisyys ja autonomia korostuvat (Teräväinen 1992, 29; Ap-pignanesi 2008, 8-10).

Tutkimuskontekstiin sisältyy matematiikan vaikuttavuus yhteiskuntien kehityksen taustalla. Koulumatematiikan kokeminen kiehtovana mahdollistaa vaikuttavuuden, mutta kokemus ei takaa vaikuttavuutta, ellei konteksti tue yksilön suuntautumista. Viime vuosisadan teknologisten järjestelmien kehittyminen on edellyttänyt matemaattista osaamista ja sen tukea eri tasoilla. Miten kulttuurin, politiikan ja tieteen kentässä on eri aikoina keksitty tulkita ja soveltaa matematiikkaa, on vaikuttanut nykyisen arkipäiväisen ympäristön rakentumiseen merkittä-

vällä tavalla. Matematiikalla on vaikuttavuutta yhteiskuntien kehityksessä ja sen osaamisella on keskeinen merkitys yhteiskunnan tehtäviin suuntautumisessa. Suuntautumista ja valikoitumista yhteiskunnan tehtäviin ohjaavat keskeisesti kulttuuri, politiikka ja tiede. Yksilö yksin ei voi rakentaa matematiikkaansa, vaikka eksistentiaali-ontologiassa äärimuodossaan näin tapahtuu. Eksistentiaali-ontologia tukee fenomenologista, kokemuserustaa vahvistavaa suhdetta koulu-matematiikkaan.

### 3.4 Tutkimusmetodi

Tiedon hankintaan ja tulkintaan liittyviä metodologisia ratkaisuja: ajattelemisen tapaa, tutkimuspolkua ongelmanratkaisuprosessina, tutkimusongelmaa, -kontekstia ja -lähteitä olen kuvannut edellä. Tutkimuksen metodologinen rakenne jäsentyy esittelemieni lähtökohtien eli oletusten perustalta. Tieteellisen tiedonhankinnan keinona korostuu metodi. Yleisesti tiede käyttää erityistä tieteellistä menetelmää, metodia (kreikan meta hodos, 'pitkin tietä') rationaalisuuden osoittamiseen ja päämääränsä saavuttamiseen (Haaparanta & Niiniluoto 1991, 11). Metodi tarkoittaa, miten tietä on kuljettava reitin valaisemiseksi. Tutkimuspolku on tutkimusmatkalla olemista, jolloin se sisältää viitteen prosessista, jatkuvuudesta, suuntautuneisuudesta ja metateoreettisesta ymmärryksestä suhteessa todellisuuteen. Ymmärtämistä laajentaa Heideggerin ajattelemisen tiellä olemisena (Unterwegs) erilaisten vaihtoehtojen välissä (Kupiainen 1991, 4).

Tutkimuspolulla matematiikka on kulttuurinen ilmiö, joka Alasuutarin (1994, 48) mukaan tarkoittaa arkitodellisuuden ja yhteiskuntaelämän merkitysvälitteisyyttä. Tällöin matematiikka on mentaalisen mielen tuotos. Kohtaamissani koululuokissa (yli 100) koulumatematiikan merkitys elämismaailman tarkoitus- ja toimintasuhteissa on välittynyt niukasti tai ei ollenkaan. Matematiikan siirtämistä käytännön tilanteisiin harjoitellaan niukasti, mitä tutkimusmetodillani osoitan. Matematiikka on tieteellisen metodin esikuva, jolloin sovellan sen ideaa. Matematiikka voi tuoda elämään mahdollisuuksia, joita voi hyödyntää koulun käytännöissä (keksiminen). Vallitsevaa todellisuutta korkeammalla on mahdollisuus (Heidegger 2000, 62), missä oppimisen mieli avautuu. Matematiikan kätkeytyneiden merkitysten tiedostamisen tutkimusmetodi on fenomenologinen, mitä kutsun ajattelemiseksi (Andenken).

Ajattelemisen on Heideggerin mukaan ihmisen maailmasuhteen avain, missä järki (logos) avautuu ajattelemisessa. Maailma tulee esiin ajattelemisessa, missä ajattelemisen on sekä arkipäiväinen että tieteellinen *suhde* (ratio) todellisuuteen. (Kupiainen 1991, 2-3.) Heideggerin (2000, 56) logos on tosi, kun kätkeytynyt tulee näkyväksi. Epätosi logos on peittyneenä (emt. 56). Tällöin totta on näkyväksi tuleminen. Ajattelemisen on jatkuvaa kyseenalaistamista ja taaksepäin katselemista pyrkimyksenä vapautua valmiista ajattelusta (Kupiainen 1991, 6-7). Logos merkitsee siis yhteyttä ja suhdetta (Heidegger 1926; 2000, 58), mistä käsite looginen on johdettu. Looginen viittaa järjestyksen muodostamiseen, organisoimiseen ja säännönmukaisuuksien tunnistamiseen – matematiikkaan.

Ajattelemisen fenomenologiaa ja matematiikkaa yhdistää yhteyksien ja suhteiden tutkiminen ja rakentaminen. Jos matematiikka on ihmismielen määrittelemätön peruspiirre (Tossavainen & Sorvali 2003, 30), matematiikka voi olla muutakin ajattelemista kuin tähän mennessä on keksitty koulumatematiikkana. Tällöin tarvitsen fenomenologisen asenteen, jolle jotakin voi ilmetä. Miten matematiikka ilmenee, herkistyy järjen, aistien, tunteiden ja tahdon yhteistyöllä, joka voi ilmetä myös intuitionä (alaluvut 4.3.1 ja 4.3.2). Intuitio on näin merkityksiä integroiva kyky.

Tulkitsemani metodinen matematiikka viittaa fenomenologiaan. Teoreettinen matematiikka tarkoittaa tieteenalalla painotettua deduktiiviseen päättelyyn perustuvaa formaalista eli käsitteellistä järjestelmää (Lehto 2001). Fenomenologisemmin tulkittuna jo Pythagoraasta alkaen on vaikuttanut ajatus, että kyselevän, epäilevän ja päättelevän asennoitumisen opettaminen liittyy erityisesti matematiikan opettamiseen (Lehti 2000, 3). Matematiikalla on näin sekä teoreettinen, että fenomenologinen ulottuvuus. Suomela (1991, 2) kiteyttää, että matematiikka on kehittynyt keinoksi kurkottaa oman mittansa ohi. Kyselevä ja taaksepäin katsova asenne johtaa fenomenologiaan, ajattelemiseen, minkä erotan valmiista ajattelusta (teoria).

Heideggeria tulkiten ajattelemisen eroaa valmiista ajattelusta eli teoriasta. Ajattelemisen tarkoittaa perimmäistä pyrkimystä ymmärtää, miten minä ajattelen. Ajattelemisessa aikaisemmin ajattelemisen kohteena ollut merkitys palautuu uudelleen fokukseen tarkentuen tai korjautuen. Prosessi on tällöin päättymätön ja rakenteeltaan ennakoimaton. Ajattelemisen pyrkii kiinnittämään huomiota siihen, mitä ei ole vielä ajateltu (Kupiainen 1991, 16). Ajattelemisen liittyy ihmisen historiaansa, mitä voi kutsua myös näkökulmaksi tai katselukulmaksi oman ajattelemisen menneisyyteen ja siitä johdettaviin merkityksiin. Tutkimuspolun

primäärivaiheessa (luku 4) ajattelemisen pyrkii tiedostamaan matematiikan mieltä elämismaailmassa. Tässä merkityksessä Heideggerin ajattelemisen lähestyy opettajansa Husserlin fenomenologista asennetta, joka on luonnollisen asenteen (välitön havainto) kehittyneempi muoto kohti ajattelemista ja toimintaan kytkeytyvää tiedostamista, teorian ja käytännön dialogia.

TAULUKKO 2. Metodisen ajattelemisen ero verrattuna ajatteluun (Kumpula 2019).

<b>Fokus</b>	<b>Ajatteleminen</b>	<b>Ajattelu</b>
Prosessi	Päättymätön	Päätyvä
Käytäntö ja teoria	Dialogissa	Erillään
Rakentuminen	Ennakoimaton	Ennakoitu
Ontologia	Yhdistää tieteitä	Eriyttää tieteitä

Fenomenologinen ote asettaa itsensä alttiiksi ja metodinsa osaksi tutkimuskohdetta (Järvinen & Järvinen 2000, 207) – tutkimuspolulla matematiikkaa. Taus-tastani tunnistettava talonpoikaisjärki (alaluku 4.2.2) on mukana fenomenologi-sessa metodissani. Aristoteleen mukaan aistihavainto on ajattelun ja älyllisen ak-tiviteetin edellytys (Aspelin 1963, 113). Descartesin havaitseminen on aistimis-ta, muistamista ja kuvittelemista (Descartes 2003, 324). Mieltämisen edellytys Aristoteleen ja Descartesin mukaan on moniaistinen havainto, jolloin he painot-tavat sekä havaintoon perustuvia empiirisiä (synteesi), että järkeen perustuvia rationaalisia (analyysi) lähtökohtia ajattelussaan (ks. luku 6). Matematiikkaan yhdistyvä fenomenologia siirtää vaikutusta (transfer) merkityksiin.

Raili Kaupin (1920-1995) menettelytapa kuvaa fenomenologista metodia:

Kun sovelletaan logiikkaa ja matematiikkaa, voidaan näiden tieteiden avulla johtaa metodisia sääntöjä. Kun kyse on intuition tai arvosteluky-vyn käytöstä, ei voida antaa sääntöjä, jotka takaisivat tieteellisyyden. Tällöin tieteellisyys riippuu hedelmällisyydestä, missä tieteellisyys lä-hestyy taidetta; se on puhtaasti intellektuaalista toimintaa, jonka juuret ovat ihmisen taipumuksessa selkeään ja universaaliin (Kauppi 2002, 10).

Kauppi korostaa taipumuksia, jotka ovat usein perustaltaan kulttuurisia. Kirjoi-tuksessaan Kauppi (2002, 4) muistuttaa, että on otettava huomioon polulla kul-kevan ihmisen antropologinen puoli, edellytykset ja rajoitukset, jotka liittyvät

mahdollisuuteen tavoittaa tieteellistä tietoa. Antropologia viittaa kulttuurien autonomiseen erilaisuuteen, mitä tutkimuspolulla edustaa talonpoikainen elämäntapa ja sen vaikutteet. Talonpoikaisjärjen tunnistaminen edellyttää talonpoikaiskontekstin tuntemusta, halua analysoida sen olemusta ja tuoda näkyväksi sen kontekstiinsa sitoutunut olemus. Tällöin talonpoikaisjärki on sekä tutkimuksen kohde että sisäistynyt metodi, joka yhdistää matematiikkaan liittämäni merkityksiä.

Näkökulma rajoittuu kokemukseen jäljen jättäneeseen tutkimuskirjallisuuden elinikäisellä tutkimuspolulla. Fenomenologisen asenteen perusteella omaksuttu vaikuttaa tiedostamiseen. Jollakin toisella ihmisellä valinnat ovat erilaisia ja vaikutukset siten myös erilaisia. Ymmärtävä fenomenologia, joka fyysikko-filosofi *Ernst Machin* (1838–1916) fenomenalismiin mukaan on holistinen hahmotus aistimuskomplekseina, mihin juurtuu Eino Kailan synteettinen monistinen erityistieteet ylittävä fenomenologia (Niiniluoto 2002, 13-19, 175, 178). Tällöin metodi on jatkumo ymmärtää yhä paremmin itseään ja kulttuuriympäristöään.

Tutkimuspolulla reflektio ja dialogi vuorottelevat ja ovat kietoutuneet toisiinsa. Dialogissa on mukana kokemuseräisiä merkityksiä. Tällöin dialogiseen metodiin sisältyy analyysi (hajottaminen osiin) ja synteesi (yhdistäminen). Molemmat liittyvät dialogiin. Dialogi eroaa väittelystä, jossa tavoitteena on oikeassa oleminen ja vastaväitteen kumoaminen. Dialogi voi kohdistua myös itseen, kun taas dialektiikka korostaa vastavuoroista keskustelua. Dialektiikka kuului antiikin ja skolastiikan ajalla matemaattiseen päättelyyn.

Fenomenologi Hegelin dialektiikka on antiikin filosofiaa objektiivisemmaksi kehitetty kehityksen muoto. Subjektiivisen ja objektiivisen dialektiikan ero ei Hegelillä ole huomattava, sillä Hegel uskoo yleensäkin subjektiivisen ja objektiivisen, eli tiedostuksen ja maailman vastaavan rakenteellisesti toisiaan: tiedostava subjekti kykenee tuntemaan objektiivisen maailman peruspiirteet, ja objektiivinen maailma toteuttaa tiedostavan subjektin perusajatusmallit. Hegel toteaa, että metodi, subjektiivinen dialektiikka, on itse oliota liikuttava voima, objektiivinen dialektiikka. Dialektiikkaa voi kutsua metodiksi, sillä objektiivisuus ja subjektiivisuus ovat vain saman dialektiikan eri aspekteja. (Jauhainen 2014, 2-3.)

Uuden tiedon tuottaminen tutkimuksen lähtökohdista edellyttää tieteellistä metodia. Klassinen filosofien kiistan aihe koskee metodia. Tieteenfilosofien välinen keskustelu on osoittanut, että mitään yksimielisyyden saavuttanutta metodia ei ole olemassa (Kiikeri & Ylikoski 2011, 102). Kulttuurin kentässä käyttämäni

autenttinen metodi (etnometodi) määräytyy tutkimusongelman ja kontekstin ehdoilla. Etnometodologiassa korostetaan, että tutkija ei tee tulkintoja ihmisten merkitysmaailmasta yleisesti tai yritä tulkita toisten merkityksiä. (Alasuutari 1994, 47-48.) Tällöin metodilla tavoitettava uusi tieto kulkee tutkijasuodattimen läpi tavoitteenaan tunnistaa yksilön merkitsemiä merkityksiä, jotka auttavat lukijaa tunnistamaan omiaan erilaisista lähtökohdista. Elämismaailmallinen tutkimus koulumatematiikan taustavaikuttajista tarvitsee elämismaailmaan kuuluvan metodin.

Rationaalisuuden korostus tieteellisen tiedon lähtökohtana on vähentynyt viimeisten vuosikymmenien aikana, koska tiedonsosiologisten tutkimusten valossa kontekstuaalisilla tekijöillä on hyvin merkittävä ja keskeinen asema tieteellisen tiedon synnyssä ja edellytysten rakentumisessa. (Kiikeri & Ylikoski 2011, 79; Lammenranta 2002, 157.) Tutkimuspolulla konteksti laajentaa rationaalisuuden merkitystä horisontaalisesti, jolloin tavoitteena on matematiikan merkitys ristiiriitojen tunnistamisena. Tällöin esittämieni vastakohtaisten ja vaihtoehtoisten merkitysten väliin jäävä ratkaisu on lukijan, oppilaan tai opettajan, jolloin ei ole väärä merkityksiä, vaan yksilön kokemia merkityksiä vastakohtien välissä. Metodin tehtävä on tällöin holistisen hahmotuksen kautta paljastaa ja ilmentää koulumatematiikan todellisuutta kokonaisuutena. Kokonaisuutta hahmottamaan pyrkivä ajatteleva toistaa alku- ja reunaehtojaan kuin itsensäättyvää jatkumoa.

### 3.5 Tutkimuseettinen näkökulma

Tutkimuseettinen näkökulma liittyy tutkimuskohteeseen ja tutkimuspolulla tutkimuksen periaatteisiin. Tutkijan perustehtävä on luotettavan uuden tiedon tuottaminen todellisuudesta. Sisäistynyt moraali ohjaa tutkijan työtä. Tällöin tutkija on työssään moraalinen toimija (Pietarinen 2012). Moraali muodostuu niistä normeista ja arvostelmista, jotka ohjaavat arvioitamme, päätöksiämme ja toimintaamme, mitä koskeva moralioppi on etiikkaa. Kaikilla ihmisillä on moraalili, olkoonpa tietoinen tai ei, mutta kaikilla ei sen sijaan ole etiikkaa. Etiikka suhteuttaa moraaliset käsitykset teorioihin ja ajatusmalleihin, ja se auttaa näin tekemään moraalin käsitettävämmäksi ja johdonmukaisemmaksi (Koskinen 1995, 29.) Etiikka koskee opettamista keskeisesti, koska opetuksen kohde, oppilas, on kehityksensä keskeneräisessä vaiheessa (luku 9.3).

Yleisesti tutkimusetiikalla tarkoitetaan eettisesti vastuullisten ja oikeiden toimintatapojen noudattamista ja edistämistä tutkimustoiminnassa sekä tieteeseen kohdistuvien loukkausten ja epärehellisyyden tunnistamista ja torjumista kaikilla tieteenaloilla. Laajennettuna tutkimusetiikka käsittelee niitä moraalien sisäisiä ja ulkoisia periaatteita, joilla on merkitystä tutkimusasetelmassa. Tutkimuseettinen näkökulma esittelee tarkasteltavan tutkimuksen tekemisen perustan ja paljastaa tutkijan ennakkoehtoja. (TENK 2012, 4-5.)

Ari Hirvosen (2006, 46) mukaan hyvää tiedettä ei voi perustaa valmiiksi annettuihin normistoihin, jotka takaisivat tutkimuksen eettisyyden. Jos tutkija on vastuullinen tutkimuksessaan, niin silloin tutkimuksen ei tule olla jonkin teoreettisen takeen, eettisen tai metodologisen normiston varmuuden suojaama. Eettisesti hyvä tutkimus merkitsee aina kriittistä suhdetta positiivisiin lain, moraalien ja tieteen normeihin, muutoin se ei täytä avoimen ajattelun velvollisuuttaan. (emt.) Kriittinen asenteeni tukee Hirvosen kuvausta.

Feministinen tieteenkriitikki muistuttaa, että objektiivisuutta tavoitteleva tiede menettää elämän ainutkertaisia ja kokemuksellisesti merkittäviä piirteitä, siksi tieteessä tulisi kuvata myös perspektiivillistä ja subjektiivista kokemusta (Enwald 2015, 20). Elämismaailmallisessa tutkimusasetelmassani perspektiivi ja kokemus ovat mukana, minkä tavoitteena on kokemuksen tason tavoittaminen. Tutkimuseettinen näkökulma kohdistuu fenomenologiseen itseymmärrykseen ja tutkimusmetodiin, jotka liittyvät tutkimusongelmaan, miten matematiikka ilmenee. Tällöin tutkijalla on keskeinen osuus siinä, mitä havaitsee ja miten havaitsee. Tutkimuspolun intersubjektiivinen esitystapa tarjoaa lukijalle vertailu- tai samaistumiskohteen tutkia omaa itseymmärrystään.

Ihmisen ja tiedelähtöisyys näkökulmat ovat tutkimuspolulla läsnä sananaikaisesti (synkroninen) ja historiallisesti (diakroninen). Tutkimukseni fokus on kulttuurin, politiikan ja tieteen arvoajattelun keskeisissä käännekohtissa kansakoulu-/peruskouluvaiheessa ja tässä ajassa, jolloin lähde- ja valikoituvat noiden aikakausien vaikuttajista ja vaihtoehtoisista vaikuttajista. Käyttämäni lähteet ovat tutkimuspolulla mieleen jäljen jättäneitä ja edelleen ajankohtaisia tutkimuslähde- ja valikoituvia, jotka saattavat vaikuttaa vanhahtavilta, mutta ovat kuitenkin tutkimusongelmien ratkaisun sekä koulutus- ja kulttuurihistorian kannalta merkityksellisiä. Tutkimuspolkuajatuksen sisältyy hermeneuttinen ymmärrys, mitä on joskus oppinut, ei voi ottaa pois tajunnasta, ellei tietoisuus ohjaa toisin tai opitun muuttamiselle ei ole perusteluja.

Koulumatematiikkaa ilmentävä tutkimus on soveltavaa tutkimusta, jossa arjen tiedonhankintaa ohjaavat eri tiedonintressit ja intentiot. Tunnistetut tietoaihiot voivat soveltua teknologian perustaksi, edistää keskinäistä ymmärrystä, ilmentää pyrkimystä vapautua negatiivisesta itsearviointista ja matematiikan ymmärtämistä kahlitsevista henkilökohtaisista esteistä sekä luoda perusteita maailmankuvan rakentamiseen ja persoonallisuuden kehittämiseen. Tutkimuspolun monimuotoisuutta suosiva näkökulma on tärkeä tulevaisuuden koulumatematiikan opetuksen kannalta.

Tutkimuspolun taustalla vaikuttaa kulttuurilähtöinen elämismaailma, joka on yhteydessä elämänkatsomusjärjestelmiin, kuten tässä kulttuuriin, politiikkaan ja tieteeseen. Yksityiseen elämänkatsomukseen sisältyvät arvottamisjärjestelmä, todellisuuden käsitys ja perusasenne (Koskinen 1995, 124), jotka määrittävät ihmiskäsitystä yhteiskunnallisessa järjestelmässä. Eksistentiaaliantologiassa teoreettiset ja arvottamiseen liittyvät oletukset vaikuttavat tutkimuksen kokonaisuudessa, jolloin on eettisesti oikein kuvata ne avoimesti ja rehellisesti. Kulttuurilähtöisyys ei sulje pois muita kulttuureita tai poikkeavia tulkintoja talonpoikaisuudesta. Tutkimuspolku osoittaa, että kulttuuri luo merkityksiä, jotka vaikuttavat, vaikka ilmenisivät eri suuntaisina. Tällöin kokemuksella on merkitys.

Kulttuurin kentän kuvauksessa on mukana oma kasvatusperusta, jossa painottuu tarkoituksenmukaisuusetiikka. ”Puhdas omatunto on paras päänalunen”, oli äitini usein siteeraama elämänviisaus ja kasvatusohje. Kokemusmaailmastani tuttu näkemys henkilökohtaisesta moraalista on vaativuus itseään kohtaan. Luonnonoikeudellisessa perinteessä moraalilait voidaan yhdistää luonnonlakeihin, kuten painovoimaan tai keskihakuvoimaan (Koskinen 1995, 140). Kasvu-ympäristöni maatalouskulttuuri edustaa luonnonoikeudellista järjestelmää, missä luontoyhteydessä toimiminen sisältää aina myös havaintajan, joka on vastuussa havainnoistaan. Tunnistan itsessäni opittua ja perittyä ankaruutta ja epäitsekkyttä moraalisen oikeuden näkökulmasta, jota voi kutsua periaatteellisuudeksi.

Omatunto tarkoittaa myös tutkimuseettistä työtä. Tiedostamiseen pyrkivä ajatteleva yksilö voi havainnoida moraaliaan kuin empiiristä ilmiötä (Pietarinen 2012, 1-2). Filosofisessa etiikassa ihminen on kiinnostunut omista eettisistä käsityksistään ja niiden perusteluista (Teräväinen 1992, 110). Tällöin omatunto ohjaa tutkimuspolkua sisäistyneiden tunne-, tahto- ja tietokokemusten kautta. Omien eettisten käsitysten tunnistamisen (itsetietoisuus) jälkeen voi tunnistaa niitä myös itsensä ulkopuolelta ja kunnioittaa erilaisia tapoja toimia ja ajatella (Hellsten 2015; Hankamäki 2003, 74-76). Omat tunteet vaikuttavat havainnon

kohteisiin, mutta ne eivät saa vaikuttaa tulosten tulkintaan pelkästään omaa näkemystä vahvistavasti.

Aikuiskasvatustieteen teoriaa ja käytäntöä yhdistävään, liberaaliin perinteeseen sijoittuva tutkimukseni aihe on pitkittäistutkimus yleissivistävän koulumatematiikan kontekstista. Miten matematiikka ilmenee, riippuu näkökulmasta, tarkasteluasemasta suhteessa tutkimuskohteeseen. Yleissivistävä matematiikan oppiminen antaa merkittäviä valmiuksia ja asenteita yksilön myöhemmälle elämälle, elinikäiseen kasvuun ja yleisesti yhteiskunnan kehittämiseen. Eettisesti merkittävää on, että tutkimus edustaa yleistä etua, yhdenvertaisuutta ja oikeudenmukaisuutta. Tutkimuksen löydökset edustavat monimuotoisesti koulumatematiikkaan kohdistuvia erilaisia intressejä ja tarkoituksia kansalaisen näkökulmasta. Opetushallitus on nimennyt matematiikan yhdeksi avaintaidoksi elinikäisellä polulla (oph 2015), mitä myös tutkimuspolku vahvistaa.

Tutkimusasetelmassa toimin tutkijana kuin opettaja, joka tutkii työtään ja itseään työssä. Tutkimuksellisuus on kehittynyt elämismaailmassa (ei tutkijayhteisössä tai virka-asemassa). Näkökulma on kansalaisuutta tukeva ja puoluepoliittisesti sitoutumaton. Tieteellisen tutkimuksen eettisiä kysymyksiä voidaan Matti Häyrin (2012) mukaan arvioida kolmesta näkökulmasta: 1) Tutkijoiden omien ammattieettisten käsitysten valossa, 2) ympäröivän yhteisön oikeustajun ja moraalikäsitteiden mukaan sekä 3) filosofien etiikan mukaan. Kaikki näkökulmat koskevat yleisesti tutkimuspolkua, mutta keskeistä on kohdan 2) mukainen vallitsevien lakien ja yleisen oikeustajun kunnioittaminen. Tutkimuspolku tukee yksilöiden oikeutta hyvään peruskoulutukseen, mitä tutkimusetiikkani tukee tarkoituksenmukaisilla tietolähteillä rehellisyyteen ja avoimuuteen pyrkien.

## 4 MATEMATIIKKA KULTTUURIN KENTÄSSÄ (1. alaongelman ratkaisua)

### 4.1 Kulttuurin kenttä sfäärien riitasointuina

Kulttuurin kentässä käsite matematiikka viittaa mahdollisiin potentiaaleihin ja laajempiin yhteyksiin elämismaailmassa kuin koulumatematiikan yhteydessä on yleisesti ollut tapana. Matematiikka ilmenee elämismaailmassa koulusta riippumatta tai koulumatematiikan siirtovaikutuksina. Tällöin matematiikka liittyy toimintaan elämismaailmassa aina jollakin tavalla. Kulttuurin kentässä matematiikan yhteydet sivistyshistoriaan, kulttuurin kehitykseen, kulttuurievoluutioon ja tieteen tutkimukseen avaavat pohdinnassani uutta näkymää matematiikan taustaan (alaluvut 4.2.1, 4.2.3, 4.3.3 ja 4.3.4). Tarkastelen matematiikkaa myös kokemukseeni peilaten (alaluvut 4.2.2 ja 4.3.2). Matematiikka kulttuurievoluutiossa (alaluku 4.2.3) ja tieteen kehityksessä (alaluku 4.3.3 ja 4.3.4) tunnistuu koulutyötä koskevan merkityksen perusteella. Kulttuurin kentässä ihminen on näkömätön vaikuttaja (luku 4.3.4). Matematiikkakuvaani liittyvä kulttuurinen sfääri (alue) avaa matematiikan oppimisen ja opetuksen yleisiä taustamerkityksiä.

Kutsun kulttuuriseksi sfääreiksi matematiikan ymmärtämisyhteyksiä elämismaailmassa. Matematiikka ilmenee jonkin kulttuurisen sfäärin vaikutuksesta tietynlaisena ja eri ihmisillä eri tavoin. Kulttuurinen elämismaailma on sfäärien kenttä, jossa kehittyi matematiikan esiasteita: taipumuksia, intressejä, suuntautumistapoja, ymmärtämisen merkityksiä, matematiikan vaikutuksia identiteetin ja maailmankuvan muotoutumiseen, merkitysfunktioita matematiikkaan ja ideoita matematiikan yhteiskunnallisesta tehtävästä. Kulttuurinen elämismaailma on vuorovaikutuksessa opitun kanssa oppimispolulla (tutkimuspolulla) yksilöllisenä tiedostamisena. Kulttuurisen tietoisuuden kehittyminen suhteessa itseensä edellyttää tiedostamispyrkimystä. Sfääri tarkoittaa tällöin merkityksiä, ymmärtämisyhteyksiä ja kokemuksen aluetta.

”Kulttuuri on jakautuvien, yhdistyvien ja toisiaan risteävien virtojen verkko. Jotkut kulttuurin eri sfäärejä toisiinsa liittävät pyörteet ovat selvästi näkyvissä pinnalla, kun taas toiset kulkevat syvällä pohjassa. Eräät virroista ovat vahvoja

ja vastustamattomia, toiset taas tilapäisiä. Ne virtaavat eri suuntiin ja leikkaavat toisiaan eri tasoilla.” Tämän kulttuurin monimuotoisuutta kuvaavan Johan Fornäs (1998, 11) *Kulttuuriteorian* kuvauksen voi liittää matematiikkaan. Ideat syntyvät ja ilmiöt elävät kulttuurisissa syvärakenteissa, josta ne heijastuvat arjen tilanteisiin ja kehittämishankkeisiin aiheuttaen helposti sfäärien riitasointuja.

Tunnistan itsessäni jälkiä talonpoikaisesta kulttuurista, koulu- ja tiedekulttuureista, oppilaiden erilaisista intresseistä ja niiden puuttumisesta. Yhteiskunnan kehittyessä ilmenevä kulloisenkin ajan henki (Snellman) luo sfäärejä, jotka voi yhdistää käsitteen kulttuuri piiriin. Sisäistynyt suuntautuneisuus suhteessa matematiikkaan tarkoittaa, että luovuus, identiteetti ja osaaminen syntyvät juuristaan, kasvavat vuorovaikutuksessa ja nousevat kukoistukseen suotuisissa kulttuurisissa kasvuolosuhteissa. Matematiikan oppimispolun lähtökohtana on ainutlaatuisen taipumusten ja valmiuksien tunnistaminen ja tukeminen.

Kulttuurin ymmärtämiseksi sfääri on merkitys, olemassaolon muoto, mikä ei ole tarkkarajainen osa kulttuurin kenttätasoa. Kulttuurin synty, tehtävä ja olemassaolo tapahtuvat merkitysten ulottuvuudessa. Merkitysten erikoislaatua voi ymmärtää analysoimalla yhden hitusen (merkityksen) syntyä tilanteessa. Tästä hitusesta kulttuuri lähtee ja runsastuu (tai kuihtuu) muodostaen sfääriin. Kulttuurin tutkimuksessa primaarisena toimintakenttänä on ihmisen mentaalinen tajunta, jossa tutkimus voi operoida merkityksillä. (Rauhala 2006, 112.) Merkityksen kautta rakentuva kokonaisuus, sfääri, on läsnä alkuperältään usein tunnistamattomana kuten biosfääri, jonka juurimerkitys on elämä tai atmosfääri, jonka juurimerkitys on ilma. Kulttuurisen sfäärin juurena on merkitys.

*Merkityksen synty elämismaailmani tilanteessa kesällä 1974 Rauniomäen palotornilla metsäpalotähystysten välissä ilmenee J.A. Holloa lukiessani syntynyt ajatusketju 'kasvamaan saattamisesta', että kasvu on yksilöllinen, itse itseään ohjaava prosessi, jossa merkitys rakentuu merkityksen päälle poluksi. Tiedostaminen on merkitysketju, siis kuten matematiikka. Rakenneyhtäläisyys löytyy kasvun ja matematiikan välillä. Merkityksen hitunen itää ja elää uusiutuen elämismaailman tilanteissa. Kasvamaan saattaminen on tällöin sfäärien synteisiä eli oppijan yksilöllisen opinpolun rakentamista merkitysketjuna.*

Elämismaailmassani sfäärien törmäys koskee esimerkiksi talonpoikaisen kulttuurin ja vallitsevan koulu- tai yliopistokulttuurin välistä ristiriitaa (taulukko 4, luku 4.2.2; liite luku 11). Talonpoikaiskulttuurin suosima neuvokkuus eri tilan-

teissa edellyttää oma-aloitteista ja laaja-alaista toimintaa, mikä on ristiriidassa työn tai opiskelun kulttuureissa ohjeistetun ja tarkkaan eritellyn toiminnan kanssa. Opettaja koulussa edustaa opetussuunnitelmaa ja tieteenalaa jälkimmäisessä merkityksessä, ratkaisten tai ohittaen kulttuuriset ristiriidat omassa opetustyössä.

*Opettajan ratkaisu ei välttämättä tyydytä oppilasta ja ristiriita saattaa jäädä hiertämään. Tällöin opiskelija voi vetäytyä tai häiriköidä jääden epätietoiseksi havainnostaan. Matematiikka osana minuutta omia polkuja kulkien on tärkeä lähtökohta opiskelulle. Ajattelemisen lähtökohtana on oma havainto, mikä korjaa tai vahvistaa aikaisempaa ymmärrystä. Koululuokissa oma havainto voi muuttua mallioppimiseksi ja erilaiset havainnot jäävät käsittelemättä. Ristiriitojen ja ongelmien jakamatta jättäminen saattaa olla potentiaalien tuhlausta. Ongelman tunnistaminen on matemaattisen prosessin tärkein vaihe, joka parhaimmillaan voi uudistaa ja tuoda innovatiivisia mahdollisuuksia. Ongelman tai ristiriidan tunnistaminen on tällöin mahdollisuuksia tuova sfääri ja uuden alku.*

Koulukulttuuriin sisältyvät yksityinen (oppilas) ja julkinen (opetus) sfääri. Julkinen sfääri on avointa, kaikkien saatavilla ja koskee kaikkia ihmisiä heitä koskevassa yhteisessä asiassa. Koulu on julkinen laitos ja edustaa näin julkista sfääriä. Julkisen sfäärin vastakohta on yksityinen sfääri. Todellisuudessa julkiset sfäärit luovat omat ryhmänsä ja rajansa. Mikäli niitä on määrä ajatella julkisiksi, niiden pitäisi ainakin periaatteessa olla avoimia kahdella tavalla: kenen tahansa pitäisi voida ottaa osaa niihin ja uusien teemojen tulisi voida nousta milloin tahansa esiin niiden kommunikaatiossa. (Fornäs 1998, 104.) Julkinen koulu voisi nykyistä enemmän osallistua kommunikaatioon, mikä luo mahdollisuuksia kansalaisten osallistamiseen sekä paikalliseen ja alueelliseen kehittämiseen.

Julkisten sfäärien teorian kehitti 1960-luvun alussa Jürgen Habermas kehittämään Immanuel Kantin (1781) esiin nostamalle kokemuksen (yksityinen) ja järjen (julkinen) erottamisen ongelmalle (vrt. luku 6.1). Julkinen sfääri on perustaltaan kommunikaatioverkosto, joka käyttää kommunikaatiota luodakseen sosiaalisen tilan, jossa yksilöt ja ryhmät voivat vaihtaa merkityksiä. Julkinen sfääri sisältää kulttuurin ja politiikan (Fornäs 1998, 106.) Koulun elämismaailmassa kulttuurin ja politiikan lisäksi voi tunnistaa tieteen, jolla on merkitystä julkisena sfäärinä. Yksityinen ja julkinen sfääri ovat läsnä koulun kohtaamistilanteissa samanaikaisesti, missä systeemissä intressit ovat usein ristiriitaisia luonnollisista syistä. Matematiikka elämismaailmassa voidaan ymmärtää elämää ympäröiviksi

kehyksiksi kulttuurin, politiikan ja tieteen sfääreinä. Miten matematiikka ilmenee, riippuu koetuista kehystekijöiden merkityksistä. Kehystekijät asettavat rajoja ja luovat järjestystä sfääreinä (Fornäs 1998, 68-74). Rauhalan (2006, 30) mukaan merkityssfäärit ilmenevät mentaalisen tajunnan merkityksellisyydessä oivalluksina. Erilaisten sfäärien keskinäiset suhteet eivät ole harmonisia, koska sfäärien arvot, vaateet ja säännöt törmäävät toisiinsa (Fornäs 1998, 68).

*Elämaailman alueita, yksityinen ja julkinen, voi kutsua sfääreiksi. Elämaailmani 1960-luvulta muistan talonpoikauskulttuurin julkisen ja yksityisen yhteenliittymistä, missä pienen kylän elämä oli kuin koko maailma. Talonpoikaissa elämäntavassa yksityisen ja julkisen raja oli häilyvä. Koko kylä toimi kasvattajana ja kasvuympäristönä. Lapsuus on vapauden ja yhdessä jaetun vastuun merkityksessä muistojen hienoa aikaa. Vapaus ei ollut rajattomuutta, vaan rajat loivat toiset ihmiset, missä kaikkien tarpeet oli otettava huomioon. Laaja yhteisöllisyys yhdenmukaisti käytäntöjä yhteisten tavoitteiden suuntaan. Tieteellisessä tutkimuksessa vallitsee edelleen julkisen (yleinen) ja yksityisen sfäärin erottaminen toisistaan, mikä heijastuu kouluissa yleisinä odotuksina suhteessa yksilöön. Tieteen tehtävä on ollut luoda yleisiä lakeja, jolloin yksityinen häviää.*

Yksityinen viittaa yksilöllistämiseen, jonka perusteena ovat kulttuuriperäiset tiedonintressit. Kulttuuri luo ja tuo odotuksia, taipumuksia, valmiuksia ja tavoitteita, joiden huomioiminen oppilaan oppimispolulla laajentaa mahdollisuuksia. Talonpoikaisuus edusti 1960-luvulle saakka toiminnallista yhteisöllisyyttä, johon yksityiset intressit sopeutuivat omavaraista elämäntapaa vahvistaen. Sotien jälkeinen jälleenrakennusaika mullisti elinkeinorakenteen ja vahvisti uusia uravaltintoja ja teollistumiskehitystä. Tuolloin talonpoikaisuus elämäntapana muuttui maatalousammattiksi (vrt. Peltonen 2004, 91). Laadullinen muutos erotti vähitellen yksityisen ja julkisen toisistaan, missä julkinen yleisenä odotuksena syrjäytti yksilön kulttuuriperäistä potentiaalia. Kulttuurista rakennemuutosta edistivät lisääntynyt valtiollinen valvonta ja ohjaus, hyvinvointiyhteiskunnan rakentaminen ja niihin liittyen opetussuunnitelmien määräävyyden vähittäinen vahvistaminen.

*Lapsuudessani toimin kulttuuritutkijana yökyläillen sukulaisteni ja ystäväieni kodeissa. Tuolloin tunnistin, että ihmisillä on erilaisia perusteita toiminnoilleen. Ihmiset jäsentävät maailmaansa eri tavoin ja kiinnittävät huomiotaan erilaisiin*

*asioihin ympärillään. Asennoiduin ristiriitaisiin vaikutelmiin tutkimuksellisesti. Miten asiat ilmenevät on kulttuurinen kysymys, ei oikein/väärin kysymys. Ymmärtäminen kehittyy yhteyksissä.*

Kulttuurisesti syntyneillä merkityksillä on ranskalais sosiologi Pierre Bourdieun (1930-2002) mukaan kulttuurista pääomaa, mikä käsittää taipumukset, tiedot, taidot, symbolit ja sosiaalisen statuksen (Bourdieu 1985, 67-70). Kulttuurinen pääoma on aineetonta ja henkistä potentiaalia, missä suhteessa se eroaa politiikan kentän suunnittelutalouden ajan uuskeynesiläiseen talousteoriaan perustuvasta *human capital* – talousajattelusta, minkä perustana on materiaallinen ja taloudellinen pääoma (luku 5.1). Ajan myötä kulttuurinen pääoma usein tuottaa myös taloudellista menestystä. Kulttuurinen pääoma sisältää matematiikkaa silloinkin, kun sitä ei varsinaisesti tunnisteta. Musiikki, kuvataiteet, design-suunnittelu, käden taidot, arjen ja työn organisointi, vuorovaikutus, maailmankuvan kehittyminen, identiteetin rakentaminen ja erilaiset toimintavalmiudet liittyvät suhteen ja järjestyksen tunnistamiseen – eli matematiikkaan sen kulttuurisessa merkityksessä. Kulttuuri viittaa näin henkiseen potentiaalisuuteen. Tutkimuspolultani kiteytyy muutosvaihe, jolloin talonpoikauskulttuurista juurtunut sukupolvien kulttuuriperintö (yksityinen) alkoi väistyä ja heikentyä.

TAULUKKO 3: Kulttuurin rakennemuutos 1970 -luvulla (Kumpula 2019).

<b>Kohde</b>	<b>Ennen 1970-lukua</b>	<b>1970-luvun jälkeen</b>
Sfäärit	Laaja yksityinen	Laajentuva julkinen
Pääomaa	Kulttuurinen potentiaali	Taloudellinen potentiaali
Tiedon alkuperä	Kokemus	Järki

Kulttuurinen toiminta pyrkii johonkin, mikä ei luonnostaan vallitse (Ahlman 1939; Rauhala 2006, 14), missä ihminen ja kulttuuri muodostavat yhteyden ja kokonaisuuden (Rauhala 2006, 12), kentän. Kentän käsite viittaa alueeseen tai tilaan, jolla on jonkinlainen erityinen järjestys tai suuntaisuus (Fornäs 1998, 69). Matemaattisia taipumuksia ja vaikutuksia kuvaavaa sfäärien vuorovaikutuskenttää kutsun kulttuurin kentäksi. Kulttuurin kenttä on suuntautunut, kuten fysiikassa sähkömagneettinen kenttä. Veto- ja työntövoimat vaikuttavat, samanmerkkiset hylkivät ja eri merkkiset vetävät toisiaan puoleensa. Fysiikan analogian mukaan kenttämalli täydentyy kentäksi, jossa sähkökenttä on politiikan kenttä,

magneettikenttä on tieteen kenttä ja virran suunta on kulttuurin kentässä (oikean käden sääntö). Kenttämallissa elää idea dialogisuudesta, jossa vetovoima toteutuu usein, mutta työntövoimasta voi oppia enemmän. Malli on karkea, koska ihmisten maailmassa sfäärit ovat kompleksisia ja monimuotoisia.

Matematiikan potentiaalisuus on mentaalisisessä mielessä, vaikka sen tietoteoreettinen mieli ymmärretään objektiivisena. Talonpoikaiskulttuurin sfääreistä kummunneena tutkimuspolulla on seuraavaksi matemaattinen sivistys kulttuurin osana. Kulttuurin sisällä toiminnan mentaalinen mieli on yksilöille luonnollista ja tarkoitusperusteista, mutta kulttuurin ulkopuolelta muille pääosin ei tietoista (vrt. Luft & Ingman 1955, Joharin ikkuna). Kulttuurin sisällä toimintaan liittyvä matematiikka on näkyvissä, mutta kulttuurin ulkopuolella pääosin tunnistamaton ja näkymätöntä. Kulttuurin sisäpuolinen tarkasteluni pyrkii tunnistamaan merkityksiä, joita ulkopuolinen tarkastelu ei ole tunnistanut tai vahvistanut. Tällöin toimin kuin antropologi, joka tutkii itseään itsensä ulkopuolelta.

## 4.2 Matemaattinen sivistys kulttuurin osana

### 4.2.1 Talonpoikainen sivistys suomalaisuuden juonteena

Tarkastelen talonpoikaista sivistystä osana suomalaisuutta, painottaen suomalaista sivistyshistoriaa. Talonpoikaisuus ei viittaa tutkimuspolulla pelkästään talollisiin, vaan kansanosaan, joka taitojensa perusteella on synnyttänyt kulttuurin. Vielä 100 vuotta sitten suurin osa suomalaisista eli omavaraistalouden piirissä, missä elämäntapaa ohjasi työ ja sen kehittäminen. Laaja-alainen asenne työhön edellyttää kekseliäisyyttä. Talonpoikaisella sivistyksellä viitataan siis talonpoikaisiin arvoihin, joiden merkityksiä voi idättää uudelleen. Matemaattinen sivistysperintö piiloutuu kansallisiin taipumuksiin, jotka vaikuttavat edelleen toiminnassa muuntuneina, heikentyneinä tai vahvistuneina.

Suomen varhaisimmat asukkaat hakeutuivat viljelyn ja keräilyn kannalta suotuisille alueille (Jutikkala 1958, 12). He polttivat kaskea, viljelivät pieniä peltoaloja ja hoitivat karjaa. Metsistä he hankkivat poltto-, rakennus- ja ainespuut. He tekivät käsitöitä ja kävivät tuotteillaan vaihtokauppaa. (Viita 2013, 7.) Suhde luontoon ohjasi elämäntapaa. Taito kehittyi työssä oppimalla. Työtaidon näytöis-

tä huolimatta talonpoikien taitavuutta ei useinkaan yhdistetty sivistykseen, vaikka kulttuurin etymologinen perusta viittaa sivistyksen viljelyyn ja ihmisenä kasvamisen laaja-alaisuuteen valistusaatteen perintönä.

Suomalaisen kulttuurin talonpoikaisen sivistyksen juonteet ovat elämän ja elinolosuhteiden parantamista, harjaantumista havainnoimaan ympäristöään ja työn tekemistä ihmisten, maaperän, metsän ja eläinten kasvuolosuhteiden kohentamiseksi. Käsite *kulttuuri* on peräisin latinan verbistä *colere*, viljellä, sekä siitä johdetusta substantiivista *cultura*, joka tarkoittaa viljelystä (Salonen 1995). Kulttuuri on sivistyksen viljelyä ja laajasti ihmiskunnan henkisten ja aineellisten saavutusten kokonaisuus (NSK, 570). Kulttuuri on näin elämän ylläpitämistä.

Suomalaista talonpoikaisuutta tutkinut professori Jaakko Elenius (2017) kuvaa sivistyksemme vanhoja hyveitä sanoilla: harkitsevuus, kohtuunmukaisuus, oikeudenmukaisuus ja urhoollisuus. Samat hyveet kuuluivat jo kreikkalaisen filosofin, Aristoteleen, kardinaalihyveisiin. Elenius jatkaa: vapaus, itsellisyys, rohkeus, kärsivällisyys, vuodenkierron opettama suunnitelmallisuus, luonnonrakkaus, kotiseutuylpeys, historian harrastus, neuvokkuus ja selviytymiskyky edustavat talonpoikaisia arvoja (TPKS 2017). Nämä talonpoikaiskulttuurin taustalla vaikuttavat hyveet Elenius tiivistää käsitteeseen yrittäjäyys, mitä edelleen korostavat poliitikot, koulutussuunnittelijat ja elinkeinoelämän vaikuttajat.

Lähtökohtaisesti kulttuuri viittaa maanviljelyyn ja hengen viljelyyn. Sivistys tarkoittaa kulttuurin yhteiskunnallista ulottuvuutta, mistä työn ja käytännön merkitys siirtyi jo antiikin aikana tarkoittamaan erilaisia ajattelun ja inhimillisen toiminnan muotoja. Sivistyksen kulminoituu käsitys hyvästä ihmisestä sekä hänen mahdollisuuksistaan, taipumuksistaan ja osaamisestaan. Vaikka sivistyskäsitteys muuttuu aikakausien tarpeiden mukaan jatkuvasti, sivistyksen juuret löytyvät antiikin Kreikasta. Aristoteleen hyve tarkoittaa kelpaavaisuutta johonkin tarkoitukseen ja suppeammassa merkityksessä niitä ominaisuuksia, jotka tekevät ihmisen täysarvoiseksi sosiaalisessa yhteisössä (Aspelin 1963, 120). Hyvä työihminen oli talonpoikaisyhteisön täysarvoinen kansalainen.

Hyvän ihmisen tahtotilaa ilmentää myös edelleen vaikuttavan 4H-liikkeen perusarvot, harkinta, harjaannus, hyvyys ja hyvinvointi, jotka löytyvät myös aikaisemmin vaikuttaneiden maatalouskerhojen perusteista. Samat perusteet sopivat myös toiminnallisen matematiikan ja kulttuurin kehityksen esiyymmärrykseen. Sitkeys ja vastuullisuus työtoiminnoissa tuottavat tulosta jossakin vaiheessa. Kulttuuritahto on uskoa omaan työhön. Omien havaintojen ymmärrystä ja kekseliäisyyttä korostava talonpoikainen sivistys on jäänyt vähitellen oppineisuutta korostavien yleisten sivistyskäsitteiden jalkoihin. Talonpoikainen sivistys on ym-

märretty vastakkaiseksi ja alkukantaisemmaksi kuin sivistyneistön sivistys. Neliäätyisen (aatelisto, papisto, porvaristo, talonpojat) yhteiskunnan aikaan talonpojan mahdollisuuksia sivistyä rajoitettiin.

Huolimatta alamaisestä asemastaan, kulttuuriseen edistymiseen vaikuttivat kekseliäät talonpojat ja sitä tukeva kansansivistystyö. Kansan yritteliäisyydelle ja pienteollisuudelle avautui lisää mahdollisuuksia, kun ammattikuntajärjestelmä kumottiin 1842 ja elinkeinovapauslaki astui voimaan 1879. Kansansivistystyön taustavaikuttajana valistusaate vaikutti 1960-luvulle saakka aikuisten tiedollisen, älyllisen, tunne- ja tahtoelämän kehittämistä tavoitteenaan ymmärtää ajan ilmiöitä (Heikkinen 2019, 106-109). Aikuiskasvatustieteilijöiden edelleen korostama laaja sivistyskäsite tarkoittaa kaikkea elämänpiirissä ilmenevää taitoa ja taitavuutta, ei pelkästään koulutuksen kautta opittua (Heikkinen & Teräsahde 2014).

Aikuiselle ominaiset oppimisen tavat, kuten kokemuksellisuus, omaehtoisuus ja itseohjautuvuus (Heikkinen & Kallio 2014, 12) edustavat talonpoikaista toimintatapaa lapsesta aikuisuuteen. Aikuiskasvatustiede korostaa elinikäistä kasvua ja oppimista, mikä ilmenee myös nykyoppivelvollisuuskoulun tavoitteissa (POPS 2014, 17). Oppimisen tavat itävät lapsuudessa, juurtuvat nuoruudessa ja kypsyvät aikuisuudessa. Oppimisen tapa ja opitun käytäntöön integrointi juurtuvat kasvuympäristössä. Erilaiset kulttuuriset ympäristöt arvostavat erilaista osaamista ja suuntautuvat oppimiseen eri tavoin. Tällöin erilaiset kulttuuriset sfäärit luovat erilaisia painotuksia osaamisvaatimuksille ja tuovat myös ristiriitoja perussivistyksen ymmärtämiseen.

1600-luvun lopun Ranskasta laajentunut valistusaika toi mukanaan käsitteen *sivistys*, mikä tuolloin tarkoitti ihmisen autonomista itsekasvatusta (Haaparanta 2004, 7). Roomalainen poliitikko ja filosofi Marcus Cicero (106-43 eKr.) otti käyttöön käsitteen *animi cultura*, hengen viljely, joka viittaa täydellistymään pyrkivään ihmiseen ja korkeakulttuuriin, kuten taiteisiin, kirjallisuuteen ja musiikkiin. Korkeakulttuuri pyrkii täydellistymään erikoisalalla (vertikaalinen), kun talonpoikaisuuden perustana on tarkoituksenmukaisuus eri työtehtävissä (horisontaalinen). Peltosen (2004, 126-127) mukaan hengen viljelyä sisältyy myös Hannes Gebhardin vuodesta 1902 levittämään *maahengen* käsitteeseen. Alkion mukaan maahengen käsite on suosittu osuustoimintaliikkeen piirissä. Maahenki liitettiin talonpojan mentaliteettiin, jota kuvaavat itsenäisyys, vapaus, itseoppiminen ja omavaraisuus. Maahengen katoaminen merkitsi talonpojan it-seluottamuksen menettämistä ja vähitellen alistumista markkinavoimille 1950-

luvulta lähtien. (emt.) Tällöin itsekasvatus talonpoikaisen maahengen autonomi-  
sena ilmentymänä tuli häirityksi.

*Isovanhempieni ja vanhempieni itseluottamus työhönsä ilmeni maahengessä. Vanhempieni itseluottamuksen osittainen menettäminen kuuluu lapsuuden ja nuoruuden elämismaailmaan. Isän konkreettinen itkeminen muistuu rakennemuutosajoista. Lapsena oli surullista seurata suunnitelluista investoinneista luopumista. Isän innostunut ja aktiivinen työvire lamaantui, mikä jätti jälkensä myös lasten maailmankuvaan. Isän puheeseen tuli kiukkuinen sävy, kun poliitikot puhuivat metsänpohjaverotuksesta tai talonpojan tappolinjasta.*

Vaikka maahenki kärsi tappioita, yrittäjämentaliteetti säilyi tai siirtyi vaihteittain uusiin kohteisiin. Maahengen katoaminen sai aikaan identiteettimuutoksia ja pahoinvointia maatalouselinkeinon harjoittajissa. Omaksutusta itseohjautumisesta olisi pitänyt oppia ulkoiseen ohjaukseen. Sopeutuminen ulkoiseen ohjauksjärjestelmään hiertää edelleen. Sopeutumattomuus voi tarkoittaa talonpoikaisuuden lisäksi muitakin kulttuuriseksi erilaisuudeksi tunnistettavaa, kuten nuorisokulttuuri tai työläiskulttuuri.

*Koululuokissa koulukulttuuriin sopeutumattomuus voi ilmetä häiriköintinä ja sitoutumattomuutena opiskeluun. Ymmärrys itseohjautuvuudesta on kadottanut kulttuuriperäiset juurensa. Tällöin yksilön itseohjautuvuus on tullut häirityksi ulkoiselta taholta. Ongelman ratkaisu on pitkittynyt ja monimutkaistunut. Tällöin myös opiskelun tarkoitus on jäänyt avoimeksi.*

Toimittaja Reinhold von Beckerin (1821) mukaan sivistäminen ja sivisteleminen liittyvät maataloustyöhön ja esiintyvät maan muokkaamisena, pinnan viimeistelevänä puhdistuksena, pellavan harjaamisena ja ulkonaisen esiintymisen kohentamisena. Käsitteen kansankielinen perusta saa rinnalleen myöhemmin eurooppalaisen tulkinnan. Tällöin sivistyskäsitteen talonpoikaiset elämän käytäntöön juurtuneet perusteet vähitellen murenevät, vaikka laaja-alaisuus humanistisena sivistyksenä säilyykin ainakin teoriassa.

Kokko (2010) korostaa suomen kielen käsitettä sivistys omaleimaisena kulttuurikäsitteenä, jossa kristallisoituu koko sen esikuvana toiminut saksalais-ruotsalainen kulttuurikäsitteistö. 1840-luvun jälkeen alkoi muodostua sivistyneistöksi itseään kutsuva etujoukko, missä sivistys toimi erottautumisen välineenä. Kansallisvaltion ihanteeksi muotoutuu sivistyksen tavoittelu, mikä koskee koko kan-

saa. (emt. 2010.) Vaikka talonpoikaisia mestaritöitä oli jo tuolloin ilmaantunut, ymmärrys sivistyksestä voimaantui eurooppalaisista sivistyneistön vaikutteista.

1800-luvun oppineiston ajattelutapoja korostava sivistyskäsitteen tulkinta painottaa eurooppalaista tasoa (Hyvärinen 2003). Käsitteeseen vaikuttivat ruotsalaisperäinen *bildning* ja saksalaisperäinen *bildung*, joiden merkitys korostaa itsereflektiivistä, rehellistä, tervettä, elävää ymmärrystä sekä sisäistä ihmisten ja maailman tuntemusta, ei kuivaa hengetöntä oppineisuutta tai pinnallista maailman tuntemusta (Tengström 1818, 89-90; Kokko 2010).

Bildning-Bildung-tulkinta edustaa näin myös talonpoikaisesta elämäntavasta välittyntä sivistyskäsitteestä. Etenkin itsereflektiivinen omien havaintojen pohjalta tapahtuva työ on toimintavalmius, minkä suomalaisen talonpojan persoonallisuutta tutkinut Ihalainen (1955) osoittaa empiirisessä tutkimuksessaan. Maalaislapset tekevät enemmän havaintoja kuin kaupunkilaislapset. Talonpojan sivistystahto suosi ennen kaikkea omalähtöisyyttä, taidollisuutta, käytännöllisyyttä ja toiminnallista tehokkuutta. (Ihalainen 1955, 32-55.) Vaikka talonpoikaisella kulttuurilla on juurensa sivistyskäsitteessä ja sen sisällöllisessä ymmärtämisessä, sen myöhempi ymmärrys määräytyy ulkoisista lähtökohdista.

Kokko (2010, 1) muistuttaa, että suomalainen erikoisuus eurooppalaisessa katsannossa on sivistyskäsitteen laaja-alaisuus. Kun monissa kielissä tarvitaan kokonainen kulttuuriterminologia, suomenkielessä voi selviytyä yhdellä käsitteellä, sivistyksellä. Sivistys ilmaisee niin yksilön henkistä kehittyneisyyttä, käytöstapoja ja olemusta kuin kansallista kulttuuria. Sivistys viittaa myös siirtymiseen luonnontilasta järjestettyyn yhteiskuntaan. Monessa kielessä kulttuurikäsitteiden jäsenitys on paljon eritellympi. (emt.)

Maaseudun ammattialoilla toiminnan mahdollistanut elinvoimaisuus on yhteydessä matemaattiseen taitavuuteen, mitä talonpojat ja -tytöt työkäytännöissään päivittäin sovelsivat. Arjessa oli hallittava mitat ja määrät, muodot ja rakenteet, pinta-alat ja tilavuudet, arviointi ja optimointi, työn suunnittelu, organisointi ja rytmittäminen. Tuolloin mittavälineet, kuten maan mittaamiseen käytetty Ametrimitta tai peruna- ja viljamitta kappa, valmistettiin itse. Talonpoikainen käsitys työn rytmittämisestä vuoden- ja vuorokaudenkierron tahdissa jäsentää toimintaa ihmisen luontaisen rytmin mukaan. Rytmisyys jaksotti työtä ja lepoa. Uusimmat neurofysiologiset tutkimukset ovat osoittaneet sisäsyntyisen rytmisyyden yhteyksiä myös sairauksien syntymiseen (sirkadiaaninen rytmi).

Kokon (2010) mukaan sivistyskäsitteen sisältöön vaikuttavat monimuotoisesti yhteiskunnallinen tilanne ja asiayhteys. 1900-luvulla käsitteenä vahvistunut

kulttuuri kumpuaa erilaisina ilmentyminä sivistyksen viljelystä. Käynnistynyt yhteiskunnallinen rakennemuutos (1970-) vaikutti myös sivistyskäsitteeseen. Muutos talonpoikaisyhteiskunnasta sivistys- ja palveluyhteiskunnaksi vaikutti sivistyskäsitteeseen. Talonpoikainen subjektilähtöinen ja itseisarvoinen tiedonintressi muuttui ohjeistusperustaiseksi ja välineelliseksi intressiksi. Sisäinen itseohjautuvuus korvautui ulkoisella ohjauksella ja valvonnalla. Talonpojan työtä ohjannut tarkoituksenmukaisuusetiikka ja yhteiskuntavastuu korvautuivat oikeuksia painottavalla etiikalla onnellisuuden korostuksin.

Menneisyydestä muuntuneet pärjäämisen yllyke, yrittäjäyys ja ongelmanratkaisu ovat osa talonpoikaiskulttuurista periytyneitä suomalaisten vahvuuksia. Materiaaliset ja henkiset tuotokset ovat näkyvä osa kulttuurisesta pääomasta. Talonpoikaistuotteiden suosio ilmentää tuotteiden syvään juurtuneita merkityksiä. Kulttuurituotteiden luominen on tarvinnut avukseen matematiikkaa. Tällöin korostuvat matematiikan rakenteesta kumpuava olennaisen näkeminen, säännönmukaisuuden idea sekä kyky integroida toimintaa ja tuotantoa uudella tavalla. Sisäänpäin kääntyneisyys, mistä talonpoikaisuutta usein arvostellaan, on voimavara, jolla itse itsestään oppiminen mahdollistuu. Talonpoikaiseen sivistykseen liitetään usein talonpoikaisjärki, joka käsitteenä viittaa maataloustyön muuttuviin tilanteisiin ja kykyyn yhdistellä tilanteiden ehtoja.

#### 4.2.2 Talonpoikaisjärki valistusaatteen perintönä

Talonpoikainen sivistys, jonka varassa sukupolvet toisensa jälkeen ovat keksineet elinkeinonsa, on osa aatteellista rationaalistumisen kulttuurihistoriaa, missä kokemus antoi tilaa järjelle. Kodin perintö ja sieltä saadut vaikutteet ovat ohjanneet elämää ja arkea (praktinen tiedonintressi). Talonpoikaiset arvot liittyvät suomalaisen kulttuurin rakennustyöhön. Yksinkertaistaen voi väittää, että suomalaisuuden ominaislaatuun on vaikuttanut valistuksen aatevirtausten vaikutukset ja talonpoikainen elämäntapa. Järjen käyttö konkretisoitui työtilanteissa, jolloin järki sai tarkentavan lisän – *talonpoikaisjärki*.

Järjen käyttö on kontekstisidonnaista. Eri työn kontekstit edellyttävät erilaista järjen käyttöä. Talonpoikaisjärki on syntynyt yhteydessä sisäiseen (kokemus) ja ulkoiseen (järki) luontoon. Immanuel Kantin (1724-1804) valistuksen slogan, *käytä rohkeasti omaa järkeäsi* (Habe Mut, dich deines eigenen Verstandes zu

bedienen, Gulyga 2004, 11), on 2000-luvulla helpommin sanottu kuin toimittu. Omaperäisyys ei aina ole odotus. Omalähtöisyys on kadottanut autenttisen luomovoimansa (vrt. Linnakylä & Kupari 1996, 95-122). Julkinen omaperäisyyden paljastaminen voi antaa sivistymättömän vaikutelman. Tulkinnan juuret voi yhdistää itsensä varassa toimivaan talonpoikaan. Jos ei tiedä muusta kuin itsestään käsin, on sivistymätön ja tietämätön maailman menosta. Yksityinen kokemus ei enää riittänyt yleistettäväksi merkitykseksi.

Itsenään olemista, kansallista heräämistä ja luovuuden esiinnousua vahvisti 1600-1800 – lukujen valistusaate. Haaparannan (2004) mukaan valistuksen ajatus on, että ihmisellä on mahdollisuus oman järkensä avulla muokata elinolojaan. Sivistyäkseen ihmisen on muokattava ympäröivää luontoa ja ihmisen luontoon. Vuonna 1784 Kant luonnehti valistusta ihmisen pääsemiseksi alaikäisyyden tilastaan. Alaikäisyydellä hän tarkoitti, että ellei ihminen käytä järkeään itsenäisesti ja vapaasti, tällöin ihminen on alaikäinen omasta syystään. Ihminen on alaikäinen, ellei hän rohkene käyttää omaa järkeään ilman auktoriteetin johdatusta. (emt.)

Kantin mukaan järki liittyy toimintaan. Hänen mukaansa valistunut on sellainen ihminen, joka uskaltaa kyseenalaistaa vallanpitäjien ajattelumallit. Talonpoikaisten arvojen mukaan arvostettavaa on suorapuheisuus, reiluus ja rehellisyys. Halveksittavaa on luulla itsestään liikaa, annettujen ohjeiden ulkokultaisuus tai tarkeitukseton vallankäyttö. Jos vallanpitäjä on väärässä, talonpoika on tiukassa tilanteessa mielensä näyttänyt, mutta pääosin he ovat sopeutuneet usein epätarkeituksemukaisenakin kokemaansa virkamiesvaltaan. Vastuu itselle, vastuu luonnolle ja vastuu yhteiskunnalle ovat ohjanneet talonpojan työn tekemistä, mikä on omavaraisuuden ja itsenäisyyden perusteena. On pärjättävä omilla taidoilla ja tuotoksilla, mikä voi myös estää uudistumista.

Edelleen käytössä oleva käsite talonpoikaisjärki rinnastuu valistusajatteluun, järjen ja kokemuksen yhdistämiseen. Järki apriori (peritty, opittu vai omaksuttu) ja kokemus aposteriori (matematiikkaa vai ei) ovat edelleen filosofien kiistan aiheena (ks. alaluvut 6.1 ja 6.2.3). Talonpoikaisjärjessä yhdistyy Kantin erittelemä kokemus ja järki, missä etenkin järjen käytön synteettinen kokemukseen yhdistyvä ominaisuus lisää sen siirto- ja yhdistelyvaikutusta tilanteissa. Valistuksen vastuu omasta työstä ja ajattelusta perustui omiin havaintoihin, omiin kokemuksiin, oman järjen käyttöön, käytännön harjoitteluun ja itsenäiseen päättelytaitoon. Vapaasti järkeään käyttävä autonominen subjekti toimii autenttisissa tilanteissa oman ymmärryksensä varassa.

*Koulussa usko ihmisen autonomiaan on ristiriitainen, teoriassa autonomia on odotus, mutta luokkatilanteissa opettaja ei useinkaan ehdi tukea kaikkia oppilaita autonomian vahvistamisessa. Autenttisuus eli aitous elämän ja maailman ihmettelynä ja eläytymisenä ilmenee harvoin luokkahuoneissa, ellei kokemuksen tasolle erityisesti yllytä. Toimeliaisuuden tilanteissa syntyneellä talonpoikaisjärjellä on annettavaa edelleen – myös 2000-luvun Suomessa.*

Talonpoikaisjärki kiteytyy äidin ohjeessa *ota silimä käthes ja katto*, mikä tuntui joskus tyllyltä. Nykyään tunnistan paremmin sen arvon itsenäisten ajattelutaitojen käynnistäjänä. Ajattelemisen on metodi itsenäiseen ajatteluun. Todellakin, näkee yhä syvemmälle ja laajemmin, kun katsoo yhä uudelleen. Taipumus ilmenee käytännössä siten, että kuuntelee yhä uudelleen luentoja, jotka ovat jo tuttuja tai lukee uudelleen tuttuja teemoja tai kirjoja. Myös eri ihmiset löytävät erilaisia tulkintoja ja tällöin löytyy usein uusia näkökulmia. Lapsuuteni 1960-luvun talonpoikaiskasvatus korosti itsenäisiä toimintavalmiuksia. Elämä toimi viitekehystenä havainnoissa ja omalla ajattelemisella varmuuden tavoittamisessa. Vanhempien arvot ilmenivät monimuotoisessa työn kentässä, mitä omavarainen talonpoikaisuus vielä 1960-luvulla edusti.

Äidin ohjeessa on samaa filosofiaa kuin Sokrateella, missä Sokrates kuvailee Menonin oppimisprosessia: ”Hän löytää tiedon itse omasta itsestään” (Himanka 2010, 209). Sokraattinen prosessi toteutuu itse itseltään kysymällä. Sokrateen mukaan tutkimaton elämä ei ole elämisen arvoista (Fisher 2008, 159). Elämä on kokemuksellinen ilmiö, minkä ilmiöt ovat erilaisia. Elämän fenomeenien tunnistaminen riippuu tietoisuusintressistä. Sokrateen kasvatuksen idea on siinä, että tulemme tietoiseksi tietämättömyydestämme, käsitysten ristiriidoista ja valitsevista ongelmista sekä tunnistamme menetelmän, jolla näitä voidaan käsitellä. (Fisher 2008, 160.) Tunnistettava menetelmä yhdistyy matematiikkaan.

Aatteellisen perinnön perustalta tiedon käytäntöön siirtäminen toteutui vielä 1960-luvun oppivelvollisuuskoulussa. Tiedon omaksumista helpottaa käytäntöyhteyden tunnistaminen. Sisäistynyt opiskelun funktio palvelee tällöin enemmän työn tekemistä, elinkeinoistumista ja maailman ymmärtämistä yhteyksissään elämään. Valistuksen neuvokkuus ilmentää sisäistynyttä ja laajaa sivistyskäsitystä, joka vähitellen väistyi ulkoiseen mitattavuuteen pyrkivässä koulutusajattelussa. Tällöin oppimispolun rakentaminen ammatillistumisen suuntaan jäi poliittisessa ajattelussa teoreettisten opintojen varjoon.

Tulevaisuuden työtehtävissä tarvitaan asiantuntijoita, erikoistumista erityistehäviin (vertikaalinen) ja luovia uusien aluevaltauksien tekijöitä (horisontaalinen). Erikoistumiskehityksen sivutuotteena käsitys luovuudesta on kaventunut, mikä koulu- ja työympäristöissä näkyy toimintakulttuurin rutinoitumisena ja samankaltaistumisena, *konformistisena* kehityssuuntauksena. Konformismilla ja autonomialla on yhteinen lähtökohta – näkemys kontekstin ratkaisevasta roolista elämismaailman merkitysten annossa. Konformismi suosii järjen käytön samankaltaisia merkityksenantoja ja autonomia yksilöllisiä merkityksiä. Järjen rakennemuutosta kuvaa taulukko 4.

Sivistys on sisäistä ja ulkoista. ”Puute on kaikkien taitojen keksijä” tai ”sivistys on kaiken mitta”, ilmentävät eri sivistyskäsityksiä, edellinen on sisäistä ja jälkimmäinen ulkoista. Edellisessä Apollonius (15-100 jKr.) painottaa sisäsyntyistä puutetta (painetta keksiä) ja jälkimmäisen mukaan sivistys on mitta (ulkoisesti mitattavissa). Talonpoikaisesta näkökulmasta inhimillistä sivistystä ei voi asettaa mittauksen kohteeksi niin, että erilaisista kulttuurisista lähtökohdista painottuvat osaamistaipumukset olisivat yhteismitallisia. Sivistyksellä on painopisteitä, ulottuvuuksia ja syvyyttä, jotka liittyvät toiminnallisiin tilanteisiin ja yksilön potentiaaleihin. Kaikille tasa-arvoiset mahdollisuudet tarjoava koulujärjestelmämme on ymmärtänyt tasa-arvoisuuden osittain väärin yhteismitallisuuden merkityksessä. Erilaisuuksien tasa-arvo (yhdenvertaisuus) voi tarkoittaa taipumuksien mukaisia tavoitteita, joista lähtökohdista oppimispolun rakentaminen liittyy merkityskokemuksiin, jolla on yhteys elinkeinoistumiseen tai tietämyksen syventämiseen oppilaan kokemaan mielekkääseen suuntaan. Oppimisen kiehtovuus ja ulkoinen odotus voivat tällöin kohdata jo peruskoulussa.

Edellinen Apolloniuksen sisäsyntyinen elämismaailmallinen käsitys on vastakkainen vallitsevalle ulkoisesti mitattavalle sivistyskäsitykselle. Nykyinen 2016 käyttöön otettu opetussuunnitelma pyrkii inhimillistämään sivistyksen ymmärrystä kohti oppimisen merkityksellisyyttä. 1970-luvulla vahvistunut, samanlais-tava, konemainen ja luonnontieteiden mallin mukainen mitattava sivistys kalpe-nee kulttuuriperäisen mallin mukaisen, kokonaisvaltaisen, valistusvaikutteisen, henkilökohtaistavan ja elämänläheisen sivistyskäsityksen rinnalla. Sivistys on sisäsyntyistä, johon ulkoiset odotukset on kohdistettava.

Talonpoikaista sivistystä eli talonpoikaisjärkeä tarkasteltaessa ei voi ohittaa moraalia ja eettiseen tietoisuuteen kasvamista, mikä korostui kaikessa. Äitini usein siteeraama ohje, ”Hyvä omatunto on paras päänalunen”, muistuttaa omantunnon merkityksestä sivistysihanteessa. Omatuntoajattelu on myös jäänne kirkon vuo-

sisataisesta roolista sivistyksen levittäjänä. Kristinuskon vaikutus talonpoikaiseen sivistyskäsitykseen on ollut vahva. Se ilmeni äitini ja isovanhempieni joka-päiväisestä puheesta, jota voi luonnehtia moraaliseksi. Arjen puhe koostui erilaisista tavoitteenasetteluista, sananlaskuista ja elämänohjeista, joita voi kutsua moraaliseksi puheeksi. Moraali yllyttää ihmistä vaativaksi itseään kohtaan.

Omatunto on eettisten tunteiden keskus, jolla on tärkeä tehtävä ihmisen persoonallisuudessa ja kognitiivisessa kehityksessä. Tällöin lähtökohtana on, että ihminen kykenee tuntemaan itsensä. Myöhempi ihmistiede on korostanut jääviyttä itsensä tuntemisessa, minkä heijastusvaikutuksena voi tunnistaa ulkoisen opettajan suorittaman kouluarvioinnin. Omatunto, introspektio, itsearviointi, itseluottamus ja itsetunto perustuvat oletukseen ihmisen kyvykkyydestä itsensä arviointiin, mikä vielä valistuksen hengessä ja talonpoikaisjärjessä on toiminnan perustaa. Ihmisen autonomiaa tukee tällöin tekojen ja toiminnan moraalinen arvo, joka ilmenee teon perusteista. Kun ihminen työskenteli usein yksin luontoa vastaan, ei ollut muita valintaperusteita kuin oma tunto.

Matemaattinen prosessi on itsearvioinnin, itseltään vaativuuden ja moraalisesta kasvun kannalta samankaltainen. Kognitiivisen kehityksen ja matematiikan ymmärtämisen yleiset teoriat (Piaget, Kohlberg) ovat moraalikehitysteorioita (Koskinen 1995, 147-165). Järjen uudistunut tulkinta ilmenee siinä, että ajattelun kehittymistä ei enää tulkita moraalikehitykseksi, vaan kognitiiviseksi kehitykseksi. Tulkinnassa sisäinen matemaattinen prosessi muuttui ulkoisesti mitattavaksi.

Sokeri (1925) jakaa omantunnon kolmeen ulottuvuuteen: 1) omatunto on moraalisen tiedon saavuttamisen väline (eettinen tieto), 2) omatunnossa on olennaista tietynlainen moraalinen suuntautuminen eli tahto (eettinen tahto), 3) omantunnon olemus koostuu moraalista tunteista (eettinen tunne) (Koskinen 1995). Jokainen näistä ulottuvuuksista tuo esille tärkeän puolen omatunnosta. Omatuntoa luonnehtii nimensä mukaisesti sen persoonallinen ja omakohtainen luonne; ihminen ei tunne omantunnontuskia toisen ihmisen vääristä teoista (Koskinen 1995, 146-165). Talonpoikaisen sivistyksen omaperäisyys, toisten huomioon ottaminen ja ymmärrys oikeista teoista, pohjautuvat käsitykseen omatunnosta.

Omatunto (tieto, tahto ja tunne) perustuu ihmisen syvimpiin näkemyksiin ja tunteisiin siitä, mitkä ovat hyvän elämän (hyvän matematiikan) edellytykset juuri hänelle. Omatunnon ytimessä on ihmisen arvioiva tunne, joka kohdistuu ihmisen tahtoon ja tahdon pyrkimyksiin, mitä äitini siteeraama lause, ”Oo ihmisiksi”, ilmentää. Ihmisiksi oleminen on eksistentiaalinen tila. Luonto- ja ihmisyyhteiydessä selviäminen edellyttää ihmisyyttä, ankaruutta itselleen. Arjen tilanteissa ei voi ajatella pelkästään itseään, vaikka itsensä varassa toimimaan joutuukin.

Omatunto liittyy humanistiseen ihmiskäsitykseen, käsitykseen oikeasta ja väärästä tai hyvästä ja oikeasta, mikä on myös oppivelvollisuuskoulun ihmiskäsitys. Koskinen kiteyttää: ”Omatunto on kaikkien niiden funktioiden summa, jotka ylläpitävät yksilön kokemusta siitä, että tietyt teot tai suhtautumistavat ovat oikeita ja tavoiteltavia sekä toiset vääriä ja vähempiarvoisia” (Koskinen 1995, 142).

”Rehellisyys maan perii”, muistuttaa rehellisyyden ensiarvoisuudesta. Edelleen rehellisyys itselleen edellyttää eettistä tietoa, tunnetta ja tahtoa. Rehellisyystahto ilmenee suorapuheisuutena, koreilemattomuutena ja tarkkaavaisuutena, jossa havaintojen oikeellisuus on ehdotonta. Talonpoika tarvitsee luontosuhteessaan tarkkoja havaintoja. Hyvä sato riippuu hyvistä havainnoista, jossa luonnon merkit, muutokset, järjestykset ja ilmiöt ovat aktiivisen havainnoinnin kohteina.

TAULUKKO 4. Järjen käytön rakennemuutos (Kumpula 2019)

<b>Fokus</b>	<b>Talonpoikaisjärki</b>	<b>Uudistunut järki</b>
Suhde ympäristöön	Autonomia	Konformismi
Toimintastrategia	Synteettinen	Analyyttinen
Näkökulma	Subjektikähtöinen	Objektikähtöinen
Arviointi	Itsearviointi	Kriteeriperustainen
Sivistys	Sisäistä	Ulkoista
Kehitysjattelu	Moraalista	Kognitiivista

Talonpoikaisjärki herättää tunteita ja mielikuvia eri suuntiin. Milloin talonpoika on tulkittu hallintovaltaa vastaan pökkuroivaksi sisäänpäin kääntyneeksi juntiksi, milloin suomalaisen kansankulttuurin parhaaksi edustajaksi. EU-ajan kynnyksellä talonpojan itsevastuuseen ei enää luotettu. Yksin pellolla tai metsässä häärivä talonpoika teki työnsä omien havaintojensa varassa, mikä ei ollut enää sivistysihanne. Kun kansatieteilijät ylistivät elämässä tarpeellisia hyveitä, kädentaiteja, talonpoikien itsenäisyyttä ja suomalaista sisukkuutta, toisaalla julkisuudessa kritisoitiin maatalouden aiheuttamia hidasteita talouskasvulle. Tällöin talonpoikaisjärki ja uudistunut järki eivät enää kohdanneet. Valistusaate haudattiin synnyinsijoilleen.

Talonpoikaisjärki on työn kontekstiin sitoutunutta tietoa, tunnetta ja tahtoa. Tilanteeseen sitoutunut oppiminen kuvaa strategiaa, joka yhdistää havaintoja (synteesi). Autonomian perustalta on toimittava järkevästi niillä ehdoilla, jotka ovat tilanteessa käytettävissä. Synteesi on eteenpäin ja analyysi taaksepäin työstämistä. Haapasalo (2000, 183) luonnehtii synteesiä (ks. myös luku 6.2.3): Synteesisä asiat liitetään tiedossa olevien tai juuri sillä hetkellä tunnetuiksi oletettujen tosiasioiden ja loogisten päättelysääntöjen mukaisesti tiettyyn järjestykseen, jonka perusteella yritetään päätyä johonkin tavoiteltavaan, usein vielä sillä hetkellä tuntemattomaan tilaan tai konstruktion. Talonpoikaista sivistyskäsitystä voi pitää esimerkkinä tilanteisiin sitoutuneesta synteettisestä oppimisesta, jossa sitoutuminen työtehtäviin ja yhteisön jäseneksi ohjaa toimintaa. Tällöin yhteisön sensitiivisyys lisää mahdollista potentiaalien aktivoitumista. Motivaatioperustana on tällöin holistinen hahmotus (horisontaalinen).

#### 4.2.3 Matematiikka funktionalisoituu kulttuureiksi

Tutkimuspolulla seuraavaksi kohtaan yksilön kasvun osana kulttuurievoluutiota, missä matematiikka vaikuttaa evoluutioon perustuvan kulttuurikehityksen taustalla. Tällöin ihmisen kyky kulttuuriin on evoluutiokehityksen tulos (Ylikoski & Kokkonen 2009, 231). Viime vuosisadan tieteellistymisen mukanaan tuoman sivistystyön kulttuurievoluutio on ollut nopeaa. Maanviljelyn keksimistä seuranneet vuosituhatkannat ovat olleet kiihkeän kulttuurisen vaihtelun ja kehityksen aikaa. (Niiniluoto 2009, 105.) Yhteiskunnallinen kehitys eli kulttuurievoluutio on matematiikan kehittymisen ja soveltamisen historiaa. Historiallisessa kulttuurievoluutiossa hankitut käsitykset, taidot ja opitut symboliset merkitykset voivat periytyä (Niiniluoto 2009, 104), mistä esimerkkinä on edellisissä alaluvuissa kuvaamani talonpoikainen sivistysperintö ja talonpoikaisjärki. Funktionalisoituminen tarkoittaa tällöin merkitysten järjestymistä ja voimaantumista.

Tietoinen tai tiedostamaton matematiikka voi funktionalisoitua erilaisiksi kulttuurituotteiksi (artefakteiksi), ammateiksi, sovellutuksiksi tai oppimisen ja maailman ymmärtämisen tavoiksi. Joidenkin oppilaiden kohdalla oppimisen funktio on jäänyt löytämättä ja ote matematiikkaan on jäänyt saamatta (opettajakokemus). Tällöin suuntautuminen matematiikkaan on jäänyt epäselväksi ja

luontaiset taipumukset tunnistamatta. Matematiikka ei tällöin ole palvellut yksilöllisiä sivistystarpeita tai tuottanut kulttuurisia innovaatioita yhteiskuntaan. Omaksuttu on koteloitunut tai jäänyt pinnalliseksi, jolloin matematiikan opiskelun mahdollistamaa tajunnan laajentumista ei ole tapahtunut – oppimisen mieli on tällöin hukassa. Matematiikan funktionalisoitumisen kasvupohja puuttuu.

Heidegger muistuttaa olemisen mielestä: on toimittava suhteessa siihen maaperään, missä ontologiset peruskäsitteet ovat versoneet (Heidegger 1926, 22). Tällöin aikaisemmin ollut palautetaan uudelleen käsittelyyn (Wiederholung). Yhteiskunnassa olemisen mieli on suhteessa menneeseen ja näin osa nykyisyyttä, missä matematiikan ymmärtäminen tapahtuu. Toiminnallinen todellisuus (Wirklichkeit) ei tällöin vastaa matematiikan ideaalista todellisuutta (Wahrheit). Matematiikan funktiot viittaavat tällöin yksilöllisesti elämismaailmassa koettuihin merkityksiin. Matematiikan yksilöllisiä funktioita on jatkotarkastelun kohteena myös politiikan ja tieteen kentissä (alaluvut 5.3.1 ja 6.3.1). Kokemuksen merkitysfunktio johdattaa oppimista ja matematiikan ymmärrystä eteenpäin.

Vuorovaikutukset ympäristön ja olemassa olevan kulttuurin kanssa suuntaavat kulttuurin kehitystä. Edellä kuvatun talonpoikaisen kulttuurin sisäinen yhteisöllisyys tuki kaikkien osallisuutta ja työkelpoisuutta. Rakennemuutos valjasti kilpailulle yhteisöllisen kulttuurin ja omavaraisuuden ihanteen. Uudet kasvatus- ja oppimistavoitteet vähitellen mursivat omaehtoisuuden ja itseohjautuvan taipumuksen normatiivisempaan suuntaan. Matematiikan tiedeperusta yleisten ideaalisten lainalaisuuksien todistamisena ei kohdannut kaikkien autenttisia taipumuksia. Ihminen ei muuttunut matematiikan muutoksen mukana. Tällöin osa ihmisistä suistui juuriltaan tai vieraantui heihin kohdistuvista odotuksista. Tulokintani syrjäytymisen ja syrjäyttämisen perustasta on näin kulttuuriperäinen.

Talonpoikaiskulttuurin murenemisen jälkeen suomalaisuus ja suomalainen kulttuuri on polarisoitunut. Kulttuurinen rakennustyö on käynnissä ja uusia alakulttuureja syntyy, joiden vuorovaikutus on tavoiteltavaa, myös suhteessa matematiikkaan suuntautumiseen. Tiedonintressit rakentuvat usein kulttuuriperäisesti ja vallitseva kulttuuri vaikuttaa yksilön tavoitteisiin. Matematiikan ja kulttuurin vuorovaikutus on vähintäänkin kaksisuuntaista: matematiikan kehitys vaikuttaa kulttuurin kehitykseen ja kulttuurin kehitys vaikuttaa matematiikan kehitykseen.

Kulttuurit syntyvät eri aikakausien henkisten virtauksien funktiona (NSK 2018). Tällöin matematiikka eri muodoissaan on pääosin näkymätön vaikuttaja (myös Näätänen 1999; Lahtinen 2017). Matematiikka on piiloutunut luonnon ja yhteiskunnan rakenteisiin, järjestelmiin, laitteisiin, säännönmukaisuuksien ym-

märtämiseen ja toimintataipumuksiin. Matematiikka on osa ihmisten tiedostamatonta mentaliteettia ja yhteisöjen järjestymisen struktuuria, joilla on monituhatuotinen kehityshistoria. Kulttuuri edustaa aikakausien henkisyudesta abstrahoituneita toiminnallisia ja tuotannollisia tapoja. Edellisessä alaluvussa kuvasin talonpoikaista sivistyskäsitystä ja mentaliteettia, joiden perustalta rakentui kulttuuri, jossa toiminnallisella matematiikalla on keskeinen näkymätön rooli. Kulttuuri sisältää arvoja, joita yhteisö arvostaa ja joiden pohjalta yhteisö toimii. Matematiikka on yleisesti arvokkaaksi koettu ja kehitystä indikoiva (mm. Clarkson 1995). Silti harvoin analysoidaan sen merkityksiä kulttuurissa.

Funktio viittaa toimintaan ja eri yhteiskunnallisten tehtävien toteuttamiseen lähtökohtanaan ihmisten kokemus ja osaaminen. Tällöin ihmisen harjoittama toiminta eri aikakausina on kulttuurin kehittymisen perustaa. Funktionalisoitumista painottaen ihmislähtöisyyttä kuvaa fenomenalistuminen, missä autenttinen ihmisen kokonaisuus, muisti, mielikuvat, äly, aistit ja elämyksellisyys kohtaavat luoden uutta ymmärrystä (Kaila 1967, 298) ja voimaantuessaan luovat uutta kulttuuria. Funktionalisoituminen ei tässä yhteydessä viittaa tieteelliseen selittämisen tapaan, funktionalismiin, eikä reduktiiviseen käsitykseen tieteellisestä maailmankuvasta, vaan tarkoituksenmukaisuus ja funktionaalinen suuntautuminen ohjaavat matematiikan funktionalisoitumista kulttuuriksi. Tällöin funktio tarkoittaa tarkoituksenmukaista yksilön itsesäätelyä (ks. myös luku 5.3.1).

Suomessa modernisoituminen ja suunnittelutalouden kehitys aikaansaivat muutoksia maailmankuvassa, elinkeinorakenteessa, koulutusjärjestelmässä ja arjessa, sekä myös tavassa ymmärtää matematiikka. Arkikäytäntöön sitoutunut matematiikka hahmottamisen, organisoimisen ja rakentamisen taitona (tekniikka) kehittyi teollistamisen ja liiketalouden (teknologia) välineeksi. Yksinkertaistetusti yhteiskunnalliset muutokset ovat seurausta matematiikalle valituista sovelluskohteista, joita poliittinen päätöksenteko tukee. Muutosten toteutuminen osoittaa ihmisten taipumista, taipumusta; sopeutumista ja vaikuttamista.

Matematiikka muuttaa maailmaa ja maailma muuttaa matematiikkaa – kulttuurin syntyprosessi on vuorovaikutteinen. Kuitenkaan yksin matematiikka ei muuta mitään, vaan ne ihmiset, jotka luovat matematiikkaa tai valitsevat, käyttävät, soveltavat ja tulkitsevat sitä. Ihmisen osuus korostuu. Diversiteetti kasvaa, jos heterogeenisyys lisääntyy. Kulttuurinen monimuotoisuus mahdollistaa kestävimmän kehityksen. Ihmisen valinnat ja sattuma ohjaavat yhä enemmän kulttuurin kehitysprosessia ja sopeutumista muuttuvaan ympäristöön. Kulttuurievoluutio on ihmisten maailmassa nopeampi kuin biologinen evoluutio. Todennäköisyyksinä ennakoitava tilastollinen malli on yksi tapa kuvata evoluutioprosessin

matemaattista abstrahointia, mutta usein ihmisen vaikutus jää mallissa tunnistamatta. Tällöin luonto ja kulttuuri muuttuvat ikään kuin ihmisestä riippumatta, vaikka ihminen vaikuttaakin taustalla.

Keskustelua matematisoituvan luonnontieteen ja kulttuurin (kirjallisuus) keskusteluyhteyden puutteesta nostatti englantilainen lordi Charles P. Snow (1905-1980). Snown aloittama keskustelu on edelleen ajankohtainen, koska matemaattiset tieteet ja kulttuuritieteet ovat eriytyneet eri sfääreiksi. Kulttuuritieteet ovat ottaneet mallia luonnontieteistä, jolloin Snown tunnistama ongelma ihmisen osuudesta ilmenee edelleen. Snow (1998, 100-105) oli huolissaan tieteenalojen lisääntyvästä eriytymisestä monimuotoisuuden ja tieteellisen yhtenäisyyden väistyessä. Tieteiden välisen yhtenäisyyden näkökulmaa kulttuurievoluutio puoltaa. Matematiikka tieteen perustana kehittyy ihmisen, luonnon ja kulttuurin vuorovaikutuksessa (sosiobiologia, biofysiikka, psykologia, antropologia).

Amerikkalainen biologi Edward O. Wilson (1929- ) korostaa luonnon sisäistä järjestystä ja tiedon yhtenäisyyttä, konsilienssia. Inhimillisellä mielellä on fyysikaalis-biologinen perusta, joka mahdollistaa geneettisen ja epigeneettisen periytyminen (Wilson 1998, 111). Ajattelun kyvyt ja taipumukset eli epigeneettiset säännöt, mielen kehityksen perinnölliset säännönmukaisuudet suuntaavat kulttuurievoluutiota toisten jäädessä syrjään (emt. 186). Petter Portinin (2012, 27) mukaan termillä epigeneettinen on täsmällisempi merkitys. Sillä tarkoitetaan yksilön tai solun fenotyypin tai geenien ilmenemisen perinnöllisten muutosten tutkimusta. Darwin piti hankittujen ominaisuuksien periytymistä, ei ainoastaan mahdollisena, vaan todennäköisenä. (emt.33.) Epigeneettinen periytyminen mullistaa käsityksemme periytyminen mekanismista. Periytyvää eivät olekaan ainoastaan geenit, vaan myös niiden toiminnan tilat. (Portin 2012, 32.) Talonpoikainen kulttuuri on esimerkki epigeneettisestä periytymisestä. Yleisesti kulttuuriperäisiä matematiikan funktioita voi pitää epigeneettisinä piirteinä.

Wilsonin (1998, 142-143) mukaan kahtiajako, kasvatus ja luonto, synnyttää hedelemättömiä eroja korostavaa, kuten sukupuolta tai ihmisluontoa erikseen käsitteleviä keskusteluja. Hän kritisoi yhteisen käsitteellisen kielen puutteita ihmistieteilijöiden ja luonnontieteilijöiden välillä, missä väärinkäsitykset syntyvät usein lähtökohtia koskevasta tietämättömyydestä (emt.) ja eri tieteenaloilla esiintyvistä tutkimuskohteen ja metodin rajauksista. Keskeytyksenä jatkuvalla eriytymiselle on geenin ja kulttuurin koevoluutio, missä geeni ja kulttuuri vaikuttavat vastavuoroisesti. Geneettinen evoluutio on synnyttänyt rinnalleen kulttuurievoluution, joka on valintaan perustuvan evoluution laajennus. (Wilson

1998, Portin 2012.) Koevoluutioon ovat päätyneet sosiobiologit, psykologit ja antropologit eri lähtökohdista (Wilson 1998, 143). Valistuksen vaikutuksesta voimistunut luonnonmukaisen kasvatuksen idea (Comenius, Pestalozzi, Rousseau), vaihtoehtopedagogiikat (Steiner, Freinet, Montessori) ja kokonaisopetuksen uudistajina tunnetut Dewey ja Hollo rakentavat oppimisen kulttuurievoluution perustalle (myös alaluvut 5.3.1 ja 6.3.1).

Evoluutioteorian peruseräpäätteenä ovat muuntelun periaate, perinnöllisyyden periaate ja valinnan periaate (Lewontin 1970, 1982). Näistä muuntelun periaate tarkoittaa sitä, että kaikki eliöt muuntuvat niin, että luonnossa ei voida havaita kahtakaan täysin identtistä yksilöä. Perinnöllisyyden periaate puolestaan tarkoittaa sitä, että muuntelusta ainakin osa on perinnöllistä siten, että sukua toisilleen olevat yksilöt muistuttavat toisiaan enemmän kuin populaation yksilöt keskimäärin. Muuntelun periaatteen voi yhdistää yksilönä kasvamiseen, mikä lisää kulttuurista monimuotoisuutta ja siten kestäväää kehitystä.

Evoluutioteorian muuntelun periaatetta voidaan soveltaa ihmisen kasvattamisessa kahdella tavalla, tukemalla erilaistumista (autonomia) tai yhdenmukaistumista (konformismi). Opetuksessa voidaan ottaa huomioon yksilölliset erot ja edistää vuorovaikutusta erilaisten toisten kanssa ohjaamalla erilaiset merkitykset, symbolit ja kieli kohtaamaan. Kulttuurievoluutiossa hankitut kulttuuriset ominaisuudet voivat periä suoraan jälkeläisille, jolloin kulttuurievoluutiolla on lamarckistisia piirteitä (Niiniluoto 2009, 104). Tällöin hankitut ominaisuudet ovat yksilöllisiä temperamenttieroja, joiden merkitystä Lamarck (1744-1829) biologisen epigeneettisen periytyvyyden teoriallaan vahvistaa.

Kulttuurievoluutioon perustuvassa koulutusajattelussa oppimisen lisäarvona on kasvuympäristöissä luonnostaan opitut taidot. Tällöin tavoitteena on tavoittaa kaikkien ajatusmaailma kouluopiskelussa. Nykykeskustelussa puhutaan koulupudokkaista, syrjäytyneistä tai kiusatuista, joiden määrä on kasvava. Kulttuuri-evoluutioon perustuvan ajattelun mukaan syyt siihen, että oppiminen ei kosketa tai matematiikka ei funktionalisoidu, johtuvat ajattelutaipumusten lähtökohtaisista eroista. Wilson (1998, 130) korostaa emootioita ensisijaisina rationaalisesa ajattelussa. Tällöin irrationaalinen merkitys kelluu rationaalisen yläpuolella. Vaikka matematiikassa on puhtaita määritelmiä ja teoreemoja, niiden keksimiseksi ei ole puhtaita ajatuksia. (emt.)

Professori Raimo Lehden (2000, 18) mukaan matematiikka antaa mallia tieteelliselle tutkimusmetodille ilmentämällä ymmärryksen kehittymistä ja järjestymisen struktuuria loogisella rakenteellaan. Yleisesti matematiikka on vaikuttanut ilmiöiden älyllisen lähestymisen metodina, selitysten löytäjänä, kätkeytyjen re-

laatioiden paljastajana, käsitteellisten aseiden takojana, sekä ulkomaailman hallitsemisen ja hyödyntämisen teknisenä apuvälineenä. (emt.) Matematiikalla on tarkoituksia eli funktioita maailman käsittämässä ja käsiin saamisessa. Matematiikan yleinen tulkinta on painottanut enemmän sen välineellisiä merkityksiä kuin itseisarvoisia totuuteen pyrkimisen, ymmärryksen syvenemisen, maailman-kuvan rakentamisen ja persoonallisen kasvun merkityksiä.

Kulttuurievoluution perustalta uudistuminen tapahtuu filosofisen emergenssin (Lewes 1874) eli ilmaantumisen ajatuksessa. Emergenssi tarkoittaa tietoteoreettista tai ontologista kantaa, jossa primääristä syntyy sekundäärisiä ominaisuuksia tai taitoja, joita ei aikaisemmin ollut olemassa. Emergenssiin sisältyy näin luovuuden aspekti, joka reduktiivisista maailmankäsityksistä usein puuttuu. Tutkimuspolun holistiseen käsitykseen (horisontaalinen) sisältyy emergenssi, koska holismin mukaan kokonaisuus on jotakin muuta kuin osiensa summa. Yksilöllinen luovuus ja tietoisuus on tällöin kulttuurin emergentti ominaisuus.

Matematiikan yksilölliset tai yhteiset mentaaliset merkitykset voivat funktionalisoida kulttuureiksi ja yhdistää ihmisiä, kuten musiikki, taide, tiede, elämäntapa, arkkitehtuuri, design, lifestyle, artefakti, ilmiö tai järjestelmä. Näkymätön matematiikka sisältää idean, joka tuntuu, kuulostaa, näyttää tai vaikuttaa hyvältä ilmentäen kauneutta, sopuisuutta, toimivuutta ja järjestelmällisyyttä.

## 4.3 Miten matematiikka ilmenee kulttuurin kentässä

### 4.3.1 Matematiikka sisäisenä ymmärryksenä eli intuitionona

Miten matematiikka ilmenee kulttuurin kentässä, jäsentyy ja tiivistyy tutkimuspolulla sisäisen ymmärryksen (intuitio) ja matematiikan ulkoisten vaikutusten (tiede) kautta. Tutkimuspolulla matematiikka länsimaisen kulttuurin osana painottaa talonpoikaisia juonteita (alaluvut 4.2.1 ja 4.2.2) kekseliäisyyden ja ongelmanratkaisun perustana. Yksilöllinen intuitio on tällöin matematiikan perusta suhteessa toimintaan ja tieteeseen elämismailmalähtöisesti.

Intuitio yhdistää järjen ja havainnon toiminnalliseksi funktioksi, mikä suuntaa opiskelua ja työtä eli toimintaa. Toimintaan sitoutunut intuitio saa oikeutuksensa käytännössä, jossa on uskottava havaintonsa, muistiinsa ja järkeensä. Epis-

teemisen oikeutuksen perustana talonpoikaisjärki intuitioon perustuvana ei enää kelvannut koulutusreformissa 1970-luvulta lähtien, vaan oikeuttaminen vaati objektiivisiksi sovittuja perusteita. Vaikka tieteen tekijät eivät hylänneet intuitiota, sen ongelmaksi koitui oikeuttaminen, näyttö perustelusta. Tiedon ulkoinen korostus toi mukanaan keinotekoisia piirteitä matematiikan ilmaisemiseen. Intuitio on ollut ja on edelleen ihmisen tietämisen perusta, jossa ymmärrys tietoteoreettisessa merkityksessä yhdistyy yksilön generatiivisen konstruktio taipumuksen mukaisesti. Kantin (1781, 113) mukaan havaintohetkeen sisältyvä intuitio sisältää silmänräpäyksen ja moninaisuuden.

Matematiikan syntyä ihmisessä ei ole ollut tapana tulkita, koska matematiikan ilmaisema tieto on ymmärretty ihmisestä riippumattomaksi. Matemaattiseen tietoon liitetyn käsiterealismin (esim. Juntunen 1987) alaan ei ole kuulunut tulkita yksilöllisiä taipumuksia tai lähtökohtia. Kun ihminen oppii uutta, ihminen muuttuu sisäisesti, korostavat monet humanistiset, kognitiiviset ja konstruktivistiset oppimisteoriat. Oppiminen tapahtuu sisäisyydessä. Oppimisprosessissa tieto sisäistyy assimilaatiossa (uusi tieto yhdistyy vanhaan), akkommodaatioissa (vanha tieto järjestyy uudelleen) ja niiden yhteen kietoutuneissa muunnelmissa. Matemaattinen tieto on sisäisesti ymmärrettävä, jotta se voi muuttaa ihmisen aikaisempaa käsitystä.

Sisäinen ymmärrys on yksilön tai jopa yhteisön sisäistynyt mielellinen merkitysjärjestelmä, joka tulkitsee uutta tietoa, vahvistaa tai sammuttaa aikaisemmin opittua. Jokainen ihminen tekee näkemästään, kuulemastaan ja lukemastaan omat tulkintansa. Uusi tieto vaikuttaa tai ei vaikuta – jättää jäljen tai menee havainnon ohi. Sisäinen ymmärrys matematiikasta sisältää aikaisemmin opittuja yksilöllisiä tulkintoja ja mielellisiä merkityksiä, jotka koetaan persoonakohtaisesti yksilön tavassa ymmärtää matematiikan merkitystä, kokonaisuutta ja rakennetta. Evoluutioperustaisuus tarkoittaa, että yksilönkehitysprosessia ohjaavat erilaiset perityt ja opitut generatiiviset ohjeet, jotka aktivoituvat eri aikoina ja eri paikoissa (Ylikoski & Kokkonen 2009, 165).

Sisäinen kokemus yhdistyy intuitiossa. Käsite intuitio tulee latinan käsitteestä *intueor*, katsella, katsoa, nähdä, ajatella, miettiä, minkä mukaan *intuitio* on välitön tajuaminen, henkinen katseleminen, oivalluksenomaisen synteettinen todellisuuden ymmärtäminen (Salonen 1995). Intuitiota voi kuvailla näkemykselliseksi, oivalluksenomaiseksi tajuamiseksi tai tarkkaavaiseksi katseluksi. Tieteen termipankin (TTP 2017) mukaan intuition määritelmä on kyky kokea asioiden todellinen laita ilman, että kykenee selittämään tai perustelemaan kokemustaan. Intuitio tässä merkityksessä esiintyy usein oppilaan henkilökohtaisissa ohjausti-

lanteissa tai koevastauksissa. Tässä merkityksessä intuitio koskee tutkimukseni perustaa, tietoa ennen käsitteitä ja välittömästi käyttöön otettavaa tietoa, johon matemaattinen hoksaamisen päättelyketjun rakentamisena perustuu.

Matematiikan sisäinen ymmärtäminen vastaa kysymykseen, miten matematiikka ilmenee sisäisesti. Sisäinen ymmärtäminen, intuitio, antaa arvon ymmärtämisen kokemukselle sellaisenaan. Tällöin kokemusta voi kutsua itseisarvoksi, arvokkaaksi itsessään (alaluku 2.3). Itseisarvo ilmenee matematiikan merkityksenannossa. Itseisarvoinen matematiikan merkitys voi liittyä totuuden ja varmuuden tavoitteluun, kykyyn ymmärtää itseään ja sen kautta paremmin myös toisia tai maailmankuvan rakentamiseen. Matematiikan ymmärtämiseen liittyvä intuitio sopii paremmin yhteen sisäisen kuin ulkoisen oikeuttamisen kanssa, koska sisäinen oikeutus perustuu yksilön mentaalisen ja kontekstuaalisen yksilöllisyyden tunnistamiseen (vrt. Lammenranta 1987, 199). Matematiikan ymmärtäminen antaa oikeuttamisen perustaa intuitiiviselle kokemukselle ja toisinpäin. Itseisarvoisen intuitiivisen tulkinnan mukaan matematiikka on piiloisia potentiaaleja tai ajattelemisen aktuaaleja.

Matematiikka on sisäistä puhetta, kokemuksen reflektiota, mikä yhdistyy intuitiossa. Sisäisessä puheessa kyselen itseltäni, mitä havaintoni tarkoittavat. Matematiikassa vääristyneesti omaksutut perusteet ajattelulle aktivoituvat yhä uudelleen niin kauan, kunnes mieli keksii korjauksen vinoutuneelle ajatukselle. Ellei matematiikan mielellinen idea ole polunomaisesti käyttöön otettavissa tilanteessa, ollaan aina kuin uudessa tilanteessa, eikä mieli tällöin aktivoidu muistissa olevista matemaattisen tiedon perusteista. (Kumpula 2008.)

Eri ihmisten intuitiivinen tieto matematiikasta on erilaista. Tällöin intuition erilaiset ihmislähtöiset ominaisuudet painottuvat eri tavoin. Bahmin (1995) mukaan kaikki tietäminen on intuitiivista. Hän korostaa havainnon kokonaisuuden tajuntaa, mikä intuitiossa on välitön ymmärrys ja tajuaminen. Intuitiossa on kuusi ominaisuutta: välitön aavistus (immediacy of apprehension), läpinäkyvyys (transparency), läsnäolo (omnipresence), lajit (kinds), vaihtelu (variability) ja rajat (limits). (emt. 5.)

Välitön aavistus (immediacy of apprehension) sisältää neljä faktoria, ymmärrys (apprehension), välittömyys (immediacy), ilmaantuminen (appearance) ja intuition kokija (intuiter). Intuitio yhdistää monia tajunnan tiloja useista objekteista, kuten kokemuksesta, piirteistä, ulottuvuudesta, tunteesta, ideasta tai suunnasta hahmottuvana. Ykseyden moninaisuus, intuitio, yhdistää yhdeksi muodoksi monia tunteita, paradokseja, muotoja, frustraatioita tai muita kokemuksia. Intuitio

on näin monidimensionaalinen ja monirelationaalinen. Kompleksinen ja monimuotoinen intuitio on yksi havaitsemisen akti. (Bahm 1995, 5-7.)

Intuition läpinäkyvyys (transparency) ilmenee kuten näemme silmien tai silmälasien kautta, ilman että näemme silmiä tai silmälaseja. Emme koe intuitiota. Kaikki tietäminen liittyy intuition, joten intuitio on läsnä oleva (omnipotent). Kun tieto saavuttaa tajunnan eli ilmaantuminen on intuitiolla tajuttu, intuitio jää jäljelle potentiaalina, ei aktuaalina. Intuition lajeja (kinds) on monenlaisia, koska myös tajunnan lajeja on erilaisia eri ihmisillä. Intuition lajit perustuvat analogioihin, esimerkiksi samanlainen – erilainen akselilla. Ratkaisutapojen analogiat syntyvät mietiskelemällä (inferring), mikä vastaa tutkimuspolun ajattelemista. Mietiskelyanalogiat ovat kielellisiä, havaitsemiseen liittyviä tai toisiinsa kietoutuneita. (Bahm 1995, 7-8, 163-164.)

Intuition vaihtelu (variability) sisältää neljä faktoria, kuten edellä välitön aavistus: ymmärrys, välittömyys, ilmaantuminen ja intuition kokija. Intuition kokijan ymmärrys vaihtelee kompleksisuuden, suuruuden ja intensiteetin suhteen vaihdellen sisällöltään yksinkertaisesta monimutkaiseen liittyen huomiopulssin pituuteen ja intuition kokijan vitalisuuteen. (Bahm 1995, 9-10.) Intuitio ilmenee sekä mielessä että kehossa, yhtä aikaa tai vuorotellen, erilaisena tai samanlaisena kuin jollakin toisella.

Bahmia tulkiten, mitä laajempi on intuition kokijan ymmärryksen mukainen kompleksisuus, suuruus, intensiteetti ja tyyli, sitä suurempi on divergentti luovuus, joka usein unohtuu matematiikan hyödyllisyyttä arvioitaessa. Tällöin käsitys virheestä saa aivan uuden ulottuvuuden. Virhe ei olekaan virhe, vaan havainto pohjautuu yksilön mielessä yhdistyneisiin merkityksiin. Saattaa olla, että matematiikassa voi olla hyvä juuri silloin, kun näkee vain sen, mitä on havaittu ennenkin tai mitä opettaja odottaa, eikä muuta. Kuitenkin opitun käytettävyyden ja uuden luomisen kannalta on merkitystä juuri uusien merkitysytteyksien löytämisellä. Matematiikan luokkaopetus- ja yksityisopetustilanteissa itseluottamuksen vahvistamiseksi on hyödyllistä ymmärtää näitä yksilöllisiä eroja, jonka juurille kurkotan seuraavassa alaluvussa muistellen omia koulukokemuksiani. Kuvaukseni on esimerkki intuitiosta, jota vertaan tulkintoihin filosofi Henri Bergsonin (1859-1941) intuitiosta.

### 4.3.2 Matematiikka kokemukseni reflektiona

*Matemaattisen tehtävän ratkaisussa tapahtuu mieleen putkahduksia, jotka sisältävät monenlaisia polkuja mahdollisiin ratkaisureitteihin. Mieleen putkahdus on niin nopea, että se saattaa häirittyinä saman tien häipyä tietoisuudesta. Toimiakseen täytyy valita jotakin. Sisäisen puheen vaiheita voi luonnehtia tunnusteluksi ja tunnisteluksi, mitkä voin tunnustaa itselleni intuitiossa.*

Matematiikka kokemuksen reflektiona tarkoittaa keskustelua itsensä kanssa, jolloin se on osa itsearviointia (introspektio). Matematiikan oppiminen muuttaa ihmistä, mikä on sisäisen kokemisen kysymys. Tieto, joka on vaikuttanut ihmisen tajuntaan, vaikuttaa edelleen ja aktivoituu tilanteissa, jossa uudet ja aikaisemmat mielelliset merkitykset kohtaavat. Ihminen on holistinen mielen ja kehon yhteen sulautuma, jolla on erilaisia tajunnallisia ulottuvuuksia, siis kokonaisuus, johon merkitys kiinnittyy. Tiedolla on elämyksellinen merkitysyhteys tajuntaan vaikuttavuutensa perusteella. Filosofi Bergson väittää, ettei filosofian maailmaan voi päästä kukaan, jolla ei ole välittömän itsensä havainnoimisen kykyä (Aspelin, 1963, 524). Hän puolustaa sisäisen ymmärryksen intuitiivista rakennetta aika-laistensa rationaalisia ihanteita vastaan. Bergsonin intuitio sopii kuvaamaan talonpoikaiskulttuurissa toteutunutta sisäistä ymmärrystä, mikä 1900-luvulta ja etenkin Wienin piirin (1928-1934) jäsenten vaikutuksesta kehittyi rationaalisia ihanteita suosivaan käsitteellisesti ilmaistavaan ja analyttiseen suuntaan.

Bergsonin mukaan intuitio on mielen tietoa mielestä, olioiden näkemistä sisältä tai puhtaiden ideoiden näkemistä. Bergsonin mukaan elämää ohjaa elämänvoima, e'lan vital, elämän hyöky, elämän vipuvoima, joka sisältyy kaikkiin yksilöihin. Hänen mukaansa perimmäinen totuus on jakamatonta muutosta ja liikettä. Tiedolla on sisältö (matter) ja muoto (form). Sisältö saavutetaan aistein ja muoto koostuu suhteista, joista systemaattinen tieto muodostuu. Muoto voidaan tietää ilman sen sisällön tietämistä. (Maula 1995, 31.) Bergsonin intuitioon perustuva teoria tietämisen lähteistä kumoaa absoluuttisen tiedon mahdollisuuden. Myös Heideggerin olemisen ja ajan yhteen kietoutuminen viittaa dynaamisuuteen.

Bergsonin ajattelu perustelee erilaisten koulukuntien, kuten järki/havainto eli rationalismi/empirismi, idea/olio eli idealismi/realismi tai substanssi /modus vastakkainasettelua ihmislähtöisillä eroilla. On luonnollista, että ihmisten ajattelun polut ovat erilaisia, koska ajattelun lähtökohdat ovat erilaisia. Bergson puolustaa teoriallaan Kantin synteettinen tieto apriori olemassaoloa, mikä ei saanut

matematiikan filosofien tukea rationalismin voimistuessa viime vuosisadalla. Tähän tieto-opilliseen ongelmaan palaan tieteen kentässä (luku 6). Seuraavassa oma kokemukseni kuvauksena intuitiosta, minkä kautta lukija voi tunnustella omaa kokemustaan. Samanlaisia kokemuksia ei ole, mutta samankaltaisia kokemuksia saattaa ilmetä. Lähtökohtana on edellä esittelemäni Bahmin (1995) intuitio sisäisenä tietona, joka liittyy kaikkeen tietämiseen.

*Intuitio on jotakin, mitä tapahtuu minussa, kun minun on ratkaistava matemaattinen tehtävä. Intuitiossa yhdistyy kaikki minuudessa oleva ja tehtävästä aistittava. Keho tekee työtä. Posket punottavat, iho hikoilee, sydämen syke kiihtyy, silmät katsovat intensiivisesti kohteeseen, katse nousee yli horisontin tai maha mouruaa. Minua ja matematiikkaa ei voi oikeasti erottaa, koska minä ja matematiikka olemme samassa kehossa. En minä ajattele, vaan minussa ajattelee.*

*Aistin paljon sellaista, jota en voi pukea sanoiksi. Erilaiset kuvat ja ymmärtämisyhteydet ikään kuin valahtavat yhtäkkiä havaittaviksi. Tietoisuuteen voi putkاهدella erilaisia vaihtoehtoja. Joskus voi hämmästyttävällä tavalla tunnistaa välittömästi idean, mutta se voi hävitä tietoisuudesta epäilyn vuoksi. Tietoinen minä saattaa useinkin epäillä, unohtaa idean ja alkaa rakentaa tietoisempaa reittiä ratkaisuun.*

*Miksi minä epäilee? Olenkohan epäilyssäni kuin Descartes: ”Gogito, ergo sum” (ajattelen, siis olen). Descartes epäili tietämistään, siis sitä, mistä hän on tietoinen. Epäily kuuluu olemuksellisesti ihmiseen. Epäilyyn päädymme aina, kun olemme tietoisuuden rajalla siten, että emme ole täysin selvillä siitä, mistä tieto tuli. Epäilyllä on syynsä – pyrkimys varmuuteen.*

*Epäillessäni tarkennan aistejani, voin korjata virheitäni ja vakuuttua. Voin itse tunnistaa, milloin aistini ovat olleet riittävän valppaat. Tiedän, milloin tehtäväsä saattaa olla virhe. Virheen tunnistus voi tapahtua myös jälkikäteen. Jossakin tilanteessa vain putkahtaa mieleen ajatusharha tai päättelyn oikea järjestys. Erilaiset tilanteet aktivoivat intuitiota. Jossakin täysin erilaisessa tilanteessa ongelma yhtäkkiä ratkeaa.*

*Kun matemaattinen intuitio on vahvistanut kokemusta ja minä olen vakuuttunut, se ei välttämättä riitä oikeutukseksi. Matematiikkani oikeutus vaatii ulkopuolisen arvioitsijan. Jotta voin vakuuttaa ulkopuolisen, tarvitsen kielen. Mielellisten kuvien muuttaminen kieleksi on haastavaa. Mielellisten kuvien ilmaisu voi olla matematiikkaa. Kun käytän matematiikan käsitteellistä kieltä, minulta jää paljon kertomatta. Käsitteelliseksi muuntunut tieto on kuin jäävuoren huippu, hippunen ajatusketjujen ryppäästä.*

*Kun koko ajan ajattelen, herää kysymys, milloin ajattelemisen muuttuu matematiikaksi. Onko ajattelemisen matematiikkaa vain silloin, kun ratkaisen matemaattista tehtävää. Matematiikkaa näkyy joka paikassa, mutta onko se matematiikkana minussa vai ulkopuolellani. Luonnosta kasveja kerätessäni koin valtavan elämyksen, löytäessäni kasvien morfologisen tunnistusjärjestelmän. Kasvien nimeäminen rakenteen ja muotojen systemaattisen järjestämisen perustalta on matematiikkaa, Linne on valtava matemaatikko. Eino Kailakin on matemaatikko, ihmisorganismien funktionaalisen toimintajärjestelmän kuvaajana.*

*Voiko ajattelemisella saada tietoa toisesta? Kun ajattelen, en ole toisessa. Toinen voi ajatella toisin. En ajattele käsitteillä. Vaikka ajattelisinkin samoin, voin käyttää sen ilmaisemisessa eri käsitteitä. Matematiikka on systeemin tai järjestyksen näkemistä, ei toiminnassa välttämättä käsitteitä tai lukuja tarvita. Matematiikaksi kutsutaan vasta sellaista ajattelua, josta on tullut osa yhteistä tietoisuutta. Vuorovaikutuksen onnistuessa ajattelun idut voivat tulla tietoisemmiksi.*

*Voisimmeko pohtia ajatuksiamme ja luoda näin matematiikkaa? Pitääkö formalismi ottaa heti käyttöön? Miksi emme voisi vain pysähtyä havaitsemaan maailmaa. Ihmettely ja kysyminen voivat paljastaa matematiikkaa, joka on piilossa ympäröivässä todellisuudessa ja tiedostamattomassa. Eiväthän imaginääriluvutkaan ole todellisia, mutta operoitaessa niistä voi tulla todellisia. Matematiikka onkin reaalisen ja epäreaalisen, tietoisien ja tiedostamattoman vuoropuhelua.*

*Miksi minun pitää ratkaista toisten keksimiä tehtäviä? Vaikka ratkaisenkin annettuja tehtäviä, minun täytyy tunnistaa olennaiset asiat ja osata kysyä. On tärkeää, että kysymys herää. Kun on kysymys, joskus löytyy vastaus. Tehtäviä voisi jättää hautumaan ja pohtia sopivissa tilanteissa. Ja miksi useimmat tehtävät laaditaan niin, että oletukset on valmiina. Voisihan olla niinkin, että oletukset puuttuvat.*

*Hyvin suunnitelluista tehtävistä oletukset ovat eriteltävissä. Hahmottaminen vaatii intuitiota, kykyä yhdistellä asioita ja pohtia niiden riippuvuuksia. Hahmottaminen vaatii minuudelta persoonaan liittyviä ominaisuuksia, ikään kuin koodeja, joilla tunnistus tapahtuu. Ellei koodautumista tapahdu, tehtävän tunnistus on mahdotonta. Matemaattiset koodit ovat sisäistyneitä työkaluja, jotka otetaan käyttöön tarpeen vaatiessa.*

*Joskus ei millään usko, että keksin ratkaisun ja lähtee rakentamaan jotakin ihan muuta. Miten voin yhtäkkiä olla niin suuri ja voimakas. Vaikka tuntisinkin itseni voimakkaaksi, kukan ei odota minulta sitä. Minut on jo määritelty – nainen? Joko minä en ymmärtänyt tai toinen ei ymmärtänyt. Vakuuttaminen vaatii*

yhteistä kieltä. Sitä, mitä ei ole vielä keksitty, on vaikea ilmentää. Leonardo da Vincin Mona Lisakin hymyili tynesti. Varmaan Mona Lisa oli tietoinen jostakin, jota häneltä ei odotettu. Nainen on miehen mysteeri (tai mies naisen). Haluaako mies päästä selville naisen sielunelämästä – naisen ajattelusta. Ehkä, ehkä ei? Sukupuoli kuvaa funktionaalisen suuntautumisen eroa kulttuurievoluutiossa, missä uros on suuntautunut ulospäin ja naaras sisäänpäin (itseisarvo). Matematiikan kulttuurievoluution voi yhdistää miehiseen funktionaalisuuteen (välineellisyys).

Keksimisen tunnetta en voi valita, minä vain olen siinä tunteessa. Joskus tunne saa minut hämilleen, sokaisee täysin. Joskus tunne nostaa minut ylemmäs kuin ympäristö ymmärtää. Kun matematiikka minussa on hereillä, se tunnistaa säännönmukaisuuksia, riippuvuuksia, muutoksia, rakenteita ja ilmiöitä, joiden kautta rakennan ymmärrystäni maailmasta. Matemaattinen intuitio auttaa ymmärtämään, mitä voin käytännössä ajattelullani liittää yhteen tai erottaa toisistaan.

Kognitiiviset tunnemerkitukset korostuvat intuitiivisessa kokemuksessani, mikä on myös yleisesti havaintojen ja matemaattisten merkitysten tunnusteluun ja tunnistamiseen liittyvä vaikutin eri tavoin eri yksilöillä. Havainto on tällöin sisäistä ja yksilöllistä. Behaviorismin, analyyttisen filosofian ja matematiikan formaalisten vaatimusten lisääntyä viime vuosisadan loppua kohti, sisäinen intuitiiviseen ymmärrykseen perustuva käsitys matemaattisen ymmärryksen kehittymisestä on jäänyt marginaaliin. Vaikka matemaattisen käsitteen muodostus ymmärretään yksilön konstruktiona, matemaattisia tuotoksia arvioidaan edelleen ulkoisten tuotosten perusteella. Tulkinnassani intuitio on alku abstraktiolle, joka voi laajentua aistein tavoitettavasta kokemuksesta uusiin sfääreihin. Intuition korostaminen liittyy ihmisen temperamenttiin, sisäiseen intention, taipumuksiin ja kokemuksiin, siis fenomenaaliseen kuvaan matematiikasta. Intuitio on tällöin kasvun siemen oppimispolulla.

Matematiikkaan liittyy tunne, jolla epäilen, tarkennan, suuntaan, testaan ja vakuutun. Tunteella tunnistan. Matematiikka on kompassini. Matematiikka on sitä, mikä meissä ihmisissä on samanlaista, mutta niin moni-ilmeistä. Matematiikka on keino löytää uutta ja sellaista, jota ei vielä ole, järjen potentiaalia ja toimintaa (Aristoteles, ”tunteilla kuorrutettu järki”). Minä en vain ole. Olemisen ajatus on tavoittaa jotakin. On paljon muodollisia vaatimuksia ja sopimuksia siitä, miten matematiikkaa ilmaistaan. Yksilöllisestä näkökulmasta tavoitteena on oppia ilmaisemaan tarkemmin omia havaintojaan. Käsitteellistäminen tulee vasta

*sen jälkeen. Ymmärrys ohjaa. Merkitykset ovat toimintaa ohjaavia periaatteita. Ymmärrys on tunne merkityksistä, joita en valitse. Minä vain olen tunteessa.*

Tunnistaminen on sitä, että osaa käyttää matematiikkaa tai sen ideaa. Osaa lukea karttaa tai suurentaa kudontamallia. Osaa rakentaa mallista tai luoda malleja. Osaa hyödyntää arvioinnin ja optimoinnin ideaa arkitoimissaan; toteuttaessaan ruuanlaiton järjestystä, koostumusta, valikoimaa ja määrää; budjetoidessaan talouttaan sekä organisoidessaan työjärjestystä, puutarhan tai lasten hoitoa; yleisesti järjestellessään eri toimintoja ja tavoitteita elämässä, työssä ja maailmankuvan rakentamisessa. Tällöin osaa toimia tarkoituksenmukaisella tavalla eri tilanteissa, siis tietää, mistä on lähdettävä liikkeelle, miten edettävä ja miten toimittava järkevästi. Matematiikka antaa valmiuksia tilanteiden ennakointiin ja toisaalta myös tilanteisiin heittäytymiseen.

Matematiikka tunnistuu laadultaan henkisenä. Matematiikan tunnustelu on henkisen kasvun keinon tavoittelua. Matemaattisella työllä avaan ajatusratoja, joiden avaamisen kautta uusien havaintojen tunnistaminen on mahdollista. Tällöin matematiikka on toiminut kuin metafora kuvitteellisena sisäisenä metodina uuden löytämiseen ja ymmärtämysyhteyksien rakentamiseen. Matematiikka sisäisenä ymmärryksenä sopii myös matematiikan etymologiseen merkitykseen (alaluku 2.3), joka tarkoittaa oppimishalua, tietoa ja tiedettä (Salonen 1995). Tällöin matematiikka on sisäistä ja määrittelemätöntä eksistenssiä (olemassaoloa), jonka perustalta minä, maailma ja matematiikka rakentuvat. Matematiikkaa on minussa ja ympärilläni paljon ennen sen käsitteellistä muotoilua.

Suvaitsevainen ja rakentava asenne erilaisiin ajattelemisen taipumuksiin syntyy ymmärryksestä, ensin itseen ja sitä kautta muihin. Ihmisen kehitys ja ilmiöt ympärillämme ovat prosesseja jostakin joissakin konteksteissa. Ajattelemista voi ymmärtää olemassaolon erilaisista lähtökohdista. Piiloiset potentiaalit saattavat jäädä piiloon ja kätkeytyä hyvin määriteltyjen odotusten (ops) varjoon, joita politiikan kentässä (luku 5) hahmotan. Matematiikan ulkoiset vaikutukset yhteiskuntaan välittyvät eri tieteiden kautta. Tällöin tutkimuskohteena on tiede.

### 4.3.3 Matematiikka ulkoisina vaikutuksina kulttuuriin

Miten matematiikka ilmenee ulkoisina vaikutuksina kulttuuriin tarkoittaa tutkimuspolulla tieteen kehitystä. Tällöin koulu yhteisö on analoginen tiedeyhteisölle, vaikka yhteisöt ovat tietoisuuskehityksessään eri vaiheissa. Uudistavia idea-ai-hioita ja innovaatioita voi syntyä jo kouluvaiheessa, jos itsenäisiä ajattelutaitoja kasvatuksellisesti tuetaan varhais-, esi-, alku- ja peruskoulussa johdonmukaisesti. Matematiikan oppiminen voi palvella nykyistä paremmin yksilöllistä kehitystä, muuttuvassa maailmassa selviämistä ja tiedekasvatusta.

Tiede ilmenee vaikutuksina kulttuuriin (mm. Bronowski 1969; Gough 1998). Miten matematiikka ilmenee ulkoisina vaikutuksina, on yhteydessä matematiikan ymmärtämiseen ja soveltamiseen elämismaailmassa. Integroituneena kulttuuriin ja muihin tieteisiin matematiikka vaikuttaa yksilöön ja yhteisöön aina jollakin tavalla vahvistaen tai heikentäen kokemusta tieteestä. Matematiikan ulkoiset vaikutukset ilmenevät elämäntavassa, instituutioissa, työ-, koulu- ja tiedeyhteisöissä, joiden kautta matematiikka vaikuttaa ja muuttaa maailmaa.

*Matematiikan vaikutus ilmenee arjen elämismaailmassa:*

- *Matematiikka yhdistetään usein lukuihin, rahamääriin ja budjetteihin, jolloin luvut ovat päätöksenteon ja toimintojen perusteena.*
- *Oletus yhdestä totuudesta eli ilmiöiden yksikäsitteisyydestä tuo samansuuntaisia odotuksia tilanteisiin ja vuorovaikutukseen.*
- *Itsearviointi on odotukseen vastaamista, sen sijaan, että oppilas kuvaisi omia merkityksiään, tiedonintressejään, vaikutuksia omaan toimintaansa tai jatkokysymyksiä.*
- *Yleistämään pyrkivä tapa puhua yhteisistä asioista on vallitseva (myös ops), ei niinkään merkityksiä yksilöivä tai tulkitseva. Arjen tilanteissa analyysi painottuu ja synteesi jää vähemmälle.*
- *Matematiikka on annettu, sitä ei yleensä tunnustella tai tulkita todellisuuden säännönmukaisuuksien rakentumisena.*
- *Matematiikan ulkoiset yhteiskunnalliset tiedonintressit ovat useammin teknisiä kuin praktisia tai emansipatorisia ja sisäiset tiedonintressit useammin veristisiä kuin metafysisiä tai persoonallisia.*
- *Jos matematiikka on epistemologisesti riippumaton ihmisestä, tällöin myös sitä soveltava teknologia toimii ihmisestä riippumattomastikin.*
- *Matematiikan tuntemiseen itsessä ja yhteiskunnassa ei useinkaan kasvateta, vaan matematiikkaa suoritetaan.*

Matematiikan tekninen soveltaminen on keskeinen, kun tarkastellaan matematiikan hyötyjä elämismaailmassa, elinkeinoistumisessa tai teknologiassa. Matematiikan ulkoiset vaikutukset kulttuuriin aiheuttavat mikro-, meso- tai makrotasoisia muutoksia, joita tieteenfilosofit (Kuhn, Lakatos, Latour), tieteen ja teknologian historioitsijat (Rossi, Hughes), tietensosiologit (Mannheim, Merton, Giddens, Berger & Luckman) ja kvanttifysikot (Bohm & Peat) tulkitsevat eri tavoin. Vaikutusten tulkinta ei ole yhteismitallista, koska tutkijoiden lähtökohdat ja kontekstit ovat erilaisia, mutta silti voi tunnistaa samankaltaisia piirteitä tieteen kehityksen tiedeyhteisöjen tulkinnoissa. Yleisesti tiedonsosiologia tutkii ihmillisen ajattelun suhdetta omaan taustaansa (Berger & Luckman 1996, 14) ja tieteenfilosofia tutkimuksen asennetta tutkimuskohteeseen (Kiikeri & Ylikoski 2011, 53).

Unkarilaissyntyinen tiedonsosiologi Karl Mannheim (1893-1947) korostaa modernin maailman ristiriitojen syynä ajattelun metodeja, joiden kautta päädyimme kaikkein merkityksellisimpiin päätöksiimme ja suuntaamme poliittista ja sosiaalista ”kohtaloamme”, usein tieteelliselle analyysille tunnistamattomina (Virmasalo 2003, 25). Mannheimin mukaan tieto on suhteellista sosiaaliin lähtökohhtiinsa nähden. Tällöin älymystö saattoi parhaiten tavoitella objektiivista tietämystä. Myöhemmin Mannheim päätyi korostamaan opettajien merkitystä tradition siirtäjinä – sosiaalisina kasvattajina yhteiskunnissa, joissa perinteiden koosapitävä vaikutus on heikentynyt (Virmasalo 2003, 20). Mannheimin korostamat ajattelun menetit liittivät matematiikkaan. Hän huomioi sosiaaliset lähtökohdat, joilla on enemmän vaikuttavuutta kuin tieteellä sinänsä. Mannheimin ajattelun perustalta on ymmärrettävissä myös talonpoikaisen ongelmalähtöisen, itseohjautuvan ja toiminnallisen matematiikan eli talonpoikaisjärjen tappio.

*Luvussa 4.2.2 kuvaamani talonpoikaisjärki edustaa käsitteetöntä toiminnallista matematiikkaa. Peruskoulu-uudistusvaiheessa koulumatematiikka tieteellistyi. Talonpoikaiskulttuurin toiminnalliset ongelmanratkaisuvalmiudet, jotka PISA -seurantatuloksissa vielä tulevat ilmi, antavat viitteitä huomioida nykyistä paremmin hankittujen valmiuksien hyödyntämistä oppimispoluilla uusien opetussuunnitelmien käytännöissä. Vuonna 1996 käynnistynyt LUMA -hanke korostaa tutkivaa asennetta. Oppilaiden luovuuden vahvistaminen ja opetusikäntöjen liittäminen elämään on uusimpien matematiikan täydennyskoulutusten aiheena (mm. yliopistot, LUMA -keskukset, LUMA -kunnat). Uudistunut digiteknologia*

*voi tukea toiminnallistamista. Uudistamisen lähtökohtina ovat tällöin Mannheimin korostamat hankitut ajattelun menetit.*

Yhdysvaltalainen Robert K. Merton (1910-2003) esittää, millaiset tieteelliset toimintanormit yhteiskunnassa laajentavat tietämystä. Hän on funktionalistinen tieteensosiologi, jonka mukaan tiedelaitosten yhteiskunnalliset ja yksilötason toiminnalliset edellytykset luovat merkitykset, ei niinkään itse tieteellinen tieto. Mertonin mukaan ansioituneille kasautuu yhä enemmän kunniaa, uudenlaisten ajatusten jäädessä häviölle. Tätä hän kutsuu Matthew-ilmiöksi (suomennettuna Matteus-ilmiö). Mertonin mukaan ranskalaisuus edusti vaikutusta 1600-1800 luvuilla, joista merkittävimmät vaikuttajat ovat Descartes (alaluku 6.2.2), Pascal, Molière, Boyle, Rousseau, Saint-Simon, Diderot, Stendahl, Flaubert ja Proust (Merton 1968, 1). Descartes ja Pascal edustavat puhdasta matematiikkaa ja muut soveltavat sitä. Merton korostaa tieteen vaikuttavuutta toiminnallisten edellytysten luomisena, missä tieteelliset toimintanormit ovat tietämyksen laajentumisen avain. Matematiikalla tieteenalana on vaikutusta yleisten toimintanormien kehittämisessä, mutta matematiikka ei automaattisesti takaa vaikuttavuutta. Matematiikan riski jäädä ihmisten maailman ulkopuolelle on suuri abstraktin, objektiivisen ja formaalisen toimintanormin perusteella, minkä huomioiminen kouluissa ei ole ollut toistaiseksi tavoitteena.

*'Toisille annetaan, toisilta otetaan pois vähäkin', on ilmiö, joka toteutuu usein yhteisöissä, jos tiedostamaan pyrkivä keskustelu puuttuu. Matthew-ilmiö liittyy myös koululuokkien opiskelutilanteisiin. Opiskelija, joka on löytänyt tai keksinyt matematiikan idean, osaa rakentaa oppimispolkuaan vahvistaen aikaisemmin opittua. Matthew-ilmiö voi myös estää matematiikan oppimista, jos yksilön havainnot eivät kohtaa odotusta. Sama ilmiö voi esiintyä yhteisöissä, joissa joillekin kasautuu vaikutusvaltaa toisten jäädessä syrjään. Kaikkien osallisuuden lisäämiseksi Mathew-ilmiöihin voi vaikuttaa matematiikkakasvatuksella.*

Holistiset kvanttifyysikot David Bohm (1917-1992) ja David Peat (1938- ) esittävät kvanttiteorian perustalta orgaanisen todellisuusmallin, mikä kuvaa luovuuden ohittamista ja tukahduttamista tiedeyhteisöissä. Bohm & Peat muistuttavat, että tieteen kieli johtaa katkoksiin yksilöiden kyvyssä ilmaista käsitteitä. Tämä on erityisen pulmallista matemaattisissa tieteissä, joissa formaalisuus ja sitä kuvailevan vapaamuotoisen arkisen kielenkäytön suhde voi olla sekava. (Bohm & Peat 1987, 88-89; 116-117.) Esimerkkinä he mainitsevat Bohrin ja Einsteinin,

joiden välisen dialogin puute kuvastaa fysiikassa vallinnutta hajaannusta. Katkos kuvastuu yhä kvanttifysiikan ja suhteellisuusteorian yhteensovittamisessa. Sekaannuksen syynä he pitivät erilaisia ajatusten ja arvojen järjestyskäsitteitä.

*Bohm & Peat orgaanisen mallin voi tulkita kritiikkinä tiukkaa matemaattista käsitejärjestelmää eli käsiterealismia kohtaan ja yleisesti tieteellisen luovuuden ohittamisen osoittamisena. Peruskouluun siirtymisen vaiheessa käytännöllinen laskento muuttui formaalisten taitojen tavoitteluksi, missä muutoksessa syntynyt katkos vaikuttaa edelleen. Koulumatematiikan kytkemistä ihmisen taipumuksiin ja käytäntöön hillitsee edelleen sen teoreettinen lähestymistapa.*

Tieteenfilosofi ja fyysikko Thomas S. Kuhn (1922-1996) esitti tieteelliseen vallankumoukseen perustuvan muutuskäsityksen, mitä hän kutsuu paradigmaksi. Tiede kehittyy normaalitieteen ja suurten käsitteellisten muutosvaiheiden kautta epäjatkomona. Esimerkkinä Kuhn mainitsee, että 1800-luvulla ei ollut fysiikka-yhteisöjä, uusi fysiikan vaihe syntyi, kun matematiikka ja luonnonfilosofia yhtyivät. Vallankumous on erikoislaatuinen muutos, joka käsittää tutkijaryhmän sitoumusten uudelleenrakentamisen. Tieteellinen kriisi ei välttämättä ole vallankumouksen syy, vaan uudet erikoisalat tai tieteenhaarat voivat tuottaa uusia itsekorjautuvia mekanismeja. Paradigma tarkoittaa Kuhnin loppuselvennyksessä tutkimusalaakohtaista matriisia, joka koostuu kokonaisuuden muodostavista yhteensopivista alkioista. (Kuhn 1969, 189-190.) Yhteensopivia ovat esimerkiksi matemaattiset symbolit ja sovitut käytännöt. Matematiikan paradigma ei ole muuttunut antiikista lähtien. Tieteenfilosofinen muutos matematiikan löytämisestä sen keksimiseen (alaluku 6.3) on paradigmanmuutos.

*Matematiikan paradigmaksi voi kutsua sen ankaraa käsitteellistä rakennetta, joka vielä peruskouluvaiheessa saattaa olla liiankin ankara ja kahlita matemaattista luovuutta. Peruskouluikävaiheessa luovuus, jota olen kutsunut myös ennakoimattomuudeksi, on potentiaalisimmillaan. Odotuksen vastainen ennakoimattomuus saattaa tukahtua opetustilanteessa. Matematiikkakasvatus tukee luovaa vastuuta, missä ankaraus on sisäistä, eikä ulkoista, kuten käsiteformalismissa saattaa toteutua.*

Itävaltalaisyntyinen Yhdysvalloissa vaikuttanut Peter L. Berger (1929-2017) ja saksalainen Thomas Luckman (2000-2016) loivat teorian todellisuuden ja tiedon

välisten mekanismien ymmärtämiseksi. Heidän edustamansa tiedonsosiologia on saanut vaikutteita saksalaiselta Max Scheleriltä (1874-1928), jonka tiedonfilosofia yhdistää fenomenologian yhteiskuntatieteeseen. Tällöin yhteiskunta säätelee aatteiden olemista (Dasein), mutta ei olemusta (Sosein). Todellisuudella Berger & Luckman tarkoittavat tahdosta riippumatonta ilmiöiden maailmaa ja tiedolla he viittaavat siihen, että ilmiöt kaikkine ominaisuuksineen ovat todellisia. He korostavat arkitiedon asemaa yhteiskuntaelämän muodostumisessa luomassaan sosiaalisen konstruktionismin teoriassaan, missä tieto todellisuudesta muotoutuu ja välittyy sosiaalisissa prosesseissa. Tieto ei niinkään jäljennä todellisuutta vaan konstruoi sitä. Todellisuuden rakentuminen on subjektilähtöistä, missä sosiaalinen todellisuus on yksi tietoisuuden muoto. (Berger & Luckman (1966), 1994, 11-14; 18; 29-39; 226-228.) Berger & Luckman tarkastelevat todellisuutta sisäisen ja ulkoisen välisenä kielellisenä vuorovaikutuksena. Sosiaalisen todellisuuden rakentuminen ihmisten konstruktioiden tuloksena toteutuu matematiikan keksimisenä. (alaluku 3.3.1) Matematiikan keksiminen voi jäädä tiedon sosiaalisen rakentumisen perustalta yhteisesti hyödyntämättä.

*Tutkimuspolulla painottuu tiedon rakentumisen yksilölähtöisyys toiminnallisten funktioiden kautta (oppimispolku). Elämismaailmasuhteessa yhteiskuntaan tieto rakentuu sosiaalisessa ja kulttuurisessa vuorovaikutuksessa, missä syntyneitä esimerkkejä tiedon funktioista kuvaan politiikan kentässä (alaluku 5.3.1).*

Italialainen Paolo Rossi (1923-2012) esittelee modernin tieteen syntyä arjen ristiirittaisissa olosuhteissa. Rossin mukaan tiede ei ole historiallisten tai yhteiskunnallisten olosuhteiden heijastumaa, vaan tiede on kulttuurissa olevien ja tieteessä vallitsevien mielikuvien ja haluttujen rajojen sisällä tapahtuneita ratkaisuja. Eurooppa on ollut matematiikasta voimaantuneen tieteen kasvuympäristönä: Kopernikus on puolalainen; Bacon, Harvey ja Newton ovat englantilaisia; Descartes, Fermat ja Pascal ovat ranskalaisia; Brahe on tanskalainen; Paracelsus, Kepler ja Leibniz ovat saksalaisia; Huyghens on hollantilainen ja Galilei, Torricelli, Malpighi ovat italialaisia (Rossi 2010, 13). Modernin tieteen juuret ovat eurooppalaiset. Moderni tiede ei syntynyt kampusten rauhassa tai tutkimuslaboratorioiden keinotekoisessa ilmapiirissä, vaan arjen, työn ja taistelujen melkeissä keskellä mystiikan, vastakkainasettelujen ja käytännöllisten tarpeiden toimintakenttää.

Rossin mukaan tieteellisten vallankumousten toteuttajilla on jotakin yhteistä, tietoisuus siitä, että heidän toiminnastaan on syntymässä jotain (Rossi 2010, 16).

Tieteellisesti varma tieto esitetään oppikirjoissa, mikä on tosiasiaa tulosta päätöksistä, valinnoista, ristiriidoista ja vaihtoehdoista. Rossin teos ei ole tieteen historiaa, eikä tieteenfilosofiaa, vaan kuvaa etenkin nuorisolle kulttuurista moninaisuutta, missä tiede on syntynyt. (Rossi 2010, 21-22.) Tiede ei siis ole persoonatonta ja objektiivista, vaan tulos yhteisistä päätöksistä.

*Koulutiedon tulisikin vahvemmin tuoda esiin tieteen kehitys aikakausien inhimillisistä lähtökohdista. Matematiikan tavoitteena on kehittää ymmärrystä johdonmukaisesta ja loogisuuteen pyrkivästä ajattelusta, mitkä valmiudet auttavat ristiriitojen ja ongelmien tunnistamista käytännön tilanteissa. Ristiriidan tai ongelman tunnistaminen luo motiivia ja haastetta kehittää ajattelua eteenpäin. Rossin kulttuurilähtöisyyttä voi siten tulkita myös talonpoikaisjärkenä.*

Giddens (1938- ) tutkii yksilön ja yhteiskunnan välistä suhdetta. Toiminnan ja rakenteiden kaksijakoisuudella Giddens auttaa ihmisiä ymmärtämään yhteiskunnan rakentumisen ihmislähtöisyyttä. Rakenteiden muodostumisen teoria on lähellä Frankfurtin koulun kriittistä teoriaa, mihin Habermasin tiedonintressit yhdistyvät (Giddens 1984, 27). Giddens avaa merkityssuhteita ihmisen kokemukSELLISEEN ympäristöön, missä oppijan suhde oppimiseen on ratkaisevaa.

*Ihmisen sopeutuminen rakentamaansa ja rakennettuun ympäristöön on tietämisen funktio. Tulevaisuudessa on pyrittävä enemmän myös vaikuttamaan ympäristöön. Moderni maailma on vuorovaikutusverkosto, missä ihminen elää suhteessa materiaalisen ja kulttuurisen ympäristön kanssa, mutta samalla ihminen myös itse sopeutuu uudistuneeseen maailmaan ja menettää aikaisempia taitojaan. Monet taidot, kuten talonpoikaisjärki, voi (de)konstruoida uudelleen.*

Modernisaation kriitikko, tieteenfilosofi Bruno Latour (1947- ) määrittelee, että moderni tarkoittaa uutta järjestystä. Moderni on kahdessa mielessä epäsymmetrinen: se merkitsee murrosta ajan tavanomaisessa kulussa ja taistelua, jossa on voittajia ja kukistettuja (Latour 1993, 27). Epäsymmetrisyyden seurauksena syntyy hybridejä eli yhteen kietoutumia. Moderni on uhanalainen, koska hybridit tuottavat kahtiajakoja, jotka eriytyvät edelleen, eivätkä ole vuorovaikutuksessa. Erottelut luonto ja kulttuuri tai tiede ja politiikka tai länsimaat ja muut, ovat kahtiajakoja, joiden kautta kehitys on uhattuna, jolloin modernin eetos häviää.

Suuret koko maailmaa koskevat uhat, kuten ilmastonmuutos, tulisi saada yhteiseen käsittelyyn, mikä on vaikeaa järjestäytyneessä maailmassa.

*Asennemuutos matematiikkaan ratkaisee pitkällä aikavälillä Latourin avaaman uhkan, koska matematiikka ja siihen kietoutunut tiede luo järjestyksiä ja kahtiajakoja. Jos tieteen pyrkimys yleisesti on löytää synteesejä ja synergioita toistensa välisessä vuorovaikutuksessa, erilaisuudet tieteessäkin kehittyisivät toisiaan tukeviksi voimavaroiksi.*

Unkarilaissyntyinen tieteenfilosofi Imre Lakatos (1922-1974) kehitti tieteellisten tutkimusohjelmien metodologiana tunnetun ohjelman, *The methodology of scientific research programmes* (1978), mikä tutkii tieteen demarkaatiokysymystä tieteen ja pseudotieteen välillä. Kysymys on tällöin, mikä tieteessä on olennaisesti tärkeää eettisessä ja poliittisessä merkityksessä (emt. 1). Lakatos esittelee neljä teoriaa tieteen historiasta: teoreettinen, kokemuserustainen, sisäinen ja ulkoinen (rational, empiric, internal, external) (emt 118), joiden tiedon alkuperää koskeva merkitys on vaihdellut tieteen historiassa antiikista lähtien. Yleisesti rationaalinen (järkiperäinen) ja subjektin suhdetta ulkomaailmaan huomioimaton (internaalinen) on hyväksytty tieteeksi (matematiikaksi).

Lakatosin malli tarjoaa rationaalisen selityksen objektiivisen tiedon kasvulle. Empiirinen ja suhteessa ympäristöön läsnä oleva (eksternaalinen) ovat painottuneet eri tavoin tieteen historiassa, vaikka empiirinen ja eksternaalinen ovat aina läsnä ihmisen kokemustodellisuudessa. Tieteen matematisointi on ollut hyväksyttävä rationaalista ja internaalista evidenssiä vahvistava kriteeri. Tiedon alkuperää koskeva ongelma syntyy empiirisen ja eksternaalisen merkityksistä, joissa merkityksiin, intuitioon, aistimiseen, havaitsemiseen, ymmärtämiseen, suuntautumiseen, luovuuteen ja aktiivisuuteen liittyvät yksilölliset ominaisuudet eivät tuota yhteismitallisia vertailukohteita. Tällöin yhteensopivuus yleisten mallien kanssa ei toteudu.

*Rationaaliset ja internaaliset ymmärryksen tavat ovat vallitsevia matematiikan tieteenfilosofiassa ja koulumatematiikassa. Tällöin kulttuuriperäinen; empiirinen ja eksternaalinen tieto on jäänyt arvioinnin ulkopuolelle. Heijastusvaikutuksena tällöin oppilaan valmiudet ja taipumukset ovat jääneet marginaaliin.*

Teknologian historian professori Thomas P. Hughes (1923-2014) tarkastelee sähköistyksen syntyä ja leviämistä Yhdysvalloissa ja Euroopassa, missä keskeis-

tä on, että sähköistyminen on osa modernin kulttuurin (Hughes 1983). Sähkölaitteiden keksiminen ei ollut sattumanvaraista, vaan osa suurta järjestelmää, jonka matematiikan kehitys mahdollisti (mm. Maxwellin yhtälöt). Länsimaisessa kulttuurissa matematiikan heijastuksia ovat teknologiset järjestelmät, jotka ilmenevät arjessamme, jäsentävät arkeamme ja ohjaavat arjen kehitystä ja toimintoja – aiheuttaen riskejä tulevaisuudellemme.

*Auton keksiminen on yllättänyt ihmisen sen hankkimiseen. Tällöin on kehittynyt riippuvuus autoiluun muun infrastruktuuriin (joukkoliikenne, etätyö, palvelujärjestelmät) kustannuksella. Kehittynyt kasvihuoneilmiö on osittain seurausta autoilusta. Ilmakehän hiilidioksidin määrä fossiilisten polttoaineiden käytön seurauksena toimii kuin kasvihuone seurauksenaan ilmaston lämpeneminen. Teknologian käytöstä on aina seurausvaikutuksensa. Korvaavissa ratkaisuissa ongelma siirtyy uusiin kohteisiin. Kehittyvän sähköauto- ja tietoteknologian akkuteollisuus tarvitsee yhä enemmän harvinaisia metalleja, kuten litiumia, kobolttia ja nikkeliä. Kaivosteollisuus tarvitsee energiaa ja aiheuttaa ympäristölle uusia riskejä, joiden ennakkointiin ja hallintaan tarvitaan matemaattisia malleja, joiden lähtökohtaoletukset ovat arvioita, eivät eksaktia tietoa. Ongelmaa ei ratkaise matematiikka, vaan ihminen, joka matematiikkaa soveltaa ja arvioi tilanteen. Tällöin on riski, että osa mukana olevista muuttujista jää mallien ulkopuolelle. Tulevaisuutta koskevien ratkaisujen suuntaan vaikuttaa, mikä ongelma nostetaan yhteiseen tietoisuuteen ja miten sovelluskohde ilmionä tulkitaan.*

*Teknologinen kehityssuunta kuluttaa luonnonvaramme, tuhoaa vesistömme, ilmastomme ja maaperämme, ellei kehityksen suuntaa saada hillittyä. Teknologiset järjestelmät rakentuvat keksinnön ympärille yhdistäen eri tieteitä ja kehittyen ajan kuluessa yhä eriytyneemmäksi keksinnön alkuperäisiltä syntyisijoilta. Kehityssuunnan korjaus tarvitsee avukseen matematiikkaa, nyt enemmän emancipatorisen, metafyyssisen ja persoonallisen intressin suuntaan.*

Tieteen kehitys näyttäytyy tieteen tekijöiden työnä tiedeyhteisöissä. Tiede rakentuu kehityshistoriansa perustalta sovituin demarkaatioin. Matematiikka vaikuttaa kulttuurin kehittymiseen tiedenormien taustalla näkymättömänä. Kulttuurin kehittymiseen vaikuttaa tieteen tekijöiden aktiivinen toiminta. Tulevaisuuden kulttuurin edistymiseen liittyvien riskien hallinta edellyttää ihmisen tiedostavaa ja tavoitteellista toimintaa – näkökulman laajentamista. Tieteen tutkijat ovat kohdistaneet huomionsa ihmisen vaikutusvallan puutteisiin tiedeyhteisöissä,

missä yksilöllinen luovuus, innovatiivisuus ja erilaisuus eivät saa riittävästi tukea. Sama ongelma on koululuokissa. Ongelman tunnustaminen on askel kohti erilaisuutta suosivaa ja yksilömyönteistä uudistamista. Arjen kulttuurisen edistyksen tukeminen tarvitsee luovia mallien rakentajia, joissa tieteiden rajapinnat naisevat ja todellisuuden elämismaailmallinen hahmotus korostuu.

#### 4.3.4 Ihmiset ovat kulttuurin kentän näkymättömiä vaikuttajia

Matematiikka ilmenee kulttuurin kentässä yksilöllisenä kokemuksena ja kokemukselle ilmenevänä tieteenä. Matematiikka ilmenee eli syntyy, kehittyy ja palvelee tilanteissa, joihin kulttuurinen tila tai tilanne luo tai tuo mahdollisuuksia. Usein tieteessä tutkijan kokemus piiloutuu yleisiä lainalaisuuksia tavoittelevan tieteen taakse. Elämismaailman eksistentiaaliontologiassa olen suhteessa tutkimuskohteena olevaan matematiikkaan sen sisä- ja ulkopuolelta, erottamatta subjektia ja objektia toisistaan. Heidegger (2000, 29) kuvaa matematiikan ongelmaa perustakriisinä formalismin ja intuition välissä tavoitteenaan tapa kohdata tiede. Tieteen tutkijoiden teorioista välittyy tieteen tekemisen kontekstisidonnaisuus eli yhteydet vallitsevaan tieteen tekemisen kulttuuriin. Tutkimuspolun fokuksessa olevan 1970 -luvun elämismaailmamuutoksissa sisäistynyt toiminnallinen matematiikka ei enää riittänyt. Toimintaan kytkeytynyt matemaattinen esiymmärrys elämässä pärjäämisenä väistyi taloudellisten menestymispyrkimysten ja onnellisuuden tavoittelun tieltä. Uuden teknologian kehittäminen vaati vahvempaa tietoa yleisistä lainalaisuuksista, siis matematiikkaa ja sen soveltamista. Digitalisaatio- ja keinoälysovellutukset edustavat tällöin matematiikan välineellistynyttä valtaa suhteessa elämismaailman rakentamiseen itseisarvoisesti.

*Koululuokassa tieteeseen perustuvia oppiaineita opiskellaan usein omaan kokemukseen perustuvien havaintojen ja merkitysten ulkopuolelta. Kokeellisessa työskentelyssäkin usein yleinen odotus hallitsee. Tutkimuspolulla olen tavoitellut oman mentaalisen kokemuksen systemaattista mukaan ottamista.*

Kulttuurin kehitykseen vaikuttavat tiedeyhteisöt ja ihmisten valinnat. Kehitykseen vaikuttajien väliin jää laajentuva talouden, toiminnan ja tiedostamisen alue, joista viimeinen on tutkimuspolun fokuksessa. Vaikka tiede korostaa riippumattomuutta ihmisestä, silti ihmisen vaikutus on tunnistettavissa tieteen tutkijoiden

kuvauksissa. Tieteessä ei yleensä huomioida subjektin tai läsnä olevan ympäristön (eksternaalisia) vaikutuksia, vaikka niillä vaikuttaa olevan merkitystä (myös luvut 5, 6 ja 7). Tieteeksi tunnustettu on tiedeyhteisön yhteisymmärrys, todistus, sopimus, päätös tai valinta, jonka taustalla matematiikka vaikuttaa näkymättömänä, metodisena, abstraktina ja teoreettisena rakenteena, missä yksilön ja yhteisön tiedonintressit (luku 2.3) suuntaavat tietoisuuden kehitystä.

Jos matematiikan kehittyessä olisi suosittu enemmän vielä uudella ajalla ilmenviä sisäisiä tiedonintressejä (vrt. luvut 7, 8.2 ja 11), maailma ilmenisi eri tavoin kuin nykyajan teknologisesti painottuneessa suomalaisessa kulttuurissa on toteutunut. Sisäisen veristisen intressin kautta totuuden tavoittelu, matematiikan kiehtovaksi kokeminen ja ymmärryksen syveneminen voivat vahvistaa henkisiä kasvutavoitteita ja tukea myös ulkoisen maailman rakentamista. Matematiikan vaikutukset ovat monimuotoisesti yhteen kietoutuneita muiden tieteiden kanssa, jolloin vaikutus estää sisäisten metafyyssisten ja persoonallisten intressien vahvempaa läsnäoloa tieteessä ja koululuokissa. Ulkoisten intressien perustalta modernisaatio tuo yhteiskunnallista muutosta, johon liittyy myös uhkatekijöitä. Tunnetuin riskiyhteiskuntasosiologi on saksalainen Ulrich Beck (1944-2015), joka tuo näkyväksi ympäristöongelmien syynä ihmisen työn ja toiminnan.

*Kestävän tulevaisuuden rakentamiseen tarvitaan ihmisten sivistyneitä valintoja. Ihmisen ja ihmisyhteisöjen osuus globaalissa rakennelmassa korostuu yhä enemmän. Kouluissa tulisikin antaa tilaa nuorille keksijöille, jotka ovat oppimispolkunsa alussa rakentamassa kulttuurista tulevaisuutta. Opiskelijoilla saatava olla valmiuksia ja jopa modernimpia lähtökohtia kuin opettajillaan.*

Matematiikka on palvellut ihmisiä välineellisesti. Metodinen matkaoppaani Heidegger muistuttaa vieraantumisesta, joka on seuraus esineenkaltaisesta ihmisenä olemisesta. Heidegger korostaa inhimillistä eksistenssiä, missä ihminen on olemassa laadullisesti. Heidegger antaa fenomenologiselle filosofialle uuden suunnan, olemisen mielen ja merkityksen, joka suuntaa elämää. On unohdettu kysyä, mitä olemisen tarkoittaa, kun on pohdittu sitä, onko oleminen aineellista vai henkistä. Ihmisenä olemisella on arvo sellaisenaan. Matematiikka vaikuttaa ihmiseen sisäisesti, jolloin se toimii merkitysten tunnistamisen, itsetiedostuksen ja maailman ymmärtämisen itseisarvoina vastauksena kysymykseen, mitä olemisen tarkoittaa. Heidegger kritisoi ulkoistettua olemisen tapaa, missä ihmisen sisäisyys, henkinen kasvu, on unohtunut.

Ihminen kykenee Heideggerin mukaan selvittämään itselleen oman olemisensa, olemassaolonsa ja ajallisuutensa, jolloin matematiikka toimii itseisarvona, arvona ihmiselle itselleen. Heidegger (2000) vetää rajan ihmisen ja muun olemisen väliin. Ihminen on laadullisesti toisin kuin luonnonesine. Luonnon esine on ensi sijassa välineellisesti ihmisen käytöllisiä tarpeita varten. Esine ei ole olemassa itseään varten, vaan ihmistä varten. Ihminen on oma olemisensa, minkä mieli ei määräydy ulkopuolelta. (Juntunen 1987, 136.)

Antiikin filosofien avaama ja Heideggerin edelleen kehittänyt kahtiajako, väline- ja itseisarvot, jäsentävät matematiikan merkitystä. Puhtaat välinearvot ovat arvokkaita välineenä, mutta eivät itsenään. Niitä ei tavoitella niiden itsensä vuoksi vaan jonkin toisen tavoitteen vuoksi. (Mehtonen 1987, 96.) Matematiikka välinearvoisena on tuottanut uuden ajan alusta lähtien uutta teknologiaa ja teknologisia järjestelmiä, jotka ovat helpottaneet arkipäivää, tuoneet vaurautta ja lisänneet talouskasvua. Itseisarvoisena matematiikka tukee sisäistyneen identiteetin kehittymistä, luovuutta, maailman ymmärtämistä kaikkia koskevana projektina ja syvenevää matematiikan teoreettista ymmärrystä.

Heideggerin mukaan ratkaisevaa matemaattisen fysiikan kehitykselle ei ole ollut tosiasioiden havainnoinnin arvostuksen nousu, eikä se, että luonnonilmiöiden määrittämiseen käytettiin matematiikkaa, vaan se, että luontoa itseään luonnehdittiin matemaattisesti – luonnon kvantitatiivisesti määritettävissä oleviin konstitutiivisiin liikkeisiin, voimiin, paikkaan ja aikaan kohdistuvalla katseella. Tieteellinen edistys ei seuraa luonnon ennalta viitoittamaa polkua, vaan tieteellä on, kuten kaikilla muillakin toiminnoilla, avoin tulevaisuus. (Rée 1998, 61-62.) Tulevaisuus on ihmisen ohjauksessa, mihin myös oppilaan oppimispolku viittaa.

Tieteellinen edistys ei ole ihmisestä riippumaton, vaan matematiikan soveltaminen liittyy mielessä koettuihin merkityksiin ja niiden suuntaamiseen. Matematiikalla on rooli elämässä, vaikka sen roolia ei heti tunnistaisikaan. Merkitykset vaikuttavat näkymättömästi yhteiskunnassa ja ovat läsnä sisäisissä tuntemuksissa. Tuntemukset voivat liittyä erilaisissa tilanteissa syntyneisiin mielikuviin, käsitteisiin ja kokemuksiin. Kokemus matematiikasta on yhteydessä elämismailmaan ja siinä koettuihin merkityksiin subjektiivisesti ja intersubjektiivisesti.

Matematiikka on vaikuttanut arjen, tieteen ja yhteiskunnan tulkintaan merkittävästi absoluuttisella tiedeihanteellaan. Pyrkimys varmuuteen ja totuuteen ohjaa mentaalista mieltä ja tiedettä. Jokaisella on kokemus matematiikan merkityksestä elämässään. Myös jokaisella matemaatikolla tai matematiikan opettajalla on tunne- ja merkityksperusteet ajattelulle. Kulttuurisessa ympäristössä löytyy vaikuttimia, joilla on osuutensa kokemukseen matematiikasta. Merkitykset suh-

teessa matematiikkaan eivät useinkaan ole kovin tietoisia tai merkityksiä ei ole haluttu nostaa keskusteluun. Matematiikkaa tieteenalana tulkitaan yleensä tietoteoreettisen totuuden laadun mukaan eksaktina, objektiivisena ja neutraalina, jolloin koettu matematiikka on haluttu unohtaa tai ohittaa.

Matematiikan tieteenalaa luonnehtii kulttuuri, jolla on oma kieli – kansainvälinen kieli. Jos vaalimme tämän kansainvälisen kielen käyttöä, matematiikan käsitteellisiä ja symbolisia sopimuksia, uskomme ymmärtävämme toisiamme. Näin tapahtuu ainakin matemaatikkojen luoman kulttuurin sisällä, mutta ei riittävästi matemaattisen kulttuurin ulkopuolella. Modernissa yhteiskunnassa matemaattisen kulttuurin tuote, teknologia, etenee omaa rataansa, emmekä tahdo pysyä enää mukana. Teknologiaa käyttävän ihmisen ote on herpaantumassa. Ihminen on vain osittain tietoinen tästä ongelmasta. Teknologia voi mahdollistaa ihmisenä olemisen tarkoituksia. Vaarana kuitenkin on mekaanistuva ja yksinkertaistuva ymmärrys ihmisyydestä. Matematiikka ei ole vain väline, sillä on myös itseisarvo, arvo itsessään – se on osa yksilön ja yhteiskunnan identiteettiä.

Matematiikan emeritus professori Aatos Lahtisen (2014) mukaan matematiikka on kautta aikojen kuulunut koulujen ja yliopistojen opetusohjelmaan. Jo 2400 vuotta sitten antiikin Kreikassa filosofi Platonin perustaman yliopiston edeltäjän Akademeian pääsyvaatimuksena oli geometrian osaaminen. Ei siis ole ihme, että Suomessakin matematiikka on pakollinen aine niin peruskoulussa kuin lukiossa jo ensimmäisestä luokasta alkaen. Tästä huolimatta matematiikan merkitys ja tarpeellisuus jää usein epäselväksi. Ehkä oleellisimpana syynä tähän on matematiikan kumulatiivinen luonne, jonka vuoksi koulussa ei pystytä opiskelemaan varsinaista matematiikkaa, vaan ainoastaan eräiden matematiikan työkalujen käyttöä. Se, mitä matematiikka itse asiassa on, jää näkymättömäksi. Samalla jää näkymättömäksi yhteiskunnan kaikilla alueilla oleva suuri matematiikan tarve ja sen syyt. (Lahtinen 2014.)

Yhteiskunnan uudistuneet matematiikan tarpeet luovat haasteen kouluopetukselle. Uudistuneet oppimisympäristöt, uusi teknologia, uudet matematiikan soveltamistarpeet ja sisäisen ymmärtämisen merkitykset yhteiskunnassa edellyttävät koulumatematiikan uudistamista. Jos esimerkiksi keinoäly ja koneet korvaavat kaiken sen puurtamisen, mihin ennen koko koulu aika käytettiin, nyt pitäisi osata tulkita ja soveltaa matematiikkaa. Miten matematiikka tällöin ilmenee, on avainkysymys. Tällöin tulisi ennen kaikkea tunnistaa matematiikan olemuksellinen monimuotoisuus, jopa vaarallisuus, jos ihminen menettää otteensa. Ongel-

mana on, että matematiikka on annettu, jolloin sen ulkoinen välineellinen valta peittoaa sen sisäisen tiedostamisen merkityksen.

Ymmärrämme ja tulkitsemme havaitsemaamme kulttuurin kautta, missä matematiikka on näkymätön, vaikka se on läsnä kaikkialla elämässä ja yhteiskunnassa. Matematiikka vaikuttaa elämismaailmojen kehittymiseen aina ihmistoiminnan kautta. Matematiikan sisäinen ymmärrys ja ulkoiset vaikutukset parhaimmillaan rakentavat ja yhtenäistävät kulttuuria ymmärtämisyhteyksillään, jolloin yksityisen ja yhteisen kohtaaminen mahdollistuu.

Matematiikka on käytössä välineenä tai itsenään, mutta jää usein näkymättömäksi ja on läsnä käsitteettömästi. Matematiikka kulttuurin osa-alueena ja rakenteena on mukana elämäntavassa (vrt. Venkula 1996, Kumpula 2006). Matematiikka on näkymätön eri syistä:

- Matematiikkaa ei tunnisteta arkipäivässä.
- Matematiikka voi olla tietoista vasta silloin, kun se on keksitty tai löydetty.
- Todellisuuden tulkitsemisessä ei käytetä käsitettä matematiikka, vaan se pukeutuu erilaisten ajatusrakenteiden, tutkimusmetodien, tieteiden ja matemaattisten mallien kaapuun.
- Matematiikka on niin lähellä, ettei sitä tule ajatelleeksi.
- Matematiikka tieteenalana piiloutuu sen sovellutuksiin ja valtarakenteisiin.
- Matematiikkaa harvoin määritellään, jolloin kukaan ei tiedä, mitä se pohjimmiltaan on.
- Matematiikka on osa laajaa elämää ympäröivää kulttuuria, minkä dia- ja synkroniset merkitykset ovat osittain tiedostamatonta tajuntaa.

Matematiikan tunnistaminen ja tiedostaminen arjessa edellyttää kulttuurisen todellisuuden olemassaolon tunnistamisen. Elämäntapaan vaikuttava oppiminen on rakennemuutosvaiheessa, kuten tapahtui Suomessa peruskouluun siirtymisen vaiheessa, jolloin yhteiskunnallinen rakennemuutos vahvistui. Muutosta määrittää suhde olemiseen. Sisäistynyt matematiikka (talonpoikaisjärki) jäi taka-alalle ulkoisesti mitattavan matematiikan voimistuessa. Matematiikka jäi näkymättömäksi ihmisten mentaaliseen mieleen ja yhteiskuntarakenteisiin.

Uudistunut järki (taulukko 4, luku 4.2.2) kohdisti huomion yhä enemmän matematiikan muodollisiin perusteisiin. Kulttuurissa pitkään matematiikan taustalla vaikuttanut sivistysajattelu heijastaa valmiuksia ja toimintataipumuksia, joiden heikentyvä merkitys näkyy koulumatematiikan oppimistuloksissa ja työn tuotta-

vuuden laskuna. Matematiikan opiskelun yksilöllistämällä, inhimillistämällä ja käytännöllistämällä on uudistunut mahdollisuus oppivelvollisuuskoulussa. Muodollisten rakenteiden ylläpitäminen niin matematiikassa kuin yhteiskunnassa yleisesti tulee ajan mittaan taloudellisesti ja henkisesti kestävämmäksi. Hierarkiarakenteiden tilalla rakenteiden toimivuutta korostava vuorovaikutteinen ja reflektiivinen näkökulma voi lisätä koulumatematiikan uutta vaikuttavuutta yhteiskunnan inhimillistämisessä.

Kutsun sisäistä kokemusperäistä näkökulmaa horisontaaliseksi ja ulkoista hierarkiaa luovaa näkökulmaa vertikaaliseksi. Näkökulmiin horisontaalinen ja vertikaalinen (taulukko 5, alaluku 7.3) yhdistyy oppimisstrateginen suuntautuminen, joka ilmentää yksilöllisiä eroja. Suuntautuminen todellisuuteen ilmenee tällöin eri tavoin, edellisessä tavoitteena on selviäminen eli pärjääminen ja jälkimmäisessä menestyminen. Edellinen on tällöin enemmän taitoon perustuvan kulttuurisen pääoman kasvattamista ja jälkimmäinen taloudelliseen kasvuun tähtäävää uudistamista. Horisontaalinen näkökulma suuntautuu praktisen tiedonintressin mukaan käytäntöjen kehittämiseen tilanteissa. Jälkimmäinen viittaa perinteiseen tieteelliseen hierarkiarakenteeseen. Optimaalisin oppimistulos sisältää näkökulmien (oppimistrategioiden) yhdistämisen, jota kutsun mehiläisen matematiikaksi (ks. luku 7.3).

## 5 KOULUMATEMATIIKKA POLITIIKAN KENTÄSSÄ (2. alaongelman ratkaisua)

### 5.1 Suunnittelutaloudesta kasvatustalouteen

#### 5.1.1 Koulutuspolitiikka oppivelvollisuuskoulusta

Kansakoulujärjestelmän syntyyn ja kehitykseen osana kansansivistystyötä on vaikuttanut valistusaate, joka vahvasti suomalaisten sivistystahtoa. Siirtyminen rinnakkaiskoulujärjestelmästä peruskouluun vuodesta 1968 lähtien lisäsi koulutuksen järjestämisen suunnitelmallisuutta. Koulutussuunnittelun taustalla vaikuttaa (koulutus)politiikka, jonka perustalta koulutuksen tavoitteet ja toivotut tulokset määritellään. Kulttuuriympäristöissä syntyneet merkitykset saavat yhteiskunnallisessa järjestelmässä seurakseen tavoitetiloja ohjaavat poliittiset tavoitteet. Kulttuuriympäristöjen rajattomat matematiikan mahdollisuudet rajautuvat koulumatematiikaksi, missä tavoitteiden yhteen liittämässä voi syntyä kohtaamiskeskittymiä. Opetusministerinä vuosina 2015-2019 toimineen Sanni Gran-Laasosen mukaan koulukohtaiset erot ja koulupudokkaiden määrät ovat lisääntyneet 2000-luvulla, mikä on uhka tasa-arvokehitykselle (2017).

Vuodesta 2016 portaittain käyttöön otetut perusopetussuunnitelmat tukevat yksilöllisten oppimispolkujen rakentamista, millä ratkaisulla on mahdollisuus estää polarisoitumiskehitystä. Opetussuunnitelmien asiantuntijatyö on saatava kohtamaan koulun arki, mikä tarkoittaa yhteistä tietoisuutta kehittämissuunnasta. Oppimispolkujen rakentamisen tueksi tutkimuspolku antaa vihjeitä oppimisen yksilöllistämistehtävän mahdollisuuksiin ohjaavia merkityksiä tutkimalla.

Fokuksessa politiikan kentässä on arkea ja yksilöllisyyttä koskevat linjaukset oppivelvollisuuskoulun opetussuunnitelmassa 1950-luvulta lähtien. Oppivelvollisuuslaki tuli voimaan 1921, mistä lähtien opetussuunnitelma-ajattelu on yhä enemmän yksityiskohtaistunut. Kuuden Euroopan maan koulutuksen säätely- ja ohjausjärjestelmien vertailussa (Kivinen, Rinne, Järvinen, Koivisto ja Laakso, 1995, 371) suomalainen säätelyjärjestelmä on ollut tiukka ja vahvasti keskusvaltainen. Lain ja rahan voimalla tapahtuva säätely on ollut hyvin normipainotteista

ja pikkutarkkaa. Myös opetussuunnitelmallinen ohjaus on ollut keskimääräistä ankarampaa. (emt. 371.) Opetussuunnitelma-ajattelu indikoi oppimiskäsitystä.

Toteutuneeseen koulutuspolitiikkaan vaikuttavat vallitseva kansallinen ja kansainvälinen ohjauspolitiikka, etenkin läntisten teollisuusmaiden OECD:n politiikka, EU, Unesco, teollisuus ja työnantajat, tiede- ja opetusalat ammattijärjestöineen sekä muut yhteiskunnallisen alan asiantuntijat, vaikuttajat, tutkijat, järjestöt ja toimijat, joilla on yhteyksiä matematiikan opetuksen järjestämiseen. Suomen koulutuspolitiikka perustuu elinikäiseen kasvuun, missä uuden oppimista tuetaan varhaiskasvatuksesta aikuisuuteen (Gran-Laasonen 2017). Elinikäistä kasvua tukemaan oppivelvollisuuskoulun yleissivistys ymmärretään laajasti. Tavoitteena on antaa kaikille kansalaisille valmiuksia elämään (Lehtisalo & Raivola 1999). Oppimisen laaja-alaisuus ja oppiaineen opetusta koskevat tarkat ohjeet jakavat käytännön ja teorian erilleen. Ristiriidan ratkaisu on oppimispolun rakentaminen, minkä merkityksiä ei ole riittävästi pohdittu.

Peruskoulu-uudistusta edeltäneen ajan puoluepoliittinen vastakkainasettelu loi jännitteitä, missä ihmislähtöisyyttä kritisoitiin (mm. Uusikylä 2010). Koulutussuunnittelun mallin oli tarkoitus uskoa siihen, että yhteiskunnalliset ongelmat voidaan ratkaista suunnittelulla ja organisoinnilla. Kansallisessa suunnittelussa vaikuttivat talouskasvutavoitteet ja yhteiskunnallinen elinkeinorakennemuutos. Koulutuksen taloustiede ja *Inhimillisen Pääoman Teoria* (Human Capital Theory, Bowen 1977) vahvistivat talousajattelua (Vaherva 1985, 28-50). Vuoden 1970 opetussuunnitelma loi koulutussuunnittelun mallin, mikä vallitsee rakenteellisesti ja pääosin myös sisällöllisesti vieläkin. Tuolloin alkoi suunnittelulouden aika.

*1980-luvun koulutustilaisuuksissa opetushallituksen edustaja ohjeisti koulutuksen järjestäjiä ja opettajia painottamalla koulutuksen tehokkuutta, taloudellisuutta ja vaikuttavuutta. Tuolloin tehokkuuteen ja taloudellisuuteen löytyi luvut, mutta vaikuttavuus jäi yleensä tunnistamatta, koska vaikuttavuuteen ei ollut vielä esittäviä lukuja. Laadullisiin kuvauksiin ei ollut käsitteitä ja yleinen odotus tarikoitti enemmän täsmällisiä lukuja. Määrällinen tilastointi opiskelijoiden koulutuksen jälkeisestä ajasta ei ollut tuolloin vielä systematisoitunut.*

Peruskoulu-uudistuksen merkittävyyden valossa on yllättävää, kuinka vähän uudistuksen vaikutuksia ja vaikuttavuutta on tutkittu Suomessa. Uudistusta käsittelevä kirjallisuus rajoittuu lähinnä historia- ja muistelmateoksiin (mm. Virta-

nen 1983; Lappalainen 1986; Sarjala 2008), joissa kyllä ansiokkaasti kuvataan uuden koulujärjestelmän syntyprosessia ja sen tavoitteita, mutta vaikutusten analysointi on jäänyt vähemmälle. (myös Pekkarinen & Uusitalo, 2012, 1.) Yhteiskunnallinen vaikuttavuus on koulutuksen tärkein tavoite, mihin tutkimuspolku tuo perustaa.

*Määrällisesti painottunut lähestymistapa on kasvatusilmiölle vieras. Tällöin ihminen ideoineen on unohtunut. Tehokkuutta, taloudellisuutta ja vaikuttavuutta olisi voitu testata toisinkin, kuten opiskelijoiden ideoita, tuotoksia ja päämäärätietoisuutta tukemalla, kokoamalla ja jatkokehittämällä. Jos tavoitteiden saavuttamista tulkitaan mitta-asteikoilla, odotus kohdistuu lukuihin ja se alkaa vähitellen ohjata toimintaa. Kaipasin kouluissa enemmän 'miten' keskustelua. Monet muutkin opettajat kaipasivat konkreettisia toimintaa vahvistavia perusteita. Ohjeistusta oli opittu odottamaan ulkopuolelta, eivätkä opettajat yleensä lähteneet vapaaehtoisesti suunnittelemaan. Myöskään opettajankoulutus ei ollut antanut valmiuksia suunnittelutyön laajentamiseen kunnalliselle, alueelliselle tai valtakunnalliselle tasolle. Jotkut opettajat olivat sitä mieltä, että jos valtio on muutosten takana, ylimääräisestä työstä on saatava palkkaa.*

Reijo Virtanen (1983, 34-35) toteaa muistelmissaan: ”Suunnittelijoiden aika oli koittanut Suomessa. Koulusuunnittelusta alkoivat puhua kouluhallinnon ulkopuolisetkin. Erityisen kansaan menevästi kolmihaaraista yhtenäiskoulua ja uutta koulusuunnittelua käsitteli Väestöliiton toiminnanjohtaja Jaakko Itälä, joka kokosi ympärilleen kokonaisen koulukunnan. Nuorten miesten ryhmittymä Pekka Aukia, Erkki Äärynen ja Jukka Lehtinen seurueineen alkoivat suunnitella kunnallisia ja alueellisia koulusuunnitelmia. Hyvin arvokasta ja taloudellista oli tämä kutsumustaloudellinen toiminta. (emt.) Peruskoulu syntyi liittämällä yhteen kansa- ja kansalaiskoulu sekä keskikoulu. Peruskoulu oli alussa kolmihaarainen, matematiikan oppiaineessa opiskelijoiden valittavana oli suppea -, keski- ja laaja kurssi.

*Opettajat yleisesti kannattivat tasokurssijakoa. Myös omalla opettajuuden pollulla edistyneimmät peruskoulumatematiikan oppilaat olivat laajoilla kursseilla 1980-luvun alussa. Opetusryhmässäni 9. luokalla ehdittiin kirja kokonaan läpi, jopa paraabelin ominaisuuksia ja polttopistetehtäviä, jotka olivat jo ylikurssia. Tasokurssit poistuivat käytöstä 1985. Suppea kurssi oli etenemiseste useisiin jatko-opintoihin sen valinneille, jolloin tasa-arvo ei toteutunut. Tasokurssit takai-*

*sin on ollut opettajien eetos näihin päiviin asti, mutta koulutuspolitiikat eivät ole tasa-arvotavoitteiden tulkinnastaan luopuneet. Tasokurssien poistaminen tarkoitti tällöin mahdollisuuksien tasa-arvoa. Koulutuspolitiikkojen ohjeiden ja opettajien käytäntökokemuksen välinen jännite on hiertänyt kuin kivi kengässä noista päivistä saakka. Opettajat eivät aina luottaneet opetushallituksen ohjausjärjestelmän asiantuntemukseen. Kuitenkin opettajat omaksuivat tehokkuusajattelun, jolloin suunnitellut opetussisällöt oli ehdittävä opettaa syvällisyyden ja ymmärryksen kehittymisen kustannuksellakin.*

Opetus on tehokasta, kun se onnistuu muuttamaan oppilaita haluttuihin suuntiin, eikä sellaisiin, joita ei haluta (Mager 1978, 9). Opetuksen tavoite on kuvaus suorituksesta, johon oppilaiden on kyettävä, ennen kuin heitä pidetään pätevinä kyseisessä asiassa (Mager 1978, 14). Oppimiselle asetetut kriteerit antavat tietoa siitä, miten hyvin oppisisältö on opiskeltava. Etenkin oppiaine matematiikan kohdalla oppilailta ei odoteta uudelleen strukturointia, koska oppiaineen järjestelmä on omaksuttava sellaisenaan (POPS I: A4 1970, 69). Matematiikan osaamisen mittareina ovat toimineet pääasiallisesti hyvin strukturoidut kokeet, vaikka avoimempiakin oppimistehtäviä ja -ympäristöjä on välillä käytetty. Perusopetuksen matematiikan päättöarvioinnin kriteerit ja arvioinnin perusteet arvosanalle 8 (OPH 1999, 52-59) vahvistavat osaamisen ajattelu-, tieto-, taito- ja kriteeriperustaisuutta, siten normatiivisuutta kasvun tukemisessa.

Koulutussuunnittelun vaikutuksesta rakentui suomalainen koulujärjestelmä, mikä on saanut paljon huomiota ja menestynyt hyvin OECD-maiden vertailu- ja seurantatutkimuksissa. Johtuuko menestys toimivasta opettajankoulutus- tai koulujärjestelmästä, kansan koulutusmyönteisyydestä, maatalousyhteiskunnan heijastuksista (ongelmanratkaisukyky, ahkeruus), oppilaiden sopeutumisesta osaamisen mittaajärjestelmään, arvojen vastakkainasettelun laantumisesta, hyvistä opettajista vai ohjausjärjestelmän vahvuuksista? Ehkä kaikki nämä yhteen kietoutuneina vaikuttavat. Kulttuuriset perusteet menestyksen syistä on yleisesti unohdettu Suomessa, vaikka PISA niitä mittaa. Systemaattinen laadullinen tutkimus peruskoulutuksen vaikuttavuudesta puuttuu.

Riippumaton englantilainen tutkijaryhmä (CARE) muistuttaa laadullisten perusteiden puutteesta suomalaisessa opetussuunnitelmauudistuksessa (1996, 7). Vuonna 1996 opetussuunnitelman laadinta ja siihen liittyvän päätöksenteon organisoiti oli lähtenyt noin puolessa Suomen peruskouluista käyntiin. Kouluissa esiintyi paljon väärinkäsityksiä ja erilaisia näkemyksiä, joita ei osattu yhdessä

korjata. (Norris, Aspland, MacDonald, Schostak & Zamarski 1996, 35.) Koulun uudistaminen on ollut helpompaa paperilla kuin käytännössä.

Koulua on uudistettu niin kauan kuin se on ollut olemassa. Uudistuksia perustellaan yhteiskunnan muuttuvilla tietotarpeilla (Dewey 1910; Koskenniemi 1944; Halinen 2013; Pahkin 2013). Opetussuunnitelmamuutoksessa on kyse yhteiskunnan ajattelu- ja toimintatapamuutoksesta, jonka tarkoitus on muovata uuteen uskoon koko Suomea (Norris, Aspland, MacDonald, Schostak & Zamarski 1996, 5). Opetussuunnitelmalla on kauaskantoiset tavoitteet, jolloin sen laatiminen tarjoaa tilaisuuden osallistua tulevaisuuden rakentamiseen. Käytännön koulutyössä suhtautuminen opetussuunnitelman merkityksiin on kuitenkin monin eri tavoin polarisoitunut (emt.).

*Opettajavuosieni 1980-2019 (yli 17 koulua) perustalta useimmissa kouluissa opetussuunnitelmaa on pidetty muodollisena. Selvää muutosta on tapahtunut 2000-luvulla. Keskustelu opetuksen toteuttamiseen liittyvistä kysymyksistä riippuu koulukulttuurista. Kouluissa on paljon eroja sen suhteen, mistä siellä keskustellaan ja miten. Opetussuunnitelman tulkinnoissa ei ole yhtenäistä linjaa. Valtakunnallinen opetussuunnitelma on normi, joka edellyttää kasvatustieteellistä alueellisesti, paikallisesti ja kouluissa.*

John Dewey (1859-1952) muistuttaa, että koulu voi suorittaa tehtävänsä vain olemalla todellinen yhteiskunnan kuva. Koulun antamalla tehtävillä tulee olla merkitystä lapsen elämässä ja kouluopetuksen on oltava lapsen kehitysvaiheelle tarpeellista. (Dewey 1999; Alhanen 2013, 222.) Deweyn ajatukset sopivat edelleen opetussuunnitelmauudistuksen perustaksi. Dewey pyrkii ajattelullaan purkamaan vääristyneitä kahtiajakoja käytännön ja teorian, julkisen ja yksityisen sekä yksilön ja yhteiskunnan välillä.

*Opetussuunnitelmakeskus on monimuotoinen vyyhti yksilöllisiä opettajia pohtimassa, miten yksilön ja yhteiskunnan tarpeet ja tavoitteet ovat yhteen sovittavissa yhteisesti sovituin pelisäännöin. Tavoitteita on helposti yhtä paljon kuin läsnä on opettajia, jolloin keskustelu usein kutistuu tai pysyy pintatasolla.*

Kansakoulun tarkoituksena oli palvella yleisen kansansivistyksen tarpeita. Oppikoulu syntyi antamaan yliopisto-opintoihin valmistavaa opetusta, alun perin pappiskoulutusta varten. Peruskouluun siirtyminen aiheutti luonnollisesti käytännön ja teorian välistä poliittista väantöä. Oppikoulupuolella koulutoimenjoh-

taja Kauko Haahtela johti taistelua yksityisoppikoulujen puolesta peruskoulua ja R. H. Oittista vastaan saaden ainakin hillittyä tukea oppikoulupuolelta muilta kouluneuvoksilta. (Virtanen 1983, 33.)

Yrjö Ruudun (1948) koulujärjestelmäkomitean mietintö ei johtanut toimenpiteisiin yhtenäiskoulun suuntaan, mutta R.H. Oittisen (1959) kouluohjelmakomitean mietintö pani alkuun peruskoulun syntyyn johtaneen kehityksen (POPS 1970; Virtanen 1983). Syksyllä 1963 eduskunta kehotti hallitusta kiireellisesti tutkimaan, miten yhtenäiskoulujärjestelmään voitaisiin siirtyä. (POPS 1 1970: A4, 13-15.) Peruskoulukomitean mietintö (1965: A7) ehdotti yhtenäiskoulutyypistä peruskoulua, jossa 6 alinta luokkaa muodostaa ala-asteen ja 3 ylintä luokkaa yläasteen. Hallitus antoi eduskunnalle ehdotuksen laiksi koulujärjestelmän perusteista koulunuudistustoimikunnan (Poijärvi 1965) ja opettajanvalmistustoimikunnan mietintöjen valmistumisen jälkeen 1967. Koulunuudistuksen suunnittelussa etualalla olivat yhteiskunnalliset, taloudelliset ja hallinnolliset kysymykset. (POPS 1 1970, 15.)

Koulunuudistustoimikunta (1966) pyrki selvittämään differentioinnin ongelmaa ottamalla huomioon yksilöiden väliset eroavuudet ja toisaalta saman yksilön eri kehityspiirteiden väliset eroavuudet. Tältä pohjalta toimikunta hylkäsi linjajaon, mutta ehdotti eriytymisen järjestämiseksi menetelmällisiä keinoja ja eri laajuisia oppimääriä. (POPS 1970: A4, 16) Samaan suuntaisesti differentioi myös peruskoulunopetussuunnitelmakomitean väliaikainen opetussuunnitelma (1967). Ehdotuksissa valinnaisaineet eivät olleet toisiinsa sidottuja. Valinnaisia kursseja oli matematiikassa kaksi tai kolme. (emt.)

*Oma kansakouluni lakkautettiin vuonna 1966. Olin päässyt oppikouluun edellisenä vuonna. Peruskouluun siirtymisvaiheessa olin sisarusarjan vanhimpana hyvissä käytännön tarkkailuasemissa. Neljä nuorinta sisarustani kävivät peruskoulua vuosina 1971-1986. Suurin osa ystävä- ja sukulaisverkostoa elivät tuolloin samassa koulumuutoksen ja maatalouden rakennemuutoksen vaiheessa, mitkä vaikuttivat merkittävästi koko kylän elämään. Opettajan työt aloitin 1980. Kokemukseni koulumuutoksesta elämismaailmassani kansalaisena ja opettajana vaikuttivat pedagogiseen suuntautumiseeni vaikuttavammin kuin vuonna 1984 aloittamani matemaattisten aineiden aineenopettajan pedagogiset opinnot.*

Koulunuudistusta ennakoiva koulukokeilu alkoi Suomessa vuonna 1960 Hankasalmella, Muuramessa ja Säynätsalossa. Syksyllä 1967 kokeilukuntia oli jo 57

(POPS 1970, 18-19). Kokeilujen tuloksina komiteoiden painotukset pääosin säilyivät. Koulukokeilujen, akvaarioprojektien ja nykyisten pilottihankkeiden tulokset ovat jääneet suhteellisen vähälle huomiolle koulutuspoliittisissa linjausten perusteluissa. Yliopistot, opettajankoulutuslaitokset, opetushallitus ja -ministeriö, koulutuksen tutkimuslaitos, vuonna 1996 valitut LUMA -kunnat, 2000-luvulla perustetut LUMA -keskukset, MAOL ja muut kansalliset ja kansainväliset opettaja- ja tutkimusjärjestöt edustavat matemaattisten aineiden opetuksen kehittämisen asiantuntijuutta. Systemaattinen muutoksen ohjaus ei ole edennyt opettajien, kansalaisten ja oppilaiden tasolle.

Julkinen kansalaiskeskustelu koulutuksen suunnasta oli niukkaa vuonna 1970. Edelleen ulkoinen ohjaus on vallitseva. Koulutoimijoiden yhteinen tietoisuus koulutuksen suunnasta ja perusteluista on edelleen epämääräinen. Koulutussuunnittelijoiden ja opetuksen toteuttajien välillä tutkimusjaksollani vuodesta 1950 lähtien on ollut jännitteitä etenkin rinnakkaiskoulusta peruskouluun siirtymisen valmistelussa ja käyttöönotossa 1960-1980. Vaikka nykyään opetussuunnittelutyössä on mukana opettajia, aikaisemmin vaikuttaneiden komiteoiden tilalla, jännite ulkoapäin annetun ja käytännössä toteutettavan välillä on tunnistettavissa kouluissamme. Uusien opetussuunnitelmien käyttöönotto koskien oppivelvollisuuskoulua ja oppimisen yksilöllistämistä on merkittävä muutos ja kaipaakin enemmän julkista keskustelua ja täydennyskoulutusta. Tutkimuspolulla yhteiskunnallinen ratkaisu tukee matematiikkakasvatusta yläkouluperinteessämme vallinneen matematiikan opetuksen rinnalle (luku 9).

## 5.1.2 Opetussuunnitelman tavoitteiden asettaminen

Opetussuunnitelma on hallinnollinen (kansakoulun ops, 1925; 1952), ohjeellinen (POPS 1970; 1985; 1994) tai velvoittava (POPS 2004, 2014) asiakirja, missä koulun tarkoitus, tehtävä, toimintatapa ja tavoitteet määritellään. Yksityisen opettajan valta opetuksen tavoitteiden asettajana on vähentynyt tutkimuspolun 60 vuoden aikajanalla. Opetussuunnitelma on nykykoulussa velvoittava asiakirja, jossa asetettujen tavoitteiden sisällä opettaja toimii. Oppilaan yksilöllisyyden huomioiminen opetuksessa toteutuu opettajan pedagogisen vapauden perustalta.

*Ennen yhtenäiskoulujärjestelmää opetussuunnitelma-ajattelu oli sivuroolissa. Kansakoulut olivat opettajiensa luomuksia, jotka vaikuttivat kylän elämään ja elinvoimaan. Yleensä kansakoulut onnistuivat hyvin aktivoimaan kyläläiset. Täl-*

*löin koulutuksen vaikuttavuus oli sen mukainen, miten nykyajan opetussuunnitelmauudistusten odotetaan vaikuttavan. Nykyään vaikutusalueena on koko maailma, kun tuolloin riitti, että kylä pysyi vireänä.*

Peruskoulutuksen opetussuunnitelmaperustaisuus vahvistui ja loi opetuksen yleisen perustan peruskoulun opetussuunnitelmakomitean mietinnössä (POPS I 1970, 56-114). Opetussuunnitelman perustana on kasvatus- ja opetustyön tavoitteiden asettaminen (POPS 1970; 1985; 1994; 2004; 2014). Peruskoulun opetussuunnitelmakomitean mietinnön I mukaan peruskoulun ensisijaisena tehtävänä on tarjota aineksia ja virikkeitä oppilaan omaleimaisen koko persoonallisuuden kehittymiselle (POPS I 1970, 23). Omaleimaisuus ja persoonallinen kehitys eivät ole enää uusimman opetussuunnitelman tavoitteena, vaan oppilaan ainutlaatuisuus ja ihmisenä olemisen arvokkuus ovat yleisiä perusarvoja (POPS 2014, 15). Opetusaineita ei mainita kasvun tukijoiksi, vaan perusarvot on erotettu opetusaineiden tieto- ja taitotavoitteista.

Matematiikan opetuksen tavoitteet sisältyvät opetussuunnitelmaan (Koskenniemi 1944, 1972, 1982) ja opetussuunnitelman perusteisiin (1985, 1994, 2004, 2014). Opetussuunnitelma sisältää lisäksi kuvauksia opetuksen lähtökohdista ja painopisteistä (Koskenniemi 1944, 314-317; POPS 1985, 2-6) ja oppimis- ja tiedonkäsitteistä (POPS 1994, 2004; 2014) ja teema- ja aihealueiden käsittelemisestä (POPS 2004, 2014). Yläkoulun matematiikan opetussuunnitelmassa painottuvat sisällöt ja formaaliset taidot. Varhaiskasvatuksen opetussuunnitelman sisältönä on matematiikkakasvatus, osana yleisiä oppimaan oppimisen taitoja. Esiopetuksen opetussuunnitelman perusteet vahvistettiin 22.12.2014 ja tulivat voimaan syksyllä 2015. Varhaiskasvatuksen opetussuunnitelma otettiin käyttöön 1.8.2017. Uusin peruskoulun opetussuunnitelman perusteet (2014) otettiin käyttöön syksyllä 2016. (OPH 2017.)

Laki koulujärjestelmän perusteista tuli voimaan 1.8.1970, missä tavoitteena oli poistaa ulkoisia esteitä koulutusmahdollisuuksien tieltä. Peruskoululaki tuli voimaan 27.5.1983. Perusopetuslain (2 § 1 mom.) mukaan opetuksen tavoitteena on tukea oppilaiden kasvua ihmisyyteen ja eettisesti vastuukykyiseen yhteiskunnan jäsenyyteen sekä antaa opiskelijoille elämässä tarpeellisia tietoja ja taitoja. Lisäksi esiopetuksen tavoitteena on osana varhaiskasvatusta parantaa lasten oppimisedellytyksiä. Opetuksen tulee edistää sivistystä ja tasa-arvoisuutta yhteiskunnassa sekä oppilaiden edellytyksiä osallistua koulutukseen ja muutoin kehittää itseään elämänsä aikana. Opetuksen tavoitteena on lisäksi turvata riittävä yh-

denvertaisuus koulutuksessa koko maan alueella. (Halinen 2013.) Perusopetuslaki muistuttaa opetuksen järjestäjää, että oppilaiden ikäkausi ja edellytykset on huomioitava terveen kasvun ja kehityksen näkökulmasta. Koulutuksen tasa-arvoista saatavuutta ja yhdenvertaisuutta on painotettu peruskouluun siirtymisestä lähtien.

*Tasa-arvo ja yhdenvertaisuus oli keskeinen peruste siirryttäessä rinnakkaiskoulujärjestelmästä yhtenäiskoulujärjestelmään. Vieläkin keskusteluissa voi tunnistaa jännitteitä, jotka ovat jäänteitä tuosta poliittisesti ja toiminnallisesti ristiriitaisesta vaiheesta. Jännitteitä aiheuttivat etenkin kansa- ja kansalaiskoulun seminaarin käyneiden opettajien kasvatuspainotteisuus vastaan keskikoulun ja lukion aineenopettajien opetusainepainotteisuus. Kasvatus- ja opetusainenäkökulmien erottaminen niveltyy 6-7 luokkien taitteeseen, jolloin siitä ei keskustella.*

Opetustavoitteiden määrittäminen on luonteeltaan poliittista (myös Rokka 2011, 44-90). Tavoitteet sisältävät käsityksen siitä, mikä on tavoiteltavaa ja arvokasta. Tällöin tavoitteet ovat ulkopuolisen asettamia, eivätkä motivoi kuten sisäsyntyisyyden kautta muodostuneet tavoitteet. Kuitenkin opetussuunnitelmien tavoitteissa yksilöllisyys on kasvava ihanne (Rokka 2011, 313). Yksilöllisesti arvokas ja yleisesti arvokas eivät tarkoita välttämättä samaa, vaan kyse on erilaisen kulttuurien kohtaamisesta.

*Samalla, kun yleisten tavoitteiden asettaminen on edennyt normatiivisempaan suuntaan, yksilöllisyys on kasvava ihanne. Paradoksin ratkaisee opettaja opetustilanteessa. On ihme, että aiheesta ei ole syntynyt merkittävää keskustelua. Rokan havainto yksilöllisyyden huomioimisesta vastaa omiakin havaintojani ja tutkimukseni tavoitetta. Samalla, kun korostetaan uusien opetussuunnitelmien yksilöllisyyttä, pitäisi korostaa ja ohjeistaa enemmän opettajia ja opiskelijoita kasvatukselliseen näkökulmamamuutokseen, mikä on muutos laaja-alaisempaan, dynaamisempaan ja liberaalimpaan tieto-, oppimis-, ihmiskäsitykseen.*

*Miten yksilöllisyys tutkimuspolulla ilmenee, antaa hahmoa myös toisenlaisille vaihtoehdoille toteuttaa yksilöllisyyttään. Tietoiskasvatus ei ole kuulunut koulun opetussuunnitelmaan, jolloin vain osa opiskelijoista tällä hetkellä kykenee rakentamaan omaa yksilöllistä opinpolkuaan. Jos itsenäistä tiedon rakentamista eli oman ajattelu- ja päättelyprosessin tiedostamista tuetaan varhaiskasvatuksesta lähtien, yksilölliset opinpolut pikkuhiljaa ”tallautuvat”. Tutkimuspolulla yliopistoissa professorit erosivat toisistaan huomattavasti juuri siinä suh-*

*teessa, miten he arvostivat yksilöllistä ajattelua. Millainen yksilöllinen ajattelu on perusteltua ja millainen ei, on autenttisuuden näkökulmasta mielenkiintoinen kysymys, johon palaan matematiikkakasvatuksessa (luku 9).*

Tavoitteiden asettaminen on arvovalinta, mikä määrää keskeisesti myös opettajan käyttämiä opetusmenetelmiä. Oppikirja on kirjan tekijöiden tulkinta opetussuunnitelmasta, millä on käytännön opetustilanteissa keskeinen merkitys. Oppikirjakeskeisyys ei välttämättä ole yksilöllistyvän opiskelun este, vaan esteenä on enemmänkin opetusmenetelmien homogeenisuus. Tilaa yksilölliselle ajattelulle tuovat itsenäiset- ja toisaalta yhteisölliset työtavat. (myös CARE.)

Koulutuksen järjestäjä on perinteisesti ollut kiinnostunut siitä, opittiinko halutut asiat, ei siitä, mitä opiskelija oppi. Opetussuunnittelun rationaalisia tehokkuusvaatimuksia vahvistivat ja rakensivat komiteat tai suunnitteluryhmät (1970, 1972, 1985, 1994, 2004, 2014). Opetussuunnitelman tavoite kuvailee opetuksen aiotun tuloksen, ei opetusprosessia (Mager 1978, 13) tai oppimis- tai opiskeluprosessia. Jos oppilas ohjaa omaa oppimisprosessiaan ja tuottamistaan, tulokset eivät välttämättä olekaan ennakoitavissa. Jos arvostetaan luovaa ongelmanratkaisuprosessia, opetuksen aiottu tulos on ilmaistava eri tavoin. Tällöin myös arvioinnin painopiste siirtyy opiskelijan suuntaan ja itsearviointitaidot korostuvat.

Opetuksen tavoitteet antavat perustan opetuksen 1) sisällön ja menetelmien valinnalle ja suunnittelulle, 2) tulosten arvioinnille ja 3) oppilaiden omien ponnistusten ja toiminnan suuntaamiselle (Mager 1978, 14). Opetus ymmärretään näin toiminnaksi, jonka perusta on laaditussa opetussuunnitelmassa, ei niinkään oppilaan omissa tavoitteissa, kokemassa ymmärryksessä, tarkoituksessa tai tietoisuuspyrkimyksessä. Matematiikan opetuksen seuranta-arvioinnit eivät näin ole kohdistuneet todelliseen osaamiseen, valmiuksiin tai subjektiivisiin kokemuksiin, vaan ulkoisiin odotuksiin ja näyttöihin. Oppilaan itsearviointia kutsutaan formatiiviseksi (2019) arvioinniksi, mikä edustaa hyvin strukturoitua oppimisen testaamista, ei esittelemiäni laaja-alaisia merkitysyhteyksiä.

Ennakolta laadittua opetussuunnitelmaa perustellaan opiskelijan oikeutena ja tukena, sekä opettajan tieto- ja taitovaatimusten perustana peruskoulun opetussuunnitelmakomitean mietinnössä (POPS 1970, 59-60), mikä ilmenee myös myöhemmin käyttöön otetuissa opetussuunnitelmien perusteissa (1985, 1994, 2004, 2014). Vakiintunut tulkinta toistuu koulumaailmassa. Tällöin unohtuu, että ihmisten maailma näyttäytyy aina yksilöllisten silmälasien kautta. Vaikka opetussisältö on sama, näkökulma, tulkinta ja metodi sen ymmärtämiseen voi

olla erilainen. Fyysikko Albert Einstein (1879-1955) viittaa tutkimusmetodiin sisältöjen sijasta: ”Suhteellisuusteorian nimeen yhdistetty invarianssiteoria viittaa teorian tutkimusmetodiin, eikä teorian sisältöön” (Dyson 1996, 142). Ideaa on usein tulkittu, että ajan kuluessa kysymys todellisuuden luonteesta on sama, mutta vastaus muuttuu. Kun metodi kehittyy, tulokset täsmentyvät.

Opetussuunnitelma-ajattelu loi perustan systemaattiselle oppimissaavutusten arvioinnille. Huoli kohdistuu siihen, että on opittu suorittamaan kokeita ja valmistautumaan arvioitavien sisältöjen suuntaan, mutta ei koeta opittua merkitykselliseksi tai käyttökelpoiseksi. Opitun mieli ja merkitys rakentuvat yksilöllisessä kokemuksessa, joiden tiedostamista kasvatus tukee. POPS 2016 ei estä tähän suuntaan etenemistä, ongelma onkin enemmän koulun sisäisen ja ulkopuolisen maailman vuorovaikutuksessa. Ulkopuoliset odotukset saattavat olla konservatiivisia tai innovatiivisia, usein epäyhtenäisesti jotakin siltä väliltä.

*Opettajien yhtenäinen perustelu koulun toimintatavan muutoksista ja yhteisen ajattelutavan muodostamisesta koulun sisällä ja ulkopuolella vahvistavat osallisuutta, yhteisten suunnitelmien toteuttamista ja yleistä vuorovaikutteisuutta. Tällöin koulut voivat antaa tukea yksilöllisen oppimisen edistämiseen oppijan omista lähtökohdista. Perusopetuksen opetussuunnitelma antaa perusteet uudenslaiselle arvioinnille ja arvostelulle. Miten tuetaan yksilöllisyyttä ja rohkaistaan itsenäiseen ajattelutaitoon, on jäänyt liikaa yksityisen opettajan vastuulle.*

Ongelmana oppimissaavutusten arvioinnissa on opiskelijoiden erityyiset osaamiset ja lähtökohdat sekä myös opettajien erilaiset odotukset osaamisen yksilöllisistä lähtökohdista. Osaamisen merkitys esiintyy ikään kuin kahdella tasolla: oppilaan ja odotuksen. Oppilaan tason merkityksiä kutsun funktioiksi elämissä maailmassa (alaluku 5.3.1) ja odotuksen tason merkityksiä koulutuksen tehtäviksi yhteiskunnassa (alaluku 5.3.2). Seuraavaksi tutkin, miten kasvatustavoitteet, yksilöllistäminen, arki ja luovuus ilmenevät matematiikan opetussuunnitelmassa.

## 5.2 Matematiikan opetussuunnitelmasta

### 5.2.1 Oppivelvollisuuskoulun matematiikan kasvatustavoitteista

Matematiikan opetussuunnitelman fokuksessa on, miten opiskelun yksilölliset kasvutavoitteet, arkielämäiset funktiot ja itsenäisen ajattelun taidot ilmenevät opetussuunnitelmateksteissä. Yksilöllisiä kasvutavoitteita, arkielämän funktioita ja itsenäisen ajattelun taitoja yhdistää luovuus. Kasvatus on luonteeltaan johdonmukaista, jolloin yläkoulussa oppiminen tulisi jatkua varhaiskasvatuksessa, esi- ja alakoulussa opituilla valmiuksilla ja taidoilla. Oppilaan tietoisuus oppimastaan suuntaa oppimispolkua. Alakoulusta tutut opiskeluympäristöt koulussa, luonnossa tai instituutioissa voi käyttää uudelleen oppimisen edistämiseen uusin painotuksin. Oppimispolku jatkuu niistä lähtökohdista, joihin oppilas on huomionsa kiinnittänyt ja saanut valmiuksia. Tällöin painottuu oppilaan vastuu oppimastaan.

Matematiikan perusoppimäärän sisällön esitti englantilainen kemisti Joseph Priestley vuonna 1760, mistä lähtien matematiikan opetussisällöt ovat universaalistikin muuttuneet hyvin vähän (ICMI 1990, 14-15). Descartesin aikaan 1600-luvulla koulumatematiikka sisältyi filosofiaan (alaluku 6.2). Antiikista lähtien vaikuttanut geometriaan keskittynyt Eukleideen *Alkeet* painettiin ensikerran vuonna 1482 (Tossavainen, Joutsenlahti, Lehtinen & Merikoski 2017, 218). Matematiikan opetussisällöt eivät 1700-luvun teollisen vallankumouksen ajasta lähtien ole merkittävästi muuttuneet, vaikka ympäröivä yhteiskunta osaamisvaatimuksineen on muuttunut merkittävästi. Nykyisessä yläkoulun opetussuunnitelmassa (2014) geometrian osuus on vähentynyt. Opetussisältöön on lisätty luku-teoriaa, todennäköisyys- ja tilastomatematiikkaa sekä algoritmi-, koodaus-, tieto- ja viestintäteknologiaa. Sisältöjen painotuksia ja järjestystä on tarkistettu opetussuunnitelmauudistuksissa noin kymmenen vuoden välein.

Varhais-, esi- ja alkuopetuksen suunnittelu on vahvistanut matematiikkakasvatusta, joka antaa myös yläkoulun opettajalle tietoa siitä, miten matematiikkaa on yhdistetty oppilaan elämismaailmaan. Säännönmukaisuuksien pohdinta ja maattainen ajattelu kehittyvät yksilön kokemista merkityksistä. Matematiikkakasvatuksen toteuttamisessa opetusaineen kumulatiivisuus ja kasvamaan saattamisen johdonmukaisuus opituista lähtökohdista tukee jatkuvuutta. Yläkoulussa

matematiikan opetussuunnitelmaa koskeva keskustelu kasvatustavoitteista suhteessa elämismaailmaan uudistaa sisältöpainotteista keskustelua.

Muutokset yläkoulun opetussuunnitelmassa ovat olleet pääasiassa sisältöjen kumulatiivisen rakenteen muutoksia suhteessa oletettuihin ikäkausivalmiuksiin. Tällöin tavoitteena on ollut sisällöllisen rakenteen sovittaminen lähinnä kehityspsykologi Piagetin (1896 – 1980) luomaan moraalikehityksen, kognitiivisten ja operationaalisten ajattelurakenteiden kehittymismalliin. Yläkoulun kasvatustavoitteet ovat rakentuneet sisään sisältörakenteeseen. Tällöin Piagetin idea sisäisten operaatioiden merkitsevyydestä oppimiselle saattaa jäädä taustarakenteeksi kiinnittämättä oppilasta oppimaansa. Opetussuunnitelman (2014) yleiset kasvatustavoitteet ja laaja-alaiset opinnot voi yhdistää matematiikkaan, mutta ne saattavat jäädä helposti irrallisiksi matematiikan formaalisesti kuvattujen oppimistavoitteiden rinnalla.

Esiopetuksen opetussuunnitelman perusteissa (2014, 34) lasten toimintaympäristö – lähiluonto ja rakennettu ympäristö sekä muut esiopetuksen oppimisympäristö tarjoavat runsaasti aineksia lasten oppimiselle. Erityisen tärkeää opetuksen liittäminen lasten kokemusmaailmaan ja heidän toimintaympäristönsä on matemaattisten taitojen opettelussa sekä teknologia- ja ympäristökasvatusten toteuttamisessa. Toimintaympäristöön liittyvät havainnot, kokemukset ja tiedot, niiden jäsentäminen ja kuvaaminen auttavat lapsia kehittymään ajattelijoina ja oppijoina. Kehittyvä taito nimetä asioita sekä ymmärtää ja käyttää erilaisia käsitteitä edistää lasten monilukutaitoa. Esiopetuksen tehtävänä on tukea lasten matemaattisen ajattelun kehittymistä ja kiinnostusta matematiikkaan. Tehtävänä on myös vahvistaa lasten luonnontuntemusta ja luontosuhdetta sekä tutustua arjen teknologiaan. Esiopetuksessa tutustutaan tutkivaan oppimiseen havainnoinnalla ja tutkimalla ympäristöä sekä kokeilemalla ja pääättelemällä. (emt.)

Lapsia kannustetaan kehittämään matemaattisia taitojaan toiminnallisesti, leikkien ja eri aisteja käyttäen erilaisissa oppimisympäristöissä. Opetuksessa tutustutaan matematiikkaan ja sen osa-alueisiin havainnollisesti ja yhdessä toimien. Lapsia innostetaan pohtimaan ja kuvailemaan matemaattisia havaintojaan erilaisissa arjen tilanteissa opettajan mallintamisen ja sanallistamisen avulla. Havainnot harjoitellaan esittämään itse kuvien ja erilaisten välineiden avulla. Toimintasuunnitellaan niin että siinä on paljon mahdollisuuksia luokitella, vertailla, asettaa järjestykseen asioita ja esineitä sekä löytää ja tuottaa säännönmukaisuuksia. Opetukseen kuuluu muistia kehittäviä leikkejä ja tehtäviä. Lapsia kannustetaan myös toimintaympäristöön liittyvien ongelmanratkaisutehtävien päättelyyn ja ratkaisujen etsimiseen. Lukukäsitteen kehittymistä tuetaan monipuolisesti leik-

kien ja työskennellen. Lapsia innostetaan havainnoimaan lukumääriä ympäristöstä sekä liittämään ne lukusanaan ja numeromerkkeihin taitojensa mukaan. Lukumääriä vertaillaan ja tutkitaan keksimällä lukumäärän muutoksia käytännössä. (EOPS 2014, 35.)

Erityisesti opetuksessa kiinnitetään huomiota lasten lukujonotaitojen ja nimeämisen kehittämiseen. Erilaisilla harjoituksilla tuetaan lasten tason ja tilan hahmottamista. Lapsia kannustetaan tutkimaan ja kokeilemaan 2- ja 3-ulotteisuutta sekä opettelemaan sijainti- ja suhdekäsitteitä, kuten edessä, ylhäällä ja joka toinen, esimerkiksi liikuntaleikkien avulla. Lasten geometrisen ajattelun vahvistamiseksi heille järjestetään mahdollisuuksia rakenteluun, askarteluun ja muovailuun. Opettajan ohjauksessa lapset tutustuvat ympäristössä oleviin muotoihin ja harjoittelevat nimeämään niitä. Esiopetuksessa kokeillaan mittaamista keholla ja eri välineillä. Opetuksessa harjoitellaan ajankäsitteitä, kuten joskus, eilen ja aamulla. Aikajärjestystä pohditaan yhdessä esimerkiksi vuorokaudenaikoja havainnoimalla. Opetuksessa hyödynnetään muun muassa leikkejä, pelejä ja tarinoita sekä tieto- ja viestintäteknologiaa. (EOPS 2014, 35.)

Esiopetuksen kasvatustavoitteet ovat yleisluontoisia ja pätevät suuntaamaan oppimista jatkuen ja syventyen kohti yläkoulua. Elämismaailmasuhteissaan matematiikkaa tulkitaan asiayhteyksissään, jolloin vastausvaihtoehtoja on usein useita. Yleisesti opetussuunnitelmissa ja opetuksen järjestämistä ohjaavissa asiakirjoissa (normi-, resurssi- ja informaatio-ohjaus) oppimistapahtuman jäsennostapa ja sisällön painotukset muuttuvat ja edistyvät. Parnes (1962) määrittelee suunniteltavan toiminnan päätöksenteon valmisteluprosessiksi, joka ohjaa saavuttamaan toiminnalle asetetut tavoitteet käytettävissä olevien resurssien avulla (Sauvala, 1978, 19). Suunnittelu on siten ajattelutoimintaa, joka perustuu tulevaisuuden rakentamiseen ja oppimisen kiinnittämiseen elämismaailmaan.

Esiopetussuunnitelma tuo mukaan matematiikkakasvatuksen lähes samanlaisena kuin se ilmeni kansakoulun opetussuunnitelmassa. Keskustelua kasvatuskäsitteistä kuitenkin käytiin myös peruskoulun alkuaikoina, mitä valaisee matematiikan didaktiikan apulaisprofessori Paavo Malisen (1930-2013) tutkimus. Toteutettaessa peruskoulun opetussuunnitelmaa vuoden 1970 jälkeen on ilmennyt tulkinnallisia eroja ”peruskoulun hengestä”, kirjoittaa Paavo Malinen (1976, 1). Koulutuspoliittisen ohjelman käsitteet *yhteiskunnan tarpeet, käytettävät keinot, tarpeelliset ohjeet tai edellytysten mukainen opiskelu* määrittävät väljästi, eivätkä poissulje mitään mahdollisuuksia opetussuunnitelman toteutukseksi (Malinen 1976, 47).

Vasta vuosien 1974 ja 1975 aikana on alkanut ilmetä poliittisia kannanottoja liittyen peruskoulun opetussuunnitelmaan. Malisen mukaan (1976) koulutuspoliittisten ongelmien konkreettinen käsittely mahdollistuisi, jos eduskunnalle annettaisiin esitys laiksi peruskoulun opetussuunnitelmasta. Peruskoulun puitelaisissa on pohjana kansakoulun lainsäädäntö, mikä sitoo opetussuunnitelmaa vähän. Peruskouluasetuksessa (1970) täsmennetään hallinnollisten opetussuunnitelmien sisältöä lähinnä vuositarkistetta ajatellen. (Malinen 1976, 48.) Myöhemmin peruskoululaki annettiin 27.5.1983, minkä 3. pykälässä mainitaan oppilaiden ikäkausi ja edellytykset kasvatusta- ja opetustyön perustaksi.

Paavo Malisen (1976, 54) mukaan POPS I:n toteutuksessa on opettajan asema jäänyt epäselväksi. Opettajan velvollisuus (1970) on ottaa huomioon paikalliset olosuhteet ja oppilaiden tuntemus, mutta monet haluavat olla opetustehtävien hoitajia. 1960-luvun lopussa esiintyi kampanja vapauttaa koululaiset siellä valitsevien tapojen kahleista, mikä heikensi opettajien mahdollisuuksia ja haluja monipuolisen kasvatustehtävän suorittamiseen. (emt.)

*Malisen kuvaamassa merkityksessä olen aineenopettajana ja suunnittelijana suuntautunut kasvatuksellisesti ja kouluttanut itseäni kasvatussuuntautuneeksi huomioimalla paikallisia ja alueellisia tavoitteita, luonnonolosuhteita, kulttuuria ja yrittäjyyttä tukeviksi. Tällainen suuntautuminen on luonnollista lapsuuden kokemusten ja yhteiskunnallisen asenteeni kautta. Kasvatus- ja yhteiskuntayhteys yläkoulussa kuuluu edelleen opettajan pedagogisen vapauden alueelle.*

Valtioneuvoston päätös peruskoulun opetussuunnitelman kehittämiseksi 13.3.1975 sai opettajajärjestöjen taholta voimakkaan vastustuksen, jonka seurauksena opettajat järjestivät useita boikottitoimenpiteitä. Tilanne aiheutti epäilevää suhtautumista opetussuunnitelman kehittämiseen puolin ja toisin. Malisen tutkimuksen kasvatusero- ja luokittelun koskeva luokittelu konservatiivi, liberaali, sosiaalinen ja hallinnollinen näkemys jäivät tuolloin vaille rakentavaa dialogia. Malisen keskustelunavaus, konservatiivi ja liberaali kasvatusero- ja luokittelun sisältävät vastakkainasettelua, mikä on opetuskeskustelujen taustalla edelleen:

#### **Konservatiivi kasvatusero- ja opetussuunnitelman näkemys**

- oppilaat valikoituneet lahjakkuuden ja muun soveltuvuuden mukaan,
- kokemusten ja tutkimusten mukaan suorituserot suuria,
- menneisyys mallina tulevaisuudelle,
- järjestelmää ei perustella yhteiskunnallisesti

#### **Liberaali kasvatusero- ja opetussuunnitelman näkemys**

- oppilaalla mahdollisuus suorittaa valintoja ja esittää omia näkökantojaan,
- oppilaiden pysyviä eroja ei tuoda esille,
- demokraattisen suunnittelun ansiosta opetus on joustavaa, ennalta annetun systeemin noudattaminen vähentää hallinnollisia ohjeita, arvostelua ja rangaistuksia,
- oppimiseen liittyy kyberneettinen järjestelmä, jonka säätö on oppimisprosessissa mukana olevien suoritettavissa,
- taustalla ajattelu vapaasta kasvatuksesta.

Malisen (1976, 70) tutkimuksessa haastateltavina on joukko kouluasiantuntijoita: Veli Nurmi (OPM), ylijohtaja Yrjö Yrjönsuuri (kouluhallitus), toimistopäällikkö Tuomo Häyhä, läänin kouluneuvos Kalevi Nikki, koulutoimenjohtaja Pekka Käppi, koulunjohtaja Yrjö Kuha, opinto-ohjaaja Heikki Saares, Huk Anita Nuutinen, prof, emer Matti Koskenniemi, osastopäällikkö Erkki Kangasniemi (KTL), koulusuunnittelija Maija Pöyhönen, koulusihteri Risto Haapanen, luokanopettaja Mauri Toiviainen (OAJ, Jkl). (emt.) Haastateltavien enemmistö oli liberaalin kasvatuskäsityksen puolella, mutta konservatiivinen näkemys jäi voimaan. Liberaali näkökulma antaa vapauksia vahvistaa yhteiskuntayhteyksiä.

*Opettajien koulutuksen matematiikan didaktiikan lehtori Malisen tutkimuksen tulos on merkittävä. Hän oli arvostettu vaikuttaja ja ihmislähtöisyyden puolustaja, jonka puheenvuorot koulutustilaisuuksissa saivat myönteistä kannatusta. Vaikka edellä mainitut haastateltavat kallistuvat enemmän liberaalin näkemyksen puolelle, konservatiivinen näkemys jäi toteutuneessa koulutusajattelussa voiton puolelle. Lähtökohdistani tulkitsen ratkaisun oppijan vastuun, vapauden ja luovuuden väärinymmärryksenä.*

Malisen (1976) tutkimuksen mukaan peruskoulun opetussuunnitelma on pyritty laatimaan siten, että sen avulla toteutetaan kouluviranomaisten suunnittelemaa koulutuspolitiikkaa. Keskushallinnossa toimivat katsoivat mahdottomaksi käsitellä opetussuunnitelmia yleisistä koulutuspoliittisista periaatteista riippumatta. Mitä lähemmäksi toimivaa opetussuunnitelmaa tullaan, sitä enemmän näyttävät kuitenkin opetussuunnitelmallisiin ratkaisuihin vaikuttavan muut kuin koulutuspolitiikasta johdettavat asiat. (emt.)

Kentällä tuntuu, ettei koululaitos ole nuorison kasvattamista varten vaan pykälien noudattamista varten. Hallinnolliset ohjeet sitovat epätarkoituksenmukaisella tavalla. Työjärjestysasiat määräytyvät riippumatta POPS:n tavoitteista. Lain noudattaminen korvaa puutteet erilaisten tulkintojen käsittelemiseksi. Peruskoulun toteutuksesta on päätetty ns. puitelain avulla (1968), mutta opetussuunnitelmaa on kehitteily kokonaan komiteatyönä ja virkamiesten päätöksillä. Lisäksi on saatu joitakin valtioneuvoston päätöksiä. (Malinen 1976, 36-37.)

*Edelleen koulutuspolitiikan ja opetussuunnitelman toteutus eivät kohtaa tarkoituksenmukaisesti. Kasvatus- ja opetustavoitteiden muodostaminen opetussuunnitelmien periaatteille kaipaava syvempää ymmärrystä ja yksinkertaistamista. POPS I (1970) on huolellisesti pohdittu, pedagoginen, syvälinen ja laaja kuvaus oppimistapahtumasta, missä fokuksessa on oppilasaineiden heterogeenisyys. Heräkin kysymys, olisiko tarkkaa sisältöluetteloa tarvittu lainkaan, vaan vain keskeiset sisällöt, koska opettajilla on opetusaineensa tuntemus koulutuksensa ja kokemuksensa perusteella. Matematiikan opetuksen keskeisten sisältöjen ympärille opettaja voi rakentaa opetuksensa omaa suuntautuneisuuttaan ja vahvuuksiaan hyödyntäen. Tällöin painottuu matemaattinen prosessi, jolloin myös tietojen päivitys täydennyskoulutuksissa tulee perustelluksi. Opetussuunnitelmakeskustelut toteutuisivat kasvatuslähtökohdista yksilöllisyyttä ja matemaattisen ajattelun kehittymistä tukien.*

POPS I (1970) ei käsittele oppiaineita, vaan koulukasvatusta kokonaisuutena. Integraatio- ja differentiaatio ovat suunnitelmassa vahvasti esillä ja myös erilaiset kasvatustavoitteet, kuten tiedollinen-, eettinen-, esteettinen kasvatus, käytännön taidot ja luontoon orientoituminen, jotka ehdotettiin integroitaviksi oppiaineisiin. Opetussisällöt ovat yksityiskohtaisesti eriteltyinä vasta POPS II:ssa (POPS II, 1972) ja myös oppimääräsuunnitelmassa (1982). Opetuksen luova toteutus ja integrointi ympäristöön on edelleen kehitettävänä. Opetuksen laaja-alaisuus ja syventäminen onnistuu todennäköisimmin opettajien harrastuneisuuden ehdoilla. Vuonna 2016 käyttöön otetun opetussuunnitelman laaja-alaisuutta kuvaavat monialainen oppiminen ja laaja-alainen osaaminen. Esitystapa ei tue käytäntöön siirtämistä, jolloin laaja-alaisuus jää irralliseksi oppiaineen opetuksesta.

*Muutamissa kouluissa lukujärjestyksiä suunnitellaan monitieteisiksi. Matematiikka on oppiaine, missä oppimista ohjaa persoona itse, jota ohjauksella tar-*

*peen mukaan tuetaan. Vapautuessaan opetus- ja luokkaesteistä kumulatiivinen eteneminen matematiikan opinnoissa tuottaa hyvin eritahtista ja erilaatuista oppimista. Oppilaan oppimisen nopeus ei ole laadun tae, vaan nopeus voi indikoida myös valikoivuutta opetussuunnitelman suunnassa. Yleisesti eteneminen edistyy tehokkaimmin, kun päättelyn perusteet on opittu kunnolla. Hidas eteneminen voi tarkoittaa kysymysten heräämistä, laajempaa pohdintaprosessia tai poikkeamista opetussuunnitelmasta, jolloin se tuottaa todennäköisemmin luovia alkujia. Kun kysymyksiä ja ongelmia on enemmän, on mahdollista keksiä uusia merkityksiä ja perusteita. Oppimisen hitaus tai nopeus indikoivat usein erilaisia intressejä oppimiseen.*

Oppivelvollisuuskoulun matematiikan kasvatustavoitteiden merkitys yläkouluvaiheessa ei ole täysin selkiytynyt. Peruskoulun yläkouluun matematiikkakasvatus tukee yksilöllistymistä oppilaan omana tehtävänä, minkä motivaatioperusta rakentuu oppilaan omista intresseistä. Kasvatus tukee intressien tunnistamista ja vahvistamista. Opinpolun rakentaminen jatkumona varhais- esi- ja alkuopetuksessa saavutettuihin valmiuksiin on tällöin tiede- ja tietoisuuskasvatusta oppilaan omista lähtökohdista. LUMA -tavoitteena (1996) on kansalaisten arkielämän taidot (tavoite 6), mikä on tulkittu eri-ikäisten mahdollisuutena hankkia kestävä kehitys ja elinikäisen oppimisen periaatteen mukaisesti taitoja. Arkielämän taitojen tavoite on jäänyt LUMA -seurantatutkimuksissa hyvin vähälle huomiolle. Matematiikan yhdistäminen arkielämään tarkoittaa suurien yksilöllisten erojen hyväksymistä sekä opitun tuottamista ja soveltamista. Matematiikan oppiminen ja kasvaminen on tällöin merkittävin osin itseoppimista, jolloin kasvattajan rooli on avata polkua ja tukea oppimispolullaan etenevää.

## 5.2.2 Arkimatematiikka kansakoulussa ja peruskoulussa

Vertailevan analyysin kohteena ovat kansakoulun arkimatematiikka (laskento) ja nykyisen opetussuunnitelman perusteiden (2014) laaja-alaiset taidot. Kansakoulun opetussuunnitelma oli ensisijaisesti kansakouluhallinnon väline (Koskenniemi 1944, 145-146), jolloin opettajan kapasiteetti vapautui enemmän opetuksen ja arjen yhdistämiseen. Kansakoulun johtajaopettaja laati opetussuunnitelman opettajatoveriensä kanssa kouluhallituksen vahvistamaan lomakkeeseen,

jonka tuli lähettää kansakoulujen tarkastajalle 1. syyskuuta mennessä. Suunnitelmassa oli mainittava opetettavien aineiden viikkotuntimäärät, oppikirjat, opettavan aineksen jakaantuminen eri vuosiluokille ja lukuvuoden työviikoille, työskentelytapa ja opettajiston työtapa. Kansakoululainsäädäntö ja kouluhallituksen kiertokirjeet säätelivät yleisiä koulutuksen järjestämisen ehtoja. Koulu-elämän järjestämistä koskevia ohjeita antoivat kouluhallituksen viralliset kirjeet, koulutus ja erilaiset opetusalan julkaisut. (emt.)

*Miten matematiikka ja arki kohtasivat, ei välttämättä ilmennyt opettajan laatimasta suunnitelmasta. Kansakoulussa virallinen opetussuunnitelma ei useinkaan vastannut toteutunutta opetussuunnitelmaa. Kokemuksessani toteutunut kansakoulu vastaa hyvin Matti Koskenniemen (1944) opetukselle antamia ohjeita neljän vuoden kansakouluajanjaksolta 1961-1965. Käytäntöyhteys korostui oppikirjoissa, jotka samalla toimivat opetussuunnitelmina. Toiminnassa opetussuunnitelma päivittyi tilanteiden ja ympäristön ohjaamana.*

Matti Koskenniemi (1944, 314) aloittaa Kansakoulun opetusopissaan Kaarlo Saarialhon (1938) laskennonopetuksen peruskysymyksiin vedoten: ”Tärkein ja läheisin kansakoulun laskennonopetuksen päämäärä on sellainen laskutaito, jonka avulla jokapäiväisen elämän laskennollisissa kysymyksissä itsenäisesti ja vavattomasti voi etsiä oikean ratkaisun. Tällaisen käytännöllisen laskutaidon oppiminen on mahdollinen vain siten, että lapsi tottuu näkemään ympärillään ratkaisua vaativia tehtäviä ja ponnistelemaan niiden ratkaisemiseksi. Luotettavaa laskutaitoa ei opita harjoittelemalla jotakin laskutapaa sellaisenaan tai painamalla konemaisesti mieleen joitakin laskusääntöjä.” (emt.)

Koskenniemen mukaan laskennon opetus kehittää yleisesti lasta käsittämään luonnon ja ihmiselämän ilmiöitä. Jos laskemisessa kiinnitetään huomiota harkintaan sekä laskutavan valitsemisessa että saadun tuloksen arvostelamisessa, lapsi tottuu muussakin yhteydessä ajattelemaan johdonmukaisesti ja käyttämään arvostelutaitoaan. Laskun vastauksen järjellisyys tarkistaminen ja vain merkittävien numeroiden käyttäminen kehittävät lasta tähän suuntaan. Ihanteellista olisi, jos lapset hankkisivat sen omin voimin, omien kokemusten ja oivallusten kautta. Osa taitoa on opetettava harjaannuttamisen avulla, koska aika ei aina riitä ihanteeseen. Oppilas on kuitenkin johdatettava itse hankkimaan laskemisen taitoa. (emt.)

*Aikaisemmin kuvaamani talonpoikainen kulttuuri on yhteensopiva näiden Koskenniemen kuvausten ja tavoitteiden kanssa. Kansakoulussa toteutunut tutkiva ja itseohjautuva oppiminen ohjasivat oivaltamaan omien kokemusten kautta. Luokkatilassa, jossa opiskelivat 4.- 5. -6. ja 7. luokka-asteet, laskennon opiskelu oli pääsääntöisesti itsenäistä harjoittelua, mikä opiskelutapa toimi hyvin, kun tehtävänasettelu oli ympäristöntarkkailuun motivoivaa.*

Väinö Pajunen (1952, 6-8) korostaa edelleen samoja tavoitteita. Laskutaitoa on useaa eri astetta: mekaaninen eli konemainen laskutaito tai hankittu laskutaito. Valmiita suoritustapoja käyttäen voi saavuttaa hyvän mekaanisen suorituskyvyn, jolla on kuitenkin puutteensa – kyky käyttää opittua tietoa uusissa tilanteissa tai kyky etsiä uusia, entisestä poikkeavia ratkaisumenetelmiä. Hankitun laskutaidon yhteydessä ei ole kyse pelkästään laskun ulkonaisesta puolesta, suoritustavan muodoista, laskutekniikasta, vaan sitä käytettäessä päästään tunkeutumaan syvemmälle itse laskutapahtuman olemukseen. Kun laskutaito on askel askeleelta itse hankittua, omakohtaisen oivalluksen perusteella muodostunutta, on saatu varmuus siitä, että laskija ymmärtää sen. Mekaaniseen laskutaitoon pysähtynyt ei pysty sanottavasti kehittämään laskutaitoaan. Oman kokemisen kautta hankittu taito johdattaa tiedon tielle ja tekee kykeneväksi sitä edelleen kulkemaan. (emt.) Pajusen kuvaama hankittu laskutaito on edelleen matemaattisen oppimispolun rakentamisen perustaa.

*Pajusen mukaan oppiminen syvenee arkiyhteyksien ymmärtämisen ja oivalluksen kautta, jota hän kutsuu hankituksi laskutaidoksi. Pajusen laskutaitokuvaus sopii hyvin itsenäiseen opiskelutyylini ja isänkin käsityksiin. Pajusen luokitusta ei pidä tulkita liian kirjaimellisesti – laskurutiinienkin kautta toiminnot vahvistuvat. Opetuskokemukseni perusteella nimenomaan hankitut laskutaidot ovat heikentyneet opetusvuosieni 1980-2019 aikana.*

Pajunen muistuttaa laskutaidon laadusta. Aivan liian usein on pyritty antamaan valmista tietoa ja hankitun laskutaidon osuus on jäänyt. Opettaja saattaa pelätä, että oppimiseen jää aukkoja tai hän selittää silloinkin, kun tieto olisi hankittavissa. Laskennonopetuksen ajattelukyvyn kehittäminen suuntautuu kolmeen suuntaan: johdonmukaiseen, kvantitatiiviseen ja kriittilliseen ajatteluun. Mainitut taidot ovat yleissivistykseen kuuluvia taitoja. Johdonmukaisuus paranee laskentoon kuuluvissa asioissa, mutta myös arkielämän tilanteissa. Kvantitatiivinen

ajattelu on itsenäiseen harkintaan perustuvan laskutaidon edellytys. Sen piiriin kuuluu kyky tajuta paljousia ja paljoussuhteita sekä kyky nähdä ympärillään tapahtuvissa asioissa ratkaistavia laskutehtäviä. Kriittinen ajattelu kehittyy laskujen suorituksessa, missä saatuun vastaukseen suhtaudutaan arvostellen ja tutkien sen mahdollisuutta. (Pajunen 1952, 10-11.) Pajusen linjaukset ovat päteviä edelleen. Hankitun laskutaidon piiriin kuuluvat omaohjaus, intuitio ja luovuus, jotka ilmentävät yksilöllisyyttä.

1970-luvun peruskoulun opetussuunnitelmakomitean mietinnössä (POPS I, 26) tiedollisella kasvatuksella on kaksi reittiä: arkielämän tiedonhankinta eli säännönmukaisuuksien havainnointi kokemuksessa ja järjestelmällinen tiedonhankinta. Käytäntö ja teoria yhdistyivät POPS I:ssä (1970): ”Arkielämän tiedonhankinnan ja järjestelmällisen tiedonhankinnan välillä ei ole periaatteellista eroa, vaan kysymyksessä on aste-ero. Arkielämän tiedonhankinnassa ihminen pyrkii tekemään yleistyksiä kokemastaan, etsii säännönmukaisuuksia ja lainalaisuuksia ympäristöstään ja tapahtumisesta. (vrt. nykyopetussuunnitelman oppimispolku ja tutkimuspolku). Myös järjestelmällinen todellisuutta koskeva tiedonhankinta, jota sanotaan tieteenksi, perustuu havainnointiin, toimintaan ja ajatteluun.” (POPS 1970, 26.) Myös 1990-luvulta lähtien vahvistunut reflektiivisyyden korostus pyrki palauttamaan arkielämäisen ja itsekasvatuksellisen näkökulman oppimiseen ulkoa oppimisen sijaan.

POPS I:ssä (1970) arkielämän tiedonhankinnan lähtökohtana ovat oppijan horisontit, vaikkakin oppimistapahtumaa tarkastellaan ylhäältä alaspäin, kuten edelleen. Opetussuunnitelmalla on vahvistuva hallinnollinen merkitys, jolloin opiskelija ja opettaja voivat jäädä tavoitteiden mekaanisiksi toteuttajiksi, joista Saarialho, Pajunen ja Koskenniemi edellä varoittavat.

Peruskoulun opetussuunnitelman perusteiden (2014) laaja-alaiset opintokokonaisuudet ohjeistavat ajattelun ja oppimaan oppimisen taidoissa: Ajattelun ja oppimisen taidot luovat perustaa muun osaamisen kehittymiselle ja elinikäiselle oppimiselle. Ajatteluun ja oppimiseen vaikuttaa se, miten oppilaat hahmottavat itsensä oppijoina ja ovat vuorovaikutuksessa ympäristönsä kanssa. Olennaista on myös, miten he oppivat tekemään havaintoja sekä hakemaan, arvioimaan, muokkaamaan, tuottamaan sekä jakamaan tietoa ja ideoita. Opetus ohjaa oppilaita ymmärtämään matematiikan hyödyllisyyden omassa elämässään ja laajemmin yhteiskunnassa. Opetus kehittää oppilaiden kykyä käyttää ja soveltaa matematiikkaa monipuolisesti. (POPS 2014, 20.) Matematiikan opiskelussa kuvatut taidot ovat lähtökohtana yksilöllisen oppimaan oppimisen tiedostamisessa, mitä esi- ja alkuopetuksessa on jo harjoiteltu.

POPS (2014) mukaan ajattelutaitojen oppiminen vastaa kansakoulun opetus suunnitelman arkilähtöisiä tavoitteita. Kuvauksesta löytyy jo yksi 'miten'-sana ja viittaus yksilöön hahmottavana oppijana. Kuvattu ajattelu rakentuu kuitenkin ulkoisen tarkastelijan, ei sisäisyydestä kumpuavan havainnoinnin perustalta. Kirjoituksen modus on passiivissa, eikä aktiivissa. Pohdinta siitä, 'miten', jää edelleen yksittäisen opiskelijan tai opettajan päätettäväksi. 'Miten'-kysymystä voi pohtia koulun opetussuunnitelmakeskusteluissa.

POPS (2014, 20) mukaan oppilaita ohjataan huomaamaan, että tieto voi rakentua monella tavalla, esimerkiksi tietoisesti päättelemällä tai intuitiivisesti, omaan kokemukseen perustuen. Tutkiva ja luova työskentelyote, yhdessä tekeminen sekä mahdollisuus syventymiseen ja keskittymiseen edistävät ajattelun ja oppimaan oppimisen kehittymistä. Opettajien on tärkeä rohkaista oppilaita luottamaan itseensä ja näkemyksiinsä sekä olemaan samalla avoimia uusille ratkaisuille. Rohkaisua tarvitaan myös epäselvän ja ristiriitaisen tiedon äärellä olemiseen. Oppilaita ohjataan pohtimaan asioita eri näkökulmista, hakemaan uutta tietoa ja siltä pohjalta tarkastelemaan ajattelutapojaan. Heidän kysymyksilleen annetaan tilaa ja heitä innostetaan etsimään vastauksia, kuuntelemaan toisten näkemyksiä sekä samalla pohtimaan myös omaa sisäistä tietoaan. Heitä rohkaistetaan rakentamaan uutta tietoa ja näkemystä. (emt.) Kuvaus vastaa edelleen juuri matematiikkaan liittyvää oppimaan oppimisen oppimiskäsitystä, vaikka kuvaus sijoittuu opetussuunnitelmassa laaja-alaisiin taitoihin.

”- pohtimaan myös omaa sisäistä tietoaan”, löytyy tästä laaja-alaisen taitotavoitteiden 1. osasta, mikä on tekstin lopussa vielä vähän epäilevänä osana kuvattua prosessia. Järjestystä voi täsmentää: ensin sisäinen tieto, sitten reflektointia, dialogia, kokeilua, testaamista ja mahdollisesti muiden ajatteluun vertaamista. Ohjausteksti on passiivissa ja yksilönäkökulma hapuilee.

Kokonaisoppimiseen liittyvät laaja-alaiset taidot kannustavat dialogiin. POPS (2014, 20) perusteiden mukaan koulun muodostaman oppivan yhteisön jäsenenä oppilaat saavat tukea ja kannustusta ideoilleen ja aloitteilleen, jolloin heidän toimijuutensa voi vahvistua. Oppilaita ohjataan käyttämään tietoa itsenäisesti ja vuorovaikutuksessa toisten kanssa ongelmanratkaisuun, argumentointiin, päättelyyn ja johtopäätösten tekemiseen sekä uuden keksimiseen. Oppilaille tulee olla mahdollisuus analysoida käsillä olevaa asiaa kriittisesti eri näkökulmista. Innovatiivisten ratkaisujen löytäminen edellyttää, että oppilaat oppivat näkemään vaihtoehtoja ja yhdistelemään näkökulmia ennakkoluulottomasti ja voivat käyttää kuvittelukykyään olemassa olevien rajojen ylittämiseen. Leikit, pelillisuus,

fyysinen aktiivisuus, kokeellisuus ja muut toiminnalliset työtavat sekä taiteen eri muodot edistävät oppimisen iloa ja vahvistavat edellytyksiä luovaan ajatteluun ja oivaltamiseen. (emt.)

”Innovatiivisten ratkaisujen löytäminen edellyttää, että oppilaat oppivat näkemään vaihtoehtoja ja yhdistelemään näkökulmia ennakkoluulottomasti ja voivat käyttää kuvittelukykyään olemassa olevien rajojen ylittämiseen”, kuvaus viittaa ajattelamisen vapausasteiden lisäämiseen. Vaihtoehtojen näkeminen (divergenttisyys), omaperäisyys, kuvittelukyky ja ennakkoluulottomuus ovat sallittuja. Teknologia voi kannustaa oppilaita oman luovuuden toteuttamiseen. Myös muiden taipumusten tukeminen on yhtä arvokasta.

Valmiudet systeemiseen ja eettiseen ajatteluun kehittyvät vähitellen, kun oppilaat oppivat näkemään asioiden välisiä vuorovaikutussuhteita ja keskinäisiä yhteyksiä sekä hahmottamaan kokonaisuuksia. Jokaista oppilasta autetaan tunnistamaan oma tapansa oppia ja kehittämään oppimisstrategioitaan. Oppimaan oppimisen taidot karttavat, kun oppilaita ohjataan ikäkaudelleen sopivalla tavalla asettamaan tavoitteita, suunnittelemaan työtään, arvioimaan edistymistään sekä hyödyntämään teknologisia ja muita apuvälineitä opiskelussaan. Oppilaita tuetaan rakentamaan perusopetuksen aikana hyvä tiedollinen ja taidollinen perusta sekä kestävä motivaatio jatko-opinnoille ja elinikäiselle oppimiselle. (POPS 2014, 20-21.) Laaja-alaisuus yhdistyy matematiikan oppimaan oppimiseen.

Matematiikan opetuksen tavoitteiden kuvauksessa on viittaus sisäisyydestä eli tutkimuspolun käsittein intuitiosta ja subjektiivisesta merkityksenannosta nouseviin ideoihin. Koulumatematiikan haaste ulkoistettuun suunnitelmaan nähden on, että se on sisäisesti koettava, keksittävä tai löydettävä. Kiehtovuus on sisäistä. Matematiikan keskeneräisyys oppimispolulla ei välity. Jää epäselväksi, onko matematiikka minussa vai onko se jotain, mitä minulla ei ole. Ihmisen suhde matematiikkaan jää avoimeksi. Opetussuunnitelman (2014) tekstikuvauksessa arkeen liittyvien laaja-alaisen ajattelutaitojen kehitys on yhteydessä matematiikan opettamisen tavoitteisiin vain viitteenomaisesti. Yhteys matematiikan harjoittamiseen on jää kovin avoimeksi.

Arkimatematiikkaa ei enää mainita uusissa opetussuunnitelmissa, vaan se piiloutuu yleisesti määriteltyjen laaja-alaisen tavoitteiden sisään. Arkimatematiikka ilmenee kansakoulun opetussuunnitelmassa ja POPS I:ssä. Arjen ongelmanasetteluista voi löytää rajattomasti luovuuteen yllyttäviä alkuja. Tällöin matematiikka ei välttämättä tule heti valmiiksi, vaan se jatkuu koko elämän ajan yksilöllistyvänä ymmärryksen tapana. Seuraavassa alaluvussa tarkastelen POPS I:ssä (1970) kuvattuja tiedollisen kasvatuksen formaalisia tavoitteita ja nykyisen

POPS (2014) perusteiden käsitteellisen tiedon ja itsenäisten ajattelutaitojen tavoitteita.

### 5.2.3 Itsenäiset ajattelutaidot ja matemaattinen ajattelu

Itsenäiset ajattelutaidot kuuluvat yleisiin kasvatustavoitteisiin ja matemaattinen ajattelu matematiikan oppimistavoitteisiin. Molemmat tavoitteet kuuluvat matematiikkakasvatukseen. Itsenäiset ajattelutaidot ja matemaattisen ajattelun kehittyminen tukevat tulkinnassani toisiaan. Kiinnitän huomioni erityisesti esitystapaan sekä luovuuden ja loogisuuden kuvauksiin opetussuunnitelmissa.

Kasvatustavoitteet, jotka pohjimmiltaan pätevät kaikkiin ikäkausiiin, myös aikuiskasvatukseen, löytyvät varhaiskasvatuksen ja esi- ja alkuopetuksen opetussuunnitelmasta (luku 5.2.1). Ajattelun kehittyminen on yksilöllinen opinpolku, jonka vaiheet sijoittuvat ihmisenä kasvamiseen. Opetussuunnitelman ikäkausiiin suhteutettu oppimisteoreettinen malli (Piaget) toimii myös siinä vaiheessa, kun itsenäiset taidot alkavat johdattaa oppimista (Kallio 2017). Ajattelemisen itsenäistyminen sijoittuu yksilöllisesti eri tavoin, joillakin jo esiopetusvaiheessa, joillakin vasta aikuisuudessa. Oppimisen ikävaihemallit antavat tietoa yleisestä kehityksestä ja antavat viitteen ajattelun kehittymisestä yleisesti, mutta yksilön kehitys voi olla eritahtista, eri vaiheista ja käynnistyä erilaisista lähtökohdista. Ajattelutaito on itsenäisten taitojen ja matemaattisen ajattelun oppimista rinnakkain.

Peruskoulun 7-9 luokkien opetussuunnitelman (2014, 375) perusteet kuvaa ajattelun taitoja ja menetelmiä: Harjoitellaan loogista ajattelua vaativia toimintoja kuten sääntöjen ja riippuvuuksien etsimistä ja esittämistä täsmällisesti. Pohditaan ja määritetään vaihtoehtojen lukumääriä. Vahvistetaan oppilaiden päättelykykyä ja taitoa perustella. Harjoitellaan matemaattisen tekstin tulkitsemista ja tuottamista. Tutustutaan todistamisen perusteisiin. Harjoitellaan väitelauseiden totuusarvon päättelyä. Syvennetään algoritmista ajattelua. Ohjelmoidaan ja samalla harjoitellaan hyviä ohjelmointikäytäntöjä. Sovelletaan itse tehtyjä tai valmiita tietokoneohjelmia osana matematiikan opiskelua. (emt.)

*Kuvatut ajattelun taidot ja menetelmät opittiin kouluajanani geometriassa. Geometrinen ongelmanratkaisu antoi valmiuksia ajattelun taitojen ja menetel-*

*mien oppimiseen. Geometrinen ongelmien ratkaisussa mukana oli oma havainto, tutkiminen ja päättely, jotka rationaalisesti painottunut ymmärrys matemaattisen tiedon alkuperästä usein ohittaa (alaluku 6.1). Opiskelijoiden geometrisen hahmottamisen taidot ovat heikentyneet radikaalisti. Maatalousyhteiskunnassa geometrinen hahmotus liittyi jokapäiväisiin työtehtäviin.*

Opetussuunnitelma ilmaisee mekaanisesti, mitä pitäisi olla opittuna, kun on omaksuttu matemaattista ajattelua. Keksiminen ja soveltaminen on oppilaan työ, jonka tulkinta jää usein oppilaille. Tällöin oppilaan ja opettajan väliin saattaa jäädä kohtaanto-ongelma. Ohjeistus kuvaa matematiikan esittämisen vaatimuksia, eikä tue luontaisesti ihmisen havainnoista käynnistyvää ajattelemista. Opetussuunnitelma antaa matemaattisen ajattelun eri osa-alueista yksityiskohtaiset ohjeet otsikolla merkitys, arvot ja asenteet, joissa ominaisuuksissa on viittaukset oppiainesisältöihin ja laaja-alaisiin opintoihin. Matematiikan teoriasta johdetut ohjeet eivät anna merkittävää lisätietoa opettajalle, eivätkä ole vanhemmillekaan kovin informatiivisia. Suunnitelma ei edistä luovuutta, vaikka ohjeissa sanaa käytetäänkin.

Peruskoulun opetussuunnitelman perusteet (POPS 2014) kuvaa opetustavoitteisiin liittyviä arvoja, merkityksiä, asenteita ja työskentelytaitoja ulkokohtaisesti, vaikka ne ovat sisäsyntyisiä, eivätkä näin suoraan yleistettäviä. Oppimisen yksilöllistäminen viittaa valmiuksiin ja taipumuksiin. Vaikka lähtöasenteet ovat erilaisia, positiivisia tai negatiivisia, ne ovat yhtä arvokkaita lähtötilanteessa. Ajattelutaitojen kehittymisen kannalta on tärkeää tulla yksilöllisesti tietoiseksi merkityksistä, arvoista, asenteista ja työskentelytaidoista, joilla voi jatkaa työskentelyä ja päättelyä eteenpäin. Ihminen jäsentyy ajattelemaan omista lähtökohdistaan, jolloin tavoitteena on tunnistaa ja tiedostaa itse itsessään merkityksiä ajattelemiselleen.

Matematiikan oppimisen tavoitteita kuvaavan taulukon kohdassa T5 tavoite on tukea oppilasta loogista ja luovaa ajattelua vaativien matemaattisten tehtävien ratkaisemisessa. Ohjelause liittyy kaikkiin sisältöalueisiin S1-S6, sekä laaja-alaisiin opintoihin kohtiin L1-L6, paitsi L2, kulttuurinen osaaminen, vuorovaikeus ja ilmaisu. Tutkimuspolku ymmärtää kulttuurisen perustan keskeisenä sisäisenä ja ulkoisena koulumatematiikkaan vaikuttajana, mikä liittyy laaja-alaisesti matematiikan sisältöalueeseen tiede- ja tietoisuuskasvatuksen, itsetuntemuksen ja maailman ymmärtämisen merkityksessä. Kun tunnistaa omia merkityksiään, voi ymmärtää paremmin muita ihmisiä.

Luovuus on mainittu useasti, mutta sen merkitys ei välity. Luovuuden ennakoimatonta tulosta ei tuoda esiin. Opetustavoite T14 kehottaa ohjaamaan oppilasta ymmärtämään tuntemattoman käsite ja kehittämään yhtälönratkaisutaitojaan. Viittaukset sisältöalueisiin S3 ja S4, sekä laaja-alaisiin opintoihin L1 ja L2. Opetustavoitteet (T1-T20), sisältötavoitteet (S1-S6) ja laaja-alaiset taidot (L1-L7) vaikuttavat keinotekoisilta, mekaanisilta, teoreettisilta ja kaukaisilta verrattuna ihmisen luontaisiin ajattelutaipumuksiin. Laaja-alaisuuden merkitysten tarkka erittely opetussuunnitelman taitoja erittelevässä taulukossa (POPS 2014, 375) ei kannusta luovuuteen. Luovuuden idea on yhteyksien keksiminen. Laaja-alaiset taidot on yhdistetty valikoidusti opetuksen eri sisältöalueille, mikä vähentää niiden merkitystä kasvatuksen perustaksi kokonaisuutena.

Kasvatusnäkökulma, miten oppimisen oletetaan käynnistyvän, ei ilmene suunnitelmassa. Ohje kannustaa opettajaajoitukseen, jolloin keino johdattaa opiskelijaa omalle oppimisen polulle on opettajan huoli. Ohje kannustaa mallioppimiseen, mikä useiden tutkimusten mukaan toteutuu matematiikan opiskelussa kouluissa ja yliopistoissa. Jos tulkitaan, että matematiikka ilmenee näin, matematiikka alkaa vaikuttaa tylsältä, mekaaniselta ja mustavalkoiselta.

Matemaattisen ajattelun kehittäminen on matematiikan opetuksen tavoite. Kuuselan (2013) mukaan matemaattisen ajattelun rakenne on eri kuin esimerkiksi historian. Molempiin kuuluu päättely, mutta päättely noudattaa eri sääntöjä. Tulokinnon mahdollisuudet ovat matematiikassa olennaisesti pienemmät kuin historiassa. (Kuusela 2013, 226.) Matematiikassa ei tulkita, vaan selitetään ja ymmärretään, joko oikein tai väärin, saattaisi olla monen opettajan vastaus. Kuitenkin matematiikkakin on syntynyt tulkinnallisista eli hermeettisistä lähtökohdista (myös Rossi 2010). Kuuselan matemaattisen ajattelun kuvauksessa toistuu ankaruus ajattelutavassa. Matemaattisessa päättelyssä korostetaan edelleen deduktiivisuutta, joka on evidenssin kriteeri. Matemaattinen ajattelu ja itsenäiset ajattelutaidot eroavat toisistaan ankaruutensa perusteella, vaikka sama pää ajattelee.

Matematiikka etymologisesti tarkoittaa oppimaan oppimista ja itsenäistä tiedon hakua. Tässä merkityksessä koulumatematiikka on itsenäisten ajattelutaitojen kehittämistä ja oppimaan oppimista, mitkä ovat osa yleisiä kaikkien opetusaineiden kasvatustavoitteita POPS (2014):ssa. Laaja-alaisiin taitoihin liittyvien itsenäisten ajattelutaitojen mukaan oppilaita ohjataan huomaamaan, että tieto voi rakentua monella tavalla, esimerkiksi tietoisesti päättelemällä tai intuitiivisesti, omaan kokemukseen perustuen. Tutkiva ja luova työskentelyote, yhdessä tekeminen sekä mahdollisuus syventymiseen ja keskittymiseen edistävät ajattelun ja

oppimaan oppimisen kehittymistä. (POPS 2014, 20.) Opettaja rohkaisee kesken-eräisen, epäselvän ja ristiriitaisen tiedon äärellä olemisessa.

Valmiuksina yläkouluun alakoulussa valmiudet systeemiseen ja eettiseen ajatteluun kehittyvät vähitellen, kun oppilaat oppivat näkemään asioiden välisiä vuorovaikutussuhteita ja keskinäisiä yhteyksiä sekä hahmottamaan kokonaisuuksia. POPS (2014, 20) mukaan jokaista oppilasta autetaan tunnistamaan oma tapansa oppia ja kehittämään oppimisstrategioitaan. Oppimaan oppimisen taidot karttuvat, kun oppilaita ohjataan ikäkaudelleen sopivalla tavalla asettamaan tavoitteita, suunnittelemaan työtään, arvioimaan edistymistään sekä hyödyntämään teknologisia ja muita apuvälineitä opiskelussaan. Oppilaita tuetaan rakentamaan perusopetuksen aikana hyvä tiedollinen ja taidollinen perusta sekä kestävä motivaatio jatko-opinnoille ja elinikäiselle oppimiselle. (emt.)

Käsite looginen esiintyy useasti yläkoulun ja yhden kerran alakoulun opetus-suunnitelmassa. Looginen on filosofinen käsite, jolla on yhtymäkohtia moniin erilaisiin päättelyn lajeihin, kuten deduktiivinen, dialektinen, dialoginen, induktiivinen, hypoteettisdeduktiivinen, abduktiivinen, analoginen tai systeeminen ajattelu (mm. Kuusela 2013, 228). Ajattelun lajien tietäminen ei juurikaan helpota ajattelutaitojen oppimista. Käsitettä looginen käytetään puhekielessä ja matematiikan olemuksen kuvauksissa yleisesti. Vasta silloin, kun ajattelu on loogista, sitä voi pitää matematiikkana.

Käsite looginen vaikuttaa monimerkitykselliseltä ja hankalalta käsittää vielä alle 15-vuotiaana. Onko logiikka osa matematiikkaa vai erillinen alue, jonka alaisuudessa matematiikka on, ei ole filosofienkaan yksimielisyyttä tavoittanut. Niiniluodon (1990) mukaan logiikan päättelysääntöjen järjestelmät eivät ole kenenkään ajattelua kahlitsevia sääntöjä, ne vain kertovat, että tietynlaisista oletuksista saa päätellä tietynlaisia johtopäätöksiä (Niiniluoto 1990, 148). Lausetta voi tulkita, että oletukset maailman havaitsemisessa saattavat olla erilaisia, eikä se ole virhe ajattelussa. Erilaisista oletuksista seuraa erilaisia johtopäätöksiä. Olennaista on kuvata lähtötiedot, jotta päättelyn oikeellisuutta voi arvioida. Käsitteen logiikka pohdinta kuuluu enemmän filosofiaan kuin matematiikkaan, koska matematiikassa se otetaan annettuna käyttöön.

*Kouluaikanani yritin ymmärtää tehtävänannon. Usein onnistuin. Tulkitsen onnistumiseni ennen kaikkea havaitsemaan ja tunnistamaan oppimisena. Pyrkimys oli päätellä siihen suuntaan, mihin tehtävänanto antoi viitteen. Samaa lähtökoh-  
taa toistan opettajana.*

Malisen mukaan (1990) loogisen ajattelun opettaminen on ollut tavoitteena varsinkin matematiikan modernisoinnin yhteydessä 1970-luvulla. Kokemus osoitti kuitenkin, ettei ollut tarkoituksenmukaista opettaa logiikan perusasioita sellaisinaan. Loogisen ajattelun, erityisesti deduktiivisen päättelyn tutkimus on kehittynyt viime vuosina kognitiivisen psykologian piirissä. (Malinen 1990.) Siinä on eroteltu kolme deduktiivista päättelymallia: formaalin logiikan sääntöihin perustuva, sisältösidonnaisiin sääntöihin perustuva ja malliteorian mukainen päättely. (Malinen 1990.) Deduktio ei ole yhtään helpompi käsite kuin logiikka.

Jo POPS I:ssä (1970) logiikka ja deduktio sisältyivät formaalin ajattelun taitojen oppimisen käsitteisiin, mitä voi pitää osoituksena matematiikan tiedeperustaisuudelle. Tiedollisen kasvatuksen tavoitteisiin sisältyvät oppimistapahtuman muodolliset eli formaaliset tavoitteet (emt., 27-28). Tiedollisen kasvatuksen formaalit tavoitteet liittyvät keskeisesti matematiikan opetukseen, mitä POPS I (1970) ei suoraan osoita matematiikkaan kuuluvaksi, kuten ei uusinkaan POPS (2014).

POPS I:n (1970, 27) mukaan tiedollisen kasvatuksen lähtökohta on, että ihmiselle on ominaista, että hän ei käytä tietoa vain mukautuakseen ympäristöönsä, vaan muuttaakseen sitä. Jotta yksilö selviytyisi näissä toiminnoissa, tiedollisessa kasvatuksessa on kiinnitettävä huomiota sekä materiaaliseen että formaaliseen alueeseen. Materiaalisilla tavoitteilla tarkoitetaan sisältöä: tosiasioita, niiden välisiä yhteyksiä ja tietokokonaisuuksia. Tiedollisen kasvatuksen formaalisten eli muodollisten tavoitteiden piiriin kuuluu ajattelun kehittäminen: käsitteiden muodostaminen ja käyttö, päättelyminen, tietojen arvioiminen, ongelman ratkaiseminen ja luova ajattelu. (emt.) Luova ajattelu on järkevää toimintaa uusissa tilanteissa, jolloin se ei lähtökohtaisesti ole formaalista ajattelua. Formaalin tarkoittaa sellaista mallin mukaista ajattelua, joka vastaa muodollista odotusta.

Vuoden 1970 opetussuunnitelmassa painotetaan, että opetuksen painopisteen tulisi siirtyä formaaliseen suuntaan, jotta päivittäinen tieto jäsenyisi järkeviksi systeemeiksi. Käsitteiden muodostus, niiden merkitys ajattelun kehitykselle sekä käsitteiden ja kielen välinen suhde ovat oppilaan ohjauksen kohteina. Opetuksessa on huomattava, että uusien sanojen opettelu ei edistä käsitteiden muodostusta ja että käsitteitä opitaan myös havaintojen välityksellä. Havaintoihin pohjautuva tiedonhankinta tulee tehokkaammaksi, kun tieto ryhmitetään luokiksi. (POPS 1970, 27-33.)

Järjestyssuhteiden muodostaminen on luokittelun rinnakkaistoimitus. Jo käsitteenmuodostuksen alkuvaiheessa olisi syytä kiinnittää huomiota järjestyssuhteisiin. Yksityiskäsitteiden asettamista tiettyihin järjestyksiin on harjoiteltava. Oppilaiden ajattelun vapauttamiseksi olisi otettava esille myös luonnottomia ja mielettömiä järjestyksiä. Päätelyn välineiksi ja lajeiksi mainitaan deduktio ja induktio sekä analogiapäätely. (POPS 1970, 29.) Päätelyn lajeja nykyopetussuunnitelma ei enää määrittele.

Tiedon arviointi on eri luonteista riippuen siitä, kuinka hyvin havainto vastaa todellisuutta. Arviointia esitellään teoreettisesti ja käytännölle vieraana. Lopuksi muistutetaan, että oppilaiden kriittisen ajattelun kehittymiseksi on tärkeää, että koulussa harjoitetaan todellisuutta koskevien väitteiden totuuden tarkastelua. (POPS 1970, 30.) Matemaattisen ajattelun kielentäminen ja siihen ohjaaminen koulussa (Joutsenlahti & Tossavainen 2018, 410-431) tuo mahdollisuuksia yhdistää matematiikka omaan kieleen, mutta ajattelun lähtökohtana on edelleen matematiikka, eikä elämismaailma.

*Matematiikan teoreettisuutta ja loogisuutta määrittelevistä ehdoista tuntuu olevan vaikeuksia saada järkevää tekstiä. Nykyopettajankoulutuksessa esiin on tuotu myös matematiikan sanallistamista, omin sanoin kuvaamista. Opetustyösäni olen pyrkinyt käyttämään normaalia kieltä määritelmien ja lauseiden kuvauksessa silloin, kun se luontevasti onnistuu. Matematiikan lausekieli on kankeaa ja usein myös vierasta arkipäiväisiä havaintoja tekeväälle opiskelijalle.*

POPS 1970 esittelee ongelmanratkaisua: ”Ongelmalla tarkoitetaan tässä tilannetta tai tehtävää, joka on oppilaalle joiltakin olennaisilta osilta uusi ja ennalta ratkaisematon. Ongelmanratkaisemisessa päädytään usein epäonnistumiseen.” (POPS 1970, 30-31.) Esitellään epäonnistumisen syitä heuristisesti ja alkeellisesti ulkopuolisen tarkkailijan näkökulmasta. Osaamisen odotus vaikuttaa epäonnistumiselta, et varmaan osaa, mutta voit yrittää. POPS 1970 ei anna välineitä opetuksen toteuttamiseen, vaan vaikuttaa käänteisesti, ylikorostaen ”formaalisuutta” ja yleistettyä heuristiikkaa. Ongelmanratkaisussa omien ajattelutaipumusten tunnistaminen ja arkilähtöisyys voisivat toteutua hyvin, jos siihen kannustetaan. Paradoksaalista on, että vuonna 1970 oppilailta oli valmiuksia ongelmanratkaisuun, mutta ongelmanratkaisu alkoi vaikuttamaan luonnottomalta keinotekoisin välinein, kuten yhtälö tuolloin koululuokissa usein tulkittiin ja edelleenkin.

Formaalisten taitojen kuvauksen heikkous on tärkeä huomio siksi, että ymmärrämme, mistä lähtökohdista opetussuunnitelmaan on jäänyt loogisuutta teennäi-

sesti korostavia piirteitä. Jotakin tästä on jäänyt käytäntöihimme, koska matematiikan opetuksen käytännöllistäminen ei ole saavuttanut yksimielisyyttä asiantuntijoittekan keskuudessa. Monet opettajat valittavat, etteivät oppilaat havaitse mitään, jonka voi myöskin tulkita seurauksena liian 'akateemisesta' odotuksesta.

Matemaattinen ongelmanratkaisu koulussa rakentuu valmiiksi strukturoitujen tehtävänantojen kautta. Todellisen elämän ongelmien tunnistaminen ja olennaisen näkeminen on talonpoikaisjärjen perustaa. Ongelmanratkaisu elämismailmalähtöisesti oppilaan omista havainnoista lähtien rikkoisi mielekkäästi matematiikan totunnaisia rajoja. Ongelmanratkaisu liittyy tilanteisiin ennakoimattomasti, jolloin siitä ei voi antaa yleisiä ohjeita.

*Matemaattinen ongelmanratkaisu ja ongelman mallintaminen yhtälöillä koetaan koulussa vaikeaksi ja myös tutkimukset vahvistavat alueen heikkoa osaamista. Kansakoulun laskento oli merkittävilä osiltaan ongelmanratkaisua, sanallisia tehtäviä, joihin harjaannuttiin hyvin, mutta silloin yhtälön käyttö oli vapaaehtoista.*

POPS 1970 esittelee formaalisten taitojen lopuksi luovaa ajattelua: Luovaan ajatteluun sisältyy sen suorittajalle uuden keksimistä. Luovan ajattelun kuvaus alkaa erottelulla: konvergentti (kriteeriperustainen) ja divergentti (vaihtoehtojen tuottaminen) ajattelu. Kuvauksessa rohkaistaan kritiikittömään intuitiiviseen ajatteluun, mistä on kuitenkin vähitellen alistettava divergentin ajattelun tulokset kriittiseen tarkasteluun. Kuvauksen mukaan matemaattinen ajattelu on näin konvergenttia. Luova ajattelu palautetaan esteettisen ja kädentaitojen kasvatustavoitteisiin. Opetussuunnitelmassa mainitaan, että luovuus on tutkijoiden suuren mielenkiinnon kohteena. (POPS 1970, 32-33.) Luovuuden olemus suhteessa matematiikkaan jää kuvauksessa avoimeksi.

Divergenttisyys on ymmärretty POPS I:ssä väärin, joka selittää ehkä osittain luovuuteen kohdistunutta kouluissa ilmenevää aliarviointia. Tietämys luovuudesta on tosin näihin päiviin lisääntynyt, mutta se ei vielä kukaan tule huomioitua riittävästi. Edelleen kukaan luovuuden olemus ei määrity hyvin, vaikka siihen opetussuunnitelmatekstissä viitataan ainakin 30 kertaa (POPS 2016). Luovuus on divergenttisyyttä ja yksilöllisyyttä, jonka muodot eivät ole määriteltävissä. Matematiikassakin on erilaisia havainnointitapoja ja ratkaisupolkuja, varioinnin ja näkökulman valinnan tapoja, jotka avartavat käsitystä matematiikan olemuksesta.

ta. Erilaisista konteksteista voi syntyä erilaisuutta, joka rikastaa, laajentaa ja opettaa syvemmin ymmärtämään matematiikkaa. Matematiikka on ymmärretty liikaa konvergoivan eli dikotomisoivan ajattelun kautta. Tällöin analyysi on kostonnut ja synteesi jäänyt käyttämättä.

Matematiikan käsitteellinen luonne korostuu ja tieto ennen käsitteitä ei saa huomiota suunnitteluteksteissä. Jotta osaa käyttää käsitteitä, on ensin ymmärrettävä sisältö, mitä saattaa joutua pitkäänkin harjoittelemaan. Oman ajattelutavan tunnistaminen ja sen itse ohjaaminen kestää pitkään, ennen kuin on mahdollista päästä kiinni käsitteisiin. Matematiikan käsitteet eivät ole tärkeitä arjen tarpeissa matematiikan käytettävyyden kannalta. Jatko-opintojen kannalta käsitteillä on merkitystä, mutta silloinkin sisällön ymmärrys on tärkeintä.

Itsenäisten ajattelutaitojen ja matemaattisen ajattelutaitojen kehittäminen ovat erillisiä aihealueita peruskoulun opetussuunnitelman perusteissa edelleen. Edellinen on kasvatustavoite ja jälkimmäinen matematiikan opetuksen tavoite. Käytännön opetustyössä opettaja yhdistää ja soveltaa niitä pedagogisen vapautensa ja matematiikkakuvansa perustalta. Ajattelutaitojen kehittyminen ja matemaattisen ajattelun kehittyminen tarkoittavat lähes samaa yksilön ajattelutoimintaa ajatellen – molemmat tukevat toisiaan. Molempiin näkökulmiin tukeutuva matematiikkakasvatus tukee yksilön kykyä tunnistaa ajattelunsa perustaa. Tällöin (koulu)matematiikka ilmenee funktioina eli merkityksinä oppilaan elämässä.

## 5.3 Miten koulumatematiikka ilmenee politiikan kentässä

### 5.3.1 Matematiikan funktiot elämässä

Matematiikassa funktio tarkoittaa riippuvuutta muuttujan ja sen kuvan välillä. Tämän luvun kasvatustieteellisessä yhteydessä funktio -käsitteellä on suuntaavasti sama merkitys kuin matematiikkatieteenalalla, mutta funktion merkitysala tutkimuspolulla on laajempi. Hahmopsykologian mukaan yksilön kokemus matematiikasta on riippuvainen siitä kuvasta, minkä hän tunnistaa. Yksilön funktio koulumatematiikkaan yhdistyy mentaaliseen merkitykseen elämässä.

Valistuksen luonnonmukaista kasvatusta painottavat kasvatustieteilijät ja osa kansakoulun pedagogista painottavat funktioperustaisuutta. Yksilöllisten funktioiden tunnistaminen vahvistaa motivaatioperustaa koulumatematiikkaan. Fe-

nomenologisen matematiikan didaktiikan pioneeri Hans Freudenthal (1983, 28) muistuttaa, että se mikä on ajattelemisen kohteena, ilmenee funktiona. Tutkimuspolun funktio laajentaa matematiikkasuhteen merkitystä elämismailmassa.

Kokemusjäljistä syntyy prosesseja, sisäisiä ja ulkoisia vaikutuksia, jotka suuntaavat elämää eteenpäin (vrt. Mahner & Bunge 2001). Vaikutukset elämään ovat kokemusjälkien funktioita. Funktionaalinen riippuvuus tarkoittaa kokemusjälkien kuvautumista vaikutuksiksi. Eri ihmisten erilaiset funktiot matematiikkaan tuottavat erilaisia vaikutuksia, siten monimerkityksisyyttä. Yleisesti määritellyt koulutuksen yhteiskunnalliset tehtävät ovat yleisiä koulutus suunnittelijoiden, komiteoiden ja toimikuntien hallinnollisia tavoitteita, joita käsittelen seuraavassa alaluvussa (alaluku 5.3.2). Funktio ohjaa oppimista ja toimintaa. Käsitteellä funktio on tarkoitus tavoittaa yksilöllistä tai yhteisöllistä kokemusta. Yhteisö tarkoittaa koululuokkaa, opettajakuntaa, koulua tai muuta rajattua yhteisöä. Jatkossa käyttämäni käsite subjekti voi tarkoittaa myös yhteisöä, jos yhteisöllä on yhtenäinen toimintalinja.

Funktio liittyy subjektin ymmärtämisen tapaan. Funktio on hyvin monimerkityksinen käsite, jota on syytä tutkimuspolun tässä vaiheessa selventää tarkemmin. Käsite funktio yhdistetään tieteessä usein funktionalismiin, joka tulkitsee todellisuuden reduktiiviseksi, palautuvaksi alkuehtoihinsa. Reduktiivisen teorian (myös identiteettiteoria) perustalta korostuu neurologisen tilan ja mentaalisen tilan välinen korrelaatio (Näreaho 2004, 150-151). Tutkimusyksikköjä vertaileva korrelaatio ei kuvaa tarkoittamani kokemusfunktion monimuotoista ontologista luonnetta, joka on luovuuden ja inhimillisen ainutlaatuisuuden perustalta emergentti. Korrelaatio voidaan laskennallisesti laskea mitta-asteikollisesta havaintoaineistosta, mutta korrelaatio sinänsä ei selitä riippuvuuden laatua. Kokemuksen todellisia merkityksiä ei voi arvioida ulkopuolelta, koska ne ovat sisäisen kokemuksen ymmärtämisyhteyksiä ja ennakoimattomia luovuuden ehtoja.

Tieteellisen ymmärtämisen ja selittämisen välisistä yhteyksistä on erilaisia teorioita. Eniten tukijoita on teorialle, missä ymmärtäminen ja selittäminen on tutkimuskohteen kaksi eri puolta (mm. Strevens 2013; Khalifa 2012). Funktio liittyy ymmärtämisyhteyksiin myös selittämisen merkityksessä, mutta ymmärtäminen viittaa laajempiin merkitysyhteyksiin kontekstin ja yksilön näkökulmasta. Strevensin (2013, 3) kissavertausta matematiikan funktioon soveltaen: on eri asia tietää, että matematiikka on tärkeää kuin ymmärtää, miksi se on tärkeää. Khalifa (2012, 23) erittelee ymmärtämisen kolme vaihetta: a) ymmärtämisen fenomenologia tunteena (ahaa), b) teorian ymmärtäminen ja c) riittävä selitys il-

miöstä (episteeminen tavoite). Khalifa korostaa, että ensimmäinen vaihe, tunne, on episteemisen ymmärtämisen ehto. Tutkimuspolun ajattelemisen käytäntölähtöisyyttä vahvistaa myös Hannon (2019) painottamalla käytännön elämän funktion ymmärtämisen ensisijaisuutta ensimmäisenä epistemologiana kohti tietämistä.

Ymmärtäminen tutkimuspolun merkityksessä on sisäsyntyistä, jolloin funktio liittyy yksilölliseen hahmotustaipumukseen ja intuitioon, jossa on mukana tilanetekijöitä. Tällöin funktio on lähinnä ymmärtämistä suuntautumisen ja merkityskokemuksen lähtökohdista. Kun haluaa tunnistaa subjektien välisiä funktioiden eroja, ne ovat välineitä ihmisten välisen monimuotoisuuden ymmärtämiseksi suhteessa matematiikkaan. Tällöin ymmärtäminen on selittämisen vastakohta. Matematiikka on selittämisen väline perinteisesti (luonnon)tieteissä, mutta ihmistieteissä ymmärtäminen on elämisen ja olemisen tapa. Ymmärtäminen on tietoisuustahtoa elämismailman ehdoilla, jolloin yksilöllisyys tulee esiin.

Matematiikan funktiot ovat henkilökohtaisesti koettuja tai yhteisöllisesti tunnistettuja ja jaettuja. Yksilöllisesti ymmärrettyyn tai yhteisöllisesti jaettuun liittyy mieli- ja merkitysmailmaan suuntautuminen. Eino Kaila kuvaa ilmiötä osuvasti: ”Yhteiskunta ja kaikki sen ilmiöt elävät funktionaalisesti yksilöissä. Kehityksen lähtökohta on sielullinen tilanne.” (Kaila 1967, 254-255.) Funktio on jättänyt jäljen mieliin ja funktionalisoitunut ilmiöksi. Kailan käsitteellä sielu, nykyään mieli, on yhteys hänen käyttämäänsä syvähenkisyuden käsitteeseen, jolla on yhteys suuntautumisenä Hegelin fenomenologiaan, tieteeseen tietoisuuden kokemuksena.

Kaila kuvaa biologisen psykologian näkökulmasta yksilöiden ryhmäelämyksiä ja ryhmätoimintaa. Kaila hahmottaa funktiota, yksilössä itsessään vaikuttavaksi vahvaksi sielulliseksi vektoriksi (emt. 256). Vektorilla on matematiikassa ja fyysikassa suuruus ja suunta, mikä sopii optimoimaan myös oppimisen funktion ideaa. Yksilön tai yhteisön subjektiivinen kokonaisuus on enemmän tai jotain muuta kuin osiensa summa, missä subjektin biologinen rakenne ei ole mekanismi, vaan heikkouksiaan kompensoimaan pystyvä organismi (Kaila 1967, 24-31). Vaikka monet filosofit tulkitsevat Kailan funktionalistina, hän ei ole kuitenkaan vahva reduktionisti.

Funktio tarkoittaa subjektin kokemusta matematiikan hyödyistä, kiehtovuudesta, toiminnallisista perusteista, sisäisistä merkityksistä tai tiedonintresseistä. Matematiikan hyötykokemus koulussa on välineellinen (opiskelu, työ ja urat) tai itseisarvoinen (teoreettinen ajattelu, maailmankuva, minäkuva ja luovuus). Matematiikan hyödyttömyyskokemus voi olla vastakkaissuuntaista samoissa merki-

tyksissä. Tällöin yksilö saattaa kokea, että matematiikalla ei ole hänen elämässään merkitystä. Tunnekokemus voi olla niin vahva, että se estää oppilaan orientaatiota ja oppimista. Mikään funktio ei ole väärinkokemista, koska kokemisella on aina perusta menneissä tilanteissa. Voimaannuttava funktio ohjaa matemaattista prosessia. Prosessikokemuksena kiehtovuus ja luovuus tarkoittavat lähes samaa. Matematiikan kiehtovuutta voi ulkopuolisesti havainnollistaa, mutta keksiminen on sisäisesti koettava. Tällöin olennaista on yksilöllinen kokemus mielessä.

Mentaalinen matematiikka on itseään korjaava kokemus, johon elämä kokonaisuutena liittyy. Mentaalinen matematiikka ei ole mittateoreettinen ominaisuus, jolloin sitä ei voi mitata eikä arvostella. Luovuuden tulos ei ole ennakoitavissa, eikä se vastaa välttämättä opetussuunnitelman odotusta. Tarkkaan rajattu opetussuunnitelma on näin ristiriidassa luovuuteen kannustamisessa. Matematiikan kiehtovaksi kokeminen pitää oppimisprosessin käynnissä, vaikka välillä epäonnistuisikin. Luovuuteen kannustaminen riittävän vapaassa ilmapiirissä voi kiehtovaksi kokemisen seurauksena tuottaa uusia avauksia matematiikan ymmärtämiseen ja soveltamiseen.

*Toiminnallinen funktio* vahvistuu onnistumisesta, jolloin funktio suuntaa itseyttä, itseluottamusta, itsearviointitaitoja, itseohjautuvuutta, itsenäisiä ajattelu-, päättely- ja perusteluvalmiuksia, virheen- ja valheen tunnistustaitoja, tunnistusherkkyyttä, argumentaatiotaitoja, tiedon jäsennyskykyä, johdonmukaisia toimintataipumuksia, kykyä erotella ominaisuuksia ja muotoja, tieteellisen ajattelun valmiuksia, määrätietoisuutta, tiedostamiskykyä ja realistista käsityskykyä. Epäonnistuminen usein johtaa päinvastaisiin suuntautumisiin, millä saattaa olla yhteyksiä syrjäytymiseen ja passivoitumiseen. Epäonnistumista vahvistavat inhimilliset reaktiot voivat johtua hyvin monista sosiaalisista ja kulttuurisista tekijöistä sekä psykologisista puolustus- tai kieltämisreaktioista. Matematiikalla on inhimilliseen kasvuun vaikuttava funktio, vahvistavassa tai lamaanuttavassa merkityksessä. Matematiikkakasvatuksella voi tuoda näkyviksi prosessiin liittyviä tekijöitä.

Matematiikan funktiona sisäinen kokemus matematiikasta on henkilökohtainen. Sisäinen kokemus tuottaa iloa, surua, mielihyvää, ahdistusta, onnistumista, tuskastumista, liikutusta, lamaanusta, ymmärrystä, epäilyä, käsitteellistymistä, käsitteettömyyttä, toimintaa tai toimeettomuutta. Koetut tunteet sisältävät kognitiota (mm. Lagerspets 2000, Khalifa 2012), jolla on merkitystä matematiikan oppimisprosessissa ja käyttöönotossa. Sisäinen kokemus yhdistyy intuitiossa (alalu-

vut 4.3.1 ja 4.3.2). Jos tunnesuhde on negatiivinen, intuitio sammuu ja potentiaalinen ymmärrys ei aktivoitu. Potentiaalien aktivoimisen voi liittää matemaattikkakasvatukseen.

Tuki ulkoisten ja sisäisten funktioiden tunnistamiseksi ja tunnustamiseksi on osa opettajan työtä ja myös osa yksittäisen opiskelijan itsetutkimusta. Funktiot ovat kullekin yksilölle ominaisia yhteen kietoutuneita merkityksiä, joilla on toimintaa aktivoiva tai passivoiva merkitys. Toiminnallinen aktivoituminen sisältää tuttuja tai tiedostamattomiakin funktionaalisia merkityksiä menneisyydestä, nykyhetkestä tai tulevaisuuteen suuntautumisesta. Oppilaiden yksilöllisten funktioiden tunnistamista tukee opettajan omien funktioiden tiedostaminen. Kuitenkaan ulkopuolinen (esim. opettaja) ei voi olla täysin selvillä toisen sisäisistä merkitysfunktioista, vaan ne on kunkin itse tiedostettava. Yleisesti funktiot ovat henkilökohtaisia ja yksilöllisiä, jolloin niitä ei voi tulkita yleisten oppimisteoreettisten mallien perustalta.

*Funktio voi olla kulttuurisidonnainen. Matematiikan kiehtovuuteen liittyviä merkitysrakenteita kokemuksessani ovat vastuullinen asenne, vapaus ja uuden keksiminen. Lapsuudessa omaksumani vastuullinen asenne työhön kuvaa funktionaalista asennetta myös koulumatematiikkaan. Koulumatematiikkaan uppoutunut työ ja työstä syntynyt ymmärryksen voima vaikuttaa – tunne siirtyy. Matematiikka ei näyttäydy lukuina tai kaavoina, vaan heijastuksina, merkityksinä, tarkoituksina, rakenteina ja malleina maailmassa ympärillä. Kokemuksessani toteutunut paras mahdollinen matemaattinen työ tuottaa mielihyvää ja parhaimmillaan omanarvontuntoa.*

*Lapsuuden ja kansakouluajan elämismaailmasta nousee kokemuksellisenä ihanteena vapaus. Tunne ajattelemisen ja tekemisen vapaudesta elää mahdollisuutena havaita ja päätellä itse. Edelleen opettajanakin toimiessa uskon, että keksiminen on mahdollista vain riittävän vapaassa ilmapiirissä. Jos ei ole liikaa väliintuloja, oppilaalla säilyy tunne omista havainnoista ja itsensä ohjaamisesta. Opettajan työ on havaitsemaan ohjaamista, ei valmiiden mallien antamista.*

Tekemisen ja ajattelemisen vapaus on keskeinen uuden keksimisen eli luovuuden kriteeri. Uusi tarkoittaa sellaista ideaa, mielleyhtymää tai käsitettä, mitä ei ole ennen tunnistanut. Matematiikassa luovuus eli divergentti ajattelu tarkoittaa usein erilaisia ratkaisupolkuja. Uuden keksimistä rajoittavat tehokkuusvaatimukset ja toiset ihmiset. Luovuus tarvitsee yksityistä tai sosiaalista tilaa, missä uudistuminen sallitaan. Usein idea-aihiot jäävät kehittymättä sosiaalisista syistä.

Luovuuden realisoitumiseen liittyvä salliva ympäristö ei synny ilman yhteisön sopimusta ja kasvatustahtoa. Koululuokassa tai työyhteisössä opettaja ja osallistujat voivat vahvistaa luovuuteen pyrkimystä toiminnassaan ja puheessaan. Tällöin edellytyksenä on erilaisuuden tukeminen. Erilaisuus voi ilmetä eri tavoin ajattelu- ja havainnointitavoissa. Erilaisuutta tukeva tavoite estää samankaltaistumista (konformismi, taulukko 4, luku 4.2.2).

*Elämämaailmani talonpoikaiskulttuurista nouseva katsomisen tapa on matematiikkaa ohjaava funktio, jonka juuret löytyvät kotini ja mummoloideni kirjahyllyistä ja niihin yhdistämästäni kokemuksesta opettajana. Talonpoikaisjärkeen yhdistämäni valistusaate kukoisti Saksan lisäksi romantiikan ajan Ranskassa. Katsomisen tapa on kulttuurisidonnainen ja kokonaisajatteluun perustuva.*

Rousseauin perusoletus, että ihmisluonto on turmeltumaton ja siveellisesti puhdas, johti rahvaan ihannoimiseen. Vallan antaminen kansalle mahdollisti yhteiskunnallisen yhdenvertaisuuden ja yhteishyvän. Työ, vapaus ja luovuus sisältyivät kasvatustieteelliseen systeemiin. (Anderssen 1950, 402-403.) Romantiikan aikana uskottiin luonnonelämän jalostaviin vaikutuksiin, minkä voi tulkita vielä 100 vuotta myöhemmin vaikuttaneen talonpoikaisväestöön Suomessakin yhteiskunnallisena aktiivisuutena, kuten vaikutustahtona, yrittäjyytenä, osuuskunta-, nuorisoseura- ja maamiesseuraliikkeinä.

Ranskan opetuslaitoksen uudistamissuunnitelman laatinut markiisi, filosofinen ajattelija, matemaatikko ja luonnontieteilijä Marie Jean de Condorcet (1743-1794) julisti vapauden ja yhdenvertaisuuden evankeliumia, missä matemaattisluonnontieteelliset opinnot varmimmin kehittävät ihmisen ymmärrystä, oikeaa ajattelua ja ajatusten analysointia. Kasvatustieteellisessä käsitöille ja maanviljelykselle oli annettu tilaa, minkä tavoitteena oli köyhyyden poistaminen maanviljelyksen ja teollisuuden kukoistuksen kautta. (Anderssen 1950, 453-461.) Rahvaan sivistäminen tulkittiin pään (theoria) ja käsien (praxis) yhteistyöksi, missä ei lähtökohtaisesti epäilty heidän kykyjään (poiesis).

Luonnonmukaisen kasvatuksen idean isä, J. H. Pestalozzi (1746-1827), kirjoittaa Joutsenlaulussa havaintovoiman ja ajatusvoiman yhdistämisestä siten, että ihminen tahtoo kohottaa sille aistillisesti kirkastuneet mielikuvat itsessään selviksi käsitteiksi, joita itsenäisellä voimalla voi yhdistää, erottaa ja verrata toisiinsa (Hämäläinen 1980, 6). Luku ja muoto, fyysisen luonnon kaikkein laajim-

mat yleisabstraktiot, ovat olioiden varsinaisina alkeisominaisuuksina. Luku- ja muoto-oppi on se menetelmä, jonka avulla alkeiskasvatus pyrkii edistämään ajatusvoiman kehittymisen luonnollista kulkua ja edistää kehittyneen havaintovoiman muuttamista kehittyneeksi ajatteluvoimaksi. (Hämäläinen 1980, 42.)

Pestalozzin havaintovoiman ja ajatusvoiman yhdistämisen voi yhdistää aikalaisensa Immanuel Kantin (1724-1804) pyrkimykseen alkuperältään rationaalisen ja empiirisen tiedon synteisiin (4.2.2, 6.1. ja 6.2.2). Rousseauin optimismi ja Pestalozzin luonnonmukainen kasvatus sopivat talonpoikaislähtöiseen kansankasvatukseen, minkä heijastuksia kulttuurin kentässä tarkastelin. Luonnonmukaisuuden idea on tunnistettavissa suomalaisen kansakoulun vaiheissa.

*Voin tunnistaa kansakoulukokemuksissani luonnonmukaisen kasvatuksen piirteitä vuosilta 1961-1965. Ilo, vapaa leikki, itsenäinen merkityksenanto luonnon ja ihmisten havainnoinnissa sekä matemaattisen harjoittelun itse itseään ohjaamisessa loivat mentaalisen matematiikan perustaa.*

Rousseauin mukaan ihmisen on opittava persoonallisista havainnoista, omakohtaisesta kokemuksesta ja tekemistään päätelmistä. Ihmisen ei pidä oppia tiedettä, vaan hänen tulee keksiä sitä. Rousseauin opetusohje sopii edelleen matematiikan opetusohjeeksi. Keksimään ei voi opettaa, vaan siihen kasvetaan sisään. Työ ohjaa keksimään ja kyselemään. Vapaus ymmärrettynä hedelmällisenä kasvutilana orientoi käsitystä oppimisesta. Tällöin maailma silmien ulottuvilla kantaa horisonttiin saakka.

Vapaus on poliittista, johon opettaja kasvattajana osallistuu. Kasvatus on aina vapauden rajoittamista eli rajojen ja tavoitteiden asettamista, myös matematiikan opetuksessa. Opiskelija passiivisena tiedon vastaanottajana on leimannut yliopistoa sääty-yhteiskunnasta lähtien (Ketonen 1986, 13; Heikkinen 1982) ja koulua koko olemassaolonsa ajan. Aktiivista ja dynaamista oppimista on korostettu opetus suunnitelmissa 1970-luvulta lähtien. Vuonna 2016 käyttöön otettu opetus suunnitelma tukee yksilöllisen oppimispolun rakentamista. Muutoksen etenemistä estää opettajan vastuu ja kontrolli opettamastaan. Opettajan on ollut helpompi opettaa sovitut opetussisällöt opettajajohtoisesti kuin antaa tilaa oppimisen yksilöllistämiseen ja yhteiskunnallistamiseen. Opetuksen yhteiskunnallistaminen saatetaan joskus tulkita myös poliittiseksi toiminnaksi. Yhteiskunnallinen koulumatematiikka on tiedostamiskasvatusta, missä opettajan tehtävä ei ole määrätä arvoasioiden kokemusta.

Kontekstiin sitoutunut matematiikka tunnistaa koulumatematiikan ajankohtaiset haasteet, mitä koulumatematiikan kokemukselliset funktiot ilmentävät. Kokemisen kokonaisuus sisältää ne yksilöllisesti koetut funktiot, jotka ohjaavat ja motivoivat oppimista. Oppilaan oma oppimistavoitteiden asettaminen on luonnollista, jos itseohjautuvuuteen kasvaa lapsuudesta lähtien. Yksilöllisen tavoitteen asettamiseen ohjaaminen on koulun kasvatustehtävä. Harjoitetut koulutuspolitiikka ja koulujen käytännöt ovat olleet varovaisia tässä suhteessa. Ottamalla huomioon opiskelijan funktiot kokemisen kokonaisuudessa matematiikan opiskelua tukevat yhteiskunnalliset tehtävät konkretisoituvat ja oppilas voi keksiä itseään kiehtovia merkityksiä, joilla usein ajan kuluessa on yhteiskuntaa hyödyttäviä yleisiä merkityksiä.

### 3.3.2 Matematiikan tehtävä yhteiskunnassa

Matematiikan tehtävä paikallisen, alueellisen, valtiollisen, länsimaisen ja universaalien maailman kehityksen tukijana on tunnustettu laajasti, etenkin suunnittelualouden ajan koulutussuunnittelussa (alaluku 5.1). Kuten edellisessä alaluvussa ja kulttuurin kentässä kokemukseni näkökulmasta kuvasin, matematiikka on kulttuuristen tapojen, tieteen ja yhteiskuntien kehityksen taustalla keskeinen vaikuttaja. Kuvaan seuraavaksi kansallisten toimien ja opetussuunnitelmien sekä kansainvälisten linjausten perustalta, miten koulumatematiikan tehtävä ilmenee politiikan kentässä.

Seppälä (1994, 17) kirjoittaa, että peruskoulussa opiskeltava matematiikka on nähtävä laajempaan kuin vain tiettyjen laskutaitojen oppimisena. Sillä on tärkeä tehtävä oppilaan henkisessä kasvussa. Matematiikan tehtävä henkisen kasvun tukijana on mainittu opetussuunnitelmissa 1900-luvun loppuun saakka. Peruskoulun opetussuunnitelman perusteet (2014, 374) käyttää käsitettä matemaattinen yleissivistys.

Henkinen kasvu kuuluu valistusaatteen perustalta Snellmanin sivistysajatteluun. J.W. Snellman (1806-1881) korosti, että suurelle yleisölle eli kansalle tarjottu tiede ja filosofia auttaa ymmärtämään jokapäiväisen elämän kannalta merkittäviä konkreettisia asioita ja hahmottamaan niiden laajemmat merkitysyhteydet (Lahtinen 2006, 43). Snellman vaikutti muutokseen, missä yliopiston fyysis-ma-

temaattinen tiedekunta muutettiin filosofiseksi tiedekunnaksi, jonka alaosastoksi fyysis-matemaattinen tiedekunta liittyi. Snellmanin mukaan filosofia ja henkinen kulttuuritiede oli liitettävä tieteeseen, jolle ne muuten olivat vieraita. (Lahtinen 2006, 162.) Snellman halusi suojella ihmisiä tuolloin kehitymässä olleiden luonnontieteiden ylivaltaa vastaan puolustamalla ihmisen osaa tieteen kehityksessä, mistä oli huolissaan myös Snow (luku 4.2.3) ja edelleen tutkimuspolku.

*Kauhavalaisyyntyinen opetusneuvos Reino Seppälä viittasi usein matematiikan koulutustilaisuuksissa henkisen kasvun tavoitteeseen. Henkisen kasvun tehtävää korosti myös opettaja, MAOL-oppimateriaalien ja kokeiden laatija lehtori Heimo Latva. Silloin tällöin henkisen kasvun näkökulma pulpahtaa esiin keskusteluissa matemaattisten aineiden opettajien kanssa. Monet opettajat ovat matematiikan näin kokeneet. Yksilön opiskelutavoitteet ilmenevät sisäisinä funktioina ja ulkoisina tehtävinä. Fenomenologinen asenne koulumatematiikkaan johdattaa lähemmäksi ihmisen henkisen kasvun ulottuvuutta.*

Peruskoulun opetussuunnitelman perusteiden (2014, 374) mukaan matematiikan opetuksen tehtävänä on kehittää oppilaiden loogista, täsmällistä ja luovaa matemaattista ajattelua. Opetus luo pohjan matemaattisten käsitteiden ja rakenteiden ymmärtämiselle sekä kehittää oppilaiden kykyä käsitellä tietoa ja ratkaista ongelmia. Koulumatematiikan kumulatiivisesta rakenteesta johtuen opetus etenee systemaattisesti. Konkretia ja toiminnallisuus ovat keskeinen osa matematiikan opetusta ja opiskelua. Oppimista tukee tieto- ja viestintäteknologian hyödyntäminen. Matematiikan opetus tukee oppilaiden myönteistä asennetta matematiikkaa kohtaan sekä positiivista minäkuvaa matematiikan oppijoina. Se kehittää myös viestintä-, vuorovaikutus- ja yhteistyötaitoja. Matematiikan opiskelu on tavoitteellista ja pitkäjänteistä toimintaa, jossa oppilaat ottavat vastuuta omasta oppimisestaan. Opetus ohjaa oppilaita ymmärtämään matematiikan hyödyllisyyden omassa elämässään ja laajemmin yhteiskunnassa. Opetus kehittää oppilaiden kykyä käyttää ja soveltaa matematiikkaa monipuolisesti. (emt.)

Kuvaus vahvistaa koulumatematiikan laaja-alaista yhteiskunnallista tehtävää ja merkitystä oppilaan itseohjautuvuuden tukijana. Kuvauksessa matematiikka on ilmaistu tieteenalalle tyypillisellä tavalla. Miten tehtävänanto toteutuu, on opettajan tehtävä, mikä edellyttää myös tietoa ihmisen käyttäytymisestä. Käyttäytymistieteellinen ihmislähtöisyys ei ole aineenopettajan koulutuksen lähtökohtana, vaan aineen opetus ja siihen liittyvä ainedidaktiikka. Tällöin opettajan pedagogi-

nen asenne matematiikan tehtävään yhteiskunnassa rakentuu oman matematiikkakakuvan ja muun kouluttautumisen perusteella.

Kuvaus ”Opetus kehittää kykyä käsitellä tietoa ja ratkaista ongelmia” viittaa matematiikan etymologiseen merkitykseen ja laajemmin ymmärrettävään mentaalisen tiedon käsittelyyn. Opitun siirtovaikutuksen (transfer) perusteella matematiikan oppimisen voi tällöin liittää kaikkiin oppiaineisiin ja kaikkiin tieteisiin. Matematiikka on tällöin tiede- ja tietoisuuskasvatuksen perustaa.

”Opetus tukee oppilaiden myönteistä asennetta matematiikkaa kohtaan ja positiivista minäkuvaava matematiikan oppijoina”, on opetuksen tehtävää kuvaava ohje, jonka perusteella oletetaan, että opettaja ohjaa haluttuun suuntaan. Kasvatuksellisuutta tukien ohjeen voi ilmaista: ”Opettaja ymmärtää oppilaan erilaisia tunteita ja reaktioita oppiainetta kohtaan ja keskustellen tukee vastakysymyksiä esittäen oppilaan itseluottamuksen säilymistä ja uskoa omiin havaintoihinsa.”

*Myönteinen asenne vahvistuu osaamisesta. Jos opiskelija jatkuvasti kokee osaamattomuutta harjoitellessaan, eivätkä opettaja tai kokeiden tulokset korjaa havaintoa itsestä, myönteinen asenne ei aktivoidu. Tällaisia opiskelusta luopujia olen tavannut yläasteen, varsinkin 9. luokan poikien joukossa, mikä käytännön havainto vahvistaa myös oppimisen seurantatutkimusten tuloksia (alaluku 2.1). Osaamattomuuden vahvistaminen ei tue kasvatustehtävää.*

Suomen yleinen koulujärjestelmä ja koulumatematiikan yhteiskunnallinen tehtävä kehittyivät yleisistä elämää koskevista sivistystarpeista (Koskenniemi 1944, 11-20) ja teollistumisen osaamistarpeista 1800-luvun lopussa vakiintuen 1900-luvun alussa (ICMI 1986, 10). Oppivelvollisuuskoulun keskeisiin sisältöihin ovat kuuluneet sata vuotta (2021) luvunlasku, laskento ja mittausoppi; aritmetiikka, algebra, geometria ja trigonometria sekä matematiikka peruskoulusta lähtien. Matematiikka on tunnustettu tärkeäksi oppiaineeksi kaikkialla maailmassa (esim. Clarkson). Koulumatematiikan opetussisällöt ovat hämmästyttävän yhdenmukaiset erilaisista tarpeista ja kulttuureista huolimatta (mm. ICMI 1986, 15). PISA-tutkimus, joka pohjimmiltaan tutkii kulttuurisia eroja, ei ole julkisessa uutisoinnissa painottunut kulttuuriperäisesti vaan oppimistuloksin.

Matematiikalla on uskottu olevan yhteiskuntien kehittymistä tukeva tehtävä (Raivola 1998). Yhteiskunnallinen kehitys säätelee oppivelvollisuuskoulun opetussuunnitelmien muutoksia (Rinne 1984). Kun Neuvostoliitto ampui ensimmäisen Sputnik-rakettinsa avaruuteen 1957, Amerikka aktivoitui matematiikan uu-

distamisessa. Tieteellinen edistys liitettiin matematiikkaan ja matematiikan osaamista pidettiin kansakunnan menestyksen indikaattorina (Kumpula 2008). Matematiikan opetuksen kehittäminen on kansallinen ja kansainvälinen tehtävä, jota paikalliset ja alueelliset funktiot tukevat.

*Uusi matematiikka, joukko-oppina tunnettu matematiikka kantautui Suomeenkin, mitä tehostetusti pyrittiin lanseeraamaan peruskouluihin 1970-luvulla. Kansa- ja kansalaiskoulujen opettajia täydennyskoulutettiin ja aineenopettajia pikakoulutettiin. Opettajien enemmistö torjui muutosta. Muutos aiheutti hajaannusta opettajien keskuuteen, missä tilanteessa vapaaehtoinen MAOL -kerhotoiminta aktivoitui. Seinäjoella kerhotoiminta oli alkanut jo vuonna 1934. Joukkooppi otettiin käyttöön peruskoulusiirtymävaiheessa. Siitä luovuttiin 1980-luvun loppuun mennessä. Muutos matematiikan perusteissa aiheutti hämmennystä ja ristiriitoja, vaikka esimerkiksi peruslaskutoimitusten ja päättelysääntöjen havainnollistamisessa se toimii hyvin. Opetustyössäni päädyin opettamaan lääkelaskentaa aikuisopiskelijoille heidän oppimiensa lukuaalueiden ja päätöslaskennan lähtökohdista.*

Koulumatematiikan tehtävää tukemaan hallitusohjelmaan liitettiin LUMA -ohjelma, matemaattisluonnontieteellisen opetuksen kehittämisohjelma vuosina 1996-2002. Ohjelma koski laajoja koulu-, kansalais- ja työnantajapiirejä talkoo-ohjelmana (OPM), missä matemaattisilla aineilla tulkittiin olevan keskeinen OECD-maiden osaamista ja teknologiateollisuuden kehitystä tukeva tehtävä. Opetushallitus vastasi hankkeen koordinoinnista ja toteutuksesta. Kouluopetuksen painopisteeksi tuli 'miten opitaan' entisen 'mitä opitaan' tilalle (Kumpula 2006; Raekunnas 2000, 4). 'Miten opitaan' tarkoittaa kokeellisuuden ja tutkimuksellisuuden lisäämistä sekä oppimista omien havaintojen kautta.

LUMAn ensivaiheen päättymisen jälkeen Suomeen on perustettu LUMA -keskuksia, joiden tarkoitus on tukea alueellisesti matemaattis-luonnontieteellistä opetusta ja sen kehittämistä. Elinkeinoelämä on ollut mukana hankkeessa alusta lähtien. LUMA -keskuksissa on tarjolla aktiviteetteja ja kouluihin jaettavia opetusideoita ja materiaaleja, mitä teollisuus- ja työnantajajärjestöt olivat tarjonneet kouluille jo ennen LUMAA. Matematiikan tehtävä on tulkittu merkittäväksi teknologisoitumisen ja tieteen soveltamismahdollisuuksien edistämisessä.

Matematiikkaa voidaan soveltaa sekä yksilön että yhteiskunnan kehittämiseen. Henkisen kasvun tukeminen on ihmislähtöinen tehtävä ja kehityshaasteisiin vastaaminen laajentaa matematiikan yhteiskunnallista tehtävää. Tulisiko matemati-

kan opetus pitää erossa yhteiskunnallisista kysymyksistä vai liittää niihin? Kysymystä ovat pohtineet matemaatikot, matematiikan tutkijat, filosofit ja poliitikot kautta vuosituhansien. Wienin piirin (1924-1930) jäseniä kiinnosti erityisesti tietomme eri osien palauttaminen kokemukseen tai ainakin niiden kokemuspohjan löytäminen (Hintikka 2002, 253-254). Myöhemmin Wienin piirin tukemana yleinen ajattelu matematiikasta pyrki pitämään matematiikan erossa yhteiskunnallisista kysymyksistä. Yhteiskunta on kuitenkin vaikuttanut keskustelujen taustalla.

*Koulumatematiikka 1990-luvulla* on matemaatikkojen Howson & Wilson(1986) toimittama julkaisu kansainvälisen komission keskusteluista symposiumissa Kuwaitissa helmikuussa 1986. Julkaisun suomennoksen (Laine, Leino, Pehkonen & Lehtinen) mukaan matematiikan opetus yhteiskunnassa ja yhteiskuntaa varten sisältää lähtökohtaisesti kaksi vaihtoehtoa: "(I) Matematiikka on neutraalia ja sitä on paras opettaa erossa yhteiskunnallisista kysymyksistä tai (II) matematiikka liittyy kaikkeen ja on keskityttävä elämään sen kanssa" (emt 1986, 12). Vaihtoehtoista ensimmäinen on toteutunut. Toteutuneen neutraalin matematiikan seurauksina kansainvälinen komissio (1986) muotoili:

- 1) Opettajat tuntevat olonsa turvalliseksi, kun voivat pysytellä oman erikoistietämyksensä puitteissa.
- 2) Hallitukset pitävät matematiikanopetusta edelleen tärkeänä, koska se niiden mielestä on ratkaisevan tärkeä väline taloudellisessa ja teknisessä edistyksessä.
- 3) Matematiikka tulee säilyttämään suuren yleisön silmissä mystiikan ja puhtauden sädekehänsä, jolloin sen koetaan olevan ihmisten arkisten huolien yläpuolella.
- 4) Matematiikan opetus ei vaikuta suoraan tämän sukupolven kiireellisiin yhteiskunnallisiin kysymyksiin. (ICMI, Howson & Wilson 1986, 12.)

Matematiikka näyttäytyy näin tulkittuna enemmän vallankäytön kuin horisontaalisen toistensa tai itsensä ymmärtämisen välineenä. Kun matematiikkaa on tulkittu viimeiset 30 vuotta yhä neutraalimpaan suuntaan, mahdollisuudet vallan käyttöön sen avulla ovat lisääntyneet. Matematiikka on palvellut enemmän valtaa pitävien tulkintaa maailmasta kuin kansalaisten potentiaalien vahvistamista. Päätöksenteossa ja uutisoinnissa vakuuttavat numerot, tieteessä kunnioitetaan matemaattis-luonnontieteellisiä menetelmiä ja tuloksia (naturalismi), oppimis-

ja urheilusaavutukset ovat mittaustuloksia, arjen merkitysten tulkintaa hallitsee luokitus, tilastointi, mallinnus tai kilpailutus.

Horisontaalinen painotus tukee sisäisiä tiedonintressejä ja yksilöllistymistä tiedostamisena, jossa matematiikan mieli on sisäistä, matematiikan rakentumista yksilön maailmasuhteesta. Yhteiskunnassa matematiikkaa on näkymättömästi ohjaamassa järjestyksiä, mittaamista ja toimintamalleja. Tällöin ei kysytä, mitä annettavaa on kilpailutuksissa hänille jääneillä, jotka ovat usein jäävejä, vaiennettuja tai puolustuskyvyttömiä. Syrjäytyminen ja syrjäyttäminen on luonnollinen seuraus hierarkiajärjestelmien eri tasoilla tapahtuvasta toiminnasta, myös koulussa. Tällöin tavoitteiden monimuotoisuutta ei ole tunnistettu.

Matematiikan tulkinnasta heijastuneita hierarkiarakenteita voi kritisoida ulkoistetun metodin systemaattisena virheenä yhteiskunnassa. Jos yleisesti ymmärtään, että ongelmiin ja asioihin on olemassa yksi oikea ratkaisu, vähitellen muut vaihtoehdot sulkeutuvat pois keskustelusta. Matematiikka on edistänyt hierarkiarakenteiden syntymistä vuorovaikutteisuuden kustannuksella, vaikka matematiikka voi antaa ymmärtämisen välineitä myös siihen, miten toistensa ymmärtämistä voidaan edistää tunnustamalla sisäiset ja kontekstuaaliset funktiot.

Jos potentiaalien tunnistaminen onnistuu hierarkiajärjestelmissä yksilöitä ajattelun oikeudenmukaisesti, vallankäyttö on yhteiskunnallisesti oikeutettua. Syrjäytetyistä ja opinpoluillaan viivästetyistä nuorisotutkimus ry, nuorisotutkimusverkosto ja Suomen akatemia ovat julkaisseet tutkimuksia, jotka ovat tuloksiltaan ristiriitaisia. Demokratiavajeen olemassaoloa ei vielä yleisesti tunnusteta. Koululuoppimisen elämänläheistäminen on oppimiskäsityksen laaja-alaistamista. Eri-laisista lähtökohdista erilaisiin tavoitteisiin pyrkivien erilaisten oppijoiden tukeminen on horisontaalisen näkökulman tukemista. Oppivelvollisuuskoulun osaa-miskriteerit ja mittarin arvosteluasteikot ovat tällöin liian kapeat todellisuuteen ja luovaan potentiaaliin nähden. Myös inhimillisen pääoman teorian kritisoijat arvostelivat taloustieteilijöitä human capital -käsitteestä, joka ei anna tilaa yksilöllisille piirteille, minkä seurauksia ja tuotoksia on vaikea spesifioida (Bowen 1969; Vaherva 1985). Matematiikan opetuksen kansainvälisen komission vaihtoehto II tukee tutkimuspolun horisontaalista näkökulmaa yksilölähtöisyytenä.

Komission vuoden 1986 vaihtoehdon II mukaan matematiikka kytkeytyy tekniikkaan kaikissa sen eri muodoissa ja teknologian käyttöä koskevaan päätöksentekoon. Tällöin matematiikan opetus tulisi tarkoituksellisesti liittää teknologian käyttöä koskeviin kysymyksiin. Asiantuntijaryhmän mukaan seurauksina olisi tällöin:

- 1) Tämä on vaikeata toteuttaa. Yleensä matematiikan opettajat eivät pidä velvollisuutenaan kosketella yhteiskunnallisia kysymyksiä.
- 2) Yhteiskunnallisen vastuunoton komponentti ei miellytä useiden maiden hallituksia.
- 3) Oppilaiden motivaatio todennäköisesti kasvaisi.
- 4) Matematiikan opettajat saattaisivat ammatillisesti vaikuttaa joihinkin ihmiskuntaa koskettaviin suuriin kysymyksiin. (Howson & Wilson 1986, 13.)

Tämän vaihtoehdon II mukaan matematiikka motivoi enemmän, mutta opetuksen toteuttaminen tulkitaan vaativammaksi tehtäväksi kuin edellisen vaihtoehdon neutraalin matematiikan toteuttaminen. Vaihtoehdon II mukaan matematiikka lähentyy arkipäivän ilmiöitä. Tällöin yksilölliset kokemukset saavat tilaa oppimisen toteuttamisessa. Ehdotus II ei ole yleisesti toteutunut. Koulumatematiikan tulkinta on suosinut vaihtoehtoa I. Edellisen alaluvun matematiikan funktiot elämismaailmassa (luku 5.3.1) vahvistavat vaihtoehtoa kaksi.

Julkaisussa pohditaan edelleen: ”Tulisiko koulumatematiikan ottaa huomioon lapsen etnomatemaattinen eli kokemusperäisesti ympäristöstä opittu tieto?” Kylä vastauksen seurauksia ovat:

- 1) Itseluottamus lujittuu.
- 2) Kulttuurin arvoja kunnioitetaan.
- 3) Matemaattiset toiminnot pysyvät spontaaneina ja hyödyttävät useampia oppilaita.
- 4) Opettajien tulee olla tietoisia oppilaidensa kulttuuritaustoista.
- 5) Opettajien on oltava ammatillisesti ja psykologisesti valmistautuneita kuuntelemaan oppilaitaan ja keskustelutilanteissa sallimaan heidän esittää omia ehdotuksiaan.
- 6) Matematiikan opetus on suunniteltava joustavammaksi.
- 7) Opettajille on suotava liikkumavaraa oman opetussuunnitelmansa rakentajina.
- 8) Tarvitaan uusia etnomatemaattisesti suuntautuneita oppikirjoja. (Howson & Wilson 1986, 22-23.)

Kokemusperäisesti ympäristöstä opittu tieto, 'kyllä'-vastaus, vaikuttaa kansakoulukuvaukseni suuntaiselta, missä opiskelu sitoutui kasvuympäristöön ja kasvuympäristö vaikutti yksilöllisten oppimisfunktioiden kehitykseen. Opettaja oli osa kulttuuri yhteisöä. Opettaja osallistui kylän yhteiseen toimintaan. Maalais- ja kaupunkikansakoulujen erilaiset kirjat ottivat huomioon etnomatemaattisen

tiedon. Tuolloin vaikuttaneiden Aukusti Salon ja Juho A. Hollon kasvatusajattelu tuki kasvuympäristölähtöisyyttä, ainakin osassa kansakouluja.

Nykyopetussuunnitelman perusteet (2014) suosii samoja lähtökohtia. Yhteiskunnan muuttuessa, elinkeinorakenteen monipuolistuessa ja arjen tilanteiden eriytyessä sovellutuskohteista ei ole pulaa. Tällöin eri yksilöiden sovellutuskohdeet vaihtelevat ja erilaisuuden vahvistaminen korostuu. Tuotoksia voi myös jakaa toisilleen, jolloin yhdessä opitun ala laajenee.

'Ei'-vastauksesta seuraa matematiikan opetusta pohtineen asiantuntijajoukon mukaan:

- 1) Oppilaan mielen kahtia jakautuminen koulun ja kodin kesken voimistuu.
- 2) Kulttuurin arvoihin ei kiinnitetä huomiota. Opettajat voivat opettaa matematiikkaa tehokkaasti ilman tietoa oppilaiden kulttuuritaustasta.
- 3) Matemaattiset toimet seuraavat pääosin vakiintuneita ja opettajajohdettuja polkuja.
- 4) Yleinen matematiikan opetussuunnitelma voidaan laatia.
- 5) Perinteiset oppikirjat riittävät. (Howson & Wilson 1986, 23).

'Ei'-vastaus on lähempänä historiallista peruskoulua. Siirtymistä kyllä-vastauksen suuntaan on tapahtunut 2000-luvulla alueellisten ja paikallisten intressien niin suosissa, LUMA -koulutusten, LUMA -keskusten ja näkökulmaan perehtyneiden asiantuntijoiden myötävaikutuksella. Opettajan pedagoginen vapaus sallii molemmat vaihtoehdot. Edelleen ainakin peruskoulun viimeisten luokkien opetussisällöissä ja -tavoissa on tilaa opiskelijälähtöisille pohdinnoille. Kysymys on tällöin, missä järjestyksessä ja mihin konteksteihin sijoitettuna matematiikan opiskelu toteutuu kiinnostavana. Mielekkääksi ja merkitykselliseksi kokeminen on vaihtoehdon ”kyllä” mukaan keskeinen motivaatioperusta. Joustava opetusryhmiin jako peruskouluissa oppilaiden ammattisuuntautumisen tai oppimistyylin perusteella tuo vaihtoehtoja. Itseohjautuvuuden tukeminen ei tuolloin toteudu ilman systemaattista asennemuutosta oppilaan vastuussa opinpolkunsa rakentajana. Jälkimmäisen vaihtoehdon ”ei” perustalta funktiot ja intressit matematiikkaan eivät välity.

Teknologian kehittäminen tarvitsee yhä erikoistuneempaa matematiikkaa. Jo peruskouluissa osaamiselle ilmenee uusia vaatimuksia, kun koneet tekevät laskennallisen työn. Yhteiskunnissa, joissa matematiikka teknologiana ilmenee merkittävänä, erityisten matemaattisten taitojen tarve pienenee (Howson & Wilson 1986, 11). Teknologian kehitys ei ole mahdollista ilman matematiikkaa. Läntisten teollisuusmaiden koulutuspoliittiset linjaukset peräänkuuluttavat ma-

tematiikan osaamiselle laajentuneita tarpeita. Tällöin laajentuneita tarpeita on syytä pohtia myös horisontaalisen vaihtoehdon ”kyllä” suuntaan. Hallituksen vuonna 1996 käynnistämät LUMA -talkoot tavoittelevat sekä laajempaa että syvempää osaamista matematiikkaan ja luonnontieteisiin. Hankkeen määrälliset ja laadulliset tavoitteet eivät ole toteutuneet (mm. Aroluoma 1999).

Esitetyt komission (1986) vaihtoehdot antavat suuntaa poliittiselle pohdinnalle koskien oppivelvollisuuskoulun matematiikan tehtävää. Miten matematiikka ilmenee ja mitä sen oppimisella tavoitellaan yhteiskunnassa, on poliittinen kysymys. Ei ole sattumaa, että Suomi on vaurastunut teknologioillaan. Poliittinen ja taloudellinen ohjaus on tukenut teknologian kehittämistä ja käyttöönottoa. Tietotekniikan tutkimuksen ja soveltamisen rahoittamiseen on sijoitettu yhteiskunnan varoja. Ennen teknologista läpimurtoa (mm. Nokia) sotakorvauksien maksaminen, talouksien koneellistaminen, teollisuuden voimaantuminen ja laajentuminen sekä infrastruktuurin kehittyminen edellyttivät ennen kaikkea käytännöllisten matemaatikkojen työtä.

Kuitenkaan peruskoulu-uudistuksessa 1970-luvulla ei toteutunut järjestys käytännöstä teoriaan (Cygneus), vaan teoriasta käytäntöön (myös Volanen 2000, 75-76), missä elämismaailmalähtöisyys ja ammattisivistyminen jäivät taustalle. Koulumatematiikan tulkinta opetussuunnitelmassa vaikuttaa siihen, miten matematiikka kiinnittyy, kiinnostaa ja kiehtoo. Mitä kaikkea uutta matematiikalla voitaisiinkaan tehdä ja tuottaa, jos yhteinen tahtotila sen laajentamisesta keksimisen ja soveltamisen suuntaan vahvistuisi.

Matematiikan tehtävänanto peruskoulun opetussuunnitelmissa jää yleisluontoiseksi ohjeiksi, vastaukseksi 'mitä'-kysymykseen. 'Miten'-kysymykseen vastaaminen on opettajan ja oppilaan huoli. Huomion kohdistaminen matematiikan merkityksiin tarkoittaa matematiikan opiskelun yksilöllistämistä oppijan näkökulmasta vahvuuksia tukien. Yksilöllistämisen oppimispolku liittyy intuitioon, funktioihin ja tiedonintresseihin oppilaan matematiikkakokemuksessa. Matematiikan yhteiskunnallinen tehtävä konkretisoituu käytännössä sen mukaan, millaisia funktioita opiskelija onnistuu realisoimaan elämässään ja tulevaisuudessa. Matematiikka tieteenalana antaa myös viitteitä ja mahdollisuuksia monimuotoisuuteen ja moniarvoisuuteen monituhatuotisella kehityksen aika-akselillaan, mitä käsittelen valikoidusti seuraavassa luvussa.

## 6 KOULUMATEMATIIKKA TIETEEN KENTÄSSÄ (3. alaongelman ratkaisua)

### 6.1 Matemaattisen tiedon alkuperä

Tutkimusongelmani ontologinen elämismaailmaperustaisuus tuo haasteen, koska (koulu)matematiikan tieteelliset perusteet ovat tietoteoreettisia. Poliitiikan kenttä (luku 5) tuo rajat koulumatematiikalle, jolloin koulumatematiikka rajautuu aikaisemmin tunnetun ja annetun perustalle. Tällöin koulumatematiikka on objektiivisesti olemassa matematiikan järjestelmässä aikaisemmin tunnistettujen vaikuttavien syiden perustalta (vertikaalinen). Kulttuurin kentässä (luku 4) matematiikalla on rajattomat mahdollisuudet, jolloin matematiikka on riippuvainen yksilön potentiaaleista säädellä itse itseään (horisontaalinen). Tällöin matematiikka ilmenee subjektin kokeman tarkoituksen perustasta lähtien. Tieteen kentässä koulumatematiikkaan vaikuttavat molemmat näkökulmat ja filosofiset analyysini. Matematiikka on kehittynyt filosofiasta (tieteenhistoria), sen tietoteoreettinen perusta on filosofinen (tieteenfilosofia) ja sen uudistaminen on filosofista (fenomenologia). Kun käytän käsitettä matematiikka, se viittaa sekä ilmevään että mahdolliseen (ei vielä ole) matematiikkaan. Koulumatematiikalla viittaa opetus suunnitelmaperustaisesti rajattuun matematiikkaan.

Tieteellisessä tutkimuksessa yleisesti ja matematiikkatieteenalalla erityisesti kysymys tiedon alkuperästä on keskeinen, koska perustelu on tieteellisen tiedon ehto. Matemaattisen tiedon alkuperä, tutkimuskohde ja metodi muodostavat rakenteellisen kokonaisuuden, mikä tutkimusperinteessä sijoitetaan yleensä tieteenfilosofiaan ja tietoteoriaan. Eksistentiaaliontologia laajentaa kysymystä tiedon alkuperästä koskemaan koko elämänkenttää, jolloin kysymys tiedon alkuperästä koskettaa myös matematiikan tiedostamista, mieltä ja mielekkyyttä suhteessa havaittijaansa. Kokemus on tulkittu ongelmalliseksi suhteessa matemaattisen tiedon alkuperään, millä on ollut vaikutusta koulumatematiikan kehitykseen. Karkeasti tutkimuspolun kansakoululaskennon ja talonpoikaisjärjen alkuperänä on ensisijaisesti kokemus. Keskikoulu ja peruskoulumatematiikan tiedon alkuperänä korostuu järki. Koulumatematiikan mahdollisen uudistamisen perustana on menneisyys, nykyisyys ja tulevaisuus.

Tieteenfilosofiseen ongelmaan tiedon alkuperästä ei ole löydetty yksimielisyyden saavuttanutta ratkaisua. Descartesin (2003, 295-318) vuoden 1640 *Totuu-den tutkimus luonnollisella valolla* kuvaa matemaattisen tiedon sisäistä perustaa. Descartesin aikaan voimistunut fysiikan kehitys käänsi huomion ulkoisiin matemaattisen tiedon perusteisiin, jotka vähitellen vahvistuivat. Filosofisen tietoteorian lähtökohdista tieto perustuu 'järkeen' (a priori) tai 'havaintokokemukseen' (a posteriori), jotka Immanuel Kant (1724-1804) asetti matematiikkaan liittyvien analyyttisten ja synteettisten arvostelmien perustaksi (Kant 1781, 57-62; 2013, 414-464; Oksala 1987, 59-60). Kant pyrki löytämään matemaattisen tiedon alkuperää koskevan uuden ratkaisun luopumalla vastakkainasetteluista, mihin sisältyvää ongelmaa Kant käsitteellistää *Puhtaan järjen kritiikissään* (1781, 2013).

Tietoteoreettinen tiedon alkuperän tarkastelu pohtii rationaalisuuden (järki) ja empirisyyden (havainto) ehtoja. Rationalismi korostaa rationaalisia menetelmiä tiedon hankinnassa eli järkeä (latinan ratio) tiedon lähteenä. Rationalismin mukaan ihmisellä on luonnostaan tietoa a priori. Rationalistit eivät yleensä kiellä havaintoon perustuvaa tietoa, mutta katsovat, että havainto ei riitä tietomme perustaksi. Empirismillä ymmärretään asennoitumista, joka korostaa havainnon (kreikan empeira) merkityksiä, empirisiä menetelmiä tiedon hankinnassa tai havaintoa tiedon lähteenä. Empirismin mukaan ihmisen tieto a posteriori on peräisin havaintokokemuksesta. Tieteissä havaintojen perusteleminen rationaalisesti toteutuu usein matemaattisten mallien sovellutuksina (tilastotiede, matemaattinen mallintaminen). Tiedon empiriseen alkuperään liittyvät sisäiset aistit, tunteet ja intuitio, jotka kognitiivisissa prosesseissa liittyvät yksilön havaintokokemukseen, jäävät matemaattisten mallien ulkopuolelle. Heideggerin fenomenologia laajentaa ymmärrystä kokemuksesta sen kätkeytyihin alkuehtoihin.

Matemaattisen tiedon suhde kokemukseen ilmenee kulttuurin kentässä, missä talonpoikaisjärki (alaluku 4.2.2) on perustaltaan sekä empirinen että rationaalinen, havaintoja ja järkeä yhdistävä kontekstissaan toimivaan käytäntöön pyrkivä itseohjautumisen ja ajattelemisen tapa. Talonpoikaisjärki tuo rationaalisuuteen kokemusperäisen täydennyksen. Talonpoikaiskulttuurissa toimintaan sitoutunut matematiikka on osa kokemusta (ilman käsitteitä). Tiedon käyttäjän näkökulmasta järkevyyttä riittää perusteluksi toiminnalle. Poliitiikan kentässä kokemukseen liittyvä funktio (luku 5.3.1) suuntautuu koulumatematiikkaan yksilöllisellä tavalla, missä koulumatematiikan rajojen asettaminen on ongelma yksilölliseen

kokemukseen suhteutettuna. Matematiikan tieteenfilosofia välittyy näin myös koulumatematiikkaan, mihin kokemuksellinen fenomenologia tuo laajennuksen.

Karkeasti matemaattisen tiedon alkuperänä painottuu rationaalinen perinne (teoria) ja luonnontieteissä empiirinen (empiria) perinne. Matemaattisen tiedon alkuperä elämäntoiminnassa on rationaalisen ja empiirisen yksilöllinen kombinaatio. Matematiikan historiassa rationaaliset ja empiiriset painotukset ovat vaihdelleet. Sekä rationaalisen että empiirisen tiedon kriteeri on intuitio. Kantin mukaan (2013, 519) kaikki ajattelu viittaa intuitioihin, tällöin aistimellisyyteen, suoraan tai epäsuoraan. Sisäinen ymmärrys eli intuitio problematisoituu teoriasa kokemuksen ja järjen erilaisista alkuperusteista johtuen. Käytännön toiminnassa intuitio ei ole ongelma, koska se ilmenee yksilöllisen luovuuden lähteenä ja ainutlaatuisena mahdollisuutena ottaa huomioon yksilöllisiä eroja opetus- ja vuorovaikutustilanteissa. Intuitio, matematiikan sisäinen ymmärtäminen, on potentiaali, joka mahdollistaa uudistavan ajattelemisen. Tällöin intuition tietoteoreettinen ongelma yhdistyy yksilölliseen kykyyn tiedostaa.

Kysymykseen, onko matematiikka järkipästä vai havaintopästä, filosofit ovat esittäneet erilaisia perusteita jo antiikista lähtien. Kantin mukaan (1781, 139-141; 2013, 540-562) tiedon lähteenä on transsendentaalinen deduktio, jossa on mukana analyttisen järjen a priori lisäksi kokemuksen mahdollisuus, synteettinen tieto a priori ja synteettinen tieto a posteriori. 1900-luvun matematiikanfilosofien enemmistö ohitti Kantin tiedon alkuperää koskevan laajennuksen synteettinen tieto a priori ja määritteli matemaattisen tiedon alkuperän järkipästä, analyttiseksi a priori. Tutkimuspolun elämismaailmassa matemaattisen tiedon empiirinen korostus rationaalistui peruskoulu-uudistuksessa. Keski-koulun ja lukion teoreettisuus ja formaaliset perusteet siirtyivät peruskoulumatematiikkaan.

Koulumatematiikan laajentaminen tietoteoreettisesta perinteestä kohti arjen ja modernien työ- ja oppimisympäristöjen lähtökohtia ja tarpeita tuo kokemuksen mukaan prosessiin. Tällöin tiedon alkuperänä on koko kokemuksellinen todellisuus, missä matematiikka on läsnä kokemuksesta tai sen ulkopuolella. Yksilöllisyys suuntautumisena tuo koulumatematiikan laaja-alaisuuteen uuden näkökulman (horisontaalinen). Valistuksen henki toimii itsenäisen ajattelemisen orgaanisena perustana. Orgaaninen viittaa ihmislähtöisyyteen osana luonnon kokonaisuutta, minkä lähtökohdan voi tunnistaa myös Aristoteleen metafysiikasta. Todistamisesta ei ole vastuussa todistaja, vaan se, joka sitä odottaa (Aristoteles 1990, 59).

Fenomenologinen suhde tiedon alkuperään, matematiikkaan ja metodiin liittyy tieteenfilosofiaan. Todellisuuden tulkinta on tällöin deskriptiivinen (miten on ollut, miten on ja miten voi olla), ei normatiivinen (miten pitäisi olla). Koulumatematiikan filosofian uudistaminen ja metodisen ajattelun laajentaminen liittyvät yhteiskunnan laajentuneisiin tarpeisiin ja tehtäviin (vrt. Ylikoski 1996; Alanen 1996; Pihlström 2002; Koskinen 2010). Tulkitsen matematiikan syntyvän ihmisen luonnollisen mentaalisen kokemuksen syvärakenteissa, jossa maailmassa olemisen kokonaisuus vaikuttaa säännönmukaisuuksien tiedostamiseen. Tällöin matemaattisella tiedolla on luontoperäinen perusta, naturaalin alkuperä. Angloamerikkalaisen tieteen perinteessä (vrt. germaaninen) naturaalin yhdistyy usein fysiikan rationaaliseen metodiin ja materiaaliseen tutkimuskohteeseen, jolloin irrationaalinen ja henkinen jää ulkopuolelle. Elämismaailmassa valinnan seurausvaikutuksena on esimerkiksi, että usein lääkäriinkin diagnoosi perustuu fysikaalisten ja kemiallisten tutkimustulosten analyysiin, ei niinkään potilaan itseanalyysiin itsestään (itsesäätyvyys).

Luontoperäisen merkitykset tieteen filosofien tulkinnoissa poikkeavat toisistaan. Lähtökohtaisesti matematiikka ideatieteenä ei yhdisty naturaalisesti historiallisesti kehittyneen metodinsa perusteella (matematiikan löytäminen), mutta matematiikan syntyä mentaalisen mielen käytön yhteyksissä voi tulkita alkupe-  
rältään ihmisluontoperäisenä filosofisen ajattelun kehittämisenä (matematiikan keksiminen). Jälkimmäisessä painottuu matematiikan mahdollisuudet elämismaailman ehdoilla uudenlaisena metafilosofiana, joka ei keskustele menneen vaan tulevan kanssa. Tällöin kokemus vaikuttavista syistä säätelee prosessia tar-  
koituksen mukaan, jolloin toiminta tuo matematiikalle mielen. Kokemus suhteessa matematiikkaan köyhtyi Willard Van Orman Quinen (1908-2000) postulaattien perustalta (Hintikka 2001, 53-84; Koskinen 2002, 230-249), millä on merkittäviä heijastusvaikutuksia 1900-luvun koulumatematiikkaan ja yhteiskuntaan.

Kysymys tiedon alkuperästä kulminoituu kysymykseen, onko tiedon alkuperä jäljitettävissä ensisijaisesti fyysis-neurologisten aivotilojen aktivoitumiseksi kokemuksen aivotiloille aistiperäisesti lähettämien sähkömagneettisten viestien kautta vai onko merkityskokemuksella laajempi kyky intentoida ja rakentaa verkostoa tajunnassaan, joka on aivotilojen yläpuolella. Kumpi päättää (supervenienssi) kokemusta, tunteet ja merkitykset luovan mentaalisen mielen ymmärtämisyhteyksinä (potentiaali) vai aivotilojen aktivoituminen aistiperäisesti sähkömagneettisina viesteinä synapseissa (vrt. Näreaho 2004, 171). Ovatko tunteet ja

merkitykset seurausta aivotiloista vai ovatko tunteet ja merkityskokemukset jotakin laajempaa ymmärtämisyhteyksistään kehittyvää, joita ei voi jäljittää aivotiloista. Jälkimmäisen perustana on ihmisen luova kekseliäisyys.

Matematiikan sisältymisestä naturalistiseen tieteenteoriaan tutkijat esittävät erilaisia tulkintoja. Lilli Alasen (1996) mukaan fyysisten kappaleiden perimmäistä luontoa koskevat kysymykset eivät kiinnosta metodologista naturalistia. Metodologisen naturalismin mukaan luonnontieteiden metodit ja niille analogiset metodit, jotka pyrkivät selittämään mentaalisia ilmiöitä ja prosesseja matemaattisten mallien perustalta yleisiä lainalaisuuksia etsien, tarjoavat mallin myös ihmis-tieteille, kuten sosiologialle, kasvatustieteille, psykologialle ja kognitiivisille tieteille. (emt.) Metodologinen naturalisti on ohittanut ihmiset tieteen ja kulttuurin luojina ja kehittäjinä sekä heidän elämismaailmansa virikkeiden antajina.

*Metodologisen naturalismin perustalta myös kasvatustiede on naturalisoitunut ja erkaantunut kasvatustieteen (mm. Hollo). Tällöin miten kasvatetaan tai miten opetetaan jää opettajan pedagogisen vapauden ja vastuun varaan. Naturalistisen tieteen yleistämisyrittäminen (vertikaalinen) on vastakkainen tutkimuspolun yksilöllisten merkitysrakenteiden tunnistamisyrittämiselle (horizontaalinen).*

Metodologinen naturalisti jättää kysymyksen olevaisen todellisesta (elämismaailmaperusta) mentaaliseen ja fyysisestä luonnosta avoimeksi. Sen sijaan metafyyssinen naturalisti uskoo, että luontoon kuuluu kaikki, myös tutkimuskohde, joita metodologinen naturalisti ei voi asettaa tutkimuskohdeksi. (Alanen 1996, 135-136.) Tutkimuspolulla talonpoikaisjärki, kokemukselliset funktiot ja mentaalinen (meta)kognitiiviseen tiedostamiseen perustuva suuntautuminen ovat kriittisessä suhteessa metodologiseen naturalismiin kokemuserustan perusteella. Elämismaailmaan sisältyvät intenciot: kokemus, merkitys, funktio, intuitio, intressi, rakenne tai muoto kelpaavat metafyyssisen naturalistin tutkimuksen lähtökohdaksi ja tutkimuskohdeksi.

Tutkimuspolku ottaa mukaan metafyyssisen naturalismin, missä yksilöllisyys on luovuuden, suuntautuneisuuden, kiehtovuuden ja mielekkyyden perustana. Oppilaan oppimispolun yksilöllistämisen tavoite saa virikkeitä matematiikan eri aikakausiin sitoutuneesta monimuotoisesta tavasta tulkita ja käyttää matematiikkaa sekä vielä keksimättömästä matematiikasta. Tutkimuspolku jatkuu Descartesin matematiikan analyysillä, missä tiedon alkuperä, tutkimuskohde ja metodi ovat aikakauteen suhteutetun ihmislähtöisen tarkastelun kohteena. Koulumatematiikkaan on vaikuttanut sen kehityshistoria, josta tutkimuspolulla kohtaan

Descartesin ja 1900-luvun koulumatematiikan rakentamisen aikakauden. Ongelmana on, miten matematiikka tieteenä ilmenee Descartesin ja 1900-luvun tulkinnoissa. Näkökulma vahvistuu kasvatustieteeseen kohti luvun loppua. Tutkimuspolun lähtökohdista koulumatematiikka keksitään (alaluku 6.3.1) tai löydetään (alaluku 6.3.2), mitkä ovat vaihtoehtoisia tai toisiaan tukevia ja täydentäviä tapoja tulkita koulumatematiikan ilmeneminen suuntautumisena.

## 6.2 Koulumatematiikkaa uudistamassa

### 6.2.1 Descartes matematiikan uudistajana (1600-)

Euroopassa oli 1600-luvulla alkamassa matematiikan kehitysvaihe, jonka kärjessä vaikuttivat Descartes (1596-1650), Fermat (1601-1665), Newton (1643-1727) ja Leibniz (1646-1716) (Lehto 2003, 222; Rossi 1997, 13; Elfving 1982, 63). Rossin (2010, 13-14) mukaan tiede ei syntynyt kampusten rauhassa eikä tutkimuslaboratorioiden ilmapiirissä, koska yliopistoinstituutiot eivät tieteellisessä mielessä olleet tuolloin vielä syntyneet. Filosofit saattoivat opiskella yliopistossa 1600-luvulla, mutta heidän elämäntyönsä oli pääosin tai kokonaan yliopiston ulkopuolella. Kahden seuraavan vuosisadan aikana tieteestä tuli järjestäytyntä tieteellistä toimintaa, joka pystyi luomaan omat instituutionsa. (emt.)

Useiden tieteen tutkijoiden (Salomaa 1936; Aspelin 1963; Rossi 2010; Joutsivuori 2000) mukaan moderni tiede voimaantui Euroopassa uuden ajan alussa. Aikakausi on totuuden tavoittelua herättelevä tieteen kehityksen murrosvaihe, minkä taustalla mielikuvitusta stimuloivat ja jännitteitä luovat antiikin humanismi (Rossi 1997), keskiajan patristiikka ja skolastiikka (Salomaa 1936) sekä eurooppalainen renessanssi ja mystiikka (Teräväinen 1992). Ajan ihmiskäsitys painottaa ihmistä humanina olentona, joka on rationaalinen, moraalinen ja henkinen (Elias & Merriam 1980, 13-44).

Tutkimuspolulla kohteena on René Descartes, joka uudisti matematiikkaa ja tieteellistä maailmakuvausta. Aikakauden yleinen henki, heräävä valistus ja vapauden aika sekä fysiikan tarpeet vahvistivat luonnontieteiden voimaantumista ihmistieteiden jäädessä taustalle. Henkinen ihmisessä on tutkimuspolulla Descartesin tutkimuksen keskiössä. Miten henkinen ilmenee Descartesin matematiikassa?

*Descartes on ollut lukioajoistani lähtien lempimatemaatikoni filosofiansa ja mentaalisuutensa perusteella. Lukiokursseihin kuuluva Descartes-vaikutteinen analyttinen geometria on vahvistanut taipumustani yhdistellä eri matematiikan osa-alueita erilaisia ratkaisureittejä ja muotoja keksien. Descartesin slogan, ”Ajattelen siis olen”, kääntyi, ”Otan omat ominaisuuteni omiin ohjaimiin”, joka sopii valistuksen ihanteisiin ja itse itsestään luomisen ideaan – siis talonpoikaisjärkeen.*

Descartesin filosofia imaisi mukaansa aikalaisensa ja ilmaisi aikakauden filosofisen pyrkimyksen, mikä korostaa järjen autonomiaa ja vapautumista tieteellisissä kysymyksissä perinnäisistä auktoriteeteista. Vaikka kirkko ja valtio vastustivat ja kielsivät Descartesin teosten julkaisemisen ja filosofian opettamisen, silti suuri joukko filosofeja seurasi Descartesia. Hänen järjestelmänsä yksi vaikeus koski sielun ja ruumiin eli hengen ja aineen välistä suhdetta. (Salomaa 1989, 39,49,50.) Inhimillisen ja fyysisen erottaminen on säilynyt tieteen jäsentelyperusteena, mitä Descartes ei tarkoittanut, koska ihmisen mielen tutkimus on keskeinen osa hänen filosofiaansa.

Vakuuttaakseen aikalaiset Descartesilla oli ulkoinen paine erottaa henki ja aine toisistaan. Hän ei metafysiikassaan tarkoittanut jyrkkää aineen ja hengen erottamista (Descartes 2003; Alanen 1989, 100-115; 2003; Sinokki 2017, 91-98). Dualismiongelma syntyi enemmän ulkoisten vaikutteiden kuin Descartesin omien holististen pyrkimysten vaikutuksesta. Inhimillinen taipumus dualisoida (kaksinaistaa) ja dikotomisoida (jakaa kahteen osaan) todellisuutta oli tunnistettavissa jo antiikissa.

Tieteen kehitykseen vaikuttaa tiedeyhteisö (Niiniluoto 1990; Lahtinen 2000). Yhteisö voi sekä lannistaa että kannustaa uusille urille pyrkimistä. Descartes onnistui vakuuttamaan yhteisönsä. Hän nousi epäilyksensä yläpuolelle omalla voimallaan inhimillisen filosofian periaatteillaan lukematta juurikaan muiden aikalaisten kirjoituksia. Descartes aloitti uuden tutkimushaaran, joka tavoitti hyvin aikalaistensa ajattelua. Descartesin avauksesta kiinnostuivat monet filosofit, joista osa jäi tieteen historiaan. Kuuluisimmat filosofit Hume, Hobbes, Malebranche, Spinoza, Newton, Leibniz ja Fermat työskentelivät toisistaan tietämättä Descartesin luomalla tutkimusperustalla. Tieteellisistä prioriteeteista tuli myös kiistaa, jossa esimerkiksi Leibnizin urauurtava työ oli jäämässä poliittisen pelin jalkoihin. (Kauppi 2001, 146.)

Modernin tieteen syntyyn Euroopassa johtanut empiiristen huomioiden yleistämiskyky tarkoitti analyttistä kykyä abstrahoida. Luonnon säännönmukaisuuksien tunnistaminen edellytti välittömän aistikokemuksen tarkentamista. Fysiikan matematisoinnin monimutkaisessa prosessissa vaikutti Descartes. (myös Aspelin 1963, 291; Rossi 2010, 167.) Ennen Descartesia Kopernikus (1473-1543), Galilei (1564-1642) ja Kepler (1571-1630) olivat jo viitoittaneet luonnontieteen korkeellista ja matematisoitua ideaalia (myös Salomaa 1989; Teräväinen 1992). Käänteentekeväenä ajattelijana Descartes suuntasi kiinnostuksensa ihmisen tietoisuuden tutkimiseen ja sieltä varmuuden löytämiseen. Descartes aloitti transsendentaalisen filosofian ja epäilyn metodin. (Aspelin 1963; Teräväinen 1992, 171.)

Matematiikalla oli 1500-luvun yliopistoissa toissijainen asema. Tuolloin matematiikka piti sisällään astrologian, astronomian, optiikan, mekaniikan ja maantieteen. (Rossi 1997, 306.) Uuden ajan matemaatikot ovat tulleet tunnetuiksi filosofian ja luonnontieteiden alueelta (Aspelin 1963; Salomaa 1989; Rossi 2010; 306). Matematiikan vahvistuminen 1500-1600 luvuilla liittyy etenkin ympäröivän luonnon ja ihmisen mahdollisuuksien tutkimiseen. Luonnonfilosofia johti luonnontieteeseen. Tuolloin heräämässä olevan valistuksen korostama ihmisen luonnon sivistäminen vaikutti sisäisesti, eikä ihmistiede tavoittanut luonnontieteen kaltaista ulkoista vaikuttavuutta. Seurauksena oli henkisyuden tappioksi materiaalisen ja taloudellisen vallan vahvistuminen.

Descartesin mukaan *Mathesis* tarkoittaa yleisesti opinalaa, joka tutkii järjestystä ja mittaa. Descartes kuvaa: ”Mutta kun kaikilla ei ole yhtäläisiä edellytyksiä asioitten keksimiseen spontaanisti omin päin. Tällöin pätee sääntö, ettei pidä heti ryhtyä vaikeimpiin ja vaativampiin asioihin, vaan on aluksi perehdyttävä vaatimattomampiin ja yksinkertaisimpiin taitoihin. Järjestys on hallitsevana kaan- ja matonkutojien tai brodeeraajien ja pitsinnyplääjien taidoissa samoin kuin kaikessa lukujen yhdistelemisessä ja kaikissa aritmeettisissa toimituksissa ja muussa sellaisessa. Kaikki nämä taidot harjoittavat ihailtavalla tavalla älyä, kunhan niitä ei opita toisilta vaan omin päin.” (Suomela 1991, 47.) Tässä Descartes korostaa itse itsestään oppimista ja järjestyksen näkemistä, ei siis mallioppimista tai formaalisia perusteita. Järjestyksen ja systeemisen rakenteen näkeminen kuuluu matematiikan holistiseen rakenteeseen.

”Ihmismieli on se, millä ihminen suorittaa ajattelutoiminnot välittömästi, ja se koostuu pelkästä ajattelun kyvystä ja sisäisestä prinssiipistä”, aloittaa Descartes (2003, 321-322) vuoden 1647 *Inhimillisen mielen selityksen ohjelmajulistuksen*

sa. Ohjelmajulistuksen kohdassa XVI hän ilmaisee, että mieli ajattelee kahdella tavalla: siinä on ymmärrys ja tahto. Kohdassa XVII Descartes kirjoittaa: ymmärrys on havaitsemista ja arvostelemista. Kohdan XVIII mukaan havaitsemista ovat aistiminen, muistaminen ja kuvitteleminen. Kohdan XX mukaan tahto on vapaa ja luonnollisissa asioissa vastakohtalle indifferentti, kuten tietoisuutemme todistaa. Kohdan XXI mukaan tahto määrää itseään, eikä sitä voi sanoa sokeaksi, kuten ei näönkään voi sanoa olevan kuuro. (emt. 324-325.) Descartesin tukioiden mukaan ohjelmajulistus voidaan naulata kirkkojen oviin ja työntää kenen tahansa luettavaksi (emt.). Descartesin tapa ymmärtää mieli on holistinen ihmisyyden ja matemaattisen luomisen perusta.

Descartesin (2003) vuoden 1647 ohjelmajulistuksen otsikkona on: ”Inhimillisen mielen selitys eli mikä on järjellinen sielu ja mikä se voisi olla”. Ohjelmajulistuksessaan Descartes tarkastelee julistustaan vastaten epäilyihin hänen metodiaan vastaan: ”Kukaan ei tietääkseni ole ennen minua väittänyt, että järjellinen sielu (mieli) koostuisi pelkästä ajattelemisesta – toisin sanoen ajattelukyvyystä ja sisäisestä ajatteluun suuntautuvasta periaatteesta. Luonto näyttää sallivan, että mieli voi olla joko substanssi tai jonkun aineellisen substanssin modus. Kun on kyse asian olemuksesta, se on luonnostaan niin kuin se on, jos se on substanssi, niin se on substanssi ja jos se on modus, niin se on modus. Ajatteleminen on aineettoman substanssin tärkein määre ja ulottuvaisuus aineellisen substanssin tärkein määre” (emt.). Onko ajattelemisen yksikkö substanssi, modus vai joku muu ei ole olennaista ajattelemisen ymmärtämisessä luonnollisena järkenä, metodina, jonka Descartes ilmaisee. Descartesin filosofia ilmentää tässä käsitteiden toissijaisuutta yksilöllisessä tiedostamisprosessissa.

Inhimillinen mieli on Descartesin modus (suuntautumistapa). Ohjelmajulistuksellaan Descartes hyökkää entisen ystävänsä Regiuksen tieteellistä ajattelua vastaan. Descartesilla ja Regiuksella on erilainen käsitys ihmisestä. Descartesin mukaan Regius tarkastelee mielen ja ruumiin suhdetta ristiriitaisesti, toisaalta erillisinä substansseina, joissa olio on olemassa aksidentaalisesti (mahdollisesti) ja toisaalta mielen ja ruumiin ykseyttä, jossa mieli on pelkkä ruumiin modus. (Descartes 2003, 395.) Descartes (2003, 398) painottaa mielen ja ruumiin ykseyttä, painottaen mieltä (ei ruumista): ”Minulla on nyt sama ruumis, kuin kymmenen vuotta sitten, vaikka aine, josta se koostuu, on vaihtunut. Ihmisen ruumiin numeerinen ykseys ei riipu sen aineesta vaan sen muodosta, joka on *sielu* (mieli).”

Descartesin oppi kantautui oppineiden maailmaan, sen hyväksyivät ennen muita ne luonnontutkijat ja lääkärit, jotka vastustivat skolastisia ja humanistisia si-

vistysihanteita. Sitä kannattivat useimmat tieteenharjoittajat Euroopassa, jotka Descartesin kanssa tulkitsivat vanhaa Aristotelista filosofiaa. Humanistit reagoivat kiivaasti puolustaen klassista sivistystä Descartesin kannattajien tähdentäessä matemaattis-luonnontieteellisiä uudistushankkeita. (vrt. Aspelin 1963, 292.) Perinteinen kristillinen katsanto (keskiaika) liittyy henkilön identiteetin vahvasti ruumiiseen, ja juuri siksi kirkko opetti ruumiin ylösnousemusta. (Yrjönsuuri 2003, 407.) Nykyisen humanismin voi tulkita puoltavan Descartesin inhimillisyyttä. Millaisia inhimilliseen sieluun liittyviä keskusteluja tuolloin todellisudessa käytiin, ei välttämättä välity jälkeen jääneistä teksteistä, mutta vaikuttaa, että ihmisen kyky uudistua kiinnostaa Descartesia.

Descartes kehitteli tunne-elämän psykologiaa koskevat näkökantansa, missä hän ei halua käsitellä mielenliikkeitä niin kuin moralisti, vaan kuin fyysikko, joka pyrkii tutkimaan niiden lainalaista yhteenkuuluvuutta. Ihminen voi oppia *tahdolla* hallitsemaan voimia, jotka tulevat palvelemaan ylempiä sieluntoimintojamme. Descartesin filosofia esitti vakuuttavuudellaan Euroopassa roolia, joka muistuttaa 1200-luvun aristotelismia. Descartes haluaa kehittää yksinkertaisen ja täsmällisen, muutamille selville ja tarkoille peruskäsitteille rakentuvan luonnonselityksen. (Aspelin 1963, 291.) Koulumatematiikan kirjainsymbolien ja koordinaatiston periytyminen Descartesilta mainitaan usein, mutta tällöin unohdetaan hänen edustamansa kiinnostus rakentumisen muotoon.

Descartesin (2003, 295) mukaan rehellisen ihmisen ei tarvitse tuntea kaikkia kirjoja eikä hallita tarkasti kaikkea, mitä koulussa opetetaan. Ihmisen oma järki opettaa hänelle asioita, jotka opastavat oppimaan. Ihminen on syntynyt tietämättömänä maailmaan, jolloin varhaisin tietämys nojautuu vain heikkoon käsityskykyyn ja opettajien arvovaltaan. Onkin väistämätöntä, että lukemattomat väärät ajatukset täyttävät hänen mielikuvituksensa ennen kuin järki ryhtyy ohjaamaan niitä. Descartes paljastaa julkaisussaan *Totuuden tutkimus luonnollisella valolla* keinot, joilla kukin voi toiselta mitään lainaamatta löytää elämänsä ohjaukseen tarvitsemansa tiedon kokonaan itsestään sekä myöhemmin hankkia tutkimuksiltaan jopa kaikkein kiehtovinta tietämystä, jota inhimillinen järki kykenee omaksumaan. (emt.)

Descartesin kuuluisin slogan, *Ajattelen, siis olen*, ilmentää subjektin keskeistä osaa luomistyössä. Oma ajattelu ja olemassaolo oli 1600-luvulla kontingentti (satunnainen) osa olemisen kokonaisuutta, varma tieto käytettävistä keinoista. Salomaan (1936, 41-42) mukaan sloganilla on kahdenlainen tehtävä: toisaalta se tarjoaa ehdottomasti varmojen lauseiden tyyppin ja toisaalta se valmistaa ruumiin

ja sielun välistä eroa. Voin pitää varmana kaikkea sitä, minkä tajuan yhtä evidentisti kuin tämän lauseen totuuden; niin muodoin sitä voidaan pitää toisten lauseitten varmuusarvon mittana. (emt.) Aineen maailma on Salomaan tulkinnassa tajunnan ulkopuolella, joka edustaa jälkipolvien tulkintaa matematiikasta ja Descartesin ajattelusta. Salomaan tulkinta on ollut vallitseva viime vuosisadalla, jonka seurausvaikutukset näkyvät ympärillämme. Tulkinnassani lause, ajattelen, siis olen, ei ilmaise ruumiin ja sielun eroa, vaan yhdistää olemisen ja ajattelemisen. Tällöin Descartesin slogan tarkoittaa sielun ja ruumiin – ajattelevan mielen ja fyysisen olemuksen – kokonaisuuden korostusta, jossa ajatteleva mieli päältää fyysisestä olemuksesta.

Aineen ja hengen, materian ja mielen erottaminen on vaikuttanut vahvasti tieteen kehitykseen ja sen myötä kulttuurin ja politiikan kehitykseen. Jäsennystavan seurausvaikutukset näkyvät kaikkialla. Tällöin ihmisen ulkopuolelta on voitu tarpeen niin vaatiessa osoittaa, että olet väärässä, koska mieli, kokemus tai tajunta on alisteinen todellisuuden ymmärtämiselle. Todellisuus on jotakin muuta kuin mielessään kokee. Tällöin menestyksen kannalta on ollut suotuisampaa sopeutua tai olla näyttämättä todellisia merkityksiä ja vastata odotukseen, esimerkiksi koulussa. Yksinkertainen jäsennys on johtanut hierarkisiin yhteiskuntarakenteisiin ja estänyt vuorovaikutteisuuden kehittymistä. Tällöin koulumatematiikkakin on suosinut enemmän konvergenttejä (yksikäsitteisiä) kuin divergenttejä (vaihtoehtoisia) ratkaisuja. Vaikka mieli on erehtyväinen, kuten Descartes korostaa, mieli on kykenevä erehdyksensä myös korjaamaan totuuden tutkimuksellaan. Erehdyksen korjaamista kutsutaan itsearviointiksi. Itsearviointitaito on hävinnyt kulttuurista lähes kokonaan. Tällöin oppilas voi arvioida opetussuunnitelman laaja-alaisia taitotavoitteitaan käsitteillä osaan tai en osaa yhteyksiään tai merkityksiään elämismaailmaansa erittelemättä.

Lilli Alanen (1989, 100-115; 1997 23-45) ohittaa materian ja mielen kahtiajaon ja osoittaa Descartesin mielenliikutukset osana kognitiivista prosessia. Ihminen on Descartesin mukaan mielen ja kehon muodostama yhtenäinen kokonaisuus. Sielun ja kehon liitto on todellisen ihmisluonnon välttämätön edellytys. Descartesin mukaan mielenliikutukset ovat ajatuksia, mentaalisia tiloja. Ajatukset ovat kehon fysiologisten tilojen aiheuttamia, selviä ja tarkkoja tai hämäreitä ja sekavia. Descartesin omien kirjoitusten mukaan ajatus tai havainto on selvä, kun se on *läsnä ja ilmeinen* mielelle. (Alanen 1997, 26-28.) Descartesin metodinen epäily liittyy siis ihmisen luonnolliseen olemukseen ja havainto intuitioon.

Descartes edustaa matematiikan ihmislähtöisyyttä ja laajentaa matematiikan merkitystä yleistieteenä, mielen selityksellään ja epäilyn metodillaan. Kokemus

tarkoittaa Descartesille mielen liikkeitä, joita he kutsuvat perseptioiksi (Pietarinen 2002b, 237). Skolastikot ovat heitä ennen käyttäneet käsitettä affektio kuvaamaan ulkoisen syyn aiheuttamaa muutosta kokemuksessa. Tunteet kuuluvat perseptioiden ja affektioiden alaan. Perseptio ja konseptio sisältyvät Eino Kailan arkikokemukseen (Kaila 1977).

Descartesin matematiikkakäsityksestä välitty esittelemäni tekninen, praktinen, emansipatorinen, veristinen, metafyyminen ja persoonallinen tiedonintressi, painottuen persoonalliseen ja veristiseen intressiin. Descartes osoittautuu monimuotoisemmaksi ihmiseksi kuin opettamieni matematiikan oppikirjojen sisältöjen perusteella voi ymmärtää. Matematiikan kokonaisvaltainen filosofia ja todellisuuden kokonaisesitykseen pyrkivä luonne on häipynyt oppikirjojen muodollisia rakenteita korostavien perusteiden varjoon. Matematiikka voimaantui ihmismielen työn tuloksena ajattelun kehittymistä suosivalla aikakaudella fysiikan tarpeisiin yhdistettynä. Descartesin synnyttämä matematiikka ei syntynyt filosofiasta sattumalta, vaan kontekstuaalisilla tekijöillä on ollut vaikutusta kehitykseen. Konteksti sisältää aikakauden keskiajasta vapautumisen, valistuksen hengen heräämisen ja tieteelliset pyrkimykset.

Descartesin opastamana ihmisen henkinen kasvu on tietoisuustahtoa ja totuuk-sien tunnistamista järjen kykyä kehittämällä. Matematiikan voimaantuminen 1600-luvulla ei syntynyt sattumalta, vaan siihen oli aikakauden tarpeisiin pyrkivä yhteiskunnallinen tilaus ja luonnontieteiden tarve täsmälliseen ratkaisuun. Matematiikka on kehittynyt ristiriitaisissa olosuhteissa. On mahdollista, että osa keksinnöistä on jäänyt julkaisematta.

Oppi matematiikan perimmäisestä luonteesta koki uuden ajan alussa puhdistautumisen. Puhdistautuminen tarkoittaa matematiikan eriytymistä uskonnon epäselviltä alueilta. 1900-luvun alussa matematiikka uudelleen puhdistautui syntaktiseksi järjestelmäksi, missä ihmisen metafyyminen olemus ja sen synteettiset taipumukset jätettiin vähitellen matematiikkaa koskevan formaalisen rakenteen ulkopuolelle. Kuvaamassani talonpoikaiskulttuurissa näyttäytyvä talonpoikaisjärjen synteettisyys ei kuulunut enää matematiikan alaan. Matematiikan soveltamiskohteeksi valikoitui keskeisesti fysiikka seurauksenaan teknologia ja teknologiset järjestelmät (mm. Mickelsen 1997, 542-553) muiden tieteiden jäädessä fysiikalle alistaisiksi.

Matematiikan eksakti sisältö, mikä jälkipolvien rekonstruoitavaksi on jäänyt, on valikoitunut metafyyisistä ymmärryksestä ja inhimillisestä kyvykkyydestä, jotka saattavat välittyä huonosti koulumatematiikan harjoittamisessa koululuo-

kissa. Descartes on käyttänyt ajattelemisen metodiaan koko elämänsä keksiäkseen nyt kouluissa opetettavia koulumatematiikan sisältöjä. Koulussa opetettava koulumatematiikka on pääosin keksitty antiikin ja uuden ajan aikana. Koulumatematiikka on siis matematiikan historiaa. Jos uuden matematiikan keksimiseen kannustettaisiin jo koulussa, oppilaat saattaisivat ehtiä elämänsä aikana keksiä uutta matematiikkaa. Matematiikka on keksimisaikakautenaan palvellut aikakautensa tarpeita. Nykyarjessa, työssä ja tulevaisuuden rakentamisessa matematiikka on edelleen läsnä meissä ja ympärillämme; kokemuksessamme, laitteissa ja yhteiskuntarakenteissa, vaikka emme sitä tunnistaikaan. Pitäisiköhän pyrkiä tunnistamaan?

## 6.2.2 Koulumatematiikan rakentamisen 1900 -luku

Matematiikalla on historiansa perusteella ollut vahva traditio, vaikutusvaltaa tieteen kehityksessä ja sen myötä kulttuurisissa muutoksissa. Ovatko kulttuuriset ja yhteiskuntarakenteelliset muutokset olleet kaikin osin edistystä vai matematiikan valta-asemasta johtuvaa vaikuttamista, on yhteiskuntaeettinen kysymys. Yhteiskuntaetiikkaa ei ole yleisesti yhdistetty koulumatematiikkaan, vaan koulumatematiikan sisältöön ja metodiin ovat politiikan ja kasvatustieteiden lisäksi vaikuttaneet tieteenfilosofien linjaukset ja matematiikan historia. Tieteenfilosofinen tutkimus vahvistui vasta 1960-luvulta lähtien, jolloin korostui näkemys, ettei tiedettä voi tutkia tuntematta sen historiaa (Kiikeri & Ylikoski 2011, 54). Tarkastelujaksoni 1900 -luku antaa virikkeitä koulumatematiikan uudistamiseen elämismaailman lähtökohdista, missä suuntautumiseen tunteet vaikuttavat enemmän kuin järki.

Darvinin (1809-1882) evoluutioteorian jälkeen kokemuksen irrationaalisuuteen liitetyt tunneteoriat (mm. Scheler, James) ja fenomenologia (mm. Hegel, Husserl) olivat saaneet huomiota, mutta matematiikkaan niiden vaikutusvalta ei ulottunut. Machin fenomenologian mukainen tiedon aistiperäisyys synnytti tieteellisen keskustelun, joka jatkuu eri muodoissaan edelleen. Lehiköisen (1998, 111) mukaan eurooppalaisen ajattelun kriisivaihe (1885-1914) sai kutsumanimen irrationalismi. Tieteeseen kohdistuneet yleiset odotukset eivät olleet täyttyneet, mikä synnytti kulttuuripessimismia (emt. 110). Pyrkimys täsmälliseen ja selkeään vahvistui vähitellen myös koulumatematiikan tavoitteeksi.

Perustutkimukseen keskittyvänä tieteenalana matematiikka ei ole perinteisesti yliopistoissa ollut kiinnostunut yhteiskunnasta tai elämismaailmasta. Tieteenalana matematiikan autonomia on korostunut, jolloin yhteiskunnalla ei ole ollut oikeutta puuttua tieteelliseen tutkimustyöhön tai ohjata tieteen suuntaa. Vasta 2000-luvulla yhteiskuntanäkökulma on vahvistunut yliopistojen ja korkeakoulujen kolmannen tehtävän, fuusioiden, rahoituksen, työelämäharjoittelun, yritys- ja liikelaitosyhteistyön sekä uusien opiskeluympäristöjen myötävaikutuksella.

Koulumatematiikan sisältö ja arvoperusta määräytyvät matematiikkatieteenalan ja opetus suunnitelman lähtökohdista. Koulumatematiikan 1970-luvun uudistuksessa korkeampi matematiikka ja koulumatematiikka lähentyivät (ICMI 1990, 27). Suomessa peruskoulu-uudistuksessa tapahtunut koulumatematiikan teoretisointi uuden matematiikan eli joukko-opin muodossa loi sekaannusta ja epäonnistunutta käytäntöön ohjausta. Uudistunut lähestymistapa matematiikkaan ja pyrkimys abstraktiin ilmaisumahdollisuuteen sai opettajat, oppilaat, vanhemmat ja kansan hämilleen. Koulumatematiikan tieteellistämistä ei onnistuttu perustelemaan riittävän hyvin kaikille ihmisille, joihin se kohdistui.

Keskikoulun opetussisältöjen perustalta peruskoulu-uudistuksesta käynnistynyt opetussisältöön suuntautuminen vahvistui joukko-opista luopumisen jälkeenkin. Vaikka oppivelvollisuuskoulun matematiikan opetussisällöistä oli saavutettu kohtuullinen yksimielisyys 1900-luvun loppuun mennessä, keskustelu opetuksen laajuudesta, syvyydestä ja järjestyksestä on herättänyt keskusteluja viime vuosiin saakka. Joukko-opista luopumisen jälkeen vuodesta 1985 lähtien koulumatematiikan uudistaminen on perustunut pieniin sisällöllisiin päivityksiin.

Koulumatematiikan uudistaminen saa virikkeitä kulttuurista ja tieteenfilosofiasta keskustelusta. Tieteen kriisi 1800-1900 lukujen taitteessa (Lehikoinen 1998) käynnisti matematiikan perustaa koskevan keskustelun. Matemaatikot, filosofit ja luonnontieteilijät kokoontuivat keskustelemaan, miten filosofian moniselitteisyys voidaan välttää ja miten filosofian ja tieteen suurin mahdollinen lähentyminen voitaisiin saada aikaan (Manninen 2002, 27). Matematiikkatieteen filosofinen keskusteluryhmä, Wienin piiri, tuli julkisuuteen vuosina 1928-1930 (Manninen 2002, 27) ja vaikutti merkittävästi koulumatematiikan tulkintaan.

Ernst Machin fenomenalismiin, ”*kokemus sisältyy ilmiöihin*”, pohjalta kehittyi keskustelu uudenlaisesta tieteen tarkastelutavasta, missä Mach jäi lopuksi tappiolle. Matematiikasta keskustelleen Wienin piirin filosofisen työn tuloksena kehittyi looginen positivismi, myöhemmin looginen empirismi, joka vahvisti analyyttisen filosofian kehitystä ja vaikutusta koulumatematiikkaan. Analyyttisen

suuntauksen vaikutuksena voi tulkita koulumatematiikan formaalisten perusteiden korostumisen ja kokemuksen (intuitio, perseptio, arvotietoisuus tiedonintresseineen, tunteet) merkitysten vähättelyn. Wienin piirin hylkäämä kokemusta hyödyntävä, Kantin synteettinen a priori matematiikka, jäi myöhempien tieteenfilosofien tulkintojen kohteeksi. Havaintojen yhdistäminen ja holistinen hahmotus, synteesi, jäi tulkinnoissa täsmällisemmän analyysin varjoon lähes sadaksi vuodeksi, jolloin kuilu humanismin ja matematiikan välillä laajeni.

Von Wrightin humanistinen elämänasenne tuo ihmisenäkökulman myös matematiikkaan ja luonnontieteisiin (myös alaluvut 2.3 ja 4.2.1). Ennen aktiivista kansallista ja kansainvälistä julkaisutoimintaansa von Wright oli Wienin piiriin osallistuneen Eino Kailan oppilas Helsingin yliopistossa. Kailan vaikutuksen voi tunnistaa von Wrightin suuntautumisesta, joka edustaa syvällistä ihmisen arvon ja vastuun puolustamista, projektiota (ei reduktiota) yhteiskunnasta.

Niiniluoto (2002, 181) tulkitsee Kailan strukturaalista realismia: ”Konkreettinen todellisuus on kvalitatiivinen, kun taas käsitteellinen ja abstrakti fysikaalinen maailmankäsitys ilmaisee relaatioiden mittalukujen avulla funktionaalisia suhteita kvaliteettien muodostamassa materiassa.” Wienin piirin työn jälkeen kvaliteettien muodostama maailma erkaantui kvantiteettien mitattavasta maailmasta. Ihminen elämisaailmassaan edustaa humaania kvaliteettien maailmaa, joka tulkittiin vähitellen ulkopuoliseksi suhteessa koulumatematiikkaan.

Manninen (2002, 28) kuvaa: ”Epäeuklidisen geometrian ja muiden tieteen uusien saavutusten vuoksi Kantin oppi ihmismielen muuttumattomista kokemuksen muodoista oli hylättävä. Etsimme tapaa konstruoida nämä muodot sellaisen evoluution alaisina, joka sopisi yhteen tieteen kehityksen kanssa. Tietty kuilu erotti toisistaan havaintojen väistämättä epätarkkoja ja kompleksisia kuvauksia ja tieteen periaatteita, jotka etenkin fysiikassa koostuivat yksinkertaisten väittämien yhteen liittämästä pienestä käsitteiden joukosta, kuten voima tai massa. Wienin piirin mielestä kuilun ylitti menestyksellisesti ranskalainen matemaatikko ja filosofi Henri Poincare (1854-1912).” (emt.) Tieteen perusta ihmismielen luomuksina viittaa empirismiin. Poincaren tiedon alkuperä on sisäinen intuitio (Hollo 1927, 258-259). (luku 4.3.1)

Matematiikkatieteen metodi on kreikkalaisperäisesti deduktio, joka viittaa rationalismin teoriaperustaan. Aristoteleen esittämäksi tulkittu metodinen tarkkuus matematiikan tiedeihanteessa korostuu uudistuneena Wienin piirin työn jälkeen. Aristoteleen metodissa on mukana myös kokemus, mihin hän soveltaa analyysiä ja synteesiä. Suomela (1991, 12) siteeraa: ”Pappoksen mukaan analyysi lähtee siitä, mitä etsitään, ikään kuin se olisi annettu edeten peräkkäisten seurausten

kautta johonkin, mikä on annettu synteessin tuloksena. Analyysissä oletamme sen, mitä etsitään ja kysymme mistä se seuraa ja mikä on löydettyä edeltävä syy, kunnes taaksepäin kulkien tulemme tunnettuun. Analyysissä ratkaisu kulkee taaksepäin ja synteessissä päinvastoin oletamme tehdyksi sen, mihin viimeksi päädyimme analyysissa (emt.) Tällöin analyysi avaa ja synteessi sitoo tai analyysi katsoo taaksepäin ja synteessi eteenpäin. Analyysi ja synteessi ovat mukana antiikin dialektiikassa eli vuoropuhelussa. Wienin piirin kritiikki kokemustiedon luonteesta (synteettinen a priori) kavensi entisestään kapeaa Aristoteleen aloittamaksi tulkittua pätevän päättelyn perustaa.

Kantin analyysi ja synteessi perustavat tieteellistä päättelyrakennetta. Kant liitti analyysin järkeen ja synteessin kokemukseen, missä jälkimmäinen herätti matematiikan filosofien kritiikin. Haaparannan (1986) mukaan analyysi (aikaisemmin resoluutio) tarkoittaa kokonaisuuden hajottamista osiin. Synteessi (aikaisemmin kompositio) tarkoittaa yhdistelemistä ja kokoamista. Analyysi ja synteessi tarkoittavat vastakkaisiin suuntiin etenevää ajatteluprosessia. (Haaparanta 1986, 69-71.) Synteessi matemaattisessa ratkaisuprosessissa ja yleisesti ymmärtämisessä tuo holistisen näkökulman oppimiseen. Synteessin puuttuminen ilmenee esimerkiksi koulugeometriassa, missä ei voi todistaa ongelmaa havaitsemansa kuvan säännönmukaisuuksiin perustuen, vaan on löydettävä lähtökohtiin perustuva analyyttinen ratkaisu. Synteessin puutteet elämismailmassa, koulumatematiikassa ja tieteessä yleisesti näkyvät taipumuksina eritellä ja luokitella, sen sijaan, että yhdistelee, kokoo tai transferoi (vrt. alaluku 4.3.3). Ongelma luovuuden kannalta on, että todellisuus alkaa näyttää luokitusten kaltaiselta.

Oittinen (1997, 12, 15) puolustaa synteesiä. Kant erosi rationalisteista siinä, että hän kiisti ajattelulla hankittavan tiedon mahdollisuuden. Ajattelu (Denken) ja tiedostaminen (Erkennen) ovat eri asioita. Ajattelu on tiedon ulkoinen muoto, kuori. Todellinen tieto syntyy vasta ymmärryksen ja aistimellisuuden yhdistyessä (vrt. ajatteleminen). Puhdas ajattelu vaatii loogista ristiriidattomuutta ja viittaa loogisesti mahdollisiin olioihin, kun taas tiedostus vaatii kohteen reaalista mahdollisuutta. Tiedostussubjekti antaa tiedolle muodon ja aistimellinen kokemus sisällön. Todellinen tieto ei ole mahdollista ilman muodon ja sisällön synteesiä. Todellinen olemassaolo on Kantin mukaan aistimellisuuden kautta annettua, missä itsetajunnan puhdas apperseptio muodostaa synteessin lähteen. (emt.)

Matemaattinen synteessi on metafysiikkaa, mikä ei Wienin piirin (1928-1934) jälkeen yhdistynyt matematiikan metodiin. Päättelyrakenteeseen jäi aukko, mikä vaikuttaa kokemukselle vieraalta ja keinotekoiselta. Väinö Pajunen (1952, 6)

kutsuu mekaaniseksi eli konemaiseksi totunnaista ja tavanmukaista suorittamista. Kykyä käyttää opittua tietoa ja päätellä uusissa tilanteissa Pajunen kutsuu hankitukseksi laskutaidoksi. (emt.) (myös alaluku 5.2.2) Aukusti Salo kutsuu keino-tekoiseksi ajatteluksi mekaanista laskutaitoa. Kansakouluopetuksen opetusopin perusteella kokemusta ja järkeä yhdistävä talonpoikaisjärki mahdollistaa luovan ongelmanratkaisun, johon opitut matemaattiset välineet eivät aina yhdisty. Järki talonpoikaisjärjen perustana on suhteuttamista, missä synteettinen kokemus on keskeisessä roolissa. Kontekstiinsa sidottu havainnointi edellytti talonpoikaiskulttuurissa havaintojen suhteuttamista toisiinsa, jäsentämistä ja järjestämistä, mikä kulttuurien tulkki Samuli Paulaharjun mukaan on konsähtiä (Paulaharju 1932, 366). Arjen kulttuurisissa ympäristöissä opitut taidot ja tavat eivät enää peruskoulussa täysin kohdanneet formaalisten taitojen vaatimuksia. Koulumatematiikan vaikutelmaksi jäi keinotekoisuus.

Koulumatematiikassa on matematiikkatieteenalan perustalta korostettu deduktiiviseen päättelyyn perustuvaa formaalista eli käsitteellistä järjestelmää (mm. Suomela 1991, Sorvali 2004). Toisaalta jo Pythagoraasta alkaen on vaikuttanut ajatus, että kyselevän, epäilevän ja päättelevän asennoitumisen opettaminen liittyy erityisesti matematiikan opettamiseen (Lehti 2000, 3). Matematiikka on näin sekä formaalinen järjestelmä että fenomenologinen metodi, jotka molemmat tavoittelevat totuutta yhdessä tai erillään. Analytyttiset ja positiiviset tiedeihanteet ovat vahvistuneet viime vuosisadalla (formaalinen) ja heikentäneet tulkitsemaan fenomenologista matematiikkaa. Fenomenologinen koulumatematiikka on vahvistunut vasta 2000-luvulla.

Fenomenologisen matematiikan edelläkävijä, hollantilainen (syntyisin saksalainen) Hans Freudenthal (1968, 1) vastusti 1960-luvun koulumatematiikan uudistamista. Hänen fenomenologiansa mukainen oppilaan oppimiskokemuksen suunnittelu (curriculumn theoria) keskittyy oppilaan ajattelemisen tapaan (conceptofageneral), matematiikkakuvaan oppimisen lähtökohtana. Tällöin matematiikka ilmenee humanina aktiivisuutena oppilaan kontekstuaalisista funktioista lähtien. Tutkimuspolun (myös oppimispolun) horisontaalinen autenttinen näkökulma matematiikan keksimiseen hyötyy ja vahvistuu Freudenthalin didaktisista huomioista.

Fenomenologiset lähestymistavat korostavat matematiikan rakenteellista perustavuutta. George Malatyn (2003) mukaan matematiikan rakenteelliseen kokonaisuuteen sisältyy lukuihin ja muotoihin liittyviä erityisominaisuuksia. Malaty (2003, 106) korostaa, että matematiikan oppiminen ei tapahdu käskyjä ja sääntöjä noudattamalla, vaan oppiminen alkaa annettujen tietojen analysoinnista ja

matemaattisen rakenteen tuntemuksesta. Matematiikan rakenteet ovat abstrakteja, joita esitetään symbolisesti. (emt.) Symboliset funktiot ovat ihmisten maailmassa aina läsnä, kulttuuriperäisesti tai tieteenalaperäisesti. Vuorovaikutuksen onnistuminen edellyttää symbolisten merkitysfunktioiden kohtaamista.

Käsite matematiikka viittaa formaaliseen ja fenomenologiseen tulkintaan, joita yhdistää sama rakenne. Formaalin tulkinta keskittyy matematiikkatieteenalälhtöiseen käsitteelliseen ja loogiseen järjestelmään – sovittuun symbolijärjestelmään ja fenomenologinen tulkinta ihmislälhtöiseen arkifilosofointiin ja ajattelamiseen – yksilölliseen symbolifunktioon (Kaila 1967, 140-144), missä oma kokemus ja ympäröivä todellisuus vuorovaikuttavat. Jälkimmäinen on rönsyilevämpää ja hitaampaa, mutta tavoittelee omien ajatusrakenteiden tunnistamista ja tiedostamista. Formaalin eli käsitteellinen ja fenomenologinen tulkinta painottavat eri näkökulmia, vaikka molempien tavoite on ymmärtää matematiikan ideaa ja rakennetta. Matematiikka on formaalisen ja fenomenologisen välissä, kuten antiikin filosofien dialektisen metodin perustalta voi tulkita. Karkeasti formaalin näkökulma vastaa kysymykseen miksi ja fenomenologinen näkökulma kysymykseen miten.

Totuus matematiikassa tarkoittaa todistamalla saatua väitelauseen tai arvostelman perustelua. Todistaminen on tiedeyhteisön säätelemää. Mikä tahansa ei ole kelvannut todistukseksi. Matemaattinen induktio voidaan ymmärtää deduktiivisena todistusmenetelmänä, vaikka induktiivista päättelyä aikoinaan kritisoivat David Hume (1711-1776) ja muutamat hänen seuraajansa. Matemaattisen totuuden osoittaminen on verifiointia (oikeaksi todistamista) tai falsifiointia (vääräksi todistamista). Oikeaksi osoittaminen viittaa arvostelmiin ja väitelauseisiin, jotka jo lähtökohtaisesti ovat asetettuja. Tällöin arvostelmia ja väitelauseita voi kutsua keinotekoisiksi, joiden ratkaisuun riittää analyysi, synteessin jäädessä usein syrjään. Heidegger (2000, 56) liittää synthesikseen (syn) apofanttisen merkityksen, joka kuuluu yhteen jonkin muun kanssa saattaen jonkun nähtäväksi jonakin. Logos on tällöin nähtäväksi saattamista, joka voi olla totta tai ei totta.

*Todistustehtävien osuus opetussisällöissä on vähentynyt merkittävästi verrattuna keskikouluun ja peruskoulun alkuaikoihin. Yhä enemmän on myös oppilaita, jotka ratkaisevat harjoitustehtäviä ilmoittamalla pelkän vastauksen. Opettajana muistutan, että matematiikka tarkoittaa päättelyketjua. Jossakin opinpolun vaiheessa oppilailla on tapahtunut oikomisista, missä matematiikan idea on hämär-*

*tynyt. Koulumatematiikan ongelma luokkahuoneissa on tällöin kulttuuriperäinen ja filosofinen.*

Tulkinnat Aristoteleen ja Heideggerin Logos käsitteestä ovat laajentaneet Logoksen merkitystä koskemaan kaikkia todellisuuden olioita tai entiteettejä (mm. Miettinen 2007). Logos sisältyy Aristoteleen mielen filosofiaan (Heidegger 2000, 55-58; Aspelin 1963, 117; Miettinen 2007, 69). Monimerkitykselliseksi tulkittu Logos on näin kaiken tieteen ja tietämisen mahdollistava järki, totuuden perusta, ei pelkästään tieteelliseksi matematiikaksi kutsutun tieteellisen logiikan perusta. Logoksen lähtökohdasta matematiikka on kaikkien tieteiden perusta, mitä myös matematiikan etymologinen tulkinta (alaluku 2.4) edustaa.

Miettinen (2007, 73) korostaa metodini lähtökohtia, jonka mukaan todellisuus on siinä mielessä olemuksellisesti ”kätkeytynyt”, että sen oleminen totena riippuu *tavasta*, jolla se tulee osaksi kokemusta; vasta tämän todellisuuden perustavan ”kätkeytymättömyyden” (Unverborgenheit) pohjalta voidaan siitä puhua totena tai epätotena. Kaikkein perustavin totuus on juuri todellisuus itse – ei minään kokemuksesta erillisenä tasona vaan yksinkertaisesti sinä, mikä on tullut ilmi, osaksi hengen kokemuspäiriä. (emt.) Totuuden tavoittaminen on kiinni tavasta, jolla se tulee osaksi kokemusta. Tällöin Logos saa yhteyden merkityksen (Heidegger 2000, 58).

Tutkimuspolun tieteen kentän tieteenfilosofiassa tiedon saavuttamisen mahdollisuudet ja edellytykset ovat keskeisiä yksilön näkökulmasta. Fokuksessa on filosofiasta kehittynyt matematiikka, joka tukee matemaattisen tiedon saavuttamisen mahdollisuutta oppilaan oppimispolulla. Tällöin oppilaan suhde kontekstiinsa ilmentää fenomenologista asennetta koulumatematiikkaan. Koulumatematiikan sisältöjen valintaa tukee kokemuksen kautta alkuun pääsy oppimispolulla. Oppimispolun rakentaminen on tietoisuuden rakentamista ajattelemisesta.

Lukuteoria tukee oppimispolulla alkuun pääsyä. Lukuteoriaa on lisätty opetussisältöön 7. luokalta alkaen. Lukuteoria on itsenäinen matematiikkaan laajasti liittyvä tutkimushaara, jonka lähtökohdista on mahdollista rakentaa koko oppivelvollisuuskoulun matematiikan opetussisältö. Taustalla vaikuttava tieteenfilosofia olisi tällöin yhtenäinen ja lukujen säännönmukaisuuksien tutkimusta voisi harjoitella toiminnallisesti ja käytäntöön soveltaen. Tällöin luvun käsitteen laajentaminen myös imaginäärilukuihin lisäisi matematiikan abstraktia kuvittelukykyä edellyttävää ominaisuutta.

Muotoihin ja rakenteisiin keskittyvä matematiikan opetussisältö, geometria, on vastaavasti vähentynyt opetussuunnitelmasta. Geometrian opetustuntien vähen-

nys ei vastaa nyky-yhteiskunnan työtaitotarpeita (hahmottaminen, suunnittelu, järjestely). Geometria liittyy arkeen (mm. tapetointi, ompelu, kutominen, vaate-suunnittelu, laatoitus, sisustus) ja eri ammattien taitotavoitteisiin (mm. parturi, kampaaja, rakentaja, arkkitehti, rakennus-, sisustus- tai puutarhasuunnittelija) toiminnallisessa merkityksessä antiikin geometriasta uudistunein merkityksin. Geometrisen hahmotuksen kehittäminen käynnistyy luontaisista taipumuksista lähtien (Silfverberg 2019).

Uusien opetusalueiden, kuten koodauksen, digitekniiikan ja informaatioteknologian sisällyttäminen matematiikan oppiaineeseen herättää keskustelua. Teknologian mahdollistama matematiikan opiskelun yksilöllistäminen on tulkittu oppimisen uhkaksi tai mahdollisuudeksi. Ongelmat, miten koulumatematiikkaa on tulkittava nyky-yhteiskunnassa, mistä sisällöistä voidaan luopua ja mitä on erityisesti painotettava, korostuvat, kun tietokoneet suorittavat rutiiniosuudet. Esimerkiksi geometrisen hahmotuksen apuvälineinä harjoittelumateriaalit (mm. Joki 2004) ja opetusohjelmat (mm. Geogebra) tuovat merkittävää lisäarvoa.

2000-luvun oppimisen yksilöllistäminen saa virikkeitä ainakin antiikin Aristoteleelta, modernin Kantilta, uuden ajan Descartesilta, irrationalismin Poincarelta ja Freudenthalilta. Pelkkä järki ei riitä matemaattisen tiedon tiedostamiseen, vaan kokemus rajaa ja vahvistaa havaintoa. Oittinen (1997, 14-15) muistuttaa uuden ajan filosofian ratkaisevasta erosta antiikin ajatteluun, missä uuden ajan kiintopisteenä on subjekti. Järki miellettiin antiikissa objektiivisena periaatteena (logos, nous) ja uudella ajalla järki oli subjektin ominaisuus. Uudella ajalla korostui subjektin ja objektin vastakkaisuus. Uuden ajan filosofian subjektikeskeys ilmentää modernin maailman ja valistuksen henkeä, jota jo renessanssi ja uskonpuhdistus valmistelivat (emt.). Descartesin ja Kantin subjektifilosofian laajennus on alku konstruktiiviselle matematiikkakäsitykselle, joka vahvistui 1990-luvulla. Todellisuuden konstruointi sisältää subjektin kyvyn rakentaa oppimispolkuaan omista lähtökohdistaan. Subjektinäkökulma ja synteesi yhdistyvät myös kulttuuriperäiseen talonpoikaisjärkeen.

Koulumatematiikka on rakentunut matematiikan tieteenhistoriasta ja tieteenfilosofiasta, minkä kehityskaaren ja ristiriitojen tunteminen voi myös lisätä koulumatematiikan kiehtovuutta. Tieteenfilosofia ja -historia antavat virikkeitä monimuotoiseen yksilö- ja ilmiölähtöisen koulumatematiikan ymmärtämiseen. Matematiikan keksiminen uudistaa oppimispolkuajattelua yksilön ainutlaatuisista lähtökohdista. Matematiikan löytäminen viittaa annettuun matematiikkaan.

Uusien opetussuunnitelmien (2014) humanistisen ihmiskäsityksen mukaisen yksilöllisen opinpolun rakentaminen yhdistyy koulumatematiikkaan ja matematiikkaan. Matematiikka on aktiivista havaintojen yhdistelytaitoa ja toiminnallisuutta, systeemien ja säännönmukaisuuksien tunnistamista, maailmaan vaikuttamista, ei pelkästään sopeutumista. Talonpoikaisen oppimisen tavan – havainto, jäsenitys, synteesi – voi yhdistää nykyään kouluissa korostettavaan tutkivaan ja ilmiöpohjaiseen oppimiseen. Tulevaisuuden elinkeinotoiminta tarvitsee rohkeita subjekteja, jotka luottavat itseensä ja luovat itsestään. Kekseliäisyys ja yrittäjäjyys voivat tuottaa uutta osaamista, jonka vaikuttavuuden mittaaminen on laadullista, ei määrällistä.

## 6.3 Miten koulumatematiikka ilmenee tieteen kentässä

### 6.3.1 Matematiikan keksiminen

Matematiikkaa voi keksiä tai löytää, jotka edustavat erilaisia paradigmoja suhteessa (koulu)matematiikkaan. Matemaattinen keksiminen on sitä, mikä matematiikassa tuntuu mukavalta (kiehtovuus, alaluku 2.2). Vallitsevana koulumatematiikkaa koskevana ymmärryksen tapana (paradigmana) on ollut matematiikan löytäminen, jolloin matematiikka oletetaan jo keksityksi. Tällöin oppilaan tehtävä on ollut löytää opetussuunnitelmassa määrätyt tiedeyhteisöjen luomat matematiikan periaatteet, joita oppikirjoissa on yksinkertaistettu. Yläkouluvaiheessa, kun oppilas on usein luovimmillaan, odotus rakentuu tieteellisesti vakiintuneesta esitystavasta, kun oppilas voisi pyrkiä täsmälliseen ajatteluun omista havainnoistaan ja intuitiostaan lähtien. Matematiikan keksimisessä oppilaan pyrkimys on tulla yhä tietoisemmaksi omasta ajattelustaan, jota hän itse ohjaa. Matemaatikot, jotka ovat koulumatematiikan keksineet, ovat toimineet näin.

Matematiikan keksimistä tukeva matematiikkakasvatukseen tukeutuva paradigma (luku 9) saa vaikutteita J. A. Hollon kasvamaan saattamisen kasvatusopin ja kasvatustieteen paradigmanmuutos, mikä tarkoittaa palaamista kasvatusopin lähtökohtiin. Kasvatus tukee yksilöiden erilaisuutta ja rakentaa yhteisöllisyyttä erilaisuuksien vuorovaikutuksena. Tällöin kasvatuksen maailma koskee elämämaailmallista kokemuksellista todellisuutta (Hollo 1927; 1931b). Mate-

matiikan keksiminen peruskoulussa voi tarkoittaa vielä keksimätöntä (algoritmit, koodit, ymmärtämysyhteydet) tai matematiikan soveltamista.

Matematiikan keksiminen käynnistyy yksilöllisestä tai yhteisöllisestä tiedon rakentamisesta, jolloin oppimiskäsitys on konstruktivinen. Tällöin tiedon rakentamisen perustaa ovat yksilön tai yhteisön kokemukselliset merkitysmaailmat. Merkitykset rakentuvat eri konteksteista eri tavoin (vrt. kulttuurin, politiikan ja tieteen kenttä). Konstruktivismi on tiedon olemusta käsittelevä paradigma, joka on levinnyt laajalle ihmis- ja yhteiskuntatieteisiin (Tynjälä 1999, 37). Konstruktivismin erilaiset suuntaukset (yksilö, lokaali, sosiaalinen, radikaali, heikko) korostavat tiedon käyttökelpoisuutta ja dynaamisuutta konstruoinnin kannalta taroituksenmukaisista lähtökohdista. Tieto-, ihmis- ja kasvatuskäsitystä yhdistävä lähestymistapa tukee matematiikan rakentamista keksimisen merkityksessä.

Matematiikan keksiminen korostaa yksilöllistä konstruktiota, jonka oppilas rakentaa vähitellen hahmotustaipumuksistaan ja omaksumistaan ajattelurakenteista lähtien. Tällöin oppilaan valmiuksien ja funktioiden tunnistaminen ja tavoitteiden asettaminen on opiskelun lähtökohtana. Suotuisissa olosuhteissa oppilas voi keksiä ajattelunsa perustaa tai esimerkiksi lukuihin ja laskutoimituksiin liittyviä säännönmukaisuuksia itsenäisesti. Opettajan tuki ja ohjaavat kysymykset ovat usein eduksi, mutta eivät kaikille oppilaille välttämättömiä. Konstruktivinen korostus yksilöllisyyttä ja kontekstia korostavana toteutuu Hollon lanseeraamassa kasvamaan saattamisen kasvatustiliosofiassa.

Konstruktivisen oppimiskäsityksen mukaan oppiminen ei ole passiivista tiedon vastaanottamista, vaan aktiivista kognitiivista toimintaa, jossa oppija tulkitsee havaintojaan ja tietoa aikaisemman tietonsa ja kokemuksensa perusteella (Tynjälä 1999, 38). Tuomas Akvinolaisen (1225-1275) mukaan kaikki tietämys on Aristoteleen luomalta perustalta osa ihmismielen aikaansaamaa dynaamista ja orgaanista kokonaisuutta, jossa elämme (Haapasalo 2000, 48). Konstruktivismin eri suuntauksia yhdistää näkemys, jonka mukaan tieto ei voi olla tietäjästä riippumatonta objektiivista heijastumaa maailmasta, vaan se on aina yksilön tai yhteisöjen itsensä rakentamaa (Tynjälä 1999, 37). Konstruktivismi ei näin hyväksy objektiivista epistemologiaa eli tiedon tai tieteen objektiivisia ehtoja tai mahdollisuuksia, ehdotonta pätevyyttä tai absoluuttista totuus käsitystä. Elämämaailmayhteyksissään keksimisellä on yhteys fenomenologiaan ja pragmatismiin (vrt. Pihlström 2004, 5-14).

On pohdittu, kumpi matematiikassa on tärkeämpää tai olennaisempaa, keksiminen vai todistaminen. Suomela (1986, 22-23) tulkitsee Arkhimedesta, että en-

simmainen ja tärkein seikka on sittenkin itse keksimisen tapa. Viisainta on tehdä keksimisen tapa ymmärrettäväksi ja esittää se suppeimmin ja selkeimmin. Bourbak ja Huygens (1659) muistuttavat, että matematiikassa ei voida vahingoittaa antaa keksimisen ja todistamisen etäännyttä toisistaan. (Suomela 1986, 22-23.) Vaikka toteen näyttäminen on olennaista matematiikassa, keksiminen on kiehtovinta. Matematiikan yhteiskunnallinen merkitys määrittäyty keksimisen eli sen uutta luovan merkityksen ja soveltamisen kautta. Keksimisen kautta matematiikalla voidaan tavoittaa uutta, mikä on sen merkittävin ja ainutlaatuisin piirre.

Kokemukset koulumatematiikasta saattaisivat muuttua myönteisemmiksi, jos oppimisen tuki liitty keksimiseen liittyviin ominaisuuksiin. Tällöin johdonmukaisuus rakentuu matematiikan keksijän ajattelutapumuksista. Koulumatematiikkaan liittyvien negatiivisten asenteiden pohdintaa ja oppimisprosessia yleisesti tukee ongelma, missä vaiheessa ja missä tarkoituksissa matematiikan on oltava ankaraa tiedettä, koska sen luomisen prosessikaan ei matematiikan historiassa ole sitä ollut, vaan sen tieteellinen täsmällisyys on kehittynyt ajan myötä. Ankaruus korostaa totuutta eli oikeaksi osoittamista. Konstruktivismissa huomio on tiedon synnyn ja rakentamisen perustassa. Ajattelun vapaus korostaa mielikuvitusta eli uusien ideoiden keksimistä. Tiedon rakentumiseen perustuu myös tutkimuspolku, jonka auki kirjoittaminen sisäisestä kuvasta on keksimistä.

Matemaatikko Georg Cantor (1883) korostaa matematiikan vapautta: ”Matematiikka on täysin vapaa kehityksessään ja sen käsitteitä rajoittaa vain vaatimus ristiriidattomuudesta ja yhteensopivuudesta aikaisemmin täsmällisin määritelmien käyttöön otettujen käsitteiden kanssa. Matematiikan olemus on sen vapauudessa.” (Suomela 1986, 97.) Cantorin painottama totuuskäsitys on koherentti, jolloin keksityt merkitykset ja käsitteet ovat yhteensopivat lähtökohtaansa ja aikaisempaan osaamiseen, mikä sopii myös fenomenologisen matematiikan totuuskäsitykseksi.

Matemaatikot sekä myös fenomenologit (mm. Husserl 1995) ja pragmatistit (mm. Dewey) ovat olleet ankaria – mikä tahansa ajattelu ei ole matematiikkaa. Onko linjaus vapauden rajoista tieteellistä valtapolitiikkaa vai järkevästi perusteltavissa ihmisen luontaiseen varmuus- ja turvallisuushakuisuuteen vedoten? Molemmat puolustavat totuutta, mutta tutkimuspolun perusteella tieteellinen perusteltavuus on ollut ankaruuden perusteena. Selkeä ajattelu riittää matematiikaksi (tieteeksi), jos se on todeksi näytetty (korrespondenssi), yhteensopivaksi ajatteluketjuksi osoitettu (koherenssi) tai kohteessaan testattu (konsensus). Viimeisin toteutuu esimerkiksi algoritmeja testattaessa tai tutkivassa oppimisessa. Konsensus säilyy, kun keksintö toimii tarkoituksessaan.

Matematiikan totuuskäsitys juurtuu Aristoteleen logiikan korrespondenssiin, missä ongelmana on tiedon kohde ja sen vastaavuus todellisuuteen. Tällöin vaikiutuivat matematiikan pysyvät lainalaisuudet. Totuuteen pyrkivät myös Descartes (epäily, 6.2), Bergson (sisäinen varmuus, 4.3.1) ja Husserl (tietoisuus, 2.4), joiden totuuskäsitykset ilmentävät koherenssia, minkä perusteena on tietämyksen tai väitteiden yhteensopivuus ja johdonmukaisuus. Deweyn (varmuus) pragmatismien totuuskäsityksenä korostuu usein konsensus, minkä perusteena on yhteisymmärrys tai käytännöllinen toimivuus (vrt. Kotkavirta 1994, 86-93.), mikä on myös talonpoikaisjärjenjärjen perusteena (4.2.2).

Ajattelemisen vapaus lisää keksimisen mahdollisuuksia. Ajattelu on valmis jo keksitty polku, mutta ajattelemisen tarkoittaa samaa kuin reflektio (Varto 1996). Ajattelemisen tuloksena syntyy ajattelu. Reflektiivistä ajattelemisen kykyä ei ole ilman tunnetta, koska tunne herättää, aktivoi, suuntaa, vahvistaa ja heikentää ajattelemista, jolloin tietäminen tunteena edeltää kuvallista tai käsitteellistä tietämistä (Kumpula 2006, 70-113). Reflektio vastakkaisten merkitysten välillä vie prosessia eteenpäin. Totuus tai yhteisymmärrys varmistuu prosessissa.

Matematiikan vapauttaminen ajattelemisen vapaudeksi lisää sen vapausasteita. Ajattelemisen on ainut todellinen vapaus ihmiselle. Ajattelemisessani olen vapaa, korosti myös Hegel. Monen matemaatikon (myös poliitikon tai uskonedustajan) vaisto kuitenkin varoi Cantorin esittämää vapauden ihannointia. Vapaus on vaarallista – se voi tarkoittaa muutosta, josta on kannettava vastuu. Vapauden ihanteesta voi syntyä myös hallitsemattomia polkuja tai konflikteja. Kuitenkin myös yhteisyyteen ohjaaminen ja konfliktien hallinta liittyy vuorovaikutuksen säätelyyn, joka tarvitsee ajattelemista (reflektiota) työkalukseen. Kasvatukseen liittyen ehtona on ohjaavien perusteiden täsmentyminen.

J.A. Hollo korosti kasvamaan saattamista, missä yksilöllinen mielikuviutus funktioineen ja oman kokemuksen itsearviointi ovat avainasemassa. Hollon mukaan itsekasvattaja oppii tuntemaan kasvattinsa paljon täydellisemmin kuin kukaan toisen yksilön opastaja (Hollo 1931b,13). Hollo puolustaa kasvatusoppia tuohon aikaan kehittymässä olevaa empiiristä kasvatustiedettä vastaan. Hollon mukaan kasvatukseen sisältyy enemmän kuin pelkkä kasvatettava, jolloin kasvatukseen liittyvät ongelmat ovat osa prosessia (Hollo 1931b, 23). Opiskeluun sisältyvät mahdolliset negatiiviset tunteet ovat tällöin luonnollinen seuraus jostakin vallitsevasta, mistä oppijan on pyrittävä tulemaan tietoiseksi edistääkseen oppimistaan. Hollon kasvatusajattelu vahvistaa yksilöllistä matematiikan keksimistä.

Hollon *Kasvatuksen maailma* (1927) ja *Kasvatuksen teoria* (1931b) vahvistavat yksilöllistä luovuutta elämisaailman ehdoilla.

J. A. Hollon sivistyskasvatusajattelusta väitellyt Matti Taneli tunnistaa myös sivistyskeskustelun ajankohtaisuuden. Taneli (2012, 42) muistuttaa, että Hollon kasvamaan saattamisen arvokasvatuksessa yksilöllisyys ja vapaus on ihmislähtöisyyden perustaa. Hollon henkitieteellinen ja fenomenologis-hermeneuttinen kasvatusnäkemys on vastalause oman aikansa positivistista ja empiiristä (metodinen naturalismi) kasvatusajattelua kohtaan. Sivistyskasvatusajattelu ei tue pelkästään välineellistä ja markkinavetoista kasvatusnäkemystä (emt.), vaan myös itseisarvoista itsekasvatusta.

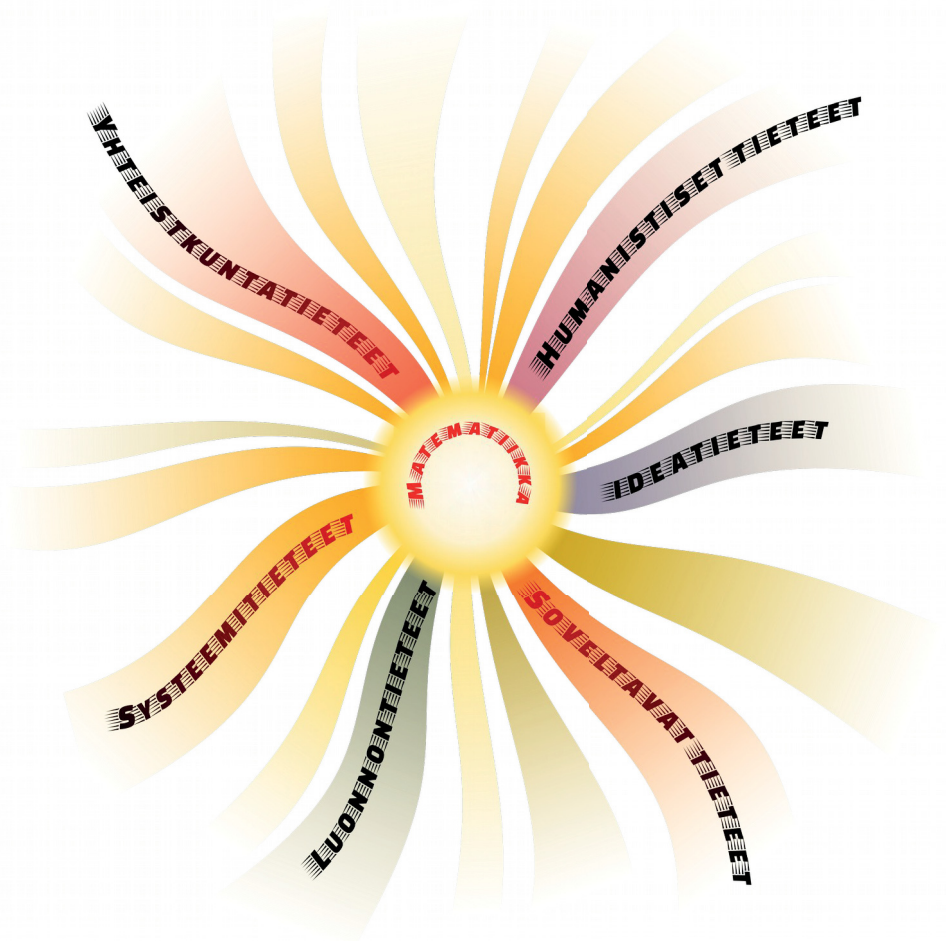
Hollon kasvatusnäkemys tukee matematiikan keksimistä ja konstruktiivista itsekasvatuksen paradigmaa. Matematiikan keksiminen liittyy riittävien vapauksien ilmapiiriin. Yksilön koko kasvuvoima kehittyy elämän kokonaisuudessa, mitä opettaja palvelee (Hollo 1927, 38). Arkilähtöiset, käytännölliset, avoimet, soveltavat tai toiminnalliset kysymyksenasettelut toimivat keksimään yllyttämisessä, jolloin oppilaat voivat osallistua myös tehtävänantoon.

Ipo Halonen (1996, 75-82) puolustaa, että kylmä logiikka ei kahlitse luovuutta. Niin kauan, kun ajattelusysteemi toimii, ei pidä liikaa murehtia luonnollisen kielen ja formaalisen kielen eroja. Niiniluodon (1990, 148) mukaan päättelysääntöjen järjestelmät eivät ole kenenkään ajattelua kahlitsevia käskyjä, vaan ne osoittavat, että tietynlaisista oletuksista saa päätellä tietynlaisia asioita. Kun kaikki se, mikä on välttämätöntä ja ehdotonta on asetettu paikoilleen, on helpompi suunnata luovuuttaan hedelmällisimpiin suuntiin. (emt.) Mikropiirit toimivat edelleen Boolean logiikalla ja tietokone on looginen positivist. (Halonen 1996, 78.) Andre Nye (1990, 170-171) muistuttaa, että minkäänlaista ajatustoimintaa ei ole logiikan ulkopuolella, vaan kaikki ajatustoiminta on jollain tavoin loogista, logiikka täydellisyydessään on mielipuolista, jopa deduktio on tarpeetonta. (emt) Logiikan tai deduktio opettaminen on keinotekoista, joka vie iloa konstruktiiviselta oppimisesta, missä logiikka on keksimisen kohde. Konstruktivismi on oman ajattelun kehittämistä kohti loogisesti järjestynyttä ajattelurakennetta.

Ymmärtämiseen ja oivaltamiseen tähtäävä prosessi perustuu olennaisesti lähtökohtaoletuksiin. Kouluissa lähtökohtaoletuksiin perustuva matematiikan rakenne on piiloutunut hyvin rakennettujen oppikirjojen tehtävänantoihin ja taustafilosofiaan, jonka avaaminen jää opettajan tai oppilaan vastuulle. Oppilaan todelliset kysymykset ja tehtävänanto eivät aina kohtaa. Talonpoikaisjärjen puutteisiin tehtävien ratkaisuisissa usein viitataan, mutta mistä se tulee, ellei sen synteettistä olemusta tunnusteta tieteeseen kuuluvaksi tai yksilöllisyyttä systemaattises-

ti tueta. Matemaattinen keksiminen tarkoittaa ilmiöiden järjestyksen, rakenteen ja säännönmukaisuuden etsintää. Tällöin tutkittava kohde on kuin matematiikka-ilmio (ks. luku 7.1). Keksinnöt ovat kehittyneet ideoista, jotka aikojen kuluessa ovat kehittyneet ja siirtyneet käytäntöihin muodostaen järjestelmiä.

KUVA 1. Matematiikan keksiminen palvelee kaikkia tieteitä (Kumpula 2019).



Matematiikan formaaliseen yksikäsitteisyyden odotukseen kätkeytyy sen tulkinnallinen merkitys. Matematiikka on tällöin ajattelurakenne, joka on kuin polku. Lähtökohtaoletukset ja havainnot määrittävät päättelyn tulokset niin tietees- sä kuin käytännön elämässäkin. Erilaisista oletuksista ja havainnoista syntyy eri- laisia päätelmiä ja tuloksia. Eukleideen lähtökohdista (oletus, vaatimus, ratkaisu ja tarkastelu) omin sanoin päättely pätee tieteen ja arjen ongelmanratkaisun pe- rustaksi edelleen. Matemaattinen polku on jatkumo lähtöasetelmasta päätelmiin.

Universaalisti ympärillämme oleva matematiikka on kuin meduusa: muuttaa muotoaan, häipyä välillä näkyvästä; on läpikuultava, alkukantainen, emergoituva, varioitua, monidimensionaalinen, evoluutiojärjestelmän mystinen selkärän- ka – deus illuminatio mea. Matematiikan konstruktivistista käyttövoimaa kuvaa matematiikka aurinkona, jossa matematiikka on kuin kompassi jäsentyen eri tie- teiksi. Tällöin vallitseva keinotekoisesti systematisoitu luonnontieteellinen me- todi saa rinnalleen luonnollisista ajattelemisen lähtökohdista rakentuvan ajatte- lemisen polun, joka kiinnittyy todellisiin koettuihin lähtökohtiinsa (oppimispol- ku, tutkimuspolku). Matematiikan yksilöllisyyttä korostava keksiminen tiivistyy määritelmässäni: ”Matematiikka on kuin lankakerä, joka purkautuu omatahtises- ti, kun langan pää löytyy (Kumpula 2006, 6).” Matematiikan itsesäätelyä koros- taen: ”Matematiikka on itsesäätävää, ideoiden analyysissä ja synteessissä konst- ruoituvaa järjestystä (Kumpula, 2008).” Matematiikan määritelmäni eivät välttä- mättä kata kaikkia tieteellisen matematiikan mahdollisuuksia, mutta peruskou- luun sovellettuna ne korostavat yksilön roolia oppimisprosessissa ja oppimispro- sessin alkuehtoja.

Koulumatematiikan määritelmäni korostavat keksimisen yksilöllistä mentaalista alkuperää, vapautta ja monimuotoisia ilmiä sekä konteksti- ja käytäntö- lähtöisyyttä. Ideat voivat olla metakognitiivisia käsityksiä, mielteitä, kuvia, sääntöjä, määritelmiä, lauseita, sopimuksia, intuitiivisia oivalluksia, eufoorisia kokemuksia, mentaalisia tuntemuksia, tradition sisäistyksiä, geneettisiä koodeja, epigeneettisiä sääntöjä, opittuja yhteyksiä, järjen merkityksiä (apriori), muisti- kuvia, kokemuksen jälkiä (aposteriori), algoritmisia koodeja tai logoksia, jotka luovat mielekkäitä yhteyksiä ongelmanratkaisuun. Totuuden tavoittelussa mate- maattinen keksimisen metodi voi olla ambivalenttinen. Metodi voi tuottaa myös ristiriitoja vaihtoehtoisina mahdollisuuksina, kuten tutkimuspolun elämismaail- mallisessa yhteydessä (keksiminen ja löytäminen).

Matematiikan keksiminen korostaa subjektin osuutta keksimisprosessissa. Täl- löin subjekti tai yhteisö toimii merkityksenantajana ja prosessin ohjaajana. Tut- kimuspolulla matematiikan keksiminen korostaa konstruktoiden kautta rakentu-

vaa yhtenäistyvää tieteiden ymmärryksen tapaa, jolloin pohjimmiltaan matemaattinen metodi toimii eri tieteissä horisontaalisesti tai vertikaalisesti. Matematiikan keksiminen sisältää inhimillisen metafyyssisen kokemuksen, jota matematiikan löytäminen ei vakiintuneen metodisen naturalismin tai ideaominaisuutensa mukaan sisällä.

### 6.3.2 Matematiikan löytäminen

Matematiikan keksiminen täydentyy kohti tulevaisuutta ja matematiikan löytämisen perustelu on historiallista. Matematiikan löytäminen korostaa formaalisia ja todistettuja käytäntöjä, jotka opiskelija uudestaan löytää. Löytämisen prosessi näin tulkitsee ihmisen strategisen ajattelun pohjimmiltaan samanlaisena, mikä saattaa tylsistyttääkin opiskelijan yksilöllisiä ajattelutaipumuksia. Koulumatematiikka on ollut keskeisiltä osiltaan matematiikan historiaa. Matematiikan opiskelun tulevaisuus hyötyy enemmän matematiikan keksimisen näkökulmasta, jonka perustana on yksilön koko potentiaalinen hyödyntäminen.

Matematiikan löytäminen perustuu annettuun oppisisältöön, joka on oppikirjoissa tai digimateriaaleissa. Sisältöajattelu perustuu siihen, että on olemassa matematiikan perustiedot, jotka on osattava ennen soveltamista. Käytännön elämässä usein kuitenkin lähtökohdat ja oletukset ovat erilaisia, jolloin ensimmäisenä tehtävänä on selvittää oletukset. Myös moderneissa työympäristöissä ja työryhmissä lähtökohdat määritellään yhdessä tai määrätään ulkopuolelta, mitkä rajaavat työtä tai oppimista. Ulkopuolinen määräys eli jälkimmäinen vaihtoehto on tutkimusten mukaan tehottomampi tuotosten, löydösten ja työhyvinvoinnin kannalta (mm. Vähämäki 2010; Pennanen & Mikkola 2013; Ikonen 2015). Koululuokkaa voi pitää yhteistoiminnallisena ryhmänä, jossa kaikilla on työrooli, kuten työyhteisössä tai maatalousyhteisössä. Vuorovaikutuksen sääntöjä voi kehittää yhteistoiminnallisesti (mm. Lindgren 1990; 2003), mikä soveltuu sekä matematiikan keksimisen että löytämisen lähestymistapaan.

Matematiikkaa soveltavissa käytännön tilanteissa tai tutkimuksessa lähtötiedot asettaa subjekti, jolloin erilaisista lähtötiedoista yleensä syntyy loogisesti seuraavia lähtötietoihin perustuvia erilaisia tuloksia. Tämä puoli matematiikkaa jää usein piiloon, koska usein koulumatematiikan tehtävät ovat jo valmiiksi raken-

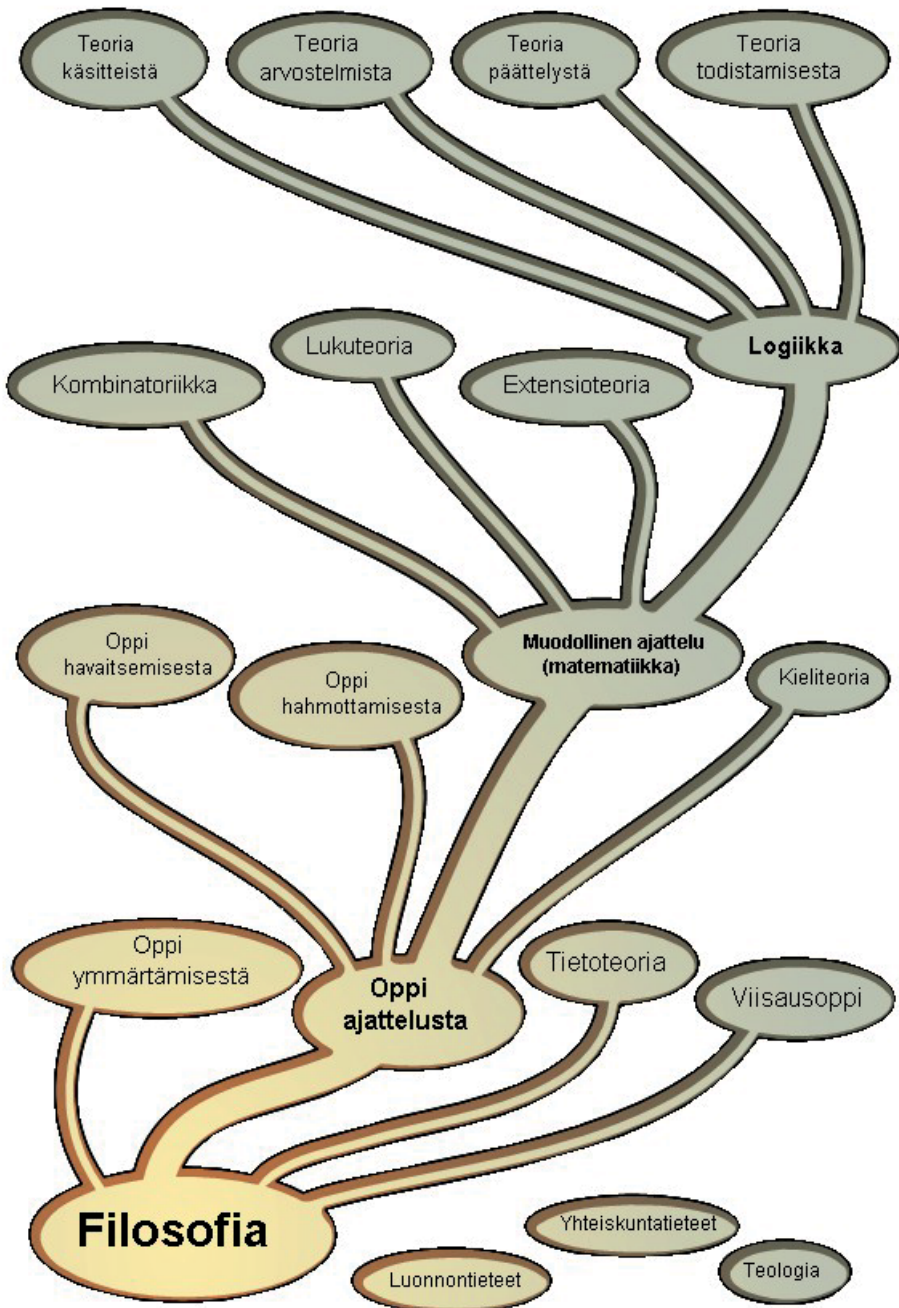
nettuja (strukturoiduja). Valmiiksi strukturoitu tehtävänanto heikentää keksimisen mahdollisuuksia ja lisää tunnetta, että matematiikka on jo keksitty. Käytännön tilanteissa keksimismahdollisuuksiin voi törmätä. Myöskään tieteellisellä matematiikalla ei ole vain yhtä filosofiaa, vaan tutkimushaarat eroavat toisistaan (mm. Palomäki 2001).

Tieteet voidaan luokitella eri perustein. Robert Grassmannin (1872) tieteiden luokituksen mukaan matematiikka on filosofian osa-alue. Useat mallit erottavat matematiikan ja filosofian käsitteellisinä ideatieteinä muista tieteistä (mm. Nurmi 1995, 17). Grassmannin (kuva 2) mallista hahmottamani polkumalli tiedon rakentumisena antaa viitettä siitä, miten monta polunhaaraa on tunnistettava ajatusrakenteessaan ennen matematiikan tunnistamista. Matematiikan löytämistä voi havainnollistaa tieteiden luokitusten perustalta, missä matematiikka on osa tieteiden kokonaisuutta.

Erilaisissa tieteiden luokituksissa korostuu, että matematiikka erottuu formaaliseksi ja käsitteelliseksi alueeksi, johon inhimillinen ymmärtämistä, havaitsemista, hahmottamista ja luonnollista kieltä koskeva tiedon muodostus jää taka-alalle. Oppilaan käsitys matematiikasta voi jäädä oppikirjavaikutelman varaan, jolloin sen laajempi yhteys hahmottamiseen ja oppimiseen voi jäädä tunnistamatta. Tällöin kuva koulumatematiikasta voi muodostua keinotekoiseksi tempujen opetteluksi. Vaikka koulumatematiikan didaktiikan tai pedagogiikan alueella ihminen on mukana prosessissa, käsitteen muodostusta kuvaavat mallit pyrkivät yleistämään inhimillistä kognitiivista toimintaa. Yleisistä malleista ei ole paljontaan hyötyä yksilöllistämään pyrkivässä luovuutta ja tiedostamista edistävän opiskelun tukemisessa.

Matematiikan löytäminen korostaa matematiikan objektiivista luonnetta ja rakennetta, sitä että pohjimmiltaan löydetään samat asiat, jotka joku on jo keksinyt subjektia aikaisemmin. Valmis odotus hallitsee, ei uuden rakenteen keksiminen. Perinteinen matematiikan opetus on tukeutunut matematiikan objektiiviseen luonteeseen, ei intersubjektiivisuuteen, johon tutkimuspolun matematiikan keksiminen ja matematiikkakasvatus perustuvat. Todellisuudessa hämmästyttävän usein on totta, että samoista lähtötiedoista löydetään yhtenäisillä ehdoilla samat asiat, mikä osoittaa, että loogisuuden ehdot ovat yleisinhimillisiä

KUVA 2. Matematiikan kehitys filosofiasta mukaeltuna Grassmannin teoriasta.



Logiikka on pyritty ymmärtämään totuusarvoltaan yksikäsitteisenä. Tällöin tosi on vain toinen, matematiikka on keksimistä tai matematiikka on löytämistä. Intuition totuusarvo ymmärretään kaksiarvoisena, jolloin intuition mukaan molemmat voivat olla totta, yhdessä tai erikseen. Dialogi mahdollistaa molempien mahdollisen totuusarvon.

Logiikan ja tietoteorian suuri suomalainen, Stanfordin, Floridan ja Bostonin yliopistojen professorina toiminut Jaakko Hintikka (1929-2015) esittää interrogatiivisen päättelymallin, joka tuo nykymatematiikan tarpeisiin, algoritmiseen ajatteluun, koodaukseen, ohjelmointiin, arkimatematiikkaan ja koulumatematiikkaan yleisesti tarpeellisia vapausasteita ja määritelmällistä lisäarvoa. Jaakko Hintikan interrogatiivinen (deduktio ja dialogi) ajattelu voi tukea molempia, matematiikan keksimistä ja löytämistä.

Hintikan interrogatiivinen ajattelu tukee reflektion ja dialogin kehittämistä oppimisyhteisöissä. Interrogatiivinen tieteenfilosofia on matemaattiseen logiikkaan liittyvä abduktio eli Niiniluodon (2014) mukaan kyselevä siirto totuuden strategisessa tavoittelussa. Jaakko Hintikan mukaan Aristoteleen tarkkuuteen pyrkivä dialoginen päättely sisältää kyselyprosessin, joka voidaan laajentaa koskemaan kaikenlaista, sekä tietoaamme laajentavaa että sitä selventävää päättelyä. Loogiset päätelmät muodostavat tällöin tutkimuksen päättelyaskelten yhden alaluokan, muiden askelten ollessa interrogatiivisia eli kysymys – vastaus askelia. Aristoteleen alkuperäisenä tavoitteena ei ollut loogisten päätelmien eli johtopäätösten erottaminen muunlaisista kysymyksiin tarjotuista vastauksista. (Hintikka 2001, 120.) Kysymys – vastausprosessit voidaan käsitteellistää interrogatiivisina tutkimuksina (Hintikka, Halonen & Mutanen 1999).

Interrogatiivinen lähestymistapa päättelyyn sisältää sekä määritelmälliset että strategiset säännöt. Esimerkiksi shakkipelissä määritelmälliset säännöt ilmaisevat, miten eri nappulat liikkuvat (löytäminen) ja strategiset säännöt ilmaisevat, miten nappuloita tulisi liikutella eri tilanteissa (keksiminen). (Hintikka 2001, 114.) Hintikka korjaa väärintulkintoja Aristoteleen logiikasta ja avaa päättelylle myös luovia ja keksiviä mahdollisuuksia. Hintikan Aristoteleen logiikalle avaa polku on ajankohtainen.

Hintikan (2001, 148-178) korostama interrogatiivinen ajattelu sisältää itseltään kyselemisen ja reflektion. Keskeisenä Aristoteleen logiikkaan kuuluvana laajenuksena reflektio sopii tukemaan sekä matematiikan keksimistä että löytämistä. Perinteinen näkemys on samaistanut päättelyn ja logiikan. Ongelmanratkaisussa on käytössä sekä strategisia että määritelmällisiä sääntöjä, joista jälkimmäiset kuuluvat perinteisen logiikan piiriin. (emt). Määrittelevät säännöt on osattava

ennen strategisten mahdollisuuksien käyttöä. (Hintikka 2001, 148, 151.) Hintikan mukaan strategiset säännöt on laiminlyöty deduktiivisessa logiikassa. Strategiset taidot on ohitettu myös matematiikan oppikirjoissa. On ajateltu, että ensin on osattava perustaidot, jonka jälkeen vasta voi keksiä ja soveltaa, mitä Hintikkakin tarkoittaa. Pienilläkin perustaidoilla voi opetella tunnistamaan omaa strategista ajatteluaan. Oppimisstrateginen tietoisuus on keskeinen osa yksilön kognitiivista kehitystä (alaluku 7.3).

Looginen empirismi toi koulumatematiikkaankin käännettävyysteesinä. Verifioitavuusprinsiippinä ja mielekkyyskriteereinä tunnettujen vaatimusten mukaan teoria on tieteellinen (ei sisällä metafysiikkaa), jos sen teoreettinen (ei-havaittava) sisältö on käännettävissä empiiriselle kielelle. (vrt. Määttänen 1995, 181.) Myöhemmin käännettävyysteesistä luovuttiin, mutta tilalle jäi verifioitavuusprinsiippi sekä synteettisten lauseiden ja ajattelurakenteiden kumoaminen. Taavoitteena oli, ettei mukaan tule dispositiotermejä tai uskomus-, tunne- tai arvo-tietoa, joita ei voi sovittaa analyttiseksi rakenteeksi. Näkemys matematiikan rajoista jäi vaikuttamaan vahvasti, mikä ilmenee myös opetussuunnitelma-analyyseissa (luku 5).

Matematiikan löytämisen ajattelutavassa korostuvat ajattelun formaaliset taidot ja matemaattinen käsitteenmuodostus, mihin opettamisen fokus didaktiikassa on kohdistunut. Viime vuosisadan loppuun vakiintuneen tavan mukaan on käytetty konseptuaalisen (käsitteen muodostus) ja proseduraalisen (päämäärä, sisältö, menetelmä) tiedon käsitteitä (Haapasalo 2000, 115-118). Tällöin näkökulma on matematiikkatieteenalalähtöinen ja matematiikka löydetään. Tällöin itse käsitteen muodostaja on ulkoistettu kontekstistaan ja yksilöllisyydestään.

Eino Kailan (1977) käyttämät arkitiedon perseptuaalinen (havainto) ja konseptuaalinen (merkitys) aines liittyvät yksilön kokemuksen kokonaisuuden hahmotustaipumukseen. Strategisen ajattelun taidot perustuvat yksilön kokemukseen perseptuaalisesta ja konseptuaalisesta ymmärryksestään, missä ihmisen kokemusmaailma (matematiikan keksiminen) on oppimisen perustana. Matematiikan keksimisen näkökulma on ihmislähtöinen, missä yksilölliset hahmotuslait ovat toiminnassa ilmenevän mielekkyyden perustana. Tällöin matematiikan keksimisen lähtökohtaa luonnehtii yksilökokemuksen perseptuaalinen ja konseptuaalinen aines.

Peruskoulun opetussuunnitelma on korostanut formaalisia ajattelun taitoja ja matematiikan käsitteellistä perustaa koko 50-vuotisen historiansa ajan ja myös edelleen. Tällöin myös määrätyt opetussisällöt on ymmärretty koulumatematiikka-

kan oppimisen perustaksi, jolloin matematiikka löydetään. Ongelmaksi käsitteellisessä korostuksessa muodostuu kokemuksellisuuden metafysiikan määrittelemättömyys käsitteenmuodostuksessa. Tutkimuspolku on käsitellyt tiedonmuodostuksen kontekstin, kulttuurin, politiikan ja tieteen sfäärien riitasointuja, joilla on keskeinen merkitys yksilöllisen tiedon mentaalisisä muodostuksessa.

Kansakoulun oppimiskäsitys on ihmislähtöinen, jolloin sisällöt käytännössä määräytyivät enemmän kontekstin ja kapasiteetin perustalta. Kantin lanseeraama yksilölliseen konstruktion perustuva todellisuuden konstruointi korostaa kokemusta ennen käsitteitä ja dialogia kohti tiedostuksen korkeampia tasoja. Kantin tietoteoria tukee enemmän matematiikan keksimisen ja talonpoikaisjärjen lähtökohtia. Keksimisen kasvatusfilosofian ja löytämisen opetusfilosofian erottaminen ja variointi tuo erilaisiin uudistuneisiin oppimisympäristöihin yksilöllisiä mahdollisuuksia.

Matematiikan löytämisen paradigma palvelee edelleen tieteellistä matematiikkaa korkeakouluissa. Yleissivistävän koulumatematiikan laajentuminen toiselle asteelle ja laajentaminen elämänläheistämisen merkityksessä siirtävät haasteen myös korkeakouluille tulevaisuudessa, jos matematiikan oppimisen paradigmaa päätetään tarkistaa vahvistamalla horisontaalisten vaihtoehtojen mahdollisuuksia.

## 7 TUTKIMUSONGELMAN RATKAISUJEN YHTEENVETO

### 7.1 Miten koulumatematiikka ilmenee tutkimuspolulla matematiikkailmiönä

Tutkimuspolun *matematiikkailmiö* on havaitsijan kokema merkitys kulttuurin, politiikan ja tieteen kenttää yhdistävissä sfääreissä, elämismaailmassa. Matematiikkailmiö on havainto koulumatematiikasta, missä kokemus ilmentää suhdetta matematiikkaan. Tällöin koulumatematiikkaan havaintoperäisesti liitettävän tiedon alkuperä on ensisijaisesti kokemus ja toissijaisesti rationaalinen (ks. luku 6.1). Tällöin kokemus suuntaa järkeä (esim. talonpoikaisjärki) tilanteessa. Kokemuksellisuus ilmenee yksilöllisenä suuntautumisena: tiedonintresseinä (2.3), intuitiona (4.3.1, 4.3.2), funktiona (5.3.1) tai matematiikan keksimisenä (6.3.1).

Kokemus koulumatematiikasta rakentuu mentaalisen mieltämisen perustalta. Matematiikka ei ilmene objektina, ellei ole subjektia, jolle objekti ilmenee. Matematiikkailmiön voi kokea intersubjektiivisesti, jolloin toiset (opettaja, oppilaat, vanhemmat) voivat ymmärtää kokemusta. Kokemus koulumatematiikasta rakentuu yksilön kokemista merkityksistä. Matematiikkailmiön tunnistaminen yksilön kokemuksena alkaa havainnon reflektiosta, mikä ilmenee merkityksinä, tunteina ja kysymyksinä. Tutkimuspolun fenomenologian mukaan kaikki yksilölliset havainnot kelpaavat oppimispolun (tutkimuspolun) lähtökohdiksi.

*Husserl erottaa toisistaan luonnollisen asenteen ja fenomenologisen asenteen, joita voi havainnollistaa tutulla kansanperinteen koulutehtävällä. Leipä painaa kilon ja puolet leivästä. Paljonko tämä leipä siis painaa? (Karilas 1984, 458). Puolitoista kiloa, on vastaus usein välittömästi – luonnollisella asenteella. Tarkentaen fenomenologisella asenteella sulkeistat edellisen ja palaat taaksepäin: ”Jos otat puoli leipää, jäljelle jää leivän toinen puoli, joka on massaltaan kilon. Kokonaisen leivän massa on näin kaksi puolikasta eli kaksi kiloa.” Klassinen ongelma on monelle oppilaalle tuttu koulumatematiikan harjoituksista tai koulukokeista, missä ratkaisuprosessin käynnistävän oman kysymisen suuntaami-*

*nen voi tuottaa vaikeuksia. Yksilöiden erilaiset hahmotustaipumukset tuovat ongelmaan ilmiömäisyyttä eli monimuotoisuutta. Ratkaisu jäsentyy piirtämällä itselleen kuvan leivästä, muodostamalla yhtälöitä tai esittämällä tarkentavia kysymyksiä. Päätelyketju voi rakentua eri tavoin yksilöllisistä taipumuksista lähtien, jolloin tehtävänantoa voi kutsua matematiikkailmiöksi. Mihin sisältöihin liitän tehtävän tai miten jäsennän tehtävänantoa? Spontaani havainto saattaa useinkin olla väärässä. Käytäntöjen kehittämiseen tarvitaan fenomenologista asennetta, joka tarkentaa ensivaikutelmaa yksilöllisistä lähtökohdista.*

Koulumatematiikka ilmenee kokemuksellisuutena, jonka sisältönä ovat merkitykset. Tällöin kokemus on merkityssuhde havainnon kohteena olevaan sisältöön. *Ilmiö* on käsitteeseen matematiikka sopiva lisämääre, koska matematiikka koskettaa kaikkia ihmisiä, kuitenkin kokemuksellisesti eri näkökulmista, erilaisin intressein, tuntein ja merkitysfunktioin. Matematiikka ilmenee eri tavoin näkökulmasta riippuen. Matematiikka on ympärillämme usein näkymätön, eikä sitä useinkaan koulussa katsella, vaan sitä harjoitellaan ja suoritetaan. Matematiikka ilmenee ihmisten mentaalisisä mielessä ja arjen toiminnan tilanteissa vähintäänkin taustavaikuttajana. Koulumatematiikka on näin kokemuksellinen ilmiö, tietoisesti tai tiedostamatta.

Elämismaailmassa matematiikkailmiöt ovat osa arkipäivää, vaikka niitä ei aina tiedosteta. Arjen tilanteissa voi pysähtyä tarkentamaan aistejaan ja käyttää matematiikkaa tai sen ideaa. Matematiikkailmiöitä ei ole ollut tapana aktiivisesti tunnistella, kuten luonnon- tai elämänilmiöitä, vaikka matematiikkaa tarvitaan, kun ympäröivää todellisuutta tunnustellaan. Ilmiö viittaa tutkimuspolun teoreettisen viitekehyksen (luvut 1, 2 ja 3) mukaan fenomenologiseen asenteseen, jolle on ominaista kontekstilähtöisyys ja filosofinen eli kyselevä asenne. Matematiikkailmiö käsitteenä laajentaa suhdetta koulumatematiikkaan. Matematiikkailmiö tuo näin uutta *väriä* muodollisena, muuttumattomana ja monologisena tunnettuun kouluaineeseen. Matematiikkailmiö on kuin valon kulku prisman läpi, missä valkoinen valo taittuessaan hajaantuu väreiksi. Matematiikkaa ympäröivät elämän todellisuudet hehkuvat eri väreissä.

*Päätän valmistaa pikalounaan, johon käytän keräämiäni suppilovahveroita. Mitä ruokaa valmistaisin? Valmistanko suppilovahveromunakasta, -muhennosta, -kastiketta, -keittoa, -pataa vai -pannukakkua. Kaikkiin löytyy aineksia kaapistani. Optimoin ruuan valmistusta käyttämällä raaka-aineita, joiden parasta ennen päiväys on lähinnä. Mikä suppilovahveroruoka sopii parhaiten jääkaa-*

*pistani löytyvän tomaattirisoton seuraksi? Mikä ruoka on nopein valmistaa? Varioin vaihtoehtoja ja valitsen valmistusajan, raaka-aineiden ja mieltymysteni suhteen optimaalisimman vaihtoehdon. Pyörittelen tuoreita suppiloita ja varsia kuumalla pannulla, kunnes neste on irronnut. Lisään voin, sipulin ja yrttisuolan. Kun sipulit ovat pehmenneet, lisään kananmunat ja lopuksi persiljan. Tomaattirisoton seuraksi valikoituu paistetut kananmunat suppilovahverohöysteineen. Miten optimoin? Missä järjestyksessä, suhteessa ja aikataulussa lisään eri raaka-aineet? Miten suuren annoksen valmistan? Käytän yhtälön ideaa, jäseniän, järjestän ja suhteutan. Sovellan siis matematiikkaa.*

Koulumatematiikan kokemuksellisuutta ilmentävät tiedonintressit (alaluku 2.4), minkä perustalta ihmiset kiinnostuvat koulumatematiikan eri tavoin elämismaailmaansa. Matematiikkaa voi soveltaa mihin tahansa ja matematiikkaa ilmenee kaikkialla. Matematiikka ei ole vain väline ympäristön haltuunottoon, vaan sillä on arvoa itsessään monimuotoisesti kokemuksessamme. Joillekin kiehtovaa on matematiikan teoreettinen päättelyrakenne, minkä mukaan intressi on *veristinen*. Matematiikan maailmankuvan muodostamista tukeva systeeminen rakenne ja toimintaa tukeva järjestelmä vahvistaa *metafyysistä* intressiä. *Persoonallinen* intressi tukee yksilöllistymiseen liittyviä tiedostus-, elämys- ja ymmärtämisyhteyksiä. Intressit ovat tällöin kokemuksellisesti sisäisiä eli itseisarvoisia, jolloin matematiikan idea kiinnittyy itsenäen elämismaailmaan.

Matematiikkaan usein liitettäviä välineellisiä ulkoisia perusteita tukevat *tekni-*  
*nen, praktinen ja emansipatorinen* intressi, jotka suuntautuvat yhteiskuntaan vaikuttamiseen. On mahdollista, että mikään näistä tiedonintresseistä ei ole kohdannut oppilasta suhteessa koulumatematiikkaan. Matematiikan tieteellisissä sovellutuksissa ja yhteiskuntarakenteen muutoksissa välineellinen tiedonintressi on vahvistunut ja yksilöllinen itseisarvoinen eli kokemukseen perustuva tiedonintressi on väistynyt (luvut 4.3.1, 5.3.1, 6.3.1). Yhteiskuntaan vaikuttamisen välineellinen intressi tai tiedostamisen itseisarvoinen intressi ovat saattaneet jäädä kouluissa tunnistamatta kulttuuristen, poliittisten ja tieteellisten muutosten seurauksena. Sivistyskäsitys (4.2.2), oppimiskäsitys (5.2.2) ja matematiikkakäsitys (6.3) ilmentävät aikakauden arvomaailmaa, mikä on jatkuvassa muutostilassa. Yksilölliset tiedonintressit eivät välttämättä ole olleet työskentelyn perusteenä koulumatematiikan harjoittelussa oppitunneilla. Osaamisen kontrolli yksilöllisellä oppimispolulla on oppilaan vastuulla, mitä opettaja voi tukea. Merkityskokemukset laajentavat koulumatematiikan mahdollisuuksia elämismaailmassa.

Dialoginen kasvatuskeskustelu opettajayhteisössä ja koululuokassa voi auttaa tunnistamaan matematiikan merkitysrakenteita erilaisista elämismaailmoista lähtien. Tunnistamisen ja keskustelun lähtökohdana on matematiikkailmiö, joka ei välttämättä ole tarkkarajaisesti määriteltävissä. Ilmiön tai ongelman tunnistaminen ja jäsentäminen aloittaa keskustelun. Opettajan näkökulmasta korostuvat tieteellisyys ja opetustavoitteiden objektiivisuus. Oppilaan näkökulmasta painottuvat kulttuuriperustan merkitykset ja mahdolliset omat intentiot. Dialogi merkitysmailmojen välillä lisää koulumatematiikan ja toistensa ymmärtämistä. Jaka-mattomat merkitykset voivat kaventaa käsityksiä erilaisuudesta luoden konfor-misia ja hierarkisia odotuksia. Koulumatematiikan kehitys hierarkian suuntaan on mahdollistanut vallankäytön, joka ei edistä erilaisten oppilaspotentiaalien tunnistamista. Keskustelulla tavoiteltava vuorovaikutteisuus laajentaa kouluma-tematiikan ilmiökenttää, missä kulttuurin, politiikan ja tieteen sfäärit risteilevät.

Elämismaailmallista koulumatematiikkaa jäsentävä reflektiivinen ja dialoginen tutkimuspolkumalli perustuu humanistiseen ihmiskäsitykseen, minkä mukaan ihminen on ainutlaatuinen. Ihmisen ainutlaatuisuus ilmenee suuntautuneisuute-na, missä koulumatematiikkailmiö on yksilön mentaalinen vaikutelma kouluma-tematiikasta. Oppilaan ainutlaatuisuuteen perustuvat opetussuunnitelman (2014) laaja-alaiset taito- ja oppimistavoitteet. Mentaalinen merkitys juurtuu kulttuuriin ja tulkitsee oppimistavoitteet kulttuurin lähtökohdista, missä opetustavoitteiden tieteellisyys voi vaikuttaa jopa keinotekoiselta tai elämälle vieraalta. Kouluma-tematiikan elämismaailmallisuus tarkoittaa myös tunnekokemusten tunnistamis-ta ja oppimispolun lähtökohdaksi valitsemista. Jos matematiikka ei tunnu mil-tään, se ei kiehdo, eikä sille keksi käyttöäkään, se saattaa jäädä harjoittelematta. Oppimisen orientaatio- ja motivaatioperustana intressit ja niihin liittyvät tunteet ovat ensisijaisia. Erilaisten tunteiden käsittely kuuluu dialogiin, jolloin petty-mykset voivat kääntyä myös voimavaraksi.

*Koululuokassa oppilas voi kokea, että koulumatematiikka ei tarkoita mitään tai siitä ei ole hyötyä. Tällöin opiskelijan intentio on kieltävä tai torjuva, jonka juuret ovat usein menneisyydessä. Merkitys ei ole välittynyt opetuksessa tai omassa kokemuksessa. Jos oppilaan kokemuksen positiiviseen vahvistamiseen ei pyritä, vaan opiskellaan vain sisältöjä, yksilöllinen intressi saattaa jäädä he-räämättä ja intentio tunnistamatta. Tällöin matematiikkailmiö tuo vapausasteita kasvatuskeskustelulle.*

Ellei tunnusteta havainnon perustana olevaa intentiota, oppilaan matematiikalla ei ole tarkoitusta, käyttöä tai merkitystä. Oppilas on omassa elämismaailmassaan intentionaalisuutensa varassa. Miten intentio ilmenee oppilaan matematiikkasuhteessa, on kokemuksellinen kysymys. Husserlin fenomenologian keskeinen oletus on eletyn maailman merkitys ihmisen tietoisuudessa kohti intentionaalisia akteja. Husserlin lähtökohdista matematiikka kehittyy yksilöllisten kokemusten merkityskerrostumista, mistä fenomenologisen asenteen tarkoitus on tunnistaa merkityksiä ja tiedostaa niitä. Tällöin havaitulla ja ymmärretyllä on kokemuksellinen mieli.

Koulumatematiikan historiallisen kehityksen (alaluku 6.2.3) perustalta koulumatematiikan suhde ihmisten kokemukselliseen maailmaan on katkeamassa tai katkennut. Tällöin koulumatematiikka on kehittynyt käsitteelliseksi tieteeksi, jossa havainnon kohteina ovat matemaattiset käsitteet ja niiden väliset suhteet, ei todellisuudessa tunnistettavat mentaaliset merkitykset. Merkityksen synty edellyttää havaintoa, perseptiota. Perseptio on näin perustavampi kuin konseptio (merkitys, käsite) (alaluku 3.3.2). Kehittynyt käsiterealismia korostava näkökulma painottaa oppiainelähtöisyyttä, ei yksilön merkitysten maailmaa, tietoa ennen käsitteitä eli kokemusta matematiikkailmiöstä. Yksilön todellinen havainto saattaa jäädä huomioimatta oppimisprosessin lähtökohtana. Fenomenologinen näkökulma oppivelvollisuuskoulun kehityssuuntana painottaa havainnon merkitystä.

Tietoteoreettinen realismi, jonka mukaan matemaattiset käsitteet ja todellisuus ovat olemassa ihmisestä riippumatta, on tiedejärjestelmän luuranko. Tutkimuspolku tuo lihaa luitten ympärille tutkimalla kerroksia, jotka luuta ympäröivät. Kerrokset ovat kulttuurin-, politiikan- ja tieteenkenttä, jotka vaikuttavat merkityksillään siihen, millaiseksi koulumatematiikka muotoutuu kokemuksessa. Kentän sfääreistä kehittyy jäsennyksiä, joiden kautta matematiikka hahmottuu merkityksiksi ja vastakkaispareiksi, kokonaisuutena monimuotoiseksi matematiikkailmiöksi. Koulumatematiikka ilmenee tutkimuspolulla matematiikkailmiönä, mikä edustaa matematiikasta kumpuavia ja matematiikkaa luovia ihmislähtöisiä horisontteja.

Fenomenologinen koulumatematiikan tarkastelu tukee Hegelin, Husserlin, Heideggerin ja Habermasin sekä heidän seuraajiensa filosofista perinnettä, mikä erottautuu filosofiassa vaikuttavasta teoreettisesta metodologisen naturalismin suuntauksesta (6.1). Hegelin hengen fenomenologiasta 1800-luvulla kehittynyt ja 1900-luvun alussa vahvistunut tietoisuutta (Husserl), kokemisen mieltä (Hei-

degger) ja yhteiskunnallisia tiedonintressejä (Habermas) painottava perinne ilmenee 2000-luvun koulumatematiikassa yksilöllisten oppimispolkujen painotuksena. Vaikka fenomenologian menetelmästä, käsitteistä tai varsinaisesta tutkimuskohteesta ei ole selkeää yksimielisyyttä, fenomenologia ilmentää moninaisuudellaan yksilöllisyyttä kokemuksellisuutena. Tutkimuspolulla fenomenologia viittaa ihmisen holistiseen mentaaliseen todellisuuden hahmotustapaan, mikä ilmentää yksilöllistä suuntautuneisuutta ja luovaa ongelmanratkaisutaipumusta. Yksilöllisen ja yhteisöllisen henkisen kasvun tukeminen ja tunnustaminen mahdollistuu fenomenologisessa viitekehyksessä.

Matematiikkailmiön ilmiäsuja ja periaatteita ei voi tiivistää systemaattiseksi yleisesitykseksi, koska kontekstin ja yksilöllisyyden mahdollisuuksia ei voi täysin ennakoita. Tilanteet tuovat mahdollisuuksia testata ja tutkia matematiikkailmiötä. Teknologiset elämänympäristöt mahdollistavat oppimisen kytkemisen aitoihin ympäristöihin, missä oppilas johdattaa polkuaan itse eteenpäin kohti merkityksellistä oppimista, jatko-opintoja ja tulevia työtehtäviä yhteiskunnassa. Valmiuksien vahvistaminen alkaa kodeista ja varhaiskasvatuksesta kohti yläkoulua.

*Nyky-yhteiskunnan virikeympäristössä lapset saavat vaikutteita ja kysymyksilleen perustaa huomattavasti laajemmin kuin omassa lapsuudessaani, missä vanhempien aika oli työn täyteinen. Monet lapset osaavat käyttää älypuhelimia ja teknisiä laitteita jo varhaiskasvatusvaiheessa ja ymmärtävät englantia tai muita kieliä. Monessa suhteessa he ovat vanhempiaan edellä jo ennen kouluikää. Aidot kysymykset ja ongelmat heräävät jo lapsuudessa, joiden ratkaisua koulukasvatus tukee. Saavutetut valmiudet ja keksityt tutkimusongelmat ovat oppimispolun rakentamisen perustaa, josta lähtökohdasta ohjaus, kasvatus ja tuki toteutuvat. Tällöin koulumatematiikka lähenee tiede- ja tietoisuuskasvatusta, missä ongelmana on, mitä on välttämätöntä tietää ja miten edetään. Tällöin oppiminen on ilmiölähtöistä.*

Ilmiölähtöisen fenomenologisen asenteen ydin on kysymisen, epäilemisen ja kyseenalaistamisen tavassa. Useat naturalistisen tiedekäsityksen edustajat lähtevät liikkeelle tieteellisistä käytännöistä ja tutkivat tiedettä sellaisena kuin se on (myös Kiikeri & Ylikoski 2011, 76) irrotettuna ihmisestä. Tavoittelemani ihmislähtöisyys on vastakkainen lähestymistapa useimmille naturalistisen tieteen suuntauksille, kuten behaviorismille, fysikalismille, reduktionismille ja positivismille. Ihmislähtöisyyden näkökulmasta ihminen ei välttämättä havaitse tarkkaan, vaan tarkkuus lisääntyy tarkkaavaisuuden ja harjaannuttamisen myötä.

Matematiikka ilmenee kokemuksen ja kontekstin vuorovaikutuksessa. Tieteen filosofiassa matematiikka tulkitaan usein järjen työksi (rationalismi), jolloin kokemus jää vähemmälle huomiolle. Arjen havainnointi saatetaan tulkita subjektiivisena, epätarkkana ja organisoitumattomana, mikä ei tavoita systemaattisuuteen pyrkivän tieteen kriteerejä. Tällöin unohtuu, että esivanhempamme ja esitieteilijät tekivät hyvin systemaattisia ja tarkkoja havaintoja luonnonilmiöistä, yhteiskunnista ja itsestään ilman koulutusta tai ohjausta. Arjen kansalaisvalmiudet ovat vähitellen heikentyneet, kun modernisaatio on edennyt, elämä refleksioitunut, tiede institutionalisoitunut, koulu tieteellistynyt ja koulutus markkinoitunut.

Matematiikka tunnetaan tarkkana ja täsmällisenä tieteenalana huomattavasti paremmin kuin arjen rakentumisen monitulkintaisena ilmiönä. Arjen havainto- ja hahmotustaipumusten kirjo välittyy lehtien yleisönosastokirjoittelussa tai sosiaalisessa mediassa, missä omaperäisyys, yksinkertaisuus, perehtyneisyys, mallioppiminen, samankaltaisuus tai edellisten vastakohtat ilmentävät kulttuurista nousuvaa yksilöllisyyttä ja purkautumispainetta. Fenomenologia liittyy yhteen maailman ja sen kokemisen (myös Miettinen, Pulkkinen & Taipale 2010, 9), missä arjen ilmiöiden merkityksiä selvitetään ja jalostetaan edistyksen hyväksi.

Prosessina ilmiölähtöinen tarkastelu pyrkii jatkuvasti korjaamaan arkihavainnoinnin puutteita (myös Uusitalo 2001, 18). Matematiikkailmiö ei ole puhtaasti matemaattinen, vaan siihen on integroituneena (ulkoinen) tai syntetisoituneena (sisäinen) kokemus. Matematiikan elämismaailmallinen tarkastelu mahdollistaa matematiikkailmiön ilmaantumisen, mikä ilmenee monimuotoisissa ja monitieteisissä ilmiöissä. Fenomenologinen asenne (ajattelevinen) paljastaa muistojen menneisyyden, konkreettisen nykyisyyden ja todennäköisen tulevaisuuden.

Mikä on se ilmenemisen tapa, jonka kautta matematiikka paljastaa itsensä? Husserl (1995) korostaa fenomenologiaa erityistieteiden perustana olevana ankarana tieteenä, jonka tarkoituksena on ylittää erityistieteiden metodiset ristiriidat. Tällöin Husserlin voi tulkita puolustavan matematiikkaa tieteen perustana. Jos matematiikan merkitystä tieteen yleisenä perustana päätetään vahvistaa horisontaalisessa merkityksessä, nykykäsitystä koulumatematiikasta on laajennettava sen etymologisen perustan suuntaan. Tällöin koulumatematiikka tukee oppimista yleisesti ja palvelee todellisuuden tiedostamista, jäsentämistä, järjestämistä ja mallintamista eli konstruointia.

Tutkimuspolulla ajattelevinen on paljastanut matematiikkailmiön oppimisen elämismaailmayhteyksissä. Fenomenologinen asenne on 2000-luvun yksilöllisen oppimispolun rakentamiseen uusi perusta. Miten matematiikka elämismaail-

moissa ilmenee, liittyy merkityksiin, joilla on yhteys yksilön mentaaliseen kokemukseen. Fenomenologian ja konstruktivismiin viitekehityksessä koulumatematiikan yksilöllinen opinpolku rakentuu yhä useammin keksimällä, jota myös löytämisen paradigma voi tukea. Oppilaan omaksuma tietämys voi funktionalisoitua uuden keksimiseen, joka pääosin elämismaailmoissa vielä ohitetaan (oma kokemus).

## 7.2 Matematiikkailmiö kulttuurin, politiikan ja tieteen kentässä

Siihen, miten matematiikka ilmenee, vaikuttaa elämismaailma. Kontekstissa (kulttuuri, politiikka ja tiede) toisiinsa kietoutuneet merkityssfäärit laajentavat matematiikan ilmiä, mikä kokonaisuutena näyttää matematiikkailmiöltä. Yksilön tai yhteisön kokemukset rakentavat matematiikkailmiötä, mikä on todellisuuteen heijastunut monimuotoinen näkymä tai vaikutelma matematiikasta. Tässä alaluvussa laajennan keskeisiä merkitysketjuja tutkimuskontekstistani.

Matematiikka ja matematiikan rakenne on ollut suunnannäyttäjä ja vähintäänkin näkymätön taustavaikuttaja totuuskäsityksellään arjessa ja myös yhteiskuntarakenteessa (vertikaalinen). Horisontaalinen eli ihmislähtöinen asenne koulumatematiikkaan tuo tilaa luovuudelle olla osallisina yhteiskunnan rakennustyössä (luku 7.3). Tutkimuspolulla (koulu)matematiikan elämismaailmallinen suhde kulttuurin, politiikan ja tieteen kentässä edustaa kasvutapahtuman kehystekijöitä, joiden merkitykset tukevat dialogista matematiikkakasvatusta (luku 9). Esi-merkkinä matematiikkailmiöstä ja hahmotustaipumuksesta elämismaailmassa kuvaan, miten matematiikka kiinnittyy elämismaailmaani (liite, luku 11).

Matematiikkailmiö kulttuurin, politiikan ja tieteen kentässä koostuu suuntautumistapojen sfäärien riitasoinnuista, jotka eivät ole yleensä rakentavasti järjestyneet ihmisten välisessä vuorovaikutuksessa. Jos vuorovaikutus jää vajaaksi koululuokassa, se estää oppimispolkujen rakentamista. Työyhteisöä tai koululuokkaa voi verrata antiikin eri koulukuntiin tai tieteen vaikuttavuuteen (4.3.3), joissa syntyneet tiedon siemenet itävät ja elävät edelleen.

Yksilöiden luova ajattelu tukeutuu tai tukehtuu vallitsevaan ajattelun paradigmaan (koulun opetussuunnitelma ja koulukulttuuri). Jos yksilöitä ei ole kuultu tai he eivät osaa ilmaista itseään, heidän potentiaalinsa saattaa jäädä tunnistamatta. Uudet ajattelutavat, koulukunnat tai paradigmat ovat ajattelun uudistajia positiivisessa mielessä. Vuorovaikutus vallitsevan paradigman kanssa tukee uu-

distumista. Luovuus ja lahjakkuus ilmenevät usein piiloisina yksilöllisinä taitoina, jolloin tuki oppimispolun jatkamiseen on tärkeää.

*Kaikki uudistuneet ja erilaiset ajattelutavat on tärkeää saada mukaan yhteiseen keskusteluun, koska jokainen eriävä ajatus on mahdollisen potentiaalisuuden aktualisoitumista. Koululaiset keskustelevat mielellään, kun heitä rohkaisee ajatustensa ilmaisuun. Usein olen yllättynekin hyvin perustelluista ajatuksista jostakin ajankohtaisesta asiasta tai tapahtumasta. Myös opettajanhuoneessa voi syntyä keskusteluja. Esimerkiksi teema, mitä on matemaattinen yleissivistys, tuskin saavuttaa yksimielisyyttä, ellei ole motivoitunutta tahtotilaa luoda uudistavaa koulun, kunnan tai alueen opetussuunnitelmaa.*

Kulttuurin kentän (luku 4) talonpoikainen sivistys ilmentää kulttuurisia juuria, joilla on ollut vaikutusta suomalaisuuden kehityksessä, tulkinnassa ja rakentamisessa. Suomalaisen 2000-luvun kulttuurisen tietoisuuden vahvistaminen on ollut osa Suomi-100 projektia, jonka merkitys kansaa kokoavana ja vuorovaikutusta lisäävänä kelpaa lähtökohdaksi myös matemaattisen tietoisuuden uudistamiselle. *Kulttuurinen rakennemuutos (1970- )* sisältää suunnittelutalouden voimistumisen, yhtenäiskoulujärjestelmän kehittämisen, elinkeinojen uudelleen organisoimisen ja hyvinvointiyhteiskunnan rakentamisen. Murrosvaiheessa muuttuu myös *sivistyskäsitys*, missä itseohjautuva, sisäistynyt luova toiminnallisuus muuttuu ulkoiseen odotukseen vastaamiseksi. Järjen rakennemuutos (taulukko 4; 4.2.3) siirtää huomion painopistettä toiminnasta käsitteisiin ja synteisistä analyyysiin. Koulun opetussuunnitelma muuttuu ohjeperustaisuudesta normatiivisempaan suuntaan. Suuret ikäluokat (1945-1950) jälkeläisineen ovat kokeneet kehitysvaiheen mahdollisuksineen, muutoksineen, muuttoineen tai masennuksineen. Sopeutuminen uudistuneeseen järjestelmään toteutui ehkä parhaiten ihmisillä, jotka olivat tulkinneet entisen elämäntavan kestävämmäksi.

Talonpoikaisyhteiskunnassa tavoitettiin yhteisöllisesti ihmisen toiminnan sisäinen logiikka työhön suuntautumisena (myös Alasuutari 1996, 38-73; 2014), johon matematiikka toiminnallisesti oli kietoutunut. Rationaalistunut sisäinen logiikka sisältää talonpoikaisjärjen ja maahengen, jotka yhdessä ilmentävät joka-päiväiseen ongelmanratkaisuun kiinnittynyttä elämäntapaa. Elämään kietoutunut matematiikka koostui kontekstuaalisista tekijöistä eli tuotannollisista mahdollisuuksista, niiden hoitamisesta ja kehittämisestä sekä tarvittavan infrastruktuurin rakentamisesta niillä ehdoilla, jotka olivat käytettävissä.

Talonpoikaiskulttuurin omavaraisuuden ja itsepärjäämisen yllyke on synnyttänyt yrittäjyyttä ja yhteiskunnallista aktiivisuutta, mitä taipumusta yhtenäiskoulujärjestelmä ei ole pystynyt ylläpitämään. Erilaiset ajattelemisen lähtökohdat ja koulutuksen yleiset tavoitteet eivät ole täysin kohdanneet, mitä selittää työttömien, koulupudokkaiden, koulunsa keskeyttäneiden ja eri tavoin syrjäytettyjen määrä sekä julkisen keskustelukulttuurin puutteet, kuten mustavalkoinen (konvergentti) tulkinta yhteisistä asioista. Kulttuurinen jälleenrakennus ei ole kohdannut potentiaalejaan, jolloin emansipaatio on jäänyt osittain toteutumatta.

Talonpoikaiskulttuurin aikaan (- 1970) toiminnot eivät olleet vielä erikoistuneet, vaan työ ja keksiminen toteutuivat elämäntavassa. Kaikki elämässä ja tuotannollisessa toiminnassa tarvittava rakennettiin ja tuotettiin itse. Opittiin tulemaan toimeen omillaan, mikä tarkoitti kokonaisvaltaista itsepärjäävyyttä taloudellisesti, taidollisesti, toiminnallisesti ja tavoitteellisesti. Näistä kulttuurisista lähtökohdista kehittyivät myös suomalaisten hyvät ongelmanratkaisuvalmiudet, yrittäjäisyys, kouluttautuminen uusiin tehtäviin, teollistuminen ja vaurastuminen.

Kehitystä matematiikan hyödyntämisessä voi kutsua kulttuurievoluutioksi, jolloin yksilölliset funktiot ovat kohonneet yhteiseksi ymmärrykseksi tekemisen tavasta (tekniikka) tai tekemisen kohteesta (teknologia). Primääritasolla kulttuurin kehitykseen vaikuttavat yksilölliset tietoisuudet ja niiden heijastus- ja siirtovaiikutukset, jolloin samanaikaisesti vaikuttavat kulttuuriset tavat ja piirteet sekoituvat ja ajan kuluessa saattavat hävitä, kuten talonpoikaisjärjelle on käymässä. Korostamani synteettinen talonpoikaisjärki on syntynyt arjen toimintaympäristöissä, joissa erilaiset toimintaa ohjaavat havainnot, valmiudet, taipumukset ja kontekstuaaliset tekijät yhdistyvät. Matematiikan hyödyntäminen yhteiskunnan tehtävissä mahdollistuu edelleen uudistuneissa toimintakonteksteissa, joissa erilaiset sfäärit vaikuttavat samankaltaisesti. Kun toimintaympäristö muuttuu, tarvitaan ihmisten (opettajien) tiedostavia väliintuloja.

Tiedonintressit koulumatematiikkaan ovat muuttuneet välineiksi itseisarvoisten merkitysten kokemisen sijasta. Talonpoikainen itseisarvoinen periaatteellisuus elämäntapana väistyi talousajattelun vahvistuessa. Pärjääminen ei enää riittänyt, vaan tilalle tuli menestys markkinataloudessa. Koulukäytännöissä (ja yhteiskunnassa) vakuuttaminen itselle ei enää riittänyt osaamisen perustaksi, vaan vakuuttaminen toisille muodostui asemien saavuttamisen perustaksi. Välineeksi muuttanut opettajan (virkamiehen) asiantuntijavalta suhteessa oppilaaseen (asiakkaseen) käy helposti yhteiskunnallisesti ja taloudellisesti kestävämmäksi.

Tutkimuspolun talonpoikainen aate- ja arvomaailma on vaikuttanut nykypäiviin saakka muuntuen ja sopeutuen elämänympäristöissä. Matematiikka näyttäytyy

arkisiin toimiin kätkeytyneenä. Talonpoikainen elämäntapa ( -1970) ja siihen kohdistunut rakennemuutos ilmentää yhteiskunnallista muutosta, differenssiä, missä olemista määrittää suhde olemiseen. Olemisen muutokseen liittyy koulu-matematiikan muutos. Käytäntö ja teoria toimivat rinnakkain talonpoikaiskulttuurissa, kun koulumatematiikka (1970- ) painottui teoreettiseen opiskeluun.

Kärjistäen suhde olemiseen on muuttunut omin keinoin hengissä selviämisestä ulkoisesti arvioitavaan olemiseen. Toimintaa ohjannut sisäistynyt järki (talonpoikaisjärki) on muuttunut ulkoisesti mitattavaksi järjeksi (uudistunut järki, taulukko 4 luku 4.2.2). Matematiikka on muuttunut itseisarvosta välinearvoiseksi. Tieteellistymisen seurauksena kehittynyt julkinen valta on vahvistanut ulkoista seuranta-, arviointi- ja sertifiointijärjestelmää. Jos osaamiskriteerit määritellään ulkopuolelta, yksilöllinen kekseliäisyys ei toteudu. Ulkoinen arviointi jatkaa mittateoreettista perinnettä, missä mitattavuutta edustaa matematiikan hierarkia.

Sertifikaatti eli ulkoinen arvostelu voi olla matematiikan arvosana, koulu-, tutkinto- tai työtodistus, asiantuntijalausunto, koulun tai yrityksen laatujärjestelmä, suositus, esitys, arvio tai valtakirja, jonka laatija on joku muu kuin itse asianosainen. Näyttö henkilön osaamisesta tai luotettavuudesta on alistettu julkisin kriteerein arvioitavaksi, jonka seurausvaikutuksena on ihmisissä luonnostaan olevien itsearviointi- ja vuorovaikutustaitojen- ja tapojen arvon väheneminen yhteisten asioiden hoitamisessa. Muodolliset perusteet korostuvat tarkoituksenmukaisuuden kustannuksella. Talonpoikaiskulttuurissa toteutui horisontaalinen eli ihmislähtöinen, itse itsestään kehittyvä ja yhteiskuntavastuullinen keksivä toiminnallisuus. Opetussuunnitelma-ajattelun lähtökohtana on ollut poliittisesti objektiivisuuteen pyrkivä tieteenalalähtöinen vertikaalinen koulumatematiikka.

Koulumatematiikassa kehityssuunta tarkoittaa, että *itsearviointi* ei kohdistu itseeseen vaan odotusten täyttämiseen. Itsearviointia tehtiin talonpoikaisyhteisössä oman työn tulosten parantamiseen, ei toisille vakuuttamiseksi. Tällöin tiedonintressi oli enemmän itseisarvoinen kuin välineellinen. Oppilas (ja opettaja) on ohjattu kykenemättömäksi arvioimaan itseään omista lähtökohdistaan. Tällöin ihminen ei ole asiantuntija omassa asiassaan, vaan päätösten perustana on toisten arvio. Koulun ja yhteiskunnan kehityssuuntaa ilmentää kokemuksellisen (horisontaalisen) näkökulman heikkeneminen yhteisissä asioissa, mitä voi pitää vuorovaikutteisuuden puutteissaan eettisesti huolestuttavana kehityssuuntana.

*Maatalousyhteisön toiminnan perustana oli koko yhteisön hyvinvointi. Maatalousosuuskunnat ja maatalousseurat perustettiin yhteiseksi hyväksi yhteisvoimin*

*yhteistoimintaa tukemaan. Talonpoika muuttui subjektista objektiksi hyvin nopeassa aikataulussa vuoden 1970 vaiheessa, jolloin myös yhtenäiskoulujärjestelmää kehitettiin subjektilähtöisestä objektilähtöiseen.*

Sisäistynyt matematiikka on kehittynyt vapauden, valistusaatteen ja Deweyn kasvatusajattelun hengessä, jossa itseoppiminen ja itseään korjaavuus korostuivat. Tällöin ei välttämättä tarvittu (matemaattisia) käsitteitä. Siirtymä yhtenäiskoulun käsitteelliseen matematiikkaan on kadottanut sivistysperintöä ja metafyysisen osan ihmisten elämismaailmaa. Käsitteillä tai ilman, matematiikan hyöty arjessa ja tieteessä testataan edelleen elämismaailmoissa.

Politiikan kentässä (luku 5) koulumatematiikan tavoitteiden asettamiseen vaikuttavat suunnittelulautous ja opetussuunnitelmakehitys. Koulumatematiikan kasvatusavoitteisiin liittyvät arki, itsenäiset ajattelutaidot, yksilöllisyys ja luovuus mainitaan opetussuunnitelmissa, mutta ne eivät välity koulumatematiikan opetustavoitteista. Yksilöllisyys, luovuus ja itsenäiset ajattelutaidot eroavat ominaisuuksiensa perusteella yleisistä ominaisuuksista, jolloin myös tavoitteen asettelu on erilaista. Opetussuunnitelman (2014) oppiaineen oppimistavoitteet (normitavoitteet) ja ihmisenä kasvamisen laaja-alaiset taitotavoitteet on mekaanisesti yhteen sovitettuja, jolloin niiden hyöty käytäntöön on rajallinen.

Opetukselle asetetut tavoitteet ovat yleisluontoisia, sinänsä tavoittelemisen arvoisia yhteiskunnan kehitystä ajatellen, mutta käytännössä niiden tulkinta ja toteutus jää usein opettajan pedagogisen vapauden varaan. Opetussuunnitelman ohje on esimerkiksi: ”Ohjata oppilasta vahvistamaan päättely- ja päässälaskutaitoa sekä kannustaa oppilasta käyttämään laskutaitoaan eri tilanteissa”. Ohje ei ole pedagoginen, vaan se ilmaisee odotuksen ja on luonteeltaan yleistävä eli normatiivinen. Ohje ei kannusta kekseliäisyyteen. Korjaan: ”Opettaja tukee oppilasta tunnistamaan ja tiedostamaan omia ajattelutaitojaan oppilaan omista tilanteista.” Sanamuotoa tarkentamalla ohje kohdistuu yksilön oman pohdintaprosessin ja aktiivisuuden tukemiseen, kuten ”auttaa oppilasta tunnistamaan oman päättelynsä perusteita asettamalla kysymyksiä itselleen, opettajalle tai muille opiskelijoille”. Kokonaisuutena ohjetekstien pedagoginen korjaaminen tarkoittaa oppilaslähtöisyyttä ja linjaamista laaja-alaisiin taitotavoitteisiin.

Opetussuunnitelmien kehitysaikajaksolla kansakoulusta peruskouluun kasvatusavoitteet ovat muuttuneet opetustavoitteiksi. Painopiste on siirtynyt yksilön valmiuksista yleisiksi tavoitteiksi, joita perustellaan tasa-arvoisilla mahdollisuuksilla. Tällöin oppilas on yhä enemmän vastuussa oppimisestaan ja opettaja on vastuussa määritelyjen opetussisältöjen käsittelystä. Opettaja arvioi ja arvos-

telee osaamistavoitteiden saavuttamista, ei sitä mitä opiskelija keksii oppimaan ja pitää itselleen tärkeänä. Luovuudelle ja kekseliäisyydelle jää asetelmassa niukasti tilaa, vaikka käsitteet mainitaankin. Mitä luovuus ja kekseliäisyys tarkoittavat, jää edelleen opettajan pedagogisen vapauden tulkintakehykseen.

Koulumatematiikka ilmenee yksilöllisinä funktioina (5.3.1), jotka voivat olla tunteita, intentioita, tiedonintressejä tai kokemuksellisia merkityksiä. Talonpoikaiskulttuuriperäiset funktiot vastuullinen asenne, vapaus, luovuus ja vaatimus itselle tukevat myös suhdetta koulumatematiikkaan ja löytyvät reformipedagogien (Rousseau, Pestalozzi, Dewey) ajattelusta ja kansakoulun opetussuunnitelmasta. Funktiot tukevat koulumatematiikan yleistä tehtävää yksilön lähtökohtien mukaisilla tavoilla. Koulumatematiikan tehtävä määräytyy matematiikkatieteen alalta, ei kulttuurisista lähtökohdista koulumatematiikan kehitystä 1990-luvulla kuvaavaan IMCI -tutkimusraportin ja opettajakokemukseni perusteella. Matematiikan tehtävänanto ei tue oppilaan kulttuuriperäisiä lähtökohtia yhteiskunnassa, vaan yleisiä ihmisestä ja yhteiskunnasta riippumattomia tieteen perusteita. Ellei tiedon kiinnittämistä oppilaan elämismailmaan tavoitella, eikä tiedon yhteyttä moraalikehityksen vaiheisiin enää tueta, ihminen yhteiskunnan näkyvämmänä vaikuttajana jatkaa tuhojaan, eikä toivottava kehitysmuutos toteudu.

Opetussuunnitelma on kehittynyt peruskoulun 1970-luvun matematiikan tieteenfilosofisen formaalisen mallin perustalta nykypäiviin hyvin vähän. Opetussisältöjä korostava tieto- ja oppimiskäsitys on 1970-luvulta lähtien etääntynyt ihmisen käytännöllisistä ja ammatillisista intresseistä yhä tieteellisempään suuntaan, jolloin tiedon soveltaminen ja käyttö on jäänyt yhä enemmän kunkin opiskelijan omalle vastuulle. Peruskoulun jälkeisessä ammatillisessa koulutuksessa tiedon soveltaminen ja käyttö tapahtuu yhä painotetummin vasta työharjoittelussa, missä vaiheessa noin 20 % ammattiin kouluttautuvista keskeyttää opintonsa (Aho & Mäkiäho 2014). Käytäntöön soveltaminen tuo mukanaan tiedonintressit ja -kontekstit, joiden kautta tieto ei ole yksikäsitteistä, mikä saattaa yllättää oppilaan, kun soveltaminen sijoittuu vasta opintojen loppuun.

Arki ja tiede sisältävät ristiriitaisen kombinaation, jonka ratkaisu ei ole tutkimuspolun havaintojen perusteella onnistunut, eikä kokemukseni mukaan koulu- luokkissakaan. Maatalousyhteiskunnassa vallinnut tarkoituksenmukaisuus oli perustana eteenpäin pyrkimyksille, jonka merkitys on hämärtynyt. Tiedon toiminnallinen tarkoitus jää yhä useammin suorittamisen ja hyvien arvosanojen tavoittelun varjoon (myös Poikela 2000). Tällöin arvostelu suuntaa opintoja enemmän kuin tietojen omaksuminen toiminnalliseksi käyttövoimaksi elämässä eteenpäin.

Ristiriidan ratkaisuehdotukseni on, että opetussuunnitelman yhteyksiä kansainväliseen, kansalliseen, alueelliseen, paikalliseen ja yksilölliseen tarkoitukseen vahvistetaan. Konteksti ei estä suuntautumista myöhemmin muihinkin konteksteihin, vaan valittu konteksti avaa, konkretisoi, selventää ja motivoi oppimista tarkoituksenmukaisuusperustein.

Elämään liittyvä matemaattinen ongelmanratkaisu määrittyy huonosti yläkoulun opetussuunnitelmissa, vaikka ongelmanratkaisu on osa arjessa olemista. Arjen todelliset kontekstit eivät välity matemaattisten työvälineiden käytön harjoittelussa oppitunneilla. Arjen elämää laajemmat yhteiskunnalliset ja tieteelliset yhteydet tulevat ilmi arvioinnin kriteereissä ja opetussuunnitelmassa, mutta niiden tulkinta sisältää paljon vaihtoehtoja, joiden toteuttamisessa opettaja on usein yksin. Elämämaailmaan kiinnittäminen vaikeutuu yleisistä ja huonosti yksilöllisyyteen kiinnitettävistä ohjeista. Korjaan: Ongelmanratkaisuprosessi etenee yksilön omista kysymyksistä lähtien, mitä tukee oppilaan omia päättelyrakenteita tunnistamaan pyrkivä ohjeistus eli tietoisuus- ja matematiikkakasvatus.

Opetussuunnitelman (2014) kieli on passiivinen ja objektiivinen. Yleistävän esitystavan kautta välittyy luovuuden ja yksilöllisyyden huono määrittely ja ylhäältä alaspäin (vertikaalinen) hierarkiarakenne vuorovaikutteisuuden (horisontaalinen) sijasta. Yksilöllisten taipumusten tukeminen löytyy *mitä* -muodossa normitekstistä, mutta *miten* jää opettajan pedagogisen vapauden varaan. Kehityssuunta on yksilöllisyydestä pois päin, siitä huolimatta, että opetussuunnitelmatekstissä painotetaan yksilöllisyyttä. Opetussuunnitelmissa ei ilmene kuvauksia yksilöllisistä funktioista. Objektiivisia ihanteita on vaikea sijoittaa yksilön omaan tiedostusprosessiin. Opetuksen yksilöllistämistä voi pitää paradigma-muutoksena, vuoden 1970 koulutusreformiin verrattavana muutoksena, mutta sen toteutus käytännössä on alkuvaiheessa ja etenemässä varhaisvaiheesta eteenpäin, mihin muut kouluvaiheet toivottavasti nivELYVÄT.

Yksilöllinen intentio ei ole mukana käsitteenä opetussuunnitelmassa. Oppilaan aktiivisuus ja oppimispolku kuitenkin viittaavat intentionaalisuuteen. Opetussuunnitelman perusteiden (2014, 17) mukaan oppilaan kiinnostuksen kohteet, arvostukset, työskentelytavat ja tunteet sekä kokemukset ja käsitykset itsestä oppijana ohjaavat oppimisprosessia ja motivaatiota. Opetussuunnitelman (2014) perusteissa toistuvat käsitteet oppimisprosessi ja oppimispolku, jotka laajentavat opiskeluympäristöä kontekstiin liittyvän intentionaalisuuden suuntaan.

Suunnittelutalouden ajan opetussuunnitelmissa korostuu oppilaan tuotannollinen rooli, jolloin tietämisen itseisarvo, ihmislähtöisyys ja yksilöllisyys hukkuu tavoitelauseiden hallintoa tukevaan kieleen. Suunnittelutalouden ajan opetus-

suunnittelun lähtökohtana on yksilön välineellinen arvo, jolloin kulttuurisen pääoman potentiaali saattaa jäädä aktualisoitumatta. Tuloksia yleistäen matematiikan yksilöllisesti koettavat funktionaaliset merkitykset eivät välttämättä kohtaa yleisesti määriteltyjä matematiikan yhteiskunnallisia tehtäviä.

Tieteen kentässä (luku 6) ilmenee koulumatematiikan historialliset lähtökohdat ja merkitykset filosofimatemaatikkojen (eli yksilöiden) luovuuden ilmauksina aikakausilleen ominaisilla tavoilla. 2000-luvun koulumatematiikka kärsii mielekkyysongelmasta, jossa koulumatematiikan merkitykset eivät vastaa oppilaan kokemuksellisia tarpeita elämismaailmoissa. Oppiminen ei ole mielekästä oppilaan kokemuksessa, eikä koettu tai mitattu osaaminen vastaa yhteiskunnan osamistarpeita. Käsite koulumatematiikkailmiö ilmentää kohtaanto-ongelmaa merkitysten välillä, eli matematiikan rakenteellista kokonaisuutta (ykseys) ja risteäviä merkityksiä (monimuotoisuus) elämismaailmojen välillä. Eri lähtökohdista pohjimmiltaan kaikki oppilaan kokemukset kelpaavat prosessiin.

Matematiikka ei ilmene filosofisesti yksikäsitteisenä, vaikka se on perinteensä perustalta pyrkinyt ilmaisussaan yksikäsitteisyyteen. Matematiikan tieteelliset juuret löytyvät Kreikan filosofien eri koulukunnista, missä matematiikka oli filosofian osa. Grassmannin (1875; 1892) logiikan luokituksin matematiikka on teoria käsitteistä, teoria arvostelmista ja teoria päättelystä (kuva 2, luku 6.3.2). Grassmannin logiikan jakoon olen lisännyt neljänneksi teorian todistamisesta, mikä yhdistää kolme edellistä eli teorian käsitteistä, teorian arvostelmista ja teorian päättelystä, mistä välittyy tuon ajan matematiikan tiedeihanne riippumattomana muista tieteistä, paitsi filosofiasta. Aksiomaattinen filosofisesta logiikasta johdettu rakenne on myös Eukleideen ja Pythagoraan teoreemoissa sekä Aristoteleen lauselogiikassa.

Matematiikan alkuperä on näin filosofinen ja subjektiperäinen, mikä antaa lähtökohdan jatkaa yksilöllisyyden merkitysten tutkimusta ja pohdintaa matematiikan tiedeluonteesta. Tieteen kriisissä 1800-1900 lukujen vaihteessa intuitio- ja tunneteoreetikkojen (mm. Berkeley 1710; Brentano 1874; Scheler 1926) luoma kokemusperustaisuus jäi taka-alalle matemaattisen tietämisen tulkinnessa (Kumpulainen 2006, 70-113) ja objektiivisuus jäi vallitsevaksi tieteenfilosofian ja oppimisteorioiden perustaksi. Koulumatematiikan sisältö perustuu edelleen enemmän tarkkarajaiseen tieteenfilosofiaan kuin pohjimmiltaan rajattomaan konstruktivistiseen oppimisteoriaan, vaikka teoriassa ja opettajankoulutuksessa matematiikan käsitteenmuodostus tulkitaan konstruktivistisen oppimisteorian mukaan.

Tietoisuus on luonteeltaan suuntautunutta ja sisältää kognitiota, joka kehittyy kunkin toimijan elämismaailman ehdoilla. Matematiikan oppimista voi verrata evoluutioprosessiin (sukupolvien sivistysketju) ja tieteen globaaliin kanoniseen kehitykseen, jossa läheskään kaikki kehityskelpoinen tai elämismaailmassa opittu ei ole tullut huomioon otetuksi yhteisöissä tai koululuokissa, mikä on osittain potentiaalien tuhlausta. Kulttuuri pohjautuu laajalti ihmiselle tyypilliseen tavoitteelliseen ja tarkoitukselliseen toimintaan (myös Niiniluoto 2009, 105). Tällöin yleisesti merkitykselliseksi koettu pääsee jatkoon. Historiallisesti matematiikan välineellinen arvo on korostunut uuden ajan alussa ja 1900-luvun lopussa. Matematiikan välineellisessä (tekninen, praktinen ja emansipatorinen tiedonintressi) merkityksenä ihminen sopeutuu ympäristöönsä ja itseisarvoisessa merkityksessä ihminen voi kehittyneen tietoisuutensa perusteella vaikuttaa ympäristönsä kehittymiseen (myös Dewey, Heidegger, Habermas). Tulevaisuuteen vaikuttamisen mahdollisuutta tukee matematiikan itseisarvoon perustuva tulkinta (veristinen, metafysinen, persoonallinen).

Matematiikan elämismaailmallista todellisuutta ilmentää Heideggerin, Dasein, joka ei ole koskaan valmis, vaan eri suuntiin avoimena ja muuttavana ajallisuutena, olemisen eksistentiaaleina. Tutkimusongelman löytämisvaiheessa (luku 2) korostin huolta matematiikan osaamisesta. Huoli osaamisesta välittyy osaamisen seurantatutkimuksista, mutta tutkimuspolulla huoli liittyy laajasti elämismaailmaan. Kohtaanto-ongelma kohdistuu tiedeluonteen objektiivisuuden ja kiehtovuuden subjektiivisuuden ristiriitaan. Huoli on yksi Heideggerin Daseinin (itselleen oleminen) ja Mitseinin (kanssaoleminen) eksistentiaaleista. Huoli matematiikasta suuntaa tunnistamaan koulumatematiikan historiallista menneisyyttä, missä menneisyyden ymmärtäminen suuntaa tulevaisuuden rakentamista.

Huoli ei kosketa pelkästään jokapäiväisiä tilanteita kouluissa, vaan laajemmin yhteiskunnassa ilmenevää tieteiden eriytymistä ja kapeutumista, missä dialogista yhteisymmärrystä ei tavoitella eri tieteiden. Tieteenalojen erillisyys voi rajoittaa tieteiden välistä keskustelua. Tieteelliset käsitteet määrittellään tutkimusalan konteksteissa, ei yleisesti. Matematiikan käsitteet, joita on runsaasti eri tieteissä, määrittellään tieteenalan sisällä uudelleen useinkin korostaen erillisyttä matematiikasta, joka vaikuttaa pohjimmiltaan keinotekoiselta. Esimerkiksi käyttämäni käsite funktio (luku 5.3.1) on peräisin matematiikasta, mutta muissa tieteissä useinkaan ei rakenneta merkitysyhteyttä matematiikan kautta, vaan käsitteen erilaisella merkityksellä erityistiede eroaa matematiikasta. Monet matematiikan käsitteet, kuten differenssi, integrointi, rationaalinen (suhde), irrationaalinen (ei suhde), jatkuvuus, raja-arvo tai relaatio ovat käytössä monissa tieteissä

uudelleen määriteltyinä. Käsitteiden merkitys juurtuu matematiikkaan, vaikka konteksti toisikin käsitteisiin oman sävynsä ja näkökulmansa.

Yhteiskunnallisen tilan (aika ja paikka) nykyvaiheessa yhdenkin ihmisen kokemus matematiikasta voi nousta yhteiskunnallisesti kehittäväksi tuotteeksi tai aineettomaksi kulttuuriksi, kun useille ihmisille yhteinen intersubjektiivinen ymmärtämysyhteyksien tila saavutetaan. Esimerkiksi missä tahansa käytännön työtilanteissa, peliteollisuudessa, lohkoketjuajattelussa, verkostosovellutuksissa tai taito- ja taidealoilla näkymätön matematiikkailmiö vaikuttaa taustalla. Kun löydetään yhteinen kieli tai toimintatapa, toiminnallinen polku tallautuu.

Uusien alojen vaatima matemaattinen lahjakkuus ei välttämättä tule ilmi strukturoiduilla kokeilla, vaan toiminnassa, kuten vielä maatalousyhteiskunnan aikaan eri toiminnallisilla merkityksin. Kulttuurinen luova potentiaali ja sen (koulu)poliittinen ohjaus (laki ja ops) eivät kohtaa vielä ajanmukaisella tavalla. Matematiikan tieteenalan kriteerit määräytyvät edelleen tieteenalan kriteerein, eikä yksilöllisten valmiuksien ja taipumusten tai yhteiskunnan osaamistaitovaatimusten perusteella. Kehitys luovempaan ja reaalista todellisuutta kunnioittavaan suuntaan on alkanut taidealoilla, josta tieteen soisi saavan rohkaisua ja virikettä. Etenkin populaarimusiikki, kuvataiteet ja media-ala peilaavat arjen ja elämän kokemista, mikä osoittaa, että kokemuksella on voimaa ja potentiaalia.

Matematiikka yhteiskunnan rakenteissa vaikuttaa ihmislähtöisesti, usein myös tiedostamattomasti. Tällöin matematiikan täsmällinen, eksakti ja looginen päätelyrakenne katoaa ja matematiikka näyttäytyy polaaristen merkitysten kautta ihmistajunnalle matematiikkailmiönä. Tällöin rationaalisuuden vastapooli eli irrationaalisuus leimaa matematiikan arkista olemusta eli matematiikkailmiötä. Ihmistiede on merkittävilta osiltaan ohittanut tämän arjen säröisen merkityksellisyyden alueen, mikä ilmenee yksilöllisyyden ja kokemuksellisuuden tulkinnoissa sekä tieteen keinotekoiselta vaikuttavassa objektiivisessä tulkinnassa.

Fenomenologinen asenne matematiikkaan ja maailmaan on kuin sisäinen kompassi (intuitio), tapa mieltää havaintonsa, missä yksilö mieltää havaintonsa vertaamalla niitä samantapaisiin mielen sisäisiin sisältöihin muistissaan (Hayek 1952, 37-54), ei niinkään ulkoisiin merkityksiin. Tällöin koulumatematiikka on ensi sijassa oman mentaalisen mielen tiedostamista. Mielen sisäinen tieto eli muisti toimii taitojen siirtäjänä. Kulttuurisella muistilla on keskeinen funktio yleisesti matematiikan jäsentymisessä ja järjestymisessä sisään- tai ulospäin, horisontaalisesti tai vertikaalisesti tai jotenkin siltä väliltä.

Miten matematiikka ilmenee tieteenkentässä jäsentyy jaotteluun horisontaalinen ja vertikaalinen matematiikka, missä matematiikan keksiminen (ihmislähtöinen) tai löytäminen (tieteenalalähtöinen) yhdistyvät kokemuksessa. Matematiikan keksiminen tukeutuu yksilölliseen luovuuteen, metakognitiivisen tiedonkäsittelyn valmiuksiin ja konstruktiviseen päättelyrakenteeseen (horisontaalinen). Matematiikan löytäminen korostaa tieteenalalähtöistä ja normiperustaista asennetta (vertikaalinen).

### 7.3 Horisontaalinen ja vertikaalinen matematiikka elämismaailmassa

Kulttuurin kentän matematiikka (horisontaalinen) ja politiikan kentän koulumatematiikka (vertikaalinen) ilmentävät erilaisia suuntautumisia oppimiseen. Yksilöllinen oppimispolku rakentuu tai kombinoituu niistä. Teoreettinen malli horisontaalinen ja vertikaalinen matematiikka vertailee yksilöllisten suuntautumistaipumusten strategisia eroja. Horisontaalinen matematiikka ilmenee yksilölähtöisenä (matematiikan keksiminen) ja vertikaalinen koulumatematiikka ilmenee perinteisenä matematiikkatieteenalalähtöisenä näkökulmana (matematiikan löytäminen) (ks. 6.3). Vastakkain asetetut toiminnalliset funktiot eli strategiset yksilöominaisuudet ilmentävät matematiikan monimuotoisuutta erilaisista yksilön kokemuksen ja kontekstin näkökulmista. Malli tukee yksilön strategisten taipumusten tunnistamista. Laajentaen yhteiskuntaan malli kuvaa vuorovaikutteisen ja hierarkisen yhteisörakenteen eroja, jolloin kontekstin näkökulmasta vertikaalinen suosii konformiaa ja horisontaalinen autonomiaa (taulukko 4; 4.2.2).

Tutkimuspolun matematiikan keksimisen (horisontaalinen) voi yhdistää fenomenologisen matematiikan pioneerin Hans Freudenthalin (1973) kontekstuaalisen ja arkilähtöisen Duth Realistic Mathematics Education (RME) ajatteluun. Freudenthal liittää matematiikan yksilölliseen aktiivisuuteen ja ajattelemisen prosessiin. Tutkimuspolku ei poissulje historiallisia mahdollisuuksia (vertikaalinen). Horisontaalinen näkökulma vahvistaa uutta luovia, motivoivia, elämismaailmassa kohdattujen ongelmien ratkaisuja niillä ehdoilla, jotka tilanteessa on käytettävissä. Tällöin näkökulmani ei tue Bloomin (1956) taksonomiaa osaamisen tasojen järjestyksestä (muistaa, ymmärtää, soveltaa, analysoida, syntetisoi-

da, arvioida), koska intuitio voi olla nopea ja yhdistää vaiheet yksilöllisesti. Myöskään kognitiivisen kehityksen oppimisteoreettiset mallit (esim. Piaget, Kohlberg, van Hiele) eivät anna yleisinä teorioina lisäarvoa yksilölliseen oppimiseen, minkä perustana on yksilön taipumus konstruoida todellisuutta omista lähtökohdistaan. Freudenthal kritisoi historiallisen matematiikan opetusta antididaktisena, mihin voin yhdistää tutkimuspolun horisontaalisen näkökulman.

Yksilölliset mentaalisen suuntautumisen erot tarkoittavat siis lähinnä strategisia valmiuksia, jotka Hintikka ottaa mukaan interrogatiivisessa ajattelussa (6.3.2). Hintikan mallissa matemaattisessa päättelyssä tarvitaan määritelmällisiä ja strategisia sääntöjä. Strategiset säännöt ilmenevät yksilön mentaalisisina ominaisuuksina. Oppilaan itsearviointi, oman ajattelutavan tunnistaminen ja opitun tiedostaminen edellyttävät strategisia valmiuksia. Strategia on yhdistetty matematiikan oppimiseen eri tavoin. Strategia voi tarkoittaa ajattelun heuristiikkoja, oppimisen tyylejä tai opettamisen rakennetta. Myös tutkimuspolun ongelmanratkaisumalli on strategia. Ongelmana yleisissä heuristisissa malleissa on, että osaamisen odotus kohdistuu yleiseen, jolloin yksilöllisyys potentiaalisuutena ja kekseliäisyytenä voi jäädä odotuksen ulkopuolelle. Strategia on yksilöllinen valmius ja siten ainutlaatuinen ja autenttinen kombinaatio yksilön ominaisuuksista ja suuntautumisesta, joita ei ole syytä pyrkiä määrittelemään ulkopuolelta, koska ne ovat kokemuksellisia ja kehittyviä.

Taulukon dikotomia tukee yksilöllisten erojen tunnistamista ja tiedostamista lisäten vapausasteita koulumatematiikkaan oppimaan oppimisen taitona, mitä myös matematiikan etymologinen merkitys tukee. Horisontaalisen ja vertikaalisen erottamisen tukee yksilöllisen toimintatavan tiedostamista. Malli on karkea. Tutkimuspolulla yksilön suuntautumista ilmentävät käsitteet, intentio, idea, intressi, intuitio ja funktio, ovat yksilön horisontteja. Yksilöt ovat erilaisia ja hahmottavat, rakentavat ja transformoivat kokemustaan eri tavoin, mikä ilmenee myös Kailan perseptuaalisen (havainto) ja konseptuaalisen (merkitys) kokemuksellisen aineksen erottamisena. Kehittämäni horisontaalinen ja vertikaalinen tietämyksen jako edustaa vastakkaisia subjekti- ja objektilähtöisiä toiminnallisia funktioita. Taulukon dikotomia havainnollistaa merkityksiä, joiden välissä matematiikan oppimista tukeva dialogi tapahtuu (Ks. taulukko 5.)

TAULUKKO 5. Horisontaalinen ja vertikaalinen matematiikka (Kumpula 2019)

<b>Toiminnallinen funktio</b>	<b>Vertikaalinen matematiikka</b>	<b>Horisontaalinen matematiikka</b>
Toiminnan rakenne	Formaalinen	Nonformaalinen
Toiminnan fokus	Löytäminen	Keksiminen
Tiedon alkuperä	Järki	Kokemus
Yksikkö	Käsite	Toiminta
Tieteellinen tavoite	Selittäminen	Ymmärtäminen
Työskentelyote	Monologinen	Dialoginen
Päätelymalli	Analyysi	Synteesi
Tutkimustapa	Kvantitatiivinen	Kvalitatiivinen
Ilmaisutapa	Perustelu, todistaminen	Epäily, ristiriidat
Ajattelutapa	Konvergentti	Divergentti
Konteksti	Matematiikan filosofia	Tieteen filosofia
Ohjautuvuus	Ulkoa ohjautuva (malli)	Sisältä ohjautuva (intuitio)
Hahmotustapa	Atomistinen	Holistinen
Motiivi	Imitointi	Innovointi
Orientaatio	Tekemisen tärkeys	Tekemisen mielekkyys
Oppimisteoreettinen suuntaus	Behaviorismi (ärsyke-reaktio)	Konstruktivismi (intuitio-intressi-idea)
Ammattityyppi	Professioalat, tieteellinen perustutkimus	Keksijä, kapellimestari, ohjelmoija, koodaaja, yrittäjä, tuottaja, muotoilija
Status	Objektiivinen	Intersubjektiivinen

Taulukko horisontaalinen ja vertikaalinen matematiikka havainnollistaa oppimisen yksilöllistämisen merkityksiä matematiikan formaalisen (vertikaalinen) ja nonformaalisen (horisontaalinen) toiminnallisen funktion näkökulmista. Elämismaailmassa peritty ja opittu (hankittu) taipumus suhteessa koulumatematiikkaan kehittyä koko elämän ajan, vahvistuvina tai heikentyvinä toiminnallisina funktioina. Suuntautuminen koulumatematiikkaan on läsnä kokemuksessa toiminnallisina funktioina ilmentäen yksilön taipumuksia. Taulukko on tutkimuspolun yhteenveto tiedon alkuperää (luku 6.1) koskevaan jakoon empiirinen ja rationaalinen tiede. Taulukko kokoaa oppimisstrategisia eroja toiminnallisen funktion perusteella ja palaa tutkimuspolun lähtökohtaan – matematiikan kiehtovuus (horisontaalinen) ja huoli matematiikan osaamisesta (vertikaalinen). Edellinen on uutta konstruoivaa ja jälkimmäinen strukturoitua malliin sopeutumista.

Vertikaalinen näkökulma tukee teoreettiseen intressiin perustuvaa oppimispolun rakentamista, jossa korostuu tieteellinen selittäminen; löytäminen; monologinen työskentelyote; formaalinen rakenne; hierarkkinen eli konvergentti ajattelutapa; behavioristinen oppimisteoria; analyttinen päättelymalli; kvantitatiivinen tutkimustapa; perusteleva ilmaisutapa; ulkoinen ohjautuvuus ja atomistinen hahmottustaipumus. Matematiikan filosofian vertikaalinen näkökulma tarvitsee rinnalleen matematiikan keksimistä ja konstruointia korostavan horisontaalisen näkökulman, jonka lähtökohtana on käytäntö ja toimivan käytännön kehittäminen.

Sisäistynyt matematiikka (horisontaalinen) jää usein piiloon mentaaliseen mieleen tai yhteiskuntarakenteisiin. Valistusaatteen perintönä kulttuurissa pitkään vaikuttanut horisontaalinen sivistysajattelu ja siitä heijastuneet toimintataipumukset ovat lähes unohtuneet tai ne on ohitettu. Horisontaalisilla strategioilla on usein vuorovaikutukseen yllyttävä merkitys. Vähitellen yhteiskunnan ja koulumatematiikan tiedeperustaisuuden vahvistuessa huomio on kohdistunut yhä enemmän muodollisiin eli formaalisiin perusteisiin. Koulumatematiikan ja yhteiskunnan kehitystä luonnehtii kriteeriperustaisten eli normatiivisten menettelytapojen (vertikaalinen) kasvu, minkä voi karkeasti ymmärtää heijastuksena matematiikan hierarkiasta ja tiedeihanteesta.

Vastakkaisten merkitysten erotteluperusteena on matematiikan opiskeluun liitettävä toiminnallinen funktio. Hahmottaako oppilas havaintoiaan holistisesti vai atomistisesti, on keskeinen toimintaa ohjaava yksilöllinen toiminnallinen funktio. Kun katsot taivaalle, näetkö siellä tähden (atomistinen) vai taivaan (holistinen). Kun oppilas saa ratkaistavakseen esimerkiksi murtolukutehtävän, hän saatata ihmetellä luvun esitystapaa, merkitystä tai käyttöä elämässään. Tällöin oppi-

las tarkastelee holistisesti tehtävää. Atomistinen havaitsija alkaa töihin ja yhdistää tehtävänantoon aikaisemmin oppimansa. Ihmisen toiminta voi perustua intuitioon (horisontaalinen) tai suunnitelmallisuuteen (vertikaalinen). Usein intuitio on uudistumisen perusteena, mutta se voi olla myös väärässä. Väärässä olemisen mahdollisuus johtaa epäilyn metodiin (Descartes). Epäily ja ristiriitojen tunnistaminen ohjaavat usein keksivää toimintaa (horisontaalinen). Kyseenalaistaminen liittyy kokonaisuutta hahmottavaan; uteliaisuudesta ja älykkäistä havainnoista orientoituvaa hahmotustapaan. Tällöin älykkyys ilmenee uusissa tilanteissa järkevänä toimintana.

*Tutkimuspolku kokonaisuutena ilmentää horisontaalista matematiikkaa. Tällöin käytän matematiikkaa horisontaalisesti pyrkimällä tunnistamaan ymmärtämisyhteyksiä niistä kohteista, jotka ovat kokemukselle antaneet merkityksiä. Yksilöllistä suuntautumista koulumatematiikkaan ilmentävät horisontit ovat monimuotoisia ja voivat olla uuden keksimisen lähtökohtina, elleivät ole tulleet häirityiksi.*

Holistisen hahmotuksen perustana on Gestalt -ajattelu, missä ihminen on prosessi (Suvanto 2018). Tällöin ihmisen henkisen tason mitta on yksilön *tietoisuus*, joka ei ole mittateoreettinen yksilön ominaisuus. Matemaattisen potentiaalisuuden yhteydet älykkyyteen on tunnustettu laajasti (Binet 1918; Koskenniemi 1938; Salomaa 1946; Vahervuo 1948, 175). Psykologian soveltamien älykkyysmittareiden tasokuvio- ja lukusarjatestit (lukuteoria ja geometria) liittyvät säännönmukaisuuksien tunnistamiseen. Oppimistulosten mittaaminen kehittyi fysiikan ja tilastotieteen mallin perustalta kasvatus- ja käyttäytymistieteissä vahvistuneen testiteorian kehityksen myötä (Konttinen 1981, 20). Tällöin uskottiin, että ihmisen tietoisuutta voidaan mitata. Mitattavuutta tukemaan vahvistui atomistinen oppimisen malli (vertikaalinen). Säännönmukaisuuksien tunnistaminen, joka oppimisen seurantatutkimuksissa (luku 2.1) osoittautui heikkoudeksi, on pohjimmiltaan holistinen yksilön ominaisuus. Säännönmukaisuuksien tunnistamiseen vertikaalinen harjoittelu ei anna riittävästi tukea ja valmiuksia.

*Koululuokassa tyhvät kysymykset ovat älykkäitä holistisen hahmotuksen perustalta. Jos oppilas kysyy, miksi pitää opiskella murtolukuja, vastaukseksi ei riitä, että opetussuunnitelma määrää, vaan miksi murtoluvut ovat opetussuunnitelmassa. Holistinen kokonaisuus murtoluvuista voi jäädä monien käsitteiden kokonaisuudessa hahmottumatta. Koulukirjat vahvistavat usein atomistista ja kon-*

*vergenttiä hahmotusta, mikä ei puhuttele holistista ja divergenttiä hahmottajaa. Koulukirjoissa on päällekkäisiä käsitteitä, joiden kautta kokonaisuus voi näyttää monimutkaisemmalta kuin se pohjimmiltaan on.*

Toiminnallinen funktio on lähtökohtien synteisiä talonpoikien työssä, mikä on perustaltaan kokonaisuutta hahmottava ja horisontaalinen. Koulussa toiminnallinen funktio on matematiikan tieteellisen analyttisen rakenteen perustalta atomistinen ja vertikaalinen. Opetussuunnitelman kriteeriperustainen rakenne ei suosi holistista hahmottajaa ja divergenttisyyttä eli vaihtoehtoisten oppimispolkujen rakentamista ja uutta luovien ratkaisujen kehittämistä. Vielä peruskoulun ensimmäisen opetussuunnitelman (1970, 32-33) perusteissa divergenttisyys eliminoiduu matemaattisessa päättelyssä, jolloin luovuus on kuvattu hankalasti määriteltäväksi. Myös Kärnä & Aksela (2013, 199) muistuttavat, että opetussuunnitelma ei ohjaa siihen, miten oppilaan työskentelyä ja ajattelutaitoja ohjataan käytännön tilanteessa.

Strateginen toiminta on ongelmanratkaisua ja päättelyrakenteen tiedostamista. Matematiikan keksimisen ja löytämisen erottaminen edellyttää strategisten taitojen kehittämistä, mitä tukevat Vauraksen (1991) laajennetut kuvaukset strategiasta. Oppimisstrategioilla tarkoitetaan kaikkia niitä oppijan mielessä tapahtuvia tiedon valikointi-, tiivistämis- ja jäsenntysprosesseja, joita hän käyttää oppimiseen (Kaukiainen, Aalto, Lappalainen & Lindberg 1995, 21). Kognitiivinen strategia on toimintatapa tai keino, jolla oppija pääsee tavoitteeseensa (Vauras 1991).

Jaan strategiat kahteen pääkategoriaan: 1) Integraatio eli hahmotustapastrategia (atomistinen, meristinen, holistinen, transformatiivinen) ja 2) rakennestrategia (looginen, ajallinen, hierarkkinen, historiallinen, vuorovaikutteinen). (vrt. Vauras 1991; emt. 22-23.) Meristinen hahmottaja jäsentää osakokonaisuuksien kautta, kuten esimerkiksi tutkimuspolun kulttuuri, politiikka ja tiede. Transformointistrategia liittyy opittua omaan elämään. Tiedon soveltaminen arjen toiminnassa perustuu transformointiin (opitun transfer). Miten havaitseen, rekisteröin, tulkitseen, arvioin, vertailen, sovellan, yhdistän tai koen on tiedon siirtoa sovelluskohteisiin. Yksilön toiminnallinen funktio on yhteydessä oppimisstrategiaan, minkä tunnistaminen, tukeminen ja vahvistaminen vie oppimis- ja keksimisprosessia eteenpäin.

Transformointistrategia edustaa luovuutta. Matematiikan pitkän historiallisen kehityksen kuluessa koulumatematiikan rakennestrategiana on painottunut verti-

kaalisuus, etenkin loogisuus ja hierarkia. Horisontaalisuus ja kokemuksen uudet yhdistelmät ovat jääneet taka-alalle. Kehityksen heijastusvaikutuksen voi tunnistaa koululuokissa ja opettajainhuoneissa, joissa keskustelu helposti konvergoituu uusien vaihtoehtojen aktiivisen tukemisen eli transformoimisen ja divergoimisen sijasta.

Käytäntöön soveltavassa matemaattisessa ongelmanratkaisussa juuri strategiset taidot korostuvat. Kouluperinteessä vallinnut perustaitojen opiskelu soveltamisen sijaan ei ole mahdollistanut strategisten taitojen riittävää harjaannuttamista. Matematiikan keksimisen mahdollisuus on näin jäänyt pääosin toteutumatta. Uudet koulun opiskeluympäristöt, painotukset ja kohteet tieto- ja viestintätekniikan sekä arjen sovellutuksissa tuovat keksimiselle tilaa. Keksiminen ei välttämättä edellytä, että kaikki määritelmälliset säännöt pitäisi osata, ennen kuin voi lähteä keksimään ja soveltamaan. Esimerkiksi peruskoodaukseen riittää vain muutamat määritelmälliset säännöt. Matemaattinen päättely ei ole pelkästään johdonmukaisuutta ja logiikkaa, vaan päättely on myös strategiaa taitoja, jotka on itse keksittävä. Ohjelmoinnissa välttämättömän algoritmisen ajattelun oikeellisuus tulee testattavaksi käytännössä, mistä näkökulmasta matematiikka lähennee tutkivaa oppimista, siten kokemuksellisuutta.

Yksilöllisten valmiuksien ja taipumusten tunnistamisella on merkitystä matematiikan inhimillistämisen ja käytännöllistämisen osana. Olemisen hengissä pysymisenä ja kokeellisuus käytäntöjen kehittämisenä (talonpoikaisjärki) ovat arjessa läsnä uusin odotuksin. Matematiikan opiskelun tutkimuksellisenä lähtökohdanna ovat arjen tilanteet, kuten varhais-, esi- ja alkukasvatus painottavat. Lapsuudessa saavutetut valmiudet ovat oppimispolun rakentamisen perustana elinikäisesti. Matematiikkailmiö on tunnistettavissa ympärillämme, mutta ilmiöön liittyvät käsitteet saattavat olla kypsymättöminä mentaalisisä mielessä pitkään ennen käsitteiden selkiintymistä.

Yhdistän luovan ajattelun yksilön horisontteihin, jotka ovat osin synnynnäisiä, tietoisia tai tiedostamattomia intuitioita, yksilöllisesti omaksuttuja hahmotus- ja ajatteluvalmiuksia eli omaksuttuja strategisia taitoja. Yksilölliset horisontit jäävät usein tunnistamatta mittateoreettisen perinteen mukaisilla strukturoidulla koulukokeilla. Osa potentiaaleista jää näin kehittymättömän arviointimenetelmien perusteella kouluissa tunnistamatta. Muutosta on toki tapahtunut ja tapahtumassa, mutta painotus yksilöllistämisen merkityksistä on vielä varovaista.

Dikotomiassa (horisontaalinen/vertikaalinen) vertailun formaalinen ja nonformaalinen toiminnallisen funktion lisäarvo koskee etenkin itsenäisten ajattelutaitojen kehittämistä, joka politiikan kentän opetussuunnitelma-analyyseissä osoit-

tautui huonosti määritellyksi. Huonosti määritellyllä on perusta matematiikka-tieteen historiassa, jossa synteesi kyseenalaistuu, intuitio problematisoituu ja luovuuden tuomat vaihtoehdot jäävät kapeiksi. Epäonnistunut sillan rakentaminen tiedon konstruoinnista koskevassa kysymyksessä on pohjimmiltaan ihmisen yksilöllistä kokemusta koskeva käsitys, jonka alueen vallitseva tietoteoreettinen käsitys on 'puhdistanut' metafysisestä, jonka piiriin aisti-, merkitys-, tahto- ja tunnekokemukset sijoittuvat.

Tunneteoriat pitävät tunteita yhtenä tiedon muotona, jolloin emotionaalisuuden ja rationaalisuuden vastakkainasettelu raukeaa (Niiniluoto 1996, 109). Tällöin inhimillinen mentaalinen mieli on se, mille mieli ilmenee. Toiminnallisen funktion metafysisen laajennus tapahtuu tällöin mielen ja mielikuvituksen avulla, mikä on luovuuden perustaa. Tällöin mentaalinen mieli edustaa yksilöä tai laajempaa kulttuuria, joihin mentaalinen merkitys on jättänyt jälkiä.

Vertikaalinen matematiikka tarkoittaa vallitsevaa tieteenalaperäistä matematiikkaa. Tarvitaan myös horisontaalista näkökulmaa, joka voi tukea luovuutta sekä opitun yksilöllistämistä ja käytettävyyttä. Sekä horisontaalinen että vertikaalinen tulkinta tarvitsevat sekä teoreettisia että empiirisiä työkaluja. Francis Baconin (1561-1626) kerrotaan todenneen: Empiristi on kuin muurahainen, joka vain kantaa neulasia kekkoon ja teoreetikko on kuin hämähäkki, joka vain rakentaa verkkoaan. Paras tulos saadaan näiden synteeseillä, joka toimii kuin mehiläinen, kerää mettä ja panee lopputulokseen jotakin itsestään, sylkeään, saadakseen hunajaa (Alanen 1989, 31). Tavoiteltava mehiläisen matematiikka sisältää näin sekä vertikaalisen että horisontaalisen ulottuvuuden.

## 8 TUTKIMUKSEN POHDINTA

### 8.1 Tutkimuksen teoreettinen merkitys

Karkea pitkittäisjuonne talonpoikaisyhteiskunnasta suunnittelulouteen on johtanut matematiikan keksimisestä valmiin matematiikan löytämiseen. Elämismaailman toiminnallinen matematiikka on muuttunut käsitteelliseksi ja formaaliksi. Miten matematiikka ilmenee kokemuksessa, on edelleen kulttuuriperäistä. Yleiset oppimistavoitteet suuntaavat kehitystä, missä menneisyys, nykyisyys ja tulevaisuus ovat läsnä samanaikaisesti luoden erilaisia merkityksiä muutosten suunnasta. Tieteenhistorian perusteella matematiikan kehitys indikoi yhteiskuntamuutoksia, joiden ennakointi oppivelvollisuuskoulussa tuo uudenlaisia mahdollisuuksia koulumatematiikkaan.

Oppilaiden ja opettajien erilaiset elämismaailmalliset merkitykset ovat mahdollisuuksia oppimispoluilla, joiden dialogi on tavoitteena. Tällöin koulumatematiikan staattisuus ja oikein/väärin filosofia muuttuu dynaamiseksi ja erilaisia mahdollisuuksia sisältäväksi. Tutkimukseni lisäarvo merkitsee yksilöllisyyden monimuotoisuutta perustanaan koulumatematiikan oppimiskonteksti. Yksilön suuntautuminen ja yhteiskunnan odotus ovat vuorovaikutuksessa, missä erilaisten matematiikan funktioiden verkosto antaa vaikutelman matematiikkailmiöstä.

Yksilön suuntautuminen (intentiot: intressit, intuitiot, funktiot, keksiminen/löytäminen) ja yhteiskunnan kehityshaasteet kohtaavat oppilaan oppimispolulla, jonka merkitysten rakentumista tutkimuspolku kuvaa mahdollisuuksina yksilöllistyä. Tutkimuspolku enteilee asennoitumistavan muutosta koulumatematiikkaan, missä oppilaat rakentavat oppimispolkuaan oman osaamisensa lähtökohdista. Perustelu muutostarpeelle rakentuu koulumatematiikan kehityshistoriasta ja koululuokissa vallitsevasta todellisuudesta. Ulkoinen ja sisäinen, näkyvä ja näkymätön, paljastuva ja kätkeytynyt (Heidegger); ilmenevät mahdollisuuksina keksiä (horisontaalinen) tai löytää (vertikaalinen). Tutkimuksen teoreettinen merkitys vahvistaa fenomenologista koulumatematiikkaa yksilön elinikäisellä oppimispolulla, missä elämismaailmassa merkitykselliset symbolit ja merkitysrakenteet toimivat oppimisen lähtökohtina (myös Freudenthal 1983).

Yhteiskunnallinen muutos peruskouluun siirtymisvaiheessa heijastui koulumatematiikkaan, jolloin koulumatematiikka teoretisoitui. Uutta muutosta ennustavat yhteiskunnan meneillään oleva rakennemuutos, konstruktivistinen oppimiskäsitys ja oppimisen yksilöllistämisen tavoite. Koulumatematiikkaan liittyvät kasvatus- ja oppimiskäsityksen sekä yhteiskunnan tarpeiden muutos voi johtaa paradigmanmuutokseen, mitä matematiikan keksiminen edustaa (luku 6.3.1). Mahdollisen paradigmanmuutoksen perustana on yksilön potentiaalit entisen yleisen odotuksen sijasta.

Tieteiden kuningattareksikin nimetty matematiikka (mm. Boyer 2000) ilmenee kietoutuneena ympärillämme ja meihin tietoisesti, esitietoisesti tai tiedostamattomasti heijastuen elämäämme. Matematiikka fysiikan palveluksessa vahvistui 1600-luvulla, josta ajasta lähtien teknologinen kehitys on ollut huimaa. Fysiikan ensimmäiset sovellutukset, yksinkertaiset koneet (mm. vasara, vipu, vintturi, kirves, pora) helpottivat ihmisten arkea välineellisesti ja välineellinen kehitys on jatkunut. Uudistuminen kehittyi uuden ajan alusta enemmän välineellisesti kuin itseisarvoisesti ja tuki ulkoista taloudellista kasvua enemmän kuin sisäistä henkistä kasvua. Matematiikka vahvistui tällöin enemmän valtapyrkimyksiä kuin toistensa ymmärtämistä.

Aikuiskasvatukseen alaan liittämäni yksilön kokemuksellinen ja itseisarvoinen matematiikka sisäisenä henkisenä kasvuna on jäänyt vähemmälle huomiolle, vaikka ihmisen mahdollisuuksiin uskova renessanssin ja valistuksen hengen herättely vahvistui myös 1600-luvulla. Tuossa vaiheessa voimaantunut matematiikka ja kasvatusajattelu olisivat myös voineet jatkaa voittokulkuaan, mikäli poliittinen ajattelu olisi matematiikan integrointia aikuiskasvatukseen tukenut. Mitä koulumatematiikka ilmenee tulevaisuudessa, välittyy ihmisten valinnoista, kuten fysiikankin kohdalla. Kyse on poliittisesta tahdosta, haluammeko vahvistaa yksilöllisen kokemuksellisen elinikäisen kasvun tavoitetta suhteessa koulumatematiikkaan.

Descartesin työ tietoisuuden tutkimuksen ja matematiikan uudistajana sijoittuu 1600-luvun aikakauteen, jolloin keksimisellä oli yhteiskunnallinen tilaus Kopeniuksen, Keplerin, Galilein ja Newtonin työn täsmentäjinä. Antiikin ja keskiajan perinnön jatkajina matemaatikot olisivat voineet jatkaa ihmisenä olemisen ja totuuden tutkimustaan Aristoteleen metafysiikassaan (1990) viitoittamaa tietä myös aikuiskasvatustieteilijöinä, missä taustalla vaikuttaa herättelevä renessanssin ja valistuksen arvomaailma. Tällöin yksilön tietämään pyrkiminen sivistyksenä olisi ollut toteutunutta luonnontieteiden soveltamaa välineellisyyttä tär-

keämpää. Mikäli poliittinen ja kulttuurinen tahtotila olisi ollut suopeampi painottamaan tieteessä ihmisen fenomenologista olemusta luovuuden ja kekseliäisyyden perustana, orientaatiomme koulumatematiikkaan olisi nyt erilainen. Nykykoulun kehityshaasteena voi pitää erilaisuuksien tukemisen edistämistä.

Edelleen 1700-luvulta lähtien Kant, Herder, Hegel, Scheler, Mach, Dewey, Husserl, Heidegger ja Habermas ovat tutkimustuloksillaan pyrkineet siirtämään fokusta ihmiseen päin onnistumatta valtavirtaa kääntämään 1900-luvun analyysin voittokulun ja synteesin tappion vuosina. 2000-luvun yhteiskunnallinen tilanne vaatii ihmisen osallistamista elinikäisen kasvun ja kestäväen kehityksen turvaajana. Motivaatioperustana muutokseen on yksilöllisen suuntautumisen tukeminen, mitä tiedonintressit (tekninen, praktinen, emansipatorinen, veristinen, metafyyinen, persoonallinen) ja yksilölliset toiminnalliset funktiot edustavat. Vaihtoehtoisia hahmotus- ja ajattelutaipumuksia auttaa tunnistamaan horisontaalinen ja vertikaalinen matematiikka (taulukko 5, luku 7.3). 2000-luvun oppimisen yksilöllistäminen on peruskoulumuutokseen rinnastettava suuntautumisen ja suhtautumistavan muutos.

Monet matemaatikot ovat olleet kiinnostuneita yhteiskuntateoriasta ja oikeudenmukaisen yhteiskunnan rakentamisesta. He ovat mahdollistaneet tieteellisten saavutustensa kautta yhteydet ajattelun kehittymiseen ja uuden teknologian kehittämiseen. Matematiikalla on itsenään ja vaikutustensa kautta välineellisesti merkittävää kulttuurista, poliittista ja tieteellistä valtaa. Tutkimuspolku laajentaa laadullisuuden kehystekijöitä, joiden perustalta matematiikan arvokas ja ajaton kehitys voi jatkua. Lohdullista on tunnistaa, että kaikkea tarvittavaa matematiikkaa ei ole vielä keksitty ja moni matematiikan keksintö on vailla sovellutuskohdetta.

Kontekstin huomioiminen on jäänyt koulumatematiikan osalta historiaan opetusaineen teoreettisuuden voimistuessa. Tutkimuspolku tukee nykyistä opetussuunnitelmakehitystä etenkin koulumatematiikan yhteiskuntayhteyksien laaja-alaisuuden merkityksessä. Koulumatematiikan oppimisen laaja-alaisuuden elämänsämaailmalähtöisesti tulevaisuuden yhteiskunnan tarpeissa ja yhteiskuntaan vaikuttamiseksi on yhä tärkeämpää. Yhteiskuntakehityksen ja yksilön kasvun taustalla vaikuttaa keskeisesti matematiikka. 2000-luvun opetussuunnitelmien velvoiteperustaisuus on saanut rinnalleen laaja-alaiset taitotavoitteet (L1-L7), joiden yhdistäminen teoreettisiin opetusaineen sisällöllisiin tavoitteisiin edellyttää oppilaan suuntautuneisuuden tukemista ja yhteiskuntayhteyksiin liittämistä. Oppilaan varhais-, esi- ja alkuopetuksessa kehittyneen oppimisen orientaatiope-

rustan vahvistaminen yläkoulussa tukee yksilöllisten oppimispolkujen rakentamista elinikäisesti.

Holistisena ontologisena ja teoreettisena löydöksenä matematiikkailmiö ilmenee kokemuksessa, ympäröivän maailman rakenteissa ja rakentamisessa. Tällöin myös koulumatematiikalla on erilaisia merkityksiä, joita ei voi tarkastella mitta-teoreettisesti oikein – väärin asteikoilla. Kokemuksellisuus tuo mukanaan yhteiskunnallisen kontekstin, minkä perustalta koulumatematiikka tuntuu, näyttää, vaikuttaa, funktionalisoituu tai palvelee eri tavoin yksilöllisen oppimispolun rakentamista. Tällöin koulumatematiikan oppimistavoite on tulla tietoiseksi osamisestaan ja intresseistään. Oppimispolun rakentamisen tavoite on suuntautua oman tulevaisuuden sekä tavoiteltavan ja mahdollisen yhteisen tulevaisuuden rakentamiseen. Oppimisen kiinnittäminen kontekstiin lisää mielekkääksi kokemista. Matematiikkaa liittyy eri asiayhteyksiin ja ammatteihin eri tavoin. Yksilöllinen oppimispolku mahdollistaa matematiikan liittämisen tärkeäksi koettuun jo peruskouluvaiheessa, mistä polun rakentaminen jatkuu elinikäisesti.

Tutkimus luo teoriaa merkityksien synnystä ja tietoisuuspyrkimyksistä. Teoreettinen merkitys on perustella oppilaan (tutkijan) yksilöllisiä lähtökohtia koulumatematiikan oppimiselle kontekstin lähtökohdista ja löytää keskeisiä koulumatematiikan kehitystä ohjanneita perusteita. Tutkimuspolku luo pitkäjäisinjoja koulumatematiikan ymmärtämiseen elämismaailman kontekstissa ennen, nyt ja tulevaisuuteen suuntautuen. Tieteen kehityksen historiallisten tutkimusten (luvut 4.3.3 ja 6) mukaan tieteen tekemisen yhteisöistä löytyy kontekstin vaikutus ja tieteilijän yksilöllisen työn jälki, millä on merkitystä edelleen. Oppimisen ja tutkimisen aika- ja paikkasidonnaisuus välittyy kulttuurin, politiikan ja tieteen kentässä. Analogia tutkimuspolun ja oppilaan oppimispolun välillä tarkoittaa sidonnaisuuksista tilanteissa kehittyvää merkitysten jatkumoa. Merkitysjälkien aika ja paikka sitoutuvat matematiikkaan, vaikka tieteellinen matematiikka yleensä tulkitaan ajattomaksi ja ihmisen kokemuksesta riippumattomaksi. Tulevaisuuden mahdollisuudet riippuvat ihmisistä.

Kaikilla suomalaisilla on ollut oikeus opiskella yhtenäiskoulun oppiaineena matematiikkaa 1970-luvulta lähtien. Sitä ennen rinnakkaiskoulujärjestelmässä matematiikkaan liitetyt oppiaineet olivat kierto-, kansa- ja kansalaiskoulussa luvunlasku (Karttunen 1930), laskento ja mittausoppi sekä keskikoulussa aritmetiikka, algebra, geometria ja trigonometria. Suunnittelutalouden voimistuessa yhteiskunnan rakennemuutosta kuvaava tiedonintressi muuttui talonpoikaiskulttuurin praktisesta tiedonintressistä teollisuusyhteiskunnan tekniseksi tiedonint-

ressiksi. Tulevaisuuden koulumatematiikka rakentuu intressien huomioimisen ja laajentamisen perustalta.

Peruskoulun alkamisesta vuoteen 1985 vaikuttanut rinnakkaiskoulun jäännös, monitasoisuus (kolme tasokurssia), saa nykyperuskoulussa rinnalleen yksilöllisten oppimispolkujen rakentamisen, joka mahdollistaa yksilön taitojen ja valmiuksien mukaisen etenemisen. 1960 -luvulla opiskelemani kansakoululaskento toteutui yhteisön arvoihin kytkeytyvänä peruslaskemisen ja arvioinnin taitona, matemaattisena ajatteluna, jossa korostui elämänyhteyksiin kytkeytyneet ongelmanratkaisut. Keskikoulusta siirtynyt (nyt jo keventynyt) peruskoulun koulumatematiikka on tieteenalan formaalisia perusteita korostavaa. Nykykehitys koulumatematiikan ymmärtämiseen näyttää siirtyvän uudelleen ihmiseen päin etenkin uusien opetussuunnitelmien laaja-alaisuuden ja tietoteknisten sovellutusten kautta. Jo alakoulussa koodataan ja ohjelmoidaan, mikä yhdistyy matematiikan oppiaineeseen.

Varhais-, esi- ja alkukasvatuksen matematiikan opetussuunnitelma on ihmislähtöinen. Ympäristöä havainnoidaan luonnollisin eväin. Nivel alakoulu – yläkoulu on avainkohta, missä aikaisemmin opitut valmiudet ja taipumukset tulisi ottaa opetuksen lähtökohdiksi. Yläkoulun opettajat ovat saaneet koulutuksen matematiikkatieteestä, jolloin on luonnollista, että lähtökohdat opetukselle muotoutuvat matematiikkatieteenalan kategorisoinneista, ei yksilön kasvun lähtökohdista, mikä luokanopettajakoulutuksessa toteutuu. Kehitystä on tapahtunut, mutta koulukohtaiset erot kasvavat. Opetuksen inhimillistäminen jää opettajan tai koulun vastuulle, jolloin opettajan koulutuksensa ja kokemuksensa kautta omaksumat käsitykset tulisi pyrkiä jakamaan ja tiedostamaan laajentaen niitä yhteiseksi hyväksi. Jaettuna myös opettajan subjektiivinen tarkoituksenmukaisuus (ks. myös luku 9.1) voi laajentaa yhteistä kokemusta koulumatematiikan merkityksistä yleissivistyksensä.

Matemaattinen yleissivistys on keskeinen peruste elämämaailmojen kehittymiselle, mitä tutkimuspolku ilmentää. Tällöin sisäinen ymmärrys ilmenee merkityksinä ja intentionaalisuutena. Yhteiskuntien kehittyminen osana ihmisten valikoivaa dialogia toteutuu riippuvaisena ihmisestä (luvut 4.3.4; 6). Matemaattinen sivistys on myös valmiutta ymmärtää ja rakentaa dialogia arjen ilmiöiden ja eri tieteiden välissä. Eri näkökulmista maailma näyttäytyy moni-ilmeisenä ja monitieteisenä matematiikkailmiönä. Matematiikan ulkoiset vaikutukset yhteiskuntaan ilmenevät vuorovaikutuksina horisontaalisessa merkityksessä ja hierarkioina vertikaalisessa merkityksessä.

Matematiikkailmiölle elämismaailmassa ei ole olemassa yksikäsitteisiä syitä, vaan useat syyt vaikuttavat samanaikaisesti koulumatematiikkakokemuksen taustalla. Oppilas tai opettaja koululuokassa, tutkija työhuoneessaan tai työntekijä työssään rakentaa toimintaansa ohjaavaa oppimispolkuaan ja sen dialogia havaintojensa perustalta. Tällöin yksilöllisellä kokemuksella on keskeinen merkitys. Kokemus tieteellisessä tutkimuksessa tarkoittaa yleensä empiriaa, joka tutkimuksessa ulkoistetaan kokeeksi tai tutkimuskysymyksi (metodologinen naturalismi), jolloin tutkija jäävää kokemuksensa tutkimuksen ulkopuolelle.

Tutkimuspolulla olen mukana tutkimuskohteessa, jonka tavoitteena on tavoittaa sisäsyntyisiä merkityksiä. Sisäinen kokemus koulumatematiikasta ohjaa prosessia ja luo merkityksiä koulumatematiikan kiehtovuudesta ja sen merkityksistä elämismaailmassa. Kokemus tutkimuspolun merkityksessä eroaa matematiikassa vallitsevasta analyttinen apriori perustasta. Kokemuksen perustana oleva talonpoikaisjärki sisältää synteettiset tiedot apriori ja aposteriori, jotka yhdistävät havaintokokemuksen ja järjen. Kokemuksen käsitteen sisäinen ja synteettinen laajennus on lisäarvo tutkimukseni teoreettiselle ja käytännölliselle merkitykselle.

Tutkimuksen rakenne on kokonaisuus, jossa tarkastelen matematiikkaa elämismaailmassa ja koulumatematiikan historiallista muutosta koulutodellisuuteen peilaten. Koulumatematiikasta kouluyhteisöissä ja elämismaailmoissa syntyneet ymmärryksen tavat ovat ohjaavien toimintakenttien ja kokemusten monimuotoisuuden vaikutuksesta hajaantuneet, mistä on seurannut kohtaanto-ongelmia käytännön koulutilanteissa. Yleinen yksimielisyys kouluoppimista ohjaavan muutoksen suunnan perusteluista puuttuu. Muutosten merkitykset ovat tuottaneet erilaisia tulkintoja siitä, mistä muutoksessa on kysymys. Tällöin tavoiteltavat laaja-alaiset taidot eivät ole täysin toteutuneet käytännössä tai ne ovat toteutuneet yksittäisten opettajien tai koulujen pedagogisen vapauden piirissä. Teoreettinen dikotomia horisontaalinen ja vertikaalinen matematiikka on malli, jonka perustalta koettujen merkitysten hajaantumista voi tulkita.

Vertikaalinen toiminnallinen funktio edustaa teoreettista perinnettä ja horisontaalinen uutta luovaa tulevaisuuteen suuntaavaa yksilöllisyyttä. Näkökulmat tulevat toisiaan. Horisontaalisuus edustaa yksilölähtöisyyttä oppimispolun laaja-alaisen taitotavoitteiden suunnassa. Mukana oppimispolulla on koulumatematiikan soveltaminen, minkä kuulumisen perusopetukseen voi perustella oppimisen laaja-alaisilla taitotavoitteilla. Tutkimuspolku ilmentää matematiikkaa soveltavaa horisontaalista näkökulmaa koulumatematiikkaan. Tieteellisesti omaperäi-

nen ja koulupoliittisen tilanteen kannalta ajankohtainen tutkimus kehittää teoriaa kohti oppimisen syvällisyyttä.

Historiassaan matematiikka on ollut yhteydessä eri aikakausien yhteiskunnan arvostuksiin ja tarpeisiin. Koulumatematiikka on kehittynyt filosofian ja matematiikan perustalta varovaisin askelin. Matematiikkaa on ilmennyt myös elämäntavassa arjessa (yksityinen). Keksiminen ei tapahdu pelkästään tiedeyhteisöissä (julkinen). Julkisen ja yksityisen murrosvaiheessa (Suomessa 1970-luku) koulumatematiikan opetukselle syntyi uudenlaisia haasteita ja vaatimuksia, mikä tieteen kriisistä 1900-luvulta lähtien ratkaistiin koulumatematiikan kanonisoimisena. Suomessa peruskouluun siirtyminen toi tasa-arvoiset mahdollisuudet tiedeperustaisen koulumatematiikan opiskeluun. Seuraavan opetussuunnitelman kynnyksellä lähenemme uutta murrosta. Kasvatus yhdistettynä koulumatematiikkaan antaa tilaa uudistamiselle, mikä voi tarkoittaa peruskoulu-uudistukseen verrattavaa suurta muutosta oppimisen yksilöllistämisen näkökulmasta, jolloin yksityinen saa uuden roolin julkisen järjestelmän rinnalla.

## 8.2 Tutkimuksen käytännöllinen merkitys koulumatematiikan tulevaisuudelle

Yläkouluvaiheen koulumatematiikka on matematiikan opetuksen uudistavien kehittämistoimenpiteiden tärkein kohde. Opiskeluasenteiden ja motiivien tukeminen tarvitsee uusia otteita kohti yksilöllisesti suuntautuneita käytäntöjä. Koulutyön uudistamisessa on tärkeää, että kaikki koulutoimijat mieltävät muutoksen tarpeellisuuden. Toimintaa tukee yhteisrintamassa eteneminen. Koulumatematiikan sisäiset itseisarvoiset tiedonintressit (metafyysinen, persoonallinen) puuttuvat teoreettista (veristinen) intressiä lukuun ottamatta tietosanakirjojen kuvauksista ja opetussuunnitelmien perusteista. Sisäiset motiivit ilmenevät heikkouksina myös oppimistulosten seuranta tutkimuksissa (PISA, TIMMS, OPH, MAOL).

Sisäisyyteen liittyvä kokemus on ollut tieteenfilosofien ja kasvatustieteilijöiden kiistojen aihe, mikä epäselvyys osaltaan selittää sisäisten motiivien opetuskäytännöissä ilmeneviä puutteita. Tutkimuksen käytännöllinen merkitys koulumatematiikan tulevaisuudelle tukee sisäisten intressien, yksilöllisen luovuuden ja ongelmanratkaisutaitojen merkityksiä oppilaan omista lähtökohdista. Merkitysho-

risonttien esimerkkinä tutkimuspolulla on talonpoikainen sivistysperintö, mikä osoittaa kulttuurista vaikuttavuutta kokemuksessani ja yleisesti kulttuurin suuntaavia merkityksiä. Yksilön matematiikkaan suuntautumisessa ilmenee yleisesti jälkiä kulttuurisista vaikutteista, jotka ilmenevät luokkahuoneissa monimuotoisesti.

Kulttuuriperäinen kokemus matematiikasta ohjaa oppimista ja itsekasvatusta. Koulumatematiikassa harjaantuminen on itsekasvatusta ja elämisen taitoa suuntaanaan tulevaisuus, mitä Hollo (1931a, 12) kuvaa: "Toiset voivat minua yrittää kasvattaa ollenkaan kysymättä, tahdonko minä itse kasvaa heidän toiveidensa ja tarkoitustensa mukaan, mutta heidän yrityksensä onnistuu vain silloin, kun oma tahtoni ja pyrkimykseni on sitä tukemassa." Kasvatuksen tulkinnassa itsekasvatuksen rooli on väistynyt sosiaalisten taitojen, odotuksen ja ulkoisen arvioinnin korostuessa. Hollon kasvatusoppi kelpaa kasvatuskeskustelujen perustaksi edelleen. Viime kädessä aina, ihminen itse kasvattaa itsensä; valitsee sen, mitä kuuntelee, mihin osallistuu ja miten rakentaa elämänsä suhteessa koulumatematiikkaan. Yksilö ja olosuhteet ovat itsekasvatuksen perustana. Tällöin kehystekijät (kulttuuri, politiikka, tiede) ovat itsekasvatuksen lähtökohtia koulumatematiikkaan.

Kulttuurin kentässä matematiikka elää tunnistaen matematiikkaa elinkeinon harjoittamisessa (talonpoikaiskulttuuri), yleisesti kulttuurin muutoksen taustalla (evoluutio) ja taustavaikuttajana tieteen kehityksessä (vaikutukset). Matematiikka ei ole vain opittu formaalinen järjestelmä, vaan ihmisen mieli työstää sitä ja hakee sille merkityksiä. Matematiikan oppimisen tarkoitus ei ole pelkästään antaa työvälineitä matemaattisten ongelmien ratkaisuun, vaan toimia myös itseisarvoisena metodina todellisuuden ymmärtämisessä, jäsentämisessä ja järjestämisessä. Kokemuksen primääritasoa ilmentää yksilöllinen sisäinen intuitio.

Politiikan ja tieteen kentässä katse kohdistuu koulumatematiikkaan ja sen juuriin. Koulumatematiikka näkyy opetussuunnitelman huomion kohteissa ja opetussisällöissä, joiden juuret ovat opetussuunnitelmateorian ja matematiikan filosofiassa ja historiassa. Kohtaanto-ongelmien ratkaisua tukee vastakkain asettelu kentän viimeisen luvun sisäinen ja ulkoinen (alaluvut 4.3, 5.3 ja 6.3). Opetustilanteissa matematiikka ilmenee sisäisesti yksilöllisinä funktioina ja matematiikan keksimisenä. Ulkoisesti yhteiskunnassa matematiikka ilmenee sen tehtävinä ja löytämisenä. Tutkimuspolku tavoitteena on ymmärtää kokonaisuutta, johon kehystekijöiden jäsenitys liittyy. Kulttuurinen matematiikka laajentaa kouluma-

tematiikkaa elämismaailmassa ja -maailmasta. Tällöin koulumatematiikka voi tarkoittaa myös vielä keksimätöntä tai käsitteetöntä matematiikkaa.

Koulumatematiikkaa tarvitaan kansalaistaitona, mikä on yleissivistyksensä kaikille ihmisille välttämätöntä nykyajan arjessa ja erilaisissa työtehtävissä. Yhteiskunnallinen kiinnostus ja ”maailman muuttaminen matematiikalla” kaikille ihmisille paremmaksi on tulevaisuuden missio. Koulutuksella yleisesti ja matematiikalla erityisesti on tällainen yhteiskuntaa uudistava tehtävä. Tieteen edistys, soveltaminen ja tulkinta vaikuttavat yhteiskuntien kehittymiseen eri tasoilla. Päättelyn välineitä, malleja, vaikutteita ja mahdollisuuksia tarjoaa elämismaailmalähtöinen koulumatematiikka, jonka ongelmat ovat kokemuksellisesti mielekkäitä ja rakentavat merkityksiä.

Ongelmanratkaisu on elämismaailmalähtöistä, elävän elämän tilanteista kumpuavaa problematisointia tai ristiriitojen tunnistamista. Olennaisinta on ongelman tunnistaminen. Ratkaisun rakentuminen voi joskus kestää jopa koko elämän ajan. Kun on keksinyt haastavan ongelman, sen ratkaiseminen on päämääränä, vaikka ratkaisun esittäminen ja toteuttaminen kestäisikin. Omasta elämästä kumpuavat ongelmat voivat kasvattaa sitkeyttä ja pitkäjänteisyyttä, mitä matematiikan hyödyntämisessä tarvitaan. Ongelmanratkaisu harjaannuttaa päättelyä ja voi johtaa yrityksen perustamiseen tai eri tavoin itsensä työllistämiseen.

Matematiikkailmiö perustelee yleisesti elämismaailmaan sisältyvän monimuotoisuuden, monitieteisyyden ja merkitysten moninaisuuden. Tutkimuspolun yhteenveto, matematiikkailmiö, liittyy yhteen merkityksiä, joiden taaksepäin katsele johtaa ilmiölähtöisyyteen. Ilmiölähtöisyys voi toimia laaja-alaisen opiskelun lähtökohtana. Matematiikkailmiö yhdistää merkityksiä (intressit, intuitio, funktiot, keksiminen), jotka ovat lähtökohdiltaan subjektiivisia. Itse keksityn jäsenyksen tulokset tukevat yksilöllisen oppimispolun rakentamisen perusteita yleisesti. Jokainen oppilas rakentaa oppimispolkuaan omalla tavallaan, jota yksilöllinen oppimisstrategia tukee. Tällöin oppilaan yksilöllisyys, luovuus ja kekseliäisyys ovat potentiaaleja uudistaa koulumatematiikkaa.

Opettajan työssä ilmiölähtöisyyden ongelmana on opetussuunnitelman tavoitteiden, tieteellisten perusteiden ja motivoivien ongelmien yhtensovittaminen, joissa usein joutuu tekemään kompromisseja ja ottamaan kantaa omaperäisyyden merkityksille. Opettaja ottaa suuremman pedagogisen ja oppimistavoitteisiin liittyvän vastuun työstä, kuin jos vain opettaisi oppikirjan tai ennakkosuunnitelman mukaan. Ilmiölähtöisyys tarkoittaa, että opettaja sietää enemmän keskeneräisyyttä, pinnallisuutta ja tehtävään orientoitumattoman tukemista, mutta parhaimmillaan työnäytteet voivat yllättää jäsenyntyneisyydellään, johdonmukai-

suudellaan ja omaperäisyydellään. Ilmiölähtöisyyden arviointiperusteina omaperäisyys, johdonmukaisuus, jäsentely, järjestys, päättely, perustelu, argumentointi, oivaltavuus, kirjoitustyyli ja aiheen mukainen käsittely liittyvät matematiikkaan ja ovat näin osa matematiikkailmiötä. Ilmiölähtöisyyden perustana on oppilaan intressit. Matematiikkailmiön voi liittää lähes mihin tahansa oppiaineeseen ja arjen ilmiöön. Ilmiöiden jäsentämisessä on useita ratkaisuvaihtoehtoja.

Ilmiölähtöisyys ja ongelmanratkaisu edustavat holistista lähtökohtaa, joissa ratkaisijan kyky tunnistaa merkityksiä korostuu. Myös aikakausilehdet tarjoavat ongelmanratkaisutehtäviä, jotka ovat yksinkertaistuksia arjen ilmiöistä. Ongelmanratkaisutehtävät, loogiset probleemat, ovat ihmisten arjesta kauan sitten muotoutuneita havaintoja ongelmista, joita sisältyi myös koululaisen muistikirjaan 1980-luvulle saakka. Yrjö Karilaan (1950) Antero Vipunen -teos kuului tuolloin vielä monen koululaisen vapaa-aikaan. Edelleen joissakin kouluissa ajattelua aktivoivia pähkinöitä käytetään harrastuneisuuden ja oppimisen syventämiseen. Oppilaat kokevat ajattelupähkinät usein kiehtovina ja kiinnostavina.

Matematiikan soveltaminen ei ole kuulunut oppivelvollisuuskoulun matematiikkaan. Tällöin on ajateltu, että on opetettava ensin perusasiat, jonka jälkeen vasta soveltaminen mahdollistuu. On myös mahdollista, että soveltaminen ja matematiikan perusteiden opiskelu kulkevat rinnakkain. Soveltaminen haastaa matematiikan opetuksen uudistamisen ja koulumatematiikan dialogiseen uudelleentulkinnan. Soveltamista perustelee uusi teknologia, joka tekee mekaanisen laskutyön. Soveltaminen edellyttää matemaattisten työvälineiden käytön ymmärtämistä. Matematiikan ymmärtäminen, soveltaminen ja transformointi edellyttävät syvällisempää perusmatematiikan osaamista. Tutkimuspolulla opetuksen kehittäminen on törmännyt koulumatematiikan määritelmällisiin ja formaalisiin esteisiin. Soveltamismahdollisuus tuo opetukseen kokeellisen, havainnollistavan ja kiehtovan lisän.

Samanaikaisesti, kun koulumatematiikkaa pidetään formaalisena ja objektiivisena tieteenalana, sen oppimisen tutkimuksellisuutta korostavat ilmiölähtöiset lähtökohdat korostuvat. Vastakohtaiset tavoitteet tarvitsevat avukseen dialogia. Tällöin matematiikka on yksilöllisesti koettava, jotta siitä saa otteen. Opiskelijan otteen tukemiseksi oppivelvollisuuskoulun matematiikka rakentuu yksilöllisen oppimispolun suuntaan, missä yksilöllinen tiedostaminen on avainasemassa. Tällöin mukana ovat sekä tunteet että järki, jotka ohjaavat strategisesti oppimisprosessia. Ei ole olemassa vääränlaista järkeä tai vääränlaisia tunteita, koska tunteet ja järki ovat seurausta kokemuksesta, joka on koettu aikaisemmin.

Kokemuslähtöisesti ihminen ei varsinaisesti voi ajatella väärin tai kokea väärin, vaan ajattelun perusteet voivat myös vääristyä kontekstuaalisista tai inhimillisistä syistä. Ihmisen puolustusmekanismit saattavat estää oman mentaalisen mielen lähteiden tavoittamisen. Koulun yhdenmukaistava eli konformistinen toimintatapa voi estää yksilöllisten ideoiden laajamittaisen käytön. Älykkäät ihmiset voivat jäädä yksin tai joutua kiusauksen kohteeksi, koska yksilöllisyyttä ja luovuutta ei tueta keskustelukäytännöissä riittävästi. Uudet ideat tuottavat usein lisää työtä, jolloin ne saattavat hukkua tehokkuusvaatimusten taakse. Tällöin opetus suunnitelman teoreettinen odotus voi jäädä hallitsevaksi.

Tutkimus tukee koulumatematiikan tulevaisuuden rakentamista yksilön potentiaalien tukemisena, jossa korostuvat itsearviointi, avoimuus, luovuus ja rehellisyys todellisuudelle. Oppilaan yksilöllisyyden tunnistaminen ja itsearviointitaitojen kehittäminen tarvitsevat luovaa kekseliäisyyttä ja omalähtöisyyttä tukevaa matematiikkakasvatusta estämään yläkouluvaiheen koulumatematiikan opiskelun jumiutumista ja taantumista. Yksilöllisten oppimismahdollisuuksien turvaaminen tarvitsee laajentuvaa kehysajattelua. Tutkimuspolku analogisena oppimispolulle palvelee peruskoulun matematiikan opettamisen kehittämistä, jonka perusteet eri oppilaille ovat erilaisia.

Tutkimus kunnioittaa oppilaan yhdenvertaisia oikeuksia yksilöllisyyttä ja oppimisen jatkuvuutta tukien. Aktivoituakseen oppilas tarvitsee tukea, joka on linjassa hänen ymmärryksensä itsestään. Itseymmärrystä tukee itsearviointi ja itsearvioinnin merkitysten ymmärtäminen. Itsearviointi koskee oppijan oppimastaan rakentamia merkityksiä ja hänen oppimisen taitojen kehitystä. Itsearviointi toteutuu itseään varten, tukena yksilölliselle oppimiselle. Oppimalla arvioimaan itseään oppija ohjaa oppimisprosessiaan yksilöllisyytensä mukaisella tavalla.

Talonpoikaisyhteisössä itsearviointi oli itse itsestään oppimista, missä työn tekeminen edistyi arvioimalla työn ja oppimisen prosessia ja tuloksia. Työ toteutui toiminnassa itse keksimällä. Kuvaamani kulttuuriset merkitykset tuovat vertailukohdan oppimisen ja opetuksen käytännöllistämiseen, missä itsearviointi on opiskelun ja oppimisen perusta. Tällöin arvio itsestä ei tarkoita, että olen oppinut asian tai en ole oppinut asiaa, vaan vastauksena kysymykseen, miten olen oppinut, mitä olen oppinut, mitä haluan ymmärtää paremmin, mikä vaikutti minuun erityisesti, miten haluan edetä, mitä en ymmärrä, mikä ei kiinnosta. Itsearvio ei ole vastaus odotukseen, vaan siihen, mitä *itse itseltään vaatii*.

Opetussuunnitelman perusteiden (2014) arvoperusta ja tavoitteet on normi, jonka tarkkaan kirjoitetut ohjeet opettaja voi kokea myös rajoittavan pedagogista vapauttaan oppilaan ohjaamisessa. Etenkin luovuuden toteutumisen kannalta

normi ei anna riittävästi liikkumatilaa. Samalla kun ohjeistetaan opettajaa tarkkaan, rajoitetaan opettajan itsenäisten ajattelutaitojen kehitystä, joka vaikuttaa myös oppilaan itsenäisten ajattelutaitojen kehitykseen. Jos halutaan tukea luovuuden toteutumista ja itsenäisten ajattelutaitojen kehittämistä, ne pitäisi mahdollistaa paremmin myös opettamista koskevassa ohjeistuksessa. Perusopetuksen tehtävää voidaan tarkastella sen opetus- ja kasvatustehtävän, yhteiskunnallisen tehtävän, kulttuuritehtävän sekä tulevaisuustehtävän näkökulmasta (POPS 2014, 18). Luovuuden ja kekseliäisyyden toteutuminen käytännössä edellyttää, että erilaisuutta tuetaan aktiivisesti. Paljon on kouluissa tapahtunut 2000-luvulla esittämiäni näkökulmien suuntaan, mutta erilaisuuden merkitys luovuutta tuke-  
massa saattaa luokkahuoneissa hukkuu (vrt. Matteusilmiö, luku 4.3.3).

Opetussuunnitelman kasvatustehtävä tukee yhteiskunta-, kulttuuri- ja tulevaisuustehtävän näkökulmasta laaja-alaisia oppimisen taitoja pitkäjänteisesti. Tällöin tiede- ja tiedostamiskasvatus yhdistettynä koulumatematiikkaan tukevat tehtävän tavoittelua. Valmentaminen suuntautumiseen edellyttää johdonmukaisuutta koko työyhteisöltä. Oppilaan kokemukselliset funktiot ovat tällöin oppimispolun rakentamisen perustana. Jos vapaus on oppilaalle tärkeää, se edellyttää riittävää itseuria ja tehtäväorientaatiota. Jos tarkat ohjeet ovat oppilaalle tärkeitä, ohjeistus on perusteltua. Jos vähättelee itseään ja on kriittinen itselleen, tarvitsee kannustavaa tukea. Toiset tarvitsevat rohkaisua, toiset taas järjestystä ja turvallisuutta tuovia rajoja.

Jos oppilas on suuntautunut musiikkiin, kuvataiteisiin tai historiaan, matematiikan osia ja tutkimustehtäviä voi sisällyttää niiden alaan. Jos oppilas on suuntautunut yhteiskuntaetiikkaan materiaalsen, sosiaalsen, kulttuurisen tai taloudellisen kestävyuden merkityksessä, hän voi rakentaa oppimispolkuun kestävä tulevaisuuden teemaan yhdistäen valitsemallaan tavalla. Jos oppilaalla on suunnitelma tulevaisuuden ammatiksi, hän voi rakentaa oppimispolkuun sen ympärille. Matematiikka toimii itseisarvona ja välineenä kohti elämänsuunnitelmaa. Opettajan kannustava ja ohjaava tuki on tärkeää, mutta se ei edellytä välttämättä yksittäisen opettajan asiantuntemusta erikoisaloista. Tällöin opettaja on ohjaava tutor, ei välttämättä mentori.

Ollennainen filosofinen kysymys suuntautumisessa on, onko matematiikka keksittyä vai löydettyä? Matematiikan keksiminen puolustaa tutkimukseni ihmislähtöistä näkökulmaa. Tyypillisesti matemaatikot ovat olleet keksijöitä. Matematiikka (ja maailma) voisi olla tänä päivänä erilainen, jos suunnannäyttäjinä olisivat toimineet eri matemaatikot ja (tiede)poliittinen ajattelu olisi suuntautu-

nut toisin. Yksilölliset ja yhteisölliset lähtökohdat ovat vaikuttaneet kehityksen suuntaan. Myös luokka- ja koulu yhteisö tukee opiskeluasenteen kehitystä. Uteliaasti oppimiseen suuntautunut työskentelyasenne voi näin vahvistua keksimistä painottamalla.

Matematiikan löytäminen tarkoittaa, että pohjimmiltaan kaikki löytävät samat säännönmukaisuudet (invarianssit) eli maailma on objektiivisesti olemassa, jolloin maailma on olemassa ihmisistä riippumatta. Useat ikäkauteni opettajat ovat saaneet vaikutteensa matemaatikoilta, jotka edustavat ajattelun valtavirtaa eli käsitystä, että matemaattinen totuus on olemassa ihmisestä riippumatta. Absoluuttisen totuuden käsitys on toiminut kvanttimekaniikan keksimiseen saakka fysiikassa vallitsevana ja myös yhteiskunnassa vallan käytön tapana. Absoluuttisuus häviää, kun matematiikkaa sovelletaan tai sen vaikutuksia tutkitaan.

Näkökulmani on käytännöllinen, jolloin kiinnostavaa on nimenomaan keksiminen. Tällöin tilaa kuvaa vuorovaikutteinen intersubjektiivisuus, jossa eri merkitykset kohtaavat eli löytyy ymmärtämisyhteyksiä. Näkökulmat saattavat usein jäädä kohtaamatta. Jälkimmäisessä vaihtoehdossa yhteisymmärrys jää häilymään. Jälkimmäinen on arjen tilanteissa yleistä, jolloin virhepäätelmät ja epä tietoisuus vaikuttavat. Dialogisuuden lisääminen on keino parantaa yhteisymmärrystä, yhteisöllisyyttä ja häivyttää virhe käsitysten mahdollisuuksia.

Matematiikan yksilöllisyys suuntautumisena tarkoittaa, että aistihavainnot, kokemukset ja niiden ajattelemisen ovat keskeisiä ajattelurakenteiden muodostumisperusteita. Havaintojen tekeminen, kokeilu, tutkiminen ja kokeellisuus edellyttävät aistihavaintoja, joihin sisältyy tunteita. Ilman tunteita havaintoja ei välttämättä ole olemassa. Inhimillinen ainutlaatuinen persoonallinen kokonaisuus sisältää elämänhistorian ja subjektiivisen maailmankuvan (Kant, Husserl, Heidegger, Dewey, Kaila, Rauhala), joilla on merkitystä havaintojen kohdistumiseen. Inhimillinen kokemus sisältää havainnon mielellisen perspektiivin. Eino Kailan (1977) hahmottuva maailma tuo kokemuksen käsitteeseen laajennuksen (Kaila 1977; von Wright 2009). Matematiikan keksimiseen sisältyvä arkikokemuksen perseptuaalinen (havainto) ja konseptuaalisen (merkitys) aines liittyvät kokemuksen kokonaisuuteen. Tutkimuksen käytännöllinen merkitys tulevaisuuden koulumatematiikalle kiteytyy Kailan funktionaalisen, dynaamisen ja holistisen maailman konstruoinnin perustalta. Sen mukaan karkeasti havainto ilmenee suuntautuneena ilmaisuna, mikä tarkoittaa merkityskokemusta. Sisäistynyt merkitys voi näin muuttua näkyväksi osaksi dialogia itsen tai toisten kanssa.

### 8.3 Tutkimuksen itsearviointi ja jatkotutkimusehdotuksia

Aloitan tutkimusongelman tunnistamisen vastaparilla huoli ja kiehtovuus. Huoli on kietoutunut koulumatematiikan näkyviin objektiivisiin (yleisiin) merkityksiin ja kiehtovuus sisäisiin subjektiivisiin (yksilöllisiin) merkityksiin. Huoli ja kiehtovuus jäsentävät pitkittäistä yleisen ja yksilöllisen, julkisen ja yksityisen, järjen ja kokemuksen dialogista polkua päätyen päättämisen (luku 6.1) ongelmaan. Laajentunut julkinen sfääri ilmenee kulttuurin, politiikan ja tieteen kentässä laajentuen koulumatematiikkaan. Yksityinen yksilöllisyys luovine ominaisuuksineen on uhattuna, jos tietoteorian reduktiivinen selitys kokemukselle jää vallitsevaksi. Miten inhimillinen kokemus ymmärretään, on pohjimmitaan avainkysymys kohti emergenttiä luovuutta, johon yksilöllisyys tiivistyy. Uusi fenomenologinen näkökulma paljastaa yksilöllisyyden ainutlaatuisten taipumusten kokemuserustan merkityksiä.

Olen tavoittanut myös näkymätöntä sisäisyyttäni siinä määrin kuin olen tiedostanut ja muistanut. Sisäisyydestään voi saada tietoa itseanalyysillä. Matematiikan kiehtovuus on itse keksittävä, mitä vahvistaa teoreettisesti kokemuksen laajentaminen. Luovia tulevaisuuden mahdollisuuksia suosiessani olen jättänyt raportoimatta (alaluku 2.2), mitä kiehtovuus on tarkoittanut matemaatikoille menneisyydessä. Ratkaisuni ilmentää matematiikkaa oppimisen tapana ja yleisenä todellisuuden hahmottamisen metodina.

Matematiikan idean metodinen käyttö liittyy matematiikkakuvaani. Matematiikkakuvaan vaikuttavat uskomukset, tunteet, motivaatio ja arvot (mm. Hannula & Holm 2018, 136-140), jotka liitän kokemukseeni matematiikasta kokonaisuutena (luku 11). Ajattelemisen metodi on yhteydessä matematiikkaan, jolla risti-riitojen ja toisiinsa riippuvuussuhteessa olevia merkityksiä paljastuu.

Onnistuin taustoittamaan koulumatematiikkaa koskevia kulttuurin, politiikan ja tieteen historiallisia ja filosofisia merkityksiä tulevaisuuden koulumatematiikan suuntaamiseen. Elämismaailmalähtöisyys politiikan sfääreistä koulumatematiikkaan rajautuu keinotekoisesti. Kulttuurin sfääreissä elämismaailmalähtöisyys viittaa matematiikan paljastamiseen (horizontaalinen). Merkityskokemus vaikuttaa siihen, miten oppilaan toiminnallinen funktio rakentuu (luku 6.3; taulukko 5, luku 7.3) suhteessa matematiikkaan. Taulukon toiminnalliset funktiot ovat oppimista ohjaavia strategisia suuntautumisen tapoja. Horizontaalinen näkökulma edustaa kulttuurin kentässä omaa holistista suuntautumistani suhteessa matema-

tiikkaan (matematiikan keksiminen) ja tutkimuspolkuun. Vertikaalinen näkökulma edustaa tieteenalan ja opetussuunnitelman lähtökohdista koulumatematiikkaa (matematiikan löytäminen). Malli on karkea, jonka erilaisina kombinaatioina yksilön suuntautuminen voi tapahtua. (Ks. kuva 3 luvun lopussa )

Filosofiset ja historialliset merkitykset ovat olleet harvoin koulumatematiikan tutkimuksen kohteena suhteessa kokemukseen, koska didaktinen tutkimus on keskittynyt oppiaineen tarkoitettuihin oppimistavoitteisiin. Koulutodellisuudessa on erilaisia käsityksiä opetussuunnitelman merkityksistä ja matematiikan merkityksistä, joiden dialogi edistää toiminnallisen yhteisymmärryksen vahvistamista kouluissa ja luokkahuoneissa. Tutkimuspolku pysähtyy valikoidusti yksityiskohtiin. Tutkimukseen sisältyy tutkimuskirjallisuuden analyysia, itseanalyysia, kokemuksen synteesiä, tutkimuslähteiden synteesiä, dialogia ja raportointia vertailua. Isot linjat syntyvät kokonaisuudesta. Tutkimus on tyyliltään uusi, joka jättää lukijalle tilaa pohdinnoille.

Tieteellisen luotettavuuden perustana on kertautuvasti kohtaamani koulutodellisuus, eri ikäisten, eri koulujen ja erilaisten opetusryhmien matematiikan opetustyössä. Elinikäisesti kerrostuva kasvatus-, opetus- ja suunnittelutyö sekä uteliaisuus matematiikan olemukseen yhdistyvät tutkimuspolulla. Tutkimuspolku toteuttaa tieteellistä ajattelua, jonka lähtökohdiana on arjen elämismailman havainnointi (vrt. POPS 1970, 26). Arkilähtöisyys tutkimuspolulla viittaa talonpojan työn systemaattisuuteen vuoden kierron vaiheissa. Luotettavan tieteellisen tiedon faktaperusteisuus tarkoittaa luotettavia tietolähteitä ja aitoja kokemuksia elämismailman todellisuudessa.

Tutkimuspolun antinaturalistinen korostus tarkoittaa ihmisen ainutlaatuisuutta matematiikkansa merkitysvälitteisyyden tunnistamisessa ja tiedostamisessa, mihin liitän persoonallisen tiedonintressin, jonka lisäsin Habermasin, Niiniluodon ja Pietarisen kehittämiin tiedonintresseihin. Tutkimuksen kritiikki kohdistuu vahvaan naturalismiin, jossa ihminen ja metodi on ulkoistettu, mikä rajoittaa kokemuksellisen todellisuuden autenttisuuden tavoittamista. Tutkimuspolku tuo esiin ihmisen vaikutuksen, jolloin kritiikki kohdistuu yleisesti ihmisen kokeman todellisuuden reduktiiviseen tulkintaan. Merkityskokemus ei ole aivotila.

Tutkimuspolku viittaa läsnä olevaan elämismailmaan mahdollisuuksina myös oppilaan oppimispolulla. Ennen mahdollista tiedoksi kehittymistä oppimispolku on oppilaan kokemus. Yksilöllisen opinpolun rakentaminen on tutkimuspolun lisäarvo. Näkökulma laajentaa kokemuksellisen matematiikan lisäksi koulumatematiikan mahdollisuuksia kohti yksilöiden erilaisia elämäntehtäviä ja tulevai-

suuden luomista. Oppilaan oppimisolun rakentamisen elinikäisyys viittaa autenttisiin lähtökohtiin, jotka ovat keksimisen perustana oivalluksina.

Tutkimustani koskeva itsearviointi tarkoittaa, mitä tavoittelin, mitä tavoitin, miten metodologiset ratkaisuni tukevat tutkimuksen tavoitetta ja mitä ehdotan jatkotutkimuksiksi. Tutkimusongelma, *miten matematiikka ilmenee*, sisältää erilaisia ratkaisuvaihtoehtoja ja on näin luonteeltaan kontingentti. Tutkijana olen havaitsija, jolle jotakin ilmenee, mikä tuo ideaaliseen tutkimusongelmaan reaalista sisältöä. Näkökulmani poikkeaa tutkimusperinteestä metodisilla ratkaisuillaan, omaperäisellä dynamiikallaan, laaja-alaisuudellaan, avoimuudellaan, arjen tilanteita lähestyvällä kirjoitustyyllillään, kontingenteilla tuloksillaan ja (koulu)matematiikan rajattomilla yhteiskuntayhteyksillään. Näkökulma on avoin koulumatematiikan mahdollisuuksille.

Methodisena ratkaisuna keskeinen on ajattelemisen, joka edustaa Heidegger-peräisesti todellisuuteen kätkeytyneiden merkitysten *paljastamista ja paljastumista*. Kätkeytyneen paljastajana olen mukana metodin virittäjänä ja kokijana *elämismaailmasta koululuokkiin*. Pitkittäistutkimus, tutkimuspolku siirtää ongelmanratkaisun rakennemallin tutkimusprosessiin. Ongelmanratkaisuprosessin lähtökohta on valittu elämismaailman konteksti, jota ohjaavat autenttiset ennakoehdot, yksilöllisyys ja luovuus. Autenttinen metodi tuo tutkimuksen lähelle elämää. Uusi näkökulma esiyymmärtää matematiikkaa ja ymmärtää opetussuunnitelman laaja-alaiset taitotavoitteet yksilö- ja kontekstilähtöisesti. Autenttinen ajattelemisen metodi paljastaa matematiikkaa ja koulumatematiikkaa koskevien kehystekijöiden juonteita, joilla on yhteys tieteenfilosofiaan ja kulttuuriin.

Tulosten luotettavuus on yhteydessä tutkijan rehellisyyteen, joka on fenomenologisen tutkimuksen perustaa. Rehellisyys on jatkuvaa pyrkimystä tavoittaa toisuus todellisuudesta, sisäisesti ja ulkoisesti. Kulttuuriset lähtökohtani, valintani ja persoonani ovat läsnä, edustaen autenttisuutta. Rehellisyys itselleen viittaa autenttisuuteen ja talonpoikaisjärkeen. Autenttinen metodi viittaa elinikäisyyteen ja persoonaan, jolloin vaarana on, että en kohtaa lukijaa, subjektiivisuus peilautuu liian vahvana, ajatuksen rönsyt lähtevät vetämään tai tutkimuspolku alkaa näyttää puolustukselta jossakin suhteessa. Elinikäisesti vireillä ollut prosessi voi kadottaa jotakin alkuperäisyydestään, kun sitä alkaa kirjoittamaan jälkikäteen. Epätäydellisenäkin olen jatkuvasti polulla. Tutkimuspolku on tällöin sisäisyudessa olevan kuvan auki kirjoittamista.

Elinikäisyys tuo kerroksisuutta, mikä lisää metodin luotettavuutta ja peilauspintaa. Tutkimuspolku on elinikäinen, jolloin menneisyydessäni lukemani tieteelli-

set julkaisut (etenkin Kaila ja Hollo kesältä 1974) ovat jättäneet kokemukseen jälkiä ja aktivoituneet yhä uudelleen. Tutkimuslähteiden valintoja eri elämän vaiheissa ovat ohjanneet omat kysymykset ja ongelmalähtöisyys opetustyössä. Menneisyydessä kokemani merkitykset voivat jäädä jälkikirjoittamisessa osittain pinnallisemmiksi kuin ne autenttisissa tilanteissa ovat olleet. Kulunut aika on tuonut perspektiiviä peilata ja tarkistaa merkityksiä yhä uudelleen toistuvissa tilanteissa. Opitun perustalta eri kouluissa tehdyt havainnot ovat hioutuneet ja karkeat linjat ovat kehittyneet tunnistettaviksi. Kokemusten synteesiä tukee ajatteleminen yhä uudelleen. Kokonaisuutta hahmottavan tarkastelutavan avulla olen tunnistanut linjoja siitä, miten kehitys on kulkenut ja miten tulevaisuuteen voi suuntautua.

Kiinnitän tutkimuspolulla huomiotani 1970-luvulla keksimiini tieteen demarkaatio-ongelmiin. Mieleen särähti tuolloin ihmistieteen tilastollisten yleistysten ja tajunnan biologisen alkuperän välinen ristiriita. Jos tajunta on biologisperäistä (yksilöllistä), mitä merkitystä on laskea keskiarvoja (yleistyksiä) ihmisten käyttäytymisestä. Tutkimuspolku on myös kritiikkiä elämismailmassa tunnistettaviin luokituksia luoviin ja konformismina ilmeneviin yleistäviin metodin seurausvaikutuksiin, jotka tuovat normatiivisia odotuksia. Rajanveto-ongelma matematiikan ja ei vielä matematiikan välillä avautuu dikotomioiden horisontaalinen/vertikaalinen, ihmislähtöinen/tieteenalalähtöinen, kvalitatiivinen/kvantitatiivinen välillä, jossa erilaistuminen mahdollistuu.

Tutkimuspolun idea on kuvata merkitysten jatkumoa elämän läpi, jolloin merkittävää on tiedostaa, *miten* merkitys rakentuu merkityksen päälle. Järjen käytön rakennemuutosta jäsentävä taulukko 4 (luku 4.2.2) perustuu itseanalyysiin ja synteisiin. Matematiikka kulttuurin kentässä tarkoittaa tiedostamatonta ja rakenteisiin kietoutunutta ihmisten työtä, jonka tiedostaminen vaatii kokemusta kohteesta ja prosessista. Kulttuurin elämismailmassa kehittyneellä matematiikalla on tutkimuspolulla yhteys koulumatematiikkaan. Kasvu ympäristöni on antanut suuntaa käytäntöön (praksis), johon tieto (theoria) ja luovuus (poiesis) sulautuvat. Jäljen jättäneet merkitykset suuntaavat myös yleisesti yksilöllistä oppimista vahvistavasti, heikentävästi tai jotain siltä väliltä.

Suuntautumisen merkitys oppimiseen on tutkimuksen lähtökohta, joka tunnistuu yleisesti huonosti koulupoliittisesta ajattelusta. Erilaisten tiedonintressien lähtökohdista autenttinen metodi tukee yksilöllisten suuntautumisten vaihtoehtoisia (kontingetteja) mahdollisuuksia. Havaittajan ehdoilla tarkoittaa tällöin, että joku toinen voi havaita toisin, koska toinen voi suuntautua toisin. Eri näkökulmista näkymien erilaisuus ei poissulje näkymien vastaavuutta todellisuuteen.

Holistinen totuuskäsitys ottaa huomioon lähtökohtaerot, ohjaavat ehdot ja tavoitteet. Rajaukset rakentuvat tällöin tarkoituksenmukaisuusperustein.

Tutkimus luo yleisiä merkityksiä yksityisen kautta, mihin tieteellisessä perinteessämme on suhtauduttu kriittisesti. Kriittisestä suhtautumisesta on seurannut, että tutkimus yleisesti on etääntynyt havaitsijasta ja arjesta. Kritiikkini osuu arkitiedon merkitysten ohittamiseen. Esimerkiksi tapa mitata oppimistuloksia ei tue koulumatematiikan kiehtovaksi kokemista. Kokemuksellinen koulumatematiikka suuntautumisena opitun merkityksiin kokonaisuutena ei hahmotu tiedon siivuja mittaamalla, vaikka empiirisillä koetehtävilläkin on merkityksensä.

Konteksti, kulttuurin, politiikan ja tieteen kenttä, sisältää syntyperusteita (koulu)matematiikan merkityksille. Alhaalta ylöspäin suuntautuva prosessi yhdistyy tulkinnassani itsesäätyvään matematiikkaan. Valitsemani tutkimuskonteksti on yleispätevä koulumatematiikkaa kehystävä tausta yksilön matematiikan katselun näkökulmasta. Koulumatematiikan tulevaisuuteen vaikuttava opettajankoulutus toimii valitussa kontekstissa. Yliopistoja ohjaavat lisäksi monet tehtävät ja taloudelliset resurssit, joita arvotodellisuuden kontekstini alhaalta ylöspäin ei huomioi.

Kulttuuriset juuret osana tutkimukseen liittyvää orientaatiota ovat olleet kasvatustieteen tutkimuksen kohteena kyselytutkimuksissa, mutta omana kokemukseksi lähinnä elämäkertatutkimuksissa. Millainen mieli opitulla on oppijalleen ei ole ollut yhteiskunnan kannalta niin tärkeää kuin opitun taloudellinen hyödynnettävyys. Tutkimuspoluillani tavoittelen uudenlaista realistiseen kasvukuvaukseen perustuvaa aikuiskasvatustiedettä (vrt. Suoranta 2012, 19), joka tuo esiin ihmiselämän ainutlaatuisuutta ja merkitysvälitteisyyttä. Kasvatuksen perinteessämme tällaista tapaa edustavat esimerkiksi steinerpedagogiikan uranuurtajana Suomessa tunnettu ja rakastettu, ajattelun ja kasvatuksen taiteilija Kaisu Virkkunen (1919-1996) sekä itsetoimintaa ja mielikuvituksen kasvattamista painottanut tutkimuspolultani tuttu Juho Hollo.

Huomion kohdistamista yksilön tiedostamiskykyyn ja itseohjautuvuuden tukemiseen tukee ehdottamani ratkaisuehdotus, matematiikkakasvatus. Kokemus yksilöllisen oppimisen perustana on luonteeltaan sisäistä, mihin oppimisteoreettinen ajattelu ei ole tuonut merkittävää lisäarvoa viime vuosina. Metakognitio viittaa sisäisyyteen, mutta yleistävät tutkimukset sen luonteesta eivät tarkoita samaa. Kokemus on yleisesti tulkittu ulkopuolelta empiirisesti mitattavaksi ja pyrkimyksiltään yleistäväksi. Tieto keskiarvoisesta normikäyttäytymisestä ei anna tietoa yksilöllisen käyttäytymisen perusteista. Tieteellinen kehitys on johdatta-

nut objektiivisilla ihanteillaan ulos subjektin yksilöllisestä ainutlaatuisuudesta, mikä mahdollistaa uudistumisen.

Tutkimuspolun fenomenologisen metodin tuottama matematiikka (horisontaalinen) käytäntöä tukevana ei olekaan pelkästään annettuna tuntemamme tieteen tekijöiden työn tulos, vaan olemme mukana matematiikan luomisessa, tulkinassa, soveltamisessa ja myötäelämisessä tahdostamme riippuvasti. Persoonallinen tiedonintressi avaa mahdollisuuksia, mitä matematiikka on kehityshistoriasaan osoittanut persoonallisten matemaatikkojen mielten voimillaan. Fenomenologian mahdollistama uusi näkökulma vahvistaa yleisesti tiedostamista. Näkökulma koulumatematiikkaan tarkoittaa elämismaailmojen merkityskokemuksista kehittyviä mahdollisuuksia tiedostaa ja uudistua. Uusi näkökulma on matematiikan keksimistä (horisontaalinen), johon tutkimuspolulla viittaavat:

- 1) Matematiikan kokemusperustan laajennus ja koulumatematiikan yhteydet suuntautumiseen (etenkin persoonallinen intressi)
- 2) Kulttuuristen merkitysten vaikuttavuus oppimispolulla (talonpoikaisjärki)
- 3) Matematiikkailmiö kokemuksien monimuotoisena kokonaisuutena
- 4) Perusteltu ratkaisuehdotus yläkouluvaiheen matematiikkakasvatukselle
- 5) Luovan potentiaalinen merkitys erilaistuvaan matematiikkaan
- 9) Intuition merkityksen vahvistaminen suhteessa (matematiikan) oppimiseen
- 10) Tutkimuspolku alkua- ja väliehtojen itseorganisoitumisprosessina

Tietoisuuden kehittymisen merkityksessä mielenkiintoni kohdistuu edelleen Eino Kailan kesken jääneeseen hahmottuvan maailman ideaan. Aristoteleen vaikutuksesta Kailan käsite *Terminaalikausaliteetti (TK)* yhdistyy dynaamiseen biologiseen päämäärähakuiseen toimintaan (von Wright 2009), jonka voi tulkita fenomenologisesti tietoisuuden ohjaamana itsesäätelyprosessina (vrt.; Tuomela 1983; Kauppi 1990; Lagerspets 1991; Hintikka 2001, 340; Partanen 2004; Lampinen 2009, 40, 75; Salmela 2014; Sormunen 2018). Sormusen (2018) mukaan tietoisuus on mielen kehitysprosessia ohjaavan TK:n tulos.

Merkitykset, jotka toistuvat tutkimuspolulla, ovat tienviittoja ja tietoisuuteni rakentamista ohjaavia ehtoja, joihin myös TK viittaa. Laaja-alaisuus suhteessa matematiikkaan viittaa yleisesti yksilön luovaan potentiaaliin, jota rajaa biologisessa evoluutiossa kehittyneiden ominaisuuksien kulttuurievoluutio. Yhteydessään havaintotodellisuuteensa matemaatikko (mm. Descartes) luo uutta matematiikkaa, kuten oppilas koulussa esiymmärrystään. Analogia toistuu, jos mieli ja tarkoitus puuttuvat, matematiikka ei kiehdo.

Jatkotutkimus tutkimuspolun matematiikan kokemisen lähtökohdista vahvistaa koulumatematiikan uudistamisen edistämistä. Empiirinen tutkimus ei ole anta-

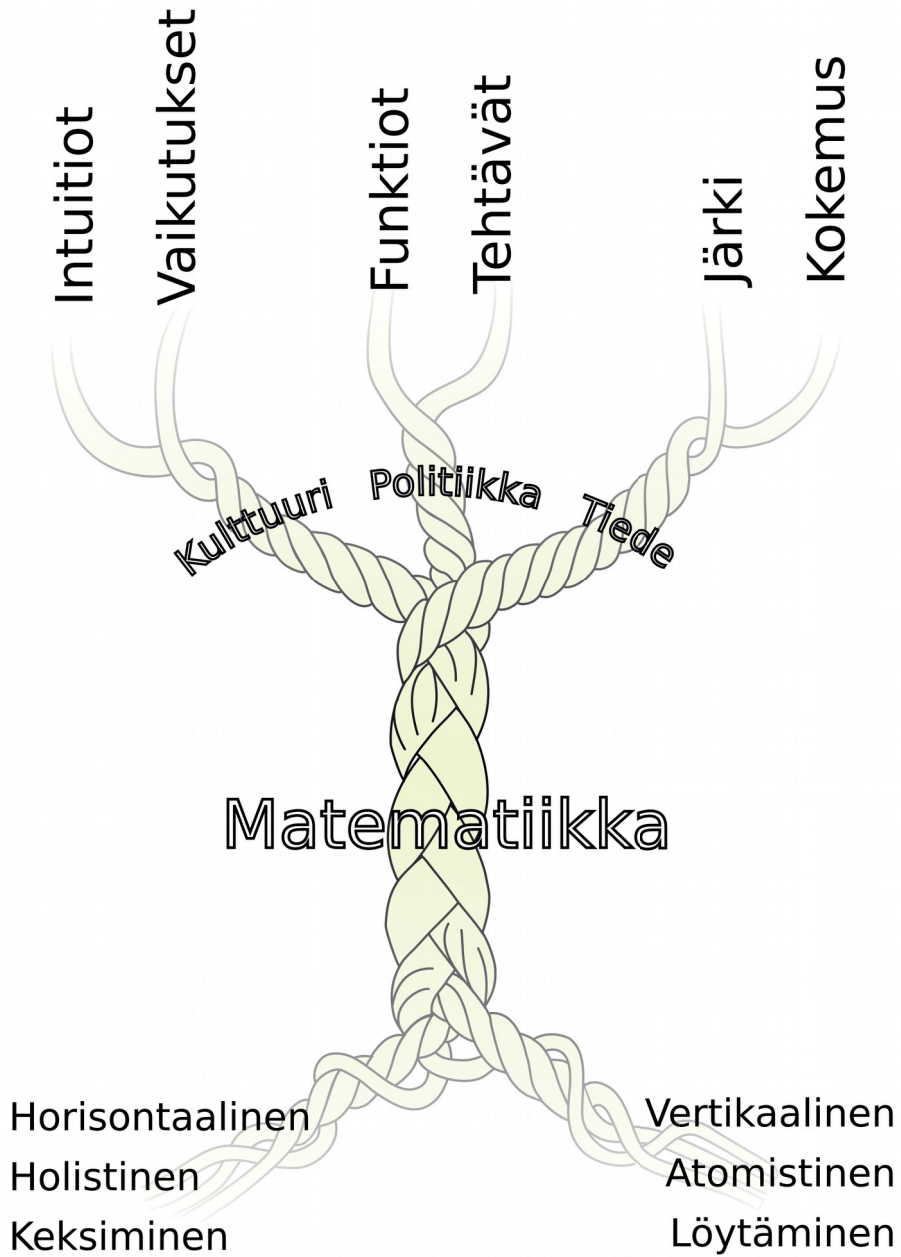
nut riittävän syvällistä tietoa esimerkiksi poikien heikentyneistä motiiveista ja oppimistuloksista. Jatkotutkimuksena vertailututkimus eri maiden paradigma-muutoksista yleissivistävän koulutuksen osana PISA -menestyneissä valtioissa ja USA:ssa antaa lisätietoa mahdolliseen paradigmanmuutokseen Suomessa. Käynnissä oleva yleissivistävän koulutuksen laajennus tuo tarpeen pohtia yleis-sivistävän koulumatematiikan merkitystä praksiksen ja teorian näkökulmasta.

Kokemuksellisuus yhdistettynä koulumatematiikkaan oppilaiden ja opettajien kokemana palvelee tulevaisuuden koulumatematiikan kehittämistä ja ansaitsee lisätutkimuksia. Esimerkiksi koulumatematiikkaan liittyvät ilmiöiden sanallista-miset, monitulkintaiset tehtävät, esseet, elämäkerrat ja tarinat oppilaiden tai opettajien kertomina lisäisivät oppiaineen elämänläheisyyttä ja merkitysten tun-nistamista. Esseistinen käsittelytapa on ollut matematiikalle vieras, mutta sillä voi olla korjaavia vaikutuksia matematiikan käytettävyyden lisäämiseen.

Descartes tutkii totuutta luonnollisella valolla, missä hänen oppaansa on oma järkensä, joka johdattaa löytämään tietämyksen reitit niin korkealle kuin voi päästä (Descartes 1641-1645, 295). Tutkimuspolun Descartes-vaikutteinen ajat-telemisen fenomenologinen metodi on paljastanut merkityksiä, joiden ehdoilla matematiikka keksitään. Tutkimuspolku laajentaa oppimisen kehystä ja ehdottaa asennemuutosta matematiikan yksilöllistämisen tukemisessa, mikä tiivistetysti ilmenee seuraavan köysimallin rajattomista mahdollisuuksista. Tutkimuksen tarkoitus on palvella yleisesti koulumatematiikan laaja-alaisten oppimis- ja tai-totavoitteiden yksilöllistämistä ja kulttuurista vaikuttavuutta, siten myös mate-matiikan osaamisen arvioinnin kehittämistä.

Olen tulkinnut oppimisen ja opetuksen yksilöllistämisen oppimispolkuajattelu-na vakavasti. Matematiikan alkuperä yhdistyy tutkimuspolulla luonnolliseen mentaaliseen kokemukseen yksilöllisinä oppimisstrategioina. Tutkimuspolulla voin epäilyni jälkeen olla varma ainakin omasta kokemuksestani. Muiden koke-mukset ovat vastakkaisia tai jotakin niiden välistä. Tutkimus kertoo todellisuu-desta, jolla on yhteyksiä erilaisiin matematiikan mahdollisuuksiin. Tällöin feno-menologinen merkitysten maailma kuuluu reaaliseen todellisuuteen. Fenomeno-loginen metodi paljastaa todellisuuden sellaisena kuin se on ollut, on ja voi olla, ei sellaisena kuin sen pitäisi olla. Fenomenologian perustalta horisontaalinen keksiminen lähenee metafyyssistä antinaturalismia, jolloin filosofialle jää tehtä-vää 'pitäisi olla' -tulevaisuuden vuorovaikutteiseen rakentamiseen.

KUVA 3. Matematiikan keksiminen tai löytäminen kulttuurin, politiikan ja tieteen sfääreissä ilmenee yksilöllisen matematiikan monimuotoisuutena (Kumpula 2019)



## 9 TULEVAISUUDEN MATEMATIIKKAKASVATUS

### 9.1 Opetuksen ja kasvatuksen yleiset arvoperusteet

Tulevaisuuden matematiikkakasvatus on johtopäätös ja ratkaisuehdotus tutkimukseni tuloksista. Tulevaisuuden matematiikkakasvatus viittaa tavoitteeseen, jonka mukaan tavoiteltavaa on tiedostaminen, mikä merkitsee tietoisuus- ja tiedekasvatusta. Matematiikkakasvatuksen merkityksistä ja tarkoituksesta ei ole vielä riittävää yksimielisyyttä opettajanhuoneissa vietäväksi koululuokkiin. Koulutussuunnittelijan työni kautta on välittynyt ymmärrys siitä, miten vaikeaa on saada kaikki opettajat mukaan muutokseen ja opetuksen kehittämiseen, koska jokainen opettaja on asiantuntija omalla alallaan niistä lähtökohdista, joihin on huomionsa kohdistanut, mitä on opiskellut ja miten on prosessoinut omaksumaansa tietoa. Hyviä käytäntöjä, näkemyksiä tärkeistä opetussisällöistä ja kokeimuksia opetusmetodeista on erilaisia, joita jakamalla yhteinen ymmärrys laajenee ja tietoisuus kehittämissuunnasta vahvistuu. Monissa kouluissa muutos yksilöllisyyttä tukevaksi on jo käynnistynyt, mutta julkisen keskustelun perusteella uusimman opetussuunnitelman (2014) perusteista on vielä väärinymmärryksiä ja selvennettävää.

Oppivelvollisuuskoulun viimeisillä luokilla (luokat 7-9, 10 tai aikuislukio) perinteisesti käytetty käsite on matematiikan perusopetus, ei matematiikkakasvatus. Käsitteen kasvatus sisältö on enemmän kuin opetusaineen sisällön opettaminen. Aikuiskasvatus korostaa kasvutapahtuman kokonaisvaltaisuutta, itsenäisyyttä, uudistuneita opiskeluympäristöjä ja kontekstuaalisia tekijöitä. Aikuiskasvatus on tutkimuspolulla kasvatus- ja pedagogiikkakäsitteiden yläkäsite käsittäen oppilaan koko elinajan mikro-, meso- ja makrotasoinen ja kerroksineen. Kasvatuksen tehtävä on tukea kehitystä kohti aikuisuutta, tukemalla tunnistettuja ja taipumuksia. Kokeelliseen oppilaan taipumusten mittaamiseen vaikuttanut Binet (1918) painottaa, että kasvatuksen tavoite on tukea taipumuksia ja ajatustapoja vakiinnuttaen niitä tottumuksiksi. Nykyinen oppimissaavutusten strukturoiduin kokein mittaaminen on kadottanut alkuperäisen sielutieteellisen perustansa.

Peruskoulun opetussuunnitelman perusteet (2014) on normi eli määräys opetukselle, jonka perustalta alueellinen, kunnallinen ja koulukohtainen opetussuunnitelmatyö käynnistyy. Matematiikkakasvatus sisältää opettajan pedagogisen vapauden opetuksen toteuttamisessa. Pohjimmiltaan oppiaineen opetustavoitteet (normiohjausperusteet) ovat ristiriidassa elämismaailman yksilöllisten ja luovien oppimispolkujen rakentamisen tukemiselle (laaja-alaiset taitotavoitteet). Ihminen ilmaisee käyttäytymisellään kokemaansa, mikä ei aina ole normi-ihanteen mukaista. Yksilön hahmotustaipumuksista kehittyvä horisontaalinen näkökulma saattaa jäädä normiperustaisuudessa huomiotta. Horisontaalinen näkökulma edellyttää kasvatuspyrkimystä ja intressiä laaja-alaisuuden toteuttamiseen.

Oppimispolku ilmentää menneisyydestä nousevaa tulevaisuutta, mihin oppivelvollisuuskoulu, kymppiluokka tai aikuislukion perusaste antavat valmiuksia kohti aikuisuutta elinikäistä kasvua tukien. Peruskouluopetuksella on opittavaa aikuiskasvatuksen elinikäisyydestä ja itsereflektiosta, jonka juuret ovat kansansivistys- ja valistustyössä. Suomalaisen sivistyksen talonpoikaiset juuret ilmentävät menneisyyden juonetta, missä ihmiskäsityksen humanistisesta perustasta kehittyi itse itsestään oppimisen sukupolvien perintö ja omatoimisuuden taito, mikä taito on osittain menetetty, mutta edelleen rekonstruoitavissa. Autenttiset perusteet luovuudelle ovat olemassa. Oppimispolku tukee erilaisten oppilaiden suuntautumisen tunnistamista suhteessa matematiikan oppimiseen.

Käsitteen matematiikkakasvatus ajatus on, että matematiikan oppimiseen, ymmärtämiseen ja soveltamiseen voidaan vaikuttaa kasvatuksella. Tällöin avaimena on ohjaava keskustelu. Käsite kasvatus liittyy matematiikan merkityksiä elämänympäristöön, mitä olen jäsentänyt kulttuurin-, politiikan- ja tieteen kentässä. Opetuskeskustelussa nämä matematiikan opetuksen kehystekijät eli matematiikan kontekstuaaliset ymmärtämysyhteydet ovat kasvatustoiminnan perusteita. Oppilaan ohjautumisen strategiset taidot rakentuvat toiminnallisten funktioiden tiedostamiseen pyrkien. Opetustilanteissa kehystekijät ja oppilaan kokemus toimivat kasvatustiedon lähtökohtina.

Lahdes (1994, 44) liittyy opetukseen kasvatuksellisen osuuden ja muistuttaa, että opetuksessa on otettava huomioon kehystekijät ja niiden luonne, joita edustaa kolme tavoitteellista osaa: opetettava aines, oppilas ja oppiminen sekä saatavilla olevat keinot ja resurssit, lisäksi kolmantena kehystekijänä poliittiset ja moraaliset seikat. Poliittisilla ja moraalisisilla seikoilla Lahdes viittaa kasvatustiedon näkökulmaan, jonka mukaan opetus on sekaantumista toisten elämään ja tiettyjen arvojen edistämistä (emt.)

Kasvatuksen tavoite on tukea yksilön maailmaan sopeutumista ja maailmaan vaikuttamista. Hirsjärvi (1985, 8) korostaa kasvatustieteen yksilökeskeisyyttä ja yhteiskuntasidonnaisuutta, mitä yleishumanistista perustaa painottavat myös useat aikuiskasvattajat (mm. Harva 1983). Käytännön opetustyössä ja koulukoh- taisissa keskusteluissa yhteiskunnalliset arvot ja ihmisenä kasvaminen saattavat jäädä sisältökeskustelujen varjoon. Opetussuunnitelmat vuosina 1970, 1985 ja 1994 painottivat arvoja opetuksen perustana. Keskustelun perustaksi kouluhalli- tuksen 1982 julkaisema peruskoulun matematiikan oppimääräsuunnitelma on lä- hes pelkästään opetussisältöluettelo, missä osioon opetuksen lähtökohdat, ta- voitteet ja tavoitteiden toteuttaminen riittää alle kaksi sivua. Toteutuneiden arvo- keskustelujen tulokset vaikuttivat paikallisesti, jos vaikuttivat. Oppilaan suun- tautuminen yhteiskuntaan toteutuu laaja-alaisissa taitotavoitteissa (2014), jotka käytännössä ovat koulun tai opettajan tulkinta kasvatustavoitteista.

*Kasvatus- ja arvonäkökulma on ollut marginaalisessa osassa matematiikan opetusta koskevilla keskusteluilla. Vuoden 1994 opetussuunnitelmauudistuksen aikaan järjestettiin painotetusti arvokeskusteluja kouluissa ja täydennyskoulu- tuksissa kaikille avoimina. Päättäjiä, oppilaiden vanhempia ja opettajia roh- kaistiin keskustelemaan koulujen profiloinnista ja koulukasvatuksen tavoitteista. Miten arvot liittyvät matematiikkaan kutistui yleensä keskusteluiksi koulumate- matiikan sisällöistä, painotuksista ja tuntimääristä. Paikallisen MAOL-kerhon puheenjohtajana (1994) tein arvokyselyn opettajille. Opettajista 10/162 palautti kyselylomakkeen, joista vain yhden vastauksen perusteella matematiikka liittyy ihmisenä kasvamiseen ja yhteiskuntien kehittymiseen. Sain kuitenkin hyväksyt- tyä muutosesitykseni kerhon sääntöihin, jossa tavoitteena oli edistää kulttuuri- keskusteluja matematiikasta. Tuohon aikaan opetushallituksen opetusneuvos Reino Seppälä pyysi kerhon opettajaa tulkitsemaan silloisen uuden opetussuun- nitelman matematiikkaa. Opettaja vastasi, että matematiikkaa ei tulkita. Vas- tauksena oli sisältöjärjestely ja painotuserittely. Opettajien kelpoisuudessa ko- rostuiivat tuolloin aineenopettajuus (ei filosofia tai kasvatus), jolloin yhteiskun- nallisten tavoitteiden ei haluttu tai tulkittu kuuluvan matematiikan alaan.*

Kerr (1981) jäsentää objektiivista ja subjektiivista tarkoituksenmukaisuutta (adequate). Edellisen mukaan opetukseen sisältyviä arvoja tulee arvostella tiedeyhteisön sekä poliittisen ja moraalisen mittapuun mukaan. (Lahdes 1994, 44.) Kulttuuri sisältää moraalisen perustan, politiikka tavoitteet ja tiedeyhteisö vastaa

tietoteoreettisista perusteista. Kerrin mukaan subjektiivisesti adekvaatti tarkoittaa opettajan omia käsityksiä ja uskomuksia, joita opettajan toimintojen on vastattava. Subjektiivinen adekvaattisuus ei toteudu, jos opettaja seuraa oppikirjaa, vaikka ei hyväksy sen käsityksiä. Toisaalta objektiivinen adekvaattisuus puuttuu, jos opettaja toimii vastoin yhteiskunnan hyväksymää opetussuunnitelmaa. (Lahdes 1994, 44.) Opetus edellyttää objektiivista adekvaattisuutta. Kasvatus täydentää edellistä sallimalla opettajan omat vahvuudet ja tarkoituksenmukaisuuden, mitä kutsutaan myös pedagogiseksi vapaudeksi.

Opetussuunnitelmien kehitys ohjeista määräyksiksi vahvistaa objektiivista adekvaattisuutta. Tällöin kasvattamisen subjektiivinen tarkoituksenmukaisuus on vähentynyt. Vielä OPS (1985) painottaa opettajan oikeutta ja velvollisuutta oppiaineen tulkintaan, valintaan ja painottamiseen, mikä ei enää myöhemmissä perusopetussuunnitelmien perusteissa esiinny. Kehitys on edennyt arvo-objektivismiin suuntaan, mitä ilmentää uusin (2014) normiperustainen opetussuunnitelman perusteet. Tällöin opettajan vapaudelle ja oppilaan vapauttamiselle oman oppimispolun rakentamiseen jää niukentuvasti tilaa ja mahdollisuuksia. Opetuksen arvoperusteet on kuvattu uusimmissa opetussuunnitelmissa (2004, 2014) yleisesti koskien kaikkia oppiaineita painottamatta oppilaan yksilöllisiä tavoitteita tai funktioita. Laaja-alaisuuden liittäminen oppiaineisiin toteutuu opettajan pedagogisen vastuun alueella, ellei koululla ole systemaattista suunnitelmaa laaja-alaisuuden toteuttamiseen.

Peruskoulun opetussuunnitelman perusteiden (2014, 15-16) arvoperustana on: oppilaan ainutlaatuisuus ja oikeus hyvään opetukseen; ihmisyyys, sivistys, tasa-arvo ja demokratia; kulttuurin moninaisuus rikkautena ja kestävä elämäntavan välttämättömyys. Kuvausteksti on neutraaliin muotoon kirjoitettu normatiivinen hyvän ihmisyyden arvoperustan kuvaus. Opetustilanteissa ovat läsnä ihmisen keskeneräisyys ja välillä huonokin käytös luonnollisena reaktionä oikeus- ja arvofilosofisiin kysymyksiin, voimavarana ja mahdollisuutena inhimillistä opetustilanteita. Opetussuunnitelman perusteet kattaa objektiivisen tarkoituksenmukaisuuden. Kasvatus on subjektilähtöistä tulkintaa tarkoituksenmukaisuudesta, joka oli edellytyksenä kansakoulunopettajilla ja on edelleen luokanopettajilla. He opettivat tai opettavat sisältöjä, joita pitivät mielekkäinä oppilaiden oppimisympäristöissä, elämismaailmassa ja yhteiskunnassa.

Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteiden (2014) arvoperustaa vasten 'miten' -ongelma jää avoimeksi. Arvoperustan kuvauksessa ei erotella kulttuurista osaamista tai valmiuksia perusteena etenemiselle ja suuntautumiselle, vaan kulttuuri on perustana erilaisuuden ymmärtämiselle ja vuorovaikutuksen tar-

peellisuudelle. Opetussuunnitelman arvoperustana oppilaan ainutlaatuisuus ja oikeus hyvään opetukseen ovat arvoneutraaleja perusteita, missä tulkinta ainutlaatuisuudesta autenttisuuden merkityksessä tai intressinä opetusaineeseen on opettajan arvion varassa. Tällöin oppilasta tuetaan rakentamaan omaa arvoperustansa avaamatta sitä. Arvio merkityksistä jää näin oppilaan ja opettajan vapaan tahdon varaan, tai usein toiminnassa huomioon ottamatta.

Perusopetus tukee oppilaan kasvua ihmisyyteen, jota kuvaa pyrkimys totuuteen, hyvyyteen ja kauneuteen sekä oikeudenmukaisuuteen ja rauhaan. Ihmisyyteen kasvussa jännitteet pyrkimysten ja vallitsevan todellisuuden välillä ovat väistämättömiä. Sivistykseen kuuluu taito käsitellä näitä ristiriitoja. (ops 2014, 15.) Ristiriitojen käsittely, kasvu totuuteen, hyvyyteen, kauneuteen, oikeudenmukaisuuteen ja rauhaan liittyy matematiikan kasvatustavoitteisiin. Tieteiden luokituksessa totuuden laadun mukaan matematiikka on eksaktein tiede ja soveltuu näin malliksi totuuden konstruointiin. Matematiikan eettiset hyveet: totuus, hyvyys, kauneus, oikeudenmukaisuus ja rauha vaikuttavat kliseeltä, arjen todellisuudessa ilmenee myös vastapuoli. Opettajan toiminta tämänkaltaisissa kasvatustavoitteissa ja niiden tulkinnassa liittyy pedagogiseen vapauteen, minkä rooli kokonaisuutena välittyy perusteissa (2014) ja paikallisen (2014) opetussuunnitelman ohjeessa niukasti.

Opettajan kasvatustehtävä on opettaa opetussuunnitelma-perustaisesti ja tukea oppilaan aktiivisuutta. Opetussuunnitelman perusteet (2014, 17) mukaan oppimaan oppimisen taitojen kehittyminen on perusta tavoitteelliselle ja elinikäiselle oppimiselle. Siksi oppilasta ohjataan tiedostamaan omat tapansa oppia ja käyttämään tätä tietoa oppimisensa edistämiseen. Oppimisprosessistaan tietoinen ja vastuullinen oppilas oppii toimimaan yhä itseohjautuvammin. Oppimisprosessin aikana oppilas oppii työskentely- ja ajattelutaitoja sekä ennakoii ja suunnittelee oppimisen eri vaiheita. Jotta oppilas voisi oppia uusia käsitteitä ja syventää ymmärrystä opittavista asioista, häntä ohjataan liittämään opittavat asiat ja uudet käsitteet aikaisemmin oppimaansa. Tietojen ja taitojen oppiminen on kumuloituvaa ja se vaatii usein pitkäaikaista ja sinnikästä harjoittelua. (emt.) Oppimaan oppimisen taidot liittyvät keskeisesti matematiikan alaan, mikä näkökulma joskus vilahtaa opettajien puheessa. Opetussuunnitelman laaja-alaiset taitotavoitteet tukevat näkökulmaa, mutta niiden kytkentä aineen oppimisen tavoitteisiin on taulukkoviitteinen kankea. Oppimaan oppimisen strategisten taitojen eroja auttaa tunnistamaan taulukkoni horisontaalinen/vertikaalinen (luku 7.3).

Luovuus tarkoittaa pohjimmiltaan ennakoimattomuutta ja innovointia, jonka tavoitteenasettelun lähtökohta ei ole normatiivinen vaan keksivä ja soveltava, mikä ei yhdisty opetussuunnitelmaperinteeseen. Herbartin (1776-1841) rationaalinen opetussuunnitelma esittää oppiaineet tavoitteineen ja opetussisältöineen (Malinen 1992, 12; Lahdes 1994, 46-53). Herbartin opetussuunnitelma-malli on lehrplan-tyyppinen lukusuunnitelma, jossa toimintakehys (konteksti) ei ole erittelyn kohteena. Opetussuunnitelman curriculum-malli tarkoittaa oppilaan toimintaan läheisesti liittyvien oppimiskokemusten suunnittelua (Malinen 1992, 13), mitä myöskin matematiikkakasvatuksellani tavoittelen. Oppilaan oppimiskokemuksen suunnittelu kontekstista ja valmiuksista lähtien toteuttaa oppilaan yksilöllisyyttä.

Tutkimuspolun fenomenologia tukee soveltavaa ja kuvailevaa arvoperustaa, jonka lähtökohtana ovat kulttuuriperustaiset yksilölliset valmiudet ja taipumukset, jotka ovat kekseliään luovuuden ennakkoehtoja (luku 6.3.1). Luovuuteen ja kekseliäisyyteen kannustava kasvatuserusta toteutui talonpoikaiskulttuurissa, joissakin kansakouluissa curriculum-tyyppisenä kokonaiskehityksen oppimismallina (Dewey) vuodesta 1952 lähtien ja peruskoulun opetussuunnitelmakomitean 1. mietinnössä (1970, A4). Keskikoulun opetussuunnitelma oli lehrplan-tyyppinen, mikä vaikuttaa perusopetuksen opetussuunnitelman perusteiden taustalla edelleen. Kasvatuksen arvoperusta ja laaja-alaiset taidot jäävät helposti sivurooliin vielä alueellisella, paikallisella ja koulun tasollakin.

Opetussuunnitelmakehitys on peruskouluun siirtymisen (1970) jälkeen suosinut lehrplan-tyyppistä lukusuunnitelmaa, jossa eritellään oppiaineet tavoitteineen ja sisältöineen (myös Malinen 1992, 12). Lehrplan-mallin mukainen opetuksen suunnittelu ei edusta kontekstuaalisten tekijöiden huomioimista eli matematiikkailmiöön liitettäviä yksilöllisiä kokemuksia, monitieteistä tulkintaa ja kokonaisuuksia jäsentämään pyrkivää ongelman ratkaisua. Deweyn (1957) oppiainejakaisuutta murtava projektiperiaate, missä opiskelu keskittyy pitkäjänteisen toiminnan ympärille, jää käytännössä yksittäisten opettajien ja koulujen innovatiivisuuden varaan. Kasvatus on ensisijaisesti saavutettujen kokemusten uudelleenjärjestelyä ja muovaamista (reconstruction) (emt. 7).

Opetussuunnitelman (2014) yleinen arvoperusta sopii tukemaan matematiikkakasvatusta. Tällöin opettajan subjektiivinen adekvaattisuus tukee oppilaan oppimiskokemusta. Koska opettajakoulutus painottuu aineopintoihin, oppilaan oppimiskokemuksen tukeminen ei vahvistu ainakaan yläkoulua koskevan aineenopettajakoulutuksen kautta, vaan opettajalta siihen tarvitaan erityistä opiskelijan kasvun tukemiseen ja yhteiskuntayhteyksien tunnistamiseen liittyvää intressiä.

Opettajan pedagogisen vapauden piiriin kuuluu tällöin tärkein osa opetustapahtumaa, jota tukevat yhteiset arvokeskustelut.

Arvokeskustelu on luonteeltaan dialogista, erilaisten vaihtoehtojen kautta rikastuva, ei väittelyä siitä, kenen ehdotus on oikein. Oppimiskokemuksen tukemiseen ei ole olemassa normatiivista ratkaisua, vaan ratkaisut ovat tilannesidonnaisia ja yksilökokemuksia ohjaavia. Pedagoginen keskustelu on luonteeltaan (kasvatus)filosofinen, johon yläkoulun opettajilla useinkaan ei ainakaan kelpoisuusehtojen perusteella ole käsitteellisiä välineitä. Kehitystä opettajan monologista dialogiin on tapahtunut viime vuosina ainakin opettajien koulutuksissa, täydennyskoulutuksissa ja paikallisesti yleisen ajattelun niin suosissa.

## 9.2 Dialoginen matematiikkakasvatus

Dialoginen matematiikkakasvatus yhdistää matematiikkaa elämismailmaan, jolloin matematiikka on luonteeltaan ihmisessä ilmenevää, käytäntöön soveltuva ja käytännöstä kumpuavaa yhdistäen yksilön, pedagogiikan ja kontekstin. Kasvatus on opettajan subjektiivista vapautta, jota hän toteuttaa yhteisesti sovitun suuntaan. Tällöin opetuskeskustelussa ei riitä matematiikan opetussisältöjen tuntemus, vaan subjektiivinen tarkoituksenmukaisuus tuo lisävalmiuksia.

Dialogisen matematiikkakasvatuksen kannalta alaluvut 4.3, 5.3 ja 6.3 jakautuvat yksilön ja yhteiskunnan (sisäinen ja ulkoinen) näkökulmiin, joiden välinen dialogi on tavoiteltavaa. Oppilaan mikrotasolla intuitio (luvut 4.3.1 ja 4.3.2), funktiot (luku 5.3.1) ja matematiikan keksiminen (luku 6.3.1) ovat oppilaan primääriset lähtökohdat oppimispolun rakentamiselle. Virikkeitä yksilöiden näkökulmien erilaisuuteen tuo työni kokonaisuutena ja tutkimuspolku reflektiivisenä elämismailmasuhteena (alaluku 1.4), humanistisena ihmiskäsityksenä (luku 2.3), Heideggerin ja Husserlin fenomenologisena asenteena (luvut 3.4 ja 7.1), talonpoikaisyhteisön toiminnan tarkoituksenmukaisuusperusteluna (luku 4.2.1), talonpoilaisjärkenä ja Sokrateen dialogina (luku 4.2.2), vaikutteina kansakoulun kokonaisopetusmallista (luku 5.2.2), koulumatematiikan uudistamisena (alaluku 6.2.3) ja oppimisstrategisena ajatteluna (luku 7.3). Matematiikkakasvatus tunnustelee, tunnistaa, tunnustaa ja tiedostaa oppimispolkua yksilöllisen luovuuden ehdoilla.

*Matemaattista totuutta saatetaan perustella, että  $1 + 1 = 2$ , jolloin dialogia ei tarvita. Matematiikka ilmenee kuten se esitetään ja se on siinä. Matematiikkaakin muuttuu ja käsitykset matemaattisen tiedon luonteesta sen mukana. Ohjelmointi toimii binäärijärjestelmässä, jossa  $1 + 1 = 0$ . Ajan mittaamisella on yhteys kulmamittoihin. Topologia ei toimi metrisissä avaruuksissa. On olemassa erilaisia kulttuurisia, poliittisia, filosofisia ja tieteenfilosofisia lähtökohtia; lukujärjestelmiä ja tutkimushaaroja, joissa toiminnan perusyksikkö luku, lukujärjestelmä, rakenne, muoto, muutos tai aksiooma määrittyy eri tavoin.*

Gödel oivalsi, että vaikka lukujen välillä vallitsee tosia suhteita, deduktiivisen logiikan menetelmät ovat liian heikot totuuksien todistamiseen. Totuus on todistusta suurempi. (Casti & DePauli 2001, 15). Pohjimmiltaan käsitykset totuudesta rakentuvat kulttuuriperäisesti, missä suhteessa matematiikan kulttuurinen kehitys on ollut väkevin totuuden laadun perusteella. Matemaattinen totuus käytäntöihin suhteutettuna tuottaa lisää merkityksiä, jotka eivät ole yhteismitallisia tai tarkkarajaisia. Matematiikan opetusta on ohjannut totuuteen pyrkimys, minkä saavuttamisen arviointi on opettajan tehtävä. Arvostelu oikein/väärin asteikolla saa herkimmat ja kriittisimmät oppilaat helposti uskomaan, että pieleen meni. Luovuttaminen tai psykologinen puolustautuminen on hyvin tyypillistä.

Dialogisen pedagogiikan soveltaminen tapahtuu oppilaiden elämismaailman ja siitä spontaanisti heränneiden kysymysten ehdoilla. Tällöin syntyvälle dialogille on eduksi, että opettajalla on fenomenologinen asenne omaan elämismaailmaansa, johon vertaamalla syntyy kyky kuunnella opiskelijoiden käsityksiä omista havainnoistaan. Dialoginen pedagogiikka edellyttää opettajalta hyvää opetusaineen ja siihen liittyvän kontekstin hallintaa, jotta hän voi kommentoida mitä erikoisempia kysymyksiä. Oppilaalle puhevaltaa antava opettaja tarvitsee kokonaisvaltaisesti jäsenyneitä käsityksiä matematiikan sisällöistä ja opetusstrategioista voidakseen reagoida joustavasti keskusteluun (myös Tomperi 2016, 95). Tomperi korostaa oppilaan vahvuuksien tunnistamista ja vahvistamista, ei heikkouksien tai väärin ajatusrakenteiden tyrmäämistä. Oppilaan itse tunnistama oma ajatusketju on itsenäisen ajattelutaidon perustaa, minkä vähittäisen rakentamisen tuki on dialogisen matematiikkakasvatuksen tehtävä.

*Yksi hyvin tyypillinen oppilaan kysymys on, miksi pitää opiskella polynomeja. Vastauksessani olen tilanteesta riippuen kuvaillut matematiikassa Descartesista lähtien vakiintunutta tapaa merkitä symboleilla, kirjaimilla ja laskutoimitus-*

*merkeillä laskutoimitusten ketjua, jossa kirjaimilla voi olla sovellustilanteissa erilaisia lukuarvoja. Esimerkiksi polynomilauseke  $2a + 3b$  voisi tarkoittaa kaksi kertaa joku luku lisättynä kolme kertaa joku toinen luku. Polynomien laskusäännöt noudattavat samoja periaatteita kuin laskeminen luvuilla edustaa, mutta jos ei tiedetä, mistä luvuista on kysymys, merkitään kirjain.*

Monologinen esitystapa, mitä edellinen kuvaileva esitystapa edustaa, on haasteellinen, koska se edellyttää opiskelijoiden 100% kuuntelevaa läsnäoloa. Opettaja voi omalla auktoriteetillaan tai pelotteilla saada puherauhan, mutta opiskelijan aktiivinen ja tarkkaavainen läsnäolo vaatii opiskelijalta motiivia ja pyrkimystä kytkeä kuulemansa omaan ajattelurakenteeseensa. Oppilaat ovat kehityksensä merkittävässä muutosvaiheessa yläkouluvaiheessa, jolloin tunteet vaikuttavat herkästi myös vääristävästi ja torjuvasti. Oppilaan oma kokemus saattaa herpaantua kokonaan jo siinä vaiheessa, kun kuulee sanan polynomi ja ajatus jää harhailemaan. Opetusteemana *polynomi* sisältää joukon siihen liittyviä käsitteitä, kuten lauseke, potenssilauseke, potenssilausekkeen aste, polynomien aste; termi, muuttujatermi, vakiotermi; kerroin, kirjainosa; monomi, binomi, trinomi ja polynomi. Abstraktien ja täsmällisten käsitteiden määrittely ennen harjoittelua sopii joillekin opiskelijoille, mutta ei koskaan kaikille. Oppilaan havainnointia voi ohjata tunnistustehtävillä ja harjoitteilla ennen määrittelyjä.

*Dialogisesti voisi lähteä liikkeelle kysymällä, mitä tarkoittaa matematiikassa merkintä  $2a$ ? Vastauksia saattaa tulla erilaisia: kaksi apinaa tai se ei merkitse mitään. Molemmat vastaukset ovat lähes oikein. Apinan tilalla on joku luku, joka on merkinnässä kaksinkertainen. Merkintä  $2a$  ei merkitse mitään, koska se ei merkitse konkreettista vaan abstraktia.  $2a$  merkitsee jotakin yleisesti, minkä lukuarvo riippuu  $a$ :n lukuarvosta. Merkinnässä kertomerkkiä ei kirjoiteta näkyviin, koska  $2$  on luvun  $a$  kerroin. Merkintä  $2a$  tarkoittaa 'kaksi kertaa  $a$ ', siinä on kerroin ja kirjainosa,  $2a$  on tällöin malli  $2:n$  ja  $a:n$  riippuvuudesta. Merkintä  $2a$  on ajatusketjun 'kakkonen ja jonkun luvun tulo' matemaattinen malli, jota kutsutaan myös polynomiksi. Lukuja ja/tai kirjaimia sisältäviä yhteen-, vähennys- ja kertolaskumalleja kutsutaan polynomeiksi tai polynomilausekkeiksi.*

Dialogisuuden idea lähtee jäsentymään ja järjestymään oppilaan omasta kokemuksesta elämismaailmassa. Opettajan ei ole helppo keksiä matematiikan täsmällistä sovitusta käytännön tilanteisiin, koska matematiikka on kietoutunut

monin eri tavoin ja tasoin arjen elämään. Tällöin matematiikka on keksittävä sovellutuksista tai mielikuvituksesta. Matematiikka on kehittynyt tieteenä täsmällisen tarkaksi, jolloin jää kuilu elämismailmoihin kätkeytyneen ei-tarkkarajaisen matematiikan ja tieteellisen matematiikan väliin. Olennaista on oppilaan ankkuroiminen käsiteltävään asiaan, jossa opettaja tukee oppilaan ajattelutaitumuksia (Laine 2008, 266). Opiskeluprosessin kontekstualisointi edellyttää tällöin yksilöllisen oppimispolun rakentamisen tukemista, jossa oppilas saa vapausasteita sillan rakentamiseksi teorian ja käytännön välisen kuilun yli.

*Onko oppilaan taipumus rakentaa oppimispolkuaan opettajien sääntöjen perustalta vai keksimällä sääntöjä omasta intuitiostaan ja havaintomaailmastaan käsin. Oma oppimispolkuni on kulkenut tulkinnassani vahvemmin jälkimmäistä polkua. Yksilöllinen opiskelustrategia edustaa yksilöllisiä kombinaatioita vastakkaisten käsitysten välistä. Tutkimuspolulla on yhteys ymmärrykseeni matematiikan rakenteesta, jota voi luonnehtia horisontaaliseksi näkökulmaksi, jonka intressinä on ymmärtää matematiikan yhteyksiä eri tieteisiin sekä yhteiskunnalliseen todellisuuteen.*

Matematiikan opiskeluun liittyvät toiminnalliset funktiot ovat yksilöllisesti erilaisia. Taulukossa 4 erittelen yksilölähtöisiä mahdollisia eroja, joiden tunnistamisella on mahdollista edistää oppilaan oppimaan oppimista ja matematiikan soveltamista eri konteksteissa. Matematiikan osaaminen ei ole vain tietoa, vaan omaksuttu matematiikkakuva vaikuttaa siihen, miten paljon tunteilla on vaikutusta oppimiseen (Hannula & Holm 2018, 135). Matematiikkakasvatuksen tehtävää tukee oppilaan, vanhempien ja opettajan asenteistaan ja merkityksistään tietoisemmaksi kasvaminen, mitä dialogi tukee.

Horisontaalinen näkökulma sallii yksilöllisen taidollisen kehityksen omaperäisyytenä. Horisontaalinen näkökulma liittyy yhteiskuntaosallisuuden mielekkääksi kokemiseen ja suomalaisten ongelmanratkaisuvalmiuksien säilyttämiseen ja vahvistamiseen. Tällöin tärkeää on tukea erilaisuutta, erilaisia ratkaisuja ja ratkaistavien ongelmien keksimistä. Oppivelvollisuuskoulusta jatko-opintoihin suuntautuminen on perustaltaan horisontaalista, oppilaan mahdollisuuksia tutkivaa. Dialogi tukee erilaisuuksien tasa-arvoa.

Dialoginen eli vuorovaikutteisesti keskusteleva matematiikan opiskelu kehittyi oppilaan suhteessa elämismailmaansa. Vuorovaikutusmahdollisuuksia oppilaan havainnon lisäksi laajentaa opettaja, luokkayhteisö sekä havainto- ja opiskelumateriaalit. Dialogi ja pohdinta tarkoittavat fenomenologista asennetta (Heideg-

ger, Husserl, Sokrates), ajattelemista, kysymistä yhä uudelleen itseltään. Opiskelijan dialogi itsensä kanssa on lähtökohta. *Opiskelu* ympäristö sisältää opiskelua tukevan oppimateriaalin ja elämismaailmallisen virikeympäristön, mikä on laajempi kuin oppimisympäristö. Dialogi opiskeluympäristössä tukee oppilaan autonomiaa, aktiivisuutta ja autenttisuutta oppilaan omista lähtökohdista. Avoimuus ja tuki oppilaan kysymyksille on perustana oppilaan itseohjautuvalle itsensä harjaannuttamiselle.

Kansakoulun kokonaisopetussuunnitelmassa elämismaailma on läsnä. Maalaiskansakoulun oppiaineet liittyvät ympäristöoppiin, mikä luo ymmärrysperustan kaikkiin oppiaineisiin, myös laskentoon ja mittaussoppiin. Oma aktiivisuus ja uteliaisuus on ympäristöä tutkivan toiminnan perustana. Oppimiskäsitys muodostuu itseohjautuvaksi kontekstin ehdoilla. Oppilaslähtöisyyden ympyrä on sulkeutunut ja olemme kuin uudelleen tukemassa autenttista luovuutta, mikä vielä 50 vuotta sitten elämismaailmoissa saattoi toteutua. Oppimispolkuajattelu mahdollistaa pelkäämättömän, erilaisen ja uudistavan ajattelun, mikä voi johdattaa myöhemmin elämässä ihan omanlaisille urille, kuten kunniatohtoriksi (2018) alle 30-vuotiaana nimetty Linda Liukas. Taitojen kehittyminen on luonteeltaan kasautuvaa, kumulatiivista, mikä ilmenee esimerkiksi tutkimuksissa lukujonotaitojen merkityksestä matemaattisiin taitoihin (Aunola & Nurmi 2018, 58-59).

Opetussuunnitelman (2014) tavoitteena on *yhtenäisen* perusopetuksen toimintakulttuuri. Kasvatuksen perustana on oppilaan tavoitteellisuus. Kasvuprosessiin kuuluu, että ihminen kasvattaa vuorovaikutteisesti toisia ja itseään (myös Nurmi 1995, 10). Aidosti oppilaan omia havaintotaipumuksia tukeva lähestymistapa on avoin luovien potentiaalien tunnistamiselle. Kasvatus eroaa oppisisältöjen opettamisesta pitkäjänteisyydellään. Kasvatuksen näkökulmasta aikuiskasvatus korostaa oppijan ominaisuuksia ja valmiuksia. Yhteiskunnan muutostahdin kiihtyessä oppilaan ohjaaminen ajan hengen tuomiin mahdollisuuksiin on valmiuksien tukemista. Heikkisen (2005, 255) mukaan elinikäisen ja -laajuisen oppimisen edistämisen politiikassa ihmisten elämä kuvataan jatkuvasti ja ennakoimattomasti muuttuvaksi. Tuomiston (1985) mukaan aikuiskasvatus on historiansa aikana painottanut eri näkökulmia: valistus, sosiaalipolitiikka, kansalaiskasvatus, inhimillisten voimavarojen kehittäminen ja sosiaalinen oppiminen (emt.), jotka erilaisin painotuksin ovat läsnä kasvutapahtumassa.

Elinikäisyyden näkökulmasta opetussuunnitelman oppimistavoitteet ovat välitavoitteita. Kasvatustavoitteet ovat laajempia opiskelijan itse itselleen tai opettajan luokalleen asettamia yleisiä tavoitteita, joiden merkitys on elinikäinen. Ma-

temaattisten ajattelutaitojen kehittäminen ja yksilöllisten valmiuksien vahvistaminen on jatkuva tavoite. Elämismaailmallinen keskustelukehys laajentaa mahdollisuuksia luoviin yksilöllisiin opiskelupolkuihin, mihin tilanteet tarjoavat virikkeitä.

Kokonaisuutena koulumatematiikan teoreettinen painotus on ristiriidassa elämismaailmalähtöisen vähitellen jäsenyvän konstruktivisen matematiikkatulkinnan kanssa. Matemaattinen ongelmanratkaisu on silta elämismaailman ja teoreettisen matematiikan kanssa. Oppimispolku on yksittäisen oppilaan suhde omaan elämismaailmaansa, kuten kasvi on suhteessa kasvuympäristöönsä (luku 4.2.3). Tällöin oletuksena on, että otteen saaminen matemaattiseen ajattelurakenteeseen kasvattaa sisäisesti ja ulkoisesti. Tällöin tiedolla ja taidolla on kasvattava tehtävä. Todellisuuksien kohtaaminen elämismaailmallisessa kentässä edellyttää dialogia itsensä tai toisten kanssa.

Elämismaailmassa sisältö on olemassa ennen käsitteitä, jolloin ongelmana on käsitteiden keksiminen sisällöille. Oppimispolku käynnistyy tästä perustasta. Kulttuurin kentässä matematiikaksi kutsumani tietoisuuden kehitys on lähinnä tietoa ennen käsitteitä. Tällöin sisäisyys ohjaa, ei ulkoinen odotus. Oppimispolun (tutkimuspolun) rakentamisen tavoitteena on esittää itselle rakennettu ymmärrys myös toisille. Koska kasvaminen muuttaa kokemusta elämismaailmasta tai minästä tunnistetun merkitysmaailman ehdoilla, oppilaan oma suhde koulumatematiikkaan on avainasemassa. Tällöin oppilaan horisontti, miten matematiikka ilmenee oppilaan kontekstissa on opiskelun orientaatioperusta. Jokaiselle oppilaalle ei riitä, että matematiikka yleisesti on tärkeää tai matematiikan numero on tärkeä, vaan tärkeää on saada ote, jonka merkitys yksilölle avaa maailmaa mielekkyytenä ja ymmärryksenä.

*Matematiikkaa tiedostamaan pyrkivä fenomenologinen asenne auttaa tunnistamaan omia havaintojaan, tunteitaan ja ymmärryksen tapaansa. Miten tahansa oppilas kuvaa kokemustaan, se on aina oikein ja lähtökohdaksi kelpaava. Opettaja voi asettaa kysymyksensä tilanteesta riippuen: ”Tarkenna, tarkasta, kuvaile lisää, mistä niin päätelitte, mitä tässä kysytään, tutki tarkemmin, tarkenna, katso uudestaan, mitä havaitset, mitä tiedät ennestään tästä asiasta, en tulkitse samoin, onko näin, jatka siitä, miten perustelet, nyt huijaat, nyt et ole vireessä, ei noin sanota ihmiselle.” Positiivinen ja hyväksyvä puhe on dialogia. Solmut ja ongelmat ovat mahdollisuuksia. Opettajan työssä on aina annos terapeutista asennetta, jonka perusteella mikään ei ole ihmiselle vierasta.*

Suomalainen sivistys juurtuu kulttuuriin, joka kehittyi dialogisessa suhteessa ympäristöön. Kokemusyhteys kulttuuriympäristöissä syntetisoituu intuitiossa (4.3.1 ja 4.3.2) sopeutuen (4.2.3) ja vaikuttaen (4.3.3) yhteiskuntaan. Dialogisella kokemuksella todellisuuteen on yhteys matemaattisen ajattelun kehittymiseen kulttuurin, politiikan ja tieteen näkökulmista samanaikaisesti vähitellen jäsentymisen, täsmentyen ja tarkentuen prosessissa. Ihminen on ollut kehityksen suunnan näkymätön vaikuttaja (luku 4.3.4) ja on edelleen. Valitsemalla toisin maailma näyttää erilaiselta. Oppilaat koulussa ovat tulevaisuuteen vaikuttajia, mitä näkökulmaa on syytä korostaa.

Arjen elämässä selviäminen on edellyttänyt säännönmukaisuuksien, järjestyksen ja suhteiden havaitsemista. Arvotietoisuuden kehittyessä matematiikan merkitys tunnistuu erilaisena eri kulttuurisissa konteksteissa. Kreikan luonnonfilosofit ja Ateenan kultakauden filosofit (myös Hämäläinen 1992, 166) tutkivat kaiken syntyä ja rakensivat perustan filosofialle, jonka osana ja perustalta matematiikka kehittyi. Yleisimmässä mielessä dialektiikka, myöhemmin dialogi kehittyi pyrkimyksenä tavoittaa totuus ristiriitojen kautta. Matematiikka on kehittynyt ja kehittyä edelleen yksilöiden ja yhteisöjen dialogisessa suhteessa ympäristöön ristiriitojen ja ongelmien tunnistamisen kautta. Tärkeintä on, että ajatus herää ja tuo dialogiin ajateltavaa.

*Keskusteluissa nuorten tai aikuisten kanssa on tullut usein esiin, että matematiikka meni heidän kohdallaan peruskoulussa ohi. Myöhemmin elämässä he ovat löytäneet matematiikkaa osaavan minänsä. Matematiikan numero on ollut heidän kohdallaan huono ennuste. Seiska on muuttunut kympeksi lukion laajalla matematiikalla, kutonen yhdeksäksi kansanopiston peruskoululinjalla tai peruskoulun vitonen on muuttunut ammattikorkeakoulun vitoseksi (paras arvosana). Muutosta he kuvaavat itsestään käsin. Jossakin uudessa tilanteessa he ovat luottaneet omaan havaintoonsa ja oppimisprosessi on vienyt mukaansa. Se, mitä he ennen luulivat itsestään ei ollutkaan totta. Ilo ja hämmennys omasta ennakkokäsityksestä osaamisen tunnistamisen jälkeen on ollut voimakas. Positiivisen alun perustana heidän kuvauksissaan on dialogi. Tarina toistuu usein pojilla. Opettajan kasvatuseränsä tukee epäonnistumisen jälkeistä kasvojen menetyksen pelkoa, mikä pojilla saattaa olla kulttuurisista syistä voimakkaampi.*

Dialektiikka on antiikin aikaan ja keskiajalla vaikuttanut keskustelumuoto, metodinen väline ja oppiaine, josta eri filosofeilla on erilaisia painotuksia. Dialogi

on dialektiikasta kehittynyt yhdessä oppimisen muoto, jossa erilaiset näkökulmat tarkastelun kohteesta laajentavat merkityssisältöä. Marja-Liisa Kakkuri-Knuutilan (2015) mukaan ristiriitaisiltakin vaikuttavat näkemykset täydentävät toisiaan, kun nähdään, mikä niissä on ydinjuttu, päinvastoin kuin väittelyssä, jossa vain toinen voittaa.

Dialogin ja väittelyn eroa Kakkuri-Knuutila valaisee vertaamalla niiden päämääriä. Siinä, missä argumentin on tarkoitus osoittaa väitteen uskottavuus, dialogissa vaihdetaan kokemuksia ja perustelujen sijaan selitetään, kuinka on itse päätyttyä niihin. Dialogissa tarjotaan omia näkemyksiä muille testattavaksi. (Halttunen-Riikonen & Tienaho 2015, 14.) Dialoginen keskustelu edellyttää turvallista avoimen luottamuksen ilmapiiriä sekä koululuokassa että opettajainhuoneessa. Olennaista koulumatematiikan opiskelutilanteissa on opettajan arvostava oppilaan tukeminen sekä itseltään kysymään kannustaminen.

*Avoimen ilmapiirin luominen on opettajan tärkeä tehtävä, koska matematiikasta, yhteiskunnasta ja sosiaalisista ympäristöistä heijastuva ajattelukulttuuri saattaa olla kehittynyt hierarkiseksi tai polaariseksi, jonka seurauksena ryhmässä voi olla klikkejä ja valtarakenteita, joiden avoin ongelmaksi toteaminen on välttämätöntä keskustelun kehittämiseksi. Koululuokissa vääristyneet ajattelurakenteet syrjäyttävät ja vaientavat joitakin oppilaita aiheuttaen vähättelevää puhetta, kiusaamista tai syrjintää. Erilaisuuden tukeminen onnistuu dialogisessa vuorovaikutuksessa, jossa kaikki ovat lähtökohtaisesti samanarvoisia ja vääriä ajattelurakenteita ei ole, on vain erilaisia ajattelun lähtökohtia.*

Opetuksen järjestämistä ohjaava systemaattinen ainekohtainen opetussuunnitelmamalli erottaa oppiaineet toisistaan. Opetusaineiden välinen integrointi jää näin koulukohtaisten intressin varaan. Muihin kouluaineisiin liittyvä matematiikka saattaa jäädä tunnistamatta oppivelvollisuuskoulussa, jolloin se tulee yllätyksenä jatko-opinnoissa. Matematiikan perustaitojen ja soveltamistaitojen heikkoudet selittävät osaltaan opintojen keskeyttämisiä perusopintojen jälkeen. Tällöin koulumatematiikka yleissivistyksenä ja arkivalmiuksien osana on jäänyt välittymättä kouluopetuksessa. Koulumatematiikan formaalisten taitojen harjoittelu tarvitsee rinnalleen matematiikan keksimistä, jonka fokuksessa on kipinän synnyttäminen matematiikan kiehtovuudesta. Matematiikan kiehtovuus on piiloutunut monikulttuuriseen, moniarvoiseen, monitieteiseen ja monimuotoiseen matematiikkailmiöön, josta matemaattisen oppimispolun rakentaminen voi olla elinikäinen tutkimuspolku. Moninaisuudessaan matematiikan säännönmukai-

suus on käsittämätöntä. Ihmettelystä voi syntyä yksilöllisesti ainutlaatuista, missä on vielä paljon vaihtoehtoja tulevaisuuden oppilaille.

Matematiikan kiehtovaksi kokeminen edellyttää oppimisen henkilökohtaista- mista ja fenomenologista asennetta. Kiehtovuus on kuin selviämistä labyrintissä tai pelin strategian löytämistä, mikä imaisee mukaansa. Kiehtovaksi kokeminen on jatkuvaa matkalla oloa, jossa ongelman keksiminen (tai löytäminen) johdat- taa eteenpäin. Tällöin itsearviointitaidot oppimisprosessin edetessä ovat avain- asemassa.

*Tyylini keskikoulussa ja lukiossa oli kirjoittaa lauseita ratkaisujen väliin, ker- toakseni itselleni tai lukijalle, mitä kulloinkin olin tekemässä ja miksi. Usein pu- huin myös ääneen, mitä kulloinkin keksin ja mitä se tarkoittaa. Itse itselleen kertominen on fenomenologista matematiikkaa, joka voi olla myös yhdessä kes- kustelua.*

Kansalaisen matematiikka toimii mielensisäisesti, mikä on saattanut menettää osan käyttövoimastaan kokemusperustaisuutensa perusteella. Dialoginen mate- matiikkakasvatus tukee matematiikan välineellistä ja itseisarvoista ymmärtämis- tä. Koulumatematiikan oppimisen mahdollisuuden lähtökohtana on tällöin yksi- löllinen kokemus. Matematiikan kiehtovaksi kokeminen liittyy yksilöllisesti koettuihin tunne-, tahto-, tieto- ja asenneominaisuuksiin, jotka ovat osin tiedos- tamattomia. Tiedostamista tukeva dialoginen matematiikkakasvatus antaa mah- dollisuuden ymmärtää myös toisinajattelevia.

### 9.3 Normatiivinen ja soveltava etiikka

Etiikka (ethos) koskee tapaa elää, asua ja olla olemassa (Nancy 2007). Tällöin etiikka koskettaa tutkimuspolun elämismaailmallista suhdetta matematiikkaan keskeisesti. Tutkimusasetelmaani koskee sekä normatiivinen että soveltava etiikka. Teoreettinen etiikka tutkii kaikille moraalisille ilmiöille yhteisiä kysy- myksiä. Teoreettisen etiikan suuntaus, normatiivinen etiikka, pyrkii etsimään hyviä perusteluita moraalisille ohjeille ja periaatteille, joiden tarkoitus on antaa suuntaviittoa ihmisten elämälle (Pietarinen 2012, 2). Opetussuunnitelma edus- taa normatiivista etiikkaa, jonka perustalta opettaja toimii.

Filosofiset periaatteet tai oppimisteoreettinen näkemys, kuten dialoginen matematiikkakasvatus, on luonteeltaan moraaliteoria (vrt. Koskinen 1995), jolloin siinä on mukana ohjeita ja suuntaviittoja ihmisen elämälle. Tutkimuspolun osana dialoginen matematiikkakasvatus on suositusluontoinen keskustelun herättäjä. Tällöin sen mahdollinen käyttö käytännön opetustilanteissa sijoittuu opettajan pedagogisen vapauden piiriin ja soveltavaan etiikkaan. Opetuksen velvoittava arvoperusta on opetussuunnitelmassa, mikä ei anna ohjeita sen soveltamiseen. Soveltaminen jää koulun ja opettajien vastuulle. Dialoginen matematiikkakasvatus vahvistaa vuorovaikutteisuutta ja oppilaiden erilaisia suuntautumisia hierarkioiden luomisen sijasta.

Soveltava etiikka kohdistuu jonkin rajoitetun yhteiskunnallisen tai muun toiminta-alueen moraalisiin ongelmiin. (Pietarinen 2015, 2.) Koulun arkea ohjaavat erilaiset kehystekijät: laki, puitteet, ohjeet; aineelliset ja henkiset edellytykset, joiden tarkoitus on tukea koulutyön oikeudenmukaisuutta ja pitää järjestystä yllä (Nurmi 1995, 22). Miten eettinen soveltaminen kehysten sisällä toteutetaan, on koulukohtainen kysymys ja myös opettajan kysymys. Soveltavana etiikkana matematiikkakasvatuksen tehtävä on ylläpitää oppilaan työmoraalia suhteessa oppimistavoitteisiinsa.

Pietarinen liittää metafysisen intressin kriittisiin normatiivisiin tieteisiin, kuten moraalifilosofiaan. Matematiikan voi yhdistää yhdessä filosofian kanssa ideatieteisiin (mm. Nurmi 1995, 17) ja moraalifilosofiaan (mm. Koskinen 1995, 147). Matematiikan oppimisen kognitiivisen kehityksen teoriat (Kohlberg, Piaget) kuvaavat moraalien kehittymistä (Koskinen 1995, 147-152). Matematiikkatieteenala on eksaktin ja täsmällisen luonteensa perusteella normi, täydellistyessään ihanne. Matematiikan ymmärtäminen kasvattaa johdonmukaisuutta, totuudentajua ja oikeudenmukaisuutta tai se voi vaikuttaa myös päinvastoin, jos kiinnittyminen sen merkityksiin ei tue ihmisenä kehittymistä. Matematiikkakasvatus tukee kiinnittämistä merkityksiin, joilla on mieli elämismaaailmassa.

Opetussuunnitelma (luku 5) edustaa normeja ja sisältää objektiivisia arvoja siinä mielessä, että se antaa yleisiä ohjeita elämään sekä oppiaineiden sisältöön ja opettamiseen. Opettaja työssään kohtaa opiskelijoita erilaisista kulttuurisista lähtökohdista, millä on merkitystä opiskelijan opinpolun käynnistämisessä sekä yksilöllisten ja yhteisten tavoitteiden ohjaamisessa. Myös oppiaine matematiikan tulkinnassa opettaja ottaa kantaa opetusainettaan koskeviin arvokysymyksiin, vaikka ei voikaan juuri vaikuttaa sisältöihin. Eettistä pohdintaa edellyttää, mikä matematiikassa koskee kaikkia ja minkä suhteen on oltava sensitiivinen. Käsitteenä matematiikka on monimerkityksinen ja mahdollistaa tällaisen poh-

dinnan. Millaisena opetusaineeseen liittyvä arvotieto lopuksi tavoittaa oppilaan opettajasuodattimen läpi kuljettuaan, on soveltavan etiikan kysymys.

Ajatus tieteen arvovapaudesta sisältyy tieteen objektiivisuuden ideaaliin. Platon puolusti tieteen arvovapautta (Raatikainen 2006, 2; 2012, 94). Matematiikan kohdalla puolustus onnistuikin ja dikotomia kulttuuri- ja luontotiedon välillä on säilynyt antiikista lähtien. Tiede keskittyi tutkimaan muuttumatonta luontoa, eikä muuttuvaa kulttuuria (Alhanen 2013, 21). Ideatieteenä matematiikkaa on pidetty arvovapaana tieteenalana (Nurmi 1995, 17). Arjen reaalisessa todellisuudessa arvovapaata toimintaa ei ole olemassa. Myös matematiikkaa luova oppilas tai tieteilijä on pohjimmiltaan subjektiivinen toimija. Kuvatun arvoristiriidan ratkaisuna matematiikka piiloutuu subjektin sisäiseen ajatteluun, teknologisiin sovellutuksiin, yhteiskunnan rakenteisiin, tutkijoiden teorioihin, matemaatikkojen työhuoneisiin ja yleisesti kaiken toiminnan taustalle. Vaikka korostan arvonäkökulmaa, en voi opettajana sanoa, miten pitäisi ajatella vaan miten on mahdollista ajatella. Vaikka matematiikka ja tiede yleisesti ovat saaneet aikaan hyvää tarkoituksesta huolimatta myös paljon pahaa, on syytä korostaa tieteen kestäväää soveltamista korostavaa merkitystä, missä jokainen voi olla eettisesti toimiva subjekti.

Kulttuuri antiikin merkityksessä viittasi lähinnä maan viljelemiseen ja puutarhan hoitoon. 1700-luvulla kulttuuri alkoi merkitä länsimaisten yhteiskuntien ihmisten elämäntapojen ja arvojen muodostamia kokonaisuuksia. 1900-luvulla kulttuurin käsite laajeni tarkoittamaan myös muita kuin länsimaisia yhteiskuntia. Kulttuurin käsitteen arvottava ja luokitteleva sävy on ollut historiallisesti voimakas. (Kupiainen & Sievänen 1994, 7.) Kulttuurienvälisyyttä voi tukea dialogilla, jonka perustalta eri kulttuurit yhdessä laajentavat yhteistä käsitystä sivistyksestä. Ulkoisten luokitusten kautta toisistaan erottaminen tuottaa refleksiivisyyttä ja polarisoitumista, mikä yhteisöllisyyden rakentamisen ja maailmanrauhan kannalta ei ole eettisesti tuettava kehityssuunta. Koulu on kulttuurinen yhteisö, jossa ymmärtämisyhteyksien rakentamista harjoitellaan.

Soveltava etiikka korostaa yksilöllisyyttä yhteisymmärryksen ja luovuuden perustana. Suomalaisen Edward Westermarckin (1906; 1932) emotivistinen moraaliteoria puolustaa moraalisten ideoiden biologista syntyperää ja relatiivista luonnetta. Tällöin moraaliarvostelmat sisältävät emotivistisia (tunteet ja asenteet) ja tarkoituseettisiä (tarkoitus ja tahto) perusteita. Tällöin arvot ovat subjektiivisia perustaltaan. Arvojen subjektiivisuutta puolustivat myös tutkimuspolun Husserl, Heidegger, Kaila ja Ahlman. Kun matematiikkaa sovelletaan käytän-

töön ihmisten tarkoituksia tukemaan, perustana on subjektiivinen moraalirelatiivisessa todellisuudessa. Soveltamisen relatiivisen luonteen perustalta korostuu ihmiseksi kasvaminen (humanismi).

Liberaalin humanistisen kasvatuksen pioneerit, Aristoteles, Platon ja Sokrates, painottivat yksilön oppimisprosessia, jossa kohdataan totuus. Aristoteleen moraalikasvatus käsitti totuuden pohdinnan sekä käytännöllisen ja teoreettisen tietouden onnellisuuden tavoittelussa. Vanhin länsimainen kasvatusfilosofia painotti uudistavaa oppimista, tiedon organisoimista ja mielen älyllisiä voimia. Humanistisen kasvatuksen perustalta rakentuva aikuiskasvatusfilosofia on kiinnostunut ilmiöiden periaatteista, kohteista, prosesseista ja ongelmista. (Elias & Merriam 1980.) Totuuden tavoittelemisen on matematiikan harjoittamiseen liittyvä periaate. Liberaali humanistinen kasvatus on yhteensopiva oppimispolulle, missä ollaan matkalla, mutta ei koskaan perillä (ellei kuolemassa).

Liberaalin kasvatuksen perustana on itsenäisten ajattelutaitojen kehittäminen, johon matematiikka liittyy läheisesti. Tällöin tiedon kriittinen arviointi perusteista lähtien on tavoiteltavaa. Liberaali kasvatus etsii vastausta kysymykseen, millaisia meidän tulisi olla, jotta osaisimme elää hyvän elämän, minkä voi tulkitta viittauksena itsereflektioon. Liberaalin kasvatuksen mukaan ihminen on huomaani, rationaalinen, moraalinen ja henkinen (Elias & Merriam 1980).

Älyllistä toimintaa edistävät kyvyt ovat Aristoteleen jaottelun mukaan intellektuaalisia hyveitä (Pietarinen 2015, 10). Käytäntöä palvelevat kyvyt ovat luonteen hyveitä. Tärkeitä luonteen hyveitä ovat kardinaalihyveet: rohkeus, kohtuullisuus, anteliaisuus, ystävällisyys, rehellisyys ja oikeudenmukaisuus. (emt. 11.) Hyve-eettinen näkökulma on pohjimmiltaan yksilöllinen ja tarvitsee konfliktitilanteissa avukseen dialogia, jotta voidaan edetä tilannekohtaiseen relativistiseen ratkaisuun. Hyve-etiikka tarjoaa käyttökelpoisia käsitteitä matematiikan opetussuunnitelmadialogiin.

Normatiivinen ja soveltava etiikka ovat läsnä opettajan työssä kokoaikaisesti. Etiikka on arvokasvatusta, jolloin etiikka on sekä tutkimuksen kohde että tutkimustoimintaa ohjaava elämismailma. Matematiikan oppiminen on yhteydessä kognitiiviseen ja henkiseen kehitykseen. Tällöin kognitiivinen, operationaalinen ja itseymmärryksen kehitys yhdistyvät moraalikehityksen vaiheisiin (Koskinen 1995, 147-165), joilla on elinikäistä merkittävyyttä.

Kognitiivista kehitystä, oppimista ja arviointia pitkään palvelleet oppimisteoriat Piaget ja Cohlberg tulkitsevat ihmisen kehityksen luonteen yleispätevänä, johon kulttuurit ja pedagogiset järjestelmät luovat keskustelukontekstin (Koskinen, 151). Etiikka liittyy koulumatematiikkaan kasvatus- ja ohjausmerkityksessä.

Miten opettaja esittää ohjeita ja vaatimuksia, on eettinen kysymys, jonka kohteena on opiskelijan kokemus todellisuudesta. Opetussuunnitelma antaa normit opettamiselle, mutta etiikka liittyy opettajan kasvatustehtävään. Opettaja käyttää pedagogista vapautta opetussuunnitelman tulkinnassa. Tällöin yksityinen oppilas ei välttämättä täytä oppimisteoreettista yleistystä tai edusta normin mukaista odotusta. Millaisin väliintuloin opettaja tarttuu tilanteisiin, vaikuttaa oppilaan kokemukseen itsestään oppijana ja oppimispolun rakentajana omaan tulevaisuuteensa suuntautuen. Eettinen väliintulo liittyy opettajan pedagogiseen vapauteen suhteessa oppilaaseen ja koulumatematiikkaan.

Opettajalla on jonkinlainen kasvatuseetiikka ohjaamassa toimintaa, vaikka opettaja ei olisi siitä itse täysin tietoinen. Kasvatuksen tehtävää vaikeuttaa sen aatteisiin sitoutunut olemus (Nurmi 1995, 23). Tieteen autonomisuuden perustalta yhteiskunnalliset, poliittiset ja uskonnolliset näkemykset eivät saa ohjata tieteen tekemistä (Enwald 2015, 17), eikä myöskään opettajan työtä.

Matematiikasta funktionalisoituva kulttuuri ilmenee painottuneesti fysiikan, tietojenkäsittelytieteen ja kemian teknologiana. Suurimmalla osalla matematiikan opettajista on luonnontieteellinen aineyhdistelmä. Harvoin opettajalta löytyy yhdistelmä matematiikka ja historia, matematiikka ja filosofia, matematiikka ja psykologia, matematiikka ja biologia, matematiikka ja kuvaamataito, matematiikka ja musiikki, matematiikka ja käsityö, matematiikka ja kotitalous tai matematiikka ja kasvatustiede, jotka voisivat tuoda uusia kulttuurisia sfäärejä matematiikan integrointiin ja yhteiskuntasuhteeseen. Opettajan aineyhdistelmä luo mielikuvaa siitä, miten matematiikka yhteiskunnassa ilmenee. Kun kaikilla opettajilla on sama aineyhdistelmä, sfäärien riitasointuja ei synny. Eri soveltamisaloilla matematiikka ilmenee eri tavoin, mutta yleensä aina soveltamisessa tarvitaan myös yksilöllistä luovuutta, kekseliäisyyttä, approksimaatioita ja käytäntöön sovittamista – matematiikka ei esiinny 'puhtaana'. Uusi näkökulma on siis myös eettinen kysymys matematiikan suhteesta elämismailmaan.

Kasvattajalla ja opettajalla on maailmankatsomuksellinen tausta, joka on enemmän tai vähemmän läsnä opetus- ja kasvatustapahtumassa. Tausta on yhteydessä opettajan huomion kohteisiin, mutta se ei saa estää tietojen ja arvojen puolueettonta käsittelyä. Puolueettomuus tarkoittaa tällöin erilaisten oppimispolkujen tukemista suuntanaan elinikäinen kasvu ja tulevaisuuden rakentaminen. Etiikan merkityksessä oppilaan päivittäiset rutiinit, läksyjen tekeminen ja osallistuminen oppimiseen ovat oppimispolun rakentamista oppijan itsevastuuta ja itsearviointitaitojen kehitystä tukien kohti mielekästä tulevaisuutta.

## 10 LÄHTEET

- Aaltonen A., Inkeri K., Lokki O. & Valpola V. 1963. Uusi tietosanakirja. Helsinki: Tietosanakirja Oy.
- Ahlman, E. 1939. Kulttuurin perustekijöitä. Jyväskylä: Gummerus.
- Aho, S. & Mäkiäho, A. 2014. Toisen asteen koulutuksen läpäisy ja keskeyttäminen. Opetushallituksen raportit ja selvitykset 2014:8. Tampere: Juvenes Print.
- Ahoniemi, V. 1998. Könnin kalenterikello – aikansa tietokone. Espoo: Suomen kello-museo. Luettu 5.1.2016.  
[file:///C:/Users/User/Downloads/Kalenterikello\\_Ahoniemi.pdf](file:///C:/Users/User/Downloads/Kalenterikello_Ahoniemi.pdf)
- Alanen, A. J. 1953. Ilmajoki vuoden 1809 jälkeen. Ilmajoki: Ilmajoen kunta. 376-382.
- Alanen, A. 1981. Elinikäisen kasvatuksen käsite. Teoksessa Alanen, A. & Sihvonen, J. (toim.) Elinikäinen kasvatus. Porvoo: Gaudeamus.
- Alanen, A. 1985. Johdatus aikuiskasvatukseen. Helsinki: Yleisradio.
- Alanen, L. 1996. Naturalistinen tietoteoria. Teoksessa Kiesepää, I. A., Pihlström, S. & Raatikainen, P. (toim.) Tieto, totuus ja todellisuus. Tampere: Gaudeamus. 134-143.
- Alanen, L. 1997. Tunteita koskeva tieto ja tunteiden kognitiivinen rooli Descartesin filosofiassa. Teoksessa Niiniluoto, I. & Räikkä, J. (toim.) Tunteet. Helsinki: University Press. 5-10, 109-117.
- Alanen, L. 1989. Intentionaalisuuden ja representaation käsitteet Descartesilla ja Husserlilla. Helsinki: Suomen filosofinen yhdistys. Vuosikirja, Ajatus 46. 100-115.
- Alasuutari, P. 1994. Kulttuurintutkimus ja kulturalismi. Teoksessa Kupiainen, J. & Sevänen, E. (toim.). Kulttuurintutkimus. Jyväskylä: Gummerus. 32-50.
- Alasuutari, P. 1996. Toinen tasavalta. Suomi 1946-1994. Tampere: Vastapaino.
- Alhanen, K. 2013. John Dewey'n kokemusfilosofia. Helsinki: Gaudeamus.
- Anderssen, O. 1950. Sivistysyön historian henkilöahmoja II. Helsinki: WSOY.
- Anon. Avaintaidot. Luettu 5.4.2016  
[http://www.oph.fi/koulutus\\_ja\\_tutkinnot/ammattikoulutus/ammattilliset\\_perustutkinnot/elinikaisen\\_oppimisen\\_avaintaidot](http://www.oph.fi/koulutus_ja_tutkinnot/ammattikoulutus/ammattilliset_perustutkinnot/elinikaisen_oppimisen_avaintaidot)
- Anon. Esiopetuksen opetussuunnitelman perusteet  
[https://www.oph.fi/sites/default/files/documents/esiopetuksen\\_opetussuunnitelman\\_perusteet\\_2014.pdf](https://www.oph.fi/sites/default/files/documents/esiopetuksen_opetussuunnitelman_perusteet_2014.pdf)
- Anon. 1970. Peruskoulun opetussuunnitelmakomitean mietintö 1. Opetussuunnitelman perusteet A4. Helsinki: Valtion painatuskeskus.
- Anon. 1982. Peruskoulun matematiikan oppimäärä ja oppimääräsuunnitelma. Kouluhallitus 1982. Valtion painatuskeskus.
- Anon. 1985. Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet. Helsinki: Kouluhallitus.
- Anon. 1994. Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet. Helsinki: Opetushallitus..
- Anon. 2004. Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet. Helsinki: Opetushallitus..

- Anon. 2014. Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet. Helsinki: Opetushallitus.
- Anon. Eurydice-raportti 2012. Eurooppalaisen koulutuksen kehityskulkuja kuluneella vuosikymmenellä. Key data on Education. Luettu 2.7.2017.  
<https://publications.europa.eu/en/publication-detail/-/publication/2ee74f36-55ae-424d-aaaa-16ecd15ed301/language-fi>.
- Anon. Merriam Webster, mathematics, math. Luettu 1.9.2016.
- Anon. Perusopetuslaki 628/1998. <https://www.finlex.fi/fi/laki/ajantasa/1998/19980628>
- Anon. Perusopetusasetus 852/1998. <https://www.finlex.fi/fi/laki/ajantasa/1998/19980852>
- Anon. Prisma-ohjelma 2017. Suuri matematiikkamysteeri. The Great Math Mystery. Luokijana Juhani Rajalin. Tuotanto: PSB Distribution. Yhdysvallat 2016.
- Anon. Suomalaisten matematiikan ja luonnontieteiden osaaminen vuonna 2002. Kansallisten kehittämistalkoiden väliarvio 1999. Opetusministeriön Koulutus- ja tiedepolitiikan osaston julkaisusarja. Helsinki: Opetusministeriö.
- Anon. TPKS, Talonpoikaiskulttuurisäätiö. <http://www.talonpoikaiskulttusaatio.fi>
- Anon. TTP, Tieteen termipankki, intuitio. Luettu 1.9.2016.
- Anon. Wikipedia, matematiikka. Luettu 1.9.2016.
- Anttonen, A. & Huotari, V. 1995. Metafysiikka, metodologia ja maailma. Teoksessa Nieminen (toim.) Menetelmävalintojen viidakossa. Kasvatustieteen laitos. Julkaisusarja B: no 13. Tampere: Tampereen yliopisto. 15-46.
- Appignanesi, R. 2008. Mihinkin uskovat Eksistentiaalistit. Alkuperäisteoksesta What Do Existentialists Believe 2006 suomentanut Tuomi-Ciddings, S. Keuruu: Otava.
- Aristoteles 1990. Metafysiikka. Teokset VI. Suomentanut Jatakari, T., Näätäsaari, K., & Pohjanlehto, P., selitykset laatinut Knuuttila, S.. Helsinki: Gaudeamus.
- Aspelin, G. 1963. Ajatuksen tiet. Alkuperäisteoksesta Tankens vägar – en översikt av filosofiens utveckling 1958, suomentanut Hollo, J. A.. Porvoo: WSOY.
- Aunola, K. & Nurmi, J-E. 2018. Matemaattisten taitojen kehitys kouluikässä. Teoksessa Joutsenlahti, J., Silfverberg, H. & Räsänen, P.. Matematiikan opetus ja oppiminen. Jyväskylä: Niilo Mäki -Instituutti. 54-69.
- Bahm, J. 1995. Epistemology – Theory of Knowledge. World Books. Las Lomas: Albuquerque.
- Beck, U., Giddens, A. & Lash, S. 1995. Nykyajan jäljillä. Refleksiivinen modernisaatio. Alkuteoksesta Reflexive Modernization suomentanut Lehto, L. Tampere: Vastapaino.
- Von Becker, R. 1821. Kansan valituksesta. Turku: Turun viikkosanomat. No 19/1821, 12.5.1821.
- Berger, P.L. & Luckman, T. 1994. Todellisuuden sosiaalinen rakentuminen. Alkuteoksesta The Social Construction of Reality 1966 suomentanut Raiskila, V.. Helsinki: Gaudeamus.
- Binet, A. 1918. Aikamme ajatuksia lapsista. Jyväskylä: Otava.
- Björk, J. 1841. Smed-Släkten Könni. Helsinki: Helsingfors Morgonblad. Artikkelijulkaisut 30.9.1841 ja 4.10.1841.
- Bohm, D. & Peat, D. 1992. Tiede, järjestys ja luovuus. Alkuteoksesta Science, Order and Creativity 1987, suomentaneet Seppälä, T, Jääskeläinen, J. & Pylkkänen, P. Helsinki: Gaudeamus.

- Bowen, W. G. 1969. Assessment the economic contribution of education. Teoksessa M. Blaug (ed.) Economics of education. Harmondsworth: Penguin Books.
- Bourdieu, P. 1985. Sosiologian kysymyksiä. Alkuteoksesta Questions de sociologie. 1980, suomentanut Roos, J. P.. Tampere: Vastapaino.
- Bronowski, J. 1969. Nature & Knowledge: Philosophy of Contemporary Science. Oregon: State System of Higher Education.
- Casti, J. L. & DePauli, W. 2000. Kurt Gödel – Elämä ja matematiikka. Alkuteoksesta Kurt Gödel A life of logic suomentanut Vilkkö, R.. Jyväskylä: Art House.
- Clarkson, M-L 1995. Suomalaiset ja koulu. Asenteita, odotuksia ja käsityksiä. OECD:n koulutusindikaattoriprojektin D-Network'in Suomen tutkimus. Helsinki: Opetusministeriö ja opetushallitus.
- Descartes, R. 2003. Teokset III: Filosofian periaatteet. Totuuden tutkimus luonnollisella valolla. Huomautuksia erääseen ohjelmajulistukseen. Kirjeitä 1641-1645. Suomensuosittelun ja selitykset Yrjönsuuri, M., Kaukua, J., Jansson, S. & Aho, T. Helsinki: Gaudeamus.
- Dewey, J. 1910. How We Think. Ebook Global Grey. Luettu 6.4.2018.  
<https://archive.org/details/howwethink02dewegoog/page/n6>
- Dewey, J. 1957. Koulu ja yhteiskunta. Alkuperäisteoksesta The School and Society, 1915, suomentanut Kajava, K. Helsinki: Otava. Luettu 4.3.2014.  
[https://www.academia.edu/4410360/Dewey\\_Koulu\\_ja\\_yhteiskunta](https://www.academia.edu/4410360/Dewey_Koulu_ja_yhteiskunta)
- Dewey, J. 1999. Pyrkimys varmuuteen. Alkuperäisteoksesta The Quest for Certainty, A Study of the Relation of Knowledge and Action, 1929, suomentanut Määttänen, P.. Helsinki: Gaudeamus.
- Dyson, F. & Calaprice, A. 1996. Einstein sagt – Zitate, Einfälle, Gedanken. München: Piper.
- Elenius, J. 2005. Keskustelua talonpoikaiskulttuurista: Mitä voisi olla uusi talonpoikaiskulttuuri ja millä tavalla se ilmenee tällä hetkellä. Luettu 25.3.2014.  
<http://www.talonpoikaiskulttuurisaatio.fi>.
- Elfving, G. 1982. Helsingfors universitets museum. Matematiikka. Helsinki: Helsingin yliopisto, 63-64.
- Elias, J. & Merriam, S. 1980. Philosophical Foundations of Adult Education. New York: Robert E. Krieger Publishing Co.
- Enwald, M. 2015. Tutkimusetiikka. Tampereen yliopiston tutkijakoulun yleiset tohtoriopinnot. TAYJ12/2015.
- Eräsaari, R. 1996. Mitä on refleksiivinen modernisaatio. Teoksessa Rahkonen, K. (toim.) Sosiologisen teorian uusimmat virtaukset. Tampere: Vastapaino. 155-181
- Fisher, R. 2008. Sokraattinen opettaminen. Teoksessa: Tomperi & Juuso (toim.) Sokrates koulussa – itsenäisen ja yhteisöllisen ajattelun edistäminen opetuksessa. Niin & Näin. Tampere: Eurooppalaisen filosofian seura ry. 159-181.
- Fornäs, J. 1998. Kulttuuriteoria. Alkuperäisteoksesta Cultural Theory and Late Modernity 1995 suomentaneet Lehtonen, M., Hazard, K., Blom, V. & Herkman, J. Tampere: Vastapaino Oy.
- Forsman, J. (toim.) 1996. Encyklopedia. Iso tietosanakirja. Helsinki: Otava.
- Freudenthal, H. 1968. Why to teach mathematics so as to be useful. Utrecht: D. Reidel Publishing Company.

- Freudenthal, H. 1973. *Mathematics as an Educational Task*. Toim. Selden, A. 2014. Utrecht: D. Reidel Publishing Company.  
[https://www.researchgate.net/publication/268448817\\_Book\\_Review\\_of\\_Mathematics\\_as\\_an\\_Educational\\_Task](https://www.researchgate.net/publication/268448817_Book_Review_of_Mathematics_as_an_Educational_Task)
- Freudenthal, H. 1983. *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Dordrecht, Netherlands: Reidel Publishing Company. Luettu 1.5.2019.  
[http://gpdmatematica.org.ar/wp-content/uploads/2015/08/Freudenthal\\_Didactical\\_Phenomenology\\_of\\_Mathematical\\_Structures1983.pdf](http://gpdmatematica.org.ar/wp-content/uploads/2015/08/Freudenthal_Didactical_Phenomenology_of_Mathematical_Structures1983.pdf)
- Giddens, A. 1984. Yhteiskuntateorian keskeisiä ongelmia: Toiminnan, rakenteen ja ristiriidan käsitteet yhteiskunta-analysissä. Alkuperäisteoksesta *Central problems in social theory: Action, structure and contradiction in social analysis*, 1979, suomentanut Andersson, P. & Heiskanen, I. Helsinki: Otava.
- Gulyga, A. 2004. *Immanuel Kant, Eine Biographie*. Tittel der Originala ufgabe KAHT 1977. Frankfurt am Main: Suhrkamp. 11
- Gough, N. 1998. All around the world: science education, constructivism, and globalisation. *Educational Policy* 12/1998. Luettu 6.9.2018.  
[https://www.researchgate.net/profile/Noel\\_Gough/publication/258136074\\_All\\_Around\\_the\\_World\\_Science\\_Education\\_Constructivism\\_and\\_Globalization/links/56145e0508aec6224410336d.pdf](https://www.researchgate.net/profile/Noel_Gough/publication/258136074_All_Around_the_World_Science_Education_Constructivism_and_Globalization/links/56145e0508aec6224410336d.pdf) , 507-524
- Haaparanta, L. 1999. Sivistys ja muutos. *Tieteessä tapahtuu* 3/1999. Helsinki: Tieteellisten seurojen valtuuskunta. 7-23.
- Haaparanta, L. 1989. Intention käsite ja logiikan oikeuttamisen ongelma Edmund Husserlin filosofiassa, *Filosofinen aikakausikirja*. Ajatus 46. 116-126.
- Haaparanta, L. & Niiniluoto, I. 1991. Johdatus tieteelliseen ajatteluun. Helsingin yliopiston filosofian laitoksen julkaisuja 3/1986. Helsinki: Yliopistopaino.
- Haaparanta, L. & Oesch, E. (toim.) 2002. *Kokemus*. Tampere: Vastapaino.
- Haapasalo, L. 2000. *Oppiminen, tieto ja ongelmanratkaisu*. Joensuu: Medusa-Software.
- Halinen, I. 2013. *Tulevaisuuden koulu – toimintakulttuuri muutoksessa*. Yhdessä tulevaisuutta rakentamassa -opetus suunnitelmatyön perusta. Oulu 10.10.2013.  
<https://www.avi.fi/documents/10191/288442/Irmeli+Halinen.pdf/6be07a6a-b31b-4ff7-bf81-dec56a174929>
- Halinen, I. 2015. *Uudistava perus- ja lisäopetus*. Helsinki 5.2.2015. Opetushallitus.  
<https://www.youtube.com/watch?v=Rc9onAABqXU> .
- Halonen, I. 1996. Kahlitseeko kylmä logiikka kaiken luovuuden? Teoksessa Kiesepää, Pihlström & Raatikainen. *Tieto, Totuus ja todellisuus*. Tampere: Gaudeamus. 75-88.
- Hannon, M. 2019. *What's the point of Knowledge? A funktion – First Epistemology*. Oxford: University Press.
- Hannula, M. S. & Holm, M. E. 2018. Oppilaan matematiikkakuva oppimistuloksena ja oppimisen taustatekijänä. Teoksessa Joutsenlahti, J., Silfverberg, H. & Räsänen, P. *Matematiikan opetus ja oppiminen*. Jyväskylä: Niilo Mäki -Instituutti.
- Harva, U. 1983. *Inhimillinen ihminen. Homo humanus*. Juva: WSOY.
- Von Hayek, F. 1983. *Evolution und spontane Ordnung*. Zürich: Bank Hofmann.
- Hegel, G. W. F. 2018. *Gesammelte Werke*. Hampuri: Felix Meiner Verlag.

- Heidegger, M. 2000. Oleminen ja aika. Alkuperäisteoksesta *Sein und Zeit* 1927, suomentanut Kupiainen, R. Tampere: Vastapaino.
- Heikkilä, J. 1981. Luovan ongelmanratkaisun didaktiikka. Helsinki: WSOY.
- Heikkinen, A. (toim.) 2005. Aikuiskasvatuksen tutkimuspolut. Vantaa: Kansanvalistusseura.
- Heikkinen, A. & Kallio, E. 2014. Aikuisten kasvu ja aktivointi. Tampere: University Press.
- Heikkinen, A. & Teräsahde, S. 2011. Aikuiskasvatuksen tutkimusyhteistyön rakenteelliset innovaatiot (AITURI) -hankkeen loppuraportti. Tampere: Tampereen yliopisto.
- Heikkinen, A. 2019. Vapaan sivistystyön aatteet ja ideologiat. Teoksessa Pätäri, J, Teräsahde, S., Harju, A., Manninen, J. & Heikkinen, A. Vapaa sivistystyö – eilen, tänään & huomenna. Sivistystyön vapaus ja vastuu (SVV). Tampere: Vapaa sivistystyö ry. [www.vapausjavastuu.fi](http://www.vapausjavastuu.fi)
- Hiipakka, J. & Vilkkö, A. (toim.) 2001. Filosofian köyhyys ja rikkaus. Nykyfilosofian kartoitusta. Jaakko Hintikan artikkelikirjoituksia 1983-1999. Helsinki: Art House.
- Hilpelä, T. 1986. Filosofia kritiikkinä. Joensuun yliopiston yhteiskuntatieteellisiä julkaisuja no. 6. Assosiation. Joensuu: Joensuun yliopisto.
- Himanka, J. 2002. Ajattelun ajattelemisen kokemisesta: Hegel ja Aristoteles. Tampere: University Press. 37-46.
- Himanka, J. 2010. Filosofia itsenäisenä ajatteluna – fenomenologinen hahmotus. Teoksessa Rydenfelt & Kovalainen (toim.) Mitä on filosofia. Helsinki: Gaudeamus. 201-214.
- Hintikka, J. 1992. Eino Kailan sininen tuli. Teoksessa Niiniluoto, I., Sintonen, M. & von Wright, G. (toim.) Eino Kaila and Logical Empirism. Acta Philosophica Fennica. 152-159.
- Hintikka, J., Halonen, I. & Mutanen, A. 1999. Interrogative Logic as a general theory of Reasoning. Inquiry as Inquiry: A logic of scientific Discovery, Kluwer. 47-90.
- Hintikka, J. 2001. Filosofian köyhyys ja rikkaus – nykyfilosofian kartoitusta. Alkuperäisteoksista toimittaneet Hiipakka, J. ja Vilkkö, R.. Helsinki: Art House.
- Hintikka, J. 2002. Looginen empirismi kuusi vuosikymmentä myöhemmin. Teoksessa Niiniluoto, I. & Koskinen, H. J. (toim.) Wienin piiri. Tampere: Vastapaino. 250-260.
- Hirsjärvi, S. 1985. Johdatus kasvatustieteeseen. Helsinki: Kirjayhtymä.
- Hirsjärvi, S., Remes, S. & Sajavaara, I. 2001. Tutki ja kirjoita. Helsinki: Tammi.
- Hirvonen, A. 2006. Eettisesti hyvä tutkimus. Teoksessa Hallamaa, J., Launis, V., Lötjönen, S ja Sorvali, I. (toim.) Etiikkaa ihmistieteille. Tietolipas 211. Helsinki: Suomalaisen kirjallisuuden seura. 31-49.
- Hirvonen, K. 2012. Onko laskutaito laskussa? Matematiikan oppimistulokset peruskoulun päättövaiheessa 2011. Koulutuksen seurantaraportti 2012:4. Helsinki: Opetushallitus.
- Hodgson, G. M. 1993. Economics and Evolution, Bringing Life Back into Economics. Ann Arbor: University of Michigan Press.
- Hollo, J. A. 1927. Kasvatuksen maailma. Porvoo: WSOY.
- Hollo, J. A. 1931a. Itsekasvatus ja elämisen taito. Porvoo: WSOY.

- Hollo, J. A. 1931b. Kasvatuksen teoria. Porvoo: WSOY.
- Honkola J. & Kuosmanen R-L. (toim.) 2004. Factum, uusi tietosanakirja. Porvoo: Weilin & Göös Oy.
- Howson, G. & Wilson, B. 1990. Koulumatematiikka 1990-luvulla. ICMI-tutkimusraportti. Suomennos Laine, I., Leino, J., Pehkonen, E. & Lehtinen, M.. MAOL-julkaisusarja 25/1990. Helsinki: MFKA.
- Hudson, W. D. 1983. Modern Moral Philosophy. London: MacMillan.
- Humaloja, M, Peura, P & Toivola, M. 2017. Flipped Learning – käänteinen oppiminen. Helsinki: Edita.
- Huotari, V. 1995. Menetelmävalinnat teorianmuodostuksessa. Teoksessa Nieminen, J. (toim.) Menetelmävalintojen viidakossa – pohdintoja kasvatuksen tutkimuksen lähtökohdista. Kasvatustieteiden laitos. Julkaisusarja B: 13. Tampere: Tampereen yliopisto. 47-70.
- Husen, T. 1972. Social background and educational career. Paris: OECD/CERI.
- Husserl, E. 1995. Fenomenologian idea. Alkuperäisteoksesta Die Idee der Phänomenologie. 1907 suomentanut Himanka, J., Hämäläinen, J. & Sivenius. Helsinki: Lohki-kirjat.
- Husserl, E. 2006. Uudistuminen ja ihmisyys. Luentoja ja Esseitä. Alkuperäisteoksista 1936 toimittanut Heinämaa, S. ja suomentaneet Miettinen, T., Pulkkinen, S. & Taipale, J.. Helsinki: Tutkijaliitto.
- Huttunen, R. 2003. Kommunikatiivinen opettaminen. Teoksessa Aittola (toim.) Kasvatustieteiden teoreetikoita. Helsinki: Gaudeamus. 150-181.
- Huttunen, R. 2014. Tutkija yrittäjänä. Teksti aloittaa Helsinki Think Companyn sarjan Helsingin yliopistoon kytkeytyvistä yrityksistä.  
<https://thinkcompany.fi/elamassa-on-tehtava-asioita-joista-saa-kickseja/>
- Hyvärinen, M., Kurunmäki, J. A., Palonen, K., Pulkkinen, T. & Stenius, H. (toim.) 2003. Käsitteet liikkeessä. Suomen poliittisen kulttuurin käsitehistoria. Tampere: Vastapaino.
- Hämäläinen, J. 1980. Pestalozzi. Luonnonmukaisen kasvatuksen idea. Filosofian laudatur-tutkielma. Jyväskylä: Jyväskylän yliopisto.
- Ihalainen, V. J. 1955. Suomalainen talonpoika. Persoonallisuuden tutkimus. Helsinki: WSOY.
- Ikonen, T. 1988. Junior. Kouluikäisen ensimmäinen tietosanakirja. Helsinki: WSOY.
- Ikonen, M. 2015. Esimies-alaisuuden luottamus vuorovaikutuksessa rakentuvana ilmiönä. Prologi: puheviestinnän vuosikirja 2015, 135-151.
- Ikäheimo, H. 2014. Hegel, Georg Wilhelm Friedrich. Luettu 4.2.2018.  
<https://filosofia.fi/node/2416>
- Jaakkola, J. 1935. Suomalainen varhaishistoria: heimokausi ja Kalevala-kulttuuri. Porvoo: WSOY.
- Jauhiainen, I. 2014. Hegel dialektiikasta. LOGOS-ensyklopedia. Luettu 2.11.2017.  
<https://filosofia.fi/node/2399>
- Johansson, T. & Kroksmark, T. 2000. Teacher intuition Didactic Intuition. Teoksessa Kansanen, P. (toim.), Discussions on some educational issues IX. Research Report 211. Helsinki: Yliopistopaino, 21-33.
- Joki, J. 2004. Hahmottavaa geometriaa. Helsinki: Opetushallitus.

- Jokivuori, P. & Vainio, T. 1991. Sosiologian perusteet. Helsinki: Kirjayhtymä. 15
- Joutsenlahti, J., Silfverberg, H. & Räsänen, P. (toim.) 2018. Matematiikan oppiminen ja opetus. Jyväskylä: Niilo Mäki Instituutti.
- Joutsivuo, T & al. 2000. Renessanssin tiede. Helsinki: Suomalaisen Kirjallisuuden Seura.
- Juntunen, M. 1987. Aikamme filosofisia suuntauksia. Teoksessa Wilenius, R., Oksala, P., Mehtonen, L., & Juntunen, M. (toim.) Johdatus filosofiseen ajatteluun. Jyväskylä: Atena, 118-152.
- Juntunen, M. 1990. Martin Heideggerin fundamentaaliontologian modaali-temporaalinen problematiikka. Filosofian laitos. Julkaisu 41. Jyväskylä: Jyväskylän yliopisto.
- Juti, R. 2001. Johdatus metafysiikkaan. Helsinki: Gaudeamus.
- Jutikkala, E. 1958. Suomen talonpojan historia. Suomalaisen kirjallisuuden seuran toimituksia 258. Toinen painos. Helsinki: Suomalaisen kirjallisuuden seura.
- Järvinen, A. & Järvinen, P. 2000. Tutkimustyön metodeista. Opinpaja. Tampere: Tampereen yliopisto.
- Järvinen, T. & Vanttaja, M. 2006. Koulupudokkaiden työurat. Yhteiskuntapolitiikka 71 2006/1.
- Kahanpää, L. 2014. Matematiikan yksilöopetus. Dimensio 4/2014. Helsinki: MAOL ry. 36-40.
- Kaila, E. 1939. Inhimillinen tieto. Mitä se on ja mitä se ei ole. Helsinki: Otava.
- Kaila, E. 1967. Persoonallisuus. Seitsemäs painos, 1934. Helsinki: Otava.
- Kaila, E. 1977. Arkikokemuksen perseptuaalinen ja konseptuaalinen aines. Teoksessa Nyberg T. (toim.) Ajatus ja analyysi. Porvoo: WSOY.
- Kallio, E. (toim.) 2017. Ajattelun kehitys aikuisuudessa. Jyväskylä: Suomen kasvatus-tieteellinen seura.
- Kangas, R. 1989. Jürgen Habermasin kommunikatiivisen toiminnan teoria. 2. painos. Tutkijaliiton julkaisusarja 45. Helsinki: Tutkijaliitto.
- Kangas, R. 1995. Niklas Luhmannin postmoderni superteoria. Teoksessa Rahkonen, K. (toim.) Sosiologisen teorian uusimmat virtaukset. Tampere: Tammer-Paino. 217-253.
- Kansanen, P. 1995. Intuitiivinen didaktiikka. Kasvatus-lehti 3/1995.
- Kant, I. 1781. Kritik der reinen Vernunft. Berlin: De Gruyter.
- Kant, I. 2005. Prolegomena eli johdatus mihin tahansa metafysiikkaan, joka vastaisuudessa voi käydä tieteestä. Puhtaan järjen selitys 1783, filosofian 'kopernikaaninen käänne'. Suomennos Oittinen, V.. Helsinki: Gaudeamus.
- Kant, I. 2013. Puhtaan järjen kritiikki. Alkuperäisteoksesta Kritik der reinen Vernunft 1781 ja 1787 suomentaneet Koistinen, O., Nikarla, M. & Ranki, K. Helsinki: Gaudeamus.
- Kari, J. (toim.) 1994. Didaktiikka ja opetussuunnittelu. Juva: WSOY.
- Kassara, H. 2018. Mietiskely. Tie henkisyteen ja itsensä tuntemiseen. Loimaa: Kustannus HD.
- Kauppi, R. 1990. Syvähenkisen Eino Kailan vaikutus tuntuu yhä. Artikkelit Aamulehdessä 9.8.1990.
- Kauppi, R. 2001. Filosofia coincidentia oppositorum. Teoksessa Koskinen & Palomäki (toim.) Raili Kaupin kirjoitukset 3.1. Tampere: University Press.

- Kauppi, R. 2002. *Filosofia coincidentia oppositorum*. Teoksessa Koskinen & Palomäki (toim.) *Raili Kaupin kirjoitukset 3.2*. Tampere: University Press.
- Kautto, R., Järvinen, S. & Jäntti, J. (toim.) 1970. *Tiedon portaat*. Neuvottelukunta Heikki Hosia, Kosti Huuhka, Lauri Järvi, Antero Manninen, Eero Saarenheimo & Hannu Tarmio. Porvoo, Helsinki: WSOY.
- Keltanen, M. 2011. *Könnin ajannäyttökellot*. The best of National Museum of Finland. 10 suomalaista kiinnostavaa esinettä. Helsinki: Kansallismuseo.
- Kerr, D. 1981. The structure of quality in teaching. *Eightieth Yearbook of the NSSE*. 61-94.
- Ketonen, O. 1986. *Arvovallan politiikka*. Porvoo: WSOY.
- Khalifa, 2012. *Understanding Scientific Understanding*.  
<https://scholar.google.fr/citations?user=qCfnsywAAAAJ&hl=th>
- Kiikeri, M. & Ylikoski, P. 2011. *Tiede tutkimuskohteena – filosofinen johdatus tieteen tutkimukseen*. Vantaa: Gaudeamus.
- Kivi, A. 1870. *Seitsemän veljestä*. Helsinki: Suomalaisen kirjallisuuden seura.
- Kivikoski, E. 1961. *Suomen esihistoria*. Porvoo: WSOY.
- Kivinen, O., Rinne, R., Järvinen, M-R., Koivisto, J. & Laakso, T. 1995. *Koulutuksen säätelyjärjestelmät Euroopassa. Kuuden maan lainsäädäntö- ohjaus- ja säätelyjärjestelmät*. Koulutusosastion tutkimuskeskus. Turun yliopisto. Helsinki: Opetushallitus.
- Kokko, H. 2010. *Sivistyksen varhaista käsittehistoriaa*. *Kasvatus ja aika*, 4/2010. 7-23.
- Konttinen, R. 1981. *Testiteoria. Johdatus kasvatukseen- ja käyttäytymistieteiden mittauksen teoriaan*. Helsinki: Gaudeamus.
- Korhonen, H. 1994. *Peruskoulun päättöluokan matematiikan opetuksen arviointi*. Helsingin yliopiston opettajankoulutuslaitos. *Tutkimuksia 127*. Helsinki: Yliopistopaino.
- Koskenniemi, M. 1944. *Kansakoulun opetusoppi*. Helsinki: Otava.
- Koskinen, H. J. 2002. *Quine, Wienin piirin perintö ja filosofian kohtalo*. Teoksessa Niiniluoto & Koskinen *Wienin piiri*. Tampere: Gaudeamus.
- Koskinen, H. J. 2010. *Metafysiikka ja tiede*. Teoksessa Rydenfelt & Kovalainen. *Mitä filosofia on*. Helsinki: Gaudeamus., 189-200.
- Koskinen, L. 1995. *Mikä on oikein? Etiikan käsikirja*. *Alkuteoksesta Vad är rätt? Handbok i Etik 1993* suomentanut Lehtinen, T. Juva: WSOY.
- Kotkavirta, J. 2002. *Kokemuksen ehdot ja hahmot: Kritik der reinen Vernunft and Phänomenologie des Geistes*. Teoksessa: Haaparanta, L. & Oesch, E. *Kokemus*. Tampere: University Press. 15-36.
- Kovalainen, H. 2010. *Filosofia ja elämä*. Teoksessa Rydenfelt & Kovalainen. *Mitä filosofia on*. Helsinki: Gaudeamus. 189-200.
- Krohn, S. 1955. *Esteettisen kulttuurin ja kasvatuksen peruskysymyksiä*. Porvoo, Helsinki: WSOY.
- Kuhn, T. 1994. *Tieteellisten vallankumousten rakenne*. *Alkuteos The Structure of Scientific Revolutions 1969*. Suomennos Kimmo Pietiläinen. Art House. Juva: WSOY.
- Kumpula, S. 2006. *Ei koulua vaan elämää varten – pragmaattinen teoria tietämisestä*. *Progradu. Aikuiskasvatus*. Tampere: Tampereen yliopisto, 1-176.

- Kumpula, S. 2008. Horisontaalinen matematiikka – fenomenologista analyysia ja synteisiä matematiikan olemuksesta. PD-Diplomi. Kokkola: Jyväskylän yliopisto, 1-67.
- Kupari, P. 2012. Matematiikan osaamisen muutokset Suomessa 2003-2009. Teoksessa Sulkunen, S. & Välijärvi, J. (toim.) PISA09 Kestääkö osaamisen pohja? Opetus- ja kulttuuriministeriön julkaisuja 2012: 12. Helsinki: Opetus- ja kulttuuriministeriö. 34-45.
- Kupari, P. & Hiltunen, J. 2018. Matemaattiset taidot kansainvälisten arviointitutkimusten valossa. Teoksessa Joutsenlahti, J., Silfverberg, H. & Räsänen, P. (toim.) Matematiikan oppiminen ja opetus. Jyväskylä: Niilo Mäki Instituutti.
- Kupiainen, R. 1991. Ajattelemisen anarkia – transmetafyysinen asenne Martin Heideggerilla. Filosofisia tutkimuksia Tampereen yliopistossa XVIII. Tampere: Tampereen yliopiston jäljennepalvelu.
- Kupiainen, J. & Sevänen, E. (toim.) 1994. Kulttuuritutkimus. Johdanto. Jyväskylä: Gummerus.
- Kuukkanen, J.-M. 2010. Kuvitteellista objektiivisuuden historiaa. Kirja-arvio teoksesta Daston & Galison. Objectivity. New York: Zone Books. 2007. Tieteessä tapahtuu lehdessä 7/2010.
- Kuusela, J. 2013. Arviointi ja ajattelun paradigmat. Teoksessa Räsänen (toim.) Oppimisen arvioinnin kontekstit ja käytännöt. Opetushallituksen raportit ja selvitykset 2013:3. Helsinki: Opetushallitus. 225-238.
- Kärnä, P. & Aksela, M. 2013. Työskentely- ja ajattelutaitojen arviointi kouluopetuksessa. Teoksessa Räsänen (toim.) Oppimisen arvioinnin kontekstit ja käytännöt. Opetushallitus, raportit ja selvitykset 2013/3. Helsinki: Opetushallitus.
- Laaksonen, P. 1997. Se pyörii sittenkin – Suomalaisia keksijäoriginelleja. Tieteessä tapahtuu 8/1997. Helsinki: Tieteellisten seurojen valtuuskunta.
- Lagerspetz, K. 1991. Tarkoituksenmukaisuus elävässä luonnossa ja sen selitykset. Luetu 3.3.2019.  
[file:///C:/Users/User/Downloads/58633-Artikkelin%20teksti-59834-1-10-20160617%20\(1\).pdf](file:///C:/Users/User/Downloads/58633-Artikkelin%20teksti-59834-1-10-20160617%20(1).pdf)
- Lagerspetz, K. 2000. Mitä tulee mieleen. Psykologin esseitä. Pieksämäki: Rt Print Oy.
- Lahdes, E. & Kari, J. 1994. Didaktiikka kasvatustieteen osa-alueena ja sen keskeiset käsitteet ja teorianallit. Teoksessa Kari, J. (toim.) Didaktiikka ja opetussuunnittelu. Juva: WSOY. 9-63.
- Lahtinen, A 2014. Matematiikan merkityksestä. Matematiikkalehti Solmu 2/2014. 1-3.  
<http://solmu.math.helsinki.fi>
- Lahtinen, M. 2006. Snellmanin Suomi. Tampere: Vastapaino.
- Laine, T. 2008. Filosofiaa dialogisissa suhteissa. Teoksessa Tomperi, T. & Juuso, H. (toim.) Sokrates koulussa – itsenäisen ja yhteisöllisen ajattelun edistäminen opetuksessa. Niin & Näin. Tampere: Eurooppalaisen filosofian seura. 266-282.
- Lammenranta, M. 1987. Internalistinen ja eksternalistinen käsitys episteemisestä oikeutuksesta. Teoksessa Ajatus 44, Varia. Helsinki: Suomen filosofinen yhdistys. 157.
- Lammenranta, M. 2002. Kokemus tiedon lähteenä. Teoksessa Haaparanta & Oesch (toim.). Kokemus. Tampere: University Press, 47-61.
- Lampinen, O. 1998. Suomen koulutusjärjestelmän kehitys. Helsinki: Gaudeamus.

- Lehikoinen, A. 1998. Tieteenhistoria. Tieteenhistorian teoreettisista ja metodisista perusteista sekä esimerkkejä tieteen muutoksista kulttuurissa yhteyksissä. Kasvatustieteiden tiedekunnan opetusmonisteita. Joensuu: Joensuun yliopisto.
- Lehti, R. 2000. Matematiikan ja sen opetuksen asema kulttuurissamme. Artikkelitieteessä tapahtuu-lehdessä 3/2000.
- Lehtisalo, L. & Raivola, R. 1999. Koulutus ja koulutuspolitiikka 2000-luvulla. Helsinki: WSOY.
- Lehto, O. 2001. Matematiikan kauneus. Artikkelitieteessä tapahtuu lehdessä 1/2001.
- Lehtonen, T. 2013. Miten pitäisi suhtautua tieteen menetelmällisiin normeihin? Luento Seinäjoen tutkijahotellissa 3.12.2013.
- Lehtovaara, M. 1995. Tutkimus ja tutkimuksen tutkimus fenomenologisesta näkökulmasta. Teoksessa Nieminen, J. (toim.) Menetelmävaihtojen viidakossa. Pohdintoja kasvatuksen tutkimisen lähtökohdista. Tampereen yliopisto. Kasvatustieteiden laitos. Julkaisusarja B N:o 13. 71-90.
- Leino, J. 1987. Tiedonhankinnan tyyleistä. Helsingin yliopiston kasvatustieteiden laitos. Tutkimuksia 110.
- Leinonen, M. 2008. Tieteellinen ajattelu ja filosofian rikkaruohot. Filosofian identiteettistä suomalaisen filosofian ongelma ja filosofiakäsitykset Eino Kailan ja Erik Ahlmanin tuotannossa. Akateeminen väitöskirja. Tampereen yliopisto.  
<https://trepo.tuni.fi/bitstream/handle/10024/67850/978-951-44-7309-8.pdf>
- Lewes, G. H. 1875. Problem of Life and Mind. First series. London: Truebner & Co.
- Levontin, R.-C. 1982. The human diversity. New York: Scientific American Books.
- Lindgren, S. 1990. Toimintamateriaalin käyttö matematiikan opiskelussa. Acta Universitas Tampereensis, ser A vol 307. Tampere: Tampereen yliopisto.
- Lindgren, S. 1997. Voidaanko matematiikan opetusasenteita muuttaa? Teoksessa: Räisänen, P. Kupari, P., Ahonen, T. & Malinen, P. (toim.) Matematiikka – näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen. Jyväskylä: Niilo Mäki Instituutti, 301–315.
- Linnakylä, P. & Kupari, P. 1996. Autenttinen arviointi peruskoulun opiskelua ja arviointimenetelmiä uudistamassa. Teoksessa Räisänen, A. & Frisk, T. (toim.) Silta uuteen opiskelija-arviointiin – arviointia opiskelija-arvioinnista. Arviointi 6/1996. Helsinki: Opetushallitus. 95-122.
- Luft, J. & Ingman, H. 1955. The Johari Window. A Graphic Model of Interpersonal Relations. California: University of California: Western Training Lab.
- Luoma-aho, P. 2012. Matematiikan peruskäsitteiden historia. Matematiikkalehti Solmu. Luettu 31.1.2014.  
<http://solmu.math.helsinki.fi/2010/kasitehist.html>
- Lötjönen, S. (toim.) 2012. Tutkijan ammattietiikka. Tutkimuseettinen neuvottelukunta. Luettu 8.9.2015.
- Oikkonen, V. 2013. Matematiikan olemus. Helsinki: Helsingin yliopisto. Matematiikan ja tilastotieteen laitos. Luettu 15.2.2014.  
<https://docplayer.fi/336435-Matematiikan-olemus-juha-oikkonen-juha-oikkonen-helsinki-fi.html>
- Ojajarvi, A. 1952. Jaakko Könni. Teoksessa Aaltonen, E., Haavio, M., Jutikkala, E., Oja, A., Jokipii, M., Virtaranta, P. & Vuorela, P. Suomen talonpoikia Lallista Kyösti Kallioon – 74 elämäkertaa. Helsinki: WSOY. 211-214.

- Ojakangas, M. 2004. Pedagoginen vallankumous. Suomen kulttuurihistoria IV. 186-193.
- Oksala, P. 1987. Tieto ja todellisuus. Teoksessa Wilenius, Oksala, Mehtonen & Juntunen 1987. Johdatus filosofiseen ajatteluun. Jyväskylä: Gummerus.
- Maalampi, J. 2006. Maailmanviiva. Albert Einstein ja moderni fysiikka. Helsinki: Ursa.
- Mager, R. F. 1978. Opetustavoitteiden määrittäminen. Keuruu: Otava.
- Malaty, G. 2003. Johdatus matematiikan rakenteeseen. Helsinki: Opetushallitus.
- Malinen, P. 1977. Opetussuunnitelman laatiminen peruskoulun ja keskiasteen kouluja varten. Jyväskylä: Jyväskylän yliopisto.
- Malinen, P. 1992. Looginen ajattelu matematiikan opetuksessa. Opettajankoulutuslaitos. Tutkimuksia 49. Jyväskylä: Jyväskylän yliopisto.
- Malinen, P. 1992. Opetussuunnitelmat koulutyössä. Helsinki: VAPK-kustannus.
- Malinen, P. 1998. Oppimisympäristöstä opiskeluympäristö. Kasvatus-lehti 4/1998.
- Manninen, J. 2002. Uuden filosofisen liikkeen ja manifestin synty. Teoksessa Niiniluoto, I. & Koskinen, H. J. (toim.). Wienin piiri. Tampere: Vastapaino. 27-128.
- Mattila, L. 2005. Neljä matematiikan arviointia. Yhteenveto perusopetuksen 9. vuosiluokan matematiikan oppimistuloksista vuosina 1998-2004. Luettu 2.8.2018. [http://www.oph.fi/download/31327\\_Matikka\\_NEL\\_3.10.pdf](http://www.oph.fi/download/31327_Matikka_NEL_3.10.pdf).
- Mattila, L. & Rautopuro, J. 2013. Taustatietoa oppilaista ja opetuksesta. Teoksessa Rautopuro (toim.) Hyödyllinen pakkolasku. Matematiikan oppimistulokset peruskoulun päättövaiheessa 2012. Koulutuksen seurantaraportti 2013:3. Helsinki: Opetushallitus.
- Maula, M. 1995. Vaisto ja intuitio Henry Bergsonin filosofiassa. Pro gradu. Filosofian laitos. Tampere: Tampereen yliopisto.
- Maxwell, J. A. 1996. Qualitative Research Design. An Interactive Approach. Applied Social Research Methods series. Vol 41. Sage Publications: Thousand Oaks.
- Mehtonen, L. 1987. Moraali ja yhteiskunta. Teoksessa Wilenius, R., Oksala, P., Mehtonen, L., & Juntunen, M. (toim.) Johdatus filosofiseen ajatteluun. Jyväskylä: Atena. 95-115.
- Merton, R. K. 1968. Matthew-effekt in Science II. Cumulative Advantage and Symbolism of Intellectual Property. Luettu 10.11.2017. <http://igekel.de/downloads/merton1988.pdf>
- Metsämuuronen, J. 2013. Perusopetuksen matematiikan oppimistulosten pitkittäisarviointi 2005-2012. Koulutuksen seurantaraportti 2013: 4. Helsinki: Opetushallitus. [https://www.oph.fi/download/150841\\_Perusopetuksen\\_matematiikan\\_oppimistulosten\\_pitkittaisarviointi\\_vuosina\\_2005.pdf](https://www.oph.fi/download/150841_Perusopetuksen_matematiikan_oppimistulosten_pitkittaisarviointi_vuosina_2005.pdf)
- Mezirow, J. 1998. Uudistava oppiminen – kriittinen reflektio aikuiskoulutuksessa. Alkuperäisteoksesta Fostering Critical Reflection in Adulthood 1990 suomentanut Lehto, L. Helsinki: Helsingin yliopiston Lahden tutkimus- ja koulutuskeskus. 17-37; 374-397.
- Mickelsen, K-E. 1997. Suuret teknologiset järjestelmät – yritys selittää modernia maailmaa. Teoksessa Rydman (toim.) 1997. Maailmankuvaa rakentamassa. Tieteen päivät 1997. Porvoo: WSOY, 542-553.

- Miettinen, R. 2000. The concept of experiential learning and John Dewey's theory of reflective thought and action. *International Journal of lifelong education*, vol 19, no 1, 54-72.
- Miettinen, T. 2007. Heidegger ja Logos. Oleminen ja aika inhimillisen järjen uudelleentulkintana. Pro Gradu. Filosofian laitos. Helsinki: Helsingin yliopisto.
- Mikkeli, H. & Pakkasvirta, J. 2007. Tieteiden välissä? Johdatus monitieteisyyteen, tieteidenvälisyyteen ja poikkitieteisyyteen. *Oppimateriaalit*, 2007. Helsinki: WSOY
- Määttänen, P. 2002. Taideteos kokemuksena: John Deweyn taiteenfilosofian lähtökoh-tia. Teoksessa Haaparanta & Oesch, Kokemus. 192-203. Helsinki: Gaudeamus.
- Määttänen, P. 1995. Filosofia. Johdatus peruskysymyksiin. Helsinki: Gaudeamus.
- Mönkkönen, I. 2008. Tavoite, tarkoitus ja toiminta John Deweyn kasvatustieteissä. Yhteiskuntatieteiden ja filosofian laitos. Pro Gradu. Jyväskylä: Jyväskylän yliopisto.
- Nancy, J.-L. 2007. *Juste impossible*. Paris: Bayard.
- Niiniluoto, I. 1984. Tiede, filosofia ja maailmankatsomus. Helsinki: Gaudeamus.
- Niiniluoto, I. 1989. *Intentio*. Ajatus 46. Helsinki: Suomen filosofisen yhdistys.
- Niiniluoto, I. 1991. Informaatio, tieto ja yhteiskunta – filosofinen käsitteanalyysi. Valtionhallinnon kehittämiskeskus. Helsinki: Valtion painatuskeskus.
- Niiniluoto, I. 1997. Tunne ja tieto. Teoksessa Niiniluoto & Räikkä (toim.). *Tunteet*. Helsinki: University Press. 5-10, 109-117.
- Niiniluoto, I. & Koskinen, H. J. (toim.) 2002. *Wienin piiri*. Helsinki: Gaudeamus.
- Niiniluoto, I. 2009. Kulttuurievoluutio. Teoksessa Hanski, I., Niiniluoto, I. & Hetemäki, I. (toim.) *Kaikki evoluutiosta*. Helsinki: Gaudeamus.
- Nirvi, R. E. & Hakulinen, L. (toim.) 2006. Suomen kansan sananparsikirja. Kahdeksas painos. Näköispainos 1953 ilmestyneestä toisesta painoksesta. Helsinki: WSOY.
- Numminen, M. (toim.) 1978. *Spectrum*. Porvoo: WSOY
- Nurmi, V. 1984. *Kasvatuksen traditio*. Juva: WSOY.
- Nurmi, K. E. 1995. Johdatus kasvatuksen filosofisiin ja historiallisiin perusteisiin. Helsingin yliopiston Lahden tutkimus- ja koulutuskeskus. *Oppimateriaaleja* 28.
- Nye, A. 1990. *Words of power: a feminist reading of the history of logic*. New York and London: Routledge.
- Näreaho, L. 2004. Mieli, aivot ja filosofia. Näkökulmia tietoisuuden ongelmaan. Helsinki: Yliopistopaino.
- Näätänen, M. 1999. Näkökulmia matematiikkaan. LUMA-luento Oulun yliopistossa.
- De Padova, T. 2015. Albert Einstein unter allen Kriegstreibern. *Zeitung im Salon*. Luettu 13.11.2015.
- Pajunen, V. 1952. Laskennon opetus. Jyväskylän kasvatustieteellisen korkeakoulun opetusoppeja N:o 2. Helsinki: WSOY.
- Parnes, H. 1962. *Forecasting educational needs for economic and social development*. Paris: Psacharopoulos.
- Partanen, H. 2004. Filosofinen kenttäteoria. <https://utushop.utu.fi/p/137-filosofinen-kenttateoria/>
- Paulaharju, S. 1947. *Härmän aukeilta*. Kolmas painos vuodelta 1932. Porvoo: WSOY.
- Pehkonen, E. & Rossi, M. 2018. Hyvää matematiikan opetusta etsimässä. Helsinki: MFKA.

- Pekkarinen, T. & Uusitalo, R. 2012. Peruskoulu-uudistuksen vaikutukset. Kansantaloudellinen aikakauskirja – 108. 2/2012.
- Peltonen, M. 1987. Koulutus 2000. Perustietoja ja suuntaviivoja koulutuksen kehittämiseksi. Aavarantasarja. Keuruu: Otava.
- Peltonen, M. 2004. Suomen maatalouden historia II. Kasvun ja kriisien aika 1870-luvulta 1950-luvulle. Suomalaisen kirjallisuuden seura. Jyväskylä: Gummerus. 126-127.
- Pennanen, E. & Mikkola, L. 2013. Vuorovaikutus hallinnollisissa ryhmissä. Hallinnon tutkimus, 32/3. 229-242.
- Pera, M 1994. The discourses of the Science. Chigaco: The University Press.
- Pettersson, H. 2016. Metafilosofinen naturalismi ja antinaturalismi uuden ajan filosofiassa. Teoksessa Laiho, H. & Repo, A. (toim.) De natura rerum. Scripta in honorem professoris Olli Koistinen sexagesimum annum complentis. Turku: Turun yliopisto, 344.  
[https://www.academia.edu/32460243/Metafilosofinen\\_naturalismi\\_ja\\_antinaturalismi\\_uuden\\_ajan\\_filosofiassa](https://www.academia.edu/32460243/Metafilosofinen_naturalismi_ja_antinaturalismi_uuden_ajan_filosofiassa)
- Pettersson, H. 2019. Metaphilosophical Themes. Naturalism, Rationalism and the Conceptions of Philosophy. Reports from the Department of Philosophy. Akateeminen väitöskirja. Turun Yliopisto: COIMBRA GROUP.
- Peura, P. 2017. Yksilöllisen oppimisen opetusmalli. Luettu 8.8.2018.  
<http://maot.fi/oppimisymparisto/yksilollisen-oppimisen-opetusmalli>
- Pietarinen, J. & Launis, V. 2002a. Etiikan luonne ja alueet. Teoksessa Karjalainen S, Launis V, Pelkonen R. & Pietarinen J.(toim.) Tutkijan eettiset valinnat. TammerPaino. Tampere. 42-57.
- Pietarinen, J. 2002b. Descartes ja tunteiden kokeminen. Teoksessa Haaparanta & Oesch, E. (toim.). Kokemus. Acta Philosophica Tamperensia. Vol 1. 236-260.
- Pietarinen, J. 2012. Tutkijan ammattietiikan perusta. Nettijulkaisussa Lötjönen, S. (toim.) 2012. Tutkijan ammattietiikka. Tutkimuseettinen neuvottelukunta. Luettu 8.9.2015. 2-8.
- Pietarinen, J. 2015. Etiikka. Luettu 8.9.2015.  
<https://filosofia.fi/node/6985>
- Pihlström, S. 1996. Hyvät, pahat ja rumat. Arvojen olemassaolosta. Julkaisussa Köningsberg. Estetiikka ja pragmatismi. 2/1996.
- Pihlström, S. 2002. Kokemuksen ehdot ja kokemuksen subjekti. Teoksessa Haaparanta, L. & Oesch. Kokemus. Acta Philosophica Tamperensia. Vol 1. Tampere: Yliopistopaino. 272-289.
- Pihlström, S. 2003. Filosofinen tieto – tietoa ”ihmisluonnosta”. Teoksessa Räsänen, P. & Tuohimaa, M. (toim.) Filosofinen tieto ja filosofian taito. Acta Philosophica Tamperensia. Tampere: Yliopistopaino. 180-202.
- Pihlström, S. 2004. Heidegger ja suomalainen analyttinen filosofia. Artikkelitieteessä Tapahtuu 2004/2, vol 22. Helsinki: Tieteellisten seurojen valtuuskunta.
- Poikela, E. 2000. Oppimisen kontekstuaalisuus. Teoksessa Järvinen, J., Koivisto, T. & Järvinen, A. Oppiminen työssä ja työyhteisössä. Juva: WSOY. 67-133.
- Portaankorva – Koivisto, P. 2010. Elämyksellisyyttä tavoittamassa. Narratiivinen tutkimus matematiikan opettajaksi kasvusta. Akateeminen väitöskirja. Tampereen yliopisto.

<https://trepo.tuni.fi/bitstream/handle/10024/66649/978-951-44-8212-0.pdf?sequence=1>

- Polya, G. 1945. How to solve it. London: Penguin Group.
- Portin, P. 2012. Mullistaako epigeneettinen periytyminen evoluutioteorian. Artikkelitieteessä tapahtuu -lehdessä 2/2012. 26-34.
- Puolimatka, T. 2004. Kasvatus, arvot ja tunteet. Vantaa: Tammi.
- Raatikainen, P. 2006. Voiko ihmistiede olla arvovapaata. Teoksessa Hallamaa, J. & al. Etiikkaa ihmistieteille. 1-14, 2.  
[https://www.academia.edu/24514149/VOIKO\\_IHMISTIEDE\\_OLLA\\_ARVOVAPAATA](https://www.academia.edu/24514149/VOIKO_IHMISTIEDE_OLLA_ARVOVAPAATA)
- Raatikainen, P. 2012. Voiko ihmistiede olla arvovapaata? Teoksessa Hallamaa, J., Lounis, V., Lötjönen, S ja Sorvali, I. 2006. Etiikkaa ihmistieteille. 93-107, 94.
- Raekunnas, M. 2000. Tutkiminen ja ajattelu ympäristö- ja luonnontiedossa. Teoksessa Hallenberg, P., Raekunnas, M., Lindgren, S., Horila, M., Löyttyniemi, V., Liukko, S., Saarela, M., Muuronen, J., Kojo, M. & Tammi, T. LUMA-kokeiluja ja kokemuksia. Hämeenlinnan opettajankoulutuslaitoksen julkaisuja 7. 3/18. Tampere: Tampereen yliopisto.
- Raivola, R. 1998. Uutta ja vanhaa, omaa ja varastettua, ehkä vähän sinistäkin. Aikuis-kasvatuslehti 1998 18/1. 2-3.
- Rapola, M. 1946. Vanhaa ja uutta sivistys ja valistus sanoista. Lisiä kirjasuomen sanaston historiaan 11. Virittäjä 1946, 370-381.
- Rauhala, L 1989. Intention analyysin vaiheita fenomenologiassa. Ajatus 46. Suomen filosofisen yhdistyksen vuosikirja. 127-138.
- Rauhala, L 2006. Ihminen kulttuurissa – kulttuuri ihmisessä. Helsinki: Yliopistopaino.
- Rauhala, L. 2007. Ihmistajunta tutkivana ja tutkittavana. Artikkelitieteessä tapahtuu 8/2007. Helsinki: Tieteellisten seurojen valtuuskunta, 21-26.
- Rauste – von Wright, M. 1996. Koulutus ja oppiminen. Helsinki: WSOY.
- Rautopuro, J. (toim.) 2013. Hyödyllinen pakkolasku. Matematiikan oppimistulokset 2012. Koulutuksen seurantaraportti 2013:3. Helsinki: Opetushallitus.
- Rée, J. 1998. Heidegger. Keuruu: Otava.
- Rinne, R. 1984. Suomen oppivelvollisuuskoulun opetussuunnitelman muutokset vuosina 1916-1970. Opetussuunnitelman intentioiden ja lähtökohtien teoreettis-historiallinen tarkastelu. Sarja C: 44. Turku: Turun yliopisto.
- Rokka, P. 2011. Peruskoulun ja perusopetuksen vuosien 1985, 1994 ja 2004 opetussuunnitelmien perusteet poliittisen opetussuunnitelman teksteinä. Akateeminen väitöskirja. Tampereen yliopisto.  
<https://trepo.tuni.fi/bitstream/handle/10024/66741/978-951-44-8456-8.pdf?sequence=>
- Rolf, B. 1995. Profession, tradition och tyst kunskap. Lund: Nya Doxa.
- Rossi, P. 2010. Modernin tieteen synty Euroopassa. Alkuperäisteoksesta La nascita della scienza moderna in Europa 1997 suomentanut Talvio, L.. Tampere: Vastapaino.
- Royce, J. R. & Powell, A.D. 1983. Theory of Personality and individual Differences: Factors, Systems and Process. Englewood Cliffs: Prentice-Hall.
- Rubin, A. 2017. Monitieteisyys, poikkitieteellisyys, tieteidenvälisyys. Tulevaisuuden tutkimuskeskus. Kauppakorkeakoulu. Turun yliopisto.

<https://tulevaisuus.fi/filosofiset-perusteet/monitieteisyys-poikkitieteisyys-tieteenvalisyys/>

- Räsänen, P., Kupari, P. & Malinen P. (toim.) 2004. Matematiikka – näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen. Jyväskylä: Niilo Mäki Instituutti.
- Sadeniemi M. (toim.) 1980. Nykysuomen sanakirja (NSK). 7. painos. Porvoo: Suomalaisen kirjallisuuden seura.
- Sajama, S. & Vihjanen, S. 1989. Oidipuksen intentio. Teoksessa Ajatus 46, Intentio. Helsinki: Suomen filosofinen Yhdistys, 76-86.
- Salmela, M. 2014. Eino Kaila. Luettu 3.3.2015.  
<https://filosofia.fi/node/2406>
- Salminen, H. & Väänänen, J. 2005. Johdatus logiikkaan. Helsinki: Gaudeamus.
- Salo, A. 1924. Kasvatusopillisen sielutieteen pääpiirteet. Helsinki: Otava.
- Salo, U. 2008. Ajan ammoisen oloista. Satakunnan ja naapurimaakuntien esihistoriaa. Vammala: Suomalaisen kirjallisuuden seura.
- Salomaa, J. E. 1946. Älykkyyden mittaaminen. Porvoo: WSOY.
- Salomaa, J. E. 1989. Filosofian historia I ja II. Filosofian laitos. Uusintapainos vuoden 1936 julkaisusta. Julkaisu 39. Jyväskylä: Jyväskylän yliopisto.
- Salonen, T. 1995. Filosofian sanat ja konseptit. Filologian laitos. Rooman kirjallisuus ja latinan kieli. Tampere: Yliopistopaino.
- Sauvala, A 1978. Koulutussuunnittelu. Helsinki: Otava.
- Seppälä, R. (toim.) 1994. Matematiikka – taitoa ajatella. Yläaste ja lukio. Suuntana oppimiskeskus 24. Jyväskylä: Opetushallitus.
- Silfverberg, H. 1999. Peruskoulun yläasteen oppilaan geometrinen käsitetieto. Akateeminen väitöskirja. Tampere: Tampereen yliopisto.
- Silfverberg, H. 2019. Geometrical Conceptualization. Teoksessa Friz, A. Haase, V., Räsänen, P. (toim.) International Handbook of Mathematical Learning Difficulties. Difficulties. From the Laboratory to the Classroom. Duisburg: Springer, Cham.
- Siljander, P. 2015. Systemaattinen johdatus kasvatustieteeseen – peruskäsitteet ja pääsuunnatukset. Tampere: Vastapaino.
- Silvasti, E. 2001. Tutkimus talonpojan elämää jäsentävistä kulttuurisista malleista. Helsinki: Suomalaisen kirjallisuuden seura.
- Sinokki, J. 2017. Aistimukset ja interaktionismi. Mielen ja ruumiin vuorovaikutus Descartesin ontologiassa. Aikakauslehti Niin & Näin 3/2017. Tampere: Suomen filosofinen yhdistys. Luettu 2.9.2018.  
<https://netn.fi/sites/www.netn.fi/files/netn173-14.pdf> , 91-98.
- Snow, C. P. 1998. Kaksi kulttuuria. Englanninkielisistä alkuteoksista vuosina 1959, 1964, 1993 ilmestyneistä alkuteoksista The two Cultures suomentanut Pietiläinen, K.. Viro: Terra Cognita.
- Sormunen, U. 2018. Mieli, tajunta, tietoisuus. Tajunnan taikaa ja mielen metafysiikkaa. Helsinki: BoD – Books on Demand.
- Strevens, M. 2013. No understanding without explanation. Studies in History and Philosophy of Science 44, 510–515.  
<http://www.strevens.org/research/expln/Illuminatio.pdf>
- Suomela, P. 1991. Matematiikan historia. Matematiikan laitos. Opintomoniste 5. Jyväskylä: Jyväskylän yliopisto.

- Suoranta J. 2012. Pikapiirto kasvatustieteellisen tutkimuksen sisäisestä työnjaosta. Tieteessä tapahtuu 1/2012.
- Suutari, T. 2013. Tieteidenvälisyys, poikkitieteellisyys ja monitieteisyys. Luento Seinäjoen tutkijahotellissa 25.4.2013.
- Suvanto, A. 2018. Gestalt-ajattelu. Julkaisematon käsikirjoitus.
- Syrjälä, L., Estola, E., Uitto, M. Ja Kaunisto S-L 2006. Kertomuksen tutkijan eettisiä haasteita. Teoksessa Hallamaa, J., Launis, V., Lötjönen, S ja Sorvali, I. Etiikkaa ihmistieteille. 181-202.
- Taipale, J. 2014. Husserl, Edmund. Luettu 20.11.2018.  
<https://filosofia.fi/node/4936>
- Taneli, M. 2012. J. A. Hollon kasvatusajattelu. Akateeminen väitöskirja. Turun yliopisto. Luettu 5.9.2018.  
<https://www.utupub.fi/bitstream/handle/10024/85782/Annales%20C%2020351%20Taneli%20VK.pdf?sequence=1&isAllowed=y>
- Tengström, P. 1818. Om några hinder för Finlands litteratur och cultur. Teoksessa Aura. Turku: Aura-seura.
- Teräväinen, J. 1992. Johdatus filosofiaan. Helsinki: Kirjapaja.
- Therborn, J. 1974. Jürgen Habermas: Ein neuer Ekletiker. Teoksessa Dallmayr (toim.) Materialien zu Habermas 'Erkenntnis und Interesse'. Suhrkamp: Frankfurt am Main.
- Thompson, J. (toim.) 1994. Matematiikan käsikirja. Helsinki: Tammi.
- Tieteen termipankki (TTP). Matematiikka. Luettu 1.9.2016
- Toivola, M., Peura, P. & Humaloja, M. 2017. Flipped learning. Helsinki: Edita.
- Tossavainen, T. & Sorvali, T. 2003. Matematiikka, koulumatematiikka ja didaktinen matematiikka. Tieteellisten seurojen julkaisussa Tieteessä tapahtuu 3/2003. Helsinki: Yliopistopaino. 30-35.
- Tossavainen, T., Joutsenlahti, J., Merikoski, J. & Lehtinen, M. 2017. Merkittäviä suomalaisia matematiikan oppikirjoja ja -kirjailijoita. Teoksessa Hiidenmaa, P., Löytönen, M. & Ruuska, H. Oppikirja Suomea rakentamassa. Helsinki: Suomen tietokirjailijat ry.
- Tuomela, R. 1983. Eino Kailan terminaalikausaliteetin käsite. Ajatus 40. Helsinki: Suomen filosofinen yhdistys.
- Tuomisto, J. 1985. Aikuiskasvatuksen kehittyminen käytäntönä, oppiaineena ja tieteenä. Teoksessa Manni & Tuomisto (toim.) Humanistin teemojen tuntumassa. Acta Universitas Tamperensis. Ser A 196. Tampere: Tampereen yliopisto.
- Tynjälä, P. 1999. Oppiminen tiedon rakentamisena – konstruktiivisen oppimiskäsityksen perusteita. Helsinki: Kirjayhtymä.
- Tönnies, F. 1887. Gemeinschaft und Gesellschaft. Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft.
- Uotila, T. 2017. Käsityöläisyys 1800-luvun Suomessa. Esitelmä 8.9.2018 tiedekeskus Heureka. Helsinki, Tikkurila. Perustuen akateemiseen väitöskirjaan:  
[https://jyx.jyu.fi/bitstream/handle/123456789/44611/1/978-951-39-5943-2\\_vaitos21112014.pdf](https://jyx.jyu.fi/bitstream/handle/123456789/44611/1/978-951-39-5943-2_vaitos21112014.pdf)
- Uurtimo, Y. 1994. Kehitysajattelun juuret. Yhteiskuntatieteiden tutkimuslaitos. Tampere: Tampereen yliopisto.

- Uusitalo, H.. 2001. Tiede, tutkimus ja tutkielma. Johdatus tutkielman maailmaan. Juva: WSOY.
- Vaherva, T. & Juva, S. 1985. Koulutuksen talous. Helsinki: Tammi.
- Vahervuo, T. 1948. Matemaattisen kyvykkyyden mittaaminen. Helsinki: WSOY.
- Vandenberg, D. 1990. Education as a human right. A Theory of Curriculum and Pedagogy. Teachers College. New York: Columbia University Press.
- Varto, J. 1995. Fenomenologinen tieteen kritiikki. 2. painos. Filosofisia tutkimuksia Tampereen yliopistossa, Vol XXX. Tampere: Tampereen yliopisto.
- Varto, J. 1996. Laadullisen tutkimuksen metodologia. Helsinki: Kirjayhtymä.
- Venkula, J. 1996. Arki ja tieteellinen ajattelu. Tieteellisen toiminnan ulottuvuuksia. Helsinki: Yliopistopaino.
- Westermarck, E. 1906. Moraalin synty ja kehitys. Alkuperäisteoksesta The Origin and Development of Moral Ideas I—II suomentanut Olsoni, E. 1933. Porvoo: WSOY.
- Westermarck, E. 1932. Ethical Relativity. London: Kegan Paul.
- Viita, P. 2013. Suomen talonpoika 800-2010. Toinen painos. BSV-kirja. Keuruu: Otava.
- Vilkko, R. 2003. Filosofian ja tiedon välisestä suhteesta. Teoksessa Räsänen, P. & Tuohimaa, M. (toim.) Filosofinen tieto ja filosofian taito. Acta Philosophica Tampereensia. Tampere: Yliopistopaino. 81-92.
- Wilson, E. O. 2001. Konsilienssi, tiedon yhtenäisyys. Alkuperäisteoksesta Concilience, the Unity of Knowledge 1998 suomentanut Pietiläinen, K. Helsinki: Terra Cognita.
- Virmasalo, R. 2003. Karl Mannheim – tiedon ja koulutuksen tuntematon klassikko. Teoksessa Aittola, T. (toim) Kasvatussosiologian teoreetikoita. Helsinki: Gaudeamus.
- Volanen M. V. 2000. Yksilöllistyvä peruskoulu, yksipuolistava nuorisosaasteen koulutus. Teoksessa Raivola, R. (toim.) Vaikuttavuutta koulutukseen. Suomen Akatemian koulutuksen vaikuttavuusohjelman tutkimuksia. Helsinki: Edita. 71-99.
- Von Wright, G. H. 1976. Taisteleva elämänasenne. Esitelmä. Jyväskylän kesän kongressi 2.7.1976. Luettu 1.9.2010.  
<https://filosofia.fi/tallennearkisto/tekstit/4528>
- Von Wright, G. H. 1981. Humanismi elämänasenteena. Helsinki: Otava.
- Von Wright, G. H. 1987. Tiede ja ihmisjärki. Helsinki: Otava.
- Von Wright, G. H. 1996. Aistimukset ja kausaaliyhteydet. Teoksessa Kiesepä, I. A., Pihlström, S. & Raatikainen, P. (toim.) Tieto, totuus ja todellisuus. Tampere: Gaudeamus. 13-17.
- Von Wright, G. H. 2009. Hahmottuva maailma – Eino Kailan keskeneräiseksi jäänyt maailmankatsomusteos. Eurooppalaisen filosofian seura ry.  
<https://filosofia.fi/tallennearkisto/tekstit/4542>
- Vuorisalo, T. 1992. Ympäristöekologia. Ympäristönsuojelun ekologiset perusteet ja alkuperäisen luonnon suojeleminen. Turku: Turun yliopiston täydennyskoulutuskeskuksen julkaisuja A5. 59.
- Vähämäki, M. 2010. Hierarkiasta jaettuun johtajuuteen: vuorovaikutuksen haasteet vertikaalisissa ja horisontaalisissa työpaikan suhteissa. Prologi, puheviestinnän vuosikirja 2010, 34-46.
- Ylikoski, P. & Kokkonen, T. 2009. Evoluutio ja ihmisluonto. Helsinki: Gaudeamus.

# 11 LIITE: MATEMATIIKKAILMIÖ ELÄMISMAAILMASSANI

## 11.1 Miten matematiikka ilmenee kokemuksessani

Kulttuuriperäinen taipumukseni integroida ja syntetisoida kaikki opittu matematiikkaan yhdistämällä matematiikka luonnon, yhteiskunnan ja ihmisen rakentamiseen ilmenee elämismaailmassani matematiikkailmiönä. Muutokset, kokemukset ja eri tieteet ilmentävät matematiikkailmiötä. Näkökulma matematiikkaan on tällöin holistinen vallitsevan atomistisen sijasta. Miten olen matematiikan mieltä ja merkitystä oppinut jäsentämään tieteen kehityksen ja yhteiskuntien rakentamisen perustana näyttäytyy kaikkialla. Kokemus matematiikastani jäsentyy kokonaisuutta hahmottavista horisonteista, mitä voi kutsua ihmisen maailmassa olemisen naisnäkökulmaksi. Todellisuus on heijastusta matematiikasta – matematiikan kaltainen. Tutkimuspolkuni subjektiivinen tarkoituksenmukaisuus saa perusteensa tässä tutkimusliitteessä. Matematiikan keksiminen on läsnä elämän tilanteissa ja tarkoituksissa, mikä on yksilöllisen luovuuden perustana myös yleisesti muiden erilaisissa kokemuksissa.

”Miten matematiikka ilmenee kokemuksessani”, tunnistuu kuin säikeenä tai lankana jostakin alusta tähän päivään, mitä kutsun tutkimuspoluksi, tuttavallisemmin juntu. Tutkimuspolun alku sijoittuu aika-akselillani 1950-luvulle. Paikka-asteikolla elämismaailmana on jokirantalakia – aukiaa silimän kantamattomiin ja lähimetsä tuttuine juntuineen – ajatuksille tilaa kypsyä. Viljelymaisema ja elämäntapa Etelä-Pohjanmaalla on ollut hedelmällinen kasvualusta matematiikkaan rakastumiselle. Tuntumaa elämismaailmaan kuvaan: ”Mikään ei ollut valmiina, vaan kaikki piti keksiä itse”.

Mitä tuolloin keksi, on säilynyt tietämisen perustana koko elämän ajan. Matematiikan (ja luetun) soveltaminen omaan sisäiseen maailmaan ja ulkoisen maailman ymmärtämiseen ei ole kohdallani tapahtunut pelkästään sattumalta, vaan hahmotustaipumus polveutuu sukupolvien ketjussa koetussa, opitussa ja perityssä eteläpohjalaisessa sukuyhteydessä. Asenne pitää vireillä tutkimuksellista asennetta säännönmukaisuuksia sisältävään toiminnalliseen ympäristöön. Sään-

nönmukaisesti järjestynyt luontoympäristö on Jumalan kaltainen ykseys. Tällöin samaistun talonpojan luontosuhdetta kuvaavaan sananlaskuun: ”Herra on herralakin, mutta talonpojalla ei ole kuin Jumala” (Nirvi & Hakulinen 2006, 393). Sananlasku kuvaa elämää oman havaintonsa varassa. Säännönmukaisuus ilmentää matematiikkaa.

*Säännönmukaisuus ilmenee esimerkiksi kasvien rakenteessa ja niiden kasvuympäristön tarkoituksenmukaisuudessa. Myös ihmisten toimintatapaan vaikuttavat kasvuympäristössä juurtuneet merkitykset. Säännönmukaisuuksien tutkimus siirtyi kasvien tutkimisesta uusiin ihmisten konteksteihin. Säännönmukaisuuksien tutkimus on yhdistynyt kokemukseni matematiikkaan.*

Tietämättä tuolloin mitään tieteellisestä sosiologiasta, kiinnostuin etenkin todellisuuden sosiaalisesta rakentumisesta, mitä pohdin myös lukioaineissani ja psykologian ylioppilaskokeessa keväällä 1975. Kun Berger & Luckmannin samanniminen teos ilmestyi vuonna 1994, ostin kirjan heti ja luin posket hehkuen. Kirjan etukannen taakse liimasin kalligrafi Hannu Paalasmaan minulle suunnitteleman keltahehkuisen exlibriksen, joka tekijän mukaan kuvastaa säkenöivää vaikutelmaa minusta. Muoto- ja rakenneperustainen omasosiologiani samaistui teokseen, jossa arkitiedon perusta on toiminnallinen, kuvallinen, symbolinen ja kielellinen. Olihan rakastamani Eino Kaila kirjoittanut symbolifunktiosta, joka selittää sekä kielellisen että rakenteellisen muotokielen vuorovaikutteista siirtymää mentaaliseen mieleen.

Kailan henkisen elämän ja ajattelemisen ydinilmiö on symbolifunktio. Symbolifunktion heräämisellä alkaa henkinen elämä. Symbolifunktion kautta maailma laajenee ja korkeamman symbolimuodostuksen kautta ihmiselle muodostuu kauas yli nykyisyyden tuokion viittaavia toiminnan sääntöjä ja ohjeita, normeja ja ideaaleja. Vasta sitten, kun ihmisellä on varsinaisia mielteitä, ajatuksia ja niitä ilmaisevia esittäviä merkkejä, hän voi itselleen todellisuutta esittää. (Kaila 1967, 132-174.) Kaila tarkoittaa symboleilla, erotuksena eläinten kokemista signaaleista, kieltä, symbolisia rakenteita ja merkkejä. Jokainen mielle on esittävä kuva ja sisältää symbolifunktion, minkä myös Husserl oivalsi (Kaila 1967, 145). Tiedostaminen kietoutuu symbolifunktion kehitykseen. Tiedostaminen tapahtuu ulkoisista vaikutteista sisäisyyteen (Kaila) tai sisäisyydestä ulospäin (Husserl; Kant). Tiedostaminen on kokemuksellisen matematiikkani perustana, mikä kehittyy dialogissa molemmissa suunnissa.

*Kailan vaikutus ilmenee holistisessa tarkastelutavassani ja ihmisen toiminnallisen rakenteen hahmoteoreettisessa ymmärtämisessä. Kailaa vuosikaudet lukiesani toteutui keskikoulun ja lukion rehtorini kehotus lukea rivien välistäkin.*

Tutkimuspolku on kuin juntu, kokemus suhteessa (koulu)matematiikkaan, talaantunut ja tutuksi tullut nuoruudessa ja opettajuuden aikajanalla 1980 lähtien. Opettajana toimin kuin tutkimusmatkailijana eri peruskouluissa (11 vuotta), lukioissa (4 vuotta), kansanopistossa (10 vuotta) ja LUMA -suunnittelijana (5 vuotta) sekä alueellisen MAOL -kerhon puheenjohtajana (8 vuotta). Matemaattisten aineiden opetuksen kehittämistyö (LUMA, MAOL) vahvisti suuntautumista oppimisen ongelmiin ja opetuksen uudistamiseen.

Tutkimukseni koskien tutkivaa matematiikkaa aktivoitui LUMA -työssäni (1996-2001, missä toteutin suunnittelemani ja opetushallituksen tilaamia täydennyskoulutuksia opettajille. LUMA -ohjelmaa koordinoivat opetusministeriö ja opetushallitus. Vuoden 2003 jälkeen LUMA -toimintaa edistävät ympäri maata toimivat LUMA -keskukset, jotka tarjoavat ilmaisia opetuksentukipalveluita matemaattisten ja luonnontieteellisten aineiden opettajille ja myös suoraan opiskelijoille. Tavoitteena on parantaa oppimistuloksia ja lisätä määrällisesti LUMA -aineiden valintoja lukioissa ja II-asteen oppilaitoksissa. Tavoitteet liittyvät OECD -maiden taloudelliseen agendaan ja teknologian kehittämiseen. Hankkeen alussa asetettuja määrällisiä LUMA -tavoitteita ei ole saavutettu.

Opettajuuteeni kasvamisen merkittävin kokemuksellinen vaihe on lapsuudessa ja nuoruudessa. Kasvatuspohdinnat liittyivät luonnollisesti kasvuympäristöön, koska olin isäni suvun sukupolveni ensimmäinen lapsi ja sain näin mahdollisuuden avata sukupolvien ketjua. 1950, 1960 ja 1970 luvuilla syntyneiden sisarusteni isosiskona oleminen suuntasi huomioni kasvatukseen ja ohjasi tutkimaan myös kasvatustieteiden kirjallisuutta. Matkustin 60 kilometriä junalla maakuntakirjastoon lainaamaan kasvatustieteiden kirjoja keväällä 1974. J.A. Holloon rakastuin tuolloin, Eino Kailaan olin rakastunut jo rippivuonna 1970. Kasvatustieteiden kirjoista mieleen jäi erityisesti niukan ohjeistuksen ja valikoitujen kieltojen periaate, joilla lasten vapaata ajattelun kehittymistä ei tukahduteta. Vastuu nuoremmista ohjasi elämää kouluajan, mikä jäi vaikuttamaan mieleen ja ohjasi opettajuuden ymmärrystä oppilaslähtöisesti. Opettajalla on jokaiseen hetkeen liittyvä vastuu oppilaiden tulevaisuudesta.

Opetustilanteissa erilaiset oppilaat ja heidän erilaiset kokemukset koulumatematiikasta ennakoivat pedagogista pohdintaani. Koulumatematiikan tulevaisuu-

den haasteet, matematiikan kiehtova rakenteellinen kokonaisuus, eri ihmisten matematiikkakokemusten kirjo, eri tieteiden näkökulmat matematisoituvaan maailmaan ja (koulu)matematiikan erilaistuvat yhteiskunnalliset funktiot vaikuttavat matematiikkailmiöltä.

Matematiikkailmiö on käyttämäni käsite havaintotodellisuuksille, mitä erilaisien intentioiden näkökulmista voi tunnistaa. Tällöin lukijalle tarjoutuu tilaisuuksia tunnistaa omia arvoperusteitaan tai lukija voi herätä pohtimaan omia perusteitaan. Arvoperusteissaan kukaan ei voi olla väärässä, mutta tutkimuspolut voivat olla eri vaiheissa, tutkimuspolut voivat erkaantua eri suuntiin tai tutkimuspolut häviävät kokonaan näkyvistä. Matematiikkailmiö säteilee olemisen taustalla, vaikka kuvittelisi olevansa irti sen vaikutuspiiristä. Tarkastelussani suomalaisen oppivelvollisuuskoulun kehityshistoria antaa vertailukohdan nykykoulun muutonhaasteille. Annetaanko oppilaiden luovuudelle tilaa vai kiristetäänkö normatiivisuuden nyörejä edelleen?

Matematiikkailmiö tutkimuspolulla sisältää oletuksen yksilöllisten, yhteisöllisten ja yleisten merkitysketjujen yhteiskuntaan vaikuttavista matematiikkaan liittyvistä funktioista. Funktiolla on kokemusperusta mielessä, jonka intentiona on ymmärtää, miten matematiikka ilmenee. Tutkimuspolku on merkittävältä osiltaan vapaaehtoista ja itseohjautuvaa, nonformaalia oppimista, jonka funktio on ymmärtää itseä ja erilaisia oppijoita. Omaehtoisuus saattaa jäädä piiloiseksi potentiaaliksi myös oppilailla kouluissa edelleen, jos osaamisen arviointi suuntautuu vain odotettuun sisältöön. Tutkimuspolku ilmentää ei odotettua.

Miten ihminen ohjautuu eli mitä hän valitsee havainnon kohteeksi vaikuttaa siihen, mitä hän seuraavaksi havaitsee. Kumulatiivisuus toteutuu niin elämässä yleensä kuin koulumatematiikassakin. Tutkimuspolku tai oppimispolku on yksilöllinen havaintopolku, joka jäsentyy niistä perusteista, jotka ovat valikoituneet havainnon kohteiksi. Koulumatematiikassa ratkaistavissa oleva voidaan jäljittää muistista aktivoitaviin perusteisiin. Tällöin koulumatematiikka voi toimia myös yleisenä tiedon rakentamisen metodina.

Matematiikka ei ole vain koulumatematiikkaa, vaan kaikkea sitä, mikä sitä ympäröi. Matematiikka ei ole elämästä irrallinen järjestelmä, vaan yhteydessä ajattelutapaumuksiimme, jotka juurtuvat kreikan matemaatikkojen, etenkin Aristoteleen ajattelutapaumuksiin. Kreikkalainen matematiikka on riippuvainen sen luojaista eli matematiikan keksijöistä. Mihin heidän havaintonsa ja ajattelutapaumuksensa on kohdistunut, ohjaa meitä edelleen. Tarkkuus, täsmällisyys ja pysyvyys on säilynyt, vaikka matematiikka ilmenee epätarkkana ja havaitsijasta riippuvana elämismaailmassa. Matematiikka kokemuksessa on sen tiedostamista.

Matematiikan objektiivisuus painottaa riippumattomuutta ihmisestä, jolloin pohjimmiltaan kaikkien pitäisi tehdä samat havainnot. Koska oletus ei pidä paikkaansa koulutodellisuudessa, eikä elämäntodellisuudessa, oppimisen lähtökohtien yksilöllistäminen ratkaisee ongelmaan. Kreikkalainen matematiikka ja filosofia varmuudellaan ja pysyvyydellään selittää antiikin ajan tiedollisia tarpeita. Nykyajassa, kun mikään ei ole enää varmaa tai pysyvää (paitsi oleminen), tarvitaan enemmän yksilölähtöisiä perusteita koulumatematiikalle.

Elämä 1950-luvulta lähtien on sotien jälkeisen Suomen rakentamisen ja rakennemuutoksen aikaa, millä on heijastusvaikutuksia kulttuurin, koulujärjestelmän ja koulumatematiikan muutoksiin, joita olen tutkimuspolulla ymmärtänyt. Matematiikkailmiö on tutkimuspolulla primääritasolta lähtien rakentunut koulumatematiikan elämismaailmallinen malli, mikä ei tarkoita lukuja tai koulumatematiikan sisältöjä, vaan kokemuksen matematiikalle antamia merkityksiä. Matematiikka ilmenee näin omien tutkimusten, kasvuympäristöstä opitun ja opettajuutta tukemaan havaitun perustalta tiedon rakentamisena ja tiedostamispyrkimyksenä – persoonallisena tiedonintressinä.

## 11.2 Talonpoikaisyhteisö matematiikkaan suuntautumisen perustana

Lapsuuden ja nuoruuden yhteisöllisyydessä (Gemeinschaft) korostui yksilöllinen oma-aloitteisuus ja ahkeruus. Osallisuus työtehtävissä pellolla, puutarhassa, navetassa, keittiössä ja yhteisissä projekteissa toteutui vauvasta lähtien. Tieto ja taito ilmenivät toiminnassa, jossa rationaalisuus, neuvokkuus, hoksaavuus, näppäryys ja kekseliäisyys olivat yhteisön arvostamia matematiikkaankin yhdistämiä ominaisuuksia. Toiminnassa yksilöllinen rationaalisuus ja yhteisön arvo-todellisuus yhdistyvät ja luovat ymmärtämisen perustan myös suhteessa matematiikkaan. Kansanperinteen kerääjä ja kansakoulunopettaja Samuli Paulaharjun (1875-1944) mukaan asioiden yhteen liittämisen, jäsentämisen ja toisiinsa suhteuttamisen kykyä kuvaa käsite konsähti (emt. 1947, 366). Matematiikka ei ilmene objektiivisena vaan intersubjektiivisena ymmärryksenä yhteisestä toiminnan tavasta ja todellisuuden tulkinnasta.

Työntekotavan muutos: työn erikoistuminen, tehostuminen ja teknologisoituminen, ajoittuvat elämismaailmaani 1960-1970 -luville. Tällöin matemaattisiin

muotoihin ja määriin liittyvät symboliset merkitykset tuotannollisessa toiminnassa muuttuivat käytännöllisestä taloudellisiksi. Suunnittelutalous muutti omavaraistalouteen perustuvaa talonpoikaista elämäntapaa. Matematiikkakin tuli näkyvämmäksi osaksi yhteisön toimintaa. Tiedonhankintaa koskevat yhteisön vaatimukset alkoivat vahvistaa kognitiivisia strategioita toimintaan, mitä kutsun tiedonhankintaan suuntautumiseksi (myös Pietarinen 2002a, 63).

Omavaraista elämäntapaa korostanut talonpoikainen kulttuuri muuttui talousarvoja painottavaksi maataloudeksi. Yhteiskunnan rationalisointi: elinkeinorakennemuutos ja muutos rinnakkaiskoulusta yhtenäiskouluksi, ajoittuvat peräkkäisille vuosikymmenille 1960 ja 1970. Sosiaalinen muutos laajensi vuorovaikutus- ja toimintakenttää yhteisöllisestä yhteiskunnalliseksi (Gesellschaft). Ferdinand Tönnies (1855-1936) kuvaa muutosta yhteisöstä yhteiskunnaksi esineellistyneeksi, pinnallistuneeksi ja roolittuneeksi, missä yhdessäolo muuttui välineeksi päämäärän saavuttamiseksi (Jokivuori & Vainio 1990, 15). Tähän rakennemuutokseen en täysin suostunut kasvamaan mukaan, vaan tunnistan itsessäni edelleen esivanhempieni perintöä suuntautumisessani matematiikkaan. Tällöin itseisarvoinen (ei välineellinen) järki palvelee enemmän yhteisöllisyyttä ja yhteisymmärrystä kuin yksilöoptimismistä vahvistuvia valtapyrkimyksiä.

Elämismaailmassani lapsuuden ja kansakoulun vaihetta hallitsee valistuksen humanismin vaikutus, minkä voi tunnistaa vanhempieni, isovanhempieni, esivanhempieni ja seminaarin käyneiden kansakoulun opettajieni omaksumasta itseoppimisen perinnöstä. Tällöin on pärjättävä omilla avuillaan, keksittävä keinot selviytyä elämässä ja itsensä työllistämässä. Matematiikkaan rakastuminen on ymmärrettävissä näistä kontekstuaalisista intresseistä lähtien. Taipumukseni mukaisesti suuntauduin aineopintojen jälkeen opettajaopintoihin vasta sitten, kun olin varmistunut käytännössä pärjäämisestäni opetuslalla. Tällöin olin toiminut sijaisopettajana, tutkinut pedagogista suuntautumistani ja olin itseopiskellut matemaattisten tieteiden yhteiskuntayhteyksiä, kuten yhteiskuntafilosofiaa, sosiologiaa ja tieteenfilosofiaa.

Elämismaailmani talonpoikaiskulttuurin toimintaympäristöä voi luonnehtia avoimeksi opiskeluympäristöksi, jossa selviäminen edellyttää luovaa ongelmanratkaisukykyä. Avoin opiskeluympäristö on joustava ajan, paikan, menetelmien ja oppimissisältöjen suhteen (vrt. Malinen 1998). Toimintaympäristö on omien ominaisuuksien ja olosuhteiden avoin suhde, jossa on pyrittävä toimimaan luovasti ja kestävästi. Luovuus tarkoittaa kekseliäisyyttä uusissa tilanteissa. Omalähtöisyys, totuustahto, itsenäisyys, itseohjautuvuus ja ankara (työ)moraali yllyt-

tävät pärjäämään ja käyttämään omaa järkeä. Avoimessa toimintaympäristössä syntynyt valistuksen rationaalisuuden kiteytys on talonpoikaisjärki (luku 4.2.2).

Elämäntapaa luonnehtiva itseään korjaava järjen käyttö muistuttaa Deweyn kuvaamaa merkitysoppimista, missä yksilö ja ympäristö ovat toiminnan toisiinsa liittyviä osia. Deweyn (1910) kokemus (Experience) on empiirinen ja experi-metaalinen mielen asenne, johon liittyy vitaalinen ja kehittyvä näkökulma, joka pyrkii eroon rajoittavista ja estävistä tunteista, tahtotiloista tai traditioista. (Miettinen 2000, 68.) Deweyn tapaa ilmentävä käsite 'habit' on yhteisöä uusintava vauhdittaja ja toisaalta elämäntapaa säilyttävä (emt. 68). Deweyn ymmärrys kokemuksesta, tavasta ja tiedon alkuperästä kietoo yhteen tieteenfilosofisia traditioita. Tiedon synteettistä yhteen kietoutuneisuutta talonpoikaisyhteisössä kuvaavat edellä kuvatut käsitteet konsähti ja talonpoikaisjärki. Säännönmukaisuuksia yhteenkietova eli synteettinen taipumukseni on identiteetissäni säilynyttä kokemuserintöä, mikä jäi matematiikan tieteenfilosofian kehityksessä takalalle.

Deweyn tiedon alkuperä on sekä empiirinen (havainto) että rationaalinen (järki), jotka jäsenyvät toiminnan näkökulmasta. Ymmärrystavassa elämän tarkoitus ja opiskelun tavoite integroituvat. (Mönkkönen 2008, 7-12.) Tiedonhakua ja ajattelutapaa ohjaavat ensi sijassa käytännölliset intressit ja toissijaisesti teorettiset tavoitteet. Teorialla on tarkoitus minussa, jolla pyrin parantamaan yleisesti maailmaa. Dewey laajentaa kokemukseen liittyvän merkityksen käsitettä toimintamahdollisuuksina kontekstissaan tietoisuutena, jossa mieli on tietoisuuden muuttuva tausta (Määttänen 2002, 197). Myös Hollo (1931b, 14) muistuttaa, että teoria ei ole ainoastaan kokemuksen vastakohta, vaan se merkitsee myön-teistä suhtautumista todellisuuden ilmiöihin. Kreikkalainen sana 'theoria', mikä rationaalisuuteen usein liitetään, tarkoittaa katselemista, näkemystä ja katselemisesta koituvaa iloa ja sisäistä havaintoa. (emt.) (vrt. intuitio luvut 6.3.1 ja 6.3.2)

Deweyn pragmaattisen fenomenologian perusta on ihmisen toiminnallinen vuorovaikutus biologisena organismina (myös Hollo 1927, 16) ympäristön kanssa, mikä kuvaa ajattelun perusrakenteiden muodostumista evoluution myötä. Deweyn mukaan yksilöllisen tietämisen sopeutuminen ympäristöön on evoluutio-prosessi, missä ympäristö vaikuttaa minuun ja minä vaikutan ympäristöön. (Aspelin 1963, 506-514; Mönkkönen 2008, 13-16.) Pelkkä passiivinen sopeutuminen ei riitä yksilölle, vaan yksilön on etsittävä tietoa aktiivisesti toimimalla, sillä Dewey hylkää eron ajattelun ja toiminnan välillä (Mönkkönen 2008, 22). Täl-

löin mieli ja todellisuus eivät ole erillisiä, vaan toisiinsa kietoutuneita. Läsänä oleva kokemusympäristö on merkitysten kenttä, joka säätelee toimintoja (Alhainen 2013, 53). Elämismaailmani merkityskentässä toimintojen hahmottaminen, jäsentäminen, järjestäminen ja mallintaminen liittyvät matematiikkaan ja etenkin sitä edeltävään rakenteeseen.

Keskikoulu- ja lukiovuosien aritmetiikan, algebran, geometrian, trigonometrian ja differentiaalimatematiikan opiskelu voimaannuttaa vähitellen tieteellistä ymmärrystä, missä kuitenkin säilyy vahva ihmislähtöisyyden, itsekasvatuksen ja käytännöllisyyden intressi. Matematiikka ei ole olemassa minusta riippumatta objektiivisessa maailmassa, vaan minä mielessäni tulkitseen, luon, keksin, löydän ja käytän matematiikan ideaa toiminnassani. Tällöin kokemukseni on lähellä pragmatismien perinnettä, missä tieto rakentuu suhteessa toimintaan ja siinä kohdattuihin ongelmiin. Pentti Määttä kiteyttää (1995, 176): ”On olennaisesti eri asia puhua mielestä, joka katsoo tai käsittää objekteja ulkoisessa fysikaalisessa ja sosiaalisessa maailmassa, ja mielestä, joka on vuorovaikutuksessa oleva osallistuja, joka tiedostaa niitä.” Intressini on jälkimmäinen, osallistuva havainnointi, joka tavoittelee inhimillisesti merkittävää matematiikkaa koskevaa tunne-, arvo- ja valintatietoa, minkä tieteen naturalistinen ymmärtäminen usein ohittaa.

Uusissa ympäristöissä, yliopistossa, opettajana, opettajankoulutuksessa, opettajankouluttajana ja tutkijana työskentelytavoitteet määrittyvät opitun perustalta edelleen käytännöllisistä ja toimivista lähtökohdista, analyyseistä ja synteeseistä. Tällöin ymmärryksenäni on ollut toiminnan kiinnittäminen havaittavaan ja kehitettävään todellisuuteen. Konkreettiset ja käytännölliset lähtökohdat sekoittuvat yhteiskunta-analyysiin siitä, miten matematiikka näkyy yhteiskuntarakenteissa ja arjen toimintatavoissa. Intressinä on kytkeä eri tieteilijöiden ajattelua omaan ajatteluun ja matematiikkaan. Tällöin ideoiden etsiminen on keskeistä. Miten on oppinut lapsuudessa ja nuoruudessa todellisuuteen suuntautumaan säilyy edelleen uusissa konteksteissa hitaasti muuntuen ja tarkentuen. Strategista suuntautumistani voi pitää näin horisontaalisena (vrt. taulukko 5, luku 7.3).

Matematiikan juuret elämismaailmassani kietoutuvat talonpoikaiskulttuurin elämäntapaan, mistä kumpuavat intressit matematiikkaan. Habermas (1968) kutsuu tiedonintresseiksi sosiokulttuurisen elämänmuodon uusintamista (Kangas 1989, 11; Huttunen 2014) (vrt. luku 2.3). Habermasin tiedonintressiteorian tarkoituksena on paljastaa tiedon ja tietämisen yhteiskunnalliset ehdot. Habermasin mukaan elämismaailman kokemukset organisoituvat yhteiskunnalliseksi tiedoksi tiettyjen pysyvien intressien kautta. Habermasin mukaan tiedonmuodostuksen täytyy täyttää tiettyjä yleisiä yhteiskunnallisia funktioita ja palvella yhteiskun-

nallisia intressejä. (Huttunen 2014.) Elämismaailmassani matematiikalla on ollut merkittävä yhteiskunnallinen ja yksilöllinen funktio. Seuraavaksi luon yhteenvedon siitä, miten nämä intressit ilmenevät elämismaailmassani.

### 11.3 Tiedonintressit matematiikkaan suuntautumisen funktiona

Habermas kritisoi modernia tiedettä intressittömäksi. Matematiikkaan sovelletuna intressittömyys tarkoittaa, että matematiikan juuret ja niistä kumpuavien yhteiskuntayhteyksien arvomerkitys on ohitettu tai tulkittu pinnallisesti. Habermasin tiedonintressit yhdistetään usein eri tieteiden erilaisiin tavoitteisiin, metodeihin ja lähestymistapoihin osana erilaisten tieteiden erilaisia yhteiskunnallisia tehtäviä. Tutkimuspoluillani elämismaailma tarjoaa tulkintahorisonttien lähtökohdan. Tällöin käytän laajennettuna Habermasin ideaa tiedonintresseistä. Yhdistän tutkimuspolulla tiedonintressit matematiikkaan, mikä ei vastaa Habermasin *Erkenntnis und Interesse* (1968) -teoksessa eri tieteisiin liittämiä lähtökohtia. Habermasin positivististen tieteiden kritiikin ratkaisuna on tiedonintressit, mikä vastaa tutkimuspolun lähtökohtia. Tutkimusongelmani kokonaisuutena taustoitaa koulumatematiikan arvovapauden ongelmallisuutta.

Tutkimuspolulla tieteen kritiikkini on samansuuntainen kuin Habermasilla. Liittän matematiikkaan tiedonintressit (luku 2.3), joiden korostumattomuus tai puuttuminen on tunnistettavissa hakuteosten matematiikan kuvauksissa (luku 2.4). Hakuteoksissa kuvatulla aikakaudella 1963-2017 praktinen intressi heikkenee, veristinen intressi vahvistuu ja tekninen intressi säilyy. Muut mainitsemani tiedonintressit, emansipatorinen, metafyyminen ja persoonallinen, välittyvät heikosti, joista seuraavassa elämismaailmaani sijoitettuina.

Tiedonintressi on tapa tarkastella elämismaailman kokemusten organisoitumista yhteiskunnalliseksi tiedoksi. Habermas (1965; 1968) pyrkii kolmella tiedonintressi-käsitteellään (tekninen, praktinen ja emansipatorinen) yhdistämään tiedon ja elämäntavan välisiä yhteyksiä ja oppimaan siitä. Tiedonintressi vahvistaa valituksen ihannetta kasvaa alaikäisyydestä järkensä avulla. Täydennän tiedonintressejä Niiniluodon tieteenfilosofian veristisellä, Pietarisen yhteiskuntaetiikan metafyyysisellä ja Kumpulän luovuutta, itseymmärrystä ja tieteidenvälistä yhtenäisyyttä, konsilienssia (vrt. Wilson 1998), tavoittelevalla persoonallisella intressillä.

Habermasin erottelemat tiedon ja todellisuuden lähestymistavat sopivat lähtökohdaksi matematiikan moninaisuuden tunnistamiseen. Matematiikkaan suuntautumisen motivaatioperusta on intresseissä. 1970-luvun teollistumisen ja teknologisoitumisen voimistumisen vaiheessa tekninen yhteiskuntaintressi voimistui ja yhteiskunnan rationalisointi eri muodoissaan alkoi kehittyä tehokkaaksi, myös koulutuksen toteuttamisessa, mikä tarkoitti koulumatematiikan tieteellisten lähtökohtien painottumista käytännöllisten väistyessä. Edellä kuvaamani praktinen intressi jäi vähitellen yleisesti taka-alalle, mutta opettajan toimessani praktinenkin intressi säilyi. Keskikoulun 1965-1970 ja lukion 1970-1975 aikoina tapahtunut mielen ja yhteiskunnan rationalisointi vahvistivat kokemuksessani erilaisia intressejä. Tällöin opin hakemaan tietoa haku- ja tiedeteoksista.

Habermasin tekninen intressi painottaa työtä materiaalisen tuotannon hyödyntämiseksi. Tekninen intressi toteutuu etenkin luonnontieteiden sovellutuksissa. Habermasin tekninen intressi liittyy matematiikan teknisiin ja taloudellisiin päämääriin. Ongelmanasettelussani tekninen intressi yhdistettynä matemaattisen työn kautta pelkästään teknisiin ja taloudellisiin päämääriin edustaa ahdasta tiedekäsitystä matematiikasta. Tekninen intressi on liittynyt koulumatematiikkaan keskeisesti etenkin luonnontieteissä ja niiden sovellutuksissa. Teknologian ja teknologisten järjestelmien kehittyminen on ollut tärkein osa yhteiskuntien talouskasvua, mikä on mahdollistanut hyvinvoinnin. Uhkana on ihmisen vieraantumisen, todellisen hyvinvoinnin vaarantuminen sekä infrastruktuurin huollon, ylläpidon ja rakentamisen heikkeneminen.

Praktinen intressi liittyy Habermasilla historiallis-hermeneuttisten tieteiden kautta yhteisön perinteiden jatkamiseen (Kangas 1989,12-13), mikä laajentaa tiedekäsitystä ja tuo matematiikkaan käytännöllisen näkökulman, mitä myös edellä Deweyn ajatteluun viitaten kuvasin. Habermasin praktisen intressin perustalta tiedon funktio on kulttuuristen merkitysten ymmärtäminen (Huttunen 2014). Itseymmärrys ja sosiaalisen yhteisön uusintaminen tapahtuu kielen ja kommunikatiivisen toiminnan avulla (Kangas 1989, 11). Tällöin maailma konsistoi henkilöiden, tekojen, ilmausten ja toiminnan todellisuutena (emt. 11). Praktisen intressin kautta tulkitseen matematiikan käytännöllisiä ja elämäntapaaan liittyviä valmiuksia ja tahtotiloja.

Emansipatorisen intressin funktionaalinen merkitys liittyy Habermasilla ihmisten vapauttamiseen perinteen ohjaamasta ajattelusta ja olemisesta. Se koskee myös ihmisen vapautumista ylimääräisestä yhteiskunnallisesta vallasta ja yleensäkin ennalta määrätystä olemisen tavasta. Tämä intressi toteuttaa sekä itsereflektiota että pyrkimystä kypsään ihmisyyteen (Mündigkeit). Emansipatorisen

intressin tarkoituksena on ohjata itsereflektiota, mikä on tiedonintressi sekä kriittisille tieteille että filosofialle (Huttunen 2003, 153), ja tutkimuspolulla myös matematiikalle. Kriittis-emansipatorinen intressi liittyy tutkimuspolulla talonpoikaiskulttuurin arvoista tietoisemmaksi kasvamiseen, ihmisenäkökulman puolustamiseen matematiikan ymmärtämisessä ja matematiikan yhteiskunnallisen vallan analyysiin.

Talonpoikaiskulttuurin arvoista vapautuminen ja vahvistuminen tarkoittaa huomion kohdistamista yhteiskuntaan ja globaalin maailman kehitystrendeihin ymmärtämällä juurimerkityksiä alhaalta ylöspäin. Ihmisenäkökulman puolustaminen tarkoittaa ihmislähtöisyyttä, yhteisymmärrykseen pyrkimystä ja vuorovaikutteisuutta matematiikan ymmärtämisessä. Tällöin yksilölliset valmiudet ja toiminta-aipeudet ovat matematiikkaan suuntautumisen lähtökohtana. Matematiikan yhteiskunnallisen vallan analyysi tarkoittaa hierarkian, materiaalsen, taloudellisen ja numeroituvan vallankäytön kritiikkiä. Tällöin huoli kohdistuu yhteiskunnan kestäväen kehityksen ja inhimillisen tulevaisuuden rakentamiseen, koska matematiikka on merkittävä vallankäyttäjän yhteiskuntakehityksen taustalla.

Veristinen (latinan veritas) intressi painottaa tieteenfilosofista näkemystä, jonka mukaan tiede tavoittelee totuutta tutkimuksen päämääränä (TTP 2018). Veristinen mukaan tulkittuna matematiikan tarkoitus on pyrkiä totuuteen. Tällöin matematiikan tutkimuksen mahdollinen käytännöllinen hyöty on itseisarvoinen tieto ja totuus, jolla on arvo itsenään. Veristinen intressi on vastakohtainen välineelliselle eli instrumentaaliselle intressille, joita tekninen, praktinen ja emansipatorinen intressi edustavat. Myös metafyyssinen ja persoonallinen intressi näyttäytyvät enemmän itseisarvoina kuin välineinä taloudellisten etujen saamiseen. Veristisen intressin perustalta korostuu matematiikan teorettinen rakenne: matematiikka kiehtoo ja tuntuu sisäisesti. Tällöin korostuu matematiikan esteettisyys eli säännönmukaisuus ja kauneus. Matematiikka on totuuden laadun mukaisen luokituksen mukaan eksaktein tiede, jolloin veristinen tiedonintressi on aina osa matematiikkaa muiden kokemuksellisten intressien ohella.

Juhani Pietarinen lisää Habermasin tiedonintresseihin metafyyssisen intressin, minkä mukaan tiede antaa kuvan todellisuudesta ja selittää ilmiöiden toimintaa. Tieteellinen tieto, tutkimuspolulla matematiikka, auttaa maailmankuvan ja maailmankatsomuksen rakentamisessa. (Pietarinen 2002a, 64.) Pietarinen liittyy metafyyssisen intressin normatiiviseen moraalifilosofiaan. Tällöin korostuu eettinen näkökulma matematiikan soveltamisessa yhteiskunnassa. Metafyyssinen intressi liittyy yksilöllisen kokemuksen matematiikasta sen yhteiskuntayhteyksiin.

Matematiikka sisältyy arjen toimintaan ja yhteiskunnan rakenteisiin, jolloin sillä on keskeinen merkitys elämän ja elämäntavan ymmärtämisessä. Eri tieteiden metodisena esikuvana matematiikka toimii ilmiöiden selittämisen ja ymmärtämisen välineenä (Pietarinen 2002a, 63) myös itseisarvoisesti.

Metafyysisistä intressiä syvällisemmin yksilöllisiin lähtökohtiin pureutuu persoonallinen intressi. Persoonallinen intressini painottaa yksilölähtöisiä funktionaalisia merkityksiä, joilla on mieleen jäljen jättänyt merkitys omassa intuitiossani. Persoonallinen intressi perustuu yksilön tietoiseen ja osin tiedostamattomaan intentionaalisuuteen, joka on epigeneettisestä eli sukupolvelta toiselle periytyvästä perustasta kumpuavaa suuntautumista matematiikkaan. Tajunnassani matematiikka näyttäytyy laajentuvana, vähitellen avautuvana maailman kokonaisuuden kuvana, mistä pieniä aavistuksia saattoi löytää vaikkapa keskikoulun murtolukujen desimaalimuunnoksista. Toiset desimaaliluvut luvut ovat tarkkoja ja päättyviä, toiset äärettömyyteen jatkuvia säännönmukaisia lukusarjoja. Kumpaan ryhmään murtoluku kuuluu, riippuu jaollisuudesta. Persoonallisen intressin perustalta en voi täysin tietää, mitä persoonallinen intressi tarkoittaa jollekin toiselle.

Tutkimuspolulla persoonallisen intressin mukaisen tiedon yhtenäistämisen eli konsilienssin sillanrakentajana eli siteenä muihin tieteisiin ja maailmaan toimii matematiikka. Konsilienssi koherenssin mahdollisuutena esiintyy jo William Whewellin (1840) synteessä, missä eri tieteiden faktoista syntyy yhteinen selityksen pohja (Wilson 2001, 14). Konsilienssin tavoittelussa korostuu evolutiivinen ja ekonominen ajattelu. Tietämisen sopeutuminen ympäristöön ja funktiot kulttuuriin, politiikkaan ja tieteeseen osana globaalin yhteiskunnan arvotodellisuuksia on evoluutioprosessi. Ekonominen ajattelu liittyy nimenomaan matematiikkaan siten, että matematiikka on lyhyin, yksinkertaisin ja optimaalisin polku yhdistää havaintoja (vrt. Mach 1864).

Edward O. Wilson (2001) rakentaa tiedon yhtenäisyyttä biologian lähtökohdista yhdistäen polkuajatteluunsa Joonialaista filosofiaa, valistuksen herätystä, etiikkaa ja uskontoa, taidetta ja tulkintaa, mielen ja tieteen synergiaa sekä pohdintaa ihmisluonnon kelpoisuudesta ja kulttuurin geeniperäisyydestä. Tieteilijöiden toisiaan korjaavuus, polku kohti tieteen yhtenäisyyttä eli konsilienssia on tunnistettavissa myös jatkumossa Newtonin (1643 – 1727) mekaniikka, Machin fenomenalismi (1838-1916), Maxwellin (1831-1879) sähkö- ja magneettinen vuorovaihtuskenttä, Einsteinin (1879-1955) valon fotoniteoria ja suhteellisuusteoria sekä de Broglien (1892-1979) aalto-hiukkasdualismi. Polun jatko, kvanttiteoria, sisältää vielä vaihtoehtoisia teoreettisia polkuja, missä ongelmassa näyttää, että

ihmisen osuus havaitsijana on avainkysymys. Yhtenäisyyden rakentamiseksi tieteet tarvitsevat avuksi humanistisia ja filosofisia tieteitä – elämän näkökulmaa.

Elämän merkitysmaailma, minuukseni, perimä ja ympäristö, antavat perustan yksilölliselle reflektiolle, mistä myöhempi suuntautuminen tapahtuu vastakohtaisesti tai samansuuntaisesti, usein jostain merkitysmaailmojen välistä. Voimakkaat elämykset toimivat suuntautumisen perustana puolesta tai vastaan. Merkitysten uudelleentulkinta mahdollistuu toisten ihmisten puheesta tai tuotoksista. Reflektiivisyys edellyttää aitoa ja avointa asennetta suhteessa todellisuuteen. Tällöin pyrkimyksenä on vapautua psykologisista puolustusmekanismeista reaalisen todellisuuden tarkkailuun ja löytää perusta omalle ajattelemiselle. Matematiikan harjoittaminen johdattaa johdonmukaisuuteen ja totuudellisuuteen vähintäänkin koherenssin (yhteensopivuuden) merkityksessä.

Habermasin yhteiskuntakritiikin fokuksessa on järjen puolustaminen ja elämän inhimillistäminen, mikä on tulkittu poliittiseksi (Hilpelä 1986), ideologiseksi (Kangas 1989, 4) ja monitieteisyydessään eklektiseksi (Therborn 1974). Kangas (1989, 4) vahvistaa havaintojani painottamalla järjen eli rationaalisuuden yhteyttä valistusajatteluun, missä valistunut järki merkitsee metafysis-uskonnollisen maailmankuvan hajoamista totuuden, oikeuden ja autenttisuuden vähittäisesti eriytyen. Elämismaailmassani olen kuvannut matematiikan yhteyksiä tiedonintresseihin sisäisinä ja ulkoisina potentiaaleina, jotka selittävät järjen rakennemuutosta (taulukko 4, luku 4.2.2) ja mahdollistavat elämäntavan muutoksia. Tällöin matematiikalla on yhteyksiä kulttuurin, politiikan ja tieteen merkityksiin. Tietoisuus intresseistä vahvistaa matematiikan oppimistavoitteiden yksilöllistämistä ja ymmärryksen syventämistä.

Minuudessa eli identiteetissäni on elämismaailmaperäisesti juonteita, joista tyypillisimmät ovat moraalisiin liittyvä totuuskäsitys, luova itseohjautuvuus, pärjäämisen yllyke ja toiminnallisuus. Opiteissa, perityssä ja laajemmin (etelä-)pohjalaisessa identiteetissäni on tunnistettavissa intressi, jossa ajatellaan, että elämä on huomennakin. Tällöin toiminta on suunnattava niin, että elämäntavan kestävyys säilyy. On ajateltava omaa elämäntapaansa laajemmin. Elämäntavassa on moraalinen aspekti – omantunnon ja arvotietoisuuden vaade. Tästä näkökulmasta toimintaa ohjaa itseuri, vaatimus itseltä, ei niinkään ulkoinen ohjeistus. Itseohjautuva ja itseään korjaava elämäntapa sopii hyvin myös koulumatematiikan harjoittamiseen, oppimiseen ja soveltamiseen.

## 11.4 Miten minun matematiikkani syntyi ja kehittyi

Ennen kouluikää 1950-luvulla leikki toteutui kekseliäänä toimintana. Ensimmäiset havaintoni 'suhteen' olemassaolosta keksin tikapuita rakentaessani. Kokeilujen jälkeen mitasin puuklapilla askelvälit saman mittaisiksi. Leikkikodin rakentaminen kiville ja ojiin vaati mittaamista, jotta huoneiden koko palveli siellä suoritettavaa toimintaa, kuten kokkaamista tai nukkumista. Seossuhteiden kokeilu pikilööri-hietakeitossa, materiaalien yhteensovittaminen leikkieläinten ja ihmisten kodin rakentamisessa, valmistetun ruuan tasajako, suunnistuskartan piirtäminen ympäristöstä tai telttakatoksen suunnittelu rungon kokoiseksi kasvattivat toimimaan oman havainnon perustalta ja soveltamaan matematiikkaa.

Lapsuuteni hakuteoksen mukaan matematiikkaa keksittiin käytännön ongelmatilanteissa. Arjen leikeissä ja töissä tunnistamani matematiikka oli autenttista ja itseohjautuvaa, mikä jäi jälkeensä arvioiden vaikuttamaan matematiikkakäsitteeseen. Alle kouluikäisenä olin käyttänyt alkeismatematiikkaa arjen leikeissäni tiedostamattani. Olin tunnistanut säännönmukaisuuksia vuosia aikaisemmin kuin olin oppinut ensimmäistäkään peruslaskutoimituksiin, luokitteluun, rakenteiden tunnistamiseen tai muotojen kokoamiseen liittyviä käsitteitä.

*Lukumäärät olivat luonnollinen osa elämän kokonaisuutta. Piti tarkistaa, onko kaikki käpypossut ja -lehmät haassa. Männyn kävyt olivat possuja ja kuusen kävyt lemmiä. Pajuja kuorittiin keväisin ja myytiin kauppaan. Yhteen nippuun laskettiin sata pajua. Kätevää oli asetella pajut kymmenen kasoihin ennen niputusta. Ehkä lukuteorian ihmettely jäi itämään ja suoritin vielä kesällä 2003 yliopistossa kurssin, diskreettiä ja äärellistä matematiikkaa.*

Kansakoulussa lukujen ja säännönmukaisuuksien tutkimista ja tunnistamista kutsuttiin laskennoksi. Kansakoulun laskentoa ja nykypäivän oppivelvollisuus-koulun matematiikan uudistustarpeita yhdistää yksilöllistäminen, arkilähtöisyys, sekä ilmiö- ja ongelmaperustaisuus. Laskennolla oli 1960-luvun arjessa käytännöllinen merkitys, joka toteutui koulussa. Kansakoulun opetussuunnitelmassa painottuivat elämässä tarvittavat tiedot ja taidot. Tällöin laskennon opiskelu kytkeytyi siihen tuotannolliseen elämään, missä vanhemmat ja isovanhemmat työskentelivät. Koulun sanalliset tehtävät sisältyivät luonnollisiin elämäntilanteisiin.

*Aarin havaintomalli oli kotipuutarhassa ja hehtaarin viljelyspelloilla. Vihannesmaan tai viljapellon mittaaminen toteutui A-mitalla tai askelmitalla. A-mitta oli ri-*

*masta tehty A, jonka kahva oli metrin levyisen A:n ylänurkassa. A-mitalla oli kätevä mittailta palstojen kokoja kieputtamalla mittaa palstan päästä päähän. Ajan myötä metrinmitan oppi arvioimaan silmällä, kuten myös taimien harvennuksessa sopivan taimivälin. Istutusrivien suoristus tehtiin köydellä, äiti toisessa päässä, minä toisessa päässä ja sitten hinkattiin maan pintaa köydellä. Väin syntyi suorat taimirivit. Äiti oli tarkka geometrisesta säännöllisyydestä puutarhan palstoituksessa. Vihannesmaa vaati huolenpitoa koko kesän, harvennusta, rikkakasvien kitkentää ja joskus kasteluakin. Opin tunnistamaan ainakin savi-päät (jauhosavikat), pilliäiset (pillikkeet) ja suolaheinät (tatarkasvit).*

Kansakoulussa tehtävänanto oli usein sanallista, varsinkin neljännellä luokalla. Sanallisten tehtävien ongelmat liittyivät arkielämään. Oli luonnollista kokea, että laskento on tärkeää elämässä, koska maalaistalon arjessa laskentoa ja mitaamista tarvittiin joka päivä. Elämän kontekstiin sitoutunut laskento ja siinä onnistuminen vahvistivat myöhemmin matematiikkaan orientoitumista. Oma kansakoulukokemus ja opettajan kiittävät lausunnot kannustivat pyrkimään keski-kouluun. Tuolloin päässälaskutaidolla oli merkittävä painoarvo oppikoulun pääsykokeissa mekaanisten ja sanallisten tehtävien ratkaisutaitojen lisäksi.

*Laskentoa harjoiteltiin luokassa täysin itsenäisesti ja hiljaisesti. Neljännellä luokalla opettajalla oli samanaikaisesti kolme muuta ylempää luokkaa opetettavanaan. Opettajalta sai mennä kysymään, jos harjoittelu ei edennyt. Työskentelytapa kannusti kyselemään itse itseltään. Yleensä ratkaisut löytyivät. Tulkintani mukaan tuolloin neljännen luokan laskento oli pitkälti hallinnassa, kun oli oppinut tunnistamaan, milloin piti kertoa ja milloin jakaa.*

Lähtökohtaisesti laskennon opiskelu kansakoulussa tarjosi motivoivan alun ongelma-perustaiseen opiskeluun. Kansakouluvaiheeni 1961-1965 integroi matematiikan elämään. Integrointi on yksilö- tai kontekstilähtöistä, jolloin siihen on vaikea antaa yleisiä ohjeita tai tavoitteita. Konkreettinen sovelluskohde, kuten ympäristöoppiin kytkeytynyt kansakoulumatematiikka elinympäristössäni oli, vahvasti opiskelun mielekkyyttä.

Kontekstistani vahvistuneena olen matematiikan opetuksessani ja kokeiden suunnittelussani liittännyt matemaattisen ja filosofisen pohdinnan arjessa havaittuihin asioihin ja ilmiöihin, mitkä eivät useinkaan näyttäyty yhtä selvärajaisina kuin koulumatematiikka oppikirjoissa. Maailmaa tarkkaillessani tai kirjoja lu-

kiessani olen mielessäni soveltanut matematiikan ideoita, harvemmin puhtaasti matematiikkaa. Asiat ja ilmiöt ovat yhteyksissä toisiinsa. Matematiikan ideoita ovat esimerkiksi yhteyksien, sääntöjen, ristiriitojen, varmuuden, järjestyksen tai yhteenkuuluvuuden tunnistaminen

Keskikoulu vahvisti teoreettista matemaattista orientaatiotani ja herätti pohtimaan, millä perusteella koulukirjojen opetussisältö oli valittu, eikä jotakin muuta sen monista mahdollisuuksista. Mistä matematiikassa on kysymys? Pohdin kuin antiikin filosofit olevaisen liikuttavia syitä suhteessa itseeni ja maailmaan. Ensimmäiset kotini hakuteoksesta etsimäni hakusanat ovat sielu ja yhteiskunta, koska ymmärsin niiden vaikuttavan maailman muotoutumiseen elämänympäristössä. Selvittelin kodin, kaverien ja sukulaisten kirjahyllyjen kirjoista, pääsääntöisesti erilaisista kokoelma- ja hakutietosanakirjoista, mitä tiede ja matematiikka tarkoittavat. Matematiikkani oli minun juttuni, koska elinpiirissäni ei ollut alaan hurahaneita, ellei isääni tai äitiäni lasketa mukaan. Isän ja äidin puhe sisälsi paljon viittauksia laskentoon sen käytöllisessä merkityksessä.

Keskikoulun lopulla kokemukseni matematiikan monipuolisuudesta ja maailmaan vaikuttamisesta voimaantui Eino Kailan vaikutuksesta. Havaintoni oli, että Kailahan on käyttänyt matematiikkaa *Persoonallisuus* -teoksessaan. Ajattelamisen kohteita tarjosi Kailan syvähenkinen filosofia suhteessa itseen ja matematiikkaan ympärillämme. Arkea ohjasi tuolloin tuotannollinen toiminta, jonka tulevaisuus oli uhattuna. Tuolloin oli keksittävä uusia keinoja itsensä elättämiseen. Omassa kokemusmaailmassani suhteessa matematiikkaan Kaila oli tärkein tienviittäjäni, mikä antaa erilaisia merkityksiä matematiikasta kuin yliopistomatematiikka tai opettajankoulutuksen luonnontieteiden aineyhdistelmien kautta avautuva sovellettu matematiikka. Matematiikallani on syvä henkinen olemus.

Kailan ajattelusta on tunnistettavissa yksilöllinen tavoitteellinen dynaamisuus, mitä nykykäsittein voi kutsua itseohjautuvuudeksi. Kailan korostus on sisäisyydessä ja syvällisyydessä, minkä pohjalta ohjautuminen on intentionalisuutta yksilöllisten hahmotuslakien ja mielen prosessissa. Matematiikan ja muiden tieteiden opiskeluun sisältyvän maailman ymmärtämisen ja maailmankuvan rakentamisen tavoitteena on asiayhteyksien, rakenteiden, säännönmukaisuuksien ja ideoiden pohtiminen. Kun on oppinut tunnistamaan matematiikan säännönmukaisuuksia, sitä voi soveltaa missä tahansa maailmassa, mitä tutkimuspolkukin kokonaisuutena edustaa. Kailan ajattelusta hahmottuu tavoite tutkia itseään, maailmaa ja matematiikkaa merkitysten rakentumisena.

Matematiikkani kehittyi muotojen, säännönmukaisuuksien ja systeemien hahmottamistaipumuksesta käytännön elämän tilanteissa (maailmankuva, matema-

tiikkakuva). Itsekasvatukseen ja maailman ymmärtämiseen perustuva malli matematiikan keksimisestä käynnistyy ensimmäisistä hakusanoistani sielu ja yhteiskunta, josta kehittyvät tutkimuspolun vastakkain asetellut, kuten yksityinen – julkinen, subjektilähtöinen – objektilähtöinen, horisontaalinen – vertikaalinen. Matematiikka rakentuu erojen tunnistamisen kautta.

Opettajan toimissani kouluissa tyypillisin opiskelijan esittämä kysymys koulu- luokassa 34 opettajatyövuoteni aikana on ollut: ”Mitä hyötyä matematiikasta on?” Kysymys on yksilön ja yhteiskunnan kannalta tärkeä. 'Hyöty' -kysymykseen vastaaminen on väitöskirjatyöni motiivi ja kokonaisvaltaisen ajattelun punainen lanka. Tavoitteenani on syventää ymmärrystäni matematiikan mielestä ja hyödyistä ontologisella olemisen tasolla eli aluksi omassa elämismaailmassani, koska siitä minulla on eniten tietoa. Löydökseni palvelevat matematiikkakasvatuksen kehittämistä viitteinä siitä, miten kasvu voi liittyä matematiikkaan. Jonkun toisen kokemana polku on varmasti erilainen, mutta kuvaukseni auttaa toivottavasti lukijaa pohtimaan omaa polkuaan.

*Opettajan työssä merkityksen ymmärrettäväksi havainnollistaminen on joskus pienestä kiinni. Tilavuusmitta hehtolitra vaikutti oppilaasta vaikeasti hahmotuvalta. Havainnollistaakseni lisäsin puheeseen hehto ohran jyviä, niin tarkoitettu määrämitta oli välittömästi ymmärrettävä opiskelijan mielessä (maatalon poika).*

Matematiikka on rakenteellinen kokonaisuus, jolla on mieli ja mielekkyys yksilön kokemuksessa. Matematiikan osaamisen edistyksen aikaansaamisen pullonkaula on oppivelvollisuuskoulun matematiikan ihmisseläisyys, missä opiskelijan taipumukset ja valmiudet ennen matemaattisia käsitteitä ovat avainasemassa. Talonpoikaisista lähtökohdistani olen yhdistänyt matematiikan arkeen, mutta joku toinen voi hahmottaa sen toisin lähtökohtiensa ja intressiensä perustalta.

Matematiikkailmiö ilmentää yksilön kokemusta tai universaalia maailmankaikkeutta tai jotain siltä väliltä. Matematiikkailmiö elää ympärillämme epätäydellisenä, keskeneräisenä ja riippuvaisena ihmisestä – ikään kuin houkutusena ihmiselle keksiä se piilostaan. Fenomenologisesti orientoituneena kirjoitan lauseen, mitä olen käyttänyt opetusmonisteissani: ”Hyvää matkaa matematiikan maailmaan!” Toivotuksessani painottuu kunkin kokemukseen yhdistyvä merkitys kiehtovuudesta.

## 11.5 Matematiikan arvotodellisuus on monitieteinen ongelma

Olen tarkastellut intressejä ja funktioita, jotka elämismaailman kontekstista vaikuttavat yksilöllisten hahmotuslakien kautta matematiikkaan suuntautumisen tapoina. Matematiikkailmiöön sisältyy matematiikan moni-ilmeisyys ja monimuotoisuus eri tieteissä. Opettajuus ja ympäröivä maailma kuuluvat tulkinnassani yhteen, enkä näin tarkastele niitä toisistaan erillisinä. Ympäröivä maailma on osa havaitsijaa ja sisältää luonnon sekä sosiaalisen ja kulttuurisen ympäristön, johon sisältyy myös mielen kokemuksellinen ympäristö. Matematiikka eri muodoissaan, puhtaana, sovellutuksissa ja ihmisten esitietoisuudessa sisältyy ympäröivään maailmaan, jossa myös itse olen osallisena. Yleisesti uusi ja innovatiivinen syntyy usein elämänmuutosten tai eri tieteenalojen rajapinnoilla. Ihmislähtöinen innovatiivinen matematiikka liittyy tällöin koettuun arvotodellisuuteen, mitä kutsun horisontaaliseksi matematiikaksi.

Avoin suhde maailmaan ja sen arvotodellisuuden tunnistaminen sitoutuu tutkimuspolulla merkityksiin, joista havainnoin arvotodellisuutta. Sosiologi Niklas Luhmannin (1927-1998) mukaan tieteessä ei ole kyse todellisuuden kopioimisesta, vaan siitä, että tiede tuo omien valintojensa (käsitteet, teoriat) välityksellä sen todellisuuden, josta se puhuu. (Kangas 1996, 218). Erottelujen ja niiden rekursiivisen prosessoinnin, jatkuvan havaintojen havainnoinnin kautta avautuva kehämäinen mahdollisuuksien horisontti määrittää sen todellisuuden, joka havainnoijalle on mahdollinen. Tällöin erottelu on se, mihin havainnointi perustuu ja samalla havainnoinnin sokea piste. Sokeus eli Luhmannin mukaan latenssi on kaikkea havainnointia koskeva perusehto. (Kangas 1996, 220-221.) Elämismaailman kuvaus on tarpeen, jotta sokeus tulee näkyväksi lukijalle. Arvotodellisuus edellyttää havaitsijaa, jolle arvot ilmenevät. Tiedonintressien avulla avaan matematiikan kontingenttia arvotodellisuutta, jolla on yhteyksiä sekä yksilöön (sisäinen) että yhteiskuntaan (ulkoinen) suuntautuviin arvoihin. Tutkimuspoluilani matematiikka on peittyneenä tai puhtaana kaikkialla havaintokentässä, jolloin havaintojen erottelu ja yhteensovitus tapahtuu teorioiden ja käsitteiden koherenttiin yhteensopivuuteen pyrkien.

Miten matematiikka ilmenee elämismaailmassani, liittyy tapaan tiedostaa sitä arjen ja eri tieteiden kautta. Matematiikkaa soveltavat kaikki tieteet ja yhteiskuntayhteyksissään matematiikkaa voi avata eri tieteiden näkökulmasta. Tällöin arjessa toimiva matematiikka on monitieteinen ongelma, johon sisältyy erilaisia merkityksiä. Eri tieteiden keskinäisen vuoropuhelun puutteen kautta matematiikka näyttäytyy tieteidenvälisenä ongelmana. Suutari (2013) kuvaa tieteidenvä-

lisyyttä kokonaisvaltaisena synteessinä tieteenalojen kesken. Matematiikka on kuin reaalityodellisuuden kompleksinen ympäristöongelma, joka liittyy tieteisiin.

Matematiikan tieteellinen edistys näkyy historiallisesti luonnontieteiden sovel-  
lutuksissa, joissa matematiikalla on ollut tekninen intressi. Matematiikan ja ma-  
temaattisina tieteinä tunnettujen tieteiden, etenkin fysiikan ja tietojenkäsittely-  
tieteen kehitys on mahdollistanut teknisen ja teknologisen yhteiskuntakehityk-  
sen. Matematiikan kehitys on keskeisin teknologisten järjestelmien kehityksen  
taustalla vaikuttava tiede, mikä tarkoittaa teknologian käyttäjien ja kehittäjien  
eriytymistä, päinvastoin kuin talonpoikauskulttuurissa vaikuttanut hyvin tekemi-  
sen kokonaisvaltainen taito, tekniikka, jossa käyttäjä ja kehittäjä on yleensä  
sama henkilö. Tekniikka tarkoittaa yleensä hyvin tekemisen taitoa ja teknologia  
järjestelmiä, joilla yhteiskunta on uudelleenorganisoinut.

Teknologisten järjestelmien kehitys alkaa keksinnöstä, joka vastaa useimpien  
ihmisten muuttuviin toiminnallisiin tarpeisiin. Esimerkiksi valoa pimeyteen toi  
keksijä, yrittäjä ja liikemies Thomas Edison (1847-1931), joka keksi 1860-lu-  
vulla hehkulampun ja oli myös mukana suunnittelemassa teknologista kokonai-  
suutta: sähködynamo, sähkömoottori ja sähköverkot (Mickelsen 200, 549). Tie-  
toverkko (internet) ja tietoverkostot kehittyivät 1900-luvun lopulla ja loivat tek-  
nologisen järjestelmän, jossa käyttäjät ja järjestelmän kehittäjät ovat eriytyneet.  
Teknologisten järjestelmien, kuten tietoteknisten ratkaisujen käyttäjäystävälli-  
syyden lisääminen on ollut tavoitteena 1970-luvulta lähtien. Tällöin käyttäjien ja  
kehittäjien yhteisillä intresseillä on keskeinen merkitys.

Maatalousyhteiskunnassa uusien työvälineiden kehittäminen tapahtui käytän-  
nön työtilanteissa, jolloin kehittäjät ja käyttäjät olivat samoja henkilöitä. Myös  
pieni ja keskisuuri PK -yrittäjäyys on syntynyt näistä käytännöllisistä lähtökoh-  
dista. Modernissa yhteiskunnassa teknisen intressin kautta yhteiskunnalliset teh-  
tävät ovat eriytyneet ja eriytyvät edelleen, mitä sosiologit kutsuvat refleksiivi-  
seksi modernisaatioksi (Beck 1994, 30-31). Refleksiivisyyden käytännön ongel-  
mana on, miten löytää omat mahdollisuutensa ja miten saada olemassa olevasta  
enemmän irti (Eräsaari 1996, 159). Tällöin on suunnattava erityishuomio kasvu-  
olosuhteisiin.

*Olen tutkimuspolun dialogissa paikantanut tilanteita, jolloin matematiikkailmiö  
on näyttäytynyt. Kesällä 1974 toimiessa metsäpalovartijana 60 m korkeassa  
tornissa, ylhäältä avautuva maisema näyttäytyi metsänä ja metsän varjoina,  
vihreänä ja mustana. Metsämaiseman säännönmukaisuus oli ylhäältä katsoen*

*yksinkertaisempi kuin alhaalta katsoen. Näkymä ylhäältä paljasti metsän, ei yksittäisiä puita (holismi) ja alhaalta näkyi yksittäinen puu (atomismi), mutta ei koko metsä. Millaiselta metsä näyttää, on kiinni näkökulmasta. Näkökulmia yhdistämällä syntyy ilmiö. Tutkimuspolulla olen hahmottanut matematiikan met-sää kokonaisuutena ylhäältä ja alhaalta. Yläpuolelta hahmottuu kokonaislinja ja konteksti. Alhaalta katsottuna jokainen puu on erilainen, riippuvainen ravinnon, valon ja veden saannista. Yksittäinen puu on vertauskuva myös ihmisen kasvulle. Yksittäinen matemaattinen potentiaali ilmenee suotuisissa olosuhteissa, jonka vaaliminen on opettajan työtä.*

Näkökulmia todellisuuteen on minimissään kaksi, minä ja maailma, joiden vuorovaikutus on tunnistelun kohteena. Synteesin kohteena on vuorovaikuttava yksilöllinen identiteettini, joka kuvaa suuntautumista yhteiskunnan ymmärtämiseen. Ymmärtämisessä matematiikka on metodinen väline ja sillä on rakenteellinen itseisarvo tiedostusprosessissa. Tällöin matematiikka on tieteen esikuva rakenteellisessa ja abstraktissa merkityksessä, mikä madaltaa tieteidenvälisyyttä koskevia esteitä (vrt. Mikkeli & Pakkasvirta 2007, 97-103; Salmela 2018). Käytäntöön liittyvät ongelmat ja innovaatioiden kehittämiseen liittyvät järjestelmät ovat aina monitieteisiä ja luonteeltaan kontingenteja, missä satunnaisuus, epävarmuus ja epätarkkuus ovat läsnä.

Ajattelun lähtökohta on ollut talonpoikaiskulttuurin toimintakenttä, jossa toiminnan kohteet liittyvät käytännön toimintaan ja ovat luonteeltaan monitieteisiä. Kun kasvatat porkkanoita, työhön liittyvät matemaattiset tiedolliset, taidolliset ja tieteelliset lähtökohdat sisältävät ainakin maaperän ekologiaa, kemiaa, biologiaa ja fysiikkaa; kylvöaikaa koskevaa kokemustietoa; siemenlajikkeiden tuntemusta ja suunnitelmallisuutta viljelytekniikassa, kuten miten tarvittava ravinteisuus ja rikkaruohojen kasvu kontrolloidaan, onko tarkoitus harventaa taimia vai valitaanko istutusväli, siementen itävyyskokeet, sadon korjaus- säilytys- ja markkinointisuunnitelma. Samoin on koulussa, pelkällä matematiikan osaamisellaan opettaja ei onnistu optimoimaan opiskelijan innostumista ja ”opinpolun talleantamista”. Oppimisprosessissa oppilas tai opettaja tarvitsee tietoa siitä, miten matematiikka ilmenee oppimisongelmassa tai tutkittavassa ilmiössä.

Erilaiset matematiikkaan liittämäni juonteet ovat yhteiskuntalähtöisesti tulkiten teknisen, praktisen ja emansipatorisen intressin kombinaatioita ja ihmislähtöisesti tulkiten veristisen, metafysisen ja persoonallisen intressin kombinaatioita. Yhteiskuntien ja yksilön kehitykseen vaikuttava matematiikka on monitieteistä, tieteidenvälistä (multi-, pluri-, cross-, inter- tai transdisciplinary) tai poikkitie-



ja luovuuden tunnustamista. Tutkimusote vastaa tutkimusongelman käytännöllistä tarkoitusta. Tällöin toimin subjektina kuin peilinä koulutodellisuudelle. Lähtökohdiksi valitsemani oma oppimispolku ja talonpoikainen sivistys koskettavat kaikkia läheisesti tai kaukaisesti kulttuurihistorian osana ja esimerkkinä kulttuurin vaikutuksista oppimiseen. Kokonaisuutena kehystekijät tuovat vaihtoehtoja ja pohdintakehystä koulumatematiikan ymmärtämiseen yleisesti arvohyteyksissään.

Elinikäinen taipumus filosofoida ilmenee tutkimuksen fenomenologisessa asenteessa ja ajattelemisessa. Fenomenologisen ymmärryksen pyrkimys on laajentaa ja luoda siltoja erilaisille havainnoille. Arkipäivistä nousevia pohdintoja voi nimittää tutkimukseksi, kun filosofointi ei ole oman edun tavoittelua, havainnot ovat rehellisiä, päättely on perusteellista ja pitkäjänteistä (Uusitalo 2001, 18). Subjektiiiviset tarkoitukset saavat näin intersubjektiiivisiä merkityksiä.

Filosofi Juha Himanka (2010, 212) puolustaa Husserlin fenomenologista hahmotusta itsenäisenä ajatteluna, missä ilmeisyys on kunkin itsensä koettava. Husserl päätyi miettimään yleispätevyyden vaateen syntyä antiikin Kreikassa. Faktujen ja ilmeisyyden suhde fenomenologiassa on vastakkainen historiatieteen mallille. Fenomenologiassa ilmeisyys löytyy minulle nyt läsnä olevasta ilmiöstä ja avautuu edelleen, kun hyödynnämme menneisyyttä koskevaa tietoa. Vaikka fenomenologia tarkastelee menneisyyttämme, sen lähtökohtana on elävä nykyisyys. (Himanka 2010, 205.)

Filosofi Jaakko Hintikka on kriittisempi: ”En usko kenenkään ajattelijan tosisaan uskovan fenomenologiasta löytyvän välineet tulevaisuuden filosofialle edes tietoteorian piirissä. Fenomenologia on yritystä löytää pohja tietomme kokonaisrakenteelle välittömästä kokemuksesta. Suurin osa tietoprosesseista tahtuu tietoisuuden ulkopuolella ja siis fenomenologisten reduktioiden ulkopuolella” (Hintikka 2001, 10-11). Hintikan ajattelussa on tunnistettavissa hänen aikaistensa abstrakti ja analyttinen painotus. Fenomenologia on filosofis-syvähenkinen asenne ymmärtää yhä syvemältä nykyisyyttä. Ihmistieteellinen näkökulma vahvistaa ihmisen osuutta, mikä poikkeaa tietoteorian vaatimuksista. Tutkimuspolulla fenomenologialla on tietoisuutta syventävä rooli. Myös Sami Pihlström (1996; 2002; 2003; 2004) puolustaa fenomenologiaa syvemmän tietämisen mahdollisuutena.

Filosofi Heikki Kovalaisen (2010, 189) mukaan ajatteluun vaikuttavien merkitysten paljastaminen lisää mahdollisuuksia tulla ymmärretyksi. Fenomenologiseen kriittiseen ajatteluun ja syvähenkiseen elämään kuuluu valmius reflektoida todellisuuden ja omakohtaisesti koetun elämän välistä yhteyttä (emt.) Reflektio

ja fenomenologinen asenne tarkoittavat tutkimuspolun tietoisuutta syventävää ajattelutapaa (1.4) ja tutkimusmetodia (3.4).

Tutkimuspolun kulttuurin kentän näkymätön matematiikka ja oppivelvollisuus-koulun matemaattinen tieto ennen käsitteitä on tietoisemmaksi kasvamisen lähtökohta. Miten matematiikka ilmenee, on luonteeltaan jatkuva ongelma. Matematiikan jäljet ympärillämme eivät ole tarkkarajaisia. Tällöin matematiikan alkuperä kulttuurin, politiikan ja tieteen kentässä näyttäytyy sfäärien yhteen kietoutuneina merkityksinä. Fenomenologinen metodi mahdollistaa matematiikasta tietoisemmaksi kasvamisen.

Tieteellisessä tutkimusoppaassaan professori Sirkka Hirsjärvi (2001, 20) muistuttaa, että subjektiivinen asenne estää monipuolisen tiedonhankinnan, koska ihminen on kiinnostunut vain itselleen tutusta. Tällöin ihminen toistaa aikaisempia toimintojaan (Hirsjärvi 2001, 20). Tutkimuspolulla näin on saattanut käydäkin, mutta tulkitsen asiaa päinvastoin. Itselleen tutusta voi päästä syvemmälle. Subjektiivinen asenne ei ole sama kuin tutkimuspolun fenomenologinen asenne, joka mahdollistaa kokemuksellisesti tärkeän tiedon tunnistamisen, mikä objektiivisuutta tavoitellessa usein häviää, vieraannuttaa tai epäinhimillistää. Tutkimuspolulla toistuvat merkitykset ovat eri konteksteja yhdistäviä merkityksiä, jotka ovat läsnä samanaikaisesti opetustilanteessa.

Subjektiivisella asenteella on Hirsjärven mainitsema ominaisuus yleisesti koki-erien erilaisia metodeja. Kokeellinen tutkimus voi olla subjektiivisempi kuin subjektiiviset kokemukset paljastava tutkimus, koska kysymyksien asettelu luonteeltaan rajaa ja strukturoi tutkimuksen kohdetta. On tulkinnanvaraista, tiedostaako ihminen tutkimuskysymyksiä laatiessaan subjektiivista asennettaan. Omat havaintoni tukevat väitettä, että kyselytutkimukset ovat usein asenteellisia. Olen vastannut satoihin tutkimuskysymyksiin, joista tutkijan intressi usein paljastuu. Tutkimuspolku on tieteellisen tiedon hankkimista, jäsentämistä ja luomista, missä kokemushistoria on mukana avoimesti ja rehellisyyteen pyrkien.

Hirsjärven muistutus ampuu nuolensa talonpoikaisuuteen osoitettuun kritiikkiin. On pidetty sivistymättömänä, jos puhuu omasta näkökulmastaan. Talonpoika yksin pellolla hääriessään on seurustellut enemmän luonnon kuin ihmisten kanssa. Luonnon kanssa on ollut pärjättävä. Tällöin asenne on kulttuuriperäisesti subjektilähtöinen. Talonpoikaista suoruutta, periaatteellisuutta, itseohjautuvuutta, itsenäisyyttä ja omaperäisyyttä voi kritisoida epäsosiaalisuutena tai subjektiivisuutena, pohtimatta mistä ominaisuudet ovat peräisin. Luontoyhteydessä toimiessaan talonpojalla ei ole ollut muuta vaihtoehtoa kuin toimia subjektina. Ti-

lanteissa selviytymiskeinot on pitänyt keksiä itse. Toisaalta myös käytännön tilanteissa tiedon toimintaan saattaminen estyy, ellei tiedolla ja subjektilla ole suhdetta. Tutkimuspolulla tiedolla ja subjektilla on suhde, joka mahdollistaa tutkimukseni.

Juuri subjektiivisesta näkökulmasta voi nähdä enemmän, koska näkökulmaan vaikuttavat tekijät voi ottaa huomioon. Tutkimuksen luotettavuus lisääntyy, kun arvoperusteita ei piilotella, merkitykselliset kokemukset paljastuvat ja näkemystä prosessista on mahdollisuus syventää. Daston & Galison (2007) muistuttavat, että objektiivisuus ei ole historiassa aina luonnehtinut tiedettä, eikä se ole välttämätöntä tieteelle (Kuukkanen 2010, 66).

Matematiikkatieteen luonnehdinnoissa korostuu objektiivisuus, jopa absoluuttisten totuuksien ihanne. Tutkimuspoluillani olen osoittanut, että absoluuttisia tai objektiivisiä totuuksia ei ole olemassa arvotodellisuudessa, vaan tutkimuksessa ja tutkimustuloksissa on tunnistettavissa yksilölähtöisiä vahvuuksia, aikakauden tieteellisen kehitysvaiheen poliittisia merkityksiä ja heijastuksia aikakauden kulttuurisista arvostuksista, jotka selittävät tuolloin totuuksiksi tulkittuja tuloksia. Antiikin filosofit kävivät dialogia luonnon ja jumalien välillä, Descartes kävi dialogia oman mielensä luonnollisen valon ja todellisuuden välillä ja Einsteinin dialogi on aineen ja energian välillä.

Aristoteles kokosi antiikin viisauden, vaikutti keskiajan ajatteluun ja vakuuttaa tieteen lähtökohdissaan vieläkin. Descartes vakuutti epäilyn metodillaan prinsessa Elisabethin Böömin kuninkaan Frederikin esikoistyttären (Descartes 1644): ”Paljastan keinot, joilla ihminen voi toisilta mitään lainaamatta löytää elämänsä ohjaukseen tarvitsemansa tiedon kokonaan itsestään ja hankkia tutkimuksillaan kaikkein kiehtovinta tietämystä, jota inhimillinen järki kykenee omaksumaan” (Yrjönsuuri 2003, 295). Aristoteles loi dynaamisen holistisen maailmankuvan, Descartes uudisti tieteen perusteita matemaattisin kirjaimin ja Einstein loi perustan kvanttifysiikalle. Kunkin maailman malli on rakenteeltaan matemaattinen, mutta ei kuitenkaan täydellinen, vaan paras aikaansa nähden.

Roycen persoonallisuusteoriassa episteemisen tiedonhankinnan tyyleiksi on nimetty rationaalinen, empiirinen ja metaforinen tyyli (Royce & Powell 1983, 133-145). Metaforinen tiedonhankinnan tyyli perustuu symbolisiin tai vertauskuvallisiin kokemuksiin. Omia ideoita todellisuudesta testataan kokemusten universaalisuuteen eli mahdollisimman laajaan yleisyyteen perustuen. Ajattelu perustuu analogian siirrettävyyteen. Ympäristön todellisuutta tutkitaan rinnastuksilla omiin kokemuksiin, mutta usein suuresti yleistäen kokonaisuuden yleispiirteisiin vedoten. Juuri luovat oivallukset ja originellit ideat ovat tyyppillisesti tä-

män dimension ilmenemismuotoja. Päättely on analogista, intuitiivista ja kokonaisvaltaista. Tyylin dominoidessa henkilö on usein sosiaalinen, emotionaalinen, ei perinteinen, puhelias ja visuaalinen (emt.1983, 135-145).

Tiedonhakutyylilläni on yhteys matematiikkaan ja Roycen kuvaamaan metaforiseen tyyliin. Sisäinen kokemus matematiikan järjestelmästä, varmuus ratkaisun oikeellisuudesta, omien ajatteluvirheiden hoksaaminen tai ymmärryksen lisääntyminen 'kaikki liittyy kaikkeen', ovat tuottaneet mielihyvää. Iloa on tuottanut henkilökohtainen kokemus. Seurauksena on ollut taipumus tulkita matematiikkaa, itseä ja koko ympäröivää maailmaa 'matemaattisten silmälasien kautta', mikä tarkoittaa lähinnä filosofista asennetta ja talonpoikaisjärkeä suhteessa todellisuuteen ja matematiikkaan. Tutkimusmetodi on katsomisen tapa, joka kehittyi kokemuksessa. Katsomisen kohteena ovat matematiikan kokemisen ja oppimisen kontekstit. Katsomisen tapaa luonnehtivat havaitsijan subjektityyppi, matematiikkaan liittyvät tekijät ja toiminnan kontekstuaaliset tekijät. Tällöin tutkimuspolun intersubjektiiivisuus on sitä, että lukija voi tiedostaa itsestään tai maailmasta jotakin uutta, jotakin itselleen kuuluvaa, mutta ei välttämättä samanaista.

Armin Hermann (1994) siteeraa Albert Einsteinin sanoja: ”Autoritätsdusel ist der grösste Feind der Wahrheit.” Einstein muistuttaa, että auktoriteettityperys on totuuden suurin vihollinen. Einsteinin tutkijat (Dyson 1997; Maalampi 2006; Padova 2015) korostavat vapautta ja riippumattomuutta Einsteinin luovuuden ja tieteellisten dekonstruktioiden perustana. Vaikka kaikista ei kehity uutta luovia Einsteineja, tärkeää on tukea sen mahdollisuutta, koska omaperäisyydestä uusi alkaa. Keksimisen tukeminen tarkoittaa luopumista yksikäsitteisyyden odotuksesta oppimisen alkumatkalla, jota vaihetta oppivelvollisuuskoulu edustaa.

Tieteellisen tutkimuksen metodit ovat kehittyneet matematiikan perustalta, jolloin yksikäsitteisyys painottuu. Metodologian asiantuntija Vesa Huotari (1995) muistuttaa, että perinteinen metodologinen tutkimus on kiinnittänyt vain marginaalista huomiota tiedeyhteisöjen kommunikaatioon liittyviin ongelmiin. Merkitystä kommunikaatio-ongelmaan on suomalaisen tieteen ohuella tieteen filosofisella traditiolla. Suomessa on tunnistettavissa nousevaa kiinnostusta tutkimusmetodin tieteenfilosofisiin perusteisiin. Esimerkiksi lukion uusissa opetussuunnitelmissa on kaksi pakollista filosofian kurssia, joista toinen on tieteenfilosofia ja toinen etiikkaa.

Monimutkainen kommunikointiongelma on usein metodiperäistä, mikä voi ilmetä kyvyttömyytenä kommunikoida, kyvyttömyytenä ottaa vastaan tai se on it-

sekritiikin tai narsismin muoto. Vuorovaikutusongelmien taustat ovat usein yleisinhimillisiä tunne- tai näkökulmaperustaisia. Tietäminen ja tiedonhankinta on myös tunnetta, jolloin tietäminen tunteena on osa suhdetta todellisuuteen ja matematiikan oppimiseen (Kumpula 2006, 70-113). Kommunikaatioon liittyvät ongelmat näyttävät olevan lähes jokaisen työyhteisön arkipäivää. Useinkaan ei ole aikaa, tarvittavia filosofisia välineitä tai riittävää halua toistensa ymmärtämiseen. Erilaiset yhteisöt ja tieteen koulukunnat eivät useinkaan keskustele ymmärtämisyhteyksiä hakien vaan omaansa puolustaen. Haluan metodillani saada eri kulttuurit keskustelemaan sekä oppimaan itsestään ja toisiltaan.

Subjektiiivinen tarkoituksenmukaisuus on osa tutkijan tai koulussa opettajan johdonmukaista kasvatusfilosofiaa, jolla on intersubjektiiivinen merkitys. Intersubjektiiivisuus tarkoittaa, että lukija ymmärtää tutkijan tekstiä tai koulussa oppilas ymmärtää opettajaa ja päinvastoin. Matematiikkailmiö näyttäytyy subjektiiivisista hahmotustaipumuksista lähtien monina yhteiskuntarakenteisiin kietoutuvina merkitysrakenteina. Tällöin objektiivinen ja subjektiiivinen tarkoituksenmukaisuus suuntautuvat samojen päämäärien edistämiseen – matematiikan yksilöllisen oppimisen edistämiseen.



