

Maria Liuksiala

GAUSSIN–JORDANIN ELIMINOINTIMENETELMÄ

Informaatioteknologian ja viestinnän tiedekunta
Kandidaattitutkielma
Lokakuu 2019

Tiivistelmä

Maria Liuksiala: Gaussin–Jordanin eliminointimenetelmä

Kandidaattitutkielma

Tampereen yliopisto

Matematiikan ja tilastotieteen tutkinto-ohjelma

Lokakuu 2019

Tutkielman tarkoitus on esitellä Gaussin–Jordanin eliminointimenetelmä, jota voi käyttää lineaaristen yhtälöryhmien ratkaisemiseen. Gaussin–Jordanin eliminointimenetelmän lisäksi tutkielmassa käsitellään Gaussin eliminointimenetelmää, joka on myös yksi menetelmä lineaaristen yhtälöryhmien ratkaisuun.

Koska Gaussin eliminointimenetelmällä ja Gaussin–Jordanin eliminointimenetelmällä voidaan ratkaista lineaarisia yhtälöryhmiä, tutkielmassa käsitellään myös lineaarisia yhtälöryhmiä. Lisäksi tutkielmassa käsitellään matriiseja, elementaarisia rivioperaatioita sekä Gaussin eliminointimenetelmän ja Gaussin–Jordanin eliminointimenetelmän ratkaisuja.

Avainsanat: lineaarialgebra, lineaaristen yhtälöryhmien ratkaiseminen, Gaussin eliminointimenetelmä ja Gaussin–Jordanin eliminointimenetelmä.

Tämän julkaisun alkuperäisyys on tarkastettu Turnitin OriginalityCheck -ohjelmalla.

Sisältö

1	Johdanto	4
2	Valmistelevia tarkasteluja	5
2.1	Lineaarinen yhtälöryhmä	5
2.2	Matriisi	6
2.3	Elementaariset rivioperaatiot	7
3	Gaussin eliminointimenetelmä	9
4	Gaussin–Jordanin eliminointimenetelmä	12
5	Ratkaisuista	15
5.1	Ratkaisujen määrä	15
5.2	Homogeeninen yhtälöryhmä	15
	Lähteet	18

1 Johdanto

Lineaaristen yhtälöryhmien ratkaisuun on kehitetty sovelluksia, mutta tässä tutkielmassa käsitellään kahta tapaa ratkaista lineaarinen yhtälöryhmä käsin.

Tutkielman ensimmäisessä luvussa esitellään tutkielman aiheen kannalta relevantteja asioita. Ensimmäisessä luvussa tarkastellaan lineaarisia yhtälöryhmiä, matriiseja sekä elementaarisia rivioperaatioita. Toisessa luvussa käsitellään Gaussin eliminointimenetelmää ja kolmannessa luvussa käsitellään Gaussin–Jordanin eliminointimenetelmää. Gaussin eliminointimenetelmällä ja Gaussin–Jordanin eliminointimenetelmällä voidaan ratkaista lineaarisia yhtälöryhmiä.

Viimeisessä luvussa tutkitaan Gaussin eliminointimenetelmän ja Gaussin–Jordanin eliminointimenetelmän ratkaisuja. Keskeiset asiat viimeisessä luvussa ovat porrasmatriisin tulkinta sekä homogeeninen yhtälöryhmä.

Tutkielman lukijalta oletetaan lineaarialgebran alkeiden osaamista. Lukijan oletetaan hallitsevan yhtälöryhmien ratkaisemisen. Lisäksi lukijalta odotetaan tietämystä matriisilaskennasta.

Päälähdeteoksina tutkielmassa käytetään Antonin ja Rorresin teosta *Elementary Linear Algebra: Applications Version* sekä Falvon ja Larsonin teosta *Elementary Linear Algebra*. Lisäksi tutkielmassa käytetään lähteenä Anthonyn ja Harveyn teosta *Linear Algebra: Concepts and Methods*.

2 Valmistelevia tarkasteluja

Tässä luvussa esitellään tutkielman aiheen kannalta oleellisia määritelmiä sekä joitakin havainnollistavia esimerkkejä. Ensimmäisessä alaluvussa käsitellään lineaarisia yhtälöryhmiä, toisessa alaluvussa matriiseja ja viimeisessä alaluvussa elementaarisia rivioperaatioita.

2.1 Lineaarinen yhtälöryhmä

Lineaarinen yhtälöryhmä on tutkielman kannalta erittäin olennainen käsite, sillä sekä Gaussin elimintointimenetelmää että Gaussin–Jordanin eliminointimenetelmää voidaan käyttää lineaarisen yhtälöryhmän ratkaisemiseen.

Määritelmä 2.1. Olkoot x_1, x_2, \dots, x_n muuttujia. *Lineaarinen yhtälö*, jolla on n muuttujaa, on muotoa $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$ oleva yhtälö, jossa kertoimet a_1, a_2, \dots, a_n sekä vakio b ovat reaalityyppisiä lukuja. Luku a_1 on johtava kerroin ja x_1 on johtava muuttuja. [3, s. 2].

Määritelmä 2.2. (Vrt. [3, s. 4].) *Lineaarinen yhtälöryhmä* on yhtälöryhmä, joka on muotoa

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

missä a_{ij} ovat kertoimia, x_1, \dots, x_n muuttujia ja b_1, \dots, b_m vakioita.

Esimerkki 2.3. Yhtälöryhmä

$$\begin{cases} -x + y - 3z = 6 \\ 3x - 2y + 10z = -10 \\ -2x + 3y - 5z = 9 \end{cases}$$

on lineaarinen yhtälöryhmä, jossa tuntemattomia muuttujia on merkitty kirjaimilla x, y ja z . Tuntemattomia muuttujia voisi merkitä myös x_1, x_2 ja x_3 .

2.2 Matriisi

Sekä Gaussin eliminointimenetelmässä että Gaussin–Jordanin eliminointimenetelmässä lineaarinen yhtälöryhmä muutetaan matriisimuotoon. Siis myös matriisin käsite liittyy olennaisesti tutkielman aiheeseen.

Määritelmä 2.4. Olkoot m ja n positiivisia kokonaislukuja. *Matriisi* on muotoa

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

oleva suorakulmainen taulukko, jossa jokainen alkio a_{ij} on reaaliluku. Kokoa $m \times n$ olevalla matriisilla on m kappaletta vaakasuoria rivejä ja n kappaletta pystysuoria sarakkeita. [3, s. 14].

Esimerkki 2.5. Matriisi

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

on kokoa 3×3 .

Määritelmä 2.6. Lineaarinen yhtälöryhmä

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

voidaan kirjoittaa matriisimuodossa:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}.$$

[2, s. 6].

Esimerkki 2.7. Lineaarisen yhtälöryhmän

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 = 6 \\ 3x_1 - 2x_2 = 8 \end{cases}$$

matriisimuoto on

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 6 \\ 3 & -2 & 8 \end{bmatrix}.$$

2.3 Elementaariset rivioperaatiot

Elementaarisia rivioperaatioita tarvitaan niin Gaussin eliminointimenetelmässä kuin Gaussin–Jordanin eliminointimenetelmässä, joten tässä alaluvussa käsitellään elementaarisia rivioperaatioita.

Määritelmä 2.8. *Elementaarisia rivioperaatioita ovat:*

1. Kahden rivin paikan vaihto keskenään.
2. Jonkin rivin monikerran lisääminen johonkin toiseen riviin.
3. Rivin kertominen nolasta eroavalla vakiolla.

[3, s. 16].

Elementaarisille rivioperaatioille voidaan käyttää seuraavia lyhennysmerkintöjä:

- $R_i \leftrightarrow R_j$: vaihdetaan rivien i ja j paikat keskenään.
- $R_i + bR_j \rightarrow R_i$: lisätään luvulla b kerrottu rivi j riviin i .
- aR_i : kerrotaan rivi i nolasta eroavalla luvulla a .

(vrt. [3, s. 16]).

Esimerkki 2.9. Annetaan elementaarisista rivioperaatioista esimerkki:

$$\begin{bmatrix} -3 & 5 & -22 \\ 3 & 4 & 4 \\ 1 & -2 & 8 \end{bmatrix} R_1 + 3R_3 \rightarrow R_1 \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 4 \\ 1 & -2 & 8 \end{bmatrix} R_2 \leftrightarrow R_3$$
$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 8 \\ 3 & 4 & 4 \end{bmatrix} \frac{1}{2}R_2 \rightarrow R_2 \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ \frac{1}{2} & -1 & 4 \\ 3 & 4 & 4 \end{bmatrix}.$$

Määritelmä 2.10. Kaksi matriisia on *riviekvivalentit*, jos toinen näistä kahdesta matriisista saadaan muokkaamalla toista näistä kahdesta matriisista äärellisellä määrällä elementtaarisia rivioperaatioita [3, s. 16].

Esimerkki 2.11. Edellisen esimerkin matriisit

$$\begin{bmatrix} -3 & 5 & -22 \\ 3 & 4 & 4 \\ 1 & -2 & 8 \end{bmatrix}$$

ja

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ \frac{1}{2} & -1 & 4 \\ 3 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

ovat riviekvivalentit.

3 Gaussin eliminointimenetelmä

Tässä luvussa käsitellään Gaussin eliminointimenetelmää, joka on yksi menetelmä lineaaristen yhtälöryhmien ratkaisuun. Tavoitteena Gaussin eliminointimenetelmässä on muuttaa lineaarista yhtälöryhmää vastaava matriisi elementaarisia rivioperaatioita käyttäen porrasmatriisin muotoon, josta lineaarisen yhtälöryhmän ratkaisu saadaan, kun käytetään takaisinsijoittamista (vrt. [2, s. 11]).

Määritelmä 3.1. Matriisi on *porrasmatriisi*, jos se toteuttaa seuraavat ehdot:

1. Jokaisella rivillä ensimmäinen nollasta poikkeava alkio on 1, jota sanotaan johtavaksi alkioksi.
2. Mahdolliset pelkästään nollia sisältävät rivit ovat matriisin alimpia rivejä.
3. Kahdesta rivistä, jotka eivät koostu pelkästään nollista, alemmalla rivillä oleva johtava alkio on oikeammalla kuin ylemmällä rivillä oleva johtava alkio.

[2, s. 11].

Esimerkki 3.2. Matriisi

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 7 & 17 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

on porrasmatriisin muodossa.

Gaussin eliminaatio etenee vaihe vaiheelta seuraavasti:

- 1. askel: paikannetaan matriisissa vasemmanpuoleisin sarake, joka ei koostu pelkästään nollista.
- 2. askel: jos tämän paikannetun sarakkeen ylin alkio on nolla, siirretään ylimmän ja toiseksi ylimmän rivin paikkoja keskenään.
- 3. askel: jos tämä paikannetun sarakkeen ylin alkio on a , kerrotaan rivi luvulla $\frac{1}{a}$, jotta saadaan riville johtava ykkönen.
- 4. askel: lisätään ylimmän rivin monikertoja alempiin riveihin niin, että kaikki sarakkeen alkiot johtavan ykkösen alapuolella saadaan nolliksi.

- 5. askel: unohdetaan matriisin ylin rivi ja aloitetaan uudelleen ensimmäisestä askeleesta. Jatketaan kunnes koko matriisi on porrasmuodossa.
- 6. askel: aloitetaan matriisin viimeisestä rivistä, joka ei sisällä pelkästään nollia. Lisätään jokaisen rivin monikerta ylempään riviin, jotta saadaan jokaisen johtavan ykkösen yllä oleva alkio nolllaksi.

[2, s. 14-15].

Esimerkki 3.3. Ratkaistaan Gaussin eliminointimenetelmällä seuraava lineaarinen yhtälöryhmä:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 3 \\ 3x_1 - x_3 = 0. \end{cases}$$

Muutetaan yllä oleva lineaarinen yhtälöryhmä sitä vastaavaksi matriisiksi:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Seuraavaksi saatetaan kyseinen matriisi elementaaristen rivioperaatioiden avulla porrasmatriisiin muotoon:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 - 2R_1 \rightarrow R_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -3 & -1 & -9 \\ 3 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 - 3R_1 \rightarrow R_3}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -3 & -1 & -9 \\ 0 & -3 & -4 & -18 \end{bmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{3}R_2 \rightarrow R_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & 3 \\ 0 & -3 & -4 & -18 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 + 3R_2 \rightarrow R_3}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & 3 \\ 0 & 0 & -3 & -9 \end{bmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{3}R_3 \rightarrow R_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 - \frac{1}{3}R_3 \rightarrow R_2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 - R_2 \rightarrow R_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Nyt tämä viimeisin matriisi on halutussa porrasmatriisin muodossa ja sitä vastaa seuraavaa yhtälöryhmä:

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 4 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = 3. \end{cases}$$

Takaisinsijoitusta käyttäen saadaan lineaarisen yhtälöryhmän ratkaisuksi:

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = 3. \end{cases}$$

4 Gaussin–Jordanin eliminointimenetelmä

Tässä luvussa käsitellään Gaussin–Jordanin eliminointimenetelmää, joka on siis myös yksi menetelmä lineaaristen yhtälöryhmien ratkaisuun.

Määritelmä 4.1. Matriisi on *reduoitu porrasmatriisi*, jos se toteuttaa seuraavat ehdot:

1. Matriisi on porrasmatriisi.
2. Jokainen matriisin sarake, jolla on johtava alkio, sisältää muuten pelkästään nollia.

[2, s. 11].

Esimerkki 4.2. Matriisi

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

on redusoidun porrasmatriisin muodossa.

Kun Gaussin–Jordanin eliminointimenetelmää käytetään lineaarisen yhtälöryhmän ratkaisemiseen, ensin lineaarinen yhtälöryhmä muutetaan sitä vastaavaksi matriisiksi. Sen jälkeen tarkoituksena on saattaa matriisi elementaarisia rivioperaatioita käyttämällä redusoidun porrasmatriisin muotoon, josta ratkaisut pystytään lukemaan. Gaussin–Jordanin eliminointimenetelmä koostuu kahdesta osasta:

1. Matriisissa johtavien ykkösten alla olevat alkioit muokataan elementaaristen rivioperaatioiden avulla nolliksi.
2. Matriisissa johtavien ykkösten yllä olevat alkioit muokataan elementaaristen rivioperaatioiden avulla nolliksi.

(vrt. [2, s. 15]).

Esimerkki 4.3. Ratkaistaan Gaussin–Jordanin eliminointimenetelmällä seuraava lineaarinen yhtälöryhmä:

$$\begin{cases} x + y + 2z = 8 \\ -1x - 2y + 3z = 1 \\ 3x + -7y + 4z = 10. \end{cases}$$

Yllä olevaa lineaarista yhtälöryhmää vastaa seuraava matriisi:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 8 \\ -1 & -2 & 3 & 1 \\ 3 & -7 & 4 & 10 \end{bmatrix}.$$

Saatetaan matriisi seuraavaksi elementaarisia rivioperaatioita käyttämällä redusoidun porrasmatriisin muotoon:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 8 \\ -1 & -2 & 3 & 1 \\ 3 & -7 & 4 & 10 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 + R_1 \rightarrow R_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & -1 & 5 & 9 \\ 3 & -7 & 4 & 10 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 - 3R_1 \rightarrow R_3} \\ & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & -1 & 5 & 9 \\ 0 & -10 & -2 & -14 \end{bmatrix} \xrightarrow{-R_2 \rightarrow R_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & -5 & -9 \\ 0 & -10 & -2 & -14 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 + 10R_2 \rightarrow R_3} \\ & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & -5 & -9 \\ 0 & 0 & -52 & -104 \end{bmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{52}R_3 \rightarrow R_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & -5 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 + 5R_3 \rightarrow R_2} \\ & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 - 2R_3 \rightarrow R_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 - R_2 \rightarrow R_1} \\ & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Nyt tämä viimeisin matriisi on halutussa redusoidun porrasmatriisin muodossa ja siitä nähdään suoraan, että lineaarisen yhtälöryhmän ratkaisu on:

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \\ z = 2. \end{cases}$$

Esimerkki 4.4. Ratkaistaan Gaussin–Jordanin eliminointimenetelmällä seuraava lineaarinen yhtälöryhmä:

$$\begin{cases} 2x + 2y + 2z = 0 \\ -2x + 5y + 2z = 1 \\ 8x + y + 4z = -1. \end{cases}$$

Muutetaan yllä oleva lineaarinen yhtälöryhmä sitä vastaavaksi matriisiksi ja aletaan muokkaamaan sitä elementaarisilla rivioperaatioilla:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 0 \\ -2 & 5 & 2 & 1 \\ 8 & 1 & 4 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2}R_1 \rightarrow R_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 5 & 2 & 1 \\ 8 & 1 & 4 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 + 2R_1 \rightarrow R_2} \\ & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 4 & 1 \\ 8 & 1 & 4 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 - 8R_1 \rightarrow R_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 4 & 1 \\ 0 & -7 & -4 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{7}R_2 \rightarrow R_2} \\ & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{4}{7} & \frac{1}{7} \\ 0 & -7 & -4 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 + 7R_2 \rightarrow R_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{4}{7} & \frac{1}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 - R_2 \rightarrow R_1} \\ & \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{7} & -\frac{1}{7} \\ 0 & 1 & \frac{4}{7} & \frac{1}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Nyt tätä viimeisintä matriisia vastaa seuraava lineaarinen yhtälöryhmä:

$$\begin{cases} x + \frac{3}{7}z = -\frac{1}{7} \\ y + \frac{4}{7}z = \frac{1}{7}. \end{cases}$$

Kun valitaan parametriksi $s = z$, saadaan lineaarisen yhtälöryhmän ratkaisuksi:

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{7} - \frac{3}{7}s \\ y = \frac{1}{7} - \frac{4}{7}s \\ z = s. \end{cases}$$

Kun mietitään parasta menetelmää lineaaristen yhtälöryhmien ratkaisuun, on tärkeä erottaa toisistaan isot tietokoneella laskettavat lineaariset yhtälöryhmät ja pienet käsin laskettavissa olevat lineaariset yhtälöryhmät. On olemassa paljon sovelluksia, jotka pystyvät ratkaisemaan lineaarisia yhtälöryhmiä, joissa on tuhansia tai jopa miljoonia tuntemattomia muuttujia. Ison lineaarisen yhtälöryhmän ratkaiseminen vaatii erityistä tekniikkaa muistin koon, virheiden, ratkaisuaian ja monien muiden tekijöiden käsittelemiseen. Tällaista tekniikkaa käsitellään numeerisessa analyysissä enemmän. Kuitenkin lähes kaikki suurten lineaaristen yhtälöryhmien ratkaisuun käytettävät menetelmät perustuvat siihen, mitä tässä tutkielmassa käsitellään. [2, s. 11].

5 Ratkaisuiista

Tässä luvussa käsitellään Gaussin eliminointimenetelmän ja Gaussin–Jordanin eliminointimenetelmän ratkaisuja.

5.1 Ratkaisujen määrä

Porrasmatriisia voidaan tulkita seuraavasti:

- Jos jokin lineaarista yhtälöryhmää vastaavan matriisin viimeisistä riveistä on muotoa $[0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1]$, lineaarisella yhtälöryhmällä ei ole ratkaisua.
- Jos lineaarista yhtälöryhmää vastaavan matriisin viimeinen rivi on muotoa $[0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 0]$, viimeinen rivi voidaan jättää pois matriisista. Tällöin matriisin joltakin sarakkeelta puuttuu johtava alkio, jolloin tätä saraketta vastaava muuttuja on vapaa. Jokaisen vapaan muuttujan arvo voidaan valita vapaasti. Tällöin lineaarisella yhtälöryhmällä on ääretön määrä ratkaisuja.
- Jos lineaarista yhtälöryhmää vastaavassa porrasmatriisissa on jokaisessa sarakkeessa johtava alkio kaikkein oikeinpuolisinta saraketta lukuunottamatta, lineaarisen yhtälöryhmän ratkaisu on yksikäsitteinen.

[2, s. 12-13].

Määritelmä 5.1. Jos lineaarisella yhtälöryhmällä on ääretön määrä ratkaisuja, lineaarisen yhtälöryhmän *yleinen ratkaisu* on parametriyhtälöiden joukko, josta saadaan kaikki ratkaisut asettamalla parametreille numeeriset arvot. [2, s. 13].

5.2 Homogeeninen yhtälöryhmä

Määritelmä 5.2. Jos lineaarisen yhtälöryhmän kaikki vakiot ovat nolliä, yhtälöryhmää sanotaan *homogeeniseksi*. Tällöin yhtälöryhmä on muotoa:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = 0, \end{cases}$$

missä a_{ij} ovat kertoimia ja x_1, \dots, x_n muuttujia. [2, s. 17].

Jokaisella homogeenisella yhtälöryhmällä on vähintään *triviaali ratkaisu*: $x_1 = 0, x_2 = 0, \dots, x_n = 0$. Koska homogeenisellä yhtälöryhmällä on aina triviaali ratkaisu, on vain kaksi mahdollisuutta:

- homogeenisellä yhtälöryhmällä on vain triviaali ratkaisu.
- homogeenisellä yhtälöryhmällä on triviaalin ratkaisun lisäksi ääretön määrä ratkaisuja.

[2, s. 17].

Lause 5.3. *Homogeenisella yhtälöryhmällä on ääretön määrä ratkaisuja, jos yhtälöryhmässä on vähemmän yhtälöitä m kuin muuttujia n . [3, s. 25].*

Todistus. (vrt. [1, s. 76]). Homogeenisellä yhtälöryhmällä on ainakin triviaali ratkaisu. Siis homogeenisellä yhtälöryhmällä on joko yksi tai äärettömän monta ratkaisua. Oletuksen mukaan homogeenistä yhtälöryhmää vastaavassa matriisissa on enemmän sarakkeita kuin rivejä. Toisaalta homogeenistä yhtälöryhmää vastaavassa porrasmuodossa olevassa matriisissa jokaisella rivillä on enintään yksi johtava alkio. Siis homogeenistä yhtälöryhmää vastaavassa porrasmuodossa olevassa matriisissa on ainakin yksi sarake, jossa ei ole johtavaa alkioita. Siis löytyy vapaa muuttuja, joten homogeenisellä yhtälöryhmällä on äärettömän monta ratkaisua. \square

Esimerkki 5.4. Ratkaistaan seuraava homogeeninen yhtälöryhmä:

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 - 3x_3 = 0 \\ 3x_1 + -2x_2 + 10x_3 = 0 \\ -2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 0. \end{cases}$$

Yllä olevaa homogeenistä yhtälöryhmää vastaa matriisi:

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & -3 & 0 \\ 3 & -2 & 10 & 0 \\ -2 & 3 & -5 & 0 \end{bmatrix}.$$

Käytetään Gaussin–Jordanin eliminointimenetelmää tähän matriisiin:

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & -3 & 0 \\ 3 & -2 & 10 & 0 \\ -2 & 3 & -5 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{-R_1 \rightarrow R_1} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & 10 & 0 \\ -2 & 3 & -5 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 - 3R_1 \rightarrow R_2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & -5 & 0 \end{bmatrix} R_3 + 2R_1 \rightarrow R_3 \quad \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} R_3 - R_2 \rightarrow R_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} R_1 + R_2 \rightarrow R_1 \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Nyt tätä viimeisintä matriisiä vastaa yhtälöryhmä:

$$\begin{cases} x_1 + 4x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

Valitaan parametriksi $s = x_3$, jolloin homogeenisen yhtälöryhmän ratkaisuksi saadaan:

$$\begin{cases} x_1 = -4s \\ x_2 = -s \\ x_3 = s. \end{cases}$$

Lähteet

- [1] Anthony, M. & Harvey, M. *Linear Algebra: Concepts and Methods*. Cambridge University Press, Yhdistynyt kuningaskunta. 2012.
- [2] Anton, H. & Rorres, C. *Elementary Linear Algebra: Applications Version, 11th ed.* Wiley, Yhdysvallat. 2013.
- [3] Falvo, D. C. & Larson, R. *Elementary Linear Algebra, 6th ed.* Houghton Mifflin Harcourt Publishing Company, Yhdysvallat. 2009.