Emma Lehtovaara

LIGHTS OUT -PELIN RATKAISEMINEN PSEUDOINVERSSIN AVULLA

Tekniikan ja luonnontieteiden tiedekunta
Kandidaatintyö
Syyskuu 2019

TIIVISTELMÄ

Emma Lehtovaara: Lights Out -pelin ratkaiseminen pseudoinverssin avulla
Kandidaatintyö
Tampereen yliopisto
Teknis-luonnontieteellinen
Syyskuu 2019

Tässä kandidaatintyössä esitetään 25 ruudun Lights Out -peli lineaarisena systeeminä, joka koostuu vieruspistematriisista A, tilannevektorista $\mathbf{p}$ ja strategiavektorista $\mathbf{x}$. Työssä tarkastellaan pelin ratkeavuutta lineaarialgebran keinoin ja esitetään yleinen ratkaisutapa ratkeaviin alkutilanteisiin. Yleinen ratkaisutapa perustuu vieruspistematriisin A pseudoinverssin A^+ muodostamiseen. Tämän lisäksi esitellään ratkeavuustesti, jonka avulla voidaan selvittää minkä tahansa alkutilanteen ratkeavuus. Näihin tavoitteisiin päästään selvittämällä vieruspistematriisin A aste ja lineaarisen systeemin ratkaisujen lukumäärä. Työn lukijalta oletetaan lineaarialgebran, matriisilaskennan, algebran ja graafiteorian perusteiden tuntemus. Edellä esiteltyjä tuloksia sovelletaan vaikeimman tapauksen minimisiirtojen selvittämiseen.

Avainsanat: Lights Out -peli, vieruspistematriisi, pseudoinverssi

SISÄLLYSLUETTELO

1 JOHDANTO

Lights Out -peli on Tiger Toysin vuonna 1995 julkaisema peli [7]. Peli koostuu 25 ruudun ruudukosta, ja jokaisessa ruudussa on lamppu. Lamppujen valojen sammuminen ja syttyminen riippuvat toisistaan: ruudun klikkaaminen vaihtaa myös ruudun horisontaalisesti ja vertikaalisesti viereisten ruutujen valon. Tavoitteena on sammuttaa kaikki valot mahdollisimman vähällä määrällä klikkauksia.

Tässä työssä täydennetään Jaap Scherphuisin ylläpitämän sivuston sisältöä 25-ruutuisen Lights Out -pelin osalta. Työn tavoitteena on 25-ruutuisen Lights Out -pelin tarkka matemaattinen määrittely ja pelin matriisiesityksen esitteleminen. Työn päätavoite on Lights Out -pelin ratkeavuuden täsmällinen käsittely ja ratkaisujen lukumäärän määrittäminen sekä yleisen ratkaisutavan esittäminen. Näihin tavoitteisiin päästään lineaarialgebran keinoin.

Työn ensimmäisessä luvussa kerrotaan tarvittavia esitietoja sekä esitellään Lights Out -pelin matemaattinen määrittely. Luvussa esitellään vieruspistematriisin määritelmä sekä myöhemmin työssä tarvittavia lineaarialgebran määritelmiä ja lauseita. Lukijalta vaaditaan lineaarialgebran perusteiden tunteminen, johon sisältyvät muun muassa käsitteet rivi- ja sarakeavaruus, avaruuden kanta ja dimensio, lineaarisen systeemin ratkaiseminen ja lineaarinen riippumattomuus. Lisäksi lukijalta odotetaan algebran perusteiden tunteminen, johon sisältyvät muun muassa käsitteet kunta, laskutoimitus sekä käänteis- ja neutraalialkio.

Työn toinen luku käsittelee Lights Out -pelin ratkeavuutta. Luvussa esitellään yksi työn tärkeimmistä käsitteistä: hiljaiset rivit. Luvussa esitellään myös vieruspistematriisin A aste, jonka perusteella tarkastellaan ensimmäisessä luvussa esitellyn matriisiyhtälön ratkaisujen lukumäärää. Luvun lopussa esitellään pseudoinverssi, jonka avulla Lights Out -peli voidaan ratkaista, mikäli alkutilanne on ratkeava. Luvussa esitellään myös ratkeavuustesti ja tulkintoja pseudoinverssistä. Työn kolmas luku käsittelee vaikeimman tapauksen minimisiirtoja.

1.1 Matemaattisia käsitteitä ja määritelmiä

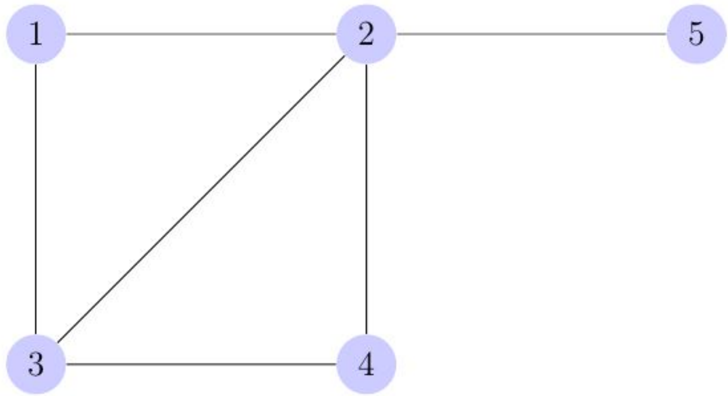
Esitellään Lights Out -pelin matemaattisessa tarkastelussa tarvittavat käsitteet, lauseet ja määritelmät. Pelin matemaattinen tausta perustuu pitkälti vieruspistematriisin tulkintaan ja käsittelyyn, joten esitellään ensimmäisenä vieruspistematriisin määritelmä.

1.1.1 Vieruspistematriisi

Määritellään Lights Out -pelin matemaattisessa käsittelyssä tarvittava käsite vieruspistematriisi.

Määritelmä 1.1. (Vieruspistematriisi) Olkoon G graafi, jossa pisteiden joukko on $V(G) = \{1, ..., n\}$ ja viivojen joukko on $E(G) = \{e_1, ..., e_m\}$. Indeksoidaan vieruspistematriisin $\mathcal{A}$ rivit ja sarakkeet graafin G pisteiden joukon $V(G)$ mukaan. Tällöin $n \times n$ vieruspistematriisin $\mathcal{A}$ alkio a_{ij} on 1, jos pisteet i ja j ovat vieruspisteet. Jos pisteet eivät ole vieruspisteitä, erityisesti jos $i = j$, alkio $a_{ij} = 0$, jos graafissa ei ole silmukoita. [1]

Esimerkki 1.1. *Esitetään kuvan 1.1 graafi määritelmän 1.1 mukaisena vieruspistematriisina.*



Kuva 1.1. *Viiden pisteen ja kuuden viivan graafi.*

Kuvan 1.1 graafi vieruspistematriisina on

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{1.1}$$

Esitellään seuraavaksi kunta, jossa Lights Out -pelin ratkaisemiseen tarvittavat laskutoimitukset suoritetaan. Lights Out -pelin matriisiesityksessä sallittavien alkioiden joukko on $\{0, 1\}$, joten laskutoimitukset suoritetaan kunnassa $GF(2)$. Kuvassa 1.2 on esitelty kunnan $GF(2)$ yhteen- ja kertolaskutaulukot.

$+$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	0	1

Kuva 1.2. *Kunnan $GF(2)$ yhteen- ja kertolaskutaulukot.*

Kunnan $GF(2)$ yhteenlaskun neutraalialkio on $e^+ = 0$ ja kertolaskun neutraalialkio on $e^\times = 1$. Laskutoimitukset suoritetaan kunnassa $GF(2)$ siitä syystä, että pelin lampuilla on vain kaksi mahdollista tilaa, ja siten laskutoimitukset on suoritettava $\mod 2$.

1.1.2 Lineaarialgebraa

Tässä luvussa kootaan yhteen työn kannalta oleellisimmat käsitteet ja tulokset, ja lukijan oletetaan tuntevan lineaarialgebran perusteet. Tarvittaessa lineaarialgebran perusteisiin voi tutustua teoksessa [4]. Kaikki tässä luvussa mainitut tulokset käyttävät kunnan laskusääntöjä, jotka on esitelty luvussa 1.1.

Jotta työssä voitaisiin selvittää Lights Out -pelistä muodostetun matriisiyhtälön ratkaisujen lukumäärä ja siten päästä käsiksi itse ratkaisuihin, tärkeä käsite on matriisin aste $\operatorname{rank}(\mathcal{A})$.

Määritelmä 1.2. Matriisin $\mathcal{A}$ aste $\operatorname{rank}(\mathcal{A})$ on matriisin $\mathcal{A}$ riviavaruuden $\dim(row(\mathcal{A}))$ ja sarakeavaruuden $\dim(col(\mathcal{A}))$ dimensio

$$\operatorname{rank}(\mathcal{A}) = \dim(row(\mathcal{A})) = \dim(col(\mathcal{A})).$$

Tarkastellaan seuraavaksi lineearista systeemiä $\mathcal{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ja todistetaan hyödyllinen lause lineaarisen systeemin ratkaisujen lukumäärän tarkastelemiseen.

Lause 1.2. *Olkoon $\mathcal{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ lineaarinen systeemi. Systeemillä on ainakin yksi ratkaisu, jos ja vain jos matriisilla A ja laajennetulla matriisilla $[\mathcal{A} \mid \mathbf{b}]$ on sama aste [4], eli*

$$\mathrm{rank}(\mathcal{A}) = \mathrm{rank}(\mathcal{A} \mid \mathbf{b}).$$

Todistus. Todistetaan ensin, että mikäli $\mathrm{rank}(\mathcal{A}) = \mathrm{rank}(\mathcal{A} \mid \mathbf{b})$, lineaarisella yhtälöryhmällä on ainakin yksi ratkaisu. Matrsiin aste on määritelmän 1.2 perusteella matriisin sarakeavaruuden dimensio, ja sarakeavaruuden dimensio on matriisin lineaarisesti riippumattomien vektorien lukumäärä. Jotta $\mathrm{rank}(\mathcal{A}) = \mathrm{rank}(\mathcal{A} \mid \mathbf{b})$, vektorin $\mathbf{b}$ on oltava matriisin $\mathcal{A}$ sarakevektorien kanssa lineaarisesti riippuva, eli se voidaan esittää matriisin $\mathcal{A}$ sarakevektorien lineaarikombinaationa. Täten systeemillä $\mathcal{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ on ainakin yksi ratkaisu.

Todistetaan seuraavaksi, että mikäli lineaarisella systeemillä $\mathcal{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ on ainakin yksi ratkaisu, $\mathrm{rank}(\mathcal{A}) = \mathrm{rank}(\mathcal{A} \mid \mathbf{b}))$. Jos lineaarisella systeemillä on ainakin yksi ratkaisu, vektori $\mathbf{b}$ voidaan esittää matriisin $\mathcal{A}$ sarakevektorien lineaarikombinaationa. Vektori $\mathbf{b}$ on siis lineaarisesti riippuva matriisin $\mathcal{A}$ sarakevektorien kanssa. Tästä seuraa se, että matriisin $\mathcal{A}$ aste ei muutu, vaikka se yhdistettäsiin vektorin $\mathbf{b}$ kanssa. $\square$

Tarkastellaan seuraavaksi matriisin determinanttia ja todistetaan hyödyllinen determinantin ja sarakevektorien välinen yhteys.

Lause 1.3. *Olkoon $\mathcal{A}$ $n \times n$ -neliömatriisi. Jos jotkin kaksi matriisin $\mathcal{A}$ sarakevektoria ovat samat, silloin $\det(\mathcal{A}) = 0$. [4]*

Todistus. Oletetaan, että jokaiselle reaaliluvulle x on voimassa

$$\begin{aligned} x &= -x \\ \Rightarrow x &= 0. \end{aligned}$$

Oletetaan yleisesti tunnetuksi determinantin ominaisuudeksi se, että kahden matriisin $\mathcal{A}$ sarakkeen vaihtaminen keskenään vaihtaa determinantin etumerkin. Jos vaihdetaan keskenään kaksi samanlaista saraketta, determinantin merkki vaihtuu, mutta determinantti säilyy samana, sillä vaihdetut rivit ovat samanlaiset. Täten on siis oltava

$$\begin{aligned} \det(\mathcal{A}) &= -\det(\mathcal{A}) \\ \Rightarrow \det(\mathcal{A}) &= 0. \quad \square \end{aligned}$$

Lineaarisen systeemin ratkaisemiseen voidaan käyttää käänteismatriisia. Määritellään matriisin singularisuus käänteismatriisin olemassa olon tarkastelua varten.

Määritelmä 1.3. Neliömatriisi $\mathcal{A}_{n\times n}$ on ei-singulaarinen, jos $\det \mathcal{A} \neq 0$. Jos matriisi $\mathcal{A}$ on ei-singulaarinen, matriisilla $\mathcal{A}$ on olemassa käänteismatriisi $\mathcal{A}^{-1}$, jolle on voimassa

$$\mathcal{A}^{-1}\mathcal{A} = \mathcal{A}\mathcal{A}^{-1} = I_{n\times n}.[6] \tag{1.2}$$

Esitellään seuraavaksi matriisiyhtälöiden ratkaisemisessa tarpeelliset rivioperaatiot.

Määritelmä 1.4. Rivioperaatiot ovat matriisille $\mathcal{A}$ tehtäviä aritmeettisia operaatioita, jotka eivät muuta lineaarisen systeemin $\mathcal{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ratkaisuja. Tällaisia operaatioita ovat:

1. Rivin kertominen luvulla a, kun $a \neq 0$.
2. Kahden rivin vaihtaminen keskenään.
3. Rivin $\mathcal{A}_n$ korvaaminen sen itsensä ja toisen rivin $\mathcal{A}_m$ summalla. [6]

Tarkastellaan seuraavaksi matriisin $\mathcal{A}$ asteen ja nolla-avaruuden dimension yhteyttä.

Määritelmä 1.5. (Nolla-avaruus) Olkoon $T : U \to V$ lineaarikuvaus vektoriavaruudelta U vektoriavaruudelle V. Lineaarikuvauksen T nolla-avaruus on määritelty seuraavasti:

$$N(T) = \{u \in U : T(u) = 0_V\}. \tag{1.3}$$

Nolla-avaruutta kutsutaan myös lineaarikuvauksen ytimeksi $Ker(T)$. [4]

Lause 1.4. *(Dimensiolause) Olkoon $\mathcal{A}$ $m \times n$ -matriisi ja $N(\mathcal{A})$ sen nolla-avaruuden dimensio. Matriisin $\mathcal{A}$ asteelle ja nolla-avaruuden dimensiolle on voimassa*

$$\mathrm{rank}(\mathcal{A}) + N(\mathcal{A}) = \dim(\mathcal{A}).[5]$$

Todistus. Olkoon $\mathcal{A}$ $m \times n$ -matriisi, jonka sarakeavaruuden dimensio on $\dim(\mathcal{A}) = n$. Matriisin asteen määritelmän 1.2 perusteella matriisin $\mathcal{A}$ aste $\mathrm{rank}(\mathcal{A})$ on sen lineaarisesti riippumattomien sarakkeiden lukumäärä. Nolla-avaruuden määritelmän 1.5 perusteella nolla-avaruuden dimensio on yhtä suuri kuin matriisin $\mathcal{A}$ vapaiden muuttujien lukumäärä $N(\mathcal{A}) = n - \mathrm{rank}(\mathcal{A})$. Täten

$$\mathrm{rank}(\mathcal{A}) + N(\mathcal{A}) = \mathrm{rank}(\mathcal{A}) + n - \mathrm{rank}(\mathcal{A}) = \dim(\mathcal{A}).[2] \quad \square$$

1.2 Lights Out -peli

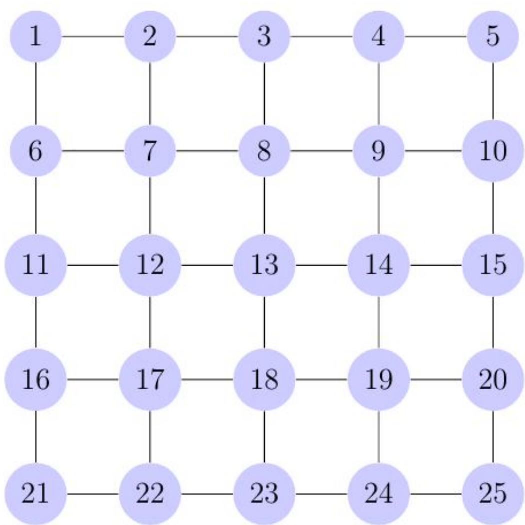
Lights Out -peli koostuu 25 ruudun ruudukosta, jossa on sekä viisi saraketta että viisi riviä. Jokainen ruutu kuvaa lamppua, jota klikkaamalla valo alkutilanteesta riippuen joko sammuu tai syttyy. Lisäksi lampun horisontaalisesti tai vertikaalisesti viereiset lamput joko syttyvät tai sammuvat. Alussa arvotaan satunnainen määrä päällä olevia lamppuja satunnaisiin koordinaatteihin. Pelin tavoitteena on sammuttaa kaikki lamput. Pelistä on olemassa erilaisia variaatioita erikokoisille ruudukoille erilaisin reunaehdoin, mutta tässä työssä käsitellään ainoastaan 25 ruudun neliönmuotoista Lights Out -peliä.

Kuva 1.3 esittää pelin ruudukkoa. Numeroidaan ruudut kuvan mukaisesti.

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25

Kuva 1.3. *Lights Out -pelin pelilaudan ruutujen numerointi.[7]*

Esitetään Lights out -pelin valojen vaihtumisen riippuvuutta kuvan 1.4 graafilla.



Kuva 1.4. *Lights Out -pelin pelilautaa kuvaava graafi.[7]*

Kuvan 1.4 graafin pisteet on numeroitu kuten pelin ruudut. Viivat kuvaavat lampun tilan vaihtumisen riippuvuudet muista lampuista. Lisäksi jokaisessa kuvan 1.4 graafin pisteessä voidaan ajatella olevan silmukka. Pisteestä x lähtevät viivat osoittavat, mitkä lamput syttyvät tai sammuvat, kun klikataan lamppua x. Koska lamppu x vaihtaa aina tilaansa sitä itseään klikatessa, voidaan tätä yhteyttä kuvata pisteestä x alkavalla ja pisteeseen x päättyvällä silmukalla. Jätetään kuvan selkeyttämiseksi silmukat kuvaamatta graafiin 1.4.

1.3 Lights Out -pelin matriisiesitys

Lights Out -peli voidaan kuvata lineaarisena systeeminä

$$\mathcal{A}\mathbf{x} + \mathbf{p} = \mathbf{r}, \tag{1.4}$$

jossa $\mathcal{A}$ on 25×25 -vieruspistematriisi ja vektorit $\mathbf{x}$, $\mathbf{p}$ ja $\mathbf{r}$ ovat 25 alkion pituisia vektoreita.

Esitetään luvussa 1.2 kuvassa 1.4 esitetty graafi vieruspistematriisina $\mathcal{A}$. Matriisissa $\mathcal{A}$ on 25 riviä ja saraketta, sillä peli sisältää 25 ruutua. Matriisin suuren koon vuoksi esitetään matriisi $\mathcal{A}$ 5×5 -blokkeina. [7]

Matriisi $\mathcal{A}$ koostuu kolmenlaisista 5×5 -blokeista: nollamatriiseista O, identiteettimatriiseista I sekä nauhamatriiseista B. Nauhamatriisille B on voimassa seuraava ehto: Matriisin B alkio b_{ij} on 1, jos $|i - j| \leq 1$. Muulloin alkio b_{ij} on 0. Nauhamatriisi B on

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \tag{1.5}$$

Täten vieruspistematriisi A esitettynä blokkien O, I ja B avulla on

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} B & I & O & O & O \\ I & B & I & O & O \\ O & I & B & I & O \\ O & O & I & B & I \\ O & O & O & I & B \end{pmatrix}. \tag{1.6}$$

Matriisi $\mathcal{A}$ sisältää yhteensä 25 blokkimatriisia: 5 nauhamatriisia B, 8 identiteettimatriisia I ja 12 nollamatriisia O. Näillä blokeilla esittäen matriisissa $\mathcal{A}$ diagonaalilla esiintyvät aina nauhamatriisit B. Identiteettimatriisit I ja nollamatriisit O ovat symmetrisesti diagonaalin molemmin puolin.

Kun tarkastellaan blokkimuotoista vieruspistematriisia $\mathcal{A}$, huomataan, että yhdellä $\mathcal{A}$:n blokkirivillä kuvataan kuvan graafin 1.4 yhden rivin yhteyttä muihin graafin riveihin. Blokki B esittää graafin yhden rivin pisteiden yhteydet toisiinsa. Käytetään esimerkkinä graafin ensimmäistä riviä, joka käsittää pisteet 1-5. Jokainen graafin piste on itsensä vieruspiste, joten blokin B diagonaalilla ovat alkiot 1. Koska graafissa reunimmaisilla pisteillä 1 ja 5 on ainoastaan yhdet vieruspisteet, blokin B riveillä 1 ja 5 on kaksi 1-alkiota. Esimerkiksi piste 2 taas on yhteydessä sekä pisteeseen 1, että pisteeseen 3. Tämä on esitetty blokin B rivillä 2. Sama logiikka pätee jokaiseen graafin riviin, ja tästä syystä blokit B ovat blokkimuotoisessa vieruspistematriisissa $\mathcal{A}$ diagonaalilla.

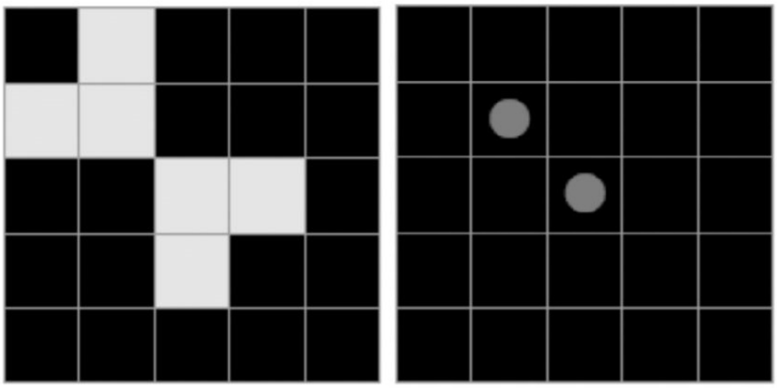
Indentiteettimatriisit I kuvaavat blokkimuotoisessa vieruspistematriisissa $\mathcal{A}$ rivien yhteyksiä toisiinsa. Esimerkiksi matriisin $\mathcal{A}$ ensimmäiseltä riviltä nähdään, että graafin ensimmäinen rivi on yhteydessä graafin toiseen riviin. Yhteyttä kuvaa identiteettimatriisiblokki I siitä syystä, että jokainen graafin piste on yhteydessä ylä- ja alapuolella oleviin psiteisiin $i + 5$ ja$i - 5$, kun i on pisteen järjestysnumero, kuten graafissa 1.4 on esitetty. Tämä pätee tietenkin vain niihin tilanteisiin, joissa $i + 5 \leq 25$ ja $i - 5 \geq 1$. Täten graafin rivin pisteiden yhteydestä ylä- ja alapuolisiin riveihin muodostuu identiteettimatriisi I. Nollamatriisiblokit O kuvaavat sitä, että rivit eivät ole vierekkäisiä graafissa 1.4.

Lights Out -pelin ratkaisemiseksi tarvitaan tietoa pelaajan tekemistä siirroista ja pelilaudan alkutilanteesta. Kuvataan pelilaudan alkutilannetta ja pelaajan strategiaa 25 alkion pituisilla vektoreilla.[3, 7]

Määritelmä 1.6. (Tilannevektori) Olkoon $\mathbf{p}$ 25 alkion sarakevektori. Vektorin $\mathbf{p}$ alkio p_i on 1, jos Lights Out -pelin ruudussa i palaa valo. Alkio p_i on 0, jos pelin ruudussa i ei pala valoa.

Määritelmä 1.7. (Strategiavektori) Olkoon $\mathbf{x}$ 25 alkion sarakevektori. Vektorin $\mathbf{x}$ alkio x_i on 1, jos pelaaja klikkaa Lights Out -pelin ruutua i. Muulloin alkio x_i on 0.

Esimerkki 1.5. *Esitetään kuvan 1.5 alkutilanne ja ruutujen klikkaukset vektoreina määritelmien 1.6 ja 1.7 mukaisesti. Vektorit $\mathbf{p}$ ja $\mathbf{x}$ ovat sarakevektoreita.*



Kuva 1.5. *Valkoiset ruudut kuvaavat päällä olevia valoja ja harmaat ympyrät kuvaavat klikattavia ruutuja.[7]*

Kun kuvan 1.5 ruudut numeroidaan kuvan 1.3 numeroinnin mukaisesti, saadaan vektoreiksi

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

ja

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Suorittamalla strategiavektorin $\mathbf{x}$ mukaiset painallukset, päädytään tilaan

$$\mathcal{A}\mathbf{x} + \mathbf{p} = \mathbf{0}.$$

Tarkastelemalla kuvan 1.5 painalluksia huomataan, että ruutuihin 8 ja 12 kohdistuu kaksi painallusta, ja siksi näiden ruutujen tilat eivät muutu. Sen sijaan ruutuihin 2, 6, 7, 13, 14 ja 18 kohdistuu ainoastaan yksi painallus, joten näiden ruutujen tilat muuttuvat, ja peli ratkeaa. Muihin ruutuihin ei kohdistu painalluksia.

2 LIGHTS OUT -PELIN RATKEAVUUS

Tarkastellaan lähteen [3] mukaista Lights Out -pelin ratkaisua. Lights Out -peli katsotaan ratkenneeksi, jos jäljellä on ainoastaan ruutuja, joiden valot ovat sammutettuja. Täten strategiavektorin tuottamaa lopputulosta kyseiseen pelilautaan kuvaava vektori

$$\mathbf{r} = \mathbf{0}. \tag{2.1}$$

Yhdistämällä tulokset 1.4 ja 2.1 saadaan matriisiyhtälö

$$\mathcal{A}\mathbf{x} + \mathbf{p} = \mathbf{0}. \tag{2.2}$$

Suoritetaan vieruspistematriisin $\mathcal{A}$, strategiavektorin $\mathbf{x}$, tilannevektorin $\mathbf{p}$ ja tulosvektorin $\mathbf{r}$ yhteenlasku ja kertolasku kunnassa $GF(2)$. Tämä johtuu siitä, että saman ruudun klikkaaminen k kertaa ei muuta pelin tilannetta, jos $k \mod 2 = 0$ [7].

Tarkastellaan matriisiyhtälön 2.2 ratkaisua strategiavektorin $\mathbf{x}$ suhteen. Vähennetään yhtälön 2.2 molemmilta puolilta alkutilannetta kuvaava vektori $\mathbf{p}$, jolloin yhtälö saadaan muotoon

$$\mathcal{A}\mathbf{x} = -\mathbf{p}. \tag{2.3}$$

Huomioidaan, että laskutoimitukset suoritetaan kunnassa $GF(2)$, jolloin $-\mathbf{p} = \mathbf{p}$. Täten yhtälö 2.3 saadaan muotoon

$$\mathcal{A}\mathbf{x} = \mathbf{p}. \tag{2.4}$$

Ratkaisu voidaan esittää myös muodossa

$$\mathcal{A}(\mathbf{x} + \mathbf{n}) = \mathbf{p}, \tag{2.5}$$

jossa $\mathbf{n}$ on hiljainen rivi.

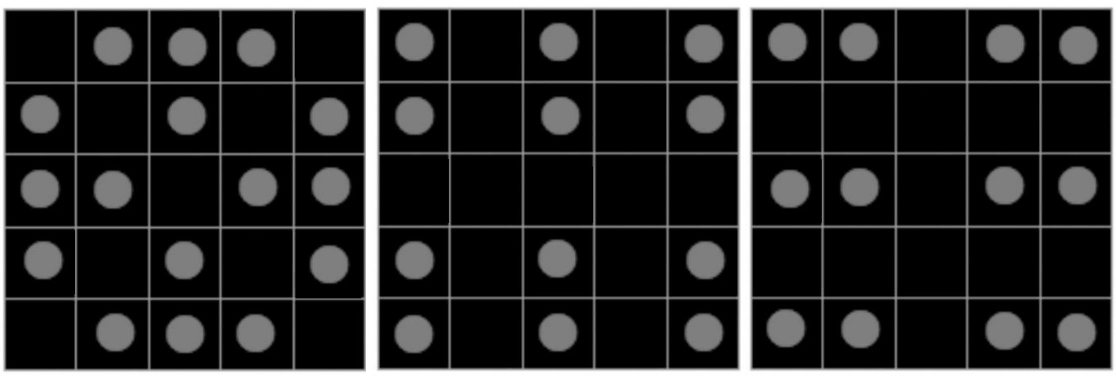
Kutsutaan seuraavia vektoreita hiljaisiksi riveiksi, sillä näillä riveillä ei ole lainkaan vaikutusta Lights Out -pelin valoihin:

$$\mathbf{n}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{n}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{n}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Hiljaisiin riveihin kuuluu vektorien $\mathbf{n}_1$, $\mathbf{n}_2$ ja $\mathbf{n}_3$ lisäksi myös triviaaliratkaisu $\mathbf{n}_4 = \mathbf{0}$. Vektorit $\mathbf{n}_1$ ja $\mathbf{n}_2$ ovat pseudoinverssin kaksi viimeistä riviä. Kolmas vektori $\mathbf{n}_3 = \mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2$. Kuvataan hiljaiset rivit Lights Out -pelin ruudukossa.



Kuva 2.1. *Hiljaiset rivit $\mathbf{n}_1$, $\mathbf{n}_2$ ja $\mathbf{n}_3$, vastaavasti. Muokattu lähteestä [7].*

Kuvasta 2.1 huomataan, että jokaiseen Lights Out -pelin ruutuun kohdistuu klikkauksia siten, että klikkausten määrä k toteuttaa ehdon

$$k \mod 2 = 0. \tag{2.6}$$

Tämä osoittaa sen, että strategiavektoreilla $\mathbf{n}_1$, $\mathbf{n}_2$ ja $\mathbf{n}_3$ ei ole lainkaan vaikutusta alkutilanteeseen ja voidaan siten lisätä strategiavektoriin vaikuttamatta strategiavektorin tuottamaan lopputulokseen.

2.1 Vieruspistematriisin $\mathcal{A}$ aste

Tarkastellaan blokkimuotoista Lights Out -pelistä muodostettua vieruspistematriisia 1.6. Suoritetaan matriisille $\mathcal{A}$ Gaussin eliminaatio soveltaen rivioperaatioita 1.4 blokkitason Gaussin eliminaatioon. Gaussin eliminaatio ei muuta vieruspistematriisin $\mathcal{A}$ astetta.

Vaihdetaan ensin rivien järjestystä.

$$\begin{pmatrix} B & I & O & O & O \\ I & B & I & O & O \\ O & I & B & I & O \\ O & O & I & B & I \\ O & O & O & I & B \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} I & B & I & O & O \\ O & I & B & I & O \\ O & O & I & B & I \\ O & O & O & I & B \\ B & I & O & O & O \end{pmatrix}$$

Eliminoidaan ensimmäisen rivin toisen ja kolmannen sarakkeen blokit B ja I. Merkitään matriisia $B^2 + I = C$ sekä $C \cdot B = D$ ja $C + B^4 = E$.

$$\xrightarrow{R_1 + B \cdot R_2} \begin{pmatrix} I & O & C & B & O \\ O & I & B & I & O \\ O & O & I & B & I \\ O & O & O & I & B \\ B & I & O & O & O \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 + C \cdot R_3} \begin{pmatrix} I & O & O & B^3 & C \\ O & I & B & I & O \\ O & O & I & B & I \\ O & O & O & I & B \\ B & I & O & O & O \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_1 + B^3 \cdot R_4} \begin{pmatrix} I & O & O & O & E \\ O & I & B & I & O \\ O & O & I & B & I \\ O & O & O & I & B \\ B & I & O & O & O \end{pmatrix}$$

Eliminoidaan seuraavaksi toisen rivin kolmannen ja neljännen sarakkeen blokit B ja I. Nämä seikat huomioon ottaen matriisi saadaan muotoon:

$$\xrightarrow{R_2 + B \cdot R_3} \begin{pmatrix} I & O & O & O & E \\ O & I & O & C & B \\ O & O & I & B & I \\ O & O & O & I & B \\ B & I & O & O & O \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 + C \cdot R_4} \begin{pmatrix} I & O & O & O & E \\ O & I & O & O & B^3 \\ O & O & I & B & I \\ O & O & O & I & B \\ B & I & O & O & O \end{pmatrix}$$

Kolmannen rivin blokkien B ja I eliminaatio onnistuu yhdellä operaatiolla ja neljäs rivi on jo halutussa muodossa.

$$\xrightarrow{R_3 + B \cdot R_4} \begin{pmatrix} I & O & O & O & E \\ O & I & O & O & B^3 \\ O & O & I & O & C \\ O & O & O & I & B \\ B & I & O & O & O \end{pmatrix}$$

Viidennen rivin viidenteen sarakkeeseen ei ole mahdollista muokata johtavaa ykköstä, eli tässä blokkimatriisin tapauksessa identiteettimatriisia I. Muodostetaan matriisista yläkolmiomatriisi. Käytetään merkintää $B \cdot E + B^3 = B + B^5 = F$.

$$\xrightarrow{R_5 + B \cdot R_1} \begin{pmatrix} I & O & O & O & E \\ O & I & O & O & B^3 \\ O & O & I & O & C \\ O & O & O & I & B \\ O & I & O & O & BE \end{pmatrix} \xrightarrow{R_5 + R_2} \begin{pmatrix} I & O & O & O & E \\ O & I & O & O & B^3 \\ O & O & I & O & C \\ O & O & O & I & B \\ O & O & O & O & F \end{pmatrix} \tag{2.7}$$

Matriisiksi F saadaan

$$F = B + B^5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Tarkastellaan matriisin F astetta suorittamalla matriisille F Gaussin eliminaatio, jolloin matriisiksi F saadaan muotoon

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Luvussa 1.1.2 esitellyn matriisin asteen määritelmän 1.2 perusteella matriisin F aste on $\operatorname{rank}(F) = 3$. Samoin perustein identiteettimatriisin I aste on $\operatorname{rank}(I) = 5$.

Päätellään Gaussin eliminaation tuloksesta (2.7) vieruspistematriisin $\mathcal{A}$ aste. Muodosta (2.7) nähdään, että neljä ylintä blokkiriviä eivät sisällä lineaarisesti riippuvia rivejä, koska identiteettimatriisien I aste on täysi. Sen sijaan alin blokkirivi sisältää vain nollamatriiseja O sekä matriisin F, jonka aste $\operatorname{rank}(F) = 3$. Alimmalla blokkirivillä on kaksi lineaarisesti riippuvaa riviä, jotka ovat kumpikin nollavektoreita. Täten matriisin $\mathcal{A}$ aste $\operatorname{rank}(\mathcal{A}) = 23$.

2.2 Ratkaisujen lukumäärä

Tarkastellaan lineaarisen systeemin 2.5 ratkaisujen lukumäärää lauseen 1.4 avulla. Kuten luvussa 2.1 todettiin, vieruspistematriisin $\mathcal{A}$ aste on $\operatorname{rank}(\mathcal{A}) = 23$. Lisäksi matriisin $\mathcal{A}$ dimensio $\dim(A) = 25$. Soveltamalla dimensiolausetta 1.4 saadaan nolla-avaruuden dimensioksi

$$N(\mathcal{A}) = 2.$$

Täten nolla-avaruuden virittävät kaksi lineaarisesti riippumatonta vektoria $\mathbf{n}_1$ ja $\mathbf{n}_2$. Määritelmän mukaan matriisin nolla-avaruuteen kuuluvat vektorit toteuttavat yhtälön

$$\mathcal{A}\mathbf{n} = \mathbf{0}. \tag{2.8}$$

Lineaarisesti riippumattomien vektorien $\mathbf{n}_1$ ja $\mathbf{n}_2$ lineaarikombinaatiot $\alpha_1\mathbf{n}_1 + \alpha_2\mathbf{n}_2$ toteuttavat myös yhtälön 2.8. Näitä lineaarikombinaatioita on kantavektorien $\mathbf{n}_1$ ja $\mathbf{n}_2$ lisäksi kaksi: $\mathbf{n}_3 = \mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2$ sekä $\mathbf{n}_4 = \mathbf{0}$. Täten matriisin nolla-avaruuteen kuuluu neljä vektoria $\mathbf{n}_1$, $\mathbf{n}_2$, $\mathbf{n}_3$ ja $\mathbf{n}_4$. Nämä neljä vektoria ovat hiljaiset rivit.

Olkoot $\mathbf{x}_1$ ja $\mathbf{x}_2$ kaksi lineaarisen systeemin 2.5 ratkaisua. Tarkastellaan näiden ratkaisujen erotusta, ja saadaan

$$\mathcal{A}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) = \mathcal{A}\mathbf{x}_1 - \mathcal{A}\mathbf{x}_2 = \mathbf{p} - \mathbf{p} = \mathbf{0}. \tag{2.9}$$

Ottaen huomioon nolla-avaruuden määritelmän 2.8, saadaan yhtälö 2.9 muotoon

$$\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 = \mathbf{n} \Rightarrow \mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2 + \mathbf{n} \tag{2.10}$$

Täten lineaarisen systeemin 2.5 ratkaisut voidaan esittää muodossa

$$\mathcal{A}(\mathbf{x} + \mathbf{n}) = \mathbf{p}, \tag{2.11}$$

jossa $\mathbf{x}$ on jokin yhtälön 2.5 ratkaisu ja $\mathbf{n}$ kuuluu matriisin A nolla-avaruuteen. Mikäli löydetään yksi ratkaisu $\mathbf{x}$, kaikki yhtälön ratkaisut ovat

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_1 &= \mathbf{x} + \mathbf{n}_1, \\
\mathbf{x}_2 &= \mathbf{x} + \mathbf{n}_2, \\
\mathbf{x}_3 &= \mathbf{x} + \mathbf{n}_3, \\
\mathbf{x}_4 &= \mathbf{x} + \mathbf{n}_4 = \mathbf{x}.
\end{aligned}$$

Täten jokaisella ratkeavalla pelillä on yhteensä neljä ratkaisua $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, $\mathbf{x}_3$ ja $\mathbf{x}_4$.

Tarkastellaan seuraavaksi ratkeavien pelien lukumäärää. Jokaisessa Lights Out -pelin ruudussa on kaksi vaihtoehtoa alkutilanteessa: Valo on päällä tai pois päältä. Koska ruutuja on yhteensä 25, saadaan kaikkien mahdollisten alkutilojen lukumääräksi

$$n_{alkutilat} = 2 \cdot 2 \cdot \;\cdots\; \cdot 2 = 2^{25}.$$

Vieruspistematriisin $\mathcal{A}$ aste on $\operatorname{rank}(\mathcal{A}) = 23$. Peli on ratkeava, mikäli alkutila $\mathbf{p}$ kuuluu vieruspistematriisin $\mathcal{A}$ sarakeavaruuteen, joka muodostuu 23:sta lineaarisesti riippumattomasta vektorista. Täten ratkeavien alkutilojen lukumääräksi saadaan

$$n_{ratkeavat} = 2 \cdot 2 \cdot \;\cdots\; \cdot 2 = 2^{23}.$$

Ratkeamattomien alkutilojen lukumäärä saadaan kaikkien alkutilojen ja ratkeavien alkutilojen erotuksesta

$$n_{ratkeamattomat} = 2^{25} - 2^{23} = 3 \cdot 2^{23}.$$

Edellä esitellyistä tuloksista voidaan laskea, että ratkeavia alkutiloja on ainoastaan 25% kaikista mahdollisista alkutiloista, ja siten ratkeamattomia pelejä suhteessa ratkeaviin peleihin on kolminkertainen määrä.

2.3 Pseudoinverssi ja pelin ratkaiseminen

Tarkastellaan muodossa (2.7) esitettyä vieruspistematriisia $\mathcal{A}$, jossa F vastaa matriisin F riviporrasmuotoa G. Vieruspistematriisi $\mathcal{A}$ sisältää kaksi lineaarisesti riippuvaa riviä, jotka ovat muodossa (2.7) esitetyn matriisin kaksi alinta riviä. Nämä rivit ovat molemmat nollarivejä, joten matriisi $\mathcal{A}$ sisältää kaksi samaa riviä ja siten lauseen 1.3 perusteella matriisin $\mathcal{A}$ determinantti on $\det(\mathcal{A}) = 0$. Tästä seuraa, että määritelmän 1.3 mukaan vieruspistematriisi $\mathcal{A}$ on singulaarinen, joten matriisilla $\mathcal{A}$ ei ole olemassa käänteismatriisia.

Ratkaistaan lineaarinen systeemi (2.5) pseudoinverssin avulla. Muodostetaan vieruspistematriisista $\mathcal{A}$ ja identiteettimatriisista $I_{25\times25}$ yhdistetty matriisi $[\mathcal{A} \mid I_{25\times25}]$. Yhdistetylle matriisille tehdään tarvittava määrä määritelmän 1.4 mukaisia rivioperaatioita, jolloin yhdistetty matriisi saadaan muotoon $[I^+ \mid \mathcal{A}^+]$. Pseudoinverssi $\mathcal{A}^+$ on esitetty liitteessä A.

Tällä tavalla muodostetulla pseudoinverssillä $\mathcal{A}^+$ voidaan ratkaista strategiavektori $\mathbf{x}$ suorittamalla laskutoimitus

$$\mathbf{x} = \mathcal{A}^+\mathbf{p} \tag{2.12}$$

kunnassa $GF(2)$, mikäli ratkaisu on olemassa.

Esimerkki 2.1. *Ratkaistaan peli, jonka alkutilanteessa kaikki valot ovat päällä. Tilannevektori* $\mathbf{p}$ *sisältää ainoastaan ykkösiä. Yhtälöllä* (2.12) *strategiavektoriksi saadaan*

$$\mathbf{x}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

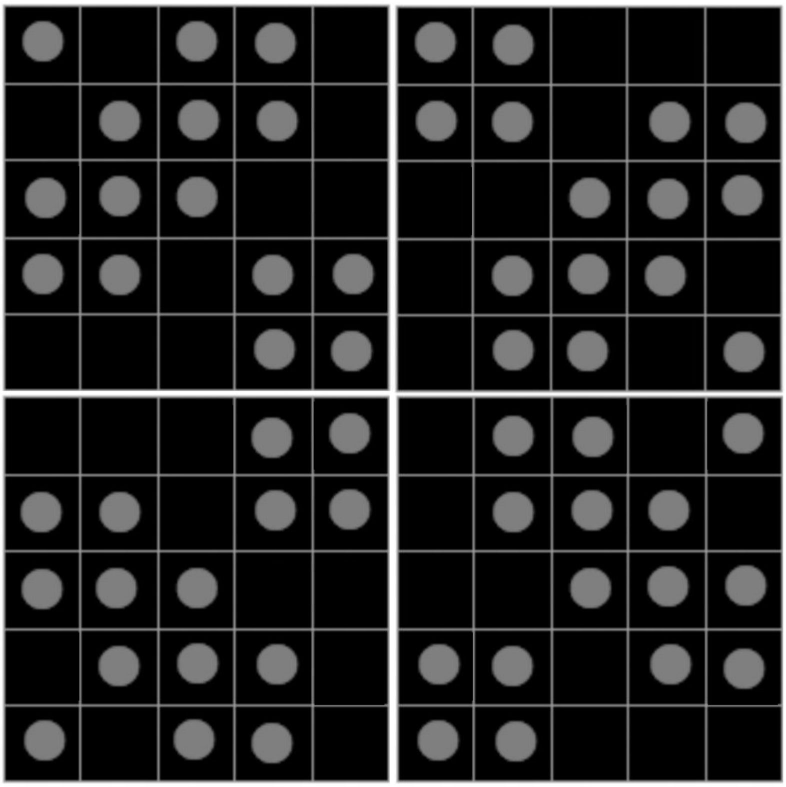
Luvun 2.2 mukaan pelillä on yhteensä neljä ratkaisua, ja kolme muuta ratkaisua saadaan kyseisessä luvussa esitellyllä tavalla hiljaisien rivien avulla. Kolme muuta ratkaisua ovat täten:

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Kuvataan edellä esitetyt strategiavektorit Lights Out -pelin ruudukossa.



Kuva 2.2. *Strategiavektorit vasemmalta ylärivistä alkaen:* $\mathbf{x}_4$, $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$ *ja* $\mathbf{x}_3$. *Muokattu lähteestä [7].*

Kuvasta 2.2 huomataan, että strategiavektorit $\mathbf{x}_4$ *ja* $\mathbf{x}_3$ *ovat toistensa pelikuvat, samoin kuin strategiavektorit* $\mathbf{x}_1$ *ja* $\mathbf{x}_2$. *Kaikki strategiat vaativat 15 siirtoa pelin ratkaisemiseksi.*

2.4 Pseudoinverssin tulkinta

Tarkastellaan matriiseja $\mathcal{A}$ ja I. Identiteettimatriisin I rivit kuvaavat strategiavektoreita, joiden vaikutus peliin nähdään matriisista $\mathcal{A}$ vastaavalta riviltä. Täten vieruspistematriisista $\mathcal{A}$ nähdään millainen vaikutus jokaisen Lights Out -pelin ruudun klikkaamisella on, sillä identiteettimatriisin I rivit sisältävät jokainen yhden ykkösen. Esimerkiksi, jos Lights Out -pelissä halutaan klikata ruutuja 1 ja 2, näiden valintojen vaikutukset nähdään vieruspistematriisin $\mathcal{A}$ rivien 1 ja 2 summasta, kun yhteenlasku suoritetaan kunnassa $GF(2)$.

Edellä kuvattua tulkintaa voidaan soveltaa myös matriisien $\mathcal{A}^+$ ja I^+ tulkintaan. Matriisista I^+ voidaan lukea matriisin $\mathcal{A}^+$ rivien mukaisten strategiavektorien vaikutus peliin. Pseudoinverssin $\mathcal{A}^+$ rivit kuvaavat siis stategiavektoreita ja matriisin I^+ rivit kuvaavat stategiavektorien vaikutuksen peliin.

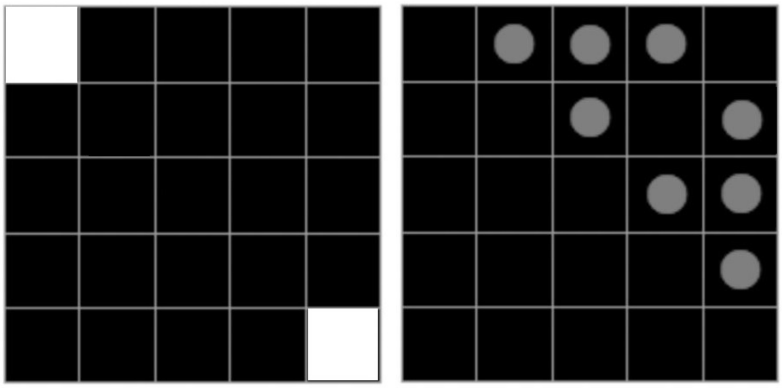
Esimerkki 2.2. *Tarkastellaan matriisin* I^+ *ja pseudoinverssin* $\mathcal{A}^+$ *ensimmäisiä rivejä. Matriisin* I^+ *ensimmäinen rivi on*

$$\mathbf{i} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ja pseudoinverssin $\mathcal{A}^+$ ensimmäinen rivi on

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Kuvassa 2.3 on kuvattu edellä esitellyt vektorit $\mathbf{i}$ ja $\mathbf{a}$. Valkoisena kuvatut ruudut tarkoittavat ruudun valon vaihtumista ja harmaat pisteet ruudun klikkaamista.



***Kuva 2.3.** Yhdistetyn matriisin 1. rivin strategiavektorin vaikutus pelin valoihin. Muokattu lähteestä [7].*

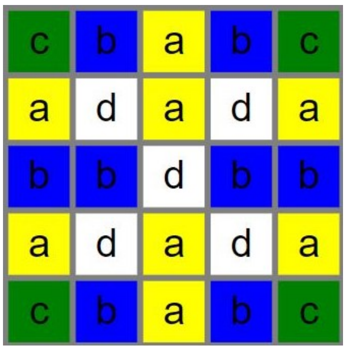
Jos ruutuun kohdistuneiden klikkausten määrä k toteuttaa ehdon $k \mod 2 = 0$, ruudun valo ei muutu. Täten ainoat ruudut, jotka eivät toteuta edellä mainittua ehtoa, ovat ruudut 1 ja 25.

2.5 Ratkeavuustesti

Kuten luvussa 2.2 todettiin, ainoastaan 25% alkutilanteista on ratkeavia. Tarkastellaan seuraavaksi erilaisten alkutilanteiden ratkeavuutta.

Lause 2.3. *(Ratkeavuustesti) Alkutilanne on ratkeava, jos ja vain jos alkutilannevektorilla $\mathbf{p}$ on parillinen määrä yhteisiä ruutuja, joissa on alkio 1, jokaisen hiljaisen rivin kanssa. [3]*

Todistus. Jaetaan Lights Out -pelin ruudukko osioihin a, b, c ja d kuvan 2.4 mukaisesti.



***Kuva 2.4.** Ruudukon jako osiin.[3]*

Jako on tehty sillä perusteella, mihin muihin ruutuihin tietyn valon vaihtaminen vaikuttaa, mikä on nähtävissä matriisista I^+. Osion a ruutuja vastaavilta matriisin I^+ riveiltä nähdään, että osion a ruutujen valon vaihtaminen vaihtaa myös ruutujen 24 ja 25 valot. Osion b valojen vaihtaminen vaihtaa myös ruudun 24 valon. Osion c valojen vaihtaminen vaihtaa myös ruudun 25 valon. Osion d valojen vaihtaminen ei vaikuta muihin valoihin.

Tämän jaottelun perusteella huomataan, että hiljaiset rivit koostuvat osioiden a, b ja c ruuduista seuraavalla tavalla: $\mathbf{n}_1$ sisältää kaikki osioiden a ja b ruudut, $\mathbf{n}_2$ kaikki osioiden a ja c ruudut ja $\mathbf{n}_3$

osioiden b ja c ruudut. Osion d ruudut eivät kuulu mihinkään hiljaiseen riviin. Merkitään hiljaisten rivien $\mathbf{n}_1$, $\mathbf{n}_2$ ja $\mathbf{n}_3$ sisältämien ruutujen lukumääriä $A+B$, $A+C$ ja $B+C$ vastaavasti.

Hiljaisten rivien määritelmän perusteella kaikkien hiljaisen rivin ruutujen klikkaaminen ei muuta pelin tilannetta, sillä jokaiseen ruutuun kohdistuneiden klikkausten määrä toteuttaa ehdon (2.6). Jokaiseen ruutuun kohdistuu siis parillinen määrä klikkauksia.

Vieruspistematriisi $\mathcal{A}$ on symmetrinen, ja siten jokaisen ruudun klikkaus vaikuttaa parilliseen määrään kunkin hiljaisen rivin ruutuja. Käytetään esimerkkinä ruutua 1. Ruudun 1 klikkaaminen vaikuttaa valoihin 1, 2 ja 6. Kuten kuvasta 2.4 nähdään, ruutu 1 kuuluu osioon c, ruutu 2 osioon b ja ruutu 6 osioon a. Täten ruudun 1 klikkaaminen vaikuttaa kaikkien hiljaisten rivien kahteen ruutuun, sillä ruudut 2 ja 6 kuuluvat hiljaiseen riviin $\mathbf{n_1}$, ruudut 1 ja 6 riviin $\mathbf{n_2}$ ja ruudut 1 ja 2 riviin $\mathbf{n_3}$. Sama tulos on voimassa myös kaikkia muita ruutuja klikattaessa. Kutsutaan täten 25 ruudun Lights Out -peliä symmetriseksi peliksi.

Edellä esiteltyjen päätelmien vuoksi alkutilanne ei ratkea, jos jollakin hiljaisella rivillä on pariton määrä yhteisiä päällä olevia valoja alkutilanteen kanssa, koska jokaisen hiljaisen rivin ruudun klikkaus vaikuttaa parilliseen määrään hiljaisten rivien valoja. Täten jokaisessa ratkeavassa alkutilanteessa $\mathbf{p}$ on oltava parillinen määrä päällä olevia valoja, jotka ovat yhteisiä jokaisen hiljaisen rivin kanssa.

Lasketaan tällaisten alkutilanteiden lukumäärä. Koska $A+B$, $A+C$ ja $B+C$ on oltava parillisia, ovat joko A, B ja C kaikki parittomia tai parillisia. Jos A, B ja C ovat parillisia, osion a ruutuja on joko 0, 2, 4, 6 tai 8, samoin kuin osion b ruutuja. Osion c ruutuja on 0, 2 tai 4. Osion d ruutujen lukumäärä voi olla mitä tahansa nollasta viiteen. Täten alkutilanteiden lukumääräksi saadaan

$$\begin{aligned} N_1 = &\left[\binom{8}{0}+\binom{8}{2}+\binom{8}{4}+\binom{8}{6}+\binom{8}{8}\right]\times\left[\binom{8}{0}+\binom{8}{2}+\binom{8}{4}+\binom{8}{6}+\binom{8}{8}\right]\times \\ &\left[\binom{4}{0}+\binom{4}{2}+\binom{4}{4}\right]\times\left[\binom{5}{0}+\binom{5}{1}+\binom{5}{2}+\binom{5}{3}+\binom{5}{4}+\binom{5}{5}\right] \qquad = 4194304. \end{aligned}$$

Tarkastellaan tilannetta, jossa A, B ja C ovat parittomia. Tällöin osion a ruutuja on joko 1, 3, 5 tai 7 samoin kuin osion b ruutuja. Osion c ruutuja on 1 tai 3. Osion d ruutujen lukumäärä voi jälleen olla mitä tahansa nollasta viiteen. Täten alkutilanteiden lukumääräksi saadaan

$$\begin{aligned} N_2 = &\left[\binom{8}{1}+\binom{8}{3}+\binom{8}{5}+\binom{8}{7}\right]\times\left[\binom{8}{1}+\binom{8}{3}+\binom{8}{5}+\binom{8}{7}\right]\times \\ &\left[\binom{4}{1}+\binom{4}{3}\right]\times\left[\binom{5}{0}+\binom{5}{1}+\binom{5}{2}+\binom{5}{3}+\binom{5}{4}+\binom{5}{5}\right] \qquad = 4194304. \end{aligned}$$

Luvun 2.2 mukaan ratkeavien alkutilojen lukumäärä on

$$N_{ratkeavat} = 2^{23} = 8388608. \tag{2.13}$$

Kaikkien ratkeavuustestin (2.5) toteuttavien alkutilanteiden lukumäärä on

$$N_{ratkeavuustesti} = N_1 + N_2 = 8388608 = N_{ratkeavat}. \tag{2.14}$$

Koska $N_{ratkeavuustesti} = N_{ratkeavat}$, ei ole olemassa alkutiloja, jotka eivät toteuta ratkeavuustestiä (2.5). □

3 VAIKEIMMAN TAPAUKSEN MINIMISIIRROT

Tässä luvussa selvitetään, kuinka monta siirtoa tarvitaan vaikeimman Lights Out -pelin ratkaisemiseen. Vaikeimmalla tapauksella tarkoitetaan alkutilannetta, jonka ratkaisemiseen tarvitaan eniten siirtoja.

Jaetaan Lights Out -pelin ruudukko 1.3 kuvassa 2.4 kuvatulla tavalla osioihin a - d. Olkoon A ratkaisemiseen tarvittavien a-ruutujen lukumäärä ja olkoot B, C ja D vastaavasti ruutujen b, c ja d lukumäärät. Pelin ratkaisemikseksi tarvittava siirtojen lukumäärä on

$$N = A + B + C + D, \tag{3.1}$$

jossa $0 \leq A \leq 8$, $0 \leq B \leq 8$, $0 \leq C \leq 4$ ja $0 \leq D \leq 5$.

Luvun 2.2 mukaan lineaarisen systeemin 2.5 ratkaisut voidaan esittää muodossa $\mathbf{x} + \mathbf{n}$, jossa $\mathbf{x}$ on jokin alkutilan $\mathbf{p}$ ratkaiseva strategiavektori ja $\mathbf{n}$ jokin hiljaisista riveistä.

Olkoon $\mathbf{n} = \mathbf{n}_1$ ja $\mathbf{x}$ jokin alkutilanteen $\mathbf{p}$ ratkaisu. Hiljainen rivi $\mathbf{n}_1$ koostuu osioiden a ja b ruuduista, joita on kumpaakin kahdeksan kappaletta. Ratkaisu $\mathbf{x}$ sisältää a-osion ruutuja A kappaletta ja b-osion ruutuja B kappaletta. Täten ratkaisu $\mathbf{x} + \mathbf{n}_1$ sisältää osioiden a ja b ruutuja yhteensä $(A - 8) + (B - 8)$, sillä hiljainen rivi $\mathbf{n}_1$ vaihtaa jokaisen osion a ja b ruudun tilan. Koska N on maksimaalinen ratkaistavissa olevien siirtojen määrä, niin

$$N \geq (8 - A) + (8 - B) + C + D. \tag{3.2}$$

Yhdistämällä epäyhtälöt (3.1) ja (3.2), tarvittavien valojen määrälle voidaan kirjoittaa epäyhtälö

$$(8 - A) + (8 - B) \geq A + B. \tag{3.3}$$

Sieventämällä epäyhtälö (3.3), se saadaan muotoon

$$A + B \leq 8. \tag{3.4}$$

Tehdään vastaava tarkastelu ratkaisuille $\mathbf{x} + \mathbf{n}_2$ ja $\mathbf{x} + \mathbf{n}_3$. Ratkaisu $\mathbf{x} + \mathbf{n}_2$ sisältää osioiden a ja b ruutuja yhteensä $(8-A)+(4-C)$ -kappaletta. Epähtälöä (3.2) vastaava yhtälö on tälle tapaukselle täten

$$N \geq (8 - A) + B + (4 - C) + D. \tag{3.5}$$

Vastaavasti ratkaisu $\mathbf{x}+\mathbf{n}_3$ sisältää osioiden b ja c ruutuja yhteensä $(8-B)+(4-C)$ -kappaletta, joten epähtälöä (3.2) vastaava yhtälö on tälle tapaukselle täten

$$N \geq A + (8 - B) + (4 - C) + D. \tag{3.6}$$

Yhdistämällä edellä esitetyt tulokset saadaan yhtälöryhmä

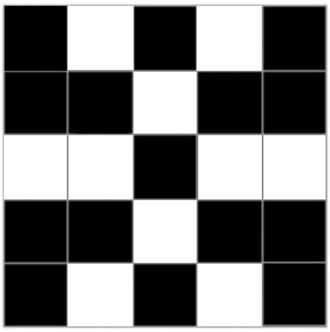
$$\begin{cases} A + B \leq 8 \\ A + C \leq 6 \\ B + C \leq 6. \end{cases} \tag{3.7}$$

Koska kyseessä on vaikeimman tapauksen siirrot, ollaan kiinnostuneita suurimmasta tarvittavasta siirtomäärästä. Täten yhtälöryhmä 3.7 saadaan muotoon

$$\begin{cases} A + B = 8 \\ A + C = 6 \\ B + C = 6. \end{cases} \tag{3.8}$$

Yhtälöryhmän ratkaisuksi saadaan $A = 4$, $B = 4$ ja $C = 2$. Lisäksi osiossa d on yhteensä 5 ruutua, jotka eivät kuulu mihinkään hiljaiseen riviin. Vaikeimmassa mahdollisessa tapauksessa $D = 5$, sillä osion d ruutuja ei voida vaihtaa vaikuttamatta muihin valoihin. Täten siirtojen määräksi saadaan yhtälön 3.1 mukaisesti $N = 4 + 4 + 2 + 5 = 15$. Kaikki ratkaistavissa olevat alkutilanteet ratkeavat enintään 15 siirrolla.

Esimerkki 3.1. *Esitellään esimerkkinä sellainen peli, joka vaatii väitetyn maksimimäärän verran siirtoja. 15 siirron pelin strategiavektorin tulee sisältää 4 a- ja b-ruutua, 2 c-ruutua ja kaikki 5 c-ruutua. Kuvassa 3.1 on kuvattu Lights Out -peli, joka vaatii 15 siirtoa.*



Kuva 3.1. *Peli, joka vaatii 15 siirtoa. Muokattu lähteestä [7].*

Kuvan 3.1 alkutilanteen ratkaisevat strategiavektorit ovat:

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\mathbf{x}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\mathbf{x}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Kuten luvussa 2.2 on todettu, jokaisella ratkeavalla pelillä on tasan neljä ratkaisua. Yllä esitellyistä strategiavektoreista jokainen sisältää 15 siirtoa, joissa $A = 4$, $B = 4$ ja $C = 2$ ja $D = 5$. Täten kyseessä on vaikein mahdollinen tapaus.

4 YHTEENVETO

Tässä työssä esitettiin 25 ruudun Lights Out -pelin matemaattinen esitys vieruspistematriisin A, alkutilannevektorin $\mathbf{p}$ ja strategiavektorin $\mathbf{x}$ avulla. Vieruspistematriisi A muodotettiin Lights Out -peliä kuvaavasta graafista. Matemaattisen esityksen avulla tarkasteltiin alkutilanteiden ratkeavuutta ja päädyttiin siihen tulokseen, että ainoastaan 25$\%$ alkutilanteista ovat ratkeavia. Lisäksi osoitettiin, että jokaisella ratkeavalla pelillä on täsmälleen neljä ratkaisua.

Työssä esittiin yleinen ratkaisutapa kaikille ratkeaville alkutilanteille ja esiteltiin hiljaisten rivien käsite. Työssä tarkasteltiin myös testiä, jonka avulla voidaan tarkastella alkutilanteen ratkeavuutta. Testin mukaan alkutilanteella on oltava parillinen määrä samoja alkioita 1 kaikkien hiljaisten rivien kanssa. Lisäksi työssä tarkastellaan vaikeimman tapauksen minimisiirtoja, eli siirtomäärää, jolla jokainen ratkaistavissa oleva peli ratkeaa. Vaikeimman tapauksen minimisiirtojen lukumääräksi saatiin 15.

Työ keskittyi neliön muotoisen 25×25 -pelilaudan tulkintoihin, mutta työssä esitelty vieruspistematriisi on mahdollista muodostaa myös erilaisille geometrioille, mikä mahdollistaa erilaisten Lights Out -pelien tutkinnan. Valojen vaihtumiseen liittyvät säännöt näkyvät vieruspistematriisissa, ja siten peliä olisi mahdollista tarkastella myös erilaisilla pelisäännöillä, mikäli vieruspistematriisia muokattaisiin vastaamaan toisenlaisia sääntöjä.

Tässä työssä tehdyt laskutoimitukset suoritettiin kunnassa $GF(2)$. Kunnan määrittely perustuu siihen, kuinka monta mahdollista tilaa valoilla on. Tässä työssä tarkastellussa pelissä valoilla on kaksi mahdollista tilaa: päällä ja pois päältä. Mikäli tiloja olisi useampia, kunnan määrittelyyn täytyisi tehdä muutoksia. Työssä esitellyt vektorit ja niiden käyttö alkutilanteiden ratkaisemisessa toimivat jokaiselle geometrialle, jossa on yhteensä 25 ruutua. Täten erilaisten Lights Out -pelien tarkastelussa tulisi määritellä uudelleen pelin sääntöjen mukainen vieruspistematriisi ja kunta, jossa laskutoimitukset suoritetaan.

LÄHDELUETTELO

[1] R. B. Bapat. *Graphs and matrices*. English. London: Springer, 2010. ISBN: 1848829809.

[2] E. S. Gopi. *Matrices*. English. Dordrecht: Springer Netherlands, 2010. ISBN: 9789048137466.

[3] S. Jaap. *Jaap's Puzzle Page*. 2015. URL: `https://www.jaapsch.net/puzzles/lomath.htm`.

[4] D. C. Mello. *Invitation to linear algebra*. eng. Boca Raton: CRC Press, 2017, 1 verkkoaineisto. ISBN: 978-1-4987-7957-9 eISBN.

[5] R. C. Penney. *Linear algebra: ideas and applications*. English. Fourth. Hoboken, New Jersey: Wiley, 2016; 2015. ISBN: 1118909623.

[6] D. Prasad. *Elementary linear algebra*. English. Second. Oxford, England: Alpha Science International Ltd, 2012. ISBN: 1783322527.

[7] B. Torrence. Easiest Lights Out Games. English. *The College Mathematics Journal* 42.5 (2011), 1.

A MATRIISIT $\mathcal{A}^+$ JA I^+

$$A^+ = \begin{pmatrix}
0&1&1&1&0&0&0&1&0&1&0&0&0&1&1&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\
1&1&0&1&1&0&1&0&0&0&0&0&1&1&1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\
1&0&1&1&1&1&0&1&1&0&0&0&1&1&0&1&1&1&1&1&0&1&0&0&0\\
1&1&1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&1&1&0&0\\
0&1&1&0&1&1&0&0&0&0&1&0&1&0&1&0&0&1&0&1&1&1&0&0&0\\
0&0&1&0&1&0&1&1&0&1&0&0&1&0&0&0&0&0&1&1&0&0&0&0&0\\
0&1&0&1&0&1&1&0&1&1&0&0&0&1&0&1&1&1&0&0&0&1&0&0&0\\
1&0&1&0&0&1&0&1&1&0&0&0&0&0&1&1&0&1&0&1&1&0&1&0&0\\
0&0&1&0&0&0&1&1&1&0&1&0&0&1&1&1&0&0&1&0&0&1&1&0&0\\
1&0&0&0&0&1&1&0&0&0&1&0&1&0&1&0&1&1&0&1&0&0&1&0&0\\
0&0&0&0&1&0&0&0&1&1&0&0&1&0&1&1&1&1&1&0&0&1&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&1&1&0&0\\
0&1&1&0&1&1&0&0&0&1&1&0&1&1&0&0&0&1&0&0&1&1&0&0&0\\
1&1&1&0&0&0&1&0&1&0&0&0&1&1&1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\
1&1&0&0&1&0&0&1&1&1&1&0&0&1&1&1&1&0&1&0&1&0&0&0&0\\
0&0&1&0&0&0&1&1&1&0&1&0&0&0&1&1&0&1&0&1&1&0&1&0&0\\
0&0&1&1&0&0&1&0&0&1&0&1&0&0&1&1&1&0&0&1&0&0&1&0&0\\
0&0&1&0&1&0&1&1&0&1&1&0&1&0&0&1&1&0&1&1&1&0&0&0&0\\
0&1&1&0&0&1&0&0&1&0&1&0&0&1&1&0&1&1&1&0&0&0&1&0&0\\
1&0&1&0&1&1&0&1&0&1&0&0&0&0&0&1&0&1&0&1&1&0&1&0&0\\
0&0&0&1&1&0&0&1&0&0&0&1&1&0&1&1&0&1&0&1&1&1&0&0&0\\
0&0&1&1&1&0&1&0&1&0&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&0&0\\
0&0&0&1&0&0&0&1&1&1&0&1&0&0&0&1&1&0&1&1&0&1&0&0&0\\
0&1&1&1&0&1&0&1&0&1&1&1&0&1&1&1&0&1&0&1&0&1&1&1&0\\
1&0&1&0&1&1&0&1&0&1&0&0&0&0&0&1&0&1&0&1&1&0&1&0&1
\end{pmatrix}.[3] \tag{A.1}$$

$$
I^+ = \begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}.[3]
\tag{A.2}
$$