Tampereen yliopisto

Max Kanerva

GRAAFIEN VÄRITYKSEN AIKAVAATIVUUS

Tekniikan ja luonnontieteiden tiedekunta
Kandidaatintyö
Elokuu 2019

TIIVISTELMÄ

Max Kanerva: Graafien värityksen aikavaativuus
Kandidaatintyö
Tampereen yliopisto
Tekniikka ja luonnontieteet, TkK
Elokuu 2019

Graafien väritys on yksi keskeinen graafiteorian ongelma, jolla on useita merkittäviä sovelluskohteita, kuten aikataulutusongelmat. k-väritys ongelmassa halutaan tietää voidaanko graafin solmuille antaa väri k:n värin joukosta ilman, että kahdella vierekkäisellä solmulla on sama väri.

Tämän työn tavoite on antaa lukijalle käsitys graafien värityksen perustuloksista ja niiden merkityksestä. Työssä esitellään graafiteorian perusteet ja todistetaan työn pituuden puitteissa tärkeimmät tulokset. Tärkeimmät työssä esitellyt tulokset ovat graafien väritysten määrän kasvaminen polynomin mukaan ja k-väritettävyyden NP-täydellisyys. NP-täydellisyys on hankala ongelma algoritmien tehokkuuden kannalta, mikä pitää ottaa huomioon algoritmeja suunnitellessa.

Avainsanat: graafit, aikavaativuus, graafien väritys

SISÄLLYSLUETTELO

LYHENTEET JA MERKINNÄT

$G(V, E)$	graafi G, jonka solmut ovat joukossa V ja kaaret ovat joukossa E
$\Delta(G)$	graafin G solmujen suurin aste
$V(G)$	graafin G solmujen joukko
$E(G)$	graafin G kaarien joukko
C_n	sykli graafi, jossa on n kappaletta solmuja
P_n	polku graafi, jossa on n kappaletta solmuja
$\chi(G)$	graafin G kromaattinen luku
$G - e$	graafi G, josta on poistettu kaari e
G/e	graafi G, josta on kutistettu kaari e
$O(f(n))$	funktioiden joukko, jonka funktioihin kuluu asymptoottisesti enintään $f(n)$ aikaa

1 JOHDANTO

Eräs graafiteorian varhaisista sovelluksista oli karttojen väritysongelma. Kartalla vierekkäiset maat haluttiin värittää eri väreillä. Maiden värittäminen näin vaikutti olevan mahdollista neljää väriä käyttäen. Tämän tuloksen todistaminen oli pitkään yksi graafiteorian suuria ratkeamattomia ongelmia ja todistusta varten kehitettiin monia menetelmiä graafien väritykseen liittyen. Myöhemmin karttojen 4-väritettävyys osoitettiin todeksi tietokoneavusteisesti [1]. Graafien väritykselle on keksitty myös muita sovelluksia, kuten aikataulutus ja rekisterin allokointi [4].

Sovellukset yleensä tarvitsevat jonkin algoritmin, jolla graafin väritys saadaan laskettua. Algoritmit alkoivat tulla käyttökelpoisemmiksi tietokoneiden avulla 1900-luvulla, mutta algoritmien laskennallinen vaativuus on osoittautunut ongelmalliseksi. Suuremman graafin värittäminen yleensä vaatii algoritmilta pidemmän ajan, mutta on myös graafeja, jotka ovat yksinkertaista värittää vaikka ne olisivat kuinka suuria tai monimutkaisia, jos niissä on tietynlainen säännönmukaisuus.

Tarkastellaan esimerkkinä graafien väritysongelmasta yksinkertaista aikataulutusongelmaa, jossa halutaan järjestää tentit eri päiville, jotta opiskelijat voivat käydä jokaisen kurssin tentissä ilman päällekäisyyksiä. Esimerkkikurssilla MAT1 on yhteisiä opiskelijoita kurssien OHJ1 ja KEM1 kanssa, mutta kursseilla OHJ1 ja KEM1 ei ole yhteisiä opiskelijoita. Selvästi tässä tilanteessa tarvitsee vähintään kaksi tenttiaikaa, jotta OHJ1 ja KEM1 tentti voi olla eri aikaan kuin MAT1 tentti. Graafien värityksen avulla voidaan hyvin mallintaa tällaista tilannetta ja etsiä ratkaisua, kunhan kursseja ei ole erittäin montaa. Jos aikataulutettavia kurssin tenttejä on paljon, niin tietokoneen ei välttämättä voi olettaa pystyvän laskemaan optimaalista aikataulua kovin nopeasti. Algoritmin ei välttämättä tarvitse etsiä optimaalista aikataulua, vaan approksimaatio riittää jos ajan säästö on sen arvoista.

Tässä kandidaatintyössä keskitytään juuri siihen, että miksi graafin väritys on hankalaa monimutkaiselle ja suurelle graafille, eikä käytännössä hyödyllisiin algoritmeihin jotka approksimoivat tarpeeksi hyvän värityksen. Tavoitteena on esittää tarvittavat graafiteorian alkeet sekä näyttää merkityksellisiä tuloksia graafien väritykseen liittyen siten, että lukijan on mahdollisuus saada käsitys graafien värityksen perustuloksista, kuten tasograafien 4-väritettävyys ja k-väritettävyyden NP-täydellisyyys. Tasograafien 4-väritys on sama asia kuin karttojen 4-väritys, mutta graafien kannalta tarkasteltuna. k-väritettävyyden NP-täydellisyys sen sijaan liittyy algoritmien laskennan tehokkuuteen. NP-täydellisyys on merkittävä sen takia, että kun k-väritettävyys tunnetaan NP-täydelliseksi, voidaan olla melko varmoja että optimaalista ratkaisua on hankala löytää tehokkaasti, joten k-

värityksen ratkaisut ovat yleensä approksimoituja. Lisäksi tarkastellaan graafin mahdollisten väritysten määrää esimerkiksi kromaattisella polynomilla.

Luvussa 2 käsitellään graafeihin liittyviä termejä graafien väritykseen liittyen. Tämän luvun käsitteet ovat pohjana muille luvuille, koska graafien käsitteistöä ei oleteta tunnetuksi. Graafien väritykseen päästään varsinaisesti luvussa 3, jossa graafien väritys määritellään ja käsitellään erilaisia tuloksia värityksiin liittyen. Luvussa 4 käsitellään graafien värityksen aikavaativuutta. Monet aikavaativuuteen liittyvät käsitteet esitellään ensin, ja sitten tarkastellaan, miten k-väritys liittyy niihin. Luvussa 5 kootaan asioita yhteen ja tarkastellaan miten graafien värityksen aikavaativuus vaikuttaa ratkaisujen etsimiseen käytännön tilanteissa. Lisäksi luvussa 5 tarkastellaan millaisia seurauksia k-värityksen käyttämisellä aikavaativuusongelmien selvittämiseen olisi yleisesti.

2 GRAAFIT JA GRAAFILUOKAT

Tässä luvussa käsitellään graafien värityksen kannalta merkityksellisimpiä määritelmiä graafeihin liittyen. Useimmat graafiteorian käsitteet voidaan määritellä eri tavoin, mutta tähän kappaleeseen on valittu graafien värityksen kannalta havainnolliset määritelmät.

Graafin sisältämä tieto on helppo ymmärtää esimerkiksi kuvan avulla, sillä graafi koostuu alkioista ja niiden välisistä yhteyksistä. Graafit on kuitenkin määriteltävä täsmällisemmin, jotta niiden matemaattisia ominaisuuksia voidaan tutkia.

Määritelmä 2.0.1. *Graafi* $G(V, E)$ on rakenne, joka koostuu joukosta *solmuja* $\emptyset \neq V = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ ja joukosta *kaaria* $E = \{(x_1, y_1), (x_2, y_2), ..., (x_m, y_m)\}$. $x_1, .., x_n \in V$ ja $y_1, ..., y_n \in V$. Kaari on *silmukka*, jos se on on muotoa (x, x).

Määritelmä 2.0.2. $G'(V', E')$ on graafin $G(V, E)$ *aligraafi*, jos $\emptyset \neq V' \subseteq V$ ja $E' \subseteq E$.

Merkitään graafin solmujen määrää $|V|$ ja kaarien määrää $|E|$. Jos on tarpeellista täsmentää, minkä graafin solmuja tai kaaria tarkoitetaan, voidaan graafin G solmujen määrää merkitä $V(G)$ ja kaarien määrää $E(G)$.

Määritelmä 2.0.3. Graafin solmun v *aste* on solmusta v lähtevien kaarien määrä, ja sitä merkitään deg(v). Graafin solmujen suurinta astetta merkitään $\Delta(G) = \max\limits_{v \in V}\{\text{deg}(v)\}$.

Määritelmä 2.0.4. Graafin solmut ovat *vierekkäiset*, jos niiden välillä on kaari.

Määritelmä 2.0.5. Graafi $G(V, E)$ on *yhtenäinen*, jos jokaiselle parille $a \in V$ ja $b \in V$ löytyy sellaiset solmut $v_1, v_2, \ldots, v_n$, että $a = v_1$, $b = v_n$ ja $(v_i, v_{i+1}) \in E$ kaikilla $i = 1, \ldots, n-1$.

Graafeja voidaan luokitella niiden kaarista löytyvien säännöllisyyksien avulla. Esimerkiksi tasograafit ja kaksijakoiset graafit ovat helposti ymmärrettäviä graafiluokkia, joiden väritykseen liittyy mielenkiintoisia tuloksia. Seuraavaksi määritellään graafiluokkia, joiden väritettävyyttä tarkastellaan seuraavassa luvussa.

Määritelmä 2.0.6. Graafi on *tasograafi*, jos se on mahdollista piirtää tasolle ilman risteäviä kaaria

Määritelmä 2.0.7. Graafi on *sykli*, jos se on yhtenäinen ja jokaisella solmulla on täsmälleen 2 vierekkäistä solmua. Sykliä, jossa on n solmua, merkitään C_n.

Määritelmä 2.0.8. Graafi on *kaksijakoinen*, jos solmujen joukko on kahden erillisen joukon yhdiste, joista kummassakaan joukossa ei ole joukon solmujen välillä kaaria. Joukot ovat erillisiä, jos niillä ei ole yhteisiä alkioita.

Kaksojakoiselle graafille on myös mahdollista tehdä vaihtoehtoinen määritelmä, joka on lyhyempi, mutta yhtäpitävä.

Lause 2.0.9. *Graafi on kaksijakoinen, jos ja vain jos kaikki siinä olevat syklit ovat parillisia.*

Tämän voi osoittaa todistuksella, joka löytyy kirjasta [3]. Todistuksessa käytetään graafeihin liittyviä algoritmeja, jotka eivät ole kandidaatintyön kannalta olennaisia, ja siksi todistusta ei käsitellä. Lause kuitenkin mahdollisesti helpottaa kaksijakoisen graafin rakenteen ymmärtämistä ja vaihtoehtoinen määritelmä on helppokäyttöisempi tietynlaisissa todistuksissa.

Määritelmä 2.0.10. Graafi on *yksinkertainen*, jos kahden solmun välillä on korkeintaan yksi kaari ja mikään kaari ei ole silmukka.

Graafien värityksessä tullaan tarkastelemaan vain yksinkertaisia graafeja, koska graafin aito väritys määritellään siten, että vierekkäiset solmut väritetään erivärisiksi. Jos graafissa olisi silmukka, niin väritys ei olisi mahdollista, koska silmukan solmu on vierekkäinen itsensä kanssa joten se pitäisi värittää kahdella eri värillä.

Määritelmä 2.0.11. Graafi on *polku*, jos se on yhtenäinen ja jokaisen solmun aste on korkeintaan kaksi. Polkua, jossa on n solmua, merkitään P_n.

Määritelmä 2.0.12. Graafi on *puu*, jos jokaisen solmuparin välille on mahdollista muodostaa täsmälleen yksi polku aligraafi, jonka päätepisteinä ovat kyseisen solmuparin solmut.

3 GRAAFIEN VÄRITYS

Graafin värityksellä tarkoitetaan merkintää, jolla graafin solmuille annetaan jostakin joukosta arvoja. Graafien värityksessä ei siis ole tarkoituksena kirjaimellisesti värittää graafia, vaan nimitys johtuu karttojen värityksen historiasta. Graafin solmuille annettavat arvot voivat olla värien sijaan yksinkertaisesti esimerkiksi lukuja jostakin joukosta.

3.1 k-väritys

Määritelmä 3.1.1. Graafin k-*väritys* on funktio $f : V(G) \to S$, missä $|S| = k$. Maalijoukon alkioita kutsutaan *väreiksi* ja yhden värin solmut muodostavat *väriluokan*. k-väritys on *aito*, jos kaikilla vierekkäisillä solmuilla on eri värit. Graafi on k-*väritettävä*, jos sillä on aito k-väritys. *Kromaattinen luku* $\chi(G)$ on pienin sellainen luku k, jolla G on k-väritettävä.

Esimerkki 3.1.2. Graafi on 2-väritettävä jos ja vain jos se on kaksijakoinen. 2-väritettävä graafi on kaksijakoinen, koska solmut voidaan jakaa kahteen joukkoon siten, että yhdellä värillä väritetyt solmut ovat yhdessä joukossa ja toisella värillä väritetyt solmut ovat toisessa joukossa. Tällöin kummankaan joukon alkioiden välillä ei ole kaaria, koska samanväriset solmut eivät voi olla vierekkäisiä. Toisaalta kaksijakoinen graafi on 2-väritettävä, koska solmut voidaan jakaa kahteen erilliseen joukkoon, joiden sisällä solmujen välillä ei ole kaaria. Tällöin yhden näistä joukoista voi värittää yhdellä värillä ja toisen joukon voi värittää toisella värillä.

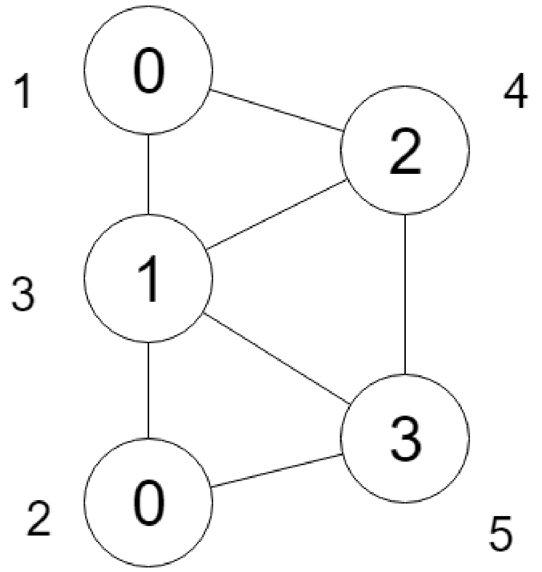
3.2 Graafin aidon k-värityksen laskeminen

Yksinkertainen tapa värittää graafi on antaa kaikille solmuille eri väri. Koska tällainen väritys on aito, niin $\chi(G) \leq |V(G)|$. Tämä ei kuitenkaan yleensä ole tarpeeksi hyvä ratkaisu, koska värejä halutaan yleensä käyttää mahdollisimman vähän. Seuraavan algoritmin avulla voidaan löytää graafille huomattavasti vähemmän värejä käyttävä väritys.

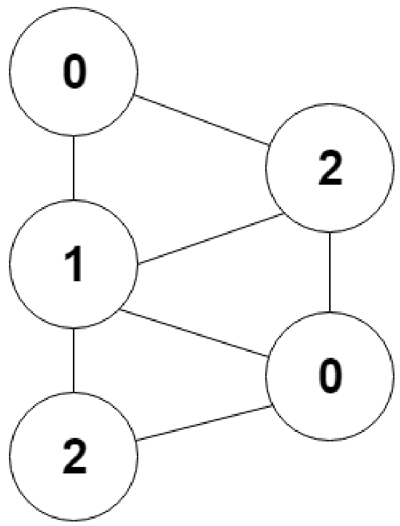
Algoritmi 3.2.1. *(Ahne väritys) Graafin solmut laitetaan järjestykseen $v_1, ..., v_n$ ja värien joukko on värien joukko on järjestyksessä $s_1, s_2, ...s_m$. Ahne väritys saadaan värittämällä solmut järjestyksessä $v_1, ..., v_n$ siten, että solmussa v_i on värijoukosta pienimmän indeksin väri, joka ei ole käytössä sen viereisissä solmuissa.*

Keskimäärin ahne väritys käyttää kaksi kertaa enemmän värejä kuin minimimäärä värejä graafille olisi. Huonolla solmujen järjestyksellä algoritmi voi käyttää turhan paljon värejä jopa puugraafissa. [6]

Esimerkki 3.2.2. Tarkastellaan, kuinka ahneen algoritmin solmujen väritysjärjestys voi vaikuttaa graafissa olevien värien määrään. Kuvan 3.1 graafin solmut on väritetty järjestyksessä, joka näkyy solmujen ulkopuolella olevasta numerosta, ja käytettävät värit ovat $0, 1, 2, 3$. Jos Kuvassa 3.1 väritysjärjestys olisi $1, 5, 3, 4, 2$, niin päädyttäisiin graafiin, jossa on käytetty yksi väri vähemmän (Kuva 3.2).



Kuva 3.1. *Esimerkkiin 3.2.2 liittyvä graafi.*



Kuva 3.2. *Vähiten värejä käyttävä väritys Kuvan 3.1 graafille*

Ahne väritys pystyy löytämään parhaan mahdollisen värityksen, eli vähiten värejä käyttävän, jos solmujen väritysjärjestys on sopiva. Tämän voi huomata esimerkiksi tarkastelemalla tilannetta, jossa vähiten värejä käyttävä väritys on löytynyt. Tällöin voidaan värittää värien järjestyksen mukaan ensin kaikki yhden väriset solmut, sen jälkeen kaikki toisen väriset ja niin edelleen. Tällöin päädytään varmasti samaan väritykseen. Kuvassa 3.2

olevan graafin väritys löytyisi ahneella värityksellä siten, että väritetään solmut lähtien pienimmästä väristä, eli solmujen värien mukaan järjestyksessä $0, 0, 1, 2, 2$. Jos kahdella tai useammalla solmulla on sama väri, ei ole merkitystä mikä solmuista väritetään ensin.

Voi olla, että ongelmana on pienimmän värimäärän värityksen löytäminen. Periaatteessa pienimmän värimäärän väritys olisi mahdollista löytää ahneella algoritmilla, jos olisi jokin helppo keino päätellä, missä järjestyksessä solmut kannattaa värittää ilman, että tietää tarkkaa väritystä. Tähän käyttötarkoitukseen hyvän väritysjärjestyksen löytäminen on kuitenkin hankalaa, ja asiaa käsitellään tarkemmin luvussa 4.

Ahne väritys ei löydä tietyn värimäärän väritystä ilman, että algoritmia toistetaan monella eri väritysjärjestyksellä. On muita algoritmeja, jotka pystyvät löytämään graafin värityksen tarkalla määrällä värejä [2], mutta niistä suurimman osan toiminta vaatii melko paljon taustatietoa tämän kandidaatintyön ulkopuolelta. Olennaisin tieto näistä algoritmeista on, että ne toimivat hitaasti, ja tähän ongelmaan palataan luvussa 4.

3.3 Graafien kromaattisen luvun yläraja

Ahneen värityksen algoritmilla saadaan kromaattiselle luvulle melko yksinkertainen yläraja liittyen graafin suurimpaan asteeseen. Graafin suurin aste on helppo laskea, koska jokaisen solmun aste voidaan laskea erikseen ja tarkistaa, mikä asteista oli suurin.

Lause 3.3.1. $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$

Todistus. Solmujen järjestyksessä jokaisella solmulla on enintään $\Delta(G)$ vierekkäistä solmua, joten ahne väritys ei voi käyttää enempää kuin $\Delta(G) + 1$ väriä. Tämä todistaa sen, että $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$. $\square$

Tätä ylärajaa saadaan parannettua kaikille paitsi täydellisille graafeille ja parittomille sykleille.

Lause 3.3.2. *Jos graafi G on yhtenäinen, mutta se ei ole täydellinen graafi tai pariton sykli, niin $\chi(G) \leq \Delta(G)$.*

Lauseessa vaaditaan, että graafin kaikki solmut ovat yhdistettynä toisiinsa jotakin reittiä pitkin, jotta vältytään tarpeettommalta monimutkaisuudelta. Todistuksessa on ideana, että solmujen järjestys voidaan valita ahneeseen väritykseen sellaisella tavalla, että päästään parempaan ylärajaan. Tarkka todistus on kuitenkin melko monimutkainen. [6]

Lause 3.3.3. *Jokainen tasograafi on 4-väritettävä*

Lauseen todistus löytyy teoksesta [1]. Lause todistettiin vuonna 1976, ja tietokoneen keksimisestä oli apua, koska lause todistettiin tavalla, jolla tietokonesta oli apua todistuksessa. Tasograafien 6-väritettävyys sekä 5-väritettävyys todistettiin ennen 4-väritettävyyttä, koska ne ovat selvästi yksinkertaisempia tapauksia. Tasograafien 6-väritettävydellä ja 5-väritettävyydellä on merkitystä nykyäänkin niiden todistuksessa käytettyjen tekniikoiden vuoksi, eikä niiden todistuksessa käytetä tietokonetta. Poikkeuksena sille, että tasograafeille 1-,2- ja 4-väritys sekä tiestysti suuremmat kuin 4-väritykset ovat helposti määritettävissä on, että 3-väritettävyyttä ei voida määrittää ilman tarkempaa laskentaa.

3.4 Graafin kromaattinen polynomi

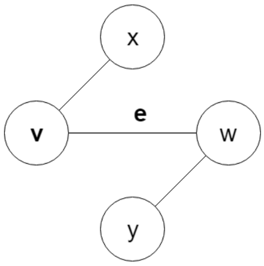
Tarkastellaan graafin eri väritysten määrää, kun käytettävien värien lukumäärä kasvaa. Kun värejä on käytössä k verran, eri värejä voi laittaa k kappaletta jokaiseen graafin solmuun, jolloin 'värityksiä' olisi $k^{|V(G)|}$ verran, mutta suuri osa tällä tavalla muodostetuista värityksistä ei ole aitoja värityksiä. Aitoja värityksiä ovat vain ne, joissa vierekkäisillä solmuilla ei ole samaa väriä. Tässä luvussa osoitetaan, että myös graafin aitojen väritysten lukumäärä kasvaa polynomin mukaan värien määrän suhteen, ja tätä polynomia kutsutaan kromaattiseksi polynomiksi.

Kromaattinen polynomi kuvaa, kuinka monta aitoa väritystä graafille on kullakin värien määrällä. Kromaattinen polynomi on vaikeampi löytää kuin esimerkiksi kromaattinen luku, koska kromaattinen polynomi kuvaa paljon enemmän tietoa graafin värityksistä. Kromaattinen luku on ensimmäinen värien lukumäärän arvo, jolla kromaattinen polynomi on suurempi kuin nolla. Merkitään kromaattista polynomia $P(G,k)$. Tässä polynomissa ei ole vakiotermiä, koska graafia ei voida värittää nollalla värillä.

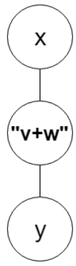
Esimerkki 3.4.1. Osoitetaan, että n-solmuisen puugraafin kromaattinen polynomi on $k(k-1)^{n-1}$. Valitaan aluksi mielivaltainen solmu, jonka voi värittää k värillä. Tämän jälkeen väritetään yksi kerrallaan jo väritettyjen solmujen vierussolmuja, jotka voi värittää $k-1$ värillä, koska jokainen solmu voi käyttää kaikkia paitsi vierekkäisen solmun väriä. Näin voidaan tehdä, koska puugraafissa vierekkäisiä väritettyjä solmuja on kaikkien paitsi ensimmäisen solmun värityksessä vain yksi. Mahdollisia aitoja värityksiä on siis yhteensä $k(k-1)^{n-1}$, joka on graafin kromaattinen polynomi.

Tiedetään, että puugraafit ovat 2-väritettäviä, koska puugraafeissa ei voi olla minkäänlaista sykliä aligraafina, joten lauseen 2.0.9 mukaan puugraafit ovat kaksijakoisia, eli siten ne ovat myös 2-väritettäviä esimerkin 3.1.2 mukaan. $2(2-1)^{n-1}=2$, eli puugraafit voi värittää kahdella eri tavalla kahdella värillä. Kun puugraafi väritetään yhdellä värillä, huomataan, että $1(1-1)^{n-1}=\begin{cases}0 & n>1\\ 1 & n=1\end{cases}$. Puugraafin kromaattinen luku siis on 1, jos puugraafissa on vain yksi solmu. Muissa tapauksissa kromaattinen luku on 2, koska puugraafin pystyy värittämään kahdella värillä riippumatta solmujen määrästä.

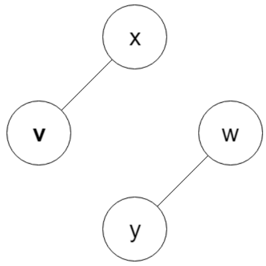
Seuraavaksi todistetaan, että aitojen väritysten määrä kasvaa polynomin mukaan värien lukumäärään nähden. Sitä ennen tarvitaan kuitenkin määritelmä ja aputulos todistusta varten.



(a) *Graafi G.*



(b) *Graafi G, johon on tehty kaaren e kutistaminen.*



(c) *Graafi G, johon on tehty kaaren e poistaminen.*

Määritelmä 3.4.2. Merkitään graafia G, josta on *poistettu* kaari e graafina $G-e$ ja graafia G, josta on *kutistettu* kaari e graafina G/e. Graafi $G-e$ muodostetaan graafista G poistamalla kaari e kaarien joukosta. Graafi G/e muodostetaan graafista G siten, että graafin G kaarella e yhdistetyneet solmut korvataan yhdellä solmulla, johonka liittyy kaikki kaaret, jotka liittyivät kaarella e yhdistettyihin solmuihin. Kaari e jätetään pois graafista G/e, koska muuten graafissa olisi silmukka.

Lause 3.4.3. *Olkoon G graafi ja $G-e$ sekä G/e graafeja, jotka on saatu graafista G poistamalla ja kutistamalla kaari e. Tällöin*

$$P(G,k) = P(G-e,k) - P(G/e,k).$$

Todistus. Olkoot v ja w vierekkäisiä solmuja graafissa G ja kaari $e=(v,w)$. Tarkastellaan graafin $G-e$ väritysten määrää kahdessa tapauksessa, joissa solmuilla v ja w on joko eri värit tai samat värit.

Sellaiset graafin $G-e$ väritykset, joissa solmuilla v ja w on eri värit ovat myös graafin G värityksiä, koska kaaren lisääminen eri väristen solmujen välille pitää värityksen aitona. Tällaisten graafin $G-e$ väritysten määrä on sama kuin graafilla, jossa solmut v ja w ovat yhdistettynä, joka on graafi G. Siis tässä tapauksessa väritysten määrä on $P(G,k)$.

Samalla tavalla jos solmuilla v ja w on samat värit, niin graafin $G-e$ väritysten määrä ei muutu, kun v ja w samaistetaan solmuksi vw, koska samaistetun solmun vierekkäiset solmut pysyvät erivärisinä, eli väritys pysyy aitona. Tällaisten graafien $G-e$ väritysten määrä on $P(G/e,k)$.

Graafin $G-e$ värityksissä solmuilla v ja w voi olla joko eri värit tai samat värit, ja molemmat tapaukset käsiteltiin. Yhdistämällä nämä kaksi tapausta saadaan summa graafin $G-e$ värityksille, $P(G-e,k) = P(G,k) + P(G/e,k)$. Lauseen 3.4.3 tulos seuraa, kun termin $P(G/e,k)$ vähentää yhtälön molemmilta puolilta. $\square$

Vielä ei ole todistettu, että graafin k-väritysten määrä saadaan ilmaistua polynomin avulla, vaikka väritysten määrän funktio on nimetty kromaattiseksi polynomiksi.

Lause 3.4.4. $P(G,k)$ *on polynomi k:n suhteen.*

Todistus. Käyttämällä lausetta 3.4.3 voidaan valita uusi kaari f graafeihin $G-e$ ja G/e poistettavaksi ja kutistettavaksi kaareksi, jolloin $P(G-e,k) = P(G-e-f,k) - P(G-e/f,k)$ ja $P(G/e,k) = P(G/e-f,k) - P(G/e/f)$. Tätä periaatetta jatketaan, kunnes päädytään graafeihin, joissa ei ole enää kaaria jäljellä, ja tällaisen graafin $G_{kaareton}$ väritysten määrä on $P(G_{kaareton},k) = k^{|V(G_{kaareton})|}$. Lauseen 3.4.3 avulla pystytään laskemaan kaikkien muodostettujen kaarettomien graafien sekä niistä muodostuneiden graafien kromaattiset polynomit, erityisesti pystytään laskemaan $P(G,k)$ ja päädytään siihen, että $P(G,k)$ on polynomi, koska siinä on pelkästään polynomitekijöitä. □

Lauseella 3.4.3 saadaan yleisesti graafien kromaattiset polynomit laskettua samalla tavalla kuin Lauseen 3.4.4 todistuksessa. Lausetta ei kuitenkaan tarvitse soveltaa joka kerta kaarettomiin graafeihin asti, vaan riittää päästä graafeihin, joiden kromaattiset polynomit on helppo laskea, kuten puugraafeihin. Tällä tavalla voi vähentää tarvittavien laskutoimitusten määrää.

Seuraavassa esimerkissä on löydetty syklille kromaattinen polynomi. Kromaattinen polynomi osoitetaan oikeaksi käyttämällä lausetta 3.4.3.

Esimerkki 3.4.5. Syklin C_n kromaattinen polynomi on $(k-1)^n + (k-1)(-1)^n$.

Osoitetaan, että syklin kromaattinen polynomi on oikea induktiolla. Syklissä on vähintään kolme solmua. Kun $n=3$, niin selvästi kolmen solmun sykliin vaaditaan kolme eri väriä, ja kromaattinen polynomi on $P(C_3,k) = k(k-1)(k-2)$.

$$P(C_3,k) = k(k-1)(k-2) = k^3 - 3k^2 + 3k - 1 + 1 - k = (k-1)^3 + (-1)^3(k-1)$$

Väite siis pätee, kun $n=3$. Induktio-oletuksena on, että $P(C_n,k) = (k-1)^n + (-1)^n(k-1)$. Käyttämällä Lausetta 3.4.3 graafiin C_{n+1} saadaan, että

$$P(C_{n+1},k) = P(C_{n+1}-e,k) - P(C_{n+1}/e,k)$$

C_{n+1}/e on sykli, jossa on yksi solmu vähemmän, joten voidaan käyttää induktio-oletusta.

$$P(C_{n+1}/e,k) = P(C_n,k) = (k-1)^n + (-1)^n(k-1)$$

$C_{n+1}-e$ taas on polku, jossa on $n+1$ solmua. Esimerkin 3.4.1 mukaisesti polkugraafin kromaattinen polynomi tunnetaan, koska polkugraafi on myös puugraafi.

$$P(C_{n+1}-e,k) = P(P_{n+1},k) = k(k-1)^n$$

Lauseen 3.4.3 mukaan

$$\begin{aligned}
P(C_{n+1},k) &= P(C_{n+1}-e,k) - P(C_{n+1}/e,k) \\
&= k(k-1)^n - (k-1)^n - (k-1)^n - (-1)^n \cdot (k-1) \\
&= (k-1)^n + (k-1)(-1)^n
\end{aligned}$$

4 K-VÄRITYKSEN AIKAVAATIVUUS

Tässä luvussa tarkastellaan, kuinka työlästä on laskea esimerkiksi graafin k-väritys laskutoimitusten määrän suhteen. Graafin G k-värityksen voi laskea käymällä läpi graafin värityksiä, joita on $k^{|V|}$ kappaletta, kunnes löytyy graafin aito väritys. Monet algoritmit pystyvät tätä tehokkaampaan ratkaisuun, mutta mikään tunnettu algoritmi ei pysty ratkaisemaan graafin k-väritystä nopeasti, kun väritettävä graafi on tarpeeksi suuri ja siinä olevista kaarista tai muusta rakenteesta ei ole tehty minkäänlaisia oletuksia.

Tässä luvussa tullaan lisäksi käsittelemään, mitä seurauksia tehokkaalla algoritmilla olisi, jos sellainen löydettäisiin. k-väritys voitaisiin laskea esimerkiksi ahneella värityksellä, jos optimaalinen väritysjärjestys olisi tarpeeksi helppo löytää, mutta kuten kaikki muutkin tunnetut tavat laskea k-väritys, tämä ei toimi tarpeeksi nopeasti. Kuitenkin mikä tahansa tehokas tapa laskea k-väritys olisi riittävä merkittävään matemaattiseen tulokseen. k-värityksen laskennan ongelmallisuuden voi osoittaa vertailemalla sitä erään toisen ongelman laskentaan. Jotta algoritmien tehokkuuksia voi verrata matemaattisesti, on ensin määriteltävä niiden laskennan vaativuuteen liittyviä käsitteitä.

4.1 Aikavaativuus

Graafien tapauksessa laskennan vaativuutta tarkastellaan solmujen määrän kannalta. Laskennan vaativuus määräytyy tarvittavien laskutoimitusten määrän kasvun mukaan syötekoon kasvaessa. Koska jokaisen laskutoimituksen voidaan ajatella vievän vakiomäärän aikaa, niin tätä laskennallista vaativuutta voidaan käsitellä aikavaativuutena. Aikavaativuudella ei kuitenkaan ole yksikköinä esimerkiksi sekuntia, koska laskentatehokkuus voi riippua monesta tekijästä.

Aikavaativuutta voidaan verrata eri laskentaongelmien välillä, koska laskutoimituksia tarvitaan ongelmien ratkaisuun vähintään tai enintään tietty määrä riippuen syötteestä, ja joissakin tapauksissa laskutoimitusten määrän rajat voidaan päätellä. Luokiteltaessa aikavaativuutta ongelmat pitää esittää muodossa, jossa niiden ratkaisun tehokkuutta on yksinkertaista verrata. Tällä tavalla ongelmat saadaan lajiteltua aikavaativuusluokkiin.

Määritelmä 4.1.1. *Päätösongelma* on ongelma, jonka vastaus on 'kyllä' tai 'ei' riippuen syötteestä.

Päätösongelmia pystytään lajittelemaan kahteen aikavaativuusluokkaan, P ja NP. On myös muita aikavaativuusluokkia, mutta suurin osa ongelmista, kuten k-väritys, kuuluu ainakin yhteen näistä kahdesta aikavaativuusluokasta. Ongelmien aikavaativuus määritellään niiden ratkaisun suorituskyvyn mukaan. Suorituskyky esitetään funktiona, joka riippuu graafin solmujen määrästä. Päätösongelman aikavaativuudeksi määritellään pienin mahdollinen pahimman tapauksen suoritusaika kaikista mahdollisista suorituskyvyn funktioista.

Päätösongelmien jakaminen aikavaativuusluokkiin perustuu siihen, onko niille tunnettua algoritmia, joka toimii deterministisesti polynomiajassa tai ei-deterministisesti polynomiajassa. Deterministisesti polynomiajassa toimivan algoritmin askeleet ovat pääteltävissä joka tilanteessa, ja niihin kuluu polynomin mukaan kasvava aika. Ei-deterministisesti polynomiajassa toimivan algoritmin askeleet voivat muistuttaa satunnaisesti toimivaa algoritmia, mutta algoritmi voi itse valita, mikä kaikista vaihtoehtoisista askeleista valitaan jokaisella askeleella. Näihin askeleisiin menee kuitenkin polynomin mukaan kasvava aika. [5] Ei-deterministisen algoritmin toimintaa voidaan selventää seuraavan esimerkin avulla.

Esimerkki 4.1.2. Etsitään graafille pienimmän värimäärän k-väritystä ahneella värityksellä siten, että väritysjärjestystä ei tarvitse antaa algoritmille. Algoritmin siis pitää valita solmu ja sitten värittää se, kunnes koko graafi on väritetty. Esimerkissä 3.2.2 huomattiin, että aina on olemassa jokin ahneen värityksen väritysjärjestys, jolla päästään optimaaliseen väritykseen. Ei-deterministisen algoritmin voidaan ajatella toimivan niin, että se "arvaa" joka solmun väritysjärjestyksessä sen mukaan, millä löytyy vähiten värejä käyttävä väritys. Koska solmuja on väritettävä n kappaletta, niin tällainen algoritmi toimii polynomisessa ajassa.

Ei-deterministisen algoritmin siis pitää pystyä valitsemaan vaihtoehtojen välillä, ja sen valinnat sattuvat olemaan aina oikeat. Ei-deterministinen algoritmi eroaa satunnaisuutta käyttävistä algoritmeista esimerkiksi siinä, että se antaa aina saman lopputuloksen tietylle syötteelle, eivätkä valinnat ole satunnaisia. Ei-deterministiselle laskennalle on luotu paljon teoriaa, vaikka realistiset koneet eivät voi käyttää sitä. Päätösongelmat voitaisiin jakaa vaativuusluokkiin NP ja P siten, että tunnetusti ei-determinisesti polynomiajassa laskettavat ongelmat kuuluvat vaativuusluokkaan NP, ja deterministisesti polynomiajassa laskettavat ongelmat kuuluvat vaativuusluokkaan P. Päätösongelma voi siis kuulua myös molempiin. Seuraava määritelmä on kuitenkin mahdollisesti yksinkertaisempi, koska ainoastaan determinististä laskentaa tarvitaan määritelmään.

Määritelmä 4.1.3. Päätösongelma kuuluu *vaativuusluokkaan NP*, jos jokaisessa tapauksessa, jossa ongelman vastauksena on 'kyllä', vastauksen pystyy tarkistamaan deterministisesti polynomiajassa. Deterministisesti polynomiajassa ratkaistavat päätösongelmat kuuluvat *vaativuusluokkaan P*.

Aikavaativuutta mitataan eniten aikaa vievän tapauksen mukaan kaikista mahdollisista syötteistä. Vaativuusluokkaan P kuuluvien ongelmien aikavaativuus on siis $O(f(n))$

jollakin polynomilla $f(n)$. P-luokassa olevat ongelmat pystyy yleensä laskemaan paljon nopeammin kuin vaativuusluokan NP ongelmat suurella syötekoolla, joten on tärkeää tietää, onko ongelmaa edes mahdollista ratkaista deterministisesti polynomiajassa. NP-luokassa olevan ongelman ratkaisu voi kestää niin kauan, ettei sitä voi harkita ratkaisuvaihtoehtona, vaan joudutaan approksimoimaan tai yksinkertaistamaan ongelmaa.

Monelle NP-luokassa olevalle päätösongelmalle on hankalaa osoittaa, kuuluuko ongelma myös luokkaan P vai ei. On mahdollista määritellä NP-kovat ongelmat, joiden kuuluvuus P-luokkaan osoittaisi, että jokainen NP-luokassa oleva ongelma kuuluisi P-luokkaan. Ongelma on NP-kova, jos sille löytyvän deterministisesti polynomiajassa toimivan algoritmin avulla pystyisi tekemään deterministisesti polynomiajassa toimivan algoritmin jokaiselle ongelmalle NP-luokassa. Ongelma on NP-täydellinen, jos ongelma kuuluu NP-luokkaan ja se on NP-kova.

Ongelmien aikavaativuutta voidaan selvittää käyttämällä ongelman muunnosta toiseen. P-luokkaan kuuluvia ongelmia pidetään tehokaasti ratkaistavina, joten asiayhteydestä riippuen voidaan käyttää tätä ilmaisua koska se on helpommin ymmärrettävä.

Määritelmä 4.1.4. Jos ongelma A on mahdollista palauttaa toiseen ongelmaan B polynomisessa ajassa ja ongelma B kuuluu luokkaan P, niin myös ongelma A kuuluu luokkaan P.

Jos ongelma A on NP-kova ja se on mahdollista palauttaa ongelmaan B polynomisessa ajassa, niin myös B on NP-kova.

Ideana on nyt etsiä jokin tunnettu NP-täydellinen ongelma, joka voidaan muuttaa halutuksi ongelmaksi polynomisessa ajassa. Eräs NP-täydellinen päätösongelma on Boolen toteutuvuusongelma. Boolen toteutuvuusongelmassa syötteenä on looginen kaava esitettynä lauseiden listana, joista jokainen lause on kokoelma literaaleja. Lausetta pidetään totena, jos ainakin yksi sen literaaleista on tosi.

Määritelmä 4.1.5. 3-toteutuvuus (3-SAT)
Syöte: Joukko loogisia muuttujia $U = u_j$ ja joukko lauseita $\boldsymbol{C} = C_i$, joista jokainen lause on enintään kolmen loogisen muuttujan disjunktio, kun looginen muuttuja on u_i tai sen negaatio $\bar{u}_i$
Päätösongelma: Voidaanko muuttujien arvot asettaa todeksi tai epätodeksi siten, että jokaisen lauseen ehto 'toteutuu' (eli ainakin yhden loogisen muuttujan arvo on tosi)?

3-toteutuvuus on siis Boolen toteutuvuusongelman erikoistapaus, jossa lauseet voivat koostua enintään kolmesta loogisesta muuttujasta. Käytetään 3-toteutuvuudesta 3-SAT-lyhennettä.

Lause 4.1.6. *3-SAT on NP-täydellinen.*

Todistus ei liity graafeihin, mutta tulosta silti tarvitaan seuraavassa aliluvussa määrittämään 3-väritettävyyden aikavaativuus.

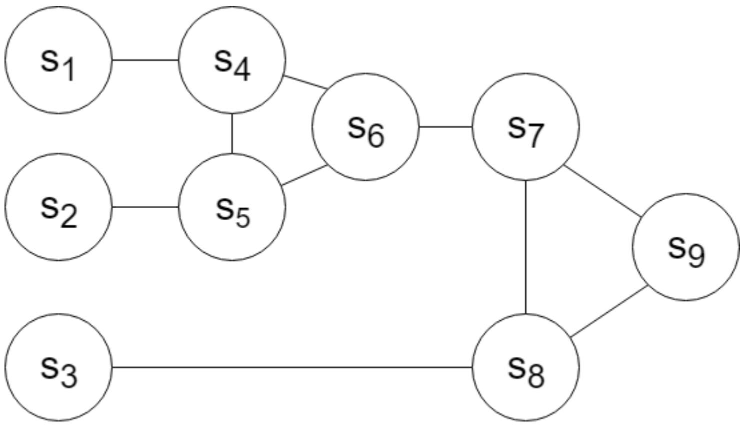
4.2 k-väritettävyys

Tarkastellaan graafien värityksen aikavaativuutta. Ensiksi muotoillaan graafien k-väritys helposti ymmärrettäväksi päätösongelmaksi.

Määritelmä 4.2.1. *k-väritettävyys*
Syöte: Graafi G, jossa on n solmua ja luku k
Ongelma: Voidaanko graafi G värittää k:lla värillä?

Tässä ongelmassa tarkastellaan, onko graafi väritettävä tietyllä määrällä värejä, joita on ei-triviaaleissa tapauksissa 3 tai enemmän. On helppoa tarkistaa, onko graafi väritettävä yhdellä värillä, koska se on ainoastaan mahdollista, jos graafissa ei ole kaaria. Kahdella värillä väritettävyys on yhtäpitävä sen kanssa, että graafi on kaksijakoinen 3.1.2, joka on mahdollista tarkistaa lineaarisessa ajassa syvyyshaulla [3]. Tarkastellaan 3-väritettävyyden aikavaativuutta ennen k-väritettävyyttä, koska sen avulla saadaan hyödyllinen aputulos k-väritettävyyden aikavaativuuden määrittämiseen. Ennen todistusta tarvitaan kuitenkin seuraava apulause.

Apulause 4.2.2. *Olkoon graafin G solmujen joukko $V = \{s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6, s_7, s_8, s_9\}$ ja kaarien joukko $E = \{(s_1, s_4), (s_2, s_5), (s_4, s_5), (s_4, s_6), (s_5, s_6), (s_6, s_7), (s_7, s_8), (s_7, s_9), (s_3, s_8), (s_8, s_9)\}$ (kuva 4.1) ja olkoon käytettävissä olevat värit 0, 1 ja 2. Graafilla G on seuraavat kaksi ominaisuutta.*



Kuva 4.1. *Apulausetta varten rakennettu graafi G.*

1. *Jos graafin G aidossa 3-värityksessä kaikki solmuista s_1, s_2 ja s_3 on väritetty värillä 0, niin solmu s_9 on välttämättä väritetty värillä 0.*
2. *Jos solmut s_1, s_2 ja s_3 on väritetty väreillä 0 ja 1 ja vähintään yksi näistä solmuista on väritetty värillä 1, niin loput solmut voidaan värittää siten, että solmun s_9 väri on 1 ja väritys on graafin G aito 3-väritys.*

Todistus. Ensimmäisen ominaisuuden voi päätellä seuraavalla logiikalla. Koska solmujen s_1 ja s_2 vieressä olevat solmut s_4 ja s_5 on väritettävä väreillä 1 ja 2, niin s_5 on väritettävä värillä 0. Solmut s_7 ja s_8 on myös väritettävä väreillä 1 ja 2, koska solmut s_3 ja s_6 on väritetty värillä 0.

Toisen ominaisuuden voi päätellä tarkastelemalla kaikki mahdolliset tavat värittää graafi siten, että ainakin yksi solmuista s_1, s_2, s_3 on väritetty värillä 1, ja huomaamalla että kaikissa tapauksissa solmu s_9 voidaan värittää värillä 1. Tarkastellaan ensin tapausta, jossa solmu s_1 on väritetty värillä 1.

1. Jos solmut s_2, s_3 on väritetty värillä 0, niin solmun s_4 voi värittää värillä 0, solmun s_5 värillä 1, solmun s_6 värillä 2, solmun s_7 värillä 0, solmun s_8 värillä 2 ja solmun s_9 värillä 1.
2. Jos solmut s_2, s_3 on väritetty värillä 1, niin solmun s_4 voi värittää värillä 0, solmun s_5 värillä 2, solmun s_6 värillä 1, solmun s_7 värillä 0, solmun s_8 värillä 2 ja solmun s_9 värillä 1.
3. Jos solmu s_2 on väritetty värillä 1 ja solmu s_3 on väritetty värillä 0, niin solmun s_4 voi värittää värillä 0, solmun s_5 värillä 2, solmun s_6 värillä 1, solmun s_7 värillä 0, solmun s_8 värillä 2 ja solmun s_9 värillä 1.
4. Jos solmu s_2 on väritetty värillä 0 ja solmu s_3 on väritetty värillä 1, niin solmun s_4 voi värittää värillä 0, solmun s_5 värillä 2, solmun s_6 värillä 1, solmun s_7 värillä 0, solmun s_8 värillä 2 ja solmun s_9 värillä 1.

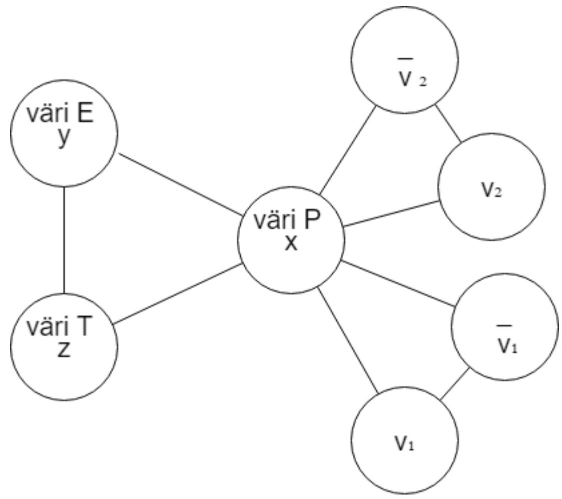
Tarkastellaan seuraavaksi tapausta, jossa solmu s_1 on väritetty värillä 0. Koska solmu s_2 on symmetrinen solmun s_1 kanssa ja tarkasteltiin jo kaikki tapaukset, joissa solmu s_1 on väritetty värillä 1, niin ainoa jäljellä oleva tapaus on, että solmu s_2 on väritettävä värillä 0. Tällöin solmu s_3 on väritettävä värillä 1, koska yksi solmuista s_1, s_2, s_3 on väritetty värillä 1. Tällöin solmun solmun s_4 voi värittää värillä 1, solmun s_5 värillä 2, solmun s_6 värillä 0, solmun s_7 värillä 2, solmun s_8 värillä 0 ja solmun s_9 värillä 1. Siis kaikissa tapauksissa jos jokin solmuista s_1, s_2, s_3 on väritetty värillä 1, niin myös solmu s_9 voidaan värittää värillä 1. □

Lause 4.2.3. *3-väritettävyys on NP-täydellinen.*

Todistus. Tässä ongelmassa on annettu graafi, ja tästä graafista kysytään, onko se 3-väritettävä. Jos se on, niin silloin graafille on olemassa 3-väritys, ja 3-väritys voidaan tarkistaa oikeaksi käymällä läpi kaikki solmut, ja tarkistamalla onko solmun vierkkäisillä solmuilla samaa väriä. Eli 3-väritettävyys on tarkistettavissa neliöllisessä ajassa. Siten 3-väritettävyys kuuluu NP-ongelmiin. Jotta voidaan osoittaa, että se on NP-kova, palautetaan 3-SAT 3-väritettävyyteen ja käytetään määritelmää 4.1.4.

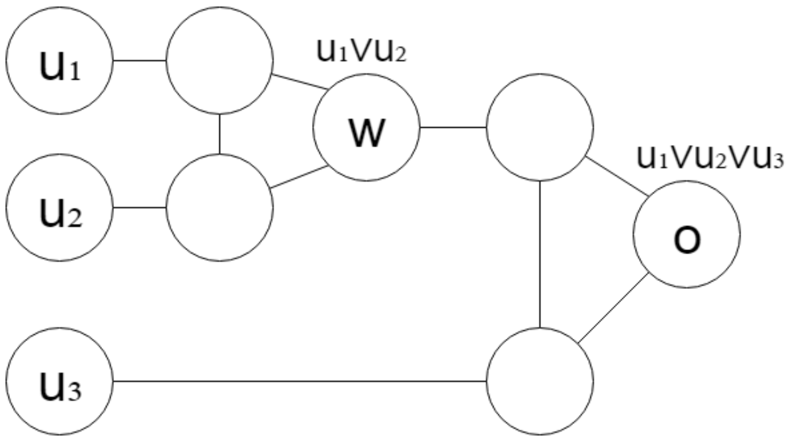
Tarkastellaan 3-SAT tapausta muuttujilla $U = \{u_i\}$ ja lauseilla $\boldsymbol{C} = \{C_j\}$. Muodostetaan graafi G, joka on 3-väritettävä jos ja vain jos tämä 3-SAT tapaus on toteutuva.

Aloitetaan graafin konstruointi lisäämällä siihen solmut, jotka on väritetty väreillä $\{T, E, P\}$ ja näiden välille kaaret. Nimet T ja E vastaavat totuusarvoja tosi ja epätosi. Käytetään näitä kolmea väriä värittämään koko graafi G. Seuraavaksi graafiin lisätään solmut v_i ja $\bar{v}_i$ jokaista lauseissa C_j esiintyvää erillistä muuttujaa u_i kohti ja yhdistetään ne värin P solmuun.



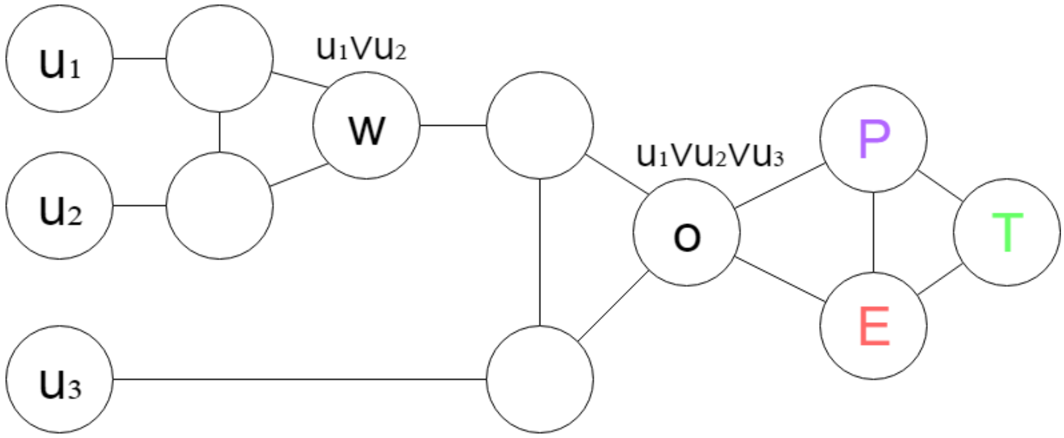
Kuva 4.2. *Graafi G, jossa on väritetty kolmio väreillä P, E ja T sekä muuttujia vastaavat solmut värittämättöminä.*

Jokaista lausetta $C = w_1 \vee w_2 \vee w_3$ kohti lisätään kuusi uutta solmua siten, että muodostuu kuvan 4.3 mukainen apugraafi A. Apugraafissa esiintyvät solmut $\hat{w}_j$ ovat siihen jo aiemmin lisättyjä solmuja v_i tai $\overline{v}_i$. Jos $w_j = u_i$ niin $\hat{w}_j = v_i$. Vastaavasti jos $w_j = \overline{u}_i$, niin $\hat{w}_j = \overline{v}_i$. Lisäksi jokaisen apugraafin A solmu o yhdistetään solmuihin P ja E (kuva 4.4).



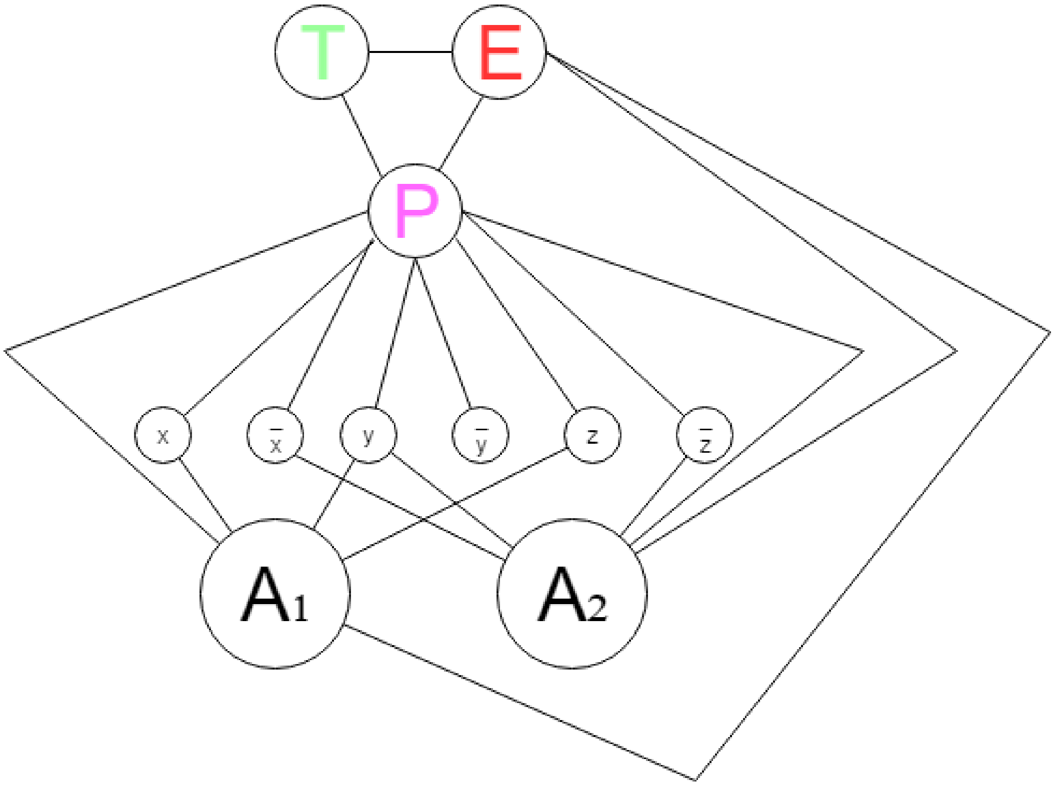
Kuva 4.3. *Apugraafi A, joka kuvaa lauseen $u_1 \vee u_2 \vee u_3$ toteutuvuutta.*

Apugraafin A avulla voidaan kuvata kolmen muuttujan lauseiden toteuvuutta. Mutta myös lauseiden u_1 sekä $u_1 \vee u_2$ lauseiden toteutuvuus on selvitettävissä samalla idealla rakennetulla graafilla.Tämä apugraafi on apulauseen 4.2.2 graafin mukainen, joten sille pätee myös kyseisen apulauseen määräämät ominaisuudet.



Kuva 4.4. *Apugraafi A yhdistetään solmusta v graafiin G.*

Graafissa G on nyt kaikki tarvittavat solmut ja kaaret. Seuraavan kuvan yksinkertaistamiseksi apugraafeihin yhdistetyt muuttujat ovat apugraafeissa A_1 ja A_2 olevien muuttujien u_1, u_2, u_3 tilalla ja apugraafien A_1 ja A_2 solmut o ovat yhdistettynä kaarella väreillä P ja E väritettyihin solmuihin.



Kuva 4.5. *Graafi G, jossa on käytetty apugraafeja A_1 ja A_2 kuvaamaan lauseiden $x \vee y \vee z$ ja $\neg x \vee y \vee \neg z$ totuusarvoja.*

Osoitetaan seuraavaksi, että näin muodostettu graafi G on 3-väritettävä jos ja vain jos 3-SAT lauseke on toteutuva. Olkoon 3-SAT lauseke toteutuva ja $\{u_1', u_2', ..., u_n'\}$ ovat lausekkeen muuttujat. Väritetään graafin solmut T, E ja P niiden nimiä vastaavilla väreillä. Jos muuttuja u_i' on tosi, niin väritetään graafin G solmu v_i värillä T ja solmu $\bar{v}_i$ värillä E. Jos taas muuttuja u_i' on epätosi, niin väritetään solmut päinvastoin, eli väritetään solmu v_i värillä E ja solmu $\bar{v}_i$ värillä T. Koska 3-SAT lauseke on toteutuva, niin jokaisella lauseella $C_i = a \vee b \vee c$ ainakin yksi muuttujien a, b tai c arvoista on tosi. Apulauseessa 4.2.2 toisena mainitun ominaisuuden perusteella apugraafin A solmu o voidaan värittää värillä T. Koska solmu o on yhdistettynä graafin G kahteen solmuun, jotka on väritetty väreillä E ja P, niin graafin G 3-väritys on aito.

Oletetaan seuraavaksi, että graafi G on 3-väritettävä. Nimetään värit tarvittaessa uudelleen niin, että solmuilla T, E ja P on niiden nimiä vastaavat värit. Koska solmut v_i ja $\bar{v}_i$ ovat yhdistetty värin P solmuun ja toisiinsa, niin toisella niistä on väri T ja toisella väri E. Asetetaan 3-SAT lausekkeen muuttujille arvot siten, että lausekkeen muuttujien arvot u_i asetetaan todeksi, jos solmun v_i väri on T ja epätodeksi, jos solmun v_i väri on E. Koska kaikki solmut o apugraafeissa A ovat liitettynä solmuun, jonka väri on E, niin solmujen o väri ei voi olla E. Apulauseen 4.2.2 ensimmäisen ominaisuuden nojalla voidaan päätellä, että kaikki apugraafin A muuttujien solmut eivät voi olla väritetty värillä E, koska silloin solmu o olisi väritettävä värillä E. Muodostettu 3-SAT lauseke on siis toteutuva.

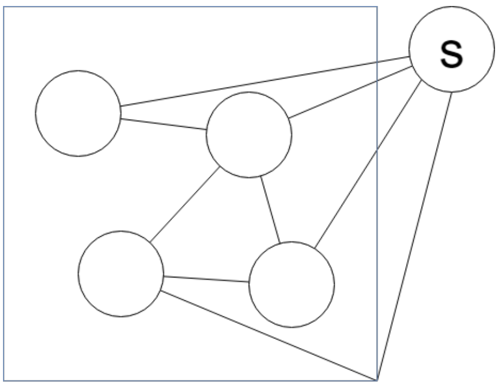
3-SAT on siis mahdollista paluttaa 3-väritettävyyteen polynomisessa ajassa ja siten 3-väritettävyys on NP-kova. Lisäksi koska 3-väritettävyys kuuluu NP-ongelmiin, niin 3-väritettävyys on NP-täydellinen.

$\square$

Graafin k-väritettävyyttä voidaan ajatella yksinkertaisempana ongelmana kuin 3-väritettävyyttä, koska selvästi on helpompi värittää graafi suuremmalla määrällä värejä. Voidaan todistaa, että 3-väritettävyys ongelma voidaan palauttaa k-väritettävyys ongelmaksi.

Lause 4.2.4. *k-väritettävyys on NP-täydellinen.*

Todistus. Osoitetaan ensin, että 3-väritettävyys voidaan palauttaa 4-väritettävyyteen. Tarkastellaan graafia $G(V, E)$. Muodostetaan graafi $G'(V', E')$ lisäämällä graafiin G solmuihin V solmu s siten, että solmu s on yhdistettynä kaikkiin graafin G solmuihin.



Kuva 4.6. *Graafi G', joka on saatu yhdistämällä lisätty solmu s kaikkiin graafin G solmuihin.*

Olkoon graafi G 3-väritettävä.Tällöin graafi G' on on 4-väritettävä, sillä graafin G' solmun s väriksi voidaan asettaa väri, joka ei ollut käytössä graafin G solmuissa.

Olkoon graafi G' 4-väritettävä. Nyt graafissa G' olevalla solmulla s on jokin väri, joka ei ole millään muulla graafissa olevalla solmulla, koska se on yhdistettynä kaikkiin solmuihin. Tällöin värittämällä kaikki muut solmut G' värityksen mukaan voidaan päätellä, että graafi G on 3-väritettävä, koska siinä ei ole solmua s.

3-väritettävyys siis voidaan palauttaa 4-väritettävyyteen. Samanlaisella konstruktiolla voidaan todeta, että k-väritettävyys voidaan palauttaa $k+1$-väritettävyyteen, joten 3-väritettävyys voidaan palauttaa k-väritettävyyteen. Lisäksi k-väritettävyys kuuluu NP-ongelmiin. Siis k-väritettävyys on NP-täydellinen. $\square$

5 YHTEENVETO

Työssä esitetyt tavat löytää k-värityksien määrä tai mikä tahansa k-väritys liittyvät siis toisiinsa algoritmin tehokkuuden suhteen. Jos tunnettaisiin jokin tehokas ratkaisu laskea graafille kromaattinen polynomi tai kromaattinen luku, niin ratkaisua voidaan käyttää k-värityksen laskemisessa. Tällä hetkellä ei ole löydetty mitään näkökulmaa, joka mahdollistaisi k-värityksen tehokkaan laskemisen, mutta ei myöskään ole todistettu että sellaista ei ole mahdollista löytää. On myös muita ongelmia, joita voidaan käyttää k-värityksen löytämisessä vaikka ne eivät vaikuta liittyvän graafeihin millään tapaa, kuten 3-SAT ongelma.

Johdannon esimerkissä tarkasteltiin, että tenttiaikojen järjestäminen voisi olla mahdollista graafien avulla. Tenttiajat voidaan määritellä graafin solmujen väreinä, kurssit solmuina ja kurssit, joilla on tarpeeksi paljon yhteisiä opiskelijoita voidaan yhdistää kaarilla. Tällöin ongelmana voi olla esimerkiksi löytää pienin määrä vaadittuja tenttiaikoja. Helpossa tapauksessa graafin rakenteesta voi tehdä oletuksia esimerkiksi kaarien suhteen siten, että kurssilla voi olla yhteisiä opiskelijoita enintään kahden muun kurssin kanssa. Tällöin graafi voidaan värittää kolmella värillä ahneella algoritmilla, joka toimii tehokkaasti. Ilman minkäänlaisia oletuksia, tenttiaikojen järjestäminen pienimmällä mahdollisella määrällä tenttiaikoja on hankala löytää, kun kursseja on suuri määrä ongelman NP-täydellisyydestä johtuen. On kehitetty monia eri väritystilanteisiin sopivia approksimointialgoritmeja, koska ei oleteta NP-täydellisyys ongelman tulevan ratkaistuksi pitkään aikaan tai lainkaan.

Jos jokin NP-täydellinen ongelma olisi mahdollista ratkaista tehokkaasti, niin myös k-väritettävyys olisi, eikä tarvitsisi tehdä approksimaatioita tai oletuksia graafin suhteen, jotta graafin värityksen laskenta onnistuu tarpeeksi nopeasti. Sama pätee myös toiseen suuntaan, eli k-värityksen laskeminen tehokkaasti mahdollistaisi sen myös muille vaativuusluokan NP ongelmille. Graafien k-väritys on vain yksi vaativuusluokkaan NP kuuluvista ongelmista, mitä voidaan käyttää mallintamaan ongelmia, kuten k-väritys voi mallintaa tenttiaikojen järjestämistä. Graafien värityksen mallintamat tilanteet eivät siis ole ainoa syy sille, että miksi olisi hyvä löytää graafien väritykselle tehokas ratkaisu.

LÄHTEET

[1] K. Appel ja W. Haken. *Every planar map is four colorable*. Contemporary Mathematics. With the collaboration of J. Koch. American Mathematical Society, Providence, RI, 1989, xvi+741. ISBN: 0-8218-5103-9. URL: https://doi.org/10.1090/conm/098.

[2] D. Eppstein. Small Maximal Independent Sets and Faster Exact Graph Coloring. *CoRR* (2000). URL: http://arxiv.org/abs/cs.DS/0011009.

[3] S. Even ja G. Even. *Graph algorithms*. 2. ed. Cambridge [u.a.]: Cambridge Univ. Press, 2012. ISBN: 9780521517188. URL: http://bvbr.bib-bvb.de:8991/F?func=service&doc_library=BVB01&local_base=BVB01&doc_number=024975052&sequence=000002&line_number=0001&func_code=DB_RECORDS&service_type=MEDIA.

[4] R. M. R. Lewis. *A Guide to Graph Colouring : Algorithms and Applications*. English. 1st ed. 2016. Cham: Springer, 2015. ISBN: 3319257285. DOI: 10.1007/978-3-319-25730-3. URL: https://ebookcentral.proquest.com/lib/[SITE_ID]/detail.action?docID=4068168.

[5] I. Wegener. *Complexity theory*. 2005. URL: https://doi.org/10.1007/3-540-27477-4.

[6] D. B. West. *Introduction to graph theory*. 2. ed. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 2001. ISBN: 9780130144003. URL: http://bvbr.bib-bvb.de:8991/F?func=service&doc_library=BVB01&local_base=BVB01&doc_number=009188736&sequence=000002&line_number=0001&func_code=DB_RECORDS&service_type=MEDIA.