Tampereen yliopisto

Anjuli Pullinen

KVATERNIOFUNKTIOT

Informaatioteknologian ja viestinnän tiedekunta
Pro gradu -tutkielma
Kesäkuu 2019

Tiivistelmä

Anjuli Pullinen: Kvaterniofunktiot
Pro gradu -tutkielma
Tampereen yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen tutkinto-ohjelma
Kesäkuu 2019

Tässä kvaternioanalyysin alaan kuuluvassa pro gradu -työssäni esittelen kvaternioiden vinokunnan ja sen peruslaskutoimitukset sekä perusominaisuudet. Totean, että kvaternioiden kertolasku ei kommutoi. Esittelen kvaterniojonon, kvaterniosarjan ja kvaterniofunktion matemaatiiset käsitteet. Määrittelen kvaternioeksponentin sarjakehitelmänä, jonka osoitan suppenevan. Tutkin kvaternioeksponenttifunktion ominaisuuksia. Sitten määrittelen kvaterniologaritmin ja tutkin tämän funktion ominaisuuksia.

Kompleksianalyysissä eksponenttifunktio ja logaritmifunktio ovat toistensa käänteisfunktiot. Tämän tuloksen ei tietenkään sellaisenaan voi olettaa pätevän kvaternioanalyysissä, koska kompleksiluvut on kvaternioiden osajoukko ja lisäksi kvaternioeksponentti ja -logaritmi on määritelty kvaternioanalyysissä itsenäisesti. Tutkielman huipennuksena osoitan, että kvaternioeksponentti ja kvaterniologaritmi ovat toistensa käänteisfunktiot.

Avainsanat: kvaternioanalyysi, kvaterniofunktiot, kvaterniot

Sisältö

1 Johdanto

Kvaternioiden vinokunnan löysi vuonna 1843 irlantilainen matemaatikko Sir William Rowan Hamilton. Hänen pyrkimyksenään oli yli vuosikymmenen ajan ollut kehittää uusi luku, joka olisi ikään kuin kaksiulotteisen kompleksiluvun vastine kolmiulotteisessa avaruudessa $\mathbb{R}^3$. Hamiltonin erityisenä mielenkiinnon kohteena ja tavoitteena oli valjastaa tämä uusi luku ja sen laskutoimitukset kolmiulotteisten rotaatioiden kuvaamiseen samaan tapaan kuin kompleksiluvut soveltuvat kaksiulotteisten rotaatioiden kuvaamiseen.

Pitkään Hamilton työsti kolmeosaista lukua, jossa ensimmäinen osa olisi reaaliosa ja kaksi viimeistä osaa olisivat imaginääriosia. Viimein hän ymmärsi, että tarvittaisiin kolme imaginääristä osaa reaaliosan lisäksi. Samalla tulisi luopua eräästä kompleksilukujen algebrallisesta ominaisuudesta, nimittäin kertolaskun vaihdannaisuudesta.

Tässä kvaternioanalyysin alaan kuuluvassa pro gradu -työssäni esittelen kvaternioiden vinokunnan, kvaterniojonon, kvaterniosarjan ja kvaterniofunktion matemaattiset käsitteet. Lopuksi otan tarkemman tutkimisen kohteeksi kvaternioeksponentin sekä kvaterniologaritmin. Osoitan näihin kvaterniofunktioihin liittyviä tuloksia ja lopuksi osoitan, että ne ovat toistensa käänteisfunktiot.

2 Kvaterniot ja niiden perusominaisuudet

Tässä luvussa määrittelemme kvaternioiden lukujoukon ja peruslaskutoimitukset. Määrittelemme myös joitakin kvaternioihin liittyviä käsitteitä, joita tarvitsemme myöhemmin tarkastellessamme kvaternioeksponenttia.

2.1 Kvaternioiden määritelmä ja laskutoimitukset

Tässä alaluvussa määrittelemme kvaternioiden lukujoukon sekä kvaternioiden yhteen- ja kertolaskun. Toteamme, että samaan tapaan kuin voimme ajatella reaaliluvut kompleksilukujen osajoukkona, voimme myös ajatella kompleksiluvut kvaternioiden osajoukkona. Oletamme tunnetuksi kompleksilukujen kunnan.

Määritelmä 2.1. (vrt. [1, s. 4]) Merkitsemme kvaternioiden lukujoukkoa $\mathbb{H}$:lla ja määrittelemme sen seuraavasti.

$$\mathbb{H} = \{a + bi + cj + dk \mid a, b, c, d \in \mathbb{R},\ i^2 = j^2 = k^2 = -1\}$$

Seuraavaksi määrittelemme kvaternioille yhteen- ja kertolaskun.

Määritelmä 2.2. (vrt. [1, s. 5]) Olkoot $q = a_1 + b_2 i + c_2 j + d_2 k \in \mathbb{H}$ ja $p = a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 k \in \mathbb{H}$ kvaternioita. Määrittelemme kvaternioiden q ja p summan $q + p$ ja tulon qp seuraavasti.

$$q + p = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i + (c_1 + c_2)j + (d_1 + d_2)k,$$

$$\begin{aligned} q \cdot p = &(a_1a_2 - b_1b_2 - c_1c_2 - d_1d_2) + (a_1b_2 + b_1a_2 + c_1d_2 - d_1c_2)i \\ &+ (a_1c_2 + c_1a_2 + d_1b_2 - b_1d_2)j + (a_1d_2 + d_1a_2 + b_1c_2 - c_1b_2)k. \end{aligned}$$

Kvaternioiden kertolasku ei ole vaihdannainen. Muutoin ne toteuttavat samat algebralliset lait kuin kompleksiluvut. Näin ollen kvaterniot muodostavat vinokunnan. (Ks. [1, s. 6 - 9].)

Kvaternioiden vinokunnassa yhteenlaskun neutraalialkio on $0_{\mathbb{H}} = 0 + 0i + 0j + 0k$. Kertolaskun neutraalialkio on $1_{\mathbb{H}} = 1 + 0i + 0j + 0k$.

Seuraavat laskusäännöt ovat seurausta kvaternioiden kertolaskun määritelmästä (vrt. [1, s. 8]):

$$ij = k, \quad jk = i, \quad ki = j, \quad ji = -k, \quad kj = -i, \quad ik = -j$$

Määritelmä 2.3. (ks. [1, s. 4]) Olkoon $q = a + bi + cj + dk \in \mathbb{H}$ kvaternio. Kutsumme reaalilukua $q_0 = a \in \mathbb{H}$ kvaternion q skalaariosaksi ja vektoria $\boldsymbol{q} = (b, c, d) \in \mathbb{R}^3$ kvaternion q vektoriosaksi. Tästedes merkitsemme kvaternion q skalaariosaa q_0:lla ja vektoriosaa $\boldsymbol{q}$:lla.

Voimme samaistaa kvaternion $q = a + bi + cj + dk \in \mathbb{H}$ neliulotteisen avaruuden $\mathbb{R}^4$ vektoriin (a, b, c, d) tai pariin $(q_0, \boldsymbol{q})$, jonka ensimmäinen osa q_0 on kvaternion q skalaariosa ja jälkimmäinen osa $\boldsymbol{q}$ on kvaternion q vektoriosa. Tästedes käytämmekin mukavuussyistä kvaterniosta $q = a+bi+cj+dk$ lyhyempiä merkintöjä $q = (a, b, c, d)$ ja $q = (q_0, \boldsymbol{q})$ tilanteen mukaan.

Eroten reaaliluvuista kvaterniot - kuten kompleksiluvutkaan - eivät ole järjestetty algebrallinen rakenne. Emme siis voi asettaa kvaternioita järjestykseen niin sanotun suuruuden perusteella mitenkään mielekkäästi. Jokaiseen kvaternioon voimme kuitenkin liittää reaaliluvun, ja voimme verrata näitä reaalilukuja keskenään ja asettaa niitä järjestykseen. Esittelemme seuraavaksi modulin, joka on eräs kuhunkin kvaternioon liitetty reaaliluku. Se tulee osoittautumaan hyödylliseksi käsitteeksi kvaternioanalyysissä.

Määritelmä 2.4. (ks. [1, s. 6]) Olkoon $q = (a, b, c, d) \in \mathbb{H}$ kvaternio. Kutsumme reaalilukua $|q| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$ kvaternion q moduliksi.

Huomautus. Geometrisesti ja intuitiivisesti miellettynä kvaternion $q = (a, b, c, d)$ moduli on vektorin (a, b, c, d) ”etäisyys origosta” neliulotteisessa avaruudessa $\mathbb{R}^4$.

Kuten kompleksiluvuille, myös kvaternioille pätevät kolmioepäyhtälöt, jotka seuraavaksi toteamme.

Lause 2.5. *(ks. [2, s. 12]) Olkoot $q \in \mathbb{H}$ ja $p \in \mathbb{H}$ kvaternioita. Silloin*

1. $-|q| \leq q_0 \leq |q| \quad$ *ja* $\quad -|q| \leq |\boldsymbol{q}| \leq |q|$,
2. $|q \pm p| \leq |q| + |p|$,
3. $||q| - |p|| \leq |q \pm p|$.

Toteamme vielä lauseen, jota tarvitsemme myöhemmin luvussa 4 todistaessamme lausetta 4.2.

Lause 2.6. *(ks. [2, s. 10]) Olkoon $q \in \mathbb{H}$ ja $p \in \mathbb{H}$ kvaternioita. Kvaternioiden q ja p moduleille pätee, että*

$$|qp| = |q||p|.$$

Määritelmä 2.7. (ks. [1, s. 6]) Kutsumme kvaterniota $q = (q_0, \boldsymbol{q}) \in \mathbb{H}$ yksikkökvaternioksi, mikäli pätee, että moduli $|q| = 1$.

Määritelmä 2.8. (ks. [2, s. 6]) Kutsumme kvaterniota $q = (q_0, \boldsymbol{q}) \in \mathbb{H}$ puhtaaksi kvaternioksi, mikäli pätee, että skalaariosa $q_0 = 0$.

Määritelmä 2.9. (vrt. [1, s. 5]) Kutsumme kvaterniota $q = (q_0, \boldsymbol{q})$ vastaavaksi puhtaaksi kvaternioksi sellaista kvaterniota $\hat{q} = (0, \boldsymbol{q})$, jonka skalaariosa häviää ja vektoriosa on sama kuin kvaternion q vektoriosa. Merkitsemme kvaterniota q vastaavaa puhdasta kvaterniota $\hat{q}$:lla.

Kutsumme kvaterniota $q = (q_0, \boldsymbol{q})$ vastaavaksi skalaarikvaternioksi sellaista kvaterniota $\tilde{q} = (q_0, \boldsymbol{0})$, jonka vektoriosa häviää ja vektoriosa on sama kuin kvaternion q skalaariosa. Merkitsemme kvaterniota q vastaavaa skalaarikvaterniota $\tilde{q}$:lla.

Määritelmä 2.10. (ks. [2, s. 23]) Olkoon $q \in \mathbb{H}$ kvaternio, jolle pätee, että $q \neq 0_{\mathbb{H}}$. Kutsumme yksikkökvaterniota $u = \frac{q}{|q|}$ kvaterniota q vastaavaksi yksikkökvaternioksi. Merkitsemme u:ta $\mathrm{sgn}(q)$:lla.

2.2 Kvaternion napaesitysmuoto ja argumentti

Samaan tapaan kuin voimme esittää minkä tahansa nollasta poikkeavan kompleksiluvun $z = (x, y) \in \mathbb{C}$ napaesitysmuodossa $z = |z|e^{i\theta} = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$, missä $\cos\theta = \frac{x}{|z|}$ ja $\sin\theta = \frac{y}{|z|}$, voimme esittää myös kvaterniot vastaavanlaisessa napaesitysmuodossa.

Lause 2.11. *(vrt. [3, s. 4]) Olkoon $q = (q_0, \boldsymbol{q}) \in \mathbb{H}$ kvaternio, jolle pätee $\boldsymbol{q} \neq 0_{\mathbb{R}^3}$. On olemassa sellainen reaaliluku $\theta \in]0, \pi[$ että voimme ilmaista kvaternion q muodossa*

$$q = |q|(\cos\theta + \frac{\hat{q}}{|\hat{q}|}\sin\theta).$$

Todistus. Olkoon $q \in \mathbb{H}$ kvaternio, jolle pätee, että $\boldsymbol{q} \neq 0_{\mathbb{R}^3}$. Olkoon lisäksi

$$\theta = \operatorname{arccot}\frac{q_0}{|\hat{q}|}.$$

Tiedämme, että

$$\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{1+\cot^2\theta}} \qquad \text{ja} \qquad \cos\theta = \frac{\cot\theta}{\sqrt{1+\cot^2\theta}}.$$

Tästä saamme tulokset

$$\sin\theta = \sin(\operatorname{arccot}\frac{q_0}{|\hat{q}|}) = \frac{1}{\sqrt{1+\cot^2\left(\operatorname{arccot}\frac{q_0}{|\hat{q}|}\right)}} = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{q_0}{|\hat{q}|}\right)^2}}$$

ja

$$\cos\theta = \cos(\operatorname{arccot}\frac{q_0}{|\hat{q}|}) = \frac{\cot\operatorname{arccot}\frac{q_0}{|\hat{q}|}}{\sqrt{1+\cot^2\left(\operatorname{arccot}\frac{q_0}{|\hat{q}|}\right)}} = \frac{\frac{q_0}{|\hat{q}|}}{\sqrt{1+\left(\frac{q_0}{|\hat{q}|}\right)^2}}.$$

Nyt

$$\begin{aligned}
\cos\theta + \frac{\hat{q}}{|\hat{q}|}\sin\theta &= \frac{\frac{q_0}{|\hat{q}|}}{\sqrt{1+\left(\frac{q_0}{|\hat{q}|}\right)^2}} + \frac{\hat{q}}{|\hat{q}|}\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{q_0}{|\hat{q}|}\right)^2}} \\
&= \frac{q_0}{|\hat{q}|\sqrt{1+\left(\frac{q_0}{|\hat{q}|}\right)^2}} + \frac{\hat{q}}{|\hat{q}|\sqrt{1+\left(\frac{q_0}{|\hat{q}|}\right)^2}} \\
&= \frac{q_0+\hat{q}}{|\hat{q}|\sqrt{1+\left(\frac{q_0}{|\hat{q}|}\right)^2}} = \frac{q}{|\hat{q}|\sqrt{\frac{|\hat{q}|^2}{|\hat{q}|^2}+\frac{q_0^2}{|\hat{q}|^2}}} \\
&= \frac{q}{|\hat{q}|\frac{\sqrt{|\hat{q}|^2+q_0^2}}{\sqrt{|\hat{q}|^2}}} = \frac{q}{|\hat{q}|\frac{\sqrt{|\hat{q}|^2+q_0^2}}{|\hat{q}|}} \\
&= \frac{q}{\sqrt{|\hat{q}|^2+q_0^2}} = \frac{q}{|q|},
\end{aligned}$$

joten

$$q = |q|(\cos\theta + \frac{\hat{q}}{|\hat{q}|}\sin\theta).$$

□

Määritelmä 2.12. Olkoon $q = (q_0, \boldsymbol{q}) \in \mathbb{H}$ kvaternio. Kutsumme lauseen 2.11 kaavaa

$$q = |q|(\cos\theta + \frac{\hat{q}}{|\hat{q}|}\sin\theta)$$

kvaternion q napaesitykseksi ja reaalilukua $\theta \in \mathbb{R}$ kvaternion q argumentiksi. Merkitsemme argumenttia $\arg(q)$:lla.

Huomautus. Reaalinen arkuskotangenttifunktio saa arvoja vain väliltä $]0, \pi[$, joten lauseen 2.11 kulma θ siten kuin se on todistuksen alussa määritelty löytyy väliltä $]0, \pi[$. Kuitenkin sini- ja kosinifunktiot ovat jaksollisia, joten periaatteessa lauseeseen 2.11 ja määritelmään 2.12 sopii ääretön määrä lukuja. Niinpä luvun $\theta \in\,]0, \pi[$ paikalla lauseessa 2.11 ja määritelmässä 2.12 voi olla mikä vain luku muotoa $\theta + n2\pi$, missä $n \in \mathbb{Z}$ on kokonaisluku.

Esimerkki 2.13. Määritämme yksikkökvaternion $q = j$ argumentin θ. Lauseen 2.11 todistuksen mukaisesti voimme määrittää jonkin argumentin θ_j arkuskotangentin avulla:

$$\theta_j = \operatorname{arccot}\Big(\frac{q_0}{|\boldsymbol{q}|}\Big) = \operatorname{arccot}\Big(\frac{0}{1}\Big) = \operatorname{arccot}(0) = \frac{\pi}{2}.$$

Kuitenkin huomautuksen 2.2 mukaan kvaternion j argumentti on mikä tahansa kulma θ, jolle pätee

$$\theta = \theta_j + n2\pi = \frac{\pi}{2} + n2\pi = \frac{\pi(1+4n)}{2}.$$

Saamme

$$|q|\Big(\cos\theta + \frac{\boldsymbol{q}}{|\boldsymbol{q}|}\sin\theta\Big) = 1\cdot\Big(\cos\Big(\frac{\pi(1+4n)}{2}\Big) + \frac{j}{1}\sin\Big(\frac{\pi(1+4n)}{2}\Big)\Big) = 1\cdot(0 + j\cdot 1) = j,$$

kuten lauseen 2.11 mukaan kuuluukin. Toteamme, että yksikkökvaternioilla i ja k on samat argumentit kuin yksikkökvaterniolla j.

Määritelmä 2.14. Olkoon $q \in \mathbb{H}$ kvaternio, jonka jokin argumentti on θ. Kutsumme kvaternion q argumentin päähaaraksi sitä argumenttia $\theta \in \mathbb{R}$, jolle, pätee, että $\theta \in [-\pi, \pi]$. Merkitsemme argumentin päähaaraa $\operatorname{Arg}(q)$:lla.

Esimerkki 2.15. Määritämme kvaternion $q = j$ argumentin päähaaran. Esimerkin 2.13 mukaan

$$\theta_j = \frac{\pi}{2} \in [-\pi, \pi],$$

joten argumentti $\theta_j = \frac{\pi}{2}$ on kvaternion $q = j$ argumentin päähaara.

2.3 Kompleksiluvut kvaternioiden osajoukkona

Tässä alaluvussa näytämme, että voimme mieltää kompleksiluvut kvaternioiden osajoukkona samaan tapaan kuin voimme mieltää reaaliluvut kompleksilukujen osajoukkona.

Määritelmä 2.16. Olkoon $\hat{\mathbb{H}} = \{a + bi + cj + dk \in \mathbb{H} \mid c = d = 0\} \subseteq \mathbb{H}$ niiden kvaternioiden joukko, joiden imaginääriyksiköiden j ja k kertoimet katoavat.

Lause 2.17. *Struktuurit* $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ *ja* $(\hat{\mathbb{H}}, +, \cdot)$ *ovat isomorfiset.*

Todistus. Olkoon $f : \mathbb{C} \to \hat{\mathbb{H}}$ kuvaus, joka on määritelty seuraavasti.

$$f(a + bi) = a + bi + 0 \cdot j + 0 \cdot k, \quad \text{kun } a + bi \in \mathbb{C} \text{ on kompleksiluku.}$$

Olkoot $u = a_1 + b_1 i \in \mathbb{C}$ ja $v = a_2 + b_2 i \in \mathbb{C}$ kompleksilukuja. Tällöin

$$\begin{aligned}
f(u + v) &= f((a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i)) = f((a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i) \\
&= (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i + 0 \cdot j + 0 \cdot k \\
&= (a_1 + b_1 i + 0 \cdot j + 0 \cdot k) + (a_2 + b_2 i + 0 \cdot j + 0 \cdot k) \\
&= f(a_1 + b_1 i) + f(a_2 + b_2 i) = f(u) + f(v)
\end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned}
f(u \cdot v) &= f((a_1 + b_1 i) \cdot (a_2 + b_2 i)) = f((a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + b_1 a_2)i) \\
&= (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + b_1 a_2)i + 0 \cdot j + 0 \cdot k \\
&= (a_1 + b_1 i + 0 \cdot j + 0 \cdot k)(a_2 + b_2 i + 0 \cdot j + 0 \cdot k) \\
&= f(a_1 + b_1 i) \cdot f(a_2 + b_2 i) = f(u) \cdot f(v)
\end{aligned}$$

ja

$$f(1_{\mathbb{C}}) = f(1 + 0 \cdot i) = 1 + 0 \cdot i + 0 \cdot j + 0 \cdot k = 1_{\mathbb{H}}.$$

Siis kuvaus f on laskusäännöt säilyttävä bijektio ja $f(1_{\mathbb{C}}) = 1_{\mathbb{H}}$. Näin ollen struktuurit $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ ja $\hat{\mathbb{H}}, +, \cdot)$ ovat isomorfiset. □

Lauseen 2.17 nojalla voimme samaistaa kompleksilukujen joukon $\mathbb{C}$ kvaternioiden osajoukon $\hat{\mathbb{H}} \subseteq \mathbb{H}$ kanssa. Näin voimme mieltää kompleksiluvut kvaternioiden osajoukkona, vaikka omana algebrallisena rakenteenaan kompleksiluvut ovatkin kunta ja siten noudattavat sellaista algebrallista sääntöä, jota kvaterniot eivät noudata, nimittäin kertolaskun vaihdannaisuutta.

3 Kvaterniofunktio, kvaterniolukujono ja kvaterniosarja

Tässä luvussa esittelemme kvaterniofunktion sekä kvaterniolukujonon ja sen avulla kvaterniosarjan. Viimeksi mainittua tulemme tarvitsemaan todistaessamme eräitä tuloksia kvaternioeksponenttifunktiolle. Määrittelemme myös sekä kvaterniolukujonon että kvaterniosarjan suppenemisen sekä muutamia kvaterniosarjan suppenemiseen liittyviä lauseita. Tulemme tarvitsemaan näitä määritelmiä ja lauseita myöhemmin määritellessämme kvaternioeksponentin ja osoittaessamme sen eräitä ominaisuuksia.

Oletamme tunnetuiksi reaalianalyysin ja kompleksianalyysin peruskäsitteineen.

3.1 Kvaterniofunktio

Määritelmä 3.1. Kutsumme kvaterniofunktioksi funktiota

$$f : U \to V,$$

missä $U \subseteq \mathbb{H}$ ja $V \subseteq \mathbb{H}$ ovat kvaternioiden lukujoukon osajoukkoja.

Esimerkki 3.2. Yksinkertainen esimerkki kvaterniofunktiosta on toinen potenssi

$$f : \mathbb{H} \to \mathbb{H}, \qquad q \mapsto q^2.$$

Esimerkiksi jos luku $q = 1 + i + 2k$, silloin

$$f(q) = (1 + i + 2k)^2 = -4 + 2i + 4k.$$

3.2 Kvaterniolukujono

Määritelmä 3.3. (vrt. [2, s. 53]) Olkoot $q_n \in \mathbb{H}$ (missä $n \in \mathbb{N}$) kvaternioita siten, että jokaista luonnollista lukua $m \in \mathbb{N}$ vastaa kvaternio q_m. Kutsumme näistä kvaternioista q_n koostuvaa ääretöntä kvaternioiden kokoelmaa kvaterniolukujonoksi ja merkitsemme sitä $\{q_n\}_{n=0}^{\infty}$:llä tai lyhyemmin $\{q_n\}$:llä.

Huomautus. (vrt. [4, s. 35], [2, s. 53]) Ei ole oleellista, onko lukujono määritelty kaikilla indekseillä $m \in \mathbb{N}$. Kvaterniolukujono voisi myös olla määritelty vain äärelliselle määrälle indeksejä $n \in \mathbb{N}$. Tässä tutkielmassa emme kuitenkaan tarkastele päättyviä kvaterniolukujonoja. Siksi määrittelemme kvaterniolukujonon äärettömänä kokoelmana kvaternioita, kuten se on perinteisesti ymmärrettykin.

Määritelmä 3.4. (vrt. [4, s. 36], [2, s. 56]) Kvaterniolukujonolla $\{q_n\}$ on raja-arvo $q \in \mathbb{H}$, mikäli jokaista positiivista reaalilukua $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ kohti on olemassa sellainen positiivinen kokonaisluku $n_\varepsilon \in \mathbb{Z}_+$, että

$$|q_n - q| < \varepsilon$$

aina, kun $n \geq n_\varepsilon$. Tällöin sanomme, että kvaterniolukujono $\{q_n\}$ suppenee kohti kvaterniota q, ja merkitsemme

$$\lim_{n\to\infty} q_n = q.$$

Jos kvaterniolukujono ei suppene, sanomme sen hajaantuvan.

Määritelmä 3.5. (vrt. [2, s. 56]) Sanomme kvaterniolukujonon $\{q_n\} = \{a_n\}+\{b_n\}i+\{c_n\}j+\{d_n\}k$ hajaantuvan äärettömyyteen, mikäli jokaista positiivista kokonaislukua $m \in \mathbb{Z}_+$ kohti on olemassa sellainen luonnollinen luku $n_m \in \mathbb{N}$, että

$$a_n, b_n, c_n, d_n > m \quad \text{aina, kun} \quad n \geq n_m.$$

Tällöin merkitsemme

$$\lim_{n\to\infty} q_n = \infty.$$

3.3 Kvaterniosarja

Määrittelemme nyt kvaterniosarjan ja kvaterniosarjan suppenemisen. Sitten todistamme joitakin lauseita, joiden avulla voimme arvioida kvaterniosarjan suppenemista.

Määritelmä 3.6. (vrt. [2, s. 87]) Olkoon $\{q_n\}$ ääretön, jokaisella indeksillä $n \in \mathbb{N}$ määritelty kvaterniolukujono. Kutsumme ääretöntä summaa

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} q_n$$

kvaterniolukujonoon q_n liittyväksi kvaterniosarjaksi. Merkitsemme tämän kvaterniosarjan osasummien jonoa kvaterniolukujonolla $\{S_n\}$, missä

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} q_k.$$

Määritelmä 3.7. Olkoon $S = \sum_{n=0}^{\infty} q_n$ kvaterniosarja. Jos tähän sarjaan liittyvä osasummien jono $\{S_n\}$ suppenee kohti kvaterniota $q \in \mathbb{H}$, sanomme, että kvaterniosarja $\sum_{n=0}^{\infty} q_n$ suppenee ja että se suppenee kohti kvaterniota q. Sanomme tällöin kvaterniosarjaa S suppenevaksi ja voimme samastaa sarjan S ja kvaternion, jota kohti se suppenee, eli kirjoittaa

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} q_n = q.$$

Muussa tapauksessa sanomme, että kvaterniosarja $\sum_{n=0}^{\infty} q_n$ hajaantuu.

Seuraavaksi esittelemme joitakin kvaterniosarjojen aritmeettisia ominaisuuksia.

Lause 3.8. *(ks. [2, s. 70]) Olkoot*

$$Q = \sum_{i=0}^{\infty} q_i \quad ja \quad P = \sum_{i=0}^{\infty} p_i$$

kvaterniosarjoja ja luvut $\lambda \in \mathbb{H}$ ja $\mu \in \mathbb{H}$ kvaternioita. Tällöin

1. *jos sarjat Q ja P molemmat suppenevat, myös sarjat* $\sum_{i=0}^{\infty}(\lambda q_i \pm \mu p_i) = \lambda Q \pm \mu P$ *suppenevat,*

2. *jos sarja Q suppenee ja sarja P hajaantuu, silloin sarjat* $\sum_{i=0}^{\infty}(\lambda q_i \pm \mu p_i) = \lambda Q \pm \mu P$ *hajaantuvat, kun* $\mu \neq 0$*,*

3. *sarja Q suppenee täsmälleen silloin, kun sarja* $\sum_{i=0}^{\infty} q_{n+i}$ *suppenee, kun* $n \in \mathbb{N}$ *on luonnollinen luku.*

Määritelmä 3.9. Olkoon $\sum_{n=0}^{\infty} q_n$ kvaterniosarja. Jos reaalilukusarja $\sum_{n=0}^{\infty} |q_n|$ suppenee, sanomme, että kvaterniosarja $\sum_{n=0}^{\infty} q_n$ suppenee itseisesti.

Reaali- ja kompleksianalyysistä muistamme, että itseisesti suppeneva sarja suppenee. Tämä seikka pätee myös kvaterniosarjoille. Seuraavaksi todistamme sen.

Lause 3.10. *Itseisesti suppeneva kvaterniosarja suppenee.*

Todistus. Olkoon
$$\sum_{i=0}^{\infty} q_i$$
itseisesti suppeneva kvaterniosarja. Siis
$$\sum_{i=0}^{\infty} |q_i|$$
suppenee.

Ensin oletamme, että $x_n \in \mathbb{R}$ on reaaliluku kaikilla luonnollisilla luvuilla $n \in \mathbb{N}$. Todistamme, että jos sarja $\sum_{i=0}^{\infty} |x_i|$ suppenee, niin myös sarja $\sum_{i=0}^{\infty}$ suppenee. Merkitsemme
$$x_i^+ = max(x_i, 0) \quad \text{ja} \quad x_i^- = -min(x_i, 0)$$
kaikilla luonnollisilla luvuilla $i \in \mathbb{N}$. Tällöin
$$0 \leq x_i^+ \leq |x_i| \quad \text{ja} \quad 0 \leq x_i^- \leq |x_i| \quad \text{ja} \quad x_i = x_i^+ - x_i^-$$
kaikilla luonnollisilla luvuilla $i \in \mathbb{N}$. Nyt majoranttiperiaatteen nojalla sarjat
$$\sum_{i=0}^{\infty} x_i^+ \quad \text{ja} \quad \sum_{i=0}^{\infty} x_i^-$$
suppenevat ja sarja
$$\sum_{i=0}^{\infty} x_i = \sum_{i=0}^{\infty}(x_i^+ - x_i^-) = \sum_{i=0}^{\infty} x_i^+ - \sum_{i=0}^{\infty} x_i^-$$
suppenee.

Määrittelemme nyt apufunktiot $\text{Vec}_i(q) : \mathbb{H} \to \mathbb{R}$, $\text{Vec}_j(q) : \mathbb{H} \to \mathbb{R}$ ja $\text{Vec}_k(q) : \mathbb{H} \to \mathbb{R}$ seuraavasti. Olkoon $q = (a, b, c, d) \in \mathbb{H}$ kvaternio. Silloin
$$\text{Vec}_i(q) = b, \quad \text{Vec}_j(q) = c \quad \text{ja} \quad \text{Vec}_k(q) = d.$$

Nyt

$$0 \leq |\mathrm{Sc}(q_i)|, |\mathrm{Vec}_i(q_i)|, |\mathrm{Vec}_j(q_i)|, |\mathrm{Vec}_k(q_i)| \leq |q_i|$$

kaikilla luonnollisilla luvuilla $i \in \mathbb{N}$. Nimittäin

$$\begin{aligned}
&|a|^2, |b|^2, |c|^2, |d|^2 \leq a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \\
&\leq a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2(|a||b| + |a||c| + |a||d| + |b||c| + |b||d| + |c||d|) \\
&= (|a| + |b| + |c| + |d|)^2.
\end{aligned}$$

Nyt sarjat

$$\sum_{i=0}^{\infty} |\mathrm{Sc}(q_i)|, \quad \sum_{i=0}^{\infty} |\mathrm{Vec}_i(q_i)|, \quad \sum_{i=0}^{\infty} |\mathrm{Vec}_j(q_i)| \quad \text{ja} \quad \sum_{i=0}^{\infty} |\mathrm{Vec}_k(q_i)|$$

ovat reaalisia ja suppenevat majoranttiperiaatteen nojalla. Tällöin aiemmin käsitellyn reaalisen tapauksen perusteella myös sarjat

$$\sum_{i=0}^{\infty} \mathrm{Sc}(q_i), \quad \sum_{i=0}^{\infty} \mathrm{Vec}_i(q_i), \quad \sum_{i=0}^{\infty} \mathrm{Vec}_j(q_i) \quad \text{ja} \quad \sum_{i=0}^{\infty} \mathrm{Vec}_k(q_i)$$

suppenevat. Nyt sarja

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{\infty} q_i &= \sum_{i=0}^{\infty} (\mathrm{Sc}(q_i) + i \cdot \mathrm{Vec}_i(q_i) + j \cdot \mathrm{Vec}_j(q_i) + k \cdot \mathrm{Vec}_k(q_i)) \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} \mathrm{Sc}(q_i) + i \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \mathrm{Vec}_i(q_i) + j \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \mathrm{Vec}_j(q_i) + k \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \mathrm{Vec}_k(q_i)
\end{aligned}$$

suppenee lauseen 3.8 nojalla. □

4 Aputuloksia

Tässä luvussa todistamme joitakin aputuloksia, joiden avulla on helpompi seurata ja ymmärtää eräitä kvaterniofunktioihin liittyviä tuloksia, joita todistamme luvuissa 5 ja 6.

4.1 Puhtaiden kvaternioiden potenssit

Tässä alaluvussa todistamme puhtaiden kvaternioiden potenssien kaavat. Näitä kaavoja tarvitsemme lauseen 5.3 todistuksessa.

Lause 4.1. *Olkoon $\hat{q} \in \mathbb{H}$ puhdas kvaternio ja $n \in \mathbb{N}$ luonnollinen luku. Tällöin puhtaan kvaternion $\hat{q}$ potensseille pätee, että*

1. $\hat{q}^{4n} = |\hat{q}|^{4n}$,
2. $\hat{q}^{4n+1} = |\hat{q}|^{4n} \cdot \hat{q}$,
3. $\hat{q}^{4n+2} = -|\hat{q}|^{4n+2}$,
4. $\hat{q}^{4n+3} = -|\hat{q}|^{4n+2} \cdot \hat{q}$.

Todistus. Todistamme lauseen induktiolla.Olkoon $\hat{q} = (0, (b, c, d)) \in \mathbb{H}$ puhdas kvaternio ja $n \in \mathbb{N}$ luonnollinen luku.

Perusaskel. Olkoon $n = 0$. Nyt

1. $\hat{q}^{4n} = \hat{q}^0 = 1 = |\hat{q}|^0 = |\hat{q}|^{4n}$,
2. $\hat{q}^{4n+1} = \hat{q}^1 = |\hat{q}|^0 \cdot \hat{q} = |\hat{q}|^{4n} \cdot \hat{q}$,
3. $\hat{q}^{4n+2} = \hat{q}^2 = (0, b, c, d) \cdot (0, b, c, d) = (-b^2 - c^2 - d^2) + (0 \cdot b + b \cdot 0 + c \cdot d - d \cdot c)i$
   $+ (0 \cdot c - b \cdot d + c \cdot 0 + d \cdot b)j + (0 \cdot d + b \cdot c - c \cdot b + d \cdot 0)k$
   $= (-b^2 - c^2 - d^2) + 0 \cdot i + 0 \cdot j + 0 \cdot k = -1 \cdot (b^2 + c^2 + d^2)$
   $= -1 \cdot (\sqrt{b^2 + c^2 + d^2})^2 = -|\hat{q}|^2 = -|\hat{q}|^{4n+2}$,
4. $\hat{q}^{4n+3} = \hat{q}^3 = \hat{q}^2 \cdot \hat{q} = -|\hat{q}|^{4n+2} \cdot \hat{q}$.

Induktioaskel. Olettakaamme, että lauseen 4.1 kohdat 1-4 pätevät, kun $n = k$. Nyt

1. $\hat{q}^{4(k+1)} = \hat{q}^{4k+4} = \hat{q}^{4k+3} \cdot \hat{q} = -|\hat{q}|^{4k+2} \cdot \hat{q} \cdot \hat{q} = -|\hat{q}|^{4k+2} \cdot \hat{q}^2 = -|\hat{q}|^{4k+2} \cdot (-|\hat{q}|^2)$
   $= |\hat{q}|^{4k+4} = |\hat{q}|^{4(k+1)}$,
2. $\hat{q}^{4(k+1)+1} = \hat{q}^{4(k+1)} \cdot \hat{q} = |\hat{q}|^{4(k+1)} \cdot \hat{q}$,
3. $\hat{q}^{4(k+1)+2} = \hat{q}^{4(k+1)+1} \cdot \hat{q} = |\hat{q}|^{4(k+1)} \cdot \hat{q}^2 = |\hat{q}|^{4(k+1)} \cdot (-|\hat{q}|^2) = -|\hat{q}|^{4(k+1)+2}$,
4. $\hat{q}^{4(k+1)+3} = \hat{q}^{4(k+1)+2} \cdot \hat{q} = -|\hat{q}|^{4(k+1)+2} \cdot \hat{q}$.

Johtopäätös. Lauseen 4.1 kohdat 1-4 pätevät kaikille luonnollisille luvuille $n \in \mathbb{N}$. □

4.2 Apulause

Lauseen 5.1 todistuksessa tarvitsemme seuraavaa epäyhtälöä, jonka todistamme induktioperiaatteella.

Lause 4.2. *Olkoon $q \in \mathbb{H}$ kvaternio ja $i \in \mathbb{N}$ luonnollinen luku. Tällöin*

$$|q^i| \leq |q|^i.$$

Todistus. Olkoon $q \in \mathbb{H}$ kvaternio.

Perusaskel. Olkoon $i = 0$. Nyt

$$|q^i| = |q^0| = |1| = 1 = |q|^0.$$

Siis $|q^i| \leq |q|^i$, kun $i = 0$.

Induktioaskel. Olkoon

$$|q^k| \leq |q|^k.$$

Nyt lauseen 2.6 nojalla

$$|q^{k+1}| = |q^k q| = |q^k||q| \leq |q|^k|q| = |q|^{k+1}.$$

Johtopäätös.

$$|q^i| \leq |q|^i \quad \text{kaikilla} \quad i \in \mathbb{N}.$$

□

4.3 Cauchy-tulo

Tässä alaluvussa määrittelemme kahden kvaterniosarjan S ja T Cauchy-tulon ja todistamme, että kun sarjat S ja T suppenevat kohti lukuja S ja T ja vähintään toinen niistä suppenee itseisesti, silloin myös niiden Cauchy-tulo suppenee (itseisesti) kohti lukua ST. Vastaavat tulokset löytyvät myös reaali- ja kompleksianalyysistä, mutta nyt todistamme tuloksen kvaternioille.

Määritelmä 4.3. (vrt. [5, s. 44]) Olkoot

$$S = \sum_{i=0}^{\infty} s_i \quad \text{ja} \quad T = \sum_{i=0}^{\infty} t_i$$

kvaterniosarjoja. Määrittelemme niiden Cauchy-tulon seuraavasti.

$$ST = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{i} s_k t_{i-k}.$$

Ennen varsinaista Cauchy-tuloa koskevaa lausetta todistamme apulauseen, jota tarvitsemme lauseen 4.5 todistuksessa.

Lause 4.4. *Olkoot $s_i \in \mathbb{H}$ ja $t_i \in \mathbb{H}$ kvaternioita aina, kun $i \in \{0, 1, 2, \cdots, n\}$, missä $n \in \mathbb{Z}_+$ on positiivinen kokonaisluku. Silloin*

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{k=0}^{i} s_k t_{i-k} = \sum_{i=0}^{n} s_{n-i} \sum_{k=0}^{i} t_k,$$

kun $n \in \mathbb{Z}_+$ on positiivinen kokonaisluku.

Todistus. Todistamme lauseen induktiolla. Olkoot $s_i \in \mathbb{H}$ ja $t_i \in \mathbb{H}$ kvaternioita aina, kun $i \in \{0, 1, 2, \cdots, n\}$, missä $n \in \mathbb{Z}_+$ on positiivinen kokonaisluku.

Perusaskel. Olkoon $n = 1$. Nyt

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n}\sum_{k=0}^{i} s_k t_{i-k} &= \sum_{i=0}^{1}\sum_{k=0}^{i} s_k t_{i-k} = s_0 t_{0-0} + s_0 t_{1-0} + s_1 t_{1-1} = s_0 t_0 + s_0 t_1 + s_1 t_0 \\ &= s_1 t_0 + s_0(t_0 + t_1) = s_{1-0} t_0 + s_{1-1}(t_0 + t_1) = \sum_{i=0}^{1} s_{1-i} \sum_{k=0}^{i} t_k \\ &= \sum_{i=0}^{n} s_{n-i} \sum_{k=0}^{i} t_k.\end{aligned}$$

Induktioaskel. Olkoon nyt $m \in \mathbb{Z}_+$ ja olettakaamme, että

$$\sum_{i=0}^{m}\sum_{k=0}^{i} s_k t_{i-k} = \sum_{i=0}^{m} s_{m-i} \sum_{k=0}^{i} t_k.$$

Silloin induktio-oletuksen nojalla

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{m+1}\sum_{k=0}^{i} s_k t_{i-k} &= \sum_{i=0}^{m}\sum_{k=0}^{i} s_k t_{i-k} + \sum_{k=0}^{m+1} s_k t_{m+1-k} \\ &= \sum_{i=0}^{m} s_{m-i} \sum_{k=0}^{i} t_k + \sum_{k=0}^{m+1} s_k t_{m+1-k} = \sum_{i=0}^{m} s_{m-i} \sum_{k=0}^{i} t_k + \sum_{k=0}^{m+1} s_{m+1-k} t_k \\ &= (s_m t_0 + s_{m-1}(t_0 + t_1) + s_{m-2}(t_0 + t_1 + t_2) + \cdots + s_0(t_0 + \cdots + t_m)) \\ &+ (s_{m+1} t_0 + s_m t_1 + s_{m-1} t_2 \cdots + s_0 t_{m+1}) \\ &= (s_{m+1} t_0 + s_m(t_0 + t_1) + s_{m-1}(t_0 + t_1 + t_2) + \cdots + s_0(t_0 + \cdots + t_{m+1})) \\ &= \sum_{i=0}^{m+1} s_{m+1-i} \sum_{k=0}^{i} t_k.\end{aligned}$$

Johtopäätös. Niinpä

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{k=0}^{i} s_k t_{i-k} = \sum_{i=0}^{n} s_{n-i} \sum_{k=0}^{i} t_k,$$

kun $n \in \mathbb{Z}_+$ on positiivinen kokonaisluku. □

Lause 4.5. *(vrt. [5, s. 44]) Olkoot*

$$S = \sum_{i=0}^{\infty} s_i \quad ja \quad T = \sum_{i=0}^{\infty} t_i$$

kvaterniosarjoja, jotka suppenevat kohti kvaternioita s ja t ja joista vähintään toinen suppenee itseisesti. Tällöin niiden Cauchy-tulo ST suppenee kohti kvaterniota st.

Todistus. (vrt. [6]) Olkoot

$$S = \sum_{i=0}^{\infty} s_i \quad \text{ja} \quad T = \sum_{i=0}^{\infty} t_i$$

lauseen 4.5 mukaiset kvaterniosarjat. Symmetrian nojalla voimme olettaa, että kvaterniosarja S suppenee itseisesti. Olkoot lisäksi

$$S_n = \sum_{i=0}^{n} s_i \quad \text{ja} \quad T_n = \sum_{i=0}^{n} t_i$$

kvaterniosarjojen S ja T n:nnet osasummat, ja olkoon sarja U_n määritelty seuraavasti:

$$U_n = \sum_{i=0}^{n} \sum_{k=0}^{i} s_k t_{i-k}.$$

Kun järjestämme yhteenlaskettavia termejä uudelleen, saamme lauseen 4.4 nojalla tuloksen

$$\begin{aligned} U_n &= \sum_{i=0}^{n} \sum_{k=0}^{i} s_k t_{i-k} \sum_{i=0}^{n} s_{n-i} \sum_{k=0}^{i} t_k = \sum_{i=0}^{n} s_{n-i} T_i \\ &= \sum_{i=0}^{n} s_{n-i} T_i - \sum_{i=0}^{n} s_{n-i} t + \sum_{i=0}^{n} s_{n-i} t = \sum_{i=0}^{n} s_{n-i}(T_i - t) + S_n t. \end{aligned}$$

Olkoon nyt $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ positiivinen reaaliluku. Koska sarja S suppenee itseisesti, täytyy päteä, että

$$\sum_{i=0}^{\infty} |s_i| < \infty.$$

Lisäksi sarja T suppenee kohti kvaterniota t, joten on olemassa sellainen positiivinen kokonaisluku $n_\varepsilon \in \mathbb{Z}_+$, että

$$|T_n - t| \leq \frac{\varepsilon/3}{\sum_{k=0}^{\infty} |s_k| + 1} \quad \text{aina, kun} \quad n \geq n_\varepsilon.$$

Tästä seuraa, että

$$\sum_{k=0}^{\infty} |s_k||T_n - t| \leq \frac{\varepsilon}{3}, \quad \text{kun} \quad n \geq n_\varepsilon. \tag{4.1}$$

Koska sarja $S = \sum_{i=0}^{\infty} s_i$ suppenee, täytyy päteä, että kvaterniolukujono $\{s_n\}$ suppenee kohti kvaterniota $0_{\mathbb{H}}$. Niinpä on olemassa sellainen positiivinen kokonaisluku $m_\varepsilon \in \mathbb{Z}_+$, että

$$|s_n| \leq \frac{\varepsilon/3}{n_\varepsilon(\sup_{i\in\{0,\cdots,n_\varepsilon-1\}} |T_i - t| + 1)} \quad \text{aina, kun} \quad n \geq m_\varepsilon.$$

Tästä seuraa, että

$$n_\varepsilon|s_n| \sup_{i\in\{0,\cdots,n_\varepsilon-1\}} |T_i - t| \leq \frac{\varepsilon}{3}, \quad \text{kun} \quad n \geq m_\varepsilon. \tag{4.2}$$

Lisäksi, koska sarja S suppenee kohti kvaterniota s, on olemassa sellainen positiivinen kokonaisluku $l_\varepsilon \in \mathbb{Z}_+$, että

$$|S_n - s| \leq \frac{\varepsilon/3}{|t| + 1} \quad \text{aina, kun} \quad n \geq l_\varepsilon,$$

mistä seuraa, että

$$|S_n - s||t| \leq \frac{\varepsilon}{3}, \quad \text{kun} \quad n \geq l_\varepsilon. \tag{4.3}$$

Lauseen 2.5 sekä epäyhtälöiden 4.1, 4.2 ja 4.3 nojalla saamme tuloksen

$$\begin{aligned}
|U_n - st| &= \Big|\sum_{i=0}^{n} s_{n-i}(T_i - t) + S_n t - st\Big| = \Big|\sum_{i=0}^{n} s_{n-i}(T_i - t) + (S_n - s)t\Big| \\
&\leq \Big|\sum_{i=0}^{n} s_{n-i}(T_i - t)\Big| + \Big|(S_n - s)t\Big| \leq \sum_{i=0}^{n} |s_{n-i}||T_i - t| + |S_n - s||t| \\
&= \sum_{i=0}^{n_\varepsilon - 1} |s_{n-i}||T_i - t| + \sum_{i=n_\varepsilon}^{n} |s_{n-i}||T_n - t| + |S_n - s||t| \\
&\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} \leq \varepsilon
\end{aligned}$$

aina, kun $n \geq \max\{l_\varepsilon, m_\varepsilon + n_\varepsilon\}$.

Näin ollen sarja U_n suppenee kohti kvaterniota st, kun $n \to \infty$. □

4.4 Binomikaava

Binomikaava

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k,$$

missä $n \in \mathbb{Z}_+$ on positiivinen kokonaisluku, pätee tunnetusti luvuille x ja y silloin, kun nämä kuuluvat samaan vaihdannaiseen renkaaseen. Kvaternioiden joukko $\mathbb{H}$ ei kuitenkaan ole vaihdannainen rengas. Todistamme nyt induktiolla, että voimme soveltaa binomikaavaa sellaisille kvaternioille q ja p, jotka kommutoivat keskenään.

Lause 4.6. *(vrt. [7, s. 240, 241]) Olkoot $q = (q_0, \boldsymbol{q}) \in \mathbb{H}$ ja $p = (p_0, \boldsymbol{p}) \in \mathbb{H}$ kvaternioita, joille pätee, että $pq = qp$. Kvaternioille q ja p pätee binomikaava*

$$(q+p)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} q^{n-k} p^k$$

kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla $n \in \mathbb{Z}_+$.

Todistus. Todistamme binomikaavan induktiolla. Olkoot $q = (q_0, \boldsymbol{q}) \in \mathbb{H}$ ja $p = (p_0, \boldsymbol{p}) \in \mathbb{R}$ kvaternioita.

Perusaskel. Olkoon $n = 1$. Nyt

$$(q+p)^n = (q+p)^1 = q + p = \binom{1}{0} \cdot q^{1-0} p^0 + \binom{1}{1} q^{1-1} p^1 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} q^{n-k} p^k.$$

Siis kaava pätee, kun $n = 1$.

Induktioaskel. Olkoon

$$(q+p)^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} q^{k-i} p^i.$$

Induktio-oletuksen ja kvaternioiden osittelulakien sekä kvaternioiden p ja q kommutatiivisuuden nojalla saamme nyt

$$\begin{aligned}
(q+p)^{k+1} &= (q+p)^k \cdot (q+p) = \Big(\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} q^{k-i} p^i \Big) \cdot (q+p) \\
&= \Big(\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} q^{k-i} p^i q \Big) + \Big(\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} q^{k-i} p^i p \Big) \\
&= \Big(\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} q^{k+1-i} p^i \Big) + \Big(\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} q^{k-i} p^{i+1} \Big) \\
&= \binom{k}{0} q^{k+1} + \Big(\sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} q^{k+1-i} p^i \Big) + \Big(\sum_{i=0}^{k-1} q^{k-i} p^{i+1} \Big) + \binom{k}{k} p^{k+1} \\
&= \binom{k+1}{0} q^{k+1} + \Big(\sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} q^{k+1-i} p^i \Big) + \Big(\sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i-1} q^{k+1-i} p^i \Big) + \binom{k+1}{k+1} p^{k+1} \\
&= \binom{k+1}{0} q^{k+1} + \Big(\sum_{i=1}^{k} \Big(\binom{k}{i} + \binom{k}{i-1} \Big) q^{k+1-i} p^i \Big) + \binom{k+1}{k+1} p^{k+1} \\
&= \binom{k+1}{0} q^{k+1} + \Big(\sum_{i=1}^{k} \binom{k+1}{i} q^{k+1-i} p^i \Big) + \binom{k+1}{k+1} p^{k+1} \\
&= \Big(\sum_{i=0}^{k+1} \binom{k+1}{i} q^{k+1-i} p^i \Big).
\end{aligned}$$

Johtopäätös. Kaava

$$(q+p)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} q^{n-k} p^k$$

pätee kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla $n \in \mathbb{Z}_+$ ja kvaternioilla $q \in \mathbb{H}$ ja $p \in \mathbb{H}$, jotka kommutoivat keskenään. $\square$

5 Kvaternioeksponentti

Tässä luvussa esittelemme kvaternioeksponentin, joka on eräs kvaterniofunktio. Määrittelemme kvaternioeksponentin sarjakehitelmänä ja osoitamme, että voimme esittää kvaternioeksponentin myös kvaternioiden napaesitysmuodossa. Oletamme tunnetuiksi reaali- ja kompleksianalyysin perustulokset.

5.1 Kvaternioeksponentin määritelmä

Tässä alaluvussa määrittelemme kvaternioeksponentin. Aluksi esittelemme erään kvaterniosarjan ja osoitamme, että se suppenee. Tämän jälkeen määrittelemme kvaternioeksponentin tämän sarjan avulla ja osoitamme, että voimme tästä määritelmästä johtaa kvaternioeksponentille toisenkin esitysmuodon. Tämä jälkimmäinen esitysmuoto on usein hyödyllisempi esimerkiksi käytännön laskutehtävissä.

Lause 5.1. *Olkoon $q \in \mathbb{H}$ kvaternio. Tällöin sarja*

$$S = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{q^i}{i!}$$

suppenee.

Todistus. Olkoon $q \in \mathbb{H}$ kvaternio. Havaitsemme, että

$$\sum_{i=0}^{\infty} \left| \frac{q^i}{i!} \right| = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|q^i|}{i!} \leq \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|q|^i}{i!},$$

sillä lauseen 4.2 nojalla

$$|q^i| \leq |q|^i \qquad \forall q \in \mathbb{H}, i \in \mathbb{N}.$$

Reaalianalyysin osamäärätestin nojalla sarja

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{|q|^i}{i!}$$

suppenee, sillä

$$\left(\frac{|q|^{i+1}}{(i+1)!} \right) \Big/ \left(\frac{|q|^i}{i!} \right) \to 0, \quad \text{kun} \quad i \to \infty.$$

Nyt majoranttiperiaatteesta seuraa, että myös sarja

$$\sum_{i=0}^{\infty} \left| \frac{q^i}{i!} \right|$$

suppenee. Nyt lauseesta 3.10 seuraa, että sarja

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{q^i}{i!}.$$

suppenee. $\square$

Määritelmä 5.2. (vrt. [2, s. 88]) Olkoon $q \in \mathbb{H}$ kvaternio. Määrittelemme funktion $f : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$, $x \mapsto e^q$ lauseen 5.1 mukaisena sarjakehitelmänä:

$$e^q = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{q^i}{i!}.$$

Kutsumme funktiota f kvaternioeksponenttifunktioksi tai lyhyemmin kvaternioeksponentiksi.

Lause 5.3. *Olkoon $q = (q_0, \boldsymbol{q}) \in \mathbb{H}$ kvaternio. Sarja $e^q = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{q^i}{i!}$ suppenee kohti lukua*

$$e^q = e^{q_0}(\cos|\hat{q}| + sgn(\hat{q})\sin|\hat{q}|),$$

missä luku $e = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ on Neperin luku.

Todistus. (vrt. [2, s. 88]) Olkoon $q = (q_0, \boldsymbol{q}) \in \mathbb{H}$ kvaternio. Ensinnäkin sarjat

$$e^{\tilde{q}} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{q_0^i}{i!} \qquad \text{ja} \qquad e^{\hat{q}} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\hat{q}^i}{i!}$$

suppenevat, missä $\tilde{q} = (q_0, \boldsymbol{0}) \in \mathbb{H}$ on kvaterniota q vastaava skalaarikvaternio ja $\hat{q} = (0, \boldsymbol{q}) \in \mathbb{H}$ on kvaterniota q vastaava puhdas kvaternio. Voimme osoittaa sarjojen $e^{\tilde{q}}$ ja $e^{\hat{q}}$ suppenemisen vastaavasti kuin olemme osoittaneet lauseen 5.1 sarjan suppenemisen. Lisäksi voimme, osoittaa, että $e^{q_0} = e^{\tilde{q}}$.

Seuraavaksi laskemme sarjojen $e^{\tilde{q}}$ ja $e^{\hat{q}}$ tulon niiden Cauchy-tulon avulla, sillä lauseen 4.5 nojalla sarjojen $e^{\tilde{q}}$ ja $e^{\hat{q}}$ Cauchy-tulo suppenee kohti kvaterniota $e^{\tilde{q}}e^{\hat{q}}$.

$$\begin{aligned}
e^{\tilde{q}}e^{\hat{q}} &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\tilde{q}^i}{i!} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\hat{q}^i}{i!} = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{i} \frac{\tilde{q}^j}{j!} \frac{\hat{q}^{i-j}}{(i-j)!} = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{i} \frac{1}{j!(i-j)!} \tilde{q}^j \hat{q}^{i-j} \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{i} \frac{1}{i!} \frac{i!}{j!(i-j)!} \tilde{q}^j \hat{q}^{i-j} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} \tilde{q}^j \hat{q}^{i-j}.
\end{aligned}$$

Lauseen 4.6 nojalla voimme käyttää binomikaavaa kvaternioille $\tilde{q} = (q_0, \boldsymbol{0}) \in \mathbb{H}$ ja $\hat{q} = (0, \boldsymbol{q}) \in \mathbb{H}$, sillä kvaternio $\tilde{q}$ on skalaarikvaternio.

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} \tilde{q}^j \hat{q}^{i-j} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(\tilde{q} + \hat{q})^i}{i!} = e^{\tilde{q}+\hat{q}} = e^q.$$

Edelleen, lausetta 4.1 soveltamalla, saamme tuloksen

$$\begin{aligned}
e^{\hat{q}} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\hat{q}^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\hat{q}^{4n}}{(4n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\hat{q}^{4n+1}}{(4n+1)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\hat{q}^{4n+2}}{(4n+2)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\hat{q}^{4n+3}}{(4n+3)!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{|\hat{q}|^{4n}}{(4n)!} + \frac{-|\hat{q}|^{4n+2}}{(4n+2)!} \right) + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{|\hat{q}|^{4n} \cdot \hat{q}}{(4n+1)!} + \frac{-|\hat{q}|^{4n+2} \cdot \hat{q}}{(4n+3)!} \right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{|\hat{q}|^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{|\hat{q}|^{2n+1}}{(2n+1)!} \cdot \frac{\hat{q}}{|\hat{q}|} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{|\hat{q}|^{2n}}{(2n)!} + \frac{\hat{q}}{|\hat{q}|} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{|\hat{q}|^{2n+1}}{(2n+1)!} \\
&= \cos|\hat{q}| + \operatorname{sgn}(\hat{q}) \sin|\hat{q}|.
\end{aligned}$$

Näin ollen saamme tuloksen

$$e^q = e^{\tilde{q}} e^{\hat{q}} = e^{\tilde{q}}(\cos|\hat{q}| + \operatorname{sgn}(\hat{q}) \sin|\hat{q}|) = e^{q_0}(\cos|\hat{q}| + \operatorname{sgn}(\hat{q}) \sin|\hat{q}|).$$

□

Huomautus. Edellisen lauseen perusteella voimme käyttää kvaternioeksponentille myös kaavaa

$$e^q = e^{q_0} e^{\hat{q}} = e^{q_0}(\cos|\hat{q}| + \operatorname{sgn}(\hat{q}) \sin|\hat{q}|).$$

Kun vertaamme tätä kvaternioeksponentin kaavaa kompleksisen eksponenttifunktion kaavaan

$$e^{a+bi} = e^a(\cos b + i \sin b),$$

havaitsemme, että kompleksisen eksponenttifunktion kaavassa esiintyvää kerrointa i vastaa kvaternioeksponentin kaavassa yksikkökvaternio $\operatorname{sgn}(\boldsymbol{q})$. Vastaavasti kompleksisen eksponenttifunktion kaavassa imaginääriosan kerrointa y vastaa kvaternioeksponentin kaavassa kvaternion vektoriosan moduli $|\boldsymbol{q}|$. Kummankin kaavan alussa luku e on korotettu potenssiin, joka on kvaternion $q = (q_0, \boldsymbol{q}) \in \mathbb{H}$ tai kompleksiluvun $a + bi \in \mathbb{R}$ reaaliosa.

Esimerkki 5.4. Kvaternioeksponenttifunktio e^q tuottaa kompleksisen eksponentin kaavan määritelmässä 2.16 esitetylle kvaternioiden lukujoukon osajoukolle $\hat{\mathbb{H}} \subseteq \mathbb{H}$.

Olkoon $q = a + bi + cj + dk \in \hat{\mathbb{H}}$ kvaternio, jolle siis pätee, että $c = d = 0$. Siis luku $q \in \hat{\mathbb{H}}$ kuuluu myös kompleksilukujen joukkoon. Kvaternioeksponentti tuottaa luvulle q tuloksen

$$\begin{aligned}
e^q &= e^a(\cos|b| + \operatorname{sgn}\left(\frac{bi}{|b|}\right) \sin|b|) = \begin{cases} e^a(\cos b + i \sin b), & \text{kun } b \geq 0, \\ e^a(\cos b - i \sin -b), & \text{kun } b < 0 \end{cases} \\
&= e^a(\cos b + i \sin b).
\end{aligned}$$

Esimerkki 5.5. Olkoon $q = i + j \in \mathbb{H}$ kvaternio. Nyt

$$q_0 = 0, \quad \hat{q} = i + j, \quad |\hat{q}| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \quad \text{ja} \quad \operatorname{sgn}(\hat{q}) = \frac{i+j}{\sqrt{2}},$$

joten

$$e^q = e^0(\cos\sqrt{2} + \frac{i+j}{\sqrt{2}}\sin\sqrt{2}) = \cos\sqrt{2} + \frac{i+j}{\sqrt{2}}\sin\sqrt{2}.$$

Esimerkki 5.6. Olkoon $q = 1 + \frac{\pi}{2}i + \frac{\pi}{2}j + \frac{\pi}{\sqrt{2}}k$. Tällöin

$$q_0 = 1 \quad \text{ja} \quad |\hat{q}| = \sqrt{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{\sqrt{2}}\right)^2} = \pi.$$

Siis

$$e^q = e^1(\cos\pi + \operatorname{sgn}(\hat{q})\sin\pi) = e \cdot (-1 + 0) = -e.$$

5.2 Kvaternioeksponentin ominaisuuksia

Tässä alaluvussa esittelemme kvaternioeksponentin ominaisuuksia ja todistamme niistä yhden.

Kaavaa $e^{i\pi} + 1 = 0$ on sanottu matematiikan historian kauneimmaksi yhtälöksi, sillä se on hyvin yksinkertainen ja siinä yhdistyy toisiinsa matemaattisia käsitteitä monelta eri matematiikan osa-alueelta. Yhtälössä on geometriasta tuttu luku π ja niin kokonaislukujen kuin reaalilukujenkin kunnan yhteen- ja kertolaskun neutraalialkiot 0 ja 1. Lisäksi yhtälössä on kompleksianalyysistä tuttu imaginääriyksikkö i sekä Neperin luku e.

Näytämme, että tämä matemaattinen kaava yleistyy myös kvaternioille, kunhan korvaamme jälleen imaginääriyksikön i kvaternion vektoriosaa vastaavalla yksikkö-kvaterniolla $\operatorname{sgn}(\hat{q})$.

Lause 5.7. *(ks. [2, s. 89]) Olkoon $q \in \mathbb{H}$ kvaternio. Kvaternioeksponentille e^q pätevät seuraavat ominaisuudet.*

1. $e^q \neq 0_{\mathbb{H}}$ *kaikilla* $q \in \mathbb{H}$,
2. $e^{-q}e^q = 1_{\mathbb{H}}$,
3. $e^{sgn(\hat{q})\pi} = -1_{\mathbb{H}}$,
4. $(e^q)^n = e^{nq}$ *kaikilla* $n \in \mathbb{Z}$,
5. *yleisesti* $e^q e^p \neq e^p e^q$, *paitsi jos p ja q kommutoivat.*

Todistamme lauseen 5.7 kohdat 3 ja 5.

Todistus. Olkoon $q = (q_0, \boldsymbol{q}) = q_0 + bi + cj + dk \in \mathbb{H}$ kvaternio. Nyt

$$\begin{aligned} e^{\operatorname{sgn}(\hat{q})\pi} &= e^0\Big(\cos|\operatorname{sgn}(\hat{q})\pi| + \operatorname{sgn}(\operatorname{sgn}(\hat{q})\pi)\sin|\operatorname{sgn}(\hat{q})\pi|\Big) \\ &= \cos|\operatorname{sgn}(\hat{q})\pi| + \frac{\operatorname{sgn}(\hat{q})\pi}{|\operatorname{sgn}(\hat{q})\pi|}\sin|\operatorname{sgn}(\hat{q})\pi|. \end{aligned}$$

Koska $|\mathrm{sgn}(\hat{q})\pi| = |\mathrm{sgn}(\hat{q})||\pi| = \pi$, saamme tuloksen

$$e^{\mathrm{sgn}(\hat{q})\pi} = \cos\pi + \frac{\mathrm{sgn}(\hat{q})\pi}{\pi}\sin\pi = -1_{\mathbb{H}} + \mathrm{sgn}(\hat{q})\cdot 0_{\mathbb{H}} = -1_{\mathbb{H}}.$$

Olkoon nyt $q \in \mathbb{H}$ ja $p \in \mathbb{H}$ kvaternioita siten, että $qp = pq$. Tällöin lauseen 4.6 nojalla saamme

$$\begin{aligned}
e^{q+p} &= \sum_{i=0}^{\infty}\frac{(q+p)^i}{i!} = \sum_{i=0}^{\infty}\frac{(p+q)^i}{i!} = \sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{i!}\sum_{k=0}^{i}\binom{i}{k}p^{i-k}q^k \\
&= \sum_{i=0}^{\infty}\Big(\sum_{k=0}^{i}\frac{1}{i!}\frac{i!}{k!(i-k)!}p^{i-k}q^k\Big) = \sum_{i=0}^{\infty}\Big(\sum_{k=0}^{i}\frac{q^k}{k!}\frac{p^{i-k}}{(i-k)!}\Big) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^n}{n!}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{p^n}{n!} = e^q e^p.
\end{aligned}$$

Vastaesimerkin avulla voimme todeta, että yleisesti ei kuitenkaan päde $e^{q+p} = e^q e^p$. Olkoot $q = i \in \mathbb{H}$ ja $p = j \in \mathbb{H}$. Tällöin

$$\begin{aligned}
e^{q+p} = e^{i+j} &= e^0\Big(\cos\sqrt{1^2+1^2} + \mathrm{sgn}(i+j)\sin\sqrt{1^2+1^2}\Big) \\
&= \cos\sqrt{2} + \Big(\frac{1}{\sqrt{2}}i + \frac{1}{\sqrt{2}}j\Big)\sin\sqrt{2} = \cos\sqrt{2} + \frac{\sin\sqrt{2}}{\sqrt{2}}i + \frac{\sin\sqrt{2}}{\sqrt{2}}j \\
&\neq \cos^2(1) + \sin(1)\cos(1)i + \sin(1)\cos(1)j + \sin^2(1)k \\
&= \Big(\cos(1) + \sin(1)i\Big)\Big(\cos(1) + \sin(1)j\Big) \\
&= e^0\Big(\cos\sqrt{1^2} + \mathrm{sgn}(i)\sin\sqrt{1^2}\Big)e^0\Big(\cos\sqrt{1^2} + \mathrm{sgn}(j)\sin\sqrt{1^2}\Big) = e^i e^j = e^q e^p.
\end{aligned}$$

□

Esimerkki 5.8. Olkoon $\{q_n\}$ kvaterniolukujono ja

$$\lim_{n\to\infty} q_n = \infty.$$

Tällöin

$$\lim_{n\to\infty}|e^{q_n}| = \infty.$$

Nimittäin lauseiden 5.3 ja 2.5 nojalla

$$\begin{aligned}
|e^{q_n}| &= |e^{\bar{q}_n}(\cos|\hat{q}_n| + \mathrm{sgn}(\hat{q}_n)\sin|\hat{q}_n|)| = |e^{\bar{q}_n}||\cos|\hat{q}_n| + \mathrm{sgn}(\hat{q}_n)\sin|\hat{q}_n|| \\
&\leq |e^{\bar{q}_n}|(|\cos|\hat{q}_n|| + |\mathrm{sgn}(\hat{q}_n)\sin|\hat{q}_n||) \\
&= |e^{\bar{q}_n}||\cos|\hat{q}_n|| + |e^{\bar{q}_n}||\mathrm{sgn}(\hat{q}_n)\sin|\hat{q}_n||.
\end{aligned}$$

Olettakaamme ensin, että

$$\lim_{n\to\infty}|\cos|\hat{q}_n|| \neq 0.$$

Tällöin

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}|e^{q_n}| &= \lim_{n\to\infty}|e^{\bar{q}_n}||\cos|\hat{q}_n|| + |e^{\bar{q}_n}||\mathrm{sgn}(\hat{q}_n)\sin|\hat{q}_n|| \\
&\geq \lim_{n\to\infty}|e^{\bar{q}_n}||\cos|\hat{q}_n|| = \infty,
\end{aligned}$$

kun $\lim_{n\to\infty} q_n = \infty$. Olettakaamme sitten, että

$$\lim_{n\to\infty} |\cos|\hat{q}_n|| = 0.$$

Tällöin

$$\lim_{n\to\infty} |\operatorname{sgn}(\hat{q}_n)\sin|\hat{q}_n|| = \lim_{n\to\infty} |\operatorname{sgn}(\hat{q}_n)||\sin|\hat{q}_n|| = \lim_{n\to\infty} 1\cdot|\sin|\hat{q}_n|| = 1,$$

joten

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} |e^{q_n}| &= \lim_{n\to\infty} |e^{\bar{q}_n}||\cos|\hat{q}_n|| + |e^{\bar{q}_n}||\operatorname{sgn}(\hat{q}_n)\sin|\hat{q}_n|| \\ &\geq \lim_{n\to\infty} |e^{\bar{q}_n}||\operatorname{sgn}(\hat{q}_n)\sin|\hat{q}_n|| = \lim_{n\to\infty} |e^{\bar{q}_n}| = \infty,\end{aligned}$$

kun $\lim_{n\to\infty} q_n = \infty$.

Esimerkki 5.9. Olkoon $\{q_n\} = \{a_n\} + \{b_n\}i + \{c_n\}j + \{d_n\}k$ kvaterniolukujono, jolle

$$a_n = b_n = c_n = d_n = \frac{\pi\sqrt{3}}{6}(2n+1).$$

Nyt

$$\lim_{n\to\infty} q_n = \infty,$$

sillä

$$a_n, b_n, c_n, d_n > M, \quad \text{kun} \quad n > \frac{M}{\pi 2\sqrt{3}} - \frac{1}{2}.$$

Kuitenkin

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} e^{q_n} &= \lim_{n\to\infty} e^{\bar{q}_n}(\cos|\hat{q}_n| + \operatorname{sgn}(\hat{q}_n)\sin|\hat{q}_n|) \\ &= \lim_{n\to\infty} (e^{\bar{q}_n}\cos|\hat{q}_n| + e^{\bar{q}_n}\operatorname{sgn}(\hat{q}_n)\sin|\hat{q}_n|) \neq \infty,\end{aligned}$$

sillä

$$\begin{aligned}\cos|\hat{q}_n| &= \cos\left(\sqrt{3\left(\frac{\pi\sqrt{3}}{6}(2n+1)\right)^2}\right) = \cos\left(\sqrt{3\left(\frac{3\pi^2}{36}(2n+1)^2\right)}\right) \\ &= \cos\left(\sqrt{\frac{\pi^2}{4}(2n+1)^2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}(2n+1)\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right) = 0\end{aligned}$$

kaikilla kokonaisluvuilla $n \in \mathbb{Z}$. Täten

$$\operatorname{Sc}(e^{q_n}) = e^{\bar{q}_n}\cos|\hat{q}_n| = e^{\bar{q}_n}\cdot 0 = 0.$$

6 Kvaterniologaritmi

Tässä luvussa esittelemme kvaterniologaritmin.

Määritelmä 6.1. (ks. [2, s. 92]) Olkoon $q \in \mathbb{H}$ kvaternio. Määrittelemme kvaterniologaritmin $\ln(q)$ seuraavasti.

$$\ln(q) = \ln|q| + \operatorname{sgn}(\hat{q}) \arg(q).$$

Tässä tulkitsemme luvun $\ln|q| \in \mathbb{H}$ skalaarikvaternioksi, jonka skalaariosa on reaalinen luonnollinen logaritmi reaaliluvusta $|q| \in \mathbb{R}$.

Huomautus. Koska kvaternion q argumentti $\arg(q)$ saa äärettömän monta arvoa, myös kvaternion q kvaterniologaritmi $\ln(q)$ saa äärettömän monta arvoa. Niinpä kyseessä ei ole varsinainen funktio, vaan moniarvoinen funktio. Yksiarvoisen funktion saamme kvaterniologaritmista, kun korvaamme kvaternion q argumentin tämän argumentin päähaaralla.

Esimerkki 6.2. Määritämme yhtälön $e^q = j$ ratkaisut. Muotoa $e^q = p$ olevalle yhtälölle pätee, että $q = \ln(p)$, joten yhtälölle $e^q = j$ saamme ratkaisun

$$q = \ln(j) = \log_e|j| + \operatorname{sgn}(\boldsymbol{j}) \arg(j) = 0 + j \cdot \frac{\pi(1+4n)}{2} = \frac{\pi(1+4n)}{2} j,$$

missä $n \in \mathbb{Z}$ on kokonaisluku.

Määritelmä 6.3. (ks. [2, s. 94]) Olkoon $q \in \mathbb{H}$ kvaternio. Määrittelemme kvaterniologaritmifunktion päähaaran $\operatorname{Ln} : \mathbb{H} \to \mathbb{H}, q \mapsto \ln(q)$ seuraavasti.

$$\operatorname{Ln}(q) = \ln|q| + \operatorname{sgn}(\hat{q})\operatorname{Arg}(q).$$

Tässäkin luku $\ln|q|$ on reaalinen luonnollinen logaritmi reaaliluvusta $|q| \in \mathbb{R}$.

Huomautus. Voimme erottaa toisistaan funktion skalaari- ja vektoriosat määritelmän 6.1 perusteella. Tällöin saamme funktion skalaariosan $\operatorname{Sc}(\ln(q)) = \ln|q|$ ja vektoriosan $\operatorname{Vec}(\ln q) = \operatorname{sgn}(\hat{q})\operatorname{Arg}(q)$.

Lause 6.4. *Olkoon $\{q_n\}$ kvaterniolukujono. Seuraavat ominaisuudet pätevät.*

1. *Jos* $\lim_{n\to\infty} q_n = \infty$, *niin* $\lim_{n\to\infty} |Ln(q_n)| = \infty$;
2. *jos* $\lim_{n\to\infty} q_n = q$, *niin* $\lim_{n\to\infty} Ln(q) = Ln(q)$.

Todistus. 1. Olkoon $\{q_n\}$ kvaterniolukujono. Olkoon lisäksi

$$\lim_{n\to\infty} q_n = \infty \quad \text{ja olkoon} \quad \varepsilon_1 \in \mathbb{R}_+ \quad \text{reaaliluku.}$$

Tällöin on olemassa sellainen positiivinen kokonaisluku $N_1 \in \mathbb{Z}_+$, että

$$a_n, b_n, c_n, d_n > (e^{\varepsilon_1 + \pi})^2, \quad \text{kun} \quad n > N_1.$$

Tästä seuraa, että

$$|q_n| = \sqrt{a_n^2 + b_n^2 + c_n^2 + d_n^2} > e^{\varepsilon_1+\pi}, \quad \text{kun} \quad n > N_1,$$

ja edelleen

$$\big|\ln|q_n|\big| \geq \ln|q_n| > \ln\left(e^{M+\pi}\right) = \varepsilon_1 + \pi, \quad \text{kun} \quad n > N_1.$$

Edelleen tästä seuraa, että

$$|\ln(q_n)| = |\ln|q_n| + \operatorname{sgn}(\hat{q}_n)\operatorname{Arg}(q_n)| \geq |\ln|q_n|| - \pi > \varepsilon_1, \quad \text{kun} \quad n > N_1.$$

Siis

$$\lim_{n\to\infty} |\ln(q_n)| = \infty.$$

2. Olkoon sitten

$$\lim_{n\to\infty} q_n = q \quad \text{ja olkoot} \quad \varepsilon_2 \in \mathbb{R}_+ \quad \text{ja} \quad \varepsilon_3 \in \mathbb{R}_+ \quad \text{positiivisia reaalilukuja.}$$

Olettakaamme ensin, että $|q| > 0$. Nyt määritelmän 3.4 nojalla on olemassa sellainen positiivinen kokonaisluku $N_2 \in \mathbb{Z}_+$, että $|q_n - q| < \varepsilon_2|q|$, kun $n > N_2$. Tällöin kolmioepäyhtälön nojalla

$$\left|\frac{|q_n|}{|q|} - 1\right| = \left|\frac{|q_n| - |q|}{|q|}\right| \leq \frac{|q_n - q|}{|q|} < \varepsilon_2.$$

Koska reaalinen logaritmifunktio on jatkuva ja $\ln 1 = 0$, niin nyt on olemassa sellainen positiivinen kokonaisluku $N_3 \in \mathbb{Z}_+$, että

$$\left|\ln\frac{|q_n|}{|q|}\right| < \varepsilon_3 + 2\pi, \quad \text{kun} \quad n > N_3.$$

Näin ollen kolmioepäyhtälön ja reaalianalyysin logaritmin laskukaavan nojalla

$$\begin{aligned}
\Big|\operatorname{Ln}(q_n) - \operatorname{Ln}(q)\Big| &= \Big|\ln|q_n| + \operatorname{sgn}(\hat{q}_n)\operatorname{Arg}(q_n) - \big(\ln|q| + \operatorname{sgn}(\hat{q})\operatorname{Arg}(q)\big)\Big| \\
&\leq \Big|\ln|q_n| - \ln|q|\Big| + \Big|\operatorname{sgn}(\hat{q}_n)\operatorname{Arg}(q_n) - \operatorname{sgn}(\hat{q})\operatorname{Arg}(q)\Big| \\
&\leq \left|\ln\frac{|q_n|}{|q|}\right| + \Big|\operatorname{sgn}(\hat{q}_n)\operatorname{Arg}(q_n)\Big| + \Big|\operatorname{sgn}(\hat{q})\operatorname{Arg}(q)\Big| < \varepsilon_3,
\end{aligned}$$

kun $n > N_3$, sillä

$$\Big|\operatorname{sgn}(\hat{q}_n)\operatorname{Arg}(q_n)\Big|, \Big|\operatorname{sgn}(\hat{q})\operatorname{Arg}(q)\Big| \leq \pi$$

aina, kun $q \in \mathbb{H}$ ja $q_n \in \mathbb{H}$ ovat kvaternioita.

Olettakaamme sitten, että $|q| = 0$. Silloin $q = 0$ ja määritelmän 3.4 nojalla on olemassa sellainen positiivinen kokonaisluku $N_4 \in \mathbb{Z}_+$, että

$$\Big|q_n - q\Big| = \Big|q_n\Big| < \varepsilon_3 + \pi, \quad \text{kun} \quad n > N_4.$$

Tällöin kolmioepäyhtälön nojalla

$$\begin{aligned}\Big|\mathrm{Ln}(q_n) - \mathrm{Ln}(q)\Big| &= \Big|\mathrm{Ln}(q_n) - 1\Big| = \Big|\ln|q_n| + \mathrm{sgn}(\hat{q_n})\mathrm{Arg}(q_n) - 1\Big| \\ &\le \Big|\ln|q_n| - 1\Big| + \Big|\mathrm{sgn}(\hat{q_n})\mathrm{Arg}(q_n)\Big| < \varepsilon,\end{aligned}$$

kun $n > N_4$, sillä

$$\Big|\mathrm{sgn}(\hat{q_n})\mathrm{Arg}(q_n) - 1\Big| \le \pi$$

aina, kun $q_n \in \mathbb{H}$ on kvaternio.

Niinpä määritelmän 3.4 nojalla

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{Ln}(q_n) = \mathrm{Ln}(q_n).$$

□

Lause 6.5. *Kvaternioeksponentti ja kvaterniologaritmi ovat toistensa käänteisfunktiot.*

Todistus. Koska luku $\log_e q \in \mathbb{H}$ on skalaarikvaternio, se kommutoi minkä tahansa kvaternion kanssa. Tällöin lauseen 5.7 kohdan 5 nojalla

$$\begin{aligned}e^{\mathrm{Ln}(q)} &= e^{\log_e |q| + \mathrm{sgn}(\hat{q})\mathrm{Arg}(q)} = e^{\log_e |q|} e^{\mathrm{sgn}(\hat{q}) \arccos\left(\frac{q_0}{|q|}\right)} \\ &= |q| e^0 \Big(\cos \Big| \mathrm{sgn}(\hat{q}) \arccos\left(\frac{q_0}{|q|}\right) \Big| \\ &+ \mathrm{sgn}\Big(\mathrm{sgn}(\hat{q}) \arccos\left(\frac{q_0}{|q|}\right)\Big) \sin \Big| \mathrm{sgn}(\hat{q}) \arccos\left(\frac{q_0}{|q|}\right) \Big| \Big) \\ &= |q| \Big(\cos \arccos\left(\frac{q_0}{|q|}\right) + \mathrm{sgn}(\hat{q}) \sin \arccos \frac{q_0}{|q|} \Big) \\ &= |q| \Big(\frac{q_0}{|q|} + \mathrm{sgn}(\hat{q}) \frac{|\hat{q}|}{|q|} \Big) = q.\end{aligned}$$

Toiseen suuntaan saamme

$$\begin{aligned}\mathrm{Ln}(e^q) &= \mathrm{Ln}\Big(e^{q_0}\big(\cos(\hat{q}) + \mathrm{sgn}(\hat{q})\sin(\hat{q})\big)\Big) \\ &= \log_e(e^{q_0}) + \mathrm{sgn}(\hat{q}) \arccos\left(\frac{e^{q_0}\cos|\hat{q}|}{e^{q_0}}\right) = q_0 + \frac{\hat{q}}{|\hat{q}|}|\hat{q}| = q.\end{aligned}$$

Näiden yhtälöiden nojalla voimme päätellä, että kvaternioeksponentti ja kvaterniologaritmin päähaara ovat toistensa käänteisfunktiot. □

Lähteet

[1] Pullinen, Anjuli: Kvaternioiden algebraa ja sovellus rotaatioissa. Tampereen yliopisto 2016.

[2] Morais, João Pedro; Georgiev, Svetlin; Sprössig, Wolfgang. *Real Quaternionic Calculus Handbook*. Birkhäuser 2014.

[3] Gürlebeck, Klaus & Sprössig, Wolfgang. *Quaternionic and Clifford Calculus for Phycisists and Engineers*. John Wiley & Sons Ltd 1997.

[4] Koivisto, Pertti: Analyysi A - Raja-arvo ja jatkuvuus. Tampereen yliopisto 2017.

[5] Kopp, P. E. *Analysis*. Modular mathematics series. Elsevier 1996.

[6] Wikipedia. *Cauchy product*. https://en.wikipedia.org/wiki/Cauchy_product 5.5.2018.

[7] Zawaira, Alexander & Hitchcock, Gavin. *A Primer for Mathematics Competitions*. Oxford University Press Inc. 2009.