

Matias Hiillos

VARATUT KVANTTIHIUKKASET MAGNEETTIKENTÄSSÄ

Teknis- luonnontieteellinen koulutusohjelma
Kandidaatintyö
Kesäkuu 2019

TIIVISTELMÄ

MATIAS HIILLOS: Varatut kvanttihiukkaset magneettikentässä

Tampereen yliopisto

Kandidaatintyö

Kesäkuu 2019

Teknis- luonnontieteellinen koulutusohjelma

Pääaine: Teknillinen fysiikka

Tarkastaja: Assoc. Prof. Teemu Ojanen

Avainsanat: kvanttimekaniikka, Landau-tasot, Schrödingerin yhtälö, äärellinen systeemi

Tässä työssä esitetään analyyttinen ratkaisu sähköisesti varatun kvanttihiukkasen Schrödingerin yhtälölle äärettömässä systeemissä, johon kohdistuu homogeeninen kohtisuora magneettikenttä. Tutkimuksen tarkoituksena oli ratkaista kyseinen ominisarvo-ongelma numeerisesti sekä verrata tuloksia analyyttiseen, äärettömän systeemin tapaukseen. Ongelma ratkaistiin diskretoimalla systeemi hilalle, jonka jälkeen saatuja tuloksia vertailtiin äärettömän systeemin tapaukseen. Diskretointi tehtiin skaalaamalla Hamiltonin operaattori dimensiottomaan muotoon, jonka jälkeen differentiaalioperaattorit diskretoitiin differenssimenetelmän (FDM) avulla sekä systeemin koordinaatit kerättiin matriisimuotoon. Numeerinen ratkaisu laskettiin myös äärelliselle systeemille, jossa magneettikenttä muuttuu lineaarisesti.

Saatuja tuloksia vertailtiin tarkastelemalla alimpien energiatasojen degeneraatioiden suuruuksia sekä kuvaajien muotoja. Homogeenisen kentän tapauksessa energiati-
lojen degeneraatio toteutui hyvin vertailtaessa analyyttiseen äärettömään systeemiin. Eroja äärettömän tapauksen ratkaisuihin olivat äärellinen degeneraatio sekä energiata-
sujen nousukohtien ympäristössä esiintyvät energiatilat. Asettamalla systeemiin li-
neaarisesti muuttuva kenttä puolestaan rikkoi energiati-
lojen degeneraatiota. Lisäksi kasvattamalla kentän jyrkkyyttä degeneraatio näytti häviävän täysin suuremmilla energioilla.

SISÄLLYS

1. Johdanto	1
2. Schrödingerin yhtälön analyyttinen ratkaiseminen vakiomagneettikentässä	2
2.1 Harmoninen oskillaattori	2
2.2 Mittamuunnokset	4
2.3 Landau-tasot	4
3. Landau-tasojen degeneraatio	6
4. Landau-tasojen numeerinen ratkaisu	7
4.1 Yhtälön skaalaus dimensiottomaksi	7
4.2 Schrödingerin yhtälön diskretointi	8
5. Tulokset	9
5.1 Homogeeninen magneettikenttä	9
5.2 Epähomogeeninen magneettikenttä	10
6. Yhteenveto	13
Lähteet	14

LYHENTEET JA MERKINNÄT

FDM	Finite Difference Method, differenssimenetelmä
MATLAB	Numeerinen laskentaohjelma
$V(x)$	Potentiaali kohdassa x
m	Massa
ω	Kierrostaajuus
\hbar	Redusoitu Planckin vakio
$\frac{d}{dx}, \partial_x$	Differentiaalioperaattori
$\psi(x)$	Aaltofunktio kohdassa x
E	Systeemin kokonaisenergia
n	Pääkvanttiluku
C_n	Normeerauskerroin energiatilalle n
h_n	Hermiten polynomi kertaluokalle n
∇	Nabla
∇^2, Δ	Laplacen operaattori
\times	Ristitulo
E	Sähkökenttä
B	Magneettikenttä
V	Skalaaripotentiali
A	Vektoripotentiali
i	Imaginääriyksikkö, $\sqrt{-1}$
\hat{H}	Hamiltonin operaattori
\hat{p}	Liikemääräoperaattori, $-i\hbar\nabla$
q	Hiukkasen varaus
l_0	Magneettinen pituus

1. JOHDANTO

1900-luvulla huomattiin, että klassisen mekaniikan sekä sähkömagnetismin teorit eivät olleet tarpeeksi päteviä. Yhtenä merkittävänä ongelmana oli ultraviolettikatastrofi, jolla tarkoitettiin ideaalin mustan kappaleen lähettämää äärettömän suurta tehoa. Fyysikko Max Planck esitti ratkaisun ongelmalle olettamalla mustan kappaleen säteilevän diskreettejä määriä energioita, jotka myöhemmin nimettiin fotoneiksi. Saatu tulos loi käsitteen energian kvantittuneisuus ja synnytti pohjan kvanttimekaniikan teorian kehitykselle.[1]

Teorian synnyttyä muut fyysikot kiinnostuivat kvanttimekaniikasta. Vuonna 1923 Louis de Broglie ehdotti aineen sisältävän sekä hiukkasten että aaltoliikkeen ominaisuuksia. Myöhemmin vuonna 1926 Erwin Schrödinger julkaisi yhtälön, joka mahdollisti kvanttimekaanisten systeemien tarkastelun. Yhtälön ratkaisuna on aaltofunktio, joka kertoo systeemin tilasta. Vuonna 1927 Werner Heisenberg esitti epätarkkuusperiaatteen, jonka mukaan tarkasteltavan systeemin liikemäärää sekä paikkaa ei voi samanaikaisesti tietää tarkasti.[1]

Vuonna 1927 teoreettinen fyysikko Lev Landau ratkaisi uuden Schrödingerin yhtälön ominaisarvo-ongelman varatulle hiukkaselle homogeenisessä magneettikentässä [2]. Saadut ratkaisut osoittivat systeemin eri energiatilojen suuren degeneraation, jotka saivat nimekseen Landau-tasot. Kyseisen ongelman ratkaisu oli keskeinen tulos kvanttimekaniikassa sekä kiinteän olomuodon fysiikassa. Landau-tasojen ominaisuuksia hyödynnetään nykytutkimuksen kannalta tärkeissä aiheissa kuten kvantti-Hall-ilmiössä ja sen ymmärtämisessä esimerkiksi monikerroksisen grafeenin tapauksessa [3].

Tämän tutkielman tarkoituksena on tarkastella Landaun ratkaisemaa ongelmaa äärellisen kokoisissa systeemeissä, joissa tavanomainen ratkaisu ei päde. Aluksi luvussa 2 tutkitaan kvantittuneen harmonisen oskillaattorin analyttistä ratkaisemista, mikä toimii pohjana Landau-tasojen ratkaisemisessa. Tämän jälkeen tutkitaan Landau-tasojen degeneraation suuruutta luvussa 3, minkä jälkeen luvussa 4 esitellään samaisen systeemin ratkaisu numeerisella menetelmällä. Lopuksi luvussa 5 esitellään tuloksia sekä luvussa 6 tiivistetään työn pääpiirteet.

2. SCHRÖDINGERIN YHTÄLÖN ANALYYTTINEN RATKAISEMINEN VAKIOMAGNEETTIKENTÄSSÄ

2.1 Harmoninen oskillaattori

Etsitään ratkaisut kvantittuneelle harmoniselle oskillaattorille. Tiedetään, että harmonisen oskillaattorin potentiaali on muotoa

$$V(x) = \frac{m\omega^2 x^2}{2}, \quad (2.1)$$

jossa m on massa, ω kulmataajuus ja x värähtelijän paikka. Nyt aikariippumaton Schrödingerin yhtälö on

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \psi(x) = E\psi(x), \quad (2.2)$$

jossa \hbar on redusoitu Planckin vakio, ψ on aaltofunktio ja E on systeemin kokonaisenergia.[4] Analyyttisen tarkastelun helpottamiseksi tehdään muuttujanvaihdos $x = \rho y$, jossa ρ sisältää paikan yksikön ja y on dimensioton suure. Tällöin yhtälö saadaan dimensiottomaan muotoon. Kyseisellä sijoituksella sekä sieventämällä yhtälöksi saadaan

$$\frac{d^2\psi(y)}{dy^2} - y^2\psi(y) = -\epsilon\psi(y), \quad (2.3)$$

jossa

$$\rho \equiv \frac{\hbar}{m\omega} \quad \text{ja} \quad \epsilon = \frac{2E}{\hbar\omega}. \quad (2.4)$$

Koska aaltofunktion tulee olla neliöintegroituva, tutkitaan yhtälöä suurilla y :n arvoilla. Nähdään, että

$$\frac{d^2\psi(y)}{dy^2} \approx y^2\psi(y), \quad (2.5)$$

jolle on olemassa likimääräinen ratkaisu $\psi(y) = e^{\pm y^2/2}$. Valitsemalla neliöintegroituva ratkaisu aaltofunktio saa muodon

$$\psi(y) \equiv h(y)e^{-y^2/2}, \quad (2.6)$$

jonka sijoittamalla kaavaan (2.2) differentiaaliyhtälöksi tulee

$$\frac{d^2h(y)}{dy^2} - 2y\frac{dh(y)}{dy} + (\epsilon - 1)h(y) = 0. \quad (2.7)$$

Oletetaan funktio $h(y)$ potenssisarjaksi. Tarkastellaan parillisia termejä, jolloin sarja saa muodon [4]

$$h^{(+)}(y) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n y^{2n} \quad (2.8)$$

Nyt sijoittamalla kyseinen potenssisarja differentiaaliyhtälöön (2.8) saadaan ehto

$$\sum_{n=0}^{\infty} [2(n+1)(2n+1)\alpha_{(n+1)} + (\epsilon - 1 - 4n)\alpha_n] y^{2n} = B_s y^{2s} = 0. \quad (2.9)$$

Kyseinen yhtälö pätee kaikilla arvoilla y , jos termi B_s on nolla. Tällöin potenssisarjan peräkkäisille termeille saadaan relaatio

$$a_{n+1} = a_n \left[\frac{4n+1-\epsilon}{2(n+1)(2n+1)} \right]. \quad (2.10)$$

Nyt parilliset aaltofunktiot ovat muotoa

$$\psi^{(+)} = a_0 \left[1 + \frac{a_1}{a_0} y^2 + \frac{a_2}{a_0} y^4 + \dots \right] e^{-y^2/2}. \quad (2.11)$$

Toisaalta eksponenttifunktiolle e^{y^2} löytyy sarjakehitelmä [5], joka on muotoa

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (y^2)^n. \quad (2.12)$$

Kyseinen sarjakehitelmä käyttäytyy samalla tavalla kuin funktion $h(y)$ sarjakehitelmä, minkä takia aaltofunktio hajaantuu. Ongelma korjaantuu asettamalla potenssisarja $h(y)$ äärelliseksi siten, että termi a_n nollaantuu. Tällöin myös kaikki sen jälkeiset termit nollaantuvat kaavan (2.10) mukaisesti. Tämä tapahtuu silloin, kun

$$a_n = 0 \Rightarrow \epsilon = 4n + 1. \quad (2.13)$$

Tästä seuraa, että energiat ovat kvantittuneita ja parilliset energiatilat saavat muodon

$$E_n^{(+)} = \hbar\omega \left(2n + \frac{1}{2} \right). \quad (2.14)$$

Vastaavasti tarkastelemalla parittomia potenssisarjan termejä $h^{(-)}$ saadaan parittomat aaltofunktiot ja energiatilat, jotka voidaan yhdistää parillisten tulosten kanssa.

Tällöin energiatiloiksi saadaan

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.15)$$

Normalisoidut aaltofunktiot ovat muotoa

$$\psi_n(x) = C_n h_n(y) e^{-y^2/2}, \quad (2.16)$$

jossa C_n on normeerauskerroin ja $h_n(y)$ on n :nnen kertaluokan Hermiten polynomi. Saadut ratkaisut ovat olennaisia Landaun probleeman ratkaisemisessa.

2.2 Mittamuunnokset

Kvanttimekaniikka on formuloitu Hamiltonin mekaniikan avulla, jossa sähkö- ja magneettikentät kirjoitetaan skalaari- sekä vektoripotentiaalien avulla:

$$\mathbf{E} = \nabla V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad (2.17)$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad (2.18)$$

joissa V on skalaaripotentiaali ja \mathbf{A} on vektoripotentiaali. Kyseisten yhtälöiden potentiaaleja on mahdollista muokata skalaarifunktion f avulla siten, että kenttien fysikaaliset ominaisuudet säilyvät. Potentiaalien muokkaus tapahtuu kaavoilla

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A} + \nabla f, \quad (2.19)$$

$$V \rightarrow V - \frac{\partial f}{\partial t}. \quad (2.20)$$

Muunnoksia (2.19) sekä (2.20) kutsutaan mittamuunnoksiksi ja potentiaalin valintaa mitan valinnaksi. [6] Oikeanlaisen potentiaalin valinta on olennainen osa systeemien ratkaisemisen helpottamisessa.

2.3 Landau-tasot

Tarkastellaan sähköisesti varattua hiukkasta xy -tasossa, johon kohdistuu z -suuntainen vakio magneettikenttä B_0 . Tällöin systeemin Hamiltonin operaattori on muotoa

$$\hat{H} = \frac{(\hat{p} - q\mathbf{A})^2}{2m}, \quad (2.21)$$

jossa $\hat{p} = -i\hbar\nabla$ on liikemääräoperaattori ja q on hiukkasen varaus [4]. Valitsemalla vektoripotentiaali niin kutsutussa Landaun mitassa, $A = [0, xB_0, 0]$, yhtälö saadaan muotoon

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}_x^2}{2m} + \frac{1}{2m}(\hat{p}_y - iqB_0\hat{x})^2. \quad (2.22)$$

Koska yhtälö ei riipu y :n arvosta, y :n suuntaisen liikemääräoperaattorin \hat{p}_y tilalle voidaan sijoittaa sen ominaisarvo $\hbar k_y$, jossa k_y on kvanttiluku. Lisäksi tunnistamalla syklotronitaajuus $\omega_c = \frac{qB}{m}$ ja järjestämällä termit uudelleen yhtälöksi saadaan

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}_x^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega_c^2 \left(\hat{x} - \frac{\hbar k_y}{m\omega_c} \right)^2. \quad (2.23)$$

Kyseinen yhtälö muistuttaa harmonista oskillaattoria, jonka potentiaali on siirtynyt $x_0 = \frac{\hbar k_y}{m\omega_c}$ verran. Koska potentiaalin siirtyminen ei vaikuta kokonaisenergian suuruuteen, energian ominaistilat ovat samat kuin harmonisella oskillaattorilla. Aaltofunktio puolestaan voidaan ilmaista y -suunnan liikemäärästä johtuvien ominaistilojen sekä potentiaalisirretyn harmonisen oskillaattorin ominaistilojen tulona

$$\psi(x, y) = e^{ik_y y} \psi_n(x - x_0). \quad (2.24)$$

Hiukkasen tilaa karakterisoivat kvanttiluvut n ja k_y . Kuitenkaan energia ei riipu k_y :stä, mikä johtaa siihen, että sama energia saadaan jokaiselle kvanttiluvun k_y arvolle. Tämä tarkoittaa sitä, että systeemi on äärimmäisen degeneroitunut. Kyseisiä degeneroituneita energiatiloja kutsutaan Landau-tasoiksi.

3. LANDAU-TASOJEN DEGENERAATIO

Tiedetään, että kvanttiluku k_y määrää harmonisen potentiaalin paikan, sillä $x_0 = \frac{\hbar}{m\omega_c} k_y$. Oletetaan systeemi $L_x L_y$ -kokoiseksi rajalliseksi systeemiksi, jolle pätee periodiset reunaehdot. Koska potentiaalin paikka on systeemin sisällä, saadaan ehto

$$0 \leq x_0 \leq L_x. \quad (3.1)$$

Nyt sijoittamalla potentiaalin siirtotermi saadaan

$$0 \leq k_y \leq \frac{m\omega_c}{\hbar} L_x. \quad (3.2)$$

Tiedetään, että k_y on kvantittunut termin $\frac{2\pi}{L_y}$ välein, jolloin mahdollisten ominaistilojen lukumäärä on

$$\frac{k_y^{max}}{2\pi/L_y} = \frac{L_x L_y}{2\pi l_0^2}, \quad (3.3)$$

jossa $l_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_c}}$ on magneettinen pituus. Tässä tarkastelussa oletettu systeemin koko on erittäin suuri verrattuna magneettiseen pituuteen. Kaavan (3.3) antama degeneraation suuruus toteutuu tarkasti vasta systeemin koon lähestyessä ääretöntä.

4. LANDAU-TASOJEN NUMEERINEN RATKAISU

Tässä työssä Schrödingerin yhtälön ominisarvo-ongelma ratkaistaan diskretoimalla systeemi hilalle. Tällöin systeemi skaalataan dimensiottomaksi, jonka jälkeen saatu yhtälö diskretoidaan. Tällöin aaltofunktio pystytään ratkaisemaan approksimaattisesti eri systeemin pisteissä.

4.1 Yhtälön skaalaus dimensiottomaksi

Suoritetaan saman systeemin skaalaus dimensiottomaksi. Hamiltonin operaattori on edelleen muotoa

$$\hat{H} = \frac{(p - q\mathbf{A})^2}{2m}. \quad (4.1)$$

Kertomalla osoittaja auki ja käyttämällä Landaun mittaa yhtälöksi saadaan

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \left(-(\partial_x^2 + \partial_y^2) + \frac{2eixB_0}{\hbar} \partial_y + \frac{q^2 x^2 B_0^2}{\hbar^2} \right). \quad (4.2)$$

Skaalataan muuttujat x ja y dimensiottomaksi valitsemalla dimensiolliseksi osaksi magneettinen pituus, jolloin muuttujat ovat muotoa $l_0 x'$ ja $l_0 y'$. Nyt dimensioton yhtälö on

$$(-(\partial_{x'}^2 + \partial_{y'}^2) + 2ix' \partial_{y'} + x'^2) \psi = \tilde{E} \psi, \quad \tilde{E} = \frac{E}{\frac{1}{2} \hbar \omega_c}. \quad (4.3)$$

Kyseinen yhtälö on nyt saatu dimensiottomaksi ja redusoitua ominisarvo-ongelmaksi, joka on muotoa

$$A\psi = E\psi. \quad (4.4)$$

Yhtälö voidaan ratkaista numeerisesti muuntamalla yhtälö diskretoimalla matriisi-muotoon.

4.2 Schrödingerin yhtälön diskretointi

Systemin ollessa 2-ulotteinen diskretointi tehdään helposti ajattelemalla systeemiä hilana, jonka jokaisessa hilapisteessä lasketaan aaltofunktion arvo. Koordinaatit saadaan kerättyä 1D -vektoriksi. Tämä tehdään keräämällä vektoriin tiettyä x -koordinaattia vastaavat y -koordinaatit järjestyksessä alla olevan kaavan (4.5) mukaisesti.

$$\left[y_1^{x_1}, y_2^{x_1}, \dots, y_{N_y}^{x_1}, y_1^{x_2}, \dots, y_{N_y}^{x_2}, \dots \right] \quad (4.5)$$

Vektorit saadaan kerättyä kyseisellä tavalla hyödyntämällä Kroneckerin tuloa [7], jolloin diskretoitu Laplacen operaattori on muotoa

$$\nabla^2 = \partial_x^2 + \partial_y^2 \approx \Delta_x \otimes I_{N_y \times N_y} + I_{N_x \times N_x} \otimes \Delta_y, \quad (4.6)$$

jossa Δ_x ja Δ_y ovat Laplacen operaattoreita yhdessä ulottuvuudessa sekä $I_{N_x \times N_x}$ ja $I_{N_y \times N_y}$ ovat identiteettimatriiseja.

Laplace -operaattori sekä derivaattaoperaattori saadaan diskretoitua käyttämällä differenssimenetelmää (FDM) [8], jolloin aaltofunktion 1. ja 2. derivaatat saavat likimääräiset muodot

$$\partial_x^2 \psi \approx \frac{\psi(x-h) - 2\psi(x) + \psi(x+h)}{h^2} = \frac{\psi_{n-1} - 2\psi_n + \psi_{n+1}}{h^2} \quad (4.7)$$

ja

$$\partial_x \psi \approx \frac{\psi(x+h) - \psi(x-h)}{2h}. \quad (4.8)$$

Lisäämällä periodiset reunaehdot derivaattamatriiseiksi saadaan

$$\partial_x^2 \approx \frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} -2 & 1 & & & 1 \\ 1 & -2 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & -2 & 1 \\ 1 & & & 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad \partial_x \approx \frac{1}{2h} \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & -1 \\ -1 & 0 & 1 & & \\ & -1 & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \\ 1 & & & & \end{bmatrix}.$$

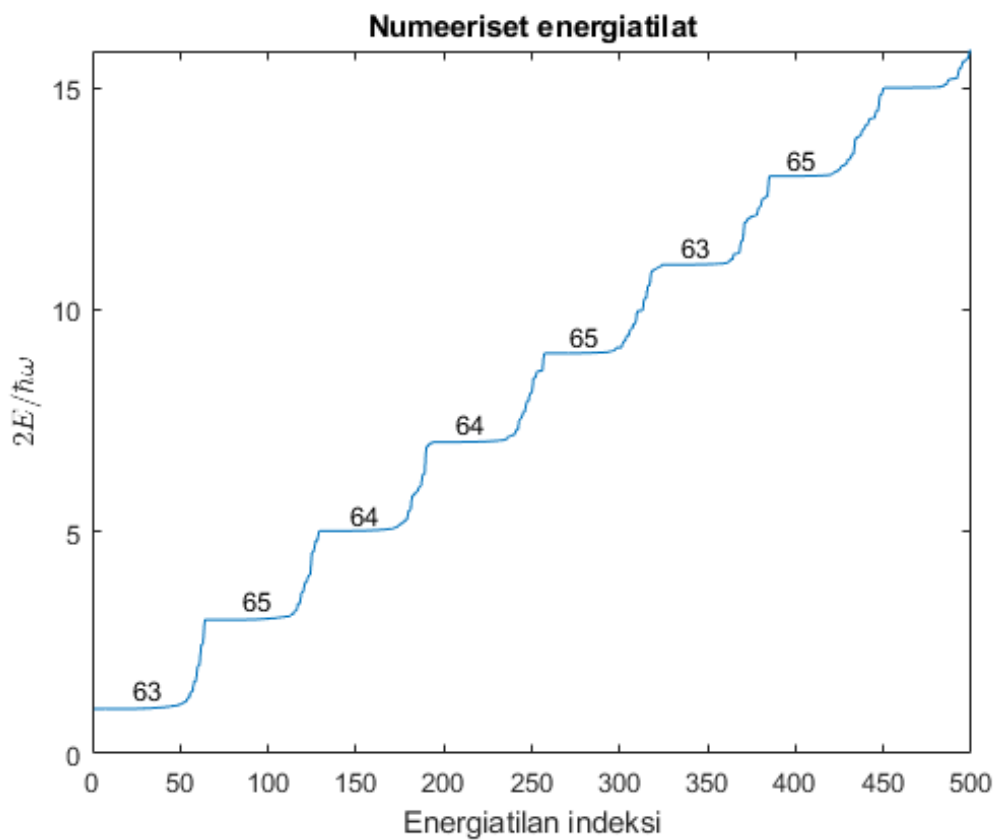
Tällöin sijoittamalla diskretoitunut Laplacen operaattorit sekä derivaattaoperaattori yhtälöön (4.3), systeemi saadaan ratkaistua laskennallisesti. Tässä työssä saatu matriisiyhtälö ratkaistiin käyttämällä MATLAB -ohjelmistoa.

5. TULOKSET

Tulosten laskennat suoritettiin määräämällä systeemin kooksi x- ja y -suunnissa $L = 20l_0$ sekä valitsemalla hilapisteiden lukumääräksi $n_x = 201$ ja $n_y = 2001$.

5.1 Homogeeninen magneettikenttä

500 ensimmäistä energiatilaa on piirretty kuvaan 5.1.



Kuva 5.1 Laskennalla saadut dimensiottomat energiat suuruusjärjestyksessä sekä Landau-tasojen degeneraatioiden suuruudet.

Kuvassa näkyy selkeitä alueita, joissa energiat ovat samat eri ominaistiloilla. Kuvan energiat ovat dimensiottomassa yksikössä $\tilde{E} = 2n + 1$, $n = 0, 1, 2, \dots$, jonka mukaan Landau-tasot saavat energioita. Nämä energiat vastaavat äärettömän systeemin energiatiloja täydellisesti.

Lisäksi kuvaan on merkitty jokaiselle Landau-tasolle numero, joka ilmoittaa ominaistilojen lukumäärän portaan kärjestä seuraavan portaan kärkeen. Valitulla systeemin koolla sallittujen energiatilojen lukumäärä saadaan analyttisesti määritettyä yhtälöstä (3.3), jolloin energiatasojen degeneraatioksi saadaan

$$\frac{k_y^{max}}{2\pi/L_y} = \frac{20l_0 \cdot 20l_0}{2\pi l_0^2} = 63.66 \approx 64. \quad (5.1)$$

Laskennallisesti määritetyt degeneraatiot vastaavat lähes täysin analyttistä tulosta. Kuvan energiatilat eivät kuitenkaan ole täydellisesti degeneroituneet, vaan energiatasojen välissä näkyy nousukohtia. Tämä johtuu siitä, että systeemi ratkaistaan hilana eikä jatkuvana, äärettömänä systeeminä.

5.2 Epähomogeeninen magneettikenttä

Samainen systeemi ratkaistiin käyttämällä lineaarisesti muuttuvaa z-suuntaista magneettikenttää siten, että systeemin läpi kulkeva magneettivuo on yhtä suuri. Analyttisesti tarkastelemalla Hamiltonin operaattori saadaan lineaarisella kentällä muotoon

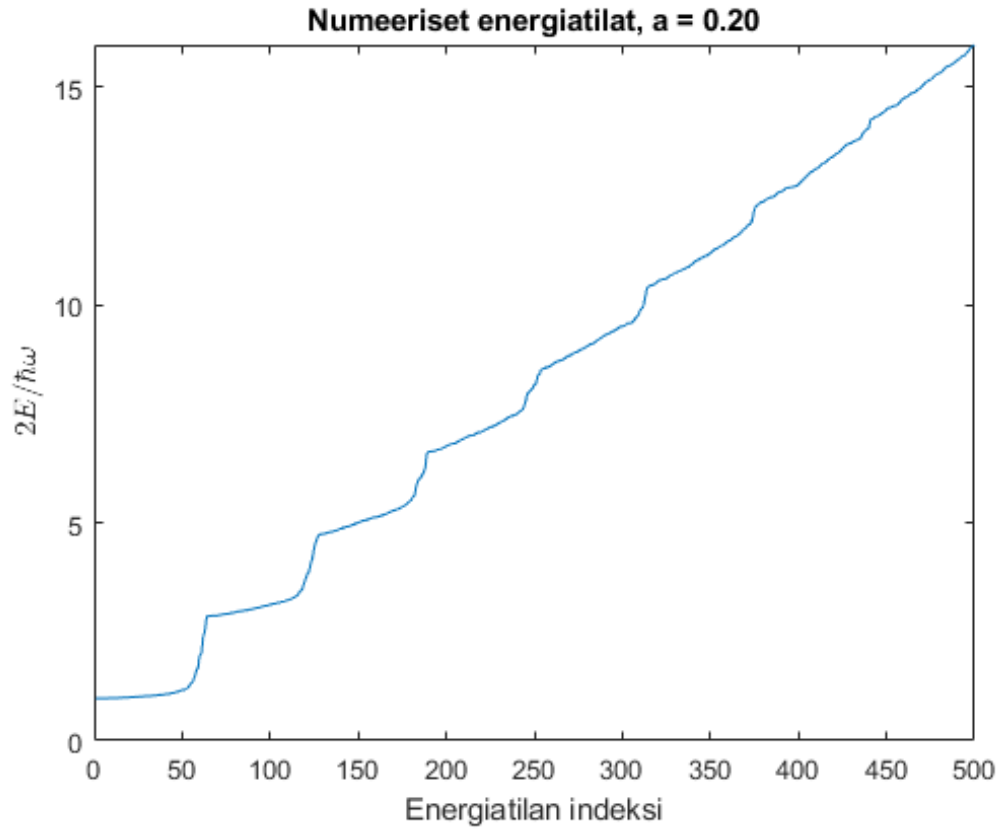
$$\hat{H} = \frac{\hat{p}_x^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega_c^2 \left(\hat{x} - \frac{\hat{p}_y}{m\omega_c} - \frac{1}{2}a\hat{x}^2 \right)^2, \quad (5.2)$$

jossa a on vapaasti valittava vakio, joka määrää lineaarisen kentän jyrkkyyden. Yhtälöä vertailemalla vakiokentän tapaukseen nähdään, että Hamiltonin operaattorissa on lisätermi $\frac{1}{2}a\hat{x}^2$. Valitsemalla $a = 0$ Hamiltonin operaattori on identtinen vakiokentän tapaukseen. Olennaista on tutkia, miten systeemin energiatasot muuttuvat, kun termiä a kasvatetaan.

Vektoripotentialin y -komponentiksi valittiin

$$\mathbf{A}_y = \frac{1}{2L}aB_0x^2 + B_0x, \quad (5.3)$$

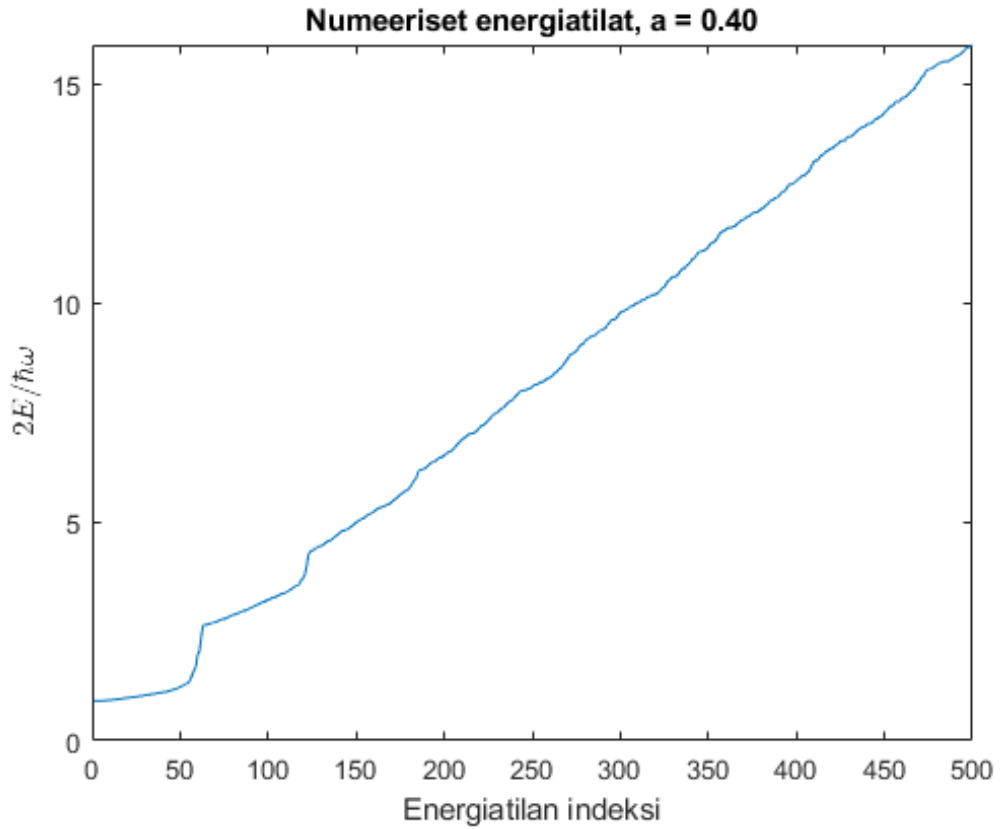
jossa L on systeemin koko ja B_0 on kohdassa 5.1 käytetty vakiokenttä. Lineaarisen kentän tulokset on laskettu arvolla $a = 0.20$. Tulokset näkyvät kuvassa 5.2.



Kuva 5.2 Linearisella kentällä saadut tulokset arvolla $a = 0.20$

Kuvia 5.1 ja 5.2 vertailtaessa huomataan, että asettamalla vakiokentän sijaan lineaarisesti muuttuva kenttä energiatasojen degeneraatio hajoaa suuremmalle alueelle. Mitä suurempaa energiatasoa tarkastellaan, sitä vähemmän degeneraatiota on havaittavissa.

Seuraavaksi systeemi ratkaistiin käyttämällä jyrkempää magneettikenttää arvolla $a = 0.40$. Laskennan tulokset on esitetty kuvassa 5.3.



Kuva 5.3 Linearisella kentällä saadut tulokset arvolla $a = 0.40$

Asettamalla jyrkempi magneettikenttä nähdään, että degeneraatio hajoaa entisestään. Lisäksi jyrkemmällä kentällä alemmat energiatasot hajoavat verrattuna kuvan 5.1 tuloksiin. Tarpeeksi suurella kentällä degeneraatio näyttää katoavan kokonaan muodostaen energiakuvaajasta lineaarisen.

6. YHTEENVETO

Tässä työssä esiteltiin Landaun probleeman analyttinen ratkaisu äärettömälle systeemille, minkä jälkeen kyseinen ongelma ratkaistiin numeerisesti äärelliselle systeemille. Ratkaisuja vertailemalla huomattiin, että äärellisen systeemin energiatasot olivat äärettömän systeemin tasojen alueella alimmilla tasoilla. Tuloksissa ilmeni pieniä eroja, jotka johtuivat muun muassa systeemin äärellisyydestä sekä datapistteiden lukumäärästä. Asettamalla systeemi lineaarisesti muuttuvaan magneettikenttään huomattiin, että kentän jyrkkyyden kasvattaminen poisti energiatasojen degeneraatiota.

Tutkimusta voi laajentaa asettamalla systeemiin erimuotoisia magneettikenttiä sekä tutkia, mitä energiatasojen degeneraatiolle tapahtuu kyseisillä kentillä. Tuloksia pystytään vertailemaan keskenään samankokoisen systeemin läpi kulkevan magnetivun ollessa samansuuruinen.

LÄHTEET

- [1] Ann Breslin Alex Montwill. *The Quantum Adventure, Does God Play Dice?* Imperial College Press, 2012, s. 60–65. ISBN: 978-1-84816-647-9.
- [2] L. Landau. “Diamagnetismus der Metalle”. *Zeitschrift für Physik* 64.9 (1930), s. 629–637. ISSN: 0044-3328. DOI: 10.1007/BF01397213. URL: <https://doi.org/10.1007/BF01397213>.
- [3] Maksym Serbyn ja Dmitry A. Abanin. “New Dirac points and multiple Landau level crossings in biased trilayer graphene”. *Phys. Rev. B* 87 (11 2013), s. 115422. DOI: 10.1103/PhysRevB.87.115422. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.87.115422>.
- [4] Richard W. Robinett. *Quantum Mechanics. Classical results, modern systems, and visualized examples*. Oxford University Press, 1997, s. 196–200, 448. ISBN: 0-19-509202-3.
- [5] Graham Upton ja Ian Cook. *Maclaurin series*. 2014. URL: <https://www.oxfordreference.com/view/10.1093/acref/9780199679188.001.0001/acref-9780199679188-e-973>.
- [6] L. B. Crowell M. W. Evans. *Classical And Quantum Electrodynamics And The B(3) Field*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2001, s. 80–83. ISBN: 981-02-4149-6.
- [7] Darrell A. Turkington. *Generalized Vectorization, Cross-Products, and Matrix Calculus*. Cambridge University Press, 2013, s. 2. ISBN: 978-1-10-703200-2.
- [8] Sergey Lemeshevsky et. al. *Exact Finite-Difference Schemes. Classical results, modern systems, and visualized examples*. De Gruyter, Inc., 2016, s. xiii. ISBN: 978-3-11-048964-4.