Tampereen yliopisto

Pyry Qvick

GRAAFITEORIAN OPPIMATERIAALIA

Informaatioteknologian ja viestinnän tiedekunta
Pro gradu -tutkielma
Maaliskuu 2019

TIIVISTELMÄ

Pyry Qvick: Graafiteorian oppimateriaalia
Pro gradu -tutkielma
Tampereen yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen tutkinto-ohjelma
Maaliskuu 2019

Tämä tutkielma on graafiteorian oppimateriaalia, jolla pyritään tarjoamaan monipuolinen läpileikkaus graafiteorian perusteisiin ja sovellutuksiin. Materiaalissa käsitellään luvuittain perusteita, Hamiltonin ja Eulerin graafeja, graafien värittämistä, dominointia sekä minimaalista virittävää puuta. Aiheista on esitetty niiden keskeisimmät määritelmät ja lauseet. Luvut on pidetty toisistaan erillisinä, jotta niitä voi perusteiden luvun hallitessaan opiskella vapaavalintaisessa järjestyksessä.

Tutkielmassa on pyritty matemaattiseen täsmällisyyteen, esitystapaa voi rinnastaa sekä lukion oppikirjoihin että tyypilliseen yliopistolliseen oppimateriaaliin. Kokonaisuus soveltuu niin lukiossa kuin ammattikorkeakoulussa hyödynnettäväksi esimerkiksi osaksi diskreetin matematiikan kurssia. Materiaalin johdannossa on ajankäyttöehdotus kurssin suoritusta varten ja lukujen lopuissa harjoitustehtäviä ratkaisuineen.

Avainsanat: Graafiteoria, oppimateriaali, Hamiltonin graafi, Eulerin graafi, graafien väritys, dominointi, minimaalinen virittävä puu

Sisältö

1 Johdanto

Tämä tutkielma on graafiteorian oppimateriaalia, jolla pyritään tarjoamaan monipuolinen läpileikkaus graafiteorian perusteisiin ja sovellutuksiin. Kokonaisuus soveltuu niin lukiossa kuin ammattikorkeakoulussa hyödynnettäväksi.

Materiaalin luvut eivät riipu toisistaan, joten perusteiden luvun 2 hallitessaan voi materiaalia opiskella haluamassaan järjestyksessä. Tekstissä käytetään harvoissa tapauksissa joukko-opin yksinkertaisia peruskäsitteitä, binomikerrointa, kattofunktiota sekä induktiotodistusta, mutta tekstin ymmärtämisen kannalta nämä eivät ole välttämättömiä pohjatietoja.

Materiaalissa on eriteltynä selkeästi toisistaan värein määritelmät, lauseet ja algoritmit. Siinä on pyritty matemaattiseen täsmällisyyteen, esitystapaa voi rinnastaa sekä lukion oppikirjoihin että tyypilliseen yliopistolliseen oppimateriaaliin. Osa materiaalissa esitetyistä lauseista on todistettu, sillä nämä todistukset ovat selkeitä ja suhteellisen helposti ymmärrettäviä. Teksti pohjaa pääosin Chartrandin & Zhangin [2], Koiviston & Niemistön [4] sekä Smithersin [5] teoksiin.

Lähtökohtaisena tuntiarviona voisi asettaa kullekin luvulle kolme 45 minuuttista oppituntia tai kaksi 75 minuuttista oppituntia. Tällä saavutetaan noin puolet normaalin lukiokurssin kestosta. Materiaalia voi hyödyntää esimerkiksi osana diskreetin matematiikan kurssia.

Harjoitustehtäviä on pyritty tarjoamaan kattavasti ja lähtökohtaisesti kunkin luvun tehtävät ovat vaikeusjärjestyksessä alkaen helpommista. Tehtävät pohjaavat pääosin Andrásfain [1], Chartrandin & Zhangin [2], Smithersin [5] ja Wilsonin & Watkinsin [7] teosten tehtäviin.

2 Perusteet

2.1 Peruskäsitteitä

Graafiteoria on matematiikan ala, joka tutkii objektien välisiä suhteita graafien eli matemaattisten mallien avulla. Kuten jatkossa tulemme huomaamaan, tämä yksinkertainen tapa hahmotella matemaattisia ongelmia soveltuu erinomaisesti monien konkreettisten tehtävien ratkaisemiseen.

Tässä luvussa määritellään graafiteorian peruskäsitteitä ja erilaisia graafeja, joita hyödynnetään myöhemmissä luvuissa. Perusasiat omaksuttuaan voi hahmottaa loput tämän materiaalin luvuista.

Määritelmä 2.1: Yksinkertainen graafi

Yksinkertainen graafi G on pari (V,E), missä V on äärellinen epätyhjä joukko graafin *pisteitä* ja E on äärellinen joukko pisteitä yhdistäviä *viivoja*.

Äärellisellä epätyhjällä joukolla tarkoitetaan joukkoa, joka ei ole tyhjä eikä ääretön. Graafin pisteet kuuluvat joukkoon V ja viivat joukkoon E. Joukon V merkki tulee pisteen englanninkielisestä nimestä *vertex* ja joukon E merkki vuorostaan viivan nimestä *edge*. Graafiteorian kirjallisuudessa vaihtoehtoinen nimi pisteelle on *solmu* ja viivalle *särmä*, mutta tässä materiaalissa käytämme määritelmässä annettuja nimiä.

Seuraavaksi eritellään pisteiden ja viivojen suhteiden määritelmiä, jotka selkeyttävät graafien hahmottamista.

Määritelmä 2.2: Pisteen ja viivan suhteista

Olkoon pisteiden u ja v välillä viiva $\{u,v\}$. Tällöin

1. pisteet u ja v ovat *vieruspisteet*,
2. viiva $\{u,v\}$ *yhdistää* pisteet u ja v,
3. pisteet u ja v ovat viivan $\{u,v\}$ *päätepisteet*,
4. viiva $\{u,v\}$ kulkee pisteiden u ja v kautta.

Pisteitä u ja v yhdistävää viivaa voidaan myös merkitä kirjaimella e. Tässä materiaalissa viivat nimetään kuitenkin lähtökohtaisesti antamalla viivan päätepisteet. Seuraava esimerkki havainnollistaa, kuinka graafeja esitetään.

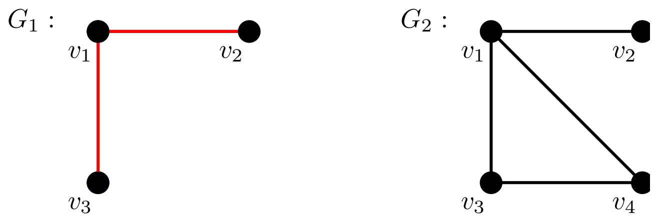
Esimerkki 2.1:

Nimensä mukaisesti graafia piirrettäessä sen pisteitä merkitään pisteinä ja pisteitä yhdistäviä viivoja viivoina. Kuvassa 2.1 on piirrettynä graafit

$$G_1 = (\{v_1, v_2, v_3\}, \{\{v_1, v_2\}, \{v_1, v_3\}\}) \text{ ja}$$
$$G_2 = (\{v_1, v_2, v_3, v_4\}, \{\{v_1, v_2\}, \{v_1, v_3\}, \{v_1, v_4\}, \{v_3, v_4\}\}).$$

Graafin G_1 kohdalla ensimmäisissä aaltosulkeissa on lueteltuna graafin pisteet v_1, v_2 ja v_3. Toisissa aaltosulkeissa vuorostaan punaisella merkityt viivat $\{v_1, v_2\}$ ja $\{v_1, v_3\}$.

Vastaavasti graafissa G_2 on ensimmäisissä aaltosulkeissa kaikki graafin pisteet v_1, v_2, v_3, v_4 ja niitä yhdistävät viivat $\{v_1, v_2\}, \{v_1, v_3\}, \{v_1, v_4\}$ ja $\{v_3, v_4\}$.



Kuva 2.1: Graafit $G_1 = (\{v_1, v_2, v_3\}, \{\{v_1, v_2\}, \{v_1, v_3\}\})$ ja $G_2 = (\{v_1, v_2, v_3, v_4\}, \{\{v_1, v_2\}, \{v_1, v_3\}, \{v_1, v_4\}, \{v_3, v_4\}\})$.

Käsittelemme tässä materiaalissa vain yksinkertaisia graafeja, joiden ominaisuuksia seuraava määritelmä tarkentaa. Tämä täsmennys on tärkeä, sillä osa tässä materiaalissa esiintyvistä lauseista on voimassa vain yksinkertaisille graafeille.

Määritelmä 2.3: Yksinkertainen graafi

Yksinkertainen graafi koostuu pisteistä ja niitä yhdistävistä viivoista, missä

1. kahden eri pisteen välillä voi olla korkeintaan yksi viiva,
2. pisteestä ei voi olla viivaa pisteeseen itseensä.

Seuraavaksi määrittelemme *asteen*, joka on hyvin keskeinen graafiteoriassa.

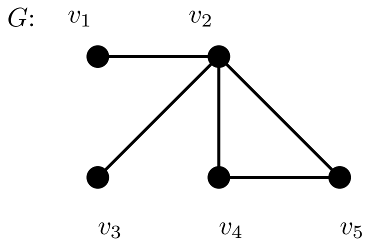
Määritelmä 2.4: Aste

Pisteen *aste* $\deg(\cdot)$ ilmaisee kuinka monen viivan päätepiste piste on.

Asteen merkki $\deg(\cdot)$ tulee sen englanninkielisestä nimestä *degree*.

Esimerkki 2.2:

Kuvassa 2.2 on eriteltynä graafin jokaisen viiden pisteen aste.



$\deg(v_1) = 1$
$\deg(v_2) = 4$
$\deg(v_3) = 1$
$\deg(v_4) = 2$
$\deg(v_5) = 2$

Kuva 2.2: Graafi G ja sen pisteiden asteet.

Monien tulosten kannalta on oleellista tietää graafin suurin tai pienin aste. Näille on omat määritelmänsä, *minimi-* ja *maksimiaste*.

Määritelmä 2.5: Minimi- ja maksimiaste

Olkoon G graafi. Tällöin graafin pienin aste $\delta(G)$ on graafin pisteiden *minimiaste* ja graafin suurin aste $\Delta(G)$ on graafin pisteiden *maksimiaste*.

Minimiastetta merkitään kreikan kielen kirjaimella delta δ ja maksimiastetta isolla kirjaimella Δ. Useampi graafin piste saattaa omata graafin minimi- tai maksimiasteen. Esimerkiksi kuvassa 2.2 graafin G pisteiden v_1 ja v_3 aste on 1.

Esitellään yksinkertaisen graafin pisteiden asteeseen liittyvä intuitiivinen *"kättelyteoria"*, jonka sitten todistamme yhdellä lauseella.

Lause 2.1: Kättelyteoria

Yksinkertaisen graafin pisteiden asteiden summa on jaollinen kahdella.

Todistus. Kukin viiva lisää asteiden summaa kahdella. □

Tässä materiaalissa toistuu useissa luvuissa *yhtenäisen graafin* määritelmä, joten esittelemme sen jo tässä luvussa. Tämä määritelmä on tärkeä, sillä monet määritelmät ja lauseet pätevät vain yhtenäisille graafeille. Kurssimateriaalissa kaikki käsiteltävät graafit ovat yhtenäisiä. Määritelläksemme yhtenäisen graafin meidän tulee ensin määritellä pisteiden välille muodostettava *polku*.

Määritelmä 2.6: Polku

Polku graafin G pisteestä u pisteeseen v on jono,

$$u = v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, ..., e_n, v_n = v,$$

jossa on vuorotellen graafin G pisteitä ja viivoja siten, että e_k on pisteiden v_{k-1} ja v_k välinen viiva. Piste u on polun *alkupiste* ja piste v polun *loppupiste*.

Polun voi mieltää yksinkertaisesti pisteestä toiseen muodostetuksi reitiksi. Tällaiselle polulle voidaan käyttää merkintää

$$p\colon u \to v.$$

Kun kyseessä on yksinkertainen graafi, voimme käyttää polulle pisteestä u pisteeseen v merkintää

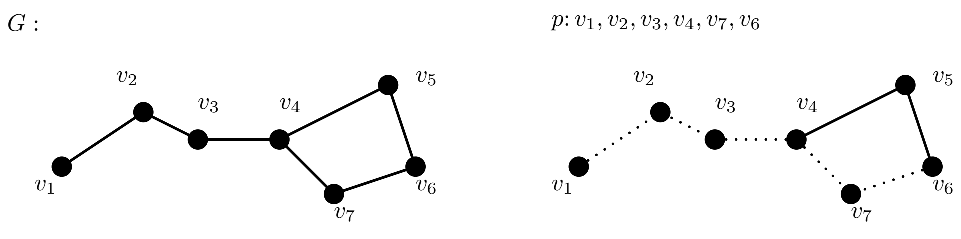
$$p\colon v_0, v_1, \ldots, v_n$$

eli jättää viivat huomioimatta.

Polun määritelmä ei poissulje vaihtoehtoa muodostaa polkua, jossa sama viiva esiintyy useaan kertaan. Esimerkiksi voidaan muodostaa polku kahta pistettä yhdistävän viivan kautta siten, että tätä yhtä viivaa pitkin kuljetaan mielivaltaisen monta kertaa pisteestä toiseen. Tässä materiaalissa emme kuitenkaan käsittele tällaisia tapauksia, vaan tapauksissa oletetaan lähtökohtaisesti, että viivat eivät toistu.

Esimerkki 2.3:

Kuvassa 2.3 on graafi G ja sen polku $p\colon v_1, v_2, v_3, v_4, v_7, v_6$.



Kuva 2.3: Graafi G ja sen polku $p\colon v_1, v_2, v_3, v_4, v_7, v_6$

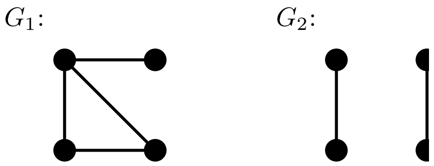
Polun määritelmän avulla voimme esittää yhtenäisen graafin määritelmän.

Määritelmä 2.7: Yhtenäinen graafi

Graafi on yhtenäinen, jos sen jokaisen kahden eri pisteen välillä on polku.

Esimerkki 2.4:

Kuvassa 2.4 on yhtenäinen graafi G_1 ja epäyhtenäinen graafi G_2.



Kuva 2.4: Yhtenäinen graafi G_1 ja epäyhtenäinen graafi G_2.

2.2 Erilaisia graafeja

Graafiteoriassa on nimetty tiettyjä graafeja, jotta niihin olisi helppo viitata. Määrittelemme tässä luvussa *silmukan*, *pyörän*, *täydellisen graafin*, *täydellisen kaksijakoisen graafin* sekä *k-säännöllisen* graafin. Näihin graafeihin viitataan myös muiden lukujen esimerkeissä ja tehtävissä.

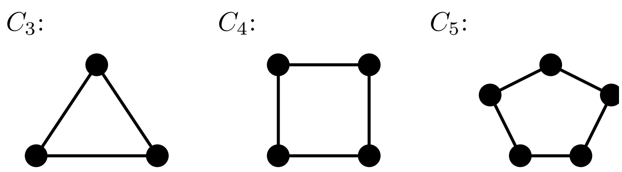
Määritelmä 2.8: Silmukka

Yksinkertainen graafi on *silmukka* C_n ($n = 3, 4, 5, \ldots$), jos sen pisteet ovat joukko $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ ja viivat joukko $\{\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \ldots, \{v_{n-1}, v_n\}, \{v_n, v_1\}\}$.

Silmukkaa voi luonnehtia ympyrän muotoiseksi graafiksi, jossa on n pistettä. Silmukan merkki C tulee silmukan englanninkielisestä nimestä *cycle*.

Esimerkki 2.5:

Kuvassa 2.5 on silmukat C_3, C_4 ja C_5.



Kuva 2.5: Silmukat C_3, C_4 ja C_5.

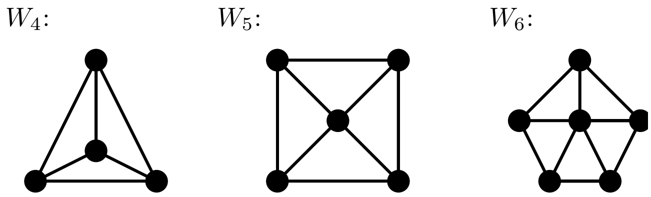
Määritelmä 2.9: Pyörä

Silmukasta saadaan *pyörä* W_n ($n = 4, 5, 6, \ldots$), kun silmukkaan lisätään yksi piste ja tästä pisteestä viiva jokaiseen muuhun pisteeseen.

Pyörää merkitsevä W tulee pyörän englanninkielisestä nimestä *wheel*.

Esimerkki 2.6:

Kuvassa 2.6 on pyörät W_4, W_5 ja W_6.



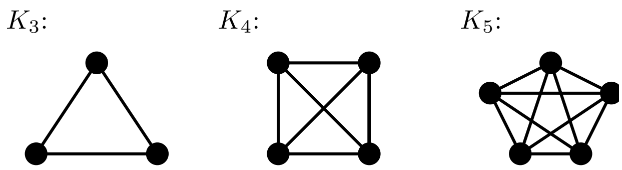
Kuva 2.6: Pyörät W_4, W_5 ja W_6.

Määritelmä 2.10: Täydellinen graafi

Yksinkertainen n-pisteinen graafi on *täydellinen* graafi K_n, jos jokaisen kahden eri pisteen välillä on viiva.

Esimerkki 2.7:

Kuvassa 2.7 on täydelliset graafit K_3, K_4 ja K_5.



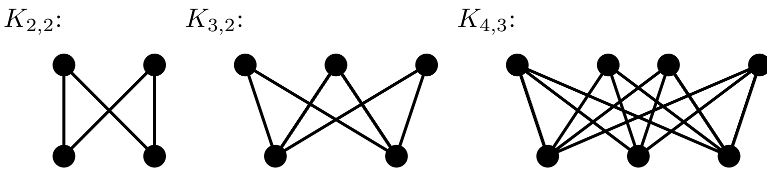
Kuva 2.7: Täydelliset graafit K_3, K_4 ja K_5.

Määritelmä 2.11: Täydellinen kaksijakoinen graafi

Yksinkertainen graafi on *täydellinen kaksijakoinen graafi* $K_{m,n}$, jos sen pisteet voidaan jakaa m- ja n-pisteiseen joukkoon siten, että jokainen m-pisteisen joukon piste on vieruspiste jokaisen n-pisteisen joukon pisteen kanssa.

Esimerkki 2.8:

Täydellisen kaksijakoisen graafin $K_{n,m}$ voi muodostaa asettamalla aluksi indeksien n ja m määrän mukaan pisteet omille rivelleen ja sitten yhdistämällä kaikki yhden rivin pisteet toisen rivin pisteisiin. Kuvassa 2.8 on graafit $K_{2,2}$, $K_{3,2}$ ja $K_{4,3}$.



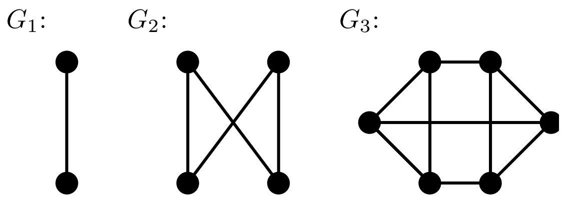
Kuva 2.8: Täydelliset kaksijakoiset graafit $K_{2,2}$, $K_{3,2}$ ja $K_{4,3}$.

Määritelmä 2.12: k-säännöllinen graafi

Yksinkertainen graafi on *k-säännöllinen*, jos sen jokaisen pisteen aste on k.

Esimerkki 2.9:

Kuvassa 2.9 on 1-säännöllinen graafi G_1, 2-säännöllinen graafi G_2 ja 3-säännöllinen graafi G_3.

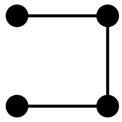


Kuva 2.9: 1-säännöllinen graafi G_1, 2-säännöllinen graafi G_2 sekä 3-säännöllinen graafi G_3.

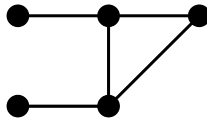
Tehtäviä

1. Esitä seuraavat graafit nimeämällä pisteet ja niiden väliset viivat.

G_1:

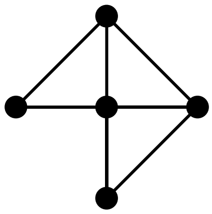


G_2:

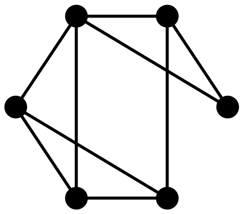


2. Mitkä ovat seuraavien graafien minimi- ja maksimiasteet?

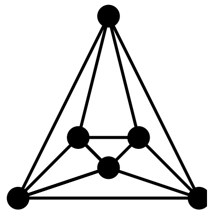
a)



b)

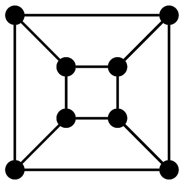


c)

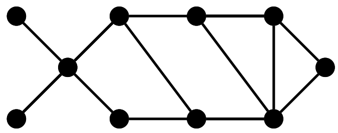


3. Mitkä ovat seuraavien graafien minimi- ja maksimiasteet?

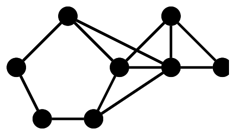
a)



b)



c)



4. Piirrä seuraavat graafit.

   (a) $G = (\{v_1, v_2, v_3\}, \{\{v_1, v_2\}, \{v_1, v_3\}, \{v_2, v_3\}\})$.

   (b) $G = (\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}, \{\{v_1, v_2\}, \{v_1, v_2\}, \{v_1, v_3\}, \{v_2, v_4\}, \{v_1, v_5\}\})$.

   (c) $G = (\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}, \{\{v_1, v_2\}, \{v_1, v_3\}, \{v_1, v_4\}, \{v_2, v_5\}, \{v_3, v_4\}\})$.

5. Piirrä seuraavat graafit.

   (a) Graafi, jonka pisteiden asteet ovat 2, 2, 2, 2 ja 2.

   (b) Graafi, jonka pisteiden asteet ovat 4, 2, 1, 1, 1 ja 1.

   (c) Graafi, jonka pisteiden asteet ovat 4, 3, 3, 3, 2, 2 ja 1.

6. Piirrä seuraavat graafit.

   (a) Nelipisteinen 3-säännöllinen graafi.

   (b) $K_{1,2}$.

7. Graafissa G on 6 pistettä, joiden asteet ovat 1, 2, 2, 3, 3 ja 5. Kuinka monta viivaa graafissa G on?

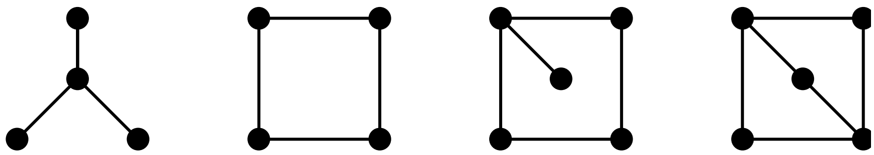
8. Eurooppalainen lentoyhtiö lentää seuraavia lentoja: Lontoo - Helsinki, Lontoo - Amsterdam, Lontoo - Bremen, Bremen - Helsinki, Amsterdam - Budapest ja Budapest - Helsinki. Esitä graafi kaupunkien välisistä lennoista.

9. Oheisessa listassa on pareittain keskenään kilpailevia lajeja. Muodosta listan perusteella graafi keskenään kilpailevista lajeista.

Keskenään kilpailevat lajit	
Supikoira	Orava
Supikoira	Pöllö
Supikoira	Haukka
Haukka	Varis
Varis	Pöllö
Orava	Varis
Orava	Tikka
Tikka	Päästäinen

10. Ovatko seuraavat graafit kaksijakoisia täydellisiä graafeja?

a) b) c) d)



11. Koulun tansseissa 5 tyttöä ja 3 poikaa vuorottelevat pareittain tanssien.

    (a) Kuinka monta paria tanssii, jos jokainen tyttö tanssii jokaisen pojan kanssa?

    (b) Kuinka monta paria tanssii, jos kaikki tanssivat kaikkien kanssa?

    (c) Mitä graafeja voi käyttää kohtien a ja b ratkaisemiseen?

12. Mikä on seuraavien graafien minimi- ja maksimiaste?

a) K_2 b) C_{45} c) W_7 d) W_{50}

13. Mikä on seuraavien graafien minimi- ja maksimiaste?

a) K_6 b) K_{10} c) $K_{2,2}$ d) $K_{4,3}$

14. Ohessa on taulukko turnauksen jalkapallojoukkueista A-F. Mikäli joukkueiden välille on merkitty taulukkoon x, joukkueet ovat pelanneet toisiaan vastaan.

    (a) Laadi taulukon perusteella graafi joukkueiden välillä pelatuista peleistä.

    (b) Laadi taulukon perusteella graafi joukkueiden vielä pelaamattomista peleistä.

	A	B	C	D	E	F
A	-	x	-	-	x	x
B	x	-	x	-	x	-
C	-	x	-	x	-	-
D	-	-	x	-	x	x
E	x	x	-	x	-	-
F	x	-	-	x	-	-

15. Piirrä sellainen graafi, joka on sekä silmukka että täydellinen graafi.

16. Piirrä sellainen graafi, joka on sekä pyörä että k-säännöllinen graafi.

17. Kuinka monta viivaa seuraavissa graafeissa on?

a) C_6 b) C_{45} c) W_7 d) W_{50}

e) K_6 f) K_{10} g) $K_{4,3}$ h) $K_{51,3}$

18. Millä arvoilla n ja m täydellinen kaksijakoinen graafi $K_{n,m}$ on k-säännöllinen?

19. Ovatko seuraavat graafit mahdollisia.

    (a) Viisipisteinen 3-säännöllinen graafi.

    (b) Graafi $K_{n,m}$, jonka asteiden summa on $2nm + 1$.

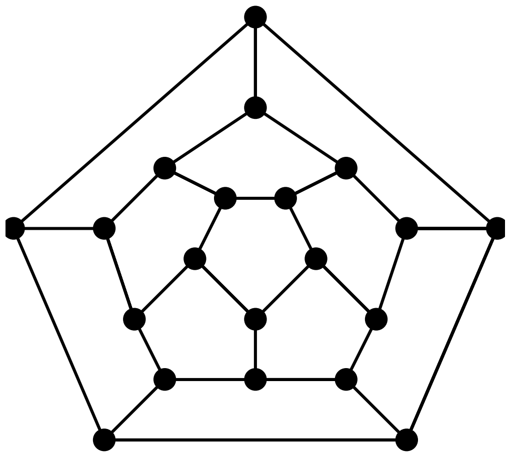
20. Mitkä ovat seuraavien graafien minimi- ja maksimiasteet?

a) C_n b) W_n c) K_n

3 Hamiltonin ja Eulerin graafit

3.1 Hamiltonin graafi

Vuonna 1859 irlantilainen matemaatikko William Rowan Hamilton kehitti Icosian -pelin. Se koostui puusta tehdystä dodekaedrista, jonka jokainen kulma oli nimetty kuuluisan kaupungin mukaan. Dodekaedrissa on 12 viisikulmaista tahkoa. Pelin tarkoituksena oli "kulkea maailman ympäri" jokaisen kulman kautta vain kerran ja palata takaisin päämäärään. Valitettavasti peli ei ollut menestys, sillä tehtävä on melko helppo ratkaista.



Kuva 3.1: Dodekaedri piirrettynä tasoon.

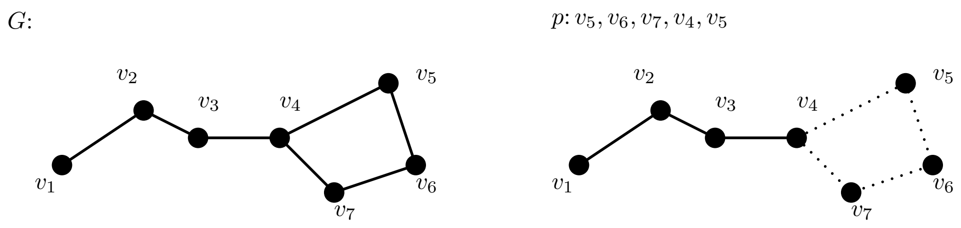
Pelillään Hamilton antoi kuitenkin nimensä kaikille sellaisille graafeille, joista löytyy *piiri*, jossa on kaikki graafin pisteet täsmälleen kerran. Polun ja piirin määritelmien avulla voimme hahmottaa *Hamiltonin polun* ja *Hamiltonin graafin* määritelmät. Polku on esitetty toisessa luvussa määritelmässä 2.6.

Määritelmä 3.1: Piiri

Polku on *piiri*, jos sen alku- ja loppupiste ovat samat ja siinä on vähintään yksi viiva.

Esimerkki 3.1:

Kuvaan 3.2 on hahmoteltu graafin G piiri $p : v_5, v_6, v_7, v_4, v_5$.



Kuva 3.2: Graafi G ja sen piiri $p\colon\ v_5, v_6, v_7, v_4, v_5$

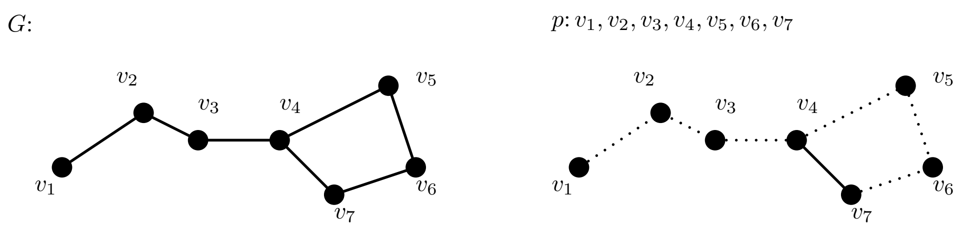
Polun ja piirin määritelmät rinnastuvat suoraan Hamiltonin polun ja Hamiltonin piirin määritelmiin.

Määritelmä 3.2: Hamiltonin polku, piiri ja graafi

Graafin polku on *Hamiltonin polku*, jos polku sisältää kaikki graafin pisteet täsmälleen kerran. Jos Hamiltonin polun alkupiste ja loppupiste ovat samat, polku on *Hamiltonin piiri*. Graafi on *Hamiltonin graafi*, jos siinä on Hamiltonin piiri.

Esimerkki 3.2:

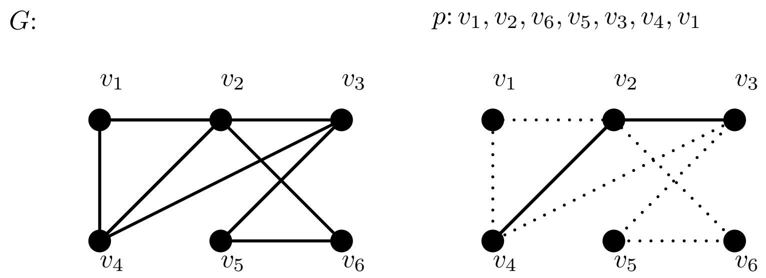
Kuvassa 3.3 on graafi G ja sen Hamiltonin polku $p\colon\ v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7$.



Kuva 3.3: Graafi G ja sen Hamiltonin polku $p\colon\ v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7$.

Esimerkki 3.3:

Kuvassa 3.4 on Hamiltonin graafi G ja sen Hamiltonin piiri $p\colon v_1, v_2, v_6, v_5, v_3, v_4, v_1$.



Kuva 3.4: Graafi G ja sen Hamiltonin piiri $p\colon v_1, v_2, v_6, v_5, v_3, v_4, v_1$.

Graafiteoriassa ei ole yksikäsitteistä tapaa todeta, onko jokin graafi Hamiltonin graafi. Suoraviivainen tapa on koittaa löytää graafista kokeilemalla Hamiltonin piiri, mutta tämä voi osoittautua hankalaksi. Pelkkä kokeilemisessa epäonnistuminen ei riitä perustelemaan, että graafi ei ole Hamiltonin graafi, ellei ole käynyt kaikkia mahdollisuuksia läpi.

Monien eri apulauseiden avulla voi kuitenkin pyrkiä selvittämään, onko graafi Hamiltonin graafi.

Lause 3.1:

Jos graafin jonkin pisteen aste on 1, graafi ei ole Hamiltonin graafi.

Tämä lause on hyvin ilmeinen, sillä graafiin muodostettava polku ei voi yksiasteisesta pisteestä siirtyä enää seuraavaan pisteeseen.

Lause 3.2:

Jos graafilla on Hamiltonin piiri, sen on kuljettava kaikkien viivojen kautta, jotka on yhdistetty 2-asteisiin pisteisiin.

Kun graafin mahdollista Hamiltonin piiriä hahmottelee piirtämällä, kannattaa aloittaa pisteistä joiden aste on 2. Mikäli jäljelle jäävät viivat eivät mahdollista piirin muodostamista, graafi ei ole Hamiltonin graafi.

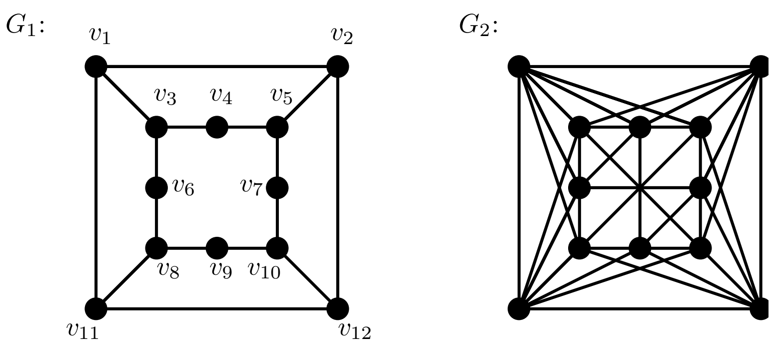
Lause 3.3:

Olkoon G yksinkertainen n-pisteinen graafi, jolle $n \geq 3$. Tällöin G on Hamiltonin graafi, jos $\delta(G) \geq n/2$.

Lause 3.3 siis tarkoittaa, että mikäli graafin pienin aste on yhtä suuri tai suurempi kuin puolet pisteiden määrästä, graafi on Hamiltonin graafi. Kuitenkin on tärkeä huomata, että graafi voi olla Hamiltonin graafi silloinkin, kun $\delta(G) < n/2$. Esimerkiksi silmukka C_6 on esimerkki tällaisesta graafista. Lauseella 3.3 ei siis voi osoittaa, että jokin graafi ei ole Hamiltonin graafi.

Esimerkki 3.4:

Selvitetään ovatko kuvan 3.5 graafit G_1 ja G_2 Hamiltonin graafeja ja onko niissä Hamiltonin piiri.



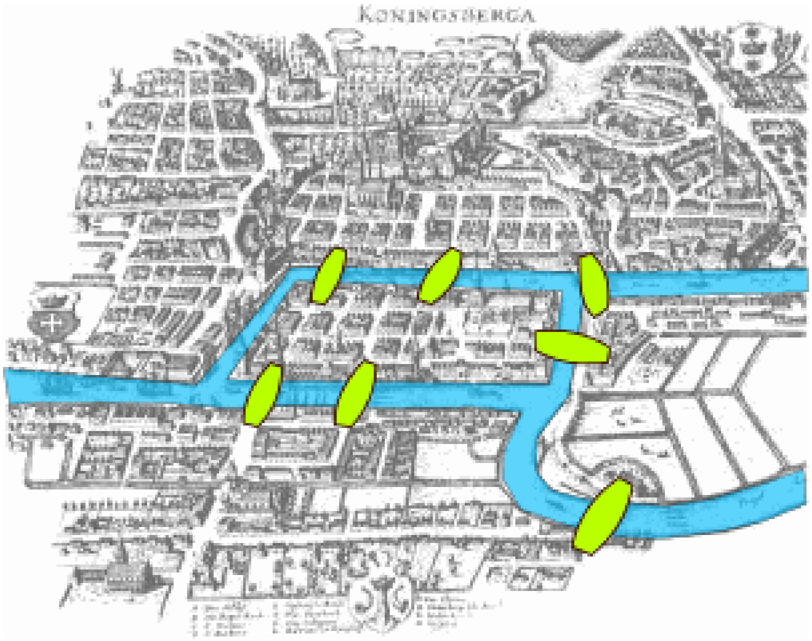
Kuva 3.5: Graafit G_1 ja G_2. Graafien pisteet on nimetty samoin.

Graafissa G_1 on neljä 2-asteista pistettä v_4, v_6, v_7 ja v_9. Mikäli alamme muodostaa näiden pisteiden kautta kulkevaa piiriä, muodostuu väistämättä kahdeksasta sisemmästä pisteestä piiri, johon ei saada sisällytettyä ulompia neljää pistettä. Graafi ei siis ole Hamiltonin graafi. Hamiltonin polku on kuitenkin helppo muodostaa, esimerkiksi $p\colon v_1, v_2, v_{12}, v_{11}, v_8, v_9, v_{10}, v_7, v_5, v_4, v_3, v_6$.

Graafista G_2 on helppo löytää Hamiltonin piiri. Esimerkiksi edellisen graafin Hamiltonin polku on helppo täydentää piiriksi $p\colon v_1, v_2, v_{12}, v_{11}, v_8, v_9, v_{10}, v_7, v_5, v_4, v_3, v_6, v_1$. Koska graafi on Hamiltonin graafi, on siinä myös Hamiltonin polku, joksi käy esimerkiksi aiemmin esitetty polku. Graafissa G_2 on 12 pistettä ja sen pienin aste on 6. Täten myös lauseen 3.3 nojalla G_2 on Hamiltonin graafi.

3.2 Eulerin graafi

Graafiteorian voidaan sanoa alkaneen Köningsbergin siltaongelmasta. Pregelin joki jakoi Köningbergin (nykyinen Kaliningrad) kaupungin neljään osaan. Näitä osia yhdisti seitsemän siltaa. Tarinan mukaan kaupunkilaiset yrittivät löytää kotioveltaan reittiä, joka kulkisi jokaisen sillan yli vain kerran ja palaisi kotiovelle. Tunnettu matemaatikko Leonhard Euler osoitti tämän mahdottomaksi muodostamansa graafin avulla. Hänen mukaansa on nimetty graafit, jotka sisältävät piirin, jossa kuljetaan jokaisen viivan kautta täsmälleen kerran.



Kuva 3.6: Köningsbergin sillat.

Kuten edeltävässä Hamiltonin graafin luvussa, määritellään aluksi *Eulerin polku*, sitten *Eulerin piiri* ja *Eulerin graafi*.

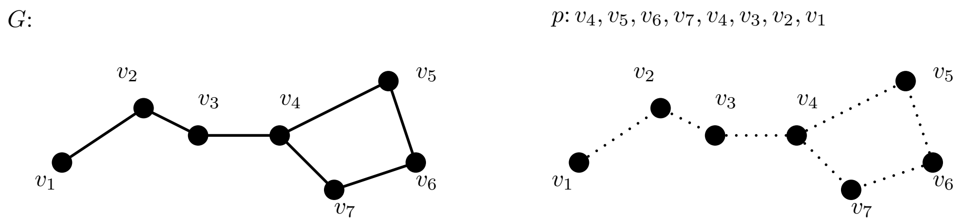
Määritelmä 3.3: Eulerin polku

Graafin polku on *Eulerin polku*, jos se sisältää graafin jokaisen viivan täsmälleen kerran.

Eulerin polkua voi luonnehtia reitiksi, jolla graafin voi kynää nostamatta piirtää paperille siten, että jokaisen viivan kautta kuljetaan vain kerran.

Esimerkki 3.5:

Kuvan 3.7 graafille G voidaan muodostaa Eulerin polku $p\colon v_4, v_5, v_6, v_7, v_4, v_3, v_2, v_1$.



Kuva 3.7: Graafi G ja sen Eulerin polku $p\colon v_4, v_5, v_6, v_7, v_4, v_3, v_2, v_1$.

Seuraavan lause asettaa ehdon sille, onko graafissa Eulerin polku.

Lause 3.4:

Yhtenäisessä graafissa on Eulerin polku täsmälleen silloin, kun se sisältää täsmälleen nolla tai kaksi pistettä, joilla on pariton aste.

Mikäli graafin kaikki asteet ovat parillisia, voidaan muodostaa Eulerin polku siten, että jokaisen viivan kautta kuljetaan täsmälleen kerran. Tällöin polun lähtö- ja päätepisteet ovat samat. Mikäli graafissa on kaksi paritonasteista pistettä, voidaan muodostaa Eulerin polku siten, että nämä paritonasteiset pisteet toimivat Eulerin polun päätepisteinä. Muissa pisteiden astemäärien tapauksissa Eulerin polkua on mahdotonta muodostaa.

Kuten Hamiltonin graafin tapauksessa, graafista tekee Eulerin graafin Eulerin piiri.

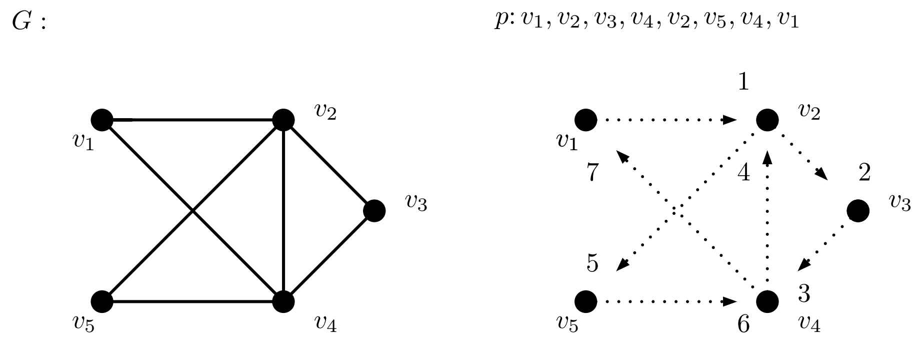
Määritelmä 3.4: Eulerin piiri, Eulerin graafi

Graafin piiri on *Eulerin piiri*, jos se sisältää graafin jokaisen viivan täsmälleen kerran. Graafi on *Eulerin graafi*, jos siinä on Eulerin piiri.

Eulerin graafia voi luonnehtia siten, että sen voi piirtää paperille palaamalla lähtöpisteeseen nostamatta kynää paperista ja piirtämättä samaa viivaa kahdesti.

Esimerkki 3.6:

Kuvassa 3.8 on muodostuksen vaiheet numeroituna graafin G Eulerin piiri $p\colon v_1, v_2, v_3, v_4, v_2, v_5, v_4, v_1$ viivoittain.



Kuva 3.8: Graafi G ja sen Eulerin piiri $p : v_1, v_2, v_3, v_4, v_2, v_5, v_4, v_1$.

Seuraava lause esittää yksiselitteisen ehdon Eulerin graafille.

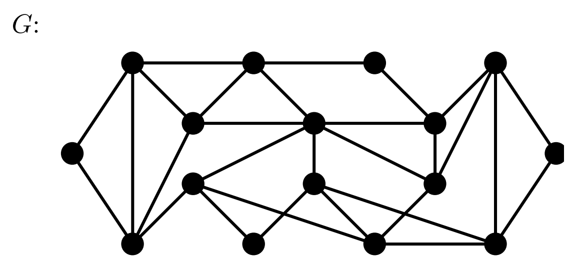
Lause 3.5:

Graafi G on Eulerin graafi täsmälleen silloin, kun sen jokaisen pisteen aste on parillinen.

Lausetta 3.5 voi verrata lauseeseen 3.4. Mikäli graafissa olisi paritonasteisia pisteitä, seuraisi väistämättä tilanne, jossa polku ei voisi poistua tällaisesta pisteestä ja muodostaa siten piiriä.

Esimerkki 3.7:

Kuvan 3.9 graafi G on Eulerin graafi, sillä sen jokainen aste on parillinen.



Kuva 3.9: Eulerin graafi G.

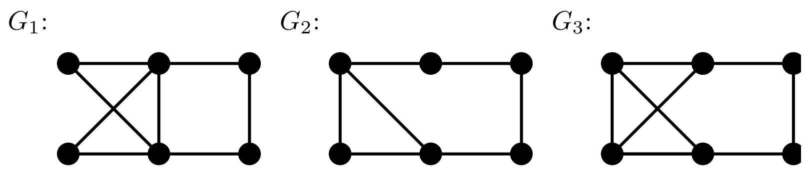
Esimerkki 3.8:

Selvitetään ovatko kuvan 3.10 graafit Eulerin graafeja tai onko niissä Eulerin polku.

Graafissa G_1 kaikkien pisteiden asteet ovat parillisia, joten se on Eulerin graafi eli sillä on myös Eulerin polku.

Graafissa G_2 on kaksi paritonasteista pistettä, joten se ei ole Eulerin graafi, mutta siinä on Eulerin polku.

Graafissa G_3 on neljä paritonasteista pistettä, joten se ei ole Eulerin graafi, eikä siinä ole Eulerin polkua.



Kuva 3.10: Graafit G_1, G_2 ja G_3.

Tehtäviä

21. Anna esimerkki seuraavista poluista ja piireistä graafissa G.

    (a) Polku $p\colon v_1 \to v_9$.

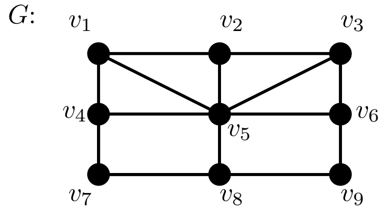
    (b) Polku $p\colon v_7 \to v_8$, jossa on 6 viivaa.

    (c) Polku $p\colon v_2 \to v_3$, jossa on 8 viivaa.

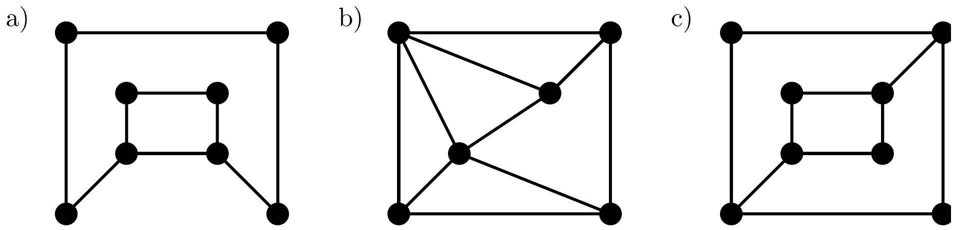
    (d) Piiri, jossa on 5 viivaa.

    (e) Piiri, jossa on 8 viivaa.

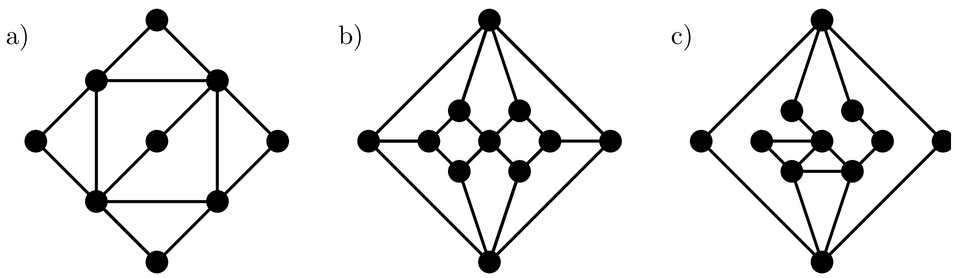
    (f) Piiri, jossa on 9 viivaa.



22. Selvitä ovatko seuraavat graafit Hamiltonin graafeja tai Eulerin graafeja.



23. Selvitä ovatko seuraavat graafit Eulerin graafeja ja onko niissä Eulerin polku.

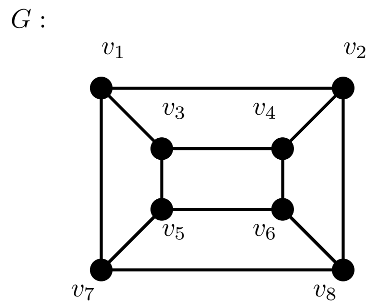


24. Missä tehtävän 22 graafeista on Eulerin polku?

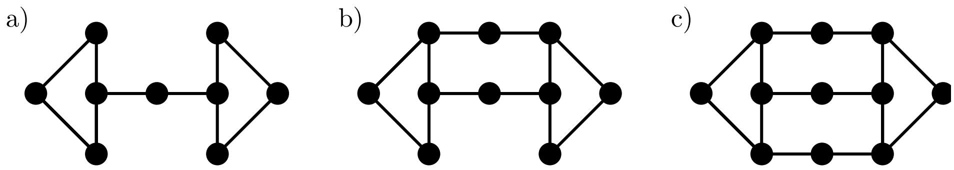
25. Ratkaise Icosian-peli eli etsi kuvasta 3.1 Hamiltonin piiri.

26. Muodosta 15-pisteinen Eulerin graafi, joka ei ole piiri.

27. Selvitä graafin G kaikki Hamiltonin piirit, joiden viivojen joukot ovat eriävät. Piirtäminen riittää. Voit myös nimetä graafin viivat.



28. Selvitä ovatko seuraavat graafit Hamiltonin graafeja ja onko niissä Hamiltonin polku.



29. Piirrä sellainen graafi, jossa ei ole Eulerin polkua.

30. Muodosta viisipisteinen graafi, joka

    (a) on Hamiltonin graafi, mutta ei Eulerin graafi,

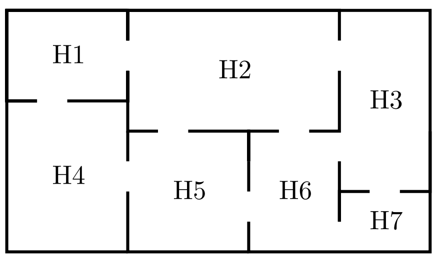
    (b) on Eulerin graafi, mutta ei Hamiltonin graafi,

    (c) on sekä Eulerin, että Hamiltonin graafi,

    (d) ei ole Eulerin eikä Hamiltonin graafi.

31. Oletetaan, että graafissa G on Hamiltonin polku. Mikä on maksimimäärä yksiasteisia pisteitä, joita graafissa G voi olla? Perustele vastauksesi.

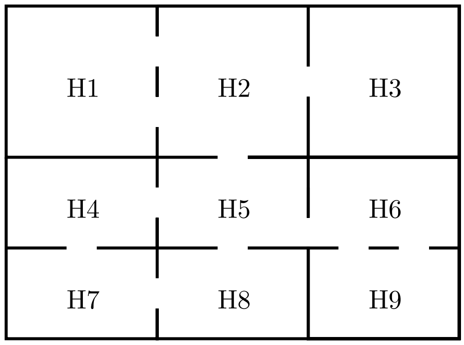
32. Ohessa on Joonan toimiston pohjapiirrustus.



(a) Onko Joonan mahdollista saattaa vieraat toimiston läpi käyttämällä jokaista ovea täsmälleen kerran?

(b) Onko Joonan mahdollista saattaa vieraat toimiston läpi käyden jokaisessa huoneessa täsmälleen kerran?

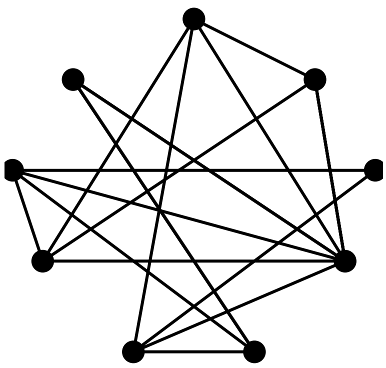
33. Ohessa on museon pohjapiirrustus.



(a) Onko vartijan mahdollista kiertää museo läpi käymällä läpi jokaisesta ovesta täsmälleen kerran?

(b) Onko vartijan mahdollista kiertää museo läpi vierailemalla jokaisessa huoneessa vain kerran?

34. Ohessa on graafi havainnollistamassa joukkoa oppilaita. Pisteet merkitsevät oppilaita ja viiva sitä, että he tuntevat toisensa. Onko mahdollista jakaa oppilaat piiriin siten, että jokainen tuntee vasemmalla ja oikealla puolella olevan?



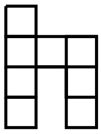
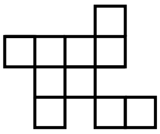
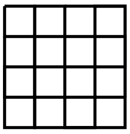
35. Miksi Köningbergin siltaongelma ei ole ratkaistavissa?

36. Onko 12-pisteinen 6-säännöllinen graafi Hamiltonin graafi?

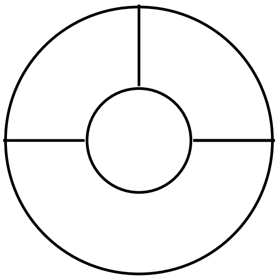
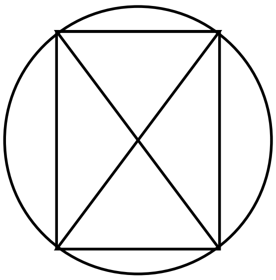
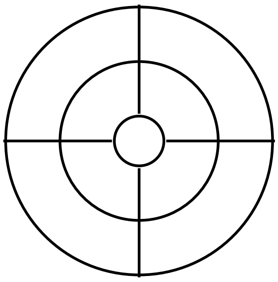
37. Millä muuttujan n arvolla K_n on Eulerin graafi?

38. Millä muuttujien n ja m arvoilla $K_{n,m}$ on Eulerin graafi?

39. Ratsun kierto on ongelma, jossa tutkitaan voiko ratsu käydä tietyn shakkialustan kaikissa ruuduissa täsmälleen kerran. Esimekiksi normaalille 8x8-shakkilaudalle tämä on mahdollista. Nimeämällä ruudut ja piirtämällä ratsun mahdollisia liikkeitä vastaava graafi osoita, että ratsun kierto on seuraaville ruudukoille mahdollinen.

a)  b)  c) 

40. Mikäli seuraavat kuviot haluaa piirtää paperille mahdollisimman vähillä kynän nostoilla ilman päällekkäisiä piirtoja, montako kynän nostoa tarvitaan?

a)  b)  c) 

4 Graafin värittäminen

Vuonna 1852 Francis Guthrie huomasi, että kaikki Englannin maakunnat voitiin värittää kartalla neljällä värillä siten, että vierekkäisillä maakunnilla ei ollut samaa väriä. Hän yritti todistaa, että tämä pitäisi paikkansa kaikille mahdollisille kartoille. Tämän todistaminen osoittautui kuitenkin erittäin hankalaksi.

Ongelmaa alettiin nimittää neliväriongelmaksi: ovatko kaikkien karttojen maat väritettävissä neljällä värillä ilman, että vierekkäisillä mailla on sama väri. Ongelmaa hahmoteltiin graafein, joissa pisteet merkitsivät maita ja viivat niiden välisiä rajoja. Tällaisessa havainnollistavassa graafissa vieruspisteillä ei saa olla samaa väriä.

Vuonna 1879 Alfred Kempe julkaisi "todistuksen", jossa kaikkien karttojen osoitettiin olevan väritettävissä neljällä värillä. Kuitenkin vuonna 1890 Percy Heawood osoitti yhdellä vastaesimerkillä todistuksen olevan virheellinen.

Kului lähes sata vuotta Kempen virheellisestä todistuksesta, ennen kuin ongelma ratkaistiin. Vasta tietokoneiden prosessointikyvyn kehitys mahdollisti ongelman ratkaisun. Vuonna 1976 Wolfgang Haken työryhmänsä kanssa onnistui osoittamaan tietokonemallinnuksella, että pienin karttojen värittämiseen tarvittava määrä on neljä. Tämä tietokonemallinnus kesti kolmelta tietokoneelta kultakin 1200 tuntia.

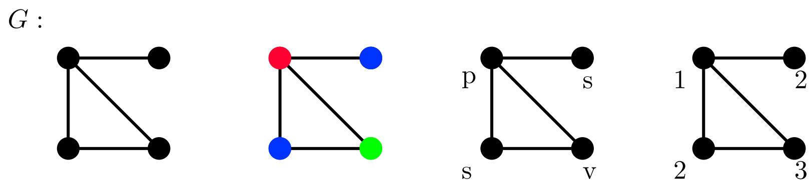
Neliväriongelman innoittama graafien värittäminen soveltuu monien arkisten ongelmien hahmottamiseen. Näiden sovellutusten kannalta tulee ymmärtää termit *väritys*, *k-väritys* ja *väriluku*.

Määritelmä 4.1: Graafin värittäminen

Graafin *värittämisellä* tarkoitetaan graafin pisteiden värittämistä siten, että vieruspisteet ovat aina erivääriset.

Esimerkki 4.1:

Graafin väritystä voimme merkitä värein, kirjaimin tai numeroin kuten esimerkiksi kuvassa 4.1. Varsinkin kirjaimia käytettäessä on varottava sekoittamasta väritystä pisteiden mahdollisiin indekseihin.



Kuva 4.1: Graafin G väritys on ilmaistu värein, kirjaimin ja numeroin.

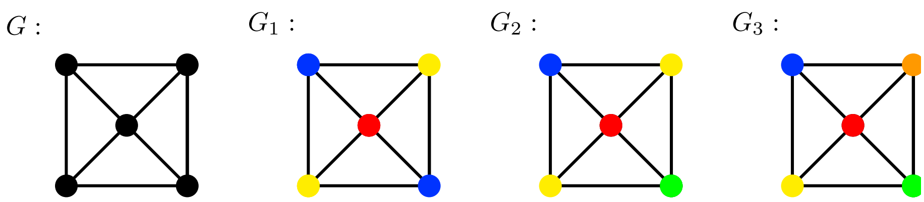
Graafin värityksessä voidaan käyttää useita määriä värejä. Esimerkiksi kartta voidaan värittää vain neljällä värillä, mutta myös jokainen maa voidaan värittää eri värillä.

Määritelmä 4.2: k-väritys

Graafin G *k-väritys* on graafin väritys värien määrällä k.

Esimerkki 4.2:

Kuvassa 4.2 on graafi G ja värein ilmaistuna sen 3-väritys G_1, 4-väritys G_2 ja 5-väritys G_3.



Kuva 4.2: Graafin G 3-väritys G_1, 4-väritys G_2 ja 5-väritys G_3.

Kuten nälivärionglemassa, on usein mielekkäintä etsiä pienintä mahdollista k-väritystä. Tätä nimetään *väriluvuksi*.

Määritelmä 4.3: Väriluku

Graafin G *väriluku* $\chi(G)$ on pienin määrä värejä, jotka tarvitaan graafin värittämiseen.

Värilukua ilmaisee kreikan kielen kirjain khii, χ.

Graafin väriluvun selvittämiseksi on monta eri tapaa, mutta ei yhtäkään sellaista, joka ratkaisisi kaikki mahdolliset graafit. Tämä on toistaiseksi ratkaisematon graafiteorian ongelma. Pelkkä kokeileminen ei takaa, että muodostettu k-väritys olisi graafin väriluku.

Seuraavilla lauseilla voidaan arvioida graafin värilukua.

Lause 4.1:

Jos graafi G on yksinkertainen graafi, niin $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$.

Todistus. Valitaan $\Delta(G) + 1$ väriä ja osoitetaan, että graafi G on väritettävissä niillä.

Valitaan mikä tahansa graafin G piste v_0 ja väritetään se millä tahansa valituista väreistä. Valitaan sitten värittämätön piste v_1. Valitaan pisteelle v_1 väri, jota ei ole vielä valittu sen vieruspisteelle. Tämä on mahdollista, sillä pisteen v_1 aste on korkeintaan $\Delta(G)$, joka on korkein määrä mahdollisia värejä pisteillä, jotka ovat pisteen v_1 vieruspisteitä. Toistetaan tämä prosessi kunnes kaikki pisteet on väritetty.

Tästä prosessista seuraa graafille $(\Delta(G)+1)$-väritys, jolloin $\chi(G) \leq \Delta(G)+1$. □

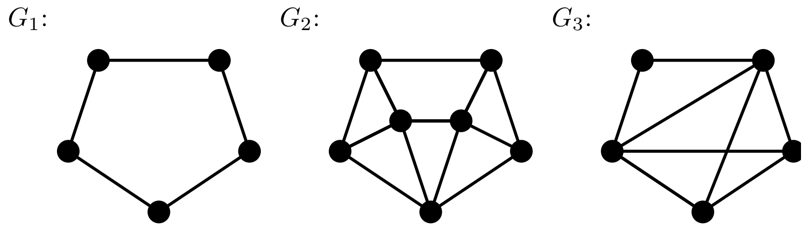
Graafin väriluku on siis korkeintaan yhden korkeampi kuin graafin maksimiaste. Esimerkiksi kuvan 4.3 graafille G_2 tämä yläraja väriluvulle on 5, sillä graafin korkein aste on 4.

Lause 4.2:

Mikäli silmukassa on parillinen määrä pisteitä, sen väriluku on kaksi. Mikäli silmukassa on pariton määrä pisteitä, sen väriluku on kolme.

Esimerkki 4.3:

Päätellään kuvan 4.3 graafien G_1, G_2 ja G_3 väriluku.

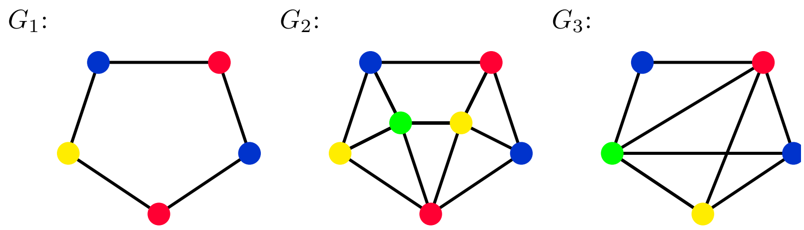


Kuva 4.3: Graafit G_1, G_2 ja G_3.

Graafi G_1 on selvästi silmukka C_5. Tällöin $\chi(G_1) = 3$.

Graafista G_2 on löydettävissä sama silmukka. Tällöin graafin G_2 väriluku on vähintään kolme. Graafin korkein aste on 4, joten väriluvun yläraja on 5. Väritetään aluksi graafia ympyröivä silmukka kolmella tarvittavalla värillä. Toinen keskimmäisistä pisteistä on väistämättä vieruspiste kaikille kolmelle värille, joten tarvitaan neljäs väri. Se riittää graafin värittämiseen (katso kuva 4.4) eli $\chi(G_2) = 4$.

Graafista G_3 on löydettävissä täydellinen graafi K_4. Koska täydellisen graafin jokaisen pisteen aste on $n - 1$, täydellisen graafin väriluvun on oltava sama kuin sen pisteiden määrä, eli $\chi(K_n) = n$. Täten graafin G_3 väriluku on vähintään 4. Viides piste voidaan värittää ilman, että väriluku kasvaa. Siis $\chi(G_3) = 4$.



Kuva 4.4: Graafien G_1, G_2 ja G_3 väritys.

Värilukua voi pyrkiä selvittämään seuraavalla *Welsh-Powell algoritmilla*, jolla systemaattisesti väritetään pisteitä.

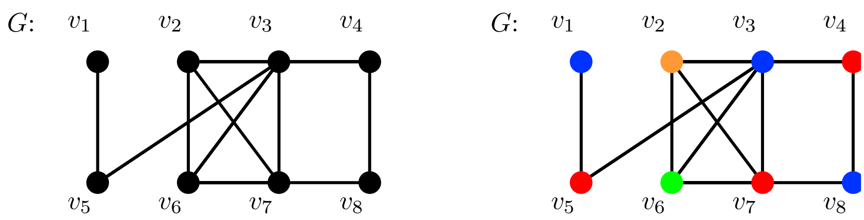
Algoritmi 4.1: Welsh-Powell algoritmi

1. Aloita listaamalla graafn kaikki pisteet aloittamalla korkeimmasta asteesta pienimpään. Samanasteisten pisteiden järjestyksellä ei ole merkitystä.
2. Väritä värittämätön piste, jolla on korkein aste.
3. Väritä samalla värillä listasta järjestyksessä niin monta pistettä kuin mahdollista siten, että vieruspisteille ei tule samaa väriä.
4. Mikäli kaikki pisteet ovat väritetty, olet valmis. Mikäli ei, palaa kohtaan 2.

Kuten aiemmin todettiin, yksikään tapa väriluvun selvittämiseen ei kata varmasti kaikkia graafeja, ei myöskään Welsh-Powell algoritmin antama väritys. Tehtävässä 47 on esimerkki graafista, jolle Welsh-Powell algoritmi ei tuota pienintä k-väritystä. Kannattaa tarkistaa, onko graafi väritettävissä vähemmillä väreillä.

Esimerkki 4.4:

Ratkaistaan kuvan 4.5 graafin G k-väritys käyttämällä Welsh-Powell algoritmia.



Kuva 4.5: Graafi G ja sen väritys.

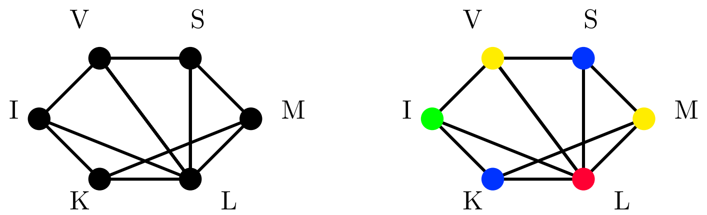
1. Listataan pisteet asteiden mukaan suuruusjärjestykseen: $v_3, v_7, v_2, v_6, v_4, v_5, v_8$ ja v_1.
2. Valitaan väriksi sininen, jolla väritetään listan ensimmäinen piste v_3.
3. Jatketaan pitkin listaa ja väritetään sinisellä v_8 ja v_1.
4. Valitaan uudeksi väriksi punainen, jolla väritetään listan ensimmäinen värittämätön piste v_7.
5. Jatketaan pitkin listaa ja väritetään punaisella v_4 ja v_5.
6. Valitaan uudeksi väriksi oranssi, jolla väritetään listan ensimmäinen värittämätön piste v_2.
7. Valitaan uudeksi väriksi vihreä, jolla väritetään listan viimeinen värittämätön piste v_6.

Esimerkki 4.5:

Koulussa järjestetään seuraavia iltapäiväkerhoja: shakkikerho (S), matematiikkakerho (M), leffakerho (L), kuvataidekerho (K), ilmaisutaitokerho (I) ja videopelikerho (V). Kerhot pidetään kerran viikossa arkipäivisin. Kymmenen oppilasta on kertonut, mihin kerhoihin he aikovat osallistua. Tietojen perusteella tulisi ratkaista, mikä on vähin määrä päiviä, jotka tarvitaan kerhojen järjestämiseen ilman, että oppilailla tulee päällekkäisyyksiä.

Elina: L, M	Riku: V, L, I
Aarni: V, I, L	Hilma: I, L, K
Nikke: K, L, M	Matleena: I, K
Sara: S, V, L	Onni: L, S, M
Lauri: K, M, L	Vilma: S, M

Ratkaisu. Muodostetaan graafi, jossa pisteet merkitsevät kerhoja. Merkitään viiva jokaisen kerhon välille, joilla tiedämme listan perusteella olevan sama oppilas. Esimerkiksi Elinan ilmoittamien kerhojen johdosta yhdistetään leffakerho ja matikkakerho.



Kuva 4.6: Graafi kerhojen osallistumisien päällekkäisyyksistä ja graafin väritys.

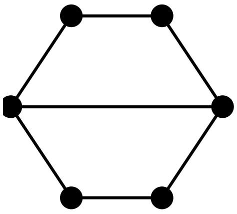
Piste L on vieruspiste kaikkien muiden pisteiden kanssa, joten se tarvitsee oman värinsä. Jäljelle jää viisipisteinen silmukka, joka tarvitsee kolme väriä. Graafin G väriluku on siis 4. Samaan tulokseen päädyttäisiin myös Welsh-Powell algoritmilla.

Graafin perusteella tarvitaan neljä iltapäivää, jotta kaikki kerhot voidaan järjestää ilman päällekkäisyyksiä. Kerhot voidaan jakaa graafin värityksen mukaan eri päiville.

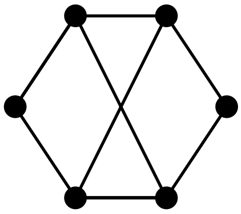
Tehtäviä

41. Selvitä seuraavien graafien väriluku.

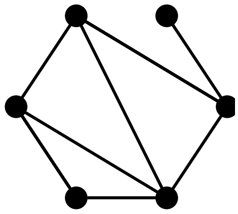
a)



b)



c)



42. Mikä on seuraavien graafien väriluku?

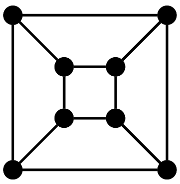
a) C_6 b) C_{45} c) W_9 d) W_{42}

43. Mikä on seuraavien graafien väriluku?

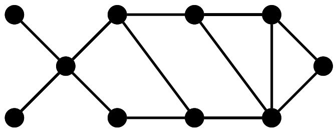
a) K_5 b) K_8 c) $K_{2,3}$ d) $K_{3,3}$

44. Selvitä seuraavien graafien väriluku.

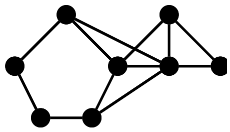
a)



b)



c)



45. Anna jokin esimerkki seuraavista graafeista.

(a) Graafi, jolle $\chi(G) = 1$.

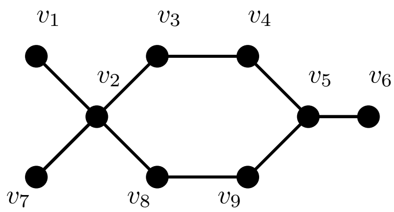
(b) Graafi, jolle $\chi(G) = 3$.

(c) Graafi, jolle $\chi(G) = 5$.

46. Mikä on pienin määrä värejä, mitä tarvitaan kuution kulmien värittämiseen siten, että vierekkäisillä kulmilla ei ole samaa väriä?

47. Sovella Welsh-Powell algoritmia graafiin G. Tuottaako tämä graafin väriluvun?

G :

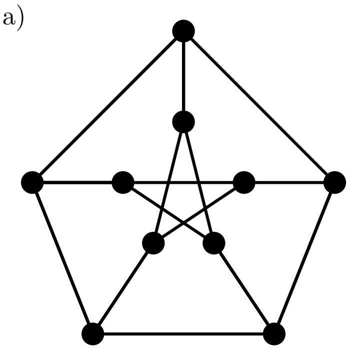


48. Mikä on seuraavien graafien väriluku?

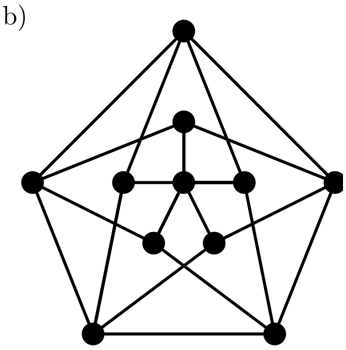
a) C_n b) W_n c) K_n d) $K_{n,m}$

49. Ohessa on Petersenin graafi (a) ja Grötzschin graafi (b). Ratkaise niiden väriluku.

a)



b)



50. Kahdeksan kemikaalia aiotaan lähettää lentokoneella toiseen maahan. Kustannukset riippuvat säiliöiden määrästä. Yhden säiliön hinta on 125 euroa. Jotkut kemikaalit reagoivat toisten kanssa ja olisi riskialtista kuljettaa niitä samassa säiliössä. Kemikaalit on nimetty numeroin 1 - 8 ja ne reagoivat toisiinsa alla olevan listan mukaan.

Kemikaali	Reagoi seuraavien kanssa
1	2, 5, 6
2	1, 3, 5, 7
3	2, 4, 7
4	3, 6, 7, 8
5	1, 2, 6, 7, 8
6	1, 4, 5, 8
7	2, 3, 4, 5, 8
8	4, 5, 6, 7

Mikä on pienin hinta kemikaalien lähettämiseen ja kuinka kemikaalit tulisi pakata turvallisesti?

51. Oheiseen taulukkoon on lueteltu radiomastojen A - G väliset etäisyydet toisistaan kilometreinä. Oletetaan, että jotta radiomastojen lähetettämät radiotaajuudet eivät häiritse toisiaan, tulee alle 500 kilometrin etäisyydellä toisistaan

olevien radiomastojen lähettää eri taajuuksia. Muodostamalla graafi liian lähellä toisiaan olevista mastoista ratkaise, mikä on vähin tarvittava määrä eri taajuuksia, jotta radiotaajuudet eivät häiritse toisiaan.

	A	B	C	D	E	F	G
A	-	450	550	700	600	850	900
B	450	-	500	300	250	600	750
C	550	500	-	100	530	800	900
D	700	300	100	-	470	650	700
E	600	250	530	470	-	350	490
F	850	600	800	650	350	-	530
G	900	750	900	700	490	530	-

52. Kuinka monta väriä tarvitaan Kainuun kuntien värittämiseen?

53. Montako väriä tarvitaan tehtävän 69 Pohjois-Karjalan kartan värittämiseksi?

54. Anna jokin esimerkki seuraavista graafeista.

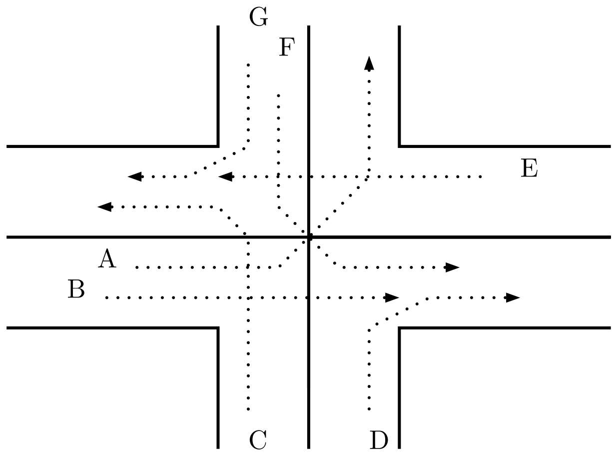
(a) 3-säännöllinen graafi, jonka väriluku on 2.

(b) 4-säännöllinen graafi, jonka väriluku on 3.

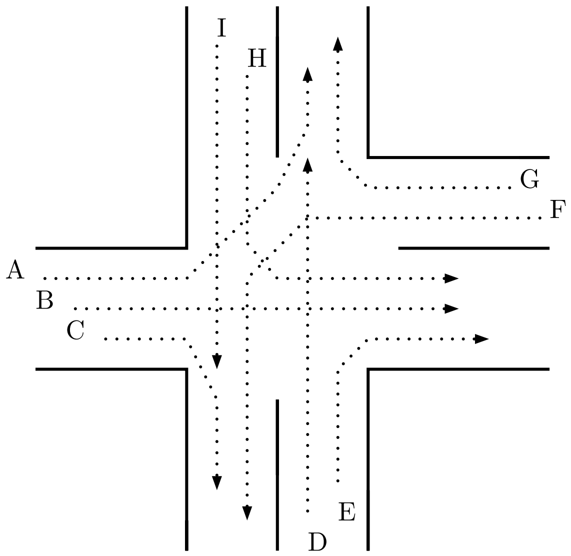
55. Anna esimerkki yhtenäisestä graafista, jolle $2\chi(G) = \Delta(G)$.

56. Ohessa on kuvat risteyksien kuluista. Kaistat on erotettu toisistaan kiinteällä viivalla ja katkoviivalla on merkitty kaikkien kirjaimilla merkittyjen reittien kulut. Risteykseen ollaan asentamassa liikennevaloja. Kolarin riski syntyy, mikäli autot kulkevat ristiin risteyksessä tai saapuvat samalle kaistalle. Muodosta aluksi graafi reittien välisistä mahdollisista kolareista. Värittämällä graafia, voimme havainnollistaa risteyksen valojen vaihtumista. Mikäli reiteillä on graafissa sama väri, niille palaa vihreä valo samaan aikaan. Ratkaise muodostamasi graafin perusteella, mikä on vähin määrä liikennevalojen tilanteita, joilla valot voivat vaihtua kolareitta.

a)



b)



57. Kuinka monta väriä tarvitaan Etelä-Amerikan maiden värittämiseen?

58. 2x2x2-kokoisessa rubikin kuutiossa on kullakin kuudella tahkolla neljä neliötä. Oletetaan, että rubikin kuution kuuden värin sijasta halutaan sellainen kuutio, jossa kuution tahkossa eikä kuution kolme neliötä yhdistävissä kulmissa ole saman värisiä neliöitä. Laadi 2x2x2-kokoisesta kuutiosta graafi ja ratkaise, mikä on vähin määrä tarvittavia värejä, jotta tällainen kuutio toteutuu.

59. Graafin värittämisestä on lukuisia erilaisia sovellutuksia. Yksi niistä on graafin värittäminen viivojen mukaan siten, että kaikilla pisteeseen yhdistyvillä viivoilla on eri väri. Laadi tehtävän 41 graafeille jokin tällainen viivojen väritys. Voit kokeilla tätä myös muiden tehtävien graafeihin.

60. Laadi tehtävän 44 graafeille viivojen väritys edeltävän tehtävän ohjeiden mukaisesti.

5 Dominointi

Vuonna 1862 suomalais-venäläinen shakkiteoreetikko Carl Jasnisch yritti löytää ne tilanteet shakkilaudalla, joissa vähimmällä mahdollisella määrällä kuningattaria kaikki laudan ruudut ovat joko uhattuja tai niissä on kuningatar. Ongelma tunnetaan nykyään viiden kuningattaren ongelmana, sillä vastaus on viisi. Tästä ongelmasta on lähtöisin *dominoinnin* konsepti.

	x		x		x		
		x	x	x			
x	x	x	K	x	x	x	x
		x	x	x			
	x		x		x		
x			x			x	
			x				x
			x				

Kuva 5.1: Kuningatar K shakkilaudalla ja sen uhkaamat ruudut.

Dominoinnilla voidaan ratkaista monia käytännön ongelmia. Määritellään seuraavaksi *dominoiva piste*, *dominoiva joukko*, *minimaalinen dominoiva joukko* sekä *dominaatioluku*.

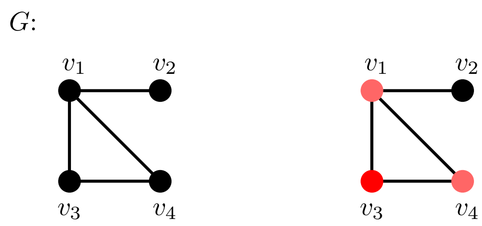
Määritelmä 5.1: Dominoiva piste

Graafin pisteen v sanotaan *dominoivan* itseään sekä kaikkia sen vieruspisteitä.

Graafin piste v dominoi $1 + \deg(v)$ pistettä.

Esimerkki 5.1:

Kuvassa 5.2 on graafi G ja sen dominoiva piste v_3, joka dominoi itsensä lisäksi pisteitä v_1 ja v_4.



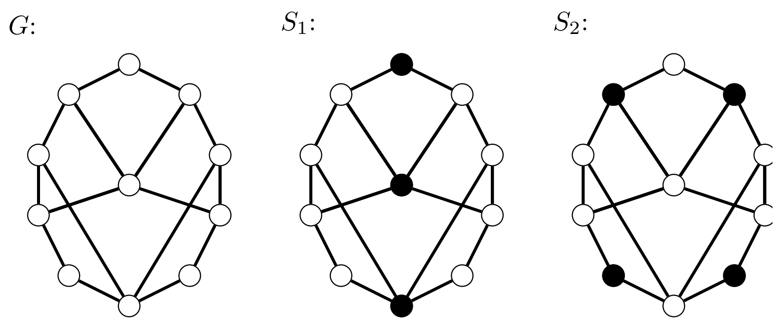
Kuva 5.2: Graafi G ja sen dominoiva piste v_3.

Määritelmä 5.2: Dominoiva joukko

Graafin G pisteiden joukko S on graafin G *dominoiva joukko*, jos sen pisteet dominoivat jokaisen graafin G pisteen.

Esimerkki 5.2:

Kuvassa 5.3 on graafi G ja sen dominoivat joukot S_1 ja S_2. Tässä luvussa graafien dominoivat pisteet on merkitty mustalla.



Kuva 5.3: Graafi G ja sen dominoivat joukot S_1 ja S_2.

Kuten viiden kuningattaren ongelmassa, on usein mielekkäintä etsiä dominoivaa joukkoa, jossa on mahdollisimman vähän pisteitä.

Määritelmä 5.3: Minimaalinen dominoiva joukko ja dominaatioluku

Graafin G pienin mahdollinen dominoiva joukko S on graafin G *minimaalinen dominoiva joukko*. Joukon S pisteiden lukumäärä on graafin G *dominaatioluku* $\gamma(G)$.

Dominaatiolukua ilmaisee kreikan kielen kirjain gamma γ.

Minimaalisen dominoivan joukon löytämiseksi ei ole yksiselitteistä keinoa paitsi kaikkien ratkaisujen läpikäyminen. Pienten graafien osalta kokeileminen on kuitenkin helpompaa kuin esimerkiksi graafien värittämisessä. Ratkaisun hahmotteleminen kannattaa aloittaa korkea-asteisimmista pisteistä, sillä ne dominoivat lähtökohtaisesti useita pisteitä.

Dominaatiolukua voi arvioida myös tarkastelemalla graafin korkeimpia asteita. Esimerkiksi kuvan 5.3 graafissa G on 11 pistettä. Graafin maksimiaste on neljä, joten yksi piste voi dominoida korkeintaan viittä pistettä. Kaksi pistettä ei siis riitä koko graafin dominoimiseen eli kuvan kolmen pisteen joukko S_1 on graafin G

minimaalinen dominoiva joukko.

Seuraavilla lauseilla voi arvioida graafin dominaatiolukua. Lauseessa 5.1 esiintyvä kattofunktio $\lceil\cdot\rceil$ palauttaa pienimmän kokonaisluvun, joka on suurempi tai yhtäsuuri kuin siihen sijoitettu arvo.

Lause 5.1:

Silmukalle C_n pätee $\gamma(C_n) = \lceil n/3 \rceil$, kun $n \geq 3$.

Todistus. Merkitään silmukan pisteiden määrää siten, että $n = 3q+r$, jossa $0 \leq r \leq 2$. Koska C_n on 2-säännöllinen, jokainen silmukan piste dominoi kolmea pistettä. Tällöin silmukan q pistettä dominoi korkeintaan $3q$ pistettä. Jos $r = 0$, niin $\gamma(C_n) \geq q$. Jos $r = 1$ tai $r = 2$, niin $\gamma(C_n) \geq q + 1$. Siis $\gamma(C_n) \geq \lceil n/3 \rceil$.

Osoitetaan seuraavaksi, että kun $r = 0$ niin $\gamma(C_n) \leq q$ ja kun $r = 1$ tai $r = 2$, niin $\gamma(C_n) \leq q + 1$.

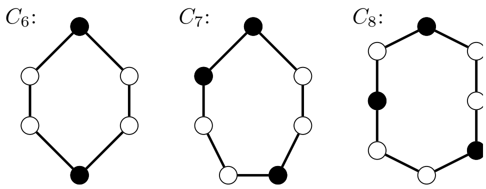
Oletetaan ensin, että $r = 0$. Valitaan silmukan dominoiva joukko S, jossa silmukan C_n joka kolmas piste on dominoiva. Tällöin jokaista silmukan pistettä dominoi täsmälleen yksi piste. Koska dominoivassa joukossa S on q pistettä, $\gamma(C_n) \leq q$. Siis $\gamma(C_n) = q = n/3$.

Oletetaan sitten, että $r = 1$ tai $r = 2$. Muodostetaan dominoiva joukko S valitsemalla aluksi dominoivaksi pisteeksi mikä tahansa silmukan piste v ja sitten valitsemalla joka kolmas piste kumpaan tahansa suuntaan pisteestä v lähtien, kunnes dominoivia pisteitä on $q + 1$ (katso esimerkin 5.3 kuva 5.4). Tällöin silmukan jokaista pistettä dominoi vähintään yksi piste dominoivassa joukossa S, jossa on $q + 1$ pistettä. Täten $\gamma(C_n) \leq q + 1$.

Olemme siis osoittaneet, että kun $r = 0$ niin $\gamma(C_n) = q$ ja kun $r = 1$ tai $r = 2$, niin $\gamma(C_n) = q + 1$. Tapauksissa $r = 1$ ja $r = 2$ lisättävä dominoiva piste saadaan otettua huomioon tapauksen $r = 0$ kanssa kattofunktiolla. Siis kaikissa tapauksissa $\gamma(C_n) = \lceil n/3 \rceil$. □

Esimerkki 5.3:

Kuvassa 5.4 on silmukoiden C_6, C_7 ja C_8 dominoivat joukot.



Kuva 5.4: Silmukoiden C_6, C_7 ja C_8 dominoivat joukot.

Lause 5.2:

Jos graafi G on n-pisteinen, sen dominaatioluvulle pätee

$$\frac{n}{1+\Delta(G)} \leq \gamma(G) \leq n - \Delta(G).$$

Todistus. Kuten aiemmin totesimme, jokainen graafin piste v dominoi $1 + \deg(v)$ pistettä. Jos valitsemme maksimiasteisen pisteen v, se dominoi $1 + \Delta(G)$ pistettä. Tällöin pisteiden määrä, joita v ei dominoi, on $n - (1 + \Delta(G))$, kun n on graafin G pisteiden määrä. Koska jokainen dominoimatta jäävä piste dominoi varmasti itseään, graafille G on olemassa dominoiva joukko, jossa pisteiden lukumäärä on $n - (1 + \Delta(G)) + 1 = n - \Delta(G)$. Siis $\gamma(G) \leq n - \Delta(G)$.

Seuraavaksi oletetaan, että dominaatioluku $\gamma(G) = k$. Olkoon $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ graafin G minimaalinen dominoiva joukko. Koska piste v_i dominoi $1+\deg(v_i)$ pistettä graafista G kaikilla arvoilla $1 \leq i \leq k$ ja joukon S pisteet dominoivat kaikki graafin G pisteet, niin

$$\sum_{i=1}^{k}(1 + \deg(v_i)) \geq n.$$

Nyt kuitenkin $1 + \deg(v_i) \leq 1 + \Delta(G)$, kun $1 \leq i \leq k$. Siis

$$n \leq \sum_{i=1}^{k}(1 + \deg(v_i)) \leq k(1 + \Delta(G)).$$

Siis $k(1 + \Delta(G)) \geq n$ ja koska $k = \gamma(G)$, niin seuraa, että

$$\gamma(G) \geq \frac{n}{1+\Delta(G)}.$$

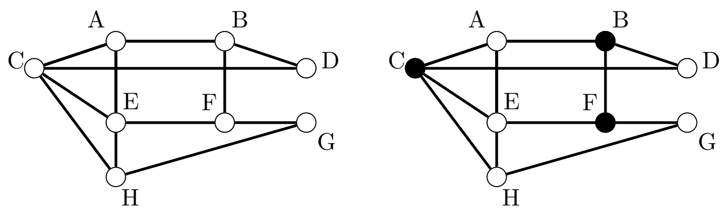
□

Esimerkki 5.4:

Oheisessa taulukossa on lueteltuna kylät A-H. Kirjaimella T on merkitty niiden kylien väliä, joiden välimatka on vähemmän kuin 20 kilometriä. Vapaapalokunnan toimipisteet halutaan sijoittaa siten, että ne ovat korkeintaan 20 kilometrin päässä kylistä. Mikä on pienin mahdollinen määrä toimipisteitä, jotta tavoite toteutuu?

	A	B	C	D	E	F	G	H
A	-	T	T	-	T	-	-	-
B	T	-	-	T	-	-	-	-
C	T	-	-	T	T	-	-	T
D	-	T	T	-	-	-	-	-
E	T	-	T	-	-	T	-	T
F	-	-	-	-	T	-	T	-
G	-	-	-	-	-	T	-	T
H	-	-	T	-	T	-	T	-

Ratkaisu. Muodostetaan aluksi graafi, jossa merkitsemme kyliä pisteillä ja sitten yhdistämme ne viivoilla, mikäli niiden välimatka on alle 20 kilometriä.



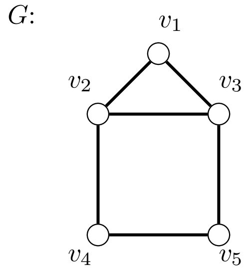
Kuva 5.5: Kylien mukaan piirretty graafi ja sen dominoiva joukko.

Minimaalista dominoivaa joukkoa voi lähteä hahmottelemaan esimerkiksi korkeimman asteen omaavista pisteistä. Esimerkiksi piste C dominoi itsensä lisäksi pisteitä A, D, E ja H. Jäljelle jäävät pisteet B, F ja G saadaan dominoitua, mikäli valitaan pisteet B ja F. Siis yksi graafin dominoiva joukko on {C,F,B}, jolloin dominaatiotiluku on korkeintaan kolme.

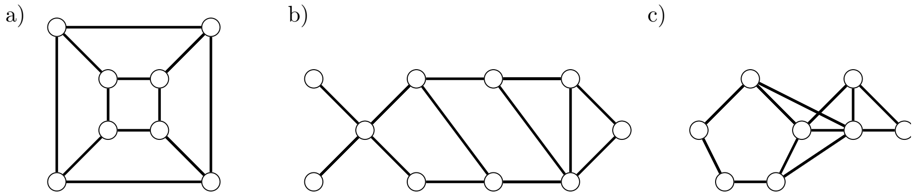
Vielä tulee osoittaa, että dominaatioluku ei voi olla pienempi kuin kolme. Graafissa on kaksi neljän pisteen silmukkaa, jotka muodostuvat pisteistä {A, B, C, D} sekä {E, F, G, H}. Kummankin silmukan dominointiin tarvitaan kaksi pistettä. Kuitenkaan mikään toisesta silmukasta valittu kahden pisteen joukko ei riitä dominoimaan myös toisen silmukan kaikkia pisteitä. Dominointiluku ei siis voi olla kaksi, joten se on kolme.

Tehtäviä

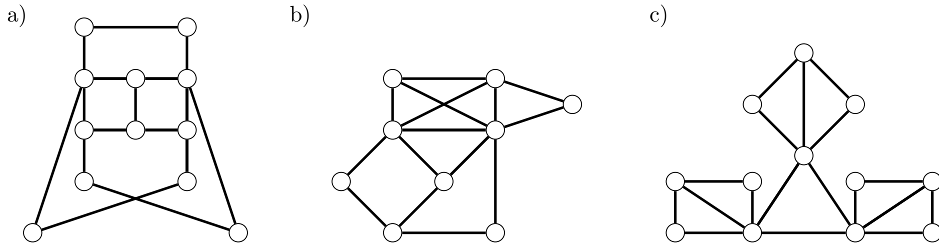
61. Selvitä graafin G kaikki mahdolliset kahden pisteen dominoivat joukot.



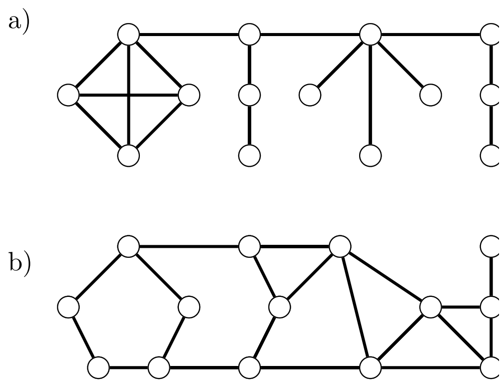
62. Selvitä seuraavien graafien dominaatioluku.



63. Selvitä seuraavien graafien dominaatioluku.



64. Selvitä seuraavien graafien dominaatioluku.



65. Arvioi tehtävän 62 graafien dominaatioluvun ylä- ja alaraja lauseen 5.2 avulla.

66. Arvioi tehtävän 63 graafien dominaatioluvun ylä- ja alaraja lauseen 5.2 avulla.

67. Mikä on seuraavien graafien dominaatioluku, kun $n, m \geq 3$?

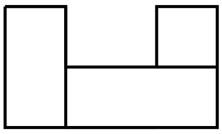
a) W_n b) K_n d) $K_{n,m}$

68. Tehtävässä 52 on kartta Kainuun maakunnasta. Kuinka monta liikettä kauppaketju tarvitsee, jotta jokaisessa kunnassa tai sen viereisessä kunnassa on kauppaketjun liike?

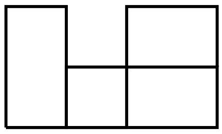
69. Pohjois-Karjalassa toimiva tavarantoimittaja haluaa asettaa mahdollisimman vähän toimipisteitä siten, että joko jokaisessa kunnassa tai sen viereissä kunnassa olisi toimipiste. Kuinka monta toimipistettä tarvitaan?

70. Ohessa on kuvat risteyksien pohjapiirrustuksista, joissa viiva ilmaisee tietä. Vartiointipalvelu haluaa kattaa vartijoillaan kaikki alueen risteyskohdat. Yksi vartija voi valvoa oman risteyksensä lisäksi yhden kadunpätkän päässä olevia risteyksiä. Mikä on vähin tarvittava määrä vartijoita kattamaan koko alue?

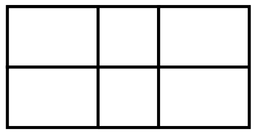
a)



c)

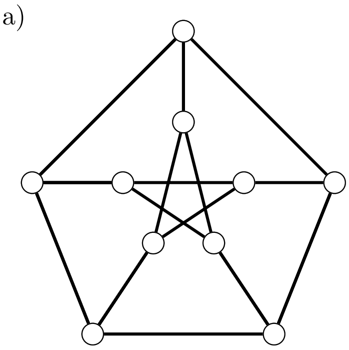


b)

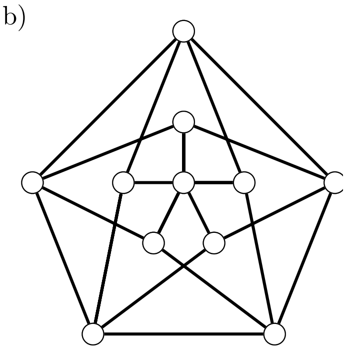


71. Ohessa on Petersenin graafi (a) ja Grötzschin graafi (b). Ratkaise niiden dominaatioluku.

a)



b)



72. Oheiseen taulukkoon on lueteltu kaupunkien A - G väliset etäisyydet toisistaan kilometreinä. Radioharrastajien kerhon lähettimien kantama on 45 kilometriä. Kuinka moneen kaupunkiin lähetin tulisi vähintään asentaa, jotta lähetykset kuuluisivat jokaisessa kaupungissa?

	A	B	C	D	E	F	G
A	-	25	55	76	60	35	80
B	25	-	30	30	55	60	75
C	55	30	-	62	53	40	20
D	76	30	62	-	44	65	70
E	60	55	53	44	-	35	59
F	35	60	40	65	35	-	53
G	80	75	20	70	59	53	-

73. Oheisessa taulukossa on lueteltuna asuinalueet A-H. Kirjaimella T on merkitty niiden kylien väliä, joiden välimatka on vähemmän kuin 25 kilometriä. Partiolaisten kerhotoiminnan pisteet halutaan sijoittaa siten, että ne ovat korkeintaan 25 kilometrin päässä kylistä. Mikä on pienin mahdollinen määrä toimipisteitä, jotta tavoite toteutuu?

	A	B	C	D	E	F	G	H
A	-	T	-	-	T	-	-	T
B	T	-	-	T	-	T	-	-
C	-	-	-	T	T	-	-	T
D	-	T	T	-	T	-	-	-
E	T	-	T	T	-	T	-	T
F	-	T	-	-	T	-	-	-
G	-	-	-	-	-	-	-	T
H	T	-	T	-	T	-	T	-

74. Anna esimerkki 3-säännöllisestä graafista, jonka dominaatioluku on 2.

75. Anna esimerkki 3-säännöllisestä graafista, jonka dominaatioluku on 3.

76. Etsi shakkilaudalta viiden kuningattaren dominoiva joukko, jossa

    (a) kaikki kuningattaret ovat samalla vaakarivillä,

    (b) yksikään kuningattarista ei uhkaa toista,

    (c) kaikki kuningattaret ovat viistosti samalla rivillä.

77. Etsi nxn-kokoiselta shakkilaudalta tilanne, jossa on n kuningatarta siten, ettei yksikään uhkaa toista, kun

    a) $n = 4$, b) $n = 5$, c) $n = 6$, d) $n = 7$, d) $n = 8$.

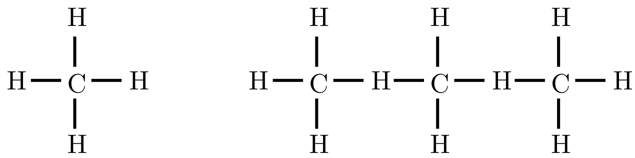
78. Osoita, että 11x11-kokoiselle shakkilaudalle voidaan asettaa viisi kuningatarta siten, että kaikki ruudut ovat uhattuina.

79. Dominoinnista on lukuisia erilaisia versioita. Yksi niistä on *avoin dominaatio*, jossa dominoiva piste ei dominoi itseään. Dominoiva piste tarvitsee siis vieruspisteeksi toisen dominoivan pisteen. Etsi tehtävän 63 graafeille jokin avoin dominoiva joukko.

80. Dominoinnista on lukuisia erilaisia versioita. Yksi niistä on *dominoiva polku*, jossa graafin dominoivan joukon pisteiden tulee muodostaa polku (määritelmä 2.6). Etsi tehtävän 63 graafeille jokin dominoiva polku.

6 Minimaalinen virittävä puu

Englantilainen matematiikko Arthur Cayley (1821 - 1885) kehitti *puiden* konseptia tutkiessaan molekyylirakenteita 1870-luvulla. Esimerkiksi hiilin ja vedyn yhdisteitä pystytään havainnollistamaan puiden avulla kuten kuvassa 6.1. Nämä molekyylirakenteita kuvaavat graafit ovat puita. Puilla voidaan havainnollistaa lukuisia luonnollisia ilmiöitä kuten molekyylien rakenteita, lajien sukulaisuutta tai ihmisten sukupuuta.



metaani propaani

Kuva 6.1: Metaanin ja propaanin kemiallinen kaava.

Tässä luvussa keskitymme *minimaaliseen virittävään puuhun*. Kuitenkin ennen kuin voimme tarkastella sen määritelmää ja tehtäviä, tulee ensin esittää useampi erillinen määritelmä, joista minimaalinen virittävä puu rakentuu. Aluksi määrittelemme *aligraafin* ja *virittävän aligraafin*, sitten *puun* ja *virittävän puun* ja lopuksi *painotetun graafin*.

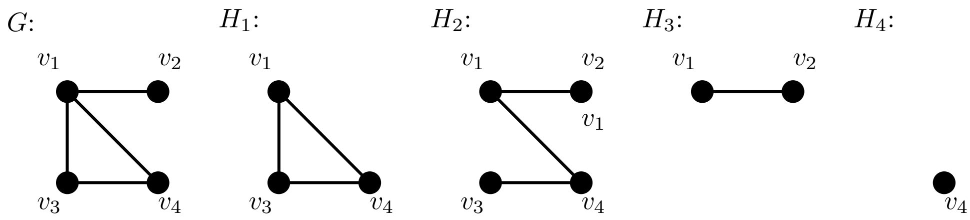
Määritelmä 6.1: Aligraafi

Olkoot $G = (V, E)$ ja $H = (W, F)$ sellaisia graafeja, että W on V:n epätyhjä osajoukko ($W \subseteq V$) ja F on E:n osajoukko ($F \subseteq E$). Tällöin graafi H on graafin G *aligraafi*.

Aligraafi on siis jokin osa alkuperäisestä graafista. Aligraafin pisteiden joukko ei voi olla tyhjä, mutta viivojen joukko voi olla tyhjä kuten kuvan 6.2 graafin G aligraafissa H_4.

Esimerkki 6.1:

Kuvassa 6.2 on graafi G ja sen neljä aligraafia H_1, H_2, H_3 ja H_4.



Kuva 6.2: Graafi G ja sen aligraafit H_1, H_2, H_3 ja H_4.

Aligraafeista on määritelty erityistapaus, jossa aligraafissa on kaikki alkuperäisen graafin pisteet.

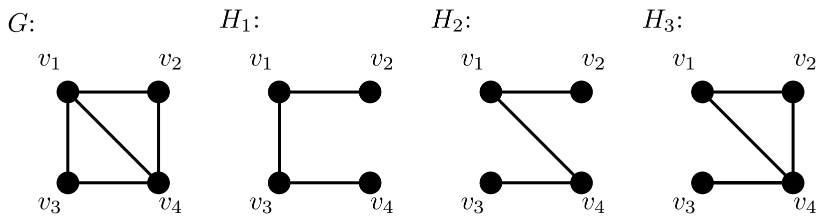
Määritelmä 6.2: Virittävä aligraafi

Olkoot $G = (V, E)$ ja $H = (V, F)$ sellaisia graafeja, että F on E:n osajoukko. Tällöin graafi H on graafin G *virittävä aligraafi*.

Virittävässä aligraafissa H on siis kaikki graafin G pisteet.

Esimerkki 6.2:

Kuvassa 6.3 on graafi G ja sen kolme virittävää aligraafia H_1, H_2 ja H_3.



Kuva 6.3: Graafi G ja sen virittävät aligraafit H_1, H_2 ja H_3.

Seuraavaksi määritellään *puu* ja *alipuu*.

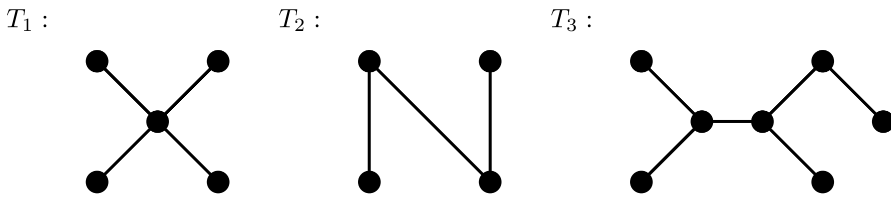
Määritelmä 6.3: Puu ja alipuu

Puu on yhtenäinen silmukaton graafi. Jos puu on graafin G aligraafi, kyseessä on graafin G *alipuu*.

Puut nimetään yleensä muuttujalla T, joka tulee englannin kielen sanasta tree.

Esimerkki 6.3:

Kuvassa 6.4 on puut T_1, T_2 ja T_3.



Kuva 6.4: Puut T_1, T_2 ja T_3.

Esimerkin 6.2 kuvan 6.3 aligraafit H_1 ja H_2 ovat graafin G alipuita, mutta aligraafissa H_3 on silmukka.

Esitetään seuraavaksi kaksi puihin liittyvää lausetta, joiden todistukset ovat hyvin ilmeisiä.

Lause 6.1:

Jokaisessa vähintään 2-pisteisessä puussa on ainakin kaksi 1-asteista pistettä.

Todistus. Olkoon T puu, jossa on vähintään kaksi pistettä. Olkoon p puun T pisin polku, jossa yksikään viiva ei toistu. Oletetaan, että $p \colon u \to v$ on polku $p \colon u = v_0, v_1, \ldots, v_k = v$, jossa $k \geq 1$. Osoitetaan, että v ja u ovat 1-asteisia pisteitä. Välttämättömästi u tai v eivät ole vieruspisteitä muille kuin polun p pisteille, muuten graafiin G muodostuisi pidempi polku. Selvästi u on vieruspiste pisteelle v_1 ja piste v pisteelle v_{k-1} polussa p. Lisäksi koska T ei sisällä silmukoita, u tai v eivät ole vieruspisteitä muille polun p pisteille. Täten $\deg(u) = \deg(v) = 1$. □

Lause 6.2:

Jokaisessa n-pisteisessä puussa on n - 1 viivaa.

Todistus. Todistetaan lause induktiolla eli osoittamalla ensin, että lause pätee tapauksessa $n = 1$, sitten todistamme tapauksen $n + 1$.

On vain yksi puu, jolle $n = 1$, nimittäin yhden pisteen täydellinen graafi K_1. Graafilla on 0 viivaa, joten lauseen tulos pätee, kun $n = 1$.

Oletetaan, että k-pisteisen puun viivojen lukumäärä on $k - 1$. Olkoon T puu, jolla on k + 1 pistettä. Lauseen 6.1 nojalla puulla T on ainakin kaksi 1-asteista pistettä.

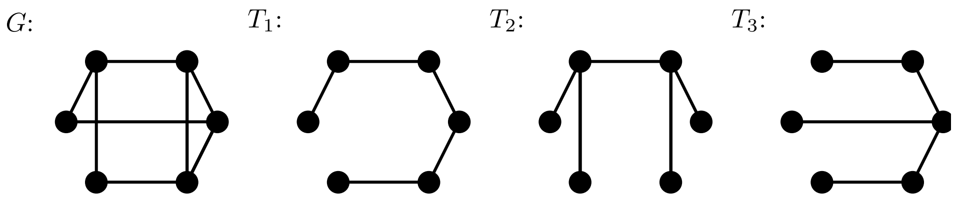
Olkoon v toinen näistä pisteistä. Nyt valitaan sellainen puu $T' = T - v$, jossa ei siis ole pistettä v. Nyt puussa T' on k pistettä. Induktio-oletuksen nojalla puussa T' on $m = k - 1$ viivaa. Koska puulla T on täsmälleen yksi viiva enemmän kuin puulla T', puun T viivojen määrä on $m + 1 = (k - 1) + 1 = (k + 1) - 1$. Siis $(k + 1)$-pisteisessä puussa T on k viivaa. Siis on todistettu, että n-pisteisessä puussa on $n - 1$ viivaa. □

Määritelmä 6.4: Virittävä puu

Graafin G *virittävä puu* on graafin G alipuu, joka sisältää kaikki graafin G pisteet.

Esimerkki 6.4:

Kuvassa 6.5 on graafi G ja sen virittävät puut T_1, T_2 ja T_3.



Kuva 6.5: Graafi G ja sen virittävät puut T_1, T_2 ja T_3.

Jo aiemmin mainitut kuvan 6.3 aligraafit H_1 ja H_2 ovat myös graafin G virittäviä puita.

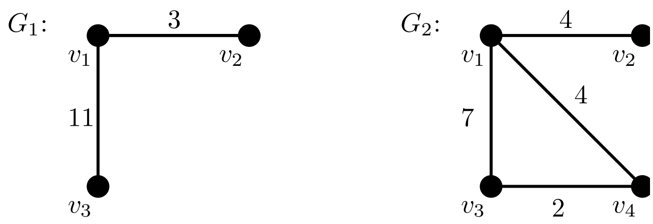
Määritelmä 6.5: Painotettu graafi

Painotettu graafi on graafi, jossa jokaiseen viivaan on liitetty jokin luku. Tätä lukua kutsutaan viivan *painoksi*.

Painotetut graafit antavat mahdollisuuden havainnollistaa monia tilanteita esimerkiksi ilmaisemalla painolla välimatkaa. Painotetun graafin viivan painon voi merkitä yksinkertaisesti viivan viereen kuten kuvassa 6.6.

Esimerkki 6.5:

Kuvassa 6.6 on painotetut graafit G_1 ja G_2. Esimerkiksi graafin G_2 viivan $\{v_1, v_4\}$ paino on 4.



Kuva 6.6: Painotetut graafit G_1 ja G_2.

Nyt kun olemme määritelleet virittävän puun ja painotetun graafin, voimme määritellä painotetulle graafille *minimaalisen virittävän puun*.

Määritelmä 6.6: Minimaalinen virittävä puu

Yhtenäisen painotetun graafin *minimaalinen virittävä puu* on graafin virittävä puu, jonka viivojen painojen summa on pienin.

Minimaalisen virittävän puun selvittämiseksi on laadittu useita varmoja algoritmeja. Seuraavaksi esitellään kaksi yksinkertaista algoritmia minimaalisen virittävän puun selvittämiseksi.

Algoritmi 6.1: Primin algoritmi

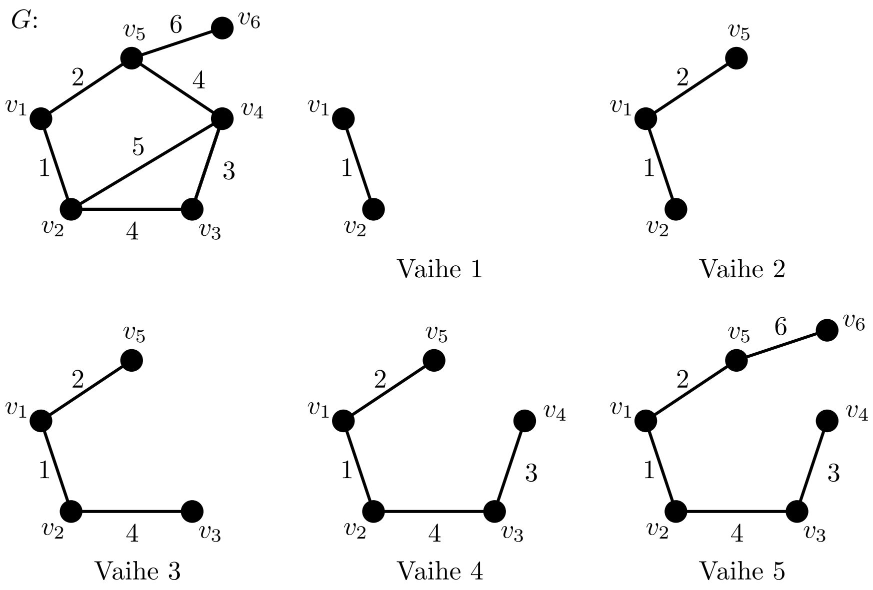
Primin algoritmilla voidaan muodostaa minimaalinen virittävä puu seuraavasti.

1. Valitaan viiva, jonka paino on pienin.
2. Lisätään pienipainoisin viiva, joka on yhteydessä jo muodostettuun virittävän puun osaan ja joka ei synnytä silmukkaa.
3. Jatketaan kohtaa 2 kunnes viivoja on yksi vähemmän kuin alkuperäisen graafin pisteitä.

Mikäli jossain algoritmin vaiheessa tulee vastaan useampi samanpainoinen viiva, ei algoritmin toimivuuden kannalta ole väliä minkä viivoista valitsee.

Esimerkki 6.6:

Sovelletaan Primin algoritmia kuvan 6.7 graafiin G. Tehtäviä tehdessä vaiheita ei tarvitse sanallisesti eritellä.



Kuva 6.7: Graafi G ja sille vaiheittainen toteutus Primin algoritmista.

1. Ensimmäisessä vaiheessa valitsemme viivan $\{v_1, v_2\}$, jolla on pienin paino.
2. Toisessa vaiheessa valittavissa on viivat $\{v_1, v_5\}$, $\{v_2, v_4\}$ ja $\{v_2, v_3\}$. Pienin paino 2 on näistä ensimmäisellä, joten valitsemme sen.
3. Sekä viivalla $\{v_2, v_3\}$ että $\{v_5, v_4\}$ on painonaan 4, joista valitaan ensimmäinen. Algoritmin kannalta ei ole väliä, kumman valitsemme.
4. Nyt on valittavissa viivat, joiden painot ovat 6, 4, 5 ja 3. Valitaan näistä pienin eli viiva $\{v_1, v_5\}$.
5. Jäljelle jäävät enää viivat, joiden painot ovat 6, 4 ja 5. Näistä kaksi jälkimmäistä aiheuttaisivat silmukat, joten on valittava $\{v_5, v_6\}$. Graafissa on kuusi pistettä, joten tämä viides viiva päättää algoritmin.

Seuraavaksi esittelemme vielä Kruskalin algoritmin, joka on hyvin samankaltainen kuin Primin algoritmi.

Algoritmi 6.2: Kruskalin algoritmi

Kruskalin algoritmilla voidaan muodostaa minimaalinen virittävä puu seuraavasti.

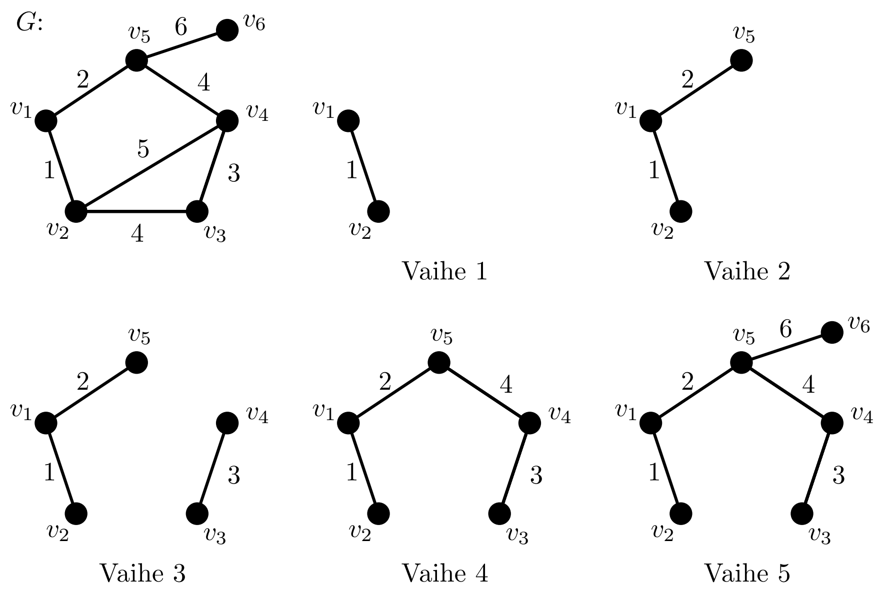
1. Valitaan viiva, jonka paino on pienin.

2. Lisätään pienipainoisin viiva, joka ei synnytä silmukkaa.

3. Jatketaan kohtaa 2 kunnes viivoja on yksi vähemmän kuin alkuperäisen graafin pisteitä.

Esimerkki 6.7:

Sovelletaan Kruskalin algoritmia kuvan 6.8 graafiin G.



Kuva 6.8: Graafi G ja sille vaiheittainen toteutus Primin algoritmista.

1. Ensimmäisessä vaiheessa valitsemme viivan $\{v_1, v_2\}$, jolla on pienin paino.

2. Jäljellä olevista viivoista pienin paino on 2 viivalla $\{v_1, v_5\}$.

3. Jäljelle olevista viivoista pienin paino on 3 viivalla $\{v_3, v_4\}$.

4. Viivoilla $\{v_2, v_3\}$ ja $\{v_5, v_4\}$ on molemmilla painonaan 4, joista valitsemme jälkimmäisen. Algoritmin kannalta ei ole merkitystä kumman valitsemme.

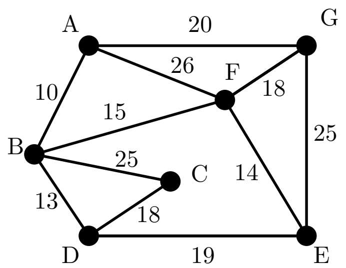
5. Jäljelle jäävät enää viivat, joiden painot ovat 6, 4 ja 5. Näistä kaksi jälkimmäistä aiheuttaisivat silmukat, joten on valittava $\{v_5, v_6\}$. Graafissa on kuusi pistettä, joten tämä viides viiva päättää algoritmin.

Esimerkki 6.8:

Kylien A-G välillä kulkee hiekkatie oheisen taulukon mukaan. Välimatka on merkitty kilometreinä. Tiet halutaan asfaltoida siten, että jokaisesta kylästä pääsee toiseen asfaltoitua tietä pitkin joko suoraan tai muiden kylien kautta. Mikä on vähin kilometrimäärä, jolla tiet saadaan asfaltoitua?

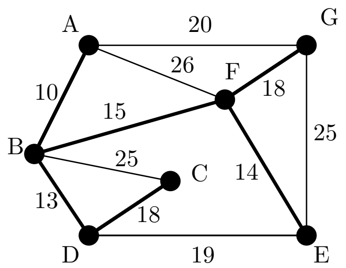
	A	B	C	D	E	F	G
A	-	10	-	-	-	26	20
B	10	-	25	13	-	15	-
C	-	25	-	18	-	-	-
D	-	13	18	-	19	-	-
E	-	-	-	19	-	14	25
F	26	15	-	-	14	-	18
G	20	-	-	-	25	18	-

Muodostetaan taulukon perusteella painotettu graafi.



Kuva 6.9: Kylien hiekkateitä kuvaava painotettu graafi.

Kruskalin algoritmilla saamme minimaalisen virittävän puun, joka koostuu viivoista {A,B}, {B,D}, {B,F}, {F,E}, {D,C} ja {F,G}.



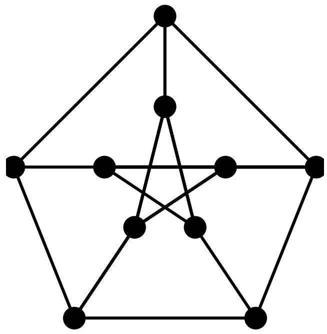
Kuva 6.10: Kylien välisten teiden minimaalinen virittävä puu.

Tämän virittävän puun viivojen yhteen laskettu kilometrimäärä on 88 kilometriä.

Tehtäviä

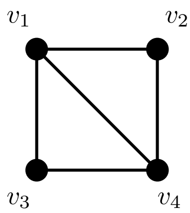
81. Etsi kaikki graafin C_3 yhtenäiset aligraafit.

82. Alla olevalla Petersenin graafilla on 2000 virittävää puuta. Piirrä niistä kolme.

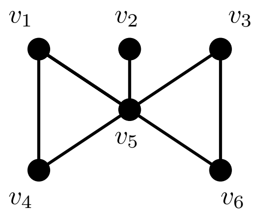


83. Etsi seuraavien graafien kaikki virittävät puut.

a)



b)



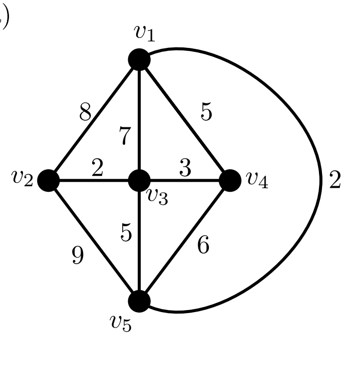
84. Etsi kaikki tehtävän 83 a-kohdan graafin yhtenäiset kolmipisteiset aligraafit.

85. Piirrä kaikki 5-pisteiset puut.

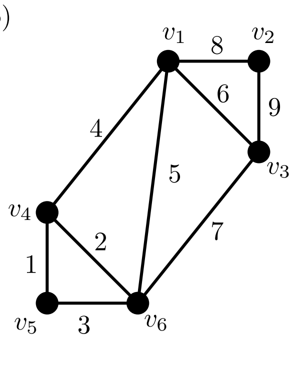
86. Piirrä kaikki 6-pisteiset puut.

87. Ratkaise Primin ja Kruskalin algoritmeilla seuraavien graafien minimaalinen virittävä puu vaiheet esittämällä.

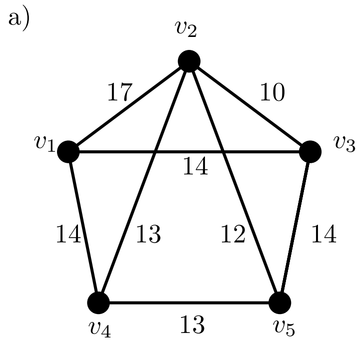
a)

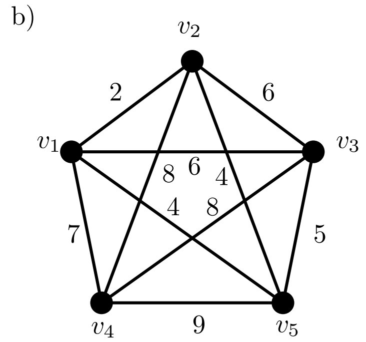


b)



88. Ratkaise haluamallasi algoritmilla seuraavien graafien minimaalinen virittävä puu vaiheet esittämällä.





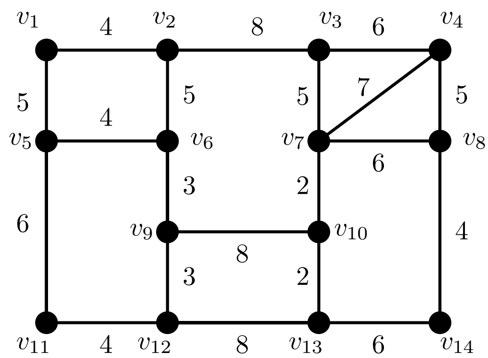
89. Piirrä viisipisteinen graafi, joka on jaettavissa täsmälleen kahteen alipuuhun, joilla ei ole yhteisiä viivoja.

90. Kuinka monta virittävää puuta silmukalla C_n on?

91. (a) Anna esimerkki 6-pisteisestä puusta, jossa on neljä 1-asteista ja kaksi 3-asteista pistettä.

    (b) Anna esimerkki 8-pisteisestä puusta, jossa on kuusi 1-asteista ja kaksi 4-asteista pistettä.

92. Yrityksen huoneiden tietokoneet tulee yhdistää kaapelilla. Ohessa on kartta huoneista, johon on merkitty huoneiden välisen kaapeloinnin hinta sadoissa euroissa. Mikä on minimihinta kaikkien 14 huoneen yhdistämiseen?



93. Koulun henkilökunnalla on kuudessa toimistossa tietokone. Ohessa on taulukko koulun tietokoneista A-F, jossa tietokoneiden välinen luku ilmaisee metreinä koneiden yhdistämiseen tarvittavan kaapelin pituutta. Mikäli lukua ei ole

ilmoitettu, tietokoneita ei voi suoraan yhdistää toisiinsa. Mikä on vähin määrä kaapelia, jolla kaikki tietokoneet ovat kaapeleilla yhdistettynä yhteisessä verkossa?

	A	B	C	D	E	F
A	-	9	-	-	-	3
B	9	-	8	-	8	11
C	-	8	-	3	5	-
D	-	-	3	-	6	11
E	-	8	5	6	-	9
F	3	11	-	11	9	-

94. Ohessa on taulukko kuuden Skotlantilaisen kaupungin välisistä etäisyyksistä kilometreinä. Löydä näitä kaupunkeja yhdistävä minimaalinen virittävä puu.

	Aberdeen	Edinburgh	Fort William	Glasgow	Inverness	Perth
Aberdeen	-	193	237	228	167	130
Edinburgh	193	-	212	68	253	72
Fort William	237	212	-	164	106	169
Glasgow	228	68	164	-	270	98
Inverness	167	253	106	270	-	180
Perth	130	72	169	98	180	-

95. Ohessa on taulukko pääkaupunkien välisistä etäisyyksistä kilometreissä. Löydä näitä kaupunkeja yhdistävä minimaalinen virittävä puu.

	Berliini	Lontoo	Madrid	Moskova	Pariisi	Rooma
Berliini	-	933	1872	1611	879	1184
Lontoo	933	-	1265	2504	344	1434
Madrid	1872	1265	-	3445	1054	1363
Moskova	1611	2504	3445	-	2490	2381
Pariisi	879	344	1054	2490	-	1105
Rooma	1184	1434	1363	2381	1105	-

96. Anna arvoille $k = 2, 3, 4$ esimerkki puusta T_k, jolle $\Delta(T_k) = k$ siten, että kaksi samanasteista pistettä eivät ole vieruspisteitä.

97. Piirrä kaikki 7-pisteiset puut.

98. Täydellisellä graafilla K_n on

$$\sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} 2^{\frac{i(i-1)}{2}}$$

aligraafia. Ratkaise, montako aligraafia graafilla K_4 on.

99. Kuinka monta erilaista neljän pisteen puuta voidaan muodostaa, kun kaikki pisteet nimetään?

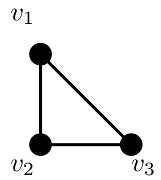
100. Kauppamatkustajan ongelmana tunnetaan pulma, jossa kauppamatkustaja tietää kaikkien kaupunkien väliset etäisyydet ja hänen on löydettävä kaikkien kaupunkien kautta takaisin lähtökaupunkiin kulkeva minimaalinen reitti. Oletetaan, että tehtävän 88 b-kohdan graafin pisteet ovat kaupunkeja ja niiden välisten viivojen painot näiden kaupunkien välisten kauppareittien pituuksia. Kokeilemalla tai päättelemällä koita löytää lyhin reitti, joka kulkee kaikkien kaupunkien kautta takaisin lähtöpisteeseen.

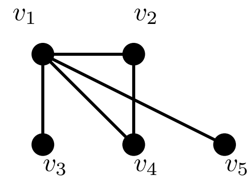
7 Ratkaisut

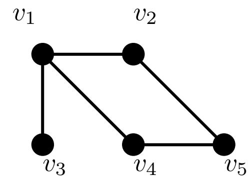
1. Esimerkiksi seuraavasti: $G_1 = (\{v_1, v_2, v_3, v_4\}, \{\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \{v_3, v_4\}\})$ ja $G_2 = (\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}, \{\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \{v_2, v_4\}, \{v_3, v_4\}, \{v_4, v_5\}\})$.

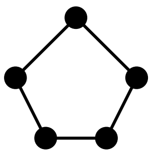
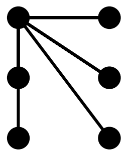
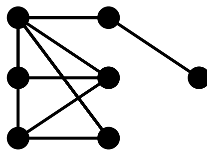
2. a) $\delta(G) = 2$ ja $\Delta(G) = 4$ b) $\delta(G) = 2$ ja $\Delta(G) = 4$ c) $\delta(G) = \Delta(G) = 4$

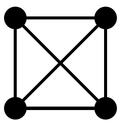
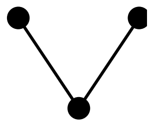
3. a) $\delta(G) = \Delta(G) = 3$ b) $\delta(G) = 1$ ja $\Delta(G) = 4$ c) $\delta(G) = 2$ ja $\Delta(G) = 5$

4.
a)


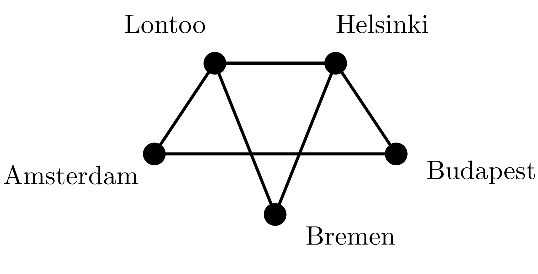
b)


c)


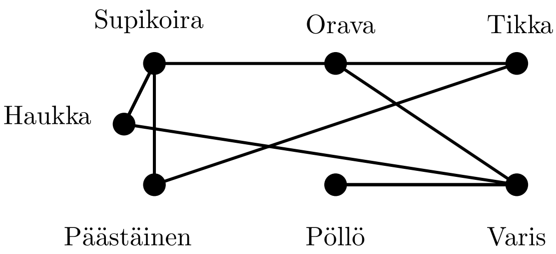
5.
a)

b)

c)


6.
a)

b)


7. 8 viivaa.

8.


9.



10. a) Kyllä b) Kyllä c) Ei d) Kyllä

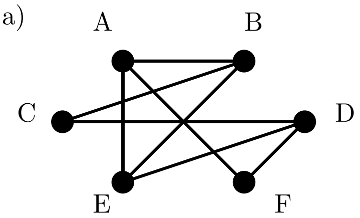
11. a) 15 paria b) 28 paria

12. a) $\delta(K_2) = \Delta(K_2) = 2$ b) $\delta(C_{45}) = \Delta(C_{45}) = 2$ c) $\delta(W_7) = 3$ ja $\Delta(W_7) = 6$
d) $\delta(W_{50}) = 3$ ja $\Delta(W_{50}) = 49$

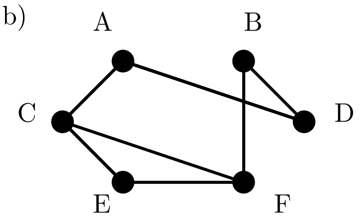
13. a) $\delta(K_6) = \Delta(K_6) = 5$ b) $\delta(K_{10}) = \Delta(K_{10}) = 9$ c) $\delta(K_{2,2}) = \Delta(K_{2,2}) = 2$
d) $\delta(K_{4,3}) = 3$ ja $\Delta(K_{4,3}) = 4$

14.

a)



b)



15. K_3

16. W_5

17. a) 6 b) 45 c) 12 d) 98 e) 15 f) 45 g) 12 h) 153

18. Kun $n = m$.

19. a) Ei ole, sillä asteiden summa olisi pariton.
b) Ei ole, sillä asteiden summa olisi pariton.

20. a) $\delta(C_n) = \Delta(C_n) = 2$ b) $\delta(W_n) = 3$ ja $\Delta(W_n) = n - 1$
c) $\delta(K_n) = \Delta(K_n) = \sum_{i=1}^{n} i$

21. a) $p\colon\ v_1, v_5, v_6$ b) $p\colon\ v_7, v_4, v_1, v_5, v_6, v_9, v_8$ c) $p\colon\ v_2, v_5, v_1, v_4, v_7, v_8, v_9, v_6, v_3$
d) $p\colon\ v_3, v_6, v_9, v_8, v_5, v_3$ e) $p\colon\ v_1, v_5, v_3, v_6, v_9, v_8, v_7, v_4, v_1$
f) $p\colon\ v_1, v_4, v_7, v_8, v_9, v_6, v_3, v_2, v_5, v_1$

22. a) On Hamiltonin graafi, muttei Eulerin graafi. b) On Hamiltonin graafi, muttei Eulerin graafi. c) Graafi ei ole kumpikaan.

23. a) Ei ole Eulerin graafi, mutta löytyy Eulerin polku. b) Ei ole Eulerin graafi, eikä graafissa ole Eulerin polkua. c) On Eulerin graafi ja siten siinä on myös Eulerin polku.

24. A-kohdassa on Eulerin polku.

25. Eiköhän se ihan hyvin mennyt.

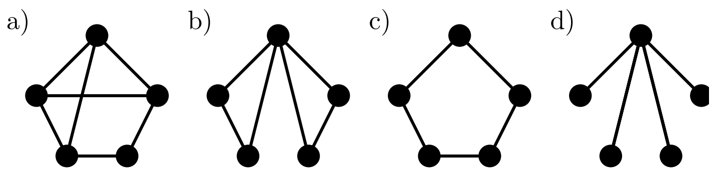
26. Piirrä paperille 15 pistettä ja muodosta kaikkien niiden läpi kulkeva piiri kynällä, käyden vähintään yhdessä pisteessä kahdesti.

27. Piirejä on kuusi erilaista.

28. a) Graafi ei ole Hamiltonin graafi, mutta siinä on Hamiltonin polku. b) Graafi on Hamiltonin graafi ja siinä on Hamiltonin polku. c) Graafi ei ole Hamiltonin graafi, mutta siinä on Hamiltonin polku.

29. Esimerkiksi W_4.

30.

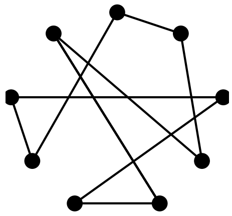


31. Hamiltonin graafissa voi olla korkeintaan kaksi 1-asteista pistettä, polun lähtöpiste ja päätepiste.

32. a) On mahdollista. b) On mahdollista.

33. a) On mahdollista. b) Ei ole mahdollista.

34. On mahdollista, sillä graafi on Hamiltonin graafi.



35. Mikäli tilannetta havainnollistaa graafilla voi huomata, että graafi sisältää väistämättä paritonasteisia pisteitä.

36. On (lause 3.3).

37. Arvoilla $1 + 2n$, kun $n \geq 1$.

38. $K_{n,m}$ on Eulerin graafi, kun molemmat muuttujat ovat kahdella jaollisia.

39. Löydä muodostamillesi graafeille Hamiltonin polku.

40. a) 2 b) 2 c) 3

41. a) 2 b) 2 c) 3

42. a) 2 b) 3 c) 3 d) 4

43. a) 5 b) 8 c) 2 d) 2

44. a) 2 b) 3 c) 3

45. a) K_1 b) C_3 c) K_5

46. Tilanne on sama kuin tehtävässä 44 a eli 2.

47. Algoritmi tuottaa väriluvun 3, vaikka se on 2.

48. a) Katso lause 4.2 b) Jos $n = 2m$ ($m \geq 2$), niin$\chi(W_n) = 3$. Jos $n = 2m + 1$ ($m \geq 2$), niin$\chi(W_n) = 4$. c) n d) 2

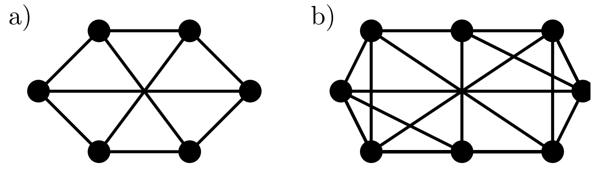
49. a) 3 b) 4

50. Pienin hinta on 500 euroa.

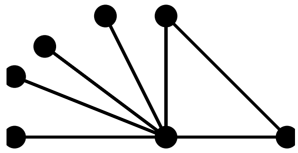
51. Tarvitaan 3 radiomastoa.

52. Tarvitaan 4 väriä.

53. Tarvitaan 4 väriä.

54.


55.



56. a) Kolme valotilannetta riittää. b) Neljä valotilannetta riittää.

57. Tarvitaan 4 väriä.

58. Neljä väriä riittää.

59. Tarkista, ettei yhdelläkään pisteellä ole samanvärisiä viivoja.

60. Tarkista, ettei yhdelläkään pisteellä ole samanvärisiä viivoja.

61. Mahdollisia kahden pisteen joukkoja on 7.

62. a) 2 b) 2 c) 2

63. a) 4 b) 2 c) 3

64. a) 4 b) 4

65. a) $2 \leq \gamma(G) \leq 5$ b)$2 \leq \gamma(G) \leq 6$ c) $\frac{8}{6} \leq \gamma(G) \leq 3$

66. a) $\frac{12}{5} \leq \gamma(G) \leq 8$ b) $\frac{9}{6} \leq \gamma(G) \leq 3$ c) $2 \leq \gamma(G) \leq 7$

67. a) 1 b) 1 c) Pienin arvoista n ja m.

68. Tarvitaan 2 toimipistettä.

69. Tarvitaan 4 toimipistettä.

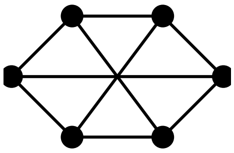
70. a) 4 b) 4 c) 4

71. a) 3 b) 3

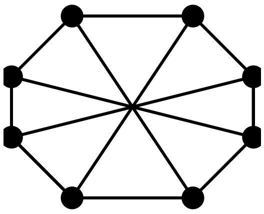
72. Lähetin tulisi asentaa vähintään kolmeen kaupunkiin.

73. Toimipisteitä tarvitaan vähintään kolme.

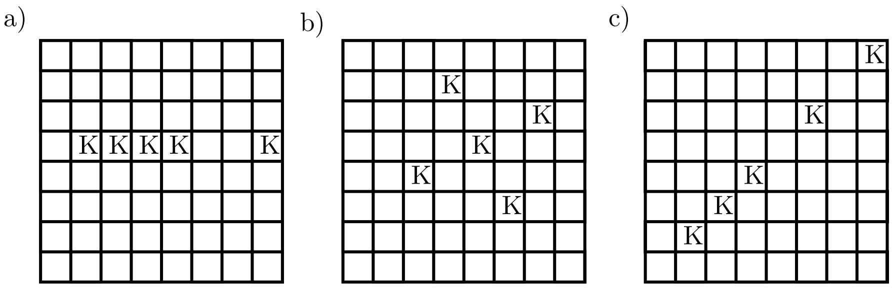
74.



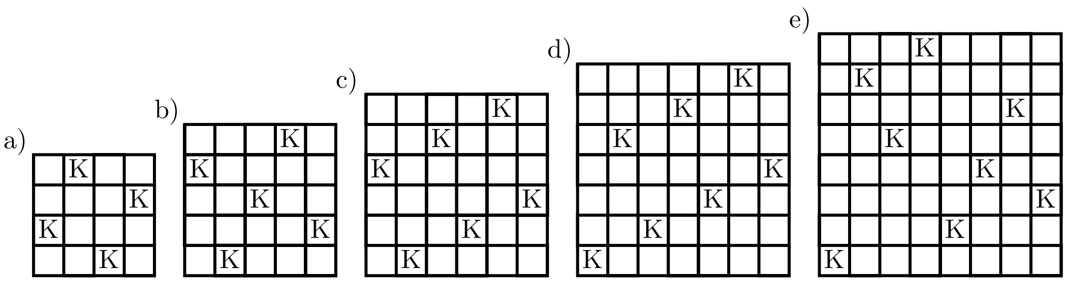
75.



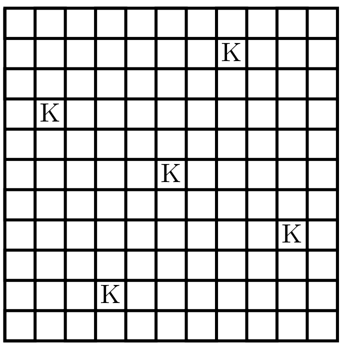
76.



77.



78.



79. Huomioi, että piste ei dominoi itseään.

80. Aloita mistä tahansa pisteestä, väritä jokin sen vieruspiste ja edelleen sen vieruspiste. Jatka näin kunnes kaikki pisteet on dominoitu.

81. Yhtenäisiä aligraafeja on 9.

82. Varmista, ettei puussasi ole silmukoita ja että siinä on 10 pistettä.

83. a) Virittäviä puita on 8. b) Virittäviä puita on 9.

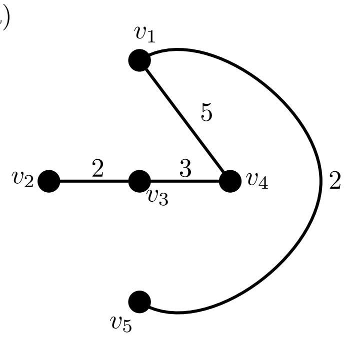
84. Yhtenäisiä kolmipisteisiä aligraafeja on 8.

85. 5-pisteisiä puita on 3.

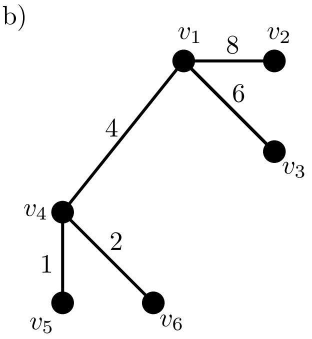
86. 6-pisteisiä puita on 6.

87.

a)

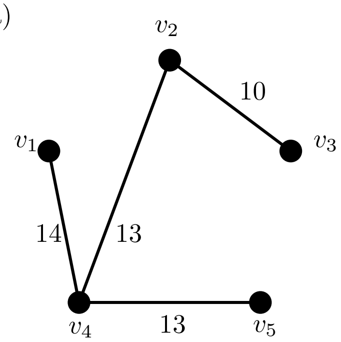


b)

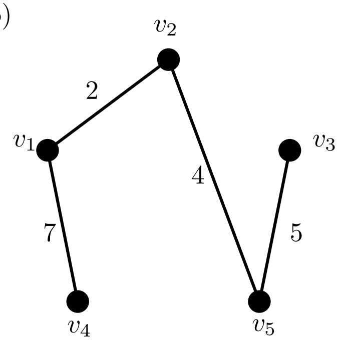


88.

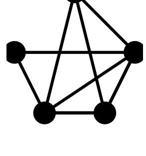
a)



b)



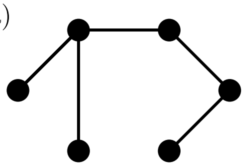
89.



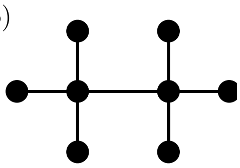
90. Saman verran kuin pisteitä.

91.

a)



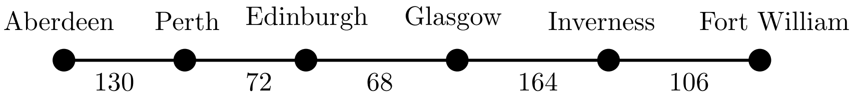
b)



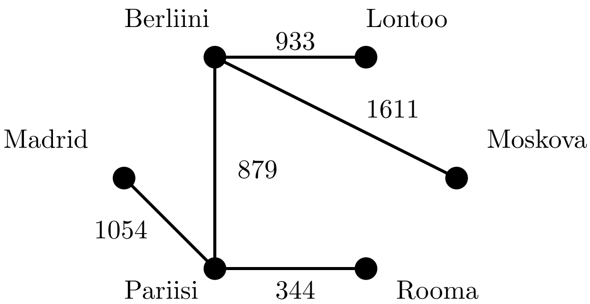
92. Hinta on 5 100 euroa.

93. Tarvitaan 28 metriä kaapelia.

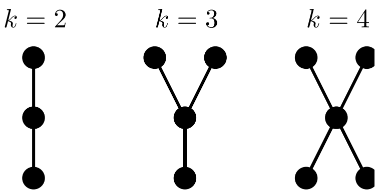
94.



95.



96.



97. Puita on 11.

98. 112 aligraafia.

99. 16 puuta.

100. $p\colon\ v_1, v_2, v_5, v_3, v_4, v_1$

Lähteet

[1] Andrásfai Béla. *Introductory graph theory*. Akadémiai Kiadó, 1977.

[2] Chartrand Gar & Zhang Ping. *Introduction to Graph Theory*. The McGraw-Hill Companies, 2005.

[3] De Mier Anna & Maureso Montserrat. *Mathematics 1, Part I: Graph Theory, Exercises and problems*. Bachelor Degree in Informatics, Universitat Politècnica de Catalunya, 2015.
Saatavilla pdf-muodossa:
<https://mat-web.upc.edu/fib/matematiques1/docs/pm1_graphs.pdf>. Viitattu 12.10.2018.

[4] Koivisto Pertti & Niemistö Riitta. *Graafiteoriaa*. Tampereen yliopisto, 2018. Saatavilla pdf-muodossa: <http://urn.fi/URN:ISBN:978-952-03-0681-6>. Viitattu 12.10.2018.

[5] Smithers Dayna Brown. *Graph Theory for the Secondary School Classroom*. Electronic Theses and Dissertations, East Tennessee State University, 2005. Saatavilla pdf-muodossa: <http://dc.etsu.edu/etd/1015>. Viitattu 12.10.2018.

[6] Swamy M. N. S. & Thulasiraman K. *Graphs, Networks, and Algorithms.* John Wiley & Sons, 1981.

[7] Wilson Robin J. & Watkins John J. *Graphs: An Introductory Approach : A First Course in Discrete Mathematics*. John Wiley & Sons, 1989.

[8] Kuva 3.6 https:commons.wikimedia.orgwikiFile:Konigsberg_bridges.png
Viitattu 8.1.2019.

[9] Kuva tehtävässä 52
https:www.kainuunliitto.fisitesdefaultfilesimageskainuu_liittokartta_www2.pngg
Viitattu 8.1.2019.

[10] Kuva tehtävässä 57
https:upload.wikimedia.orgwikipediacommonsdd3Sudam%C3%A9rica-

Blue.svg
Viitattu 8.1.2019.

[11] Kuva tehtävässä 69
https://www.ely-keskus.fi/documents/10191/50392/PKkartta.jpg/8f5b2147-8944-483b-bed3-edf733c41ff8?t=1366266921708
Viitattu 8.1.2019.