Tampereen yliopisto

Teija Lilius

Chomp-pelistä

Informaatioteknologian ja viestinnän tiedekunta
Pro gradu -tutkielma
Matematiikka
Huhtikuu 2019

TIIVISTELMÄ

Teija Lilius: Chomp-pelistä
Pro gradu -tutkielma
Tampereen yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen tutkinto-ohjelma
Huhtikuu 2019

Tämä tutkielma käsittelee kombinatorista peliä Chomp, jonka pelialue voidaan ajatella suklaalevynä, josta alin vasemmanpuoleisin pala on myrkyllinen. Pelaajat poistavat vuorotellen osioita suklaalevystä ja pelaaja, joka joutuu poistamaan myrkyllisen palan, häviää. Tutkielmassa käsitellään sekä kombinatoristen pelien teoriaa että erilaisten Chomp-pelien tuloksia.

Tutkielman alkuosa keskittyy kombinatoristen pelien teoriaan. Aluksi määritellään äärellinen ja ääretön kombinatorinen peli ja esitetään näiden ominaisuuksia. Tämän jälkeen osoitetaan, miten äärellinen peli voidaan laajentaa vastaavaksi äärettömäksi peliksi. Lisäksi esitetään pelin alkaminen keskeneräisestä pelitilanteesta. Kombinatorisiin peleihin liittyen määritellään strategian ja voittostrategian käsitteet sekä käydään läpi näihin liittyviä tuloksia. Esitetään myös strategian soveltaminen keskeneräiseen pelitilanteeseen. Alkuosan loppupuolella todistetaan yksi kombinatoristen pelien tärkeä lause, Galen ja Stewartin lause, jonka mukaan jokaisessa äärettömässä kombinatorisessa pelissä jommalla kummalla pelaajalla on voittostrategia.

Tutkielman loppuosa keskittyy kombinatoriseen peliin Chomp ja sen ominaisuuksiin. Aluksi määritellään pelin Chomp perusversio ja osoitetaan miten se voidaan tulkita aiemmin määritellyksi kombinatoriseksi peliksi. Seuraavaksi osoitetaan, että Chomp-pelissä aloittavalla pelaajalla on aina voittostrategia, jos pelialue sisältää suurimman alkion. Tämän jälkeen esitetään esimerkkejä tavanomaisista kaksiulotteisista Chomp-peleistä ja niiden tilanteista. Näistä kolmerivisen Chomp-pelin eri tilanteiden voittostrategiat käsitellään hieman tarkemmin. Perusversion käsittelyn jälkeen laajennetaan Chomp moniulotteiseksi, ja esitetään esimerkkejä kolmiulotteisesta ja neliulotteisesta pelialueesta. Lopuksi laajennetaan sekä kaksiulotteinen että kolmiulotteinen versio myös äärettömäksi ja tutkitaan voittostrategioita näissä pelialueissa.

Avainsanat: kombinatorinen peliteoria, strategia, voittostrategia, Gale-Stewart, Chomp
Tämän julkaisun alkuperäisyys on tarkastettu Turnitin OriginalityCheck -ohjelmalla.

Sisältö

1 Johdanto **4**

2 Kombinatorinen peli **5**
2.1 Valmistelevia tarkasteluja . . . 5
2.2 Äärellinen ja ääretön peli . . . 6
2.3 Strategia . . . 7
2.4 Voittostrategia . . . 9
2.5 Äärellisen pelin laajentaminen äärettömäksi . . . 9
2.6 Strategian ominaisuuksia . . . 11

3 Galen ja Stewartin lause **16**

4 Chomp-pelin perusteet **18**
4.1 Perusmuoto . . . 18
4.2 Voittostrategia . . . 19
4.3 Esimerkkejä . . . 21
4.4 Kolmerivinen Chomp . . . 23

5 Chomp-pelin laajennukset **30**
5.1 Kolmiulotteinen Chomp . . . 30
5.2 Useampiulotteinen Chomp . . . 35
5.3 Laajennus äärettömäksi . . . 40

Lähteet **43**

1 Johdanto

Kombinatorinen peliteoria on matematiikan ja tietojenkäsittelyn ala, jonka juuret ulottuvat 1900-luvun alkupuolelle. Nykyisen kombinatorisen peliteorian ajatellaan pohjautuvan J. H. Conwayn teokseen *On Numbers and Games* vuodelta 1976 sekä E. R. Berlekampin, J. H. Conwayn ja R. K. Guyn teokseen *Winning Ways for your Mathematical Plays* vuodelta 1982. (Ks. [7, s. xiii]). Kombinatorinen peliteoria tutkii lähinnä kahden pelaajan täydellisen informaation pelejä, joissa ei ole satunnaisuutta. Toisin sanoen kombinatorisissa peleissä molemmat pelaajat tietävät koko ajan pelin tilan ja mahdolliset seuraavat siirrot. (Ks. [10]).

Kombinatorisen pelin voidaan kaikkein yksinkertaisimmillaan ajatella olevan lista mahdollisia siirtoja, joita pelin kaksi pelaajaa voivat tehdä. Usein kombinatorisen pelin voittaja määritellään siten, että pelaaja, joka ei pysty tekemään seuraavaa siirtoa, häviää pelin ja toinen pelaaja on tällöin voittaja. (Ks. [10]).

Kombinatorisiin peleihin lukeutuva Chomp-peli on kahden pelaajan strateginen peli, jonka perusversion pelialue on $m \times n$ -kokoinen ruudukko, joka kuvataan usein suklaalevynä. Pelaajat valitsevat vuorotellen palan suklaalevystä, ja kyseinen pala sekä kaikki palat sen yläpuolelta ja oikealta puolelta poistetaan pelialueesta. Viimeisen palan poistava pelaaja häviää pelin. Alun perin pelin idean on luonut Frederik Schuh, mutta nykyiseen tunnetumpaan muotoonsa sen on muotoillut David Gale. Schuhin versiossa pelialue muodostuu jonkin luonnollisen luvun alkulukutekijöiden monikerroista. Tässä versiossa pelaajat valitsevat vuorotellen jonkin alkuperäisen luvun tekijän. Pelaaja ei voi valita lukua 1 tai aiemmin valitun tekijän monikertaa, tai hän häviää. Tutummassa versiossa eli Galen versiossa Chompin pelialue on osittain järjestetty joukko, joka sisältää pienimmän alkion. Schuhin ja Galen versiot ovat ekvivalentteja keskenään. (Ks. [11]).

Tämän tutkielman luvussa 2 käsitellään kombinatorista peliteoriaa ja luvussa 3 käsitellään kombinatorisiin peleihin liittyvä Galen ja Stewartin lause. Luvussa 4 käsitellään kombinatorisen Chomp-pelin perusversiota, jota luvussa 5 laajennetaan sekä moniulotteiseksi että äärettömäksi.

Kombinatorisen peliteorian sekä Galen ja Stewartin lauseen osuuteen on tässä tutkielmassa pääsääntöisesti käytetty lähteenä Y. Khomskiin verkkodokumenttina julkaistua teosta *Infinite Games*. Kaksiulotteisen Chomp-pelin osuuteen on pääsääntöisesti käytetty lähteenä D. Zeilbergerin verkkodokumenttina julkaistua teosta *Three-Rowed Chomp*. Äärettömäksi tai moniulotteiseksi laajennetusta Chomp-pelistä lähdemateriaalia on saatavilla hyvin niukasti, joten tässä osiossa on paljon itse työstettyä sisältöä.

Lukijalta odotetaan tunnetuksi lukion pitkän matematiikan oppimäärää vastaavat tiedot, joukko-opin perusteet, lukujonojen perusteet sekä induktiotodistuksen periaate. Lisäksi aikaisempi kombinatorisen peliteorian tuntemus on hyödyllistä mutta ei välttämätöntä.

2 Kombinatorinen peli

Kombinatoriset pelit ovat kahden pelaajan pelejä, jotka eivät sisällä sattumanvaraisia tietoja. Pelit voivat olla äärellisiä tai äärettömiä ja ne voivat alkaa myös keskeneräisistä tilanteista. Lisäksi peleihin liittyy vahvasti strategian käsite, joka määrää pelaajien tekemiä siirtoja.

2.1 Valmistelevia tarkasteluja

Esitellään aluksi joitakin hyödyllisiä merkintöjä ja määritelmiä kombinatoristen pelien käsittelyn tueksi sekä tutkielman myöhempää sisältöä varten.

Merkintä 2.1. Käytetään merkintää ω luonnollisten lukujen joukolle.

Merkintä 2.2. Kombinatoristen pelien määrittelyn apuna käytetään merkintää $[m]$ joukolle $\{0, 1, 2, \ldots, m-1\}$, kun $m \in \omega$.

Pelien erät kuvataan äärellisinä tai äärettöminä jonoina, joten seuraavaksi esitetään jonoihin liittyviä hyödyllisiä merkintöjä ja määritelmiä.

Määritelmä 2.3. (Vrt. [5, s. 2]). Olkoon $s \in \bigcup_{n\in\omega} \omega^n$ äärellinen jono. Jos jonon s pituus on n, niin jonon s i:s alkio, kun $i < n$, merkitään $s(i)$. Vastaavasti äärettömän jonon $x \in \omega^\omega$ j:s alkio, kun $j \in \omega$, merkitään $x(j)$.

Esimerkki 2.4. Olkoon $t \in [m]^n$ äärellinen jono, missä $m, n \in \omega$. Tällöin kaikilla $i < n$ pätee $t(i) \in [m]$ eli jonon t kaikki alkiot kuuluvat joukkoon $[m]$.

Merkintä 2.5. Merkitään jonon s pituutta $|s|$ ja tyhjää jonoa $()$. Tyhjä jono $()$ on siis se yksikäsitteinen jono, jonka pituus on 0.

Määritelmä 2.6. (Vrt. [5, s. 2]). Olkoon $s, t \in \bigcup_{n\in\omega} \omega^n$ äärellisiä jonoja, joilla $|s| = n$ ja $|t| = m$. Tällöin jonojen konkatenaatio on

$$s^\frown t := (s(0), s(1), \ldots, s(n-1), t(0), t(1), \ldots, t(m-1)).$$

Jos jono s on kuten edellä ja jono $x \in \omega^\omega$, niin

$$s^\frown x := (s(0), s(1), \ldots, s(n-1), x(0), x(1), \ldots).$$

Määritelmä 2.7 (Alkusegmentti)**.** (Vrt. [5, s. 2]). Olkoon $s \in \omega^\omega$ ja $n \in \omega$. Tällöin

$$s \restriction n := (s(0), s(1), \ldots, s(n-1))$$

on jonon s *alkusegmentti pituudella* n. Jos $a \in \bigcup_{n\in\omega} \omega^n$ ja $s \in \omega^\omega$, niin a on jonon s alkusegmentti, $a \lhd s$, jos $s \restriction |a| = a$.

Luvussa 3 käsiteltävään Galen ja Stewartin lauseeseen liittyy avoimen ja suljetun joukon käsitteet, joiden määritelmät esitetään seuraavaksi.

Määritelmä 2.8 (Avoin joukko)**.** (Vrt. [5, s. 21]). Olkoon $A \subseteq \omega^\omega$. Joukko A on avoin, jos kaikilla $s \in \omega^\omega$ pätee

$$s \in A \implies \exists\, a \lhd s\, \forall x\, (a \lhd x \to x \in A).$$

Toisin sanoen, joukon A sanotaan olevan avoin, jos joukkoon A kuuluvilla jonoilla on olemassa alkusegmentti, joka kaikilla mahdollisilla jatkeilla kuuluu joukkoon A. Kuten seuraavassa määritelmässä todetaan, joukko A on suljettu, jos sen komplementti on avoin joukko.

Määritelmä 2.9 (Suljettu joukko)**.** Olkoon $A \subseteq \omega^\omega$. Joukko A on suljettu, jos joukko $\omega^\omega \setminus A$ on avoin.

Esitetään seuraavaksi osittain järjestetyn joukon määritelmä, koska kombinatorinen peli Chomp määritellään sen avulla luvussa 4.

Määritelmä 2.10 (Osittain järjestetty joukko)**.** (Vrt. [3, s. 2]). Pari $(S, \preceq)$ on osittain järjestetty joukko, jos joukon S relaatio $\preceq$ on refleksiivinen, transitiivinen ja antisymmetrinen.

2.2 Äärellinen ja ääretön peli

Kombinatoriset pelit voivat olla äärellisen tai äärettömän pituisia. Lisäksi valittavissa olevien siirtojen joukko voi olla äärellinen tai ääretön. Esitetään muodolliset määritelmät äärelliselle ja äärettömälle kombinatoriselle pelille sekä esitetään yksinkertainen esimerkki äärettömästä kombinatorisesta pelistä.

Määritelmä 2.11 (Äärellinen kombinatorinen peli)**.** (Vrt. [5, s. 5]). Olkoon n jokin luonnollinen luku, joka kuvaa pelin pituuden. Olkoon nyt $A_n \subseteq [m]^{2n}$, missä $m \in \omega$. Joukkoon A_n liittyvä *kombinatorinen peli* $G_n(A_n)$ määritellään siten, että pelissä on n kierrosta ja pelin kaksi pelaajaa, pelaaja 1 ja pelaaja 2, vuorottelevat valitsemalla yhden luonnollisen luvun joukosta $[m]$ pelin jokaisella kierroksella i. Merkitään pelaajan 1 valintaa $x_i \in [m]$ ja pelaajan 2 valintaa $y_i \in [m]$, joista muodostuu n:n kierroksen jälkeen jono $s = (x_0, y_0, x_1, y_1, \dots, x_{n-1}, y_{n-1})$. Tätä kutsutaan pelin $G_n(A_n)$ eräksi. Pelaaja 1 voittaa pelin $G_n(A_n)$ jos jono $s \in A_n$ ja pelaaja 2 voittaa muutoin.

Määritelmä 2.12 (Ääretön kombinatorinen peli)**.** (Vrt. [5, s. 11]). Olkoon $A \subseteq \omega^\omega$. Joukkoon A liittyvä *kombinatorinen peli* $G(A)$ määritellään siten, että pelin kaksi pelaajaa, pelaaja 1 ja pelaaja 2, vuorottelevat valitsemalla yhden luonnollisen luvun pelin jokaisella kierroksella i. Merkitään pelaajan 1 valintaa $x_i \in \omega$ ja pelaajan 2 valintaa $y_i \in \omega$, joista muodostuu jono $s = (x_0, y_0, x_1, y_1, \dots)$. Tätä kutsutaan pelin $G(A)$ eräksi. Pelaaja 1 voittaa pelin $G(A)$ jos jono $s \in A$ ja pelaaja 2 voittaa muutoin.

Huomautus. Yllä olevissa määritelmissä $s(0) = x_0$, $s(1) = y_0$, $s(2) = x_1$, $s(3) = y_1$ ja niin edelleen.

Tässä tutkielmassa kombinatorinen peli määritellään siis sekä pelierän pituuden että mahdollisten siirtojen joukon avulla. Pelierän pituus voi itse asiassa olla lyhyempi kuin määritelmässä, mutta myöhemmin todistetaan, että pelierä voidaan täydentää määriteltyyn pituuteen muuttamatta pelin tulosta. Tämä on kuitenkin vain yksi tapa tehdä täsmällinen määritelmä kombinatorisesta pelistä. Kombinatorinen peli voitaisiin myös määritellä esimerkiksi pelitilanteiden kautta.

Esimerkki 2.13. Tarkastellaan peliä, jossa pelaaja 1 ja pelaaja 2 valitsevat vuorotellen yhden luonnollisen luvun. Pelaaja, joka valitsee ensin luvun 0, häviää pelin. Lisäksi, jos lukua 0 ei valita ollenkaan, pelaaja 2 voittaa. Tällöin

$$A = \{s \in \omega^\omega \mid s(n) = 0 \text{ jollakin parittomalla } n \text{ ja } s(m) \neq 0 \text{ kaikilla } m < n\}.$$

Nyt siis selvästi pelin erä $s \in A$ vain silloin, kun pelaaja 2 on valinnut luvun 0 ensin. Siis pelaaja 1 voittaa vain silloin, kun pelaaja 2 valitsee luvun 0 ensin, muutoin pelaaja 2 voittaa.

Kombinatorinen peli voidaan aloittaa myös keskeneräisestä pelitilanteesta, eli tilanteesta, jossa peliin on jo sovellettu joitakin siirtoja. Esitetään seuraavaksi tämän muodollinen määritelmä ja esimerkki tällaisesta pelistä.

Määritelmä 2.14 (Peli tilanteesta)**.** (Vrt. [5, s. 19]). Olkoon $G(A)$ ääretön kombinatorinen peli ja s äärellinen jono, jonka pituus on parillinen. Jono s on jokin pelin $G(A)$ keskeneräinen tilanne. Tällöin $G(A; s)$ on peli annetusta tilanteesta s alkaen, missä pelaaja 1 aloittaa pelaamalla x_0, pelaajan 2 siirto on y_0 ja niin edelleen. Tällöin pelaaja 1 voittaa pelin $G(A; s)$ jos ja vain jos

$$s^\frown(x_0, y_0, x_1, y_1, \dots) \in A.$$

Vastaavasti, jos jonon s pituus on pariton, niin $G(A; s)$ on peli annetusta tilanteesta s alkaen, missä pelaaja 2 aloittaa pelaamalla y_0, pelaajan 1 siirto on x_1, pelaajan 2 siirto on y_1 ja niin edelleen. Tällöin pelaaja 1 voittaa pelin $G(A; s)$ jos ja vain jos

$$s^\frown(y_0, x_1, y_1, \dots) \in A.$$

Siis $G(A; s)$ on ikään kuin peli $G(A)$, jossa on tehty jo jonoa s vastaavat siirrot.

Huomautus. Yllä oleva määritelmä on vastaava myös äärellisille kombinatorisille peleille $G_n(A_n)$. Jos jonon s pituus on parillinen ja jonolle s pätee $|s| < 2n$, niin pelaaja 1 voittaa pelin $G_n(A_n; s)$, jos ja vain jos

$$s^\frown(x_0, y_0, x_1, y_1, \dots, x_i, y_i) \in A_n,$$

missä $|s^\frown(x_0, y_0, x_1, y_1, \dots, x_i, y_i)| = 2n$. Vastaavasti jos jonon s pituus on pariton ja jonolle s pätee $|s| < 2n$, niin pelaaja 1 voittaa pelin $G_n(A_n; s)$, jos ja vain jos

$$s^\frown(y_0, x_1, y_1, \dots, x_i, y_i) \in A_n,$$

missä $|s^\frown(y_0, x_1, y_1, \dots, x_i, y_i)| = 2n$.

Esimerkki 2.15. Tarkastellaan peliä, jossa pelaaja 1 ja pelaaja 2 valitsevat vuorotellen yhden luonnollisen luvun. Pelaaja, joka valitsee ensimmäisenä jo aiemmin valitun luvun, häviää pelin. Jos kahta samaa lukua ei valita ollenkaan, niin pelaaja 2 voittaa. Tällöin

$$\begin{aligned} A = \{s \in \omega^\omega \mid & s(n) = s(m) \text{ jollakin parittomalla } n, \text{ kun } m < n \text{ ja} \\ & s(n') \neq s(m') \text{ kaikilla } n', m' < n, \text{ kun } n' \neq m'\}. \end{aligned}$$

Siis pelin $G(A)$ erä $s \in A$ vain silloin, kun pelaaja 2 valitsee ensimmäisenä jonkin jo valitun luvun.

Olkoon nyt jono $s' = (0, 1, 2, 3, 4, 5)$. Tällöin peli $G(A; s')$ on kuin peli $G(A)$, jossa on pelattu kolme sellaista kierrosta, että pelaaja 1 on valinnut luvut 0, 2 ja 4 ja pelaaja 2 on valinnut luvut 1, 3 ja 5. Siis $G(A; s')$ on muuten sama peli kuin $G(A)$, mutta pelaajat eivät saa valita alkioita $0, 1, 2, 3, 4$ tai 5. Jos nyt pelissä $G(A; s')$ pelaaja 1 valitsee ensimmäisellä siirrollaan luvun 0, niin $s'^\frown(0)^\frown b \notin A$, kaikilla jonon jatkeilla b eli pelaaja 1 häviää pelin $G(A; s')$.

2.3 Strategia

Kombinatoristen pelien yksi keskeinen käsite on strategia. Strategia on funktio, joka määrää pelaajan seuraavan siirron riippuen jo pelatuista siirroista. Tässä osiossa käsitellään strategian perusominaisuuksia. Aluksi esitetään määritelmät strategialle sekä äärellisessä että äärettömässä pelissä.

Määritelmä 2.16 (Strategia äärellisessä pelissä)**.** (Vrt. [5, s. 6]). Olkoon $G_n(A_n)$ äärellinen kombinatorinen peli, jonka pituutta merkitään luvulla n sekä $A_n \subseteq [m]^{2n}$, missä $m \in \omega$. Pelaajan 1 *strategia* on funktio

$$\sigma\colon \left\{ s \in \bigcup_{n' \leq 2n} [m]^{n'} \;\middle|\; |s| \text{ on parillinen} \right\} \to \omega.$$

Pelaajan 2 *strategia* on vastaavasti funktio

$$\tau\colon \left\{ s \in \bigcup_{n' \leq 2n} [m]^{n'} \;\middle|\; |s| \text{ on pariton} \right\} \to \omega.$$

Määritelmä 2.17 (Strategia äärettömässä pelissä)**.** (Vrt. [5, s. 12], [6, s. 54]). Olkoon $G(A)$ ääretön kombinatorinen peli. Pelaajan 1 *strategia* on funktio

$$\sigma\colon \left\{ s \in \bigcup_{n \in \omega} \omega^n \;\middle|\; |s| \text{ on parillinen} \right\} \to \omega.$$

Pelaajan 2 *strategia* on vastaavasti funktio

$$\tau\colon \left\{ s \in \bigcup_{n \in \omega} \omega^n \;\middle|\; |s| \text{ on pariton} \right\} \to \omega.$$

Määritellään seuraavaksi pelien erät, kun toinen pelaaja tai molemmat pelaajat noudattavat strategiaa pelissä.

Määritelmä 2.18. (Vrt. [5, s. 12]). Olkoon σ pelaajan 1 strategia äärettömässä pelissä $G(A)$. Mille tahansa jonolle $y = (y_0, y_1, \dots)$ määritellään

$$\sigma * y := (x_0, y_0, x_1, y_1, \dots),$$

missä x_i määritellään induktiivisesti siten, että

$$\begin{aligned} x_0 &:= \sigma(()) \qquad \text{ja} \\ x_{i+1} &:= \sigma((x_0, y_0, x_1, y_1, \dots, x_i, y_i)). \end{aligned}$$

Vastaavalla tavalla, olkoon τ pelaajan 2 strategia äärettömässä pelissä $G(A)$. Mille tahansa jonolle $x = (x_0, x_1, \dots)$ määritellään

$$x * \tau := (x_0, y_0, x_1, y_1, \dots),$$

missä y_i määritellään induktiivisesti siten, että

$$\begin{aligned} y_0 &:= \tau((x_0)) \qquad \text{ja} \\ y_{i+1} &:= \tau((x_0, y_0, x_1, y_1, \dots, x_i, y_i, x_{i+1})). \end{aligned}$$

Tällöin $\sigma * y$ ja $x * \tau$ ovat pelin $G(A)$ eriä.

Huomautus. Jos jonot x ja y ovat äärellisiä, niin yllä oleva määritelmä on edelleen järkevä. Olkoon jono $y = (y_0, y_1, \dots, y_n)$ äärellinen ja σ pelaajan 1 strategia äärellisessä pelissä $G_n(A_n)$. Tällöin pelin eräksi saadaan

$$\sigma * y = (x_0, y_0, x_1, y_1, \dots, x_n, y_n),$$

missä x_{i+1}, $i < n$, on määritelty kuten edellä. Olkoon nyt jono $x = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ äärellinen ja τ pelaajan 2 strategia äärellisessä pelissä $G_n(A_n)$. Tällöin vastaavasti pelin eräksi saadaan

$$\tau * x = (x_0, y_0, x_1, y_1, \dots, x_n, y_n),$$

missä y_{i+1}, $i < n$, on määritelty kuten edellä.

Määritelmä 2.19. Olkoon σ pelaajan 1 strategia ja τ pelaajan 2 strategia äärettömässä pelissä $G(A)$. Tällöin, kuten edellisessä määritelmässä, saadaan

$$\begin{aligned}
x_0 &= \sigma(())\\
y_0 &= \tau((\sigma(()))) = \tau((x_0))\\
x_1 &= \sigma((\sigma(()), \tau((x_0)))) = \sigma((x_0, y_0))\\
y_1 &= \tau((\sigma(()), \tau((x_0)), \sigma((x_0, y_0)))) = \tau((x_0, y_0, x_1))
\end{aligned}$$

ja niin edelleen. Näistä termeistä muodostuva jono

$$\sigma * \tau := (x_0, y_0, x_1, y_1, \dots)$$

on pelin $G(A)$ erä, jossa pelaaja 1 noudattaa strategiaa σ ja pelaaja 2 noudattaa strategiaa τ.

2.4 Voittostrategia

Jos pelaajan strategia on sellainen, että sitä noudattamalla pelaaja voittaa pelin varmasti riippumatta toisen pelaajan siirroista, on tällöin kyseessä voittostrategia. Määritellään seuraavaksi voittostrategia muodollisesti ja esitetään esimerkki erään yksinkertaisen pelin voittostrategiasta.

Määritelmä 2.20 (Voittostrategia)**.** (Vrt. [5, s. 12-13], [6, s. 54]). Olkoon $A \subseteq \omega^\omega$. Pelaajan 1 strategia σ on voittostrategia äärettömässä kombinatorisessa pelissä $G(A)$, jos kaikilla $y \in \omega^\omega$ pätee $\sigma * y \in A$. Vastaavasti pelaajan 2 strategia τ on voittostrategia, jos kaikilla $x \in \omega^\omega$ pätee $x * \tau \notin A$.

Huomautus. Voittostrategian määritelmä on vastaava äärellisille kombinatorisille peleille. Pelaajan 1 strategia σ on voittostrategia äärellisessä kombinatorisessa pelissä $G_n(A_n)$, jos kaikilla $y \in [m]^{2n}$, missä $m \in \omega$, pätee $\sigma * y \in A_n$. Vastaavasti pelaajan 2 strategia τ on voittostrategia, jos kaikilla $x \in [m]^{2n}$, missä $m \in \omega$, pätee $x * \tau \notin A_n$.

Esimerkki 2.21. Olkoon joukko

$$A = \{s \in \omega^\omega \mid s(n) = 0 \text{ jollakin parittomalla } n \text{ ja } s(m) \neq 0 \text{ kaikilla } m < n\},$$

kuten esimerkissä 2.13. Tällöin pelaajalla 2 on voittostrategia, nimittäin valita aina jokin muu luku kuin 0. Olkoon pelaajan 2 strategia siis valita aina luku 1. Jos pelaaja 2 noudattaa kyseistä strategiaa, niin millä tahansa pelin erällä s pätee $s \notin A$, joten tämä on selvästi voittostrategia pelaajalle 2.

2.5 Äärellisen pelin laajentaminen äärettömäksi

Äärellinen kombinatorinen peli voidaan laajentaa äärettömäksi kombinatoriseksi peliksi siten, että pelit ovat oleellisesti samat. Todistetaan seuraavaksi tämä tulos ja esitetään esimerkki kyseisestä tilanteesta.

Lause 2.22. *Jokainen äärellinen peli $G_n(A_n)$, missä $A_n \subseteq [m]^{2n}$ voidaan laajentaa äärettömäksi peliksi $G(A)$, missä $A \subseteq \omega^\omega$ siten, että pelaajalla 1 on voittostrategia äärellisessä pelissä $G_n(A_n)$, jos ja vain jos pelaajalla 1 on voittostrategia äärettömässä pelissä $G(A)$.*

Todistus. Olkoon $G_n(A_n)$ äärellinen peli, jossa $A_n \subseteq [m]^{2n}$ jollakin $m \in \omega$. Konstruoidaan ääretön peli $G(A)$ äärellisen pelin $G_n(A_n)$ avulla. Määritellään $A \subseteq \omega^\omega$. Oletetaan, että jono $s \in \omega^\omega$ ja asetetaan

$$s \in A \iff s' \in A_n,$$

missä pätee toinen säännöistä

$$s' \in [m]^{2n} \text{ ja } s \upharpoonright 2n = s' \qquad \text{tai} \tag{2.1}$$

$$s(i) \notin [m] \text{ jollakin parittomalla } i \leq 2n, \text{ jolla } s(j) \in [m] \text{ kaikilla } j < i. \tag{2.2}$$

Toisin sanoen jos jono s' kuuluu joukkoon A_n, jono s' jatkettuna millä tahansa toisella jonolla kuuluu tällöin joukkoon A. Lisäksi, jos jonon s jokin alkio $s(i)$ ei kuulu joukkoon $[m]$, eli on laiton valinta äärellisessä pelissä jollakin pelaajan 2 siirrolla siten, että kaikki aiemmat siirrot ovat laillisia, niin jono s kuuluu joukkoon A.

Osoitetaan, että pelaajalla 1 on voittostrategia äärettömässä pelissä $G(A)$, jos ja vain jos pelaajalla 1 on voittostrategia äärellisessä pelissä $G_n(A_n)$. Oletetaan ensin, että pelaajalla 1 on voittostrategia σ pelissä $G(A)$. Olkoon $y' \in [m]^n$ äärellinen jono. Laajennetaan jono y' äärettömäksi jonoksi y siten, että $y' = y \upharpoonright n$. Tarkastellaan laajennettua jonoa y. Koska oletettiin, että pelaajalla 1 on voittostrategia σ pelissä $G(A)$, niin $\sigma * y \in A$. Merkitään pelin erää $s = \sigma * y$. Nyt on oletettu, että sääntöä (2.2) ei ole rikottu, joten yllä olevan määritelmän nojalla $s' = s \upharpoonright 2n \in A_n$. Siis $s' = (\sigma * y) \upharpoonright 2n \in A_n$. Määritellään pelaajalle 1 strategia σ_n. Asetetaan

$$\sigma_n(()) = \sigma(())$$
$$\sigma_n((x_0, y_0, \ldots, x_i, y_i)) = \sigma((x_0, y_0, \ldots, x_i, y_i))$$

kaikilla $i \leq n$. Selvästi $s' = (\sigma * y) \upharpoonright 2n = \sigma_n * y' \in A_n$, joten pelaajalla 1 on voittostrategia σ_n pelissä $G_n(A_n)$.

Oletetaan sitten, että pelaajalla 1 on voittostrategia σ_n pelissä $G_n(A_n)$. Olkoon jono $y \in \omega^\omega$. Tarkastellaan rajoittumaa $y' = y \upharpoonright n$. Koska σ_n on voittostrategia, niin pelin erä $s' = \sigma_n * y' \in A_n$. Määritellään nyt pelaajalle 1 strategia σ peliin $G(A)$ siten, että pelaaja 1 käyttää strategiaa σ_n kunnes pelaaja 2 tekee laittoman siirron tai kunnes on pelattu n kierrosta. Asetetaan

$$\sigma(()) = \sigma_n(())$$
$$\sigma((x_0, y_0, \ldots, x_i, y_i)) = \sigma_n((x_0, y_0, \ldots, x_i, y_i)),$$

kun $i \leq n$, jos kaikilla $0 \leq j \leq i$ pätee $y_j \in [m]$. Lisäksi asetetaan

$$\sigma((x_0, y_0, \ldots, x_i, y_i)) = 0$$

kaikilla $i > n$, sekä kaikilla $i \geq j$, jos jollakin $0 \leq j \leq i$ pätee $y_j \notin [m]$. Tällöin joko äärettömän pelin ensimmäiset n kierrosta ovat äärellisen pelin laillisia siirtoja eli $s' = s \upharpoonright 2n \in [m]^{2n}$ tai pelaaja 2 tekee laittoman siirron eli on olemassa pariton indeksi i', jolla $s(i') \notin [m]$ ja $s(j') \in [m]$ kaikilla $j' < i'$. Siis määritelmän nojalla pelin erä $s = \sigma * y \in A$. Siis σ on pelaajan 1 voittostrategia äärettömässä pelissä. □

Lopputulos on, että äärellinen peli sekä äärellisestä pelistä laajennettu ääretön peli ovat oleellisesti ekvivalentteja. Siis tietyssä mielessä ne ovat sama peli.

Huomautus. Määritelmässä 2.11 pelin pituudeksi määriteltiin n kierrosta, mutta usein käytännössä tarkastellaan pelejä, joiden erät ovat eri pituisia. Tällaiset pelit voidaan laajentaa n kierroksen pituisiksi peleiksi käyttämällä samaa ideaa kuin yllä olevassa todistuksessa.

Esimerkki 2.23. Tarkastellaan äärellistä peliä, jossa on vastaavat säännöt kuin esimerkissä 2.13. Siis pelaaja 1 ja pelaaja 2 valitsevat vuorotellen yhden luonnollisen luvun kuuden alkion joukosta $[6] = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Pelissä pelataan 10 kierrosta. Pelaaja, joka valitsee ensimmäisenä luvun 0, häviää pelin. Lisäksi, jos lukua 0 ei valita ollenkaan, pelaaja 2 voittaa. Tällöin

$$A_{10} = \{s \in [6]^{20} \mid s(n) = 0 \text{ jollakin parittomalla } n < 20 \text{ ja}$$
$$s(m) \neq 0 \text{ kaikilla } m < n\}.$$

Nyt siis selvästi pelin $G_{10}(A_{10})$ erä $s' \in A_{10}$ vain silloin, kun pelaaja 2 on valinnut luvun 0 ensin. Esimerkin 2.21 nojalla pelaajalla 2 on voittostrategia pelissä $G_{10}(A_{10})$. Laajennetaan nyt äärellinen peli $G_{10}(A_{10})$ äärettömäksi peliksi $G(A)$, joka on oleellisesti ekvivalentti äärellisen pelin kanssa. Tällöin

$$A = \{s \in \omega^{\omega} \mid s(n) = 0 \text{ tai } s(n) \notin [6] \text{ jollakin parittomalla } n < 20 \text{ ja}$$
$$s(m) \neq 0 \text{ ja } s(m) \in [6] \text{ kaikilla } m < n\}.$$

Siis jos $s' \in A_{10}$, niin $s \in A$, kun $s \restriction 20 = s'$. Lisäksi $s \in A$, jos $s(i) \notin [6]$ jollakin parittomalla indeksillä $i \leq 20$, jolla $s(j) \in [6]$, kaikilla $j < i$. Toisin sanoen, jos pelaaja 1 valitsee ensimmäisen 10 kierroksen aikana ensimmäisenä pelaajana luvun, joka ei kuulu joukkoon [6] tai luvun 0, niin $s \notin A$. Jos pelaaja 2 valitsee ensimmäisen 10 kierroksen aikana ensimmäisenä pelaajana luvun, joka ei kuulu joukkoon [6] tai luvun 0, niin $s \in A$. Jos kumpikaan ei valitse näitä lukuja ensimmäisen 10 kierroksen aikana, niin $s \notin A$. Siis pelissä $G(A)$ pelaajien siirrot 10 kierroksen jälkeen eivät vaikuta pelin lopputulokseen. Lisäksi pelaajalla 2 on selvästi myös äärettömässä pelissä $G(A)$ voittostrategia, nimittäin valita aina luku 1. Tällöin pätee aina, että pelin erä $s \notin A$, koska pelaaja 2 ei valitse lukua 0 ja $1 \in [6]$.

Huomautus. Kuten edellisessä todistuksessa, myös äärellisen pelin voittojoukko voidaan määritellä siten, että voittojoukko rankaisee pelaajan tekemistä niin sanotuista kielletyistä siirroista. Siis kielletyn siirron ensin tehnyt pelaaja häviää. Eli määritelmän 2.11 joukko A voidaan laajentaa siten, että $A \subseteq \omega^{2n}$, kun joukon A määritelmään lisätään ehto kielletyistä siirroista. Esimerkiksi pelissä Chomp tällaisia kiellettyjä siirtoja ovat poistettavan alkion valinta pelialueen ulkopuolelta tai jo poistettujen alkioiden joukosta. Tällöin Chomp-pelin voittojoukko hyväksyy jonot, joiden alkiot voivat olla mitä tahansa siirtoja, mutta mahdollisen ensimmäisen pelialueen ulkopuolelle kuuluvan siirron indeksi määrää kumpi pelaaja häviää, eli kuuluuko kyseinen jono voittojoukkoon vai ei.

Tästä eteenpäin kombinatorisella pelillä viitataan äärettömään kombinatoriseen peliin, koska edellisen lauseen nojalla äärellinen peli voidaan laajentaa äärettömäksi peliksi siten, että pelin tulos ei muutu.

2.6 Strategian ominaisuuksia

Tässä osiossa esitetään joitakin hyödyllisiä strategian ja voittostrategian ominaisuuksia kombinatorisissa peleissä.

Lause 2.24. *Molemmilla pelaajilla ei voi olla voittostrategiaa kombinatorisessa pelissä $G(A)$, missä $A \subseteq \omega^\omega$.*

Todistus. Olkoon σ pelaajan 1 strategia ja τ pelaajan 2 strategia kombinatorisessa pelissä $G(A)$. Oletetaan vastoin väitettä, että molemmilla pelaajilla on voittostrategia, eli sekä strategia σ että strategia τ ovat voittostrategioita. Olkoon jono $x = (x_0, x_1, \dots)$ pelaajan 1 siirrot ja jono $y = (y_0, y_1, \dots)$ pelaajan 2 siirrot, kun pelaaja 1 noudattaa strategiaa σ ja pelaaja 2 noudattaa strategiaa τ. Huomataan, että

$$\sigma * y = \sigma * \tau = x * \tau$$

on tällöin pelin $G(A)$ erä. Koska strategia σ on voittostrategia, niin määritelmän 2.20 nojalla $\sigma * y \in A$. Siis $\sigma * \tau \in A$. Lisäksi koska strategia τ on voittostrategia, niin määritelmän 2.20 nojalla $x * \tau \notin A$. Siis $\sigma * \tau \notin A$. Tämä on ristiriita, joten molemmilla pelaajilla ei voi olla voittostrategiaa pelissä $G(A)$. □

Koska peli voidaan aloittaa keskeneräisestä tilanteesta, on hyödyllistä määritellä myös strategia keskeneräisestä pelitilanteesta.

Määritelmä 2.25 (Strategia tilanteesta)**.** Olkoon $A \subseteq \omega^\omega$ ja $s = (a_0, b_0, \dots, a_n, b_n)$ pelin $G(A)$ tilanne. Olkoon lisäksi jono $y = (y_0, y_1, \dots)$ pelaajan 2 seuraavia siirtoja vastaava jono. Tällöin pelaajan 1 strategia pelissä $G(A; s)$ eli *strategia tilanteesta* s pelissä $G(A)$ merkitään σ_s ja määritellään

$$\sigma_s * y = (x_0, y_0, x_1, y_1, \dots),$$

missä $x_0 = \sigma_s(s)$ ja $x_1 = \sigma_s(s^\frown(x_0, y_0))$ ja niin edelleen. Vastaavasti, jos jono $x = (x_0, x_1, \dots)$ on pelaajan 1 seuraavia siirtoja vastaava jono, niin pelaajan 2 strategia pelissä $G(A; s)$ merkitään τ_s ja määritellään

$$x * \tau_s = (x_0, y_0, x_1, y_1, \dots),$$

missä $y_0 = \tau_s(s^\frown(x_0))$ ja $y_1 = \tau_s(s^\frown(x_0, y_0, x_1))$ ja niin edelleen. Strategia σ_s on *voittostrategia tilanteesta* s, jos

$$s^\frown(\sigma_s * y) = (a_0, b_0, \dots, a_n, b_n, x_0, y_0, x_1, y_1, \dots) \in A$$

kaikilla jonoilla y. Vastaavasti strategia τ_s on voittostrategia tilanteesta s, jos

$$s^\frown(x * \tau_s) = (a_0, b_0, \dots, a_n, b_n, x_0, y_0, x_1, y_1, \dots) \notin A$$

kaikilla jonoilla x. Toisin sanoen nämä ovat voittostrategioita pelissä $G(A; s)$.

Huomautus. Edellisen määritelmän strategioita σ_s ja τ_s ei ole määritelty sellaisille jonoille, jotka eivät ole jonon s jatkeita.

Todistetaan seuraavaksi tärkeä aputulos liittyen pelitilanteen voittostrategiaan.

Lemma 2.26. *Olkoon s äärellinen jono. Pelaajalla 1 on voittostrategia tilanteesta s, jos ja vain jos on olemassa pelaajan 1 siirto x_0 siten, että kaikilla pelaajan 2 siirroilla y_0 pelaajalla 1 on voittostrategia tilanteesta $s^\frown(x_0, y_0)$. Vastaavasti pelaajalla 2 on voittostrategia tilanteesta s, jos ja vain jos kaikilla pelaajan 1 siirroilla x_0 on olemassa pelaajan 2 siirto y_0 siten, että pelaajalla 2 on voittostrategia tilanteesta $s^\frown(x_0, y_0)$.*

Todistus. Oletetaan, että pelaajalla 1 on voittostrategia σ_s tilanteesta s ja että pelaaja noudattaa strategiaa σ_s. Tällöin määritelmän nojalla

$$s^\frown(\sigma_s * y) \in A,$$

kaikilla jonoilla y pelaajan 2 siirtoja. Olkoon pelaajan 1 ensimmäinen siirto strategian σ_s mukainen. Merkitään kyseistä siirtoa $\sigma_s(s) = x_0$. Tällöin kaikilla pelaajan 2 siirroilla y_0 ja jonoilla $y' = (y_1, y_2, \dots)$ pätee

$$s'^\frown(\sigma'_{s'} * y') \in A,$$

missä $s' = s^\frown(x_0, y_0)$ sekä

$$\sigma'_{s'}(s') = \sigma_s(s')$$
$$\sigma'_{s'}(s'^\frown(\sigma'_{s'}(s'), y_1)) = \sigma_s(s'^\frown(\sigma_s(s'), y_1))$$

ja niin edelleen. Siis $s'^\frown(\sigma'_{s'} * y') = s^\frown(\sigma_s * y)$ eli strategia $\sigma'_{s'}$ on muuten sama kuin strategia σ_s, mutta strategiaa $\sigma'_{s'}$ ei ole määritelty jonolle s. Koska $s'^\frown(\sigma'_{s'} * y') \in A$ kaikilla jonoilla y', niin edellisen määritelmän nojalla $\sigma'_{s'}$ on pelaajan 1 voittostrategia tilanteesta s'. Siis on olemassa pelaajan 1 siirto x_0 siten, että kaikilla pelaajan 2 siirroilla y_0 pelaajalla 1 on voittostrategia tilanteesta s'.

Oletetaan sitten, että on olemassa pelaajan 1 siirto x_0 siten, että kaikilla pelaajan 2 siirroilla y_0 pelaajalla 1 on voittostrategia $\sigma'_{s'}$ tilanteesta $s' = s^\frown(x_0, y_0)$. Konstruoidaan pelaajalle 1 strategia σ_s tilanteesta s. Asetetaan

$$\sigma_s(s) = x_0$$
$$\sigma_s(s^\frown b) = \sigma'_{s'}(s^\frown b)$$

kaikilla jonon s parillisilla jatkeilla b, joilla $|b| \geq 2$. Tällöin kaikilla jonoilla y pätee

$$s^\frown(\sigma_s * y) \in A.$$

Siis edellisen määritelmän nojalla σ_s on pelaajan 1 voittostrategia tilanteesta s.

Oletetaan seuraavaksi, että pelaajalla 2 on voittostrategia τ_s tilanteesta s ja että pelaaja noudattaa strategiaa τ_s. Tällöin määritelmän nojalla

$$s^\frown(x * \tau_s) \notin A,$$

kaikilla jonoilla x pelaajan 1 siirtoja. Olkoon x_0 jokin pelaajan 1 ensimmäinen siirto ja olkoon pelaajan 2 ensimmäinen siirto strategian τ_s mukainen. Merkitään tätä siirtoa $\tau_s(s^\frown(x_0)) = y_0$. Tällöin kaikilla pelaajan 1 siirtojen jonoilla $x' = (x_1, x_2, \dots)$ pätee

$$s'^\frown(x' * \tau'_{s'}) \notin A,$$

missä $s' = s^\frown(x_0, y_0)$ sekä

$$\tau'_{s'}(s'^\frown(x_1)) = \tau_s(s'^\frown(x_1))$$
$$\tau'_{s'}(s'^\frown(x_1, \tau'_{s'}(s'^\frown(x_1)), x_2)) = \tau'_{s'}(s'^\frown(x_1, \tau_s(s'^\frown(x_1)), x_2))$$

ja niin edelleen. Siis $s'^\frown(x' * \tau'_{s'}) = s^\frown(x * \tau_s)$ eli strategia $\tau'_{s'}$ on muuten sama kuin strategia τ_s, mutta strategiaa $\tau'_{s'}$ ei ole määritelty jonolle s. Koska $s'^\frown(x' * \tau'_{s'}) \notin A$ kaikilla jonoilla x', niin edellisen määritelmän nojalla $\tau'_{s'}$ on pelaajan 2 voittostrategia tilanteesta s'. Koska ensimmäinen siirto x_0 voi olla mikä tahansa pelaajan 1 siirto, niin kaikilla pelaajan 1 siirroilla x_0 on olemassa pelaajan 2 siirto y_0 siten, että pelaajalla 2 on voittostrategia tilanteesta s'.

Oletetaan sitten, että kaikilla pelaajan 1 siirroilla x_0 on olemassa pelaajan 2 siirto y_0 siten, että pelaajalla 2 on voittostrategia $\tau'_{s'}$ tilanteesta $s' = s^\frown(x_0, y_0)$. Konstruoidaan pelaajalle 2 strategia τ_s tilanteesta s. Asetetaan

$$\tau_s(s^\frown(x_0)) = y_0$$
$$\tau_s(s^\frown b) = \tau'_{s'}(s^\frown b)$$

kaikilla jonon s parittomilla jatkeilla b, joilla $|b| \geq 3$. Tällöin kaikilla jonoilla x pätee

$$s^\frown(x * \tau_s) \notin A.$$

Siis edellisen määritelmän nojalla τ_s on pelaajan 2 voittostrategia tilanteesta s. □

Voittostrategian lisäksi voidaan määritellä toinen erityinen strategia, puolustusstrategia. Puolustusstrategiaa noudattamalla pelaaja varmistaa, ettei vastapelaaja pääse tilanteeseen, josta vastapelaajalla on voittostrategia. Määritellään tämä muodollisesti ja todistetaan puolustusstrategiaan liittyvä tulos, jonka mukaan pelaajalla on puolustusstrategia pelissä silloin, kun toisella pelaajalla ei ole voittostrategiaa.

Määritelmä 2.27 (Puolustusstrategia)**.** (Vrt. [5, s. 20]). Pelaajan 1 strategia σ on puolustusstrategia, jos pelaajalla 2 ei ole voittostrategiaa pelissä $G(A; \sigma * y)$ millään äärellisellä jonolla y pelaajan 2 siirtoja. Pelaajan 2 strategia τ on puolustusstrategia, jos pelaajalla 1 ei ole voittostrategiaa pelissä $G(A; x * \tau)$ millään äärellisellä jonolla x pelaajan 1 siirtoja.

Lemma 2.28. *(Vrt. [5, s. 20]). Olkoon $G(A)$ kombinatorinen peli. Jos pelaajalla 1 ei ole voittostrategiaa pelissä $G(A)$, niin pelaajalla 2 on puolustusstrategia pelissä $G(A)$. Jos pelaajalla 2 ei ole voittostrategiaa pelissä $G(A)$, niin pelaajalla 1 on puolustusstrategia pelissä $G(A)$.*

Todistus. (Vrt. [5, s. 20-21]). Oletetaan, että pelaajalla 1 ei ole voittostrategiaa pelissä $G(A)$. Määritetään pelaajalle 2 rekursiivisesti puolustusstrategia τ.
1) Perusaskel. Lemman 2.26 nojalla kaikilla pelaajan 1 siirroilla x_0 on olemassa pelaajan 2 siirto y_0 siten, että pelaajalla 1 ei ole voittostrategiaa myöskään tilanteesta (x_0, y_0). Olkoon siis $\tau((x_0)) = y_0$.
2) Induktioaskel. Oletetaan, että on pelattu siirrot $s = (x_0, y_0, \ldots, x_{n-1}, y_{n-1})$. Oletetaan, että pelaajalla 1 ei ole voittostrategiaa tilanteesta s. Toisin sanoen pelaajalla 1 ei ole voittostrategiaa pelissä $G(A; s)$. Olkoon pelaajan 1 seuraava siirto x_n. Nyt lemman 2.26 nojalla kaikilla pelaajan 1 siirroilla x_n on olemassa pelaajan 2 siirto y_n siten, että pelaajalla 1 ei ole voittostrategiaa myöskään tilanteesta $s^\frown(x_n, y_n)$. Asetetaan siis $\tau(s^\frown(x_n)) = y_n$. Nyt jos pelaaja 2 noudattaa strategiaa τ pelissä $G(A)$, niin pelaajalla 1 ei ole voittostrategiaa mistään tilanteesta $x * \tau$ millään äärellisellä jonolla x pelaajan 1 siirtoja. Toisin sanoen pelaajalla 1 ei ole voittostrategiaa pelissä $G(A; x * \tau)$. Siis strategia τ on puolustusstrategia pelaajalle 2.

Oletetaan sitten, että pelaajalla 2 ei ole voittostrategiaa pelissä $G(A)$. Määritetään pelaajalle 1 rekursiivisesti puolustusstrategia σ.
1) Perusaskel. Lemman 2.26 nojalla on olemassa pelaajan 1 siirto x_0 siten, että millä tahansa pelaajan 2 siirrolla y_0 pelaajalla 2 ei ole voittostrategiaa tilanteesta (x_0, y_0). Olkoon siis $\sigma() = x_0$.
2) Induktioaskel. Oletetaan, että on pelattu siirrot $s = (x_0, y_0, \ldots, x_{n-1}, y_{n-1})$. Oletetaan, että pelaajalla 2 ei ole voittostrategiaa tilanteesta s. Toisin sanoen pelaajalla 2 ei ole voittostrategiaa pelissä $G(A; s)$. Tällöin lemman 2.26 nojalla on olemassa pelaajan 1 siirto x_n siten, että millä tahansa pelaajan 2 siirrolla y_n pelaajalla 2 ei ole voittostrategiaa myöskään tilanteesta $s^\frown(x_n, y_n)$.

Asetetaan siis $\sigma(s) = x_n$. Nyt jos pelaaja 1 noudattaa strategiaa σ pelissä $G(A)$, niin pelaajalla 2 ei ole voittostrategiaa mistään tilanteesta $\sigma * y$ millään äärellisellä jonolla y pelaajan 2 siirtoja. Toisin sanoen pelaajalla 2 ei ole voittostrategiaa pelissä $G(A; \sigma * y)$. Siis strategia σ on puolustusstrategia pelaajalle 1. $\square$

Esimerkki 2.29. Tarkastellaan peliä, jossa pelaaja 1 ja pelaaja 2 valitsevat vuorotellen yhden luonnollisen luvun. Pelaaja 1 voittaa, jos sama luku valitaan vähintään neljä kertaa peräkkäin, muuten pelaaja 2 voittaa. Tällöin

$$A = \{s \in \omega^\omega \mid s(n) = s(n+1) = s(n+2) = s(n+3) \text{ jollakin } n \in \omega\}.$$

Selvästi pelaajalla 1 ei ole voittostrategiaa pelissä $G(A)$. Siis lemman 2.28 nojalla pelaajalla 2 on puolustusstrategia. Olkoon tämä strategia valita aina yhden askeleen suurempi luku kuin pelaajan 1 edellinen valinta, jolloin esimerkiksi kierroksella i pelaajan 2 valinta on $y_i = x_i + 1$. Täten pelaaja 2 pelaa ikään kuin puolustaen rikkomalla aina mahdollisen neljän luvun ketjun, jotta pelaaja 1 ei voittaisi peliä. Pelaajan 2 strategia on selvästi myös voittostrategia, koska kaikilla pelin erillä, joissa pelaaja 2 noudattaa kyseistä strategiaa, pätee $s \notin A$.

3 Galen ja Stewartin lause

Tässä luvussa käsitellään kombinatoristen pelien tärkeä tulos, Galen ja Stewartin lause. Todistetaan kyseinen lause sekä avointen että suljettujen voittojoukkojen peleille. Esitetään myös esimerkki pelistä, johon tätä lausetta voi soveltaa. Lopuksi osoitetaan, että Galen ja Stewartin lause pätee myös äärellisille kombinatorisille peleille.

Lause 3.1 (Gale-Stewart)**.** *(Vrt. [5, s. 22]). Jos joukko $A \subseteq \omega^\omega$ on avoin, niin pelissä $G(A)$ joko pelaajalla 1 tai pelaajalla 2 on voittostrategia.*

Todistus. (Vrt. [5, s. 22]). Olkoon $A \subseteq \omega^\omega$ avoin joukko. Lauseen 2.24 nojalla molemmilla pelaajilla ei voi olla voittostrategiaa pelissä $G(A)$. Oletetaan, että pelaajalla 1 ei ole voittostrategiaa pelissä $G(A)$. Tällöin lemman 2.28 nojalla pelaajalla 2 on puolustusstrategia τ pelissä $G(A)$. Olkoon $s = (x_0, y_0, x_1, y_1, \dots)$ pelin erä, jossa pelaaja 2 noudattaa puolustusstrategiaa τ. Osoitetaan, että tällöin $s \notin A$. Oletetaan vastoin väitettä, että $s \in A$. Koska joukko A on avoin, on olemassa jonon s alkusegmentti $a = (x_0, y_0, x_1, y_1, \dots, x_n, y_n)$ siten, että kaikilla jonoilla b, joiden alkusegmentti on a, pätee $b \in A$. Tällöin pelaajalla 1 on triviaali voittostrategia tilanteesta a pelissä $G(A)$. Tämä on ristiriita puolustusstrategian määritelmän kanssa. Siis $s \notin A$, ja strategia τ on voittostrategia pelaajalle 2. □

Esimerkki 3.2. Tarkastellaan peliä, jossa pelaaja 1 ja pelaaja 2 valitsevat vuorotellen yhden luonnollisen luvun. Olkoon

$$A = \{s \in \omega^\omega \mid s(2n) = 0 \text{ jollakin } n \in \omega\}.$$

Oletetaan, että $s \in A$. Tällöin on siis olemassa $n' \in \omega$ siten, että $s(2n') = 0$. Olkoon jono a jonon s alkusegmentti siten, että $a = s \upharpoonright (2n' + 1)$, jolloin $a(2n') = 0$. Nyt kaikilla jonoilla $b \in \omega^\omega$, joilla on alkusegmentti a, pätee $b \in A$. Siis A on avoin joukko. Tällöin edellisen lauseen nojalla joukkoon A liittyvässä pelissä $G(A)$ joko pelaajalla 1 tai pelaajalla 2 on voittostrategia.

Lause 3.3. *(Väite vrt. [5, s. 22], todistus itse työstetty). Jos joukko $A \subseteq \omega^\omega$ on suljettu, niin pelissä $G(A)$ joko pelaajalla 1 tai pelaajalla 2 on voittostrategia.*

Todistus. Olkoon A suljettu joukko, eli $\omega^\omega \setminus A$ on avoin joukko. Lauseen 2.24 nojalla molemmilla pelaajilla ei voi olla voittostrategiaa pelissä $G(A)$. Oletetaan, että pelaajalla 2 ei ole voittostrategiaa pelissä $G(A)$. Tällöin lemman 2.28 nojalla pelaajalla 1 on puolustusstrategia σ. Olkoon $s = (x_0, y_0, x_1, y_1, \dots)$ pelin erä, jossa pelaaja 1 noudattaa puolustusstrategiaa σ. Osoitetaan, että $s \in A$. Oletetaan vastoin väitettä, että $s \notin A$ eli $s \in \omega^\omega \setminus A$. Tällöin, koska $\omega^\omega \setminus A$ on avoin, on olemassa jonon s alkusegmentti $a = (x_0, y_0, x_1, y_1, \dots, x_n, y_n)$ siten, että kaikilla jonoilla b, joiden alkusegmentti on a, pätee $b \in \omega^\omega \setminus A$. Siis kaikilla jonoilla b, joiden alkusegmentti on a, pätee $b \notin A$. Tällöin pelaajalla 2 on triviaali voittostrategia tilanteesta a pelissä $G(A)$. Tämä on ristiriita puolustusstrategian määritelmän kanssa. Siis $s \in A$, ja strategia σ on voittostrategia pelaajalle 1. □

Seuraus 3.4. *Galen ja Stewartin lause pätee myös äärellisille peleille. Siis joko pelaajalla 1 tai pelaajalla 2 on voittostrategia äärellisessä pelissä $G_n(A_n)$.*

Todistus. Tarkastellaan äärellistä peliä $G_n(A_n)$. Lauseen 2.22 todistuksen nojalla äärellinen peli voidaan laajentaa äärettömäksi peliksi $G(A)$ siten, että

$$s \in A \iff s' \in A_n,$$

missä pätee joko sääntö (2.1): $s' \in [m]^{2n}$ ja $s \restriction 2n = s'$ tai sääntö (2.2): $s(i) \notin [m]$ jollakin parittomalla $i \leq 2n$, jolla $s(j) \in [m]$ kaikilla $j < i$. Siis jos jono s' kuuluu joukkoon A_n, jono s' jatkettuna millä tahansa toisella jonolla kuuluu joukkoon A. Lisäksi, jos jonon s jokin alkio $s(i)$ on ensimmäinen laiton valinta äärellisessä pelissä jollakin pelaajan 2 siirrolla, niin jono s kuuluu joukkoon A. Osoitetaan, että äärettömäksi laajennetussa äärellisessä pelissä Galen ja Stewartin lauseen nojalla jommalla kummalla pelaajalla on voittostrategia.

Oletetaan, että $s \in A$. Tällöin joko sääntö (2.1) tai sääntö (2.2) on voimassa. Säännön (2.1) nojalla on olemassa jonon s alkusegmentti $s' = s \restriction 2n$ siten, että jono s' jatkettuna millä tahansa jonolla kuuluu joukkoon A. Säännön (2.2) nojalla on olemassa pariton indeksi $i \leq 2n$, jolla pätee $s(i) \notin [m]$ siten, että $s(j) \in [m]$ kaikilla $j < i$. Koska laittoman siirron $s(i)$ jälkeiset jonon alkiot eivät vaikuta enää pelin tulokseen, niin jonon s alku pelaajan 2 laittomaan siirtoon asti jatkettuna millä tahansa jonolla kuuluu joukkoon A. Siis on olemassa jonon s alkusegmentti $s'' = s \restriction (i + 1)$ siten, että jono s'' jatkettuna millä tahansa jonolla kuuluu joukkoon A. Koska molempien sääntöjen tapauksissa löydettiin alkusegmentit s' ja s'', joiden kaikki jatkeet kuuluvat joukkoon A, niin määritelmän 2.8 nojalla joukko A on avoin joukko. Tällöin Galen ja Stewartin lauseen nojalla joko pelaajalla 1 tai pelaajalla 2 on voittostrategia äärettömässä pelissä $G(A)$. Nyt lauseen 2.22 nojalla joko pelaajalla 1 tai pelaajalla 2 on voittostrategia myös äärellisessä pelissä $G_n(A_n)$. □

4 Chomp-pelin perusteet

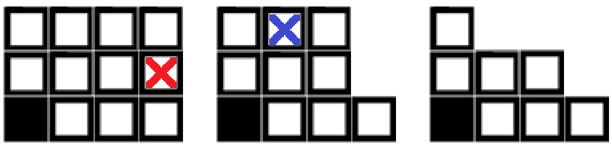
Chomp-peli on kombinatorinen peli, jonka eri tilanteiden voittostrategioiden tutkiminen on hyvin mielenkiintoista. Perusmuotoisen Chomp-pelin voittostrategioiden lisäksi tarkastellaan moniulotteiseksi ja äärettömäksi laajennettujen pelien voittostrategioita.

Tässä luvussa itse työstettyjä osuuksia ovat strategian varastamiseen liittyvän lemman käsittely sekä lopuksi esitettävien 4×3 ja 5×3 -kokoisten Chomp-pelien esimerkit. Kolmerivisen Chomp-pelin ensimmäisen tuloksen väite on peräisin lähteestä, mutta myös tämän todistus on käsitelty itse.

4.1 Perusmuoto

Esitellään Chomp-peli aluksi perusmuotoisena eli äärellisenä kaksiulotteisena pelialueena. Lisäksi käydään läpi, miten Chomp-peli vastaa luvussa 2 esitettyä kombinatorista peliä.

Peli Chomp alkaa suklaalevystä, jonka vasemmanpuoleisin, alin pala on myrkyllinen. Pelissä on kaksi pelaajaa. Jokaisella vuorolla pelaajan on valittava yksi jäljellä olevista paloista, jolloin levystä poistetaan kaikki ne palat, jotka ovat poistetun palan oikealla puolella tai yläpuolella. Pelaaja, joka valitsee myrkyllisen palan, häviää. Kuvassa 4.1 on esitetty yksinkertainen Chomp-pelialue ja esimerkki molempien pelaajien ensimmäisistä siirroista.



Kuva 4.1: Esimerkki perusmuotoisesta Chomp-pelistä. Mustalla merkitty pala on myrkyllinen, punainen rasti kuvaa pelaajan 1 siirtoa ja sininen rasti pelaajan 2 siirtoa.

Määritelmä 4.1 (Chomp)**.** (Vrt. [9, s. 168]). Olkoot $p, q \in \omega$. Tällöin pelialue on osittain järjestetty joukko $\{(i, j) \mid 0 \leq i \leq p, 0 \leq j \leq q\}$, missä $(i', j') \leq (i, j)$, kun $i' \leq i$ ja $j' \leq j$. Tällöin joukossa on pienin alkio $(0, 0)$ ja suurin alkio (p, q). Olkoon pienin alkio $(0, 0)$ myrkyllinen pala. Jos pelaajan siirto on alkion (i_0, j_0) valinta, niin pelialueesta poistetaan kaikki ne alkiot (i', j'), joille pätee $(i', j') \geq (i_0, j_0)$. Pelaajat valitsevat poistettavan alkion vuorotellen jäljellä olevasta pelialueesta. Pelaaja, joka poistaa alkion $(0, 0)$ tai tekee ensimmäisen laittoman siirron, eli yrittää poistaa alkion jäljellä olevan pelialueen ulkopuolelta, häviää pelin.

Huomautus. Pelin pituus on vähintään 1 ja korkeintaan $(p + 1) \cdot (q + 1)$ eli pelialueen alkioiden lukumäärä. Pelin pituus on 1, jos pelaaja 1 valitsee alkion $(0, 0)$ poistettavaksi heti ensimmäisellä vuorollaan. Myös pituus $(p + 1) \cdot (q + 1)$ on mahdollinen, jos molemmat pelaajat poistavat jokaisella kierroksella ainoastaan yhden pelialueeseen kuuluvan alkion. Jatkossa käsitellään myös pelialueita, joissa ei ole suurinta alkiota, jolloin pelin maksimipituutta ei voida määrittää.

Chomp voidaan tulkita luvussa 2 esitetyksi kombinatoriseksi peliksi. Pelissä on kaksi pelaajaa, jotka pelaavat vuorotellen ja vain toinen pelaaja voi voittaa. Jokainen pelaajan siirto eli poistettavan alkion valinta voidaan ajatella jonkin luonnollisen luvun valinnaksi. Merkitään mahdollisten valintojen joukkoa

$$[m] = \{0, 1, \ldots, (p + 1) \cdot (q + 1) - 1\},$$

missä $m = (p+1)\cdot(q+1) \in \omega$. Tällöin on olemassa bijektio

$$f : [m] \to \{(i,j) \mid 0 \le i \le p, 0 \le j \le q\},$$

joka liittää pelaajan siirtoa vastaavan luonnollisen luvun kyseiseen pelialueen alkioon. Oletetaan jatkossa, että alkion $(0,0)$ poistoa vastaa luonnollinen luku 0. Tällöin $f(0) = (0,0)$. Olkoon lisäksi pelattavien kierrosten määrä

$$n = \left\lceil \frac{(p+1)\cdot(q+1)}{2} \right\rceil.$$

Huomataan, että Chomp-pelin päättyessä ennen kuin on pelattu n kokonaista kierrosta eli ennen kuin pelin pituus on $2n$, lauseen 2.22 jälkeisen huomautuksen nojalla peli voidaan jatkaa n kierroksen pituiseksi niin sanotuilla tyhjillä siirroilla ilman, että pelin tulos muuttuu. Lisäksi huomioidaan voittojoukossa A, että kaikki siirrot eivät ole sallittuja. Pelitilanteen sallittujen siirtojen joukkoon vaikuttaa pelitilanteeseen asti pelattujen siirtojen jono, koska jokaisella vuorolla pelaajan on poistettava alkioita pelialueesta, jolloin sallitut siirrot muuttuvat. Merkitään jokaisella pelaajan vuorolla i' sallittujen siirtojen joukkoa $B_{i'}(s)$, missä $i' \in \{0,\dots,2n\}$ ja s on pelattujen siirtojen jono. Määritellään sallittujen siirtojen joukot rekursiivisesti siten, että

$$\begin{aligned}
B_0(s) &= [m] \\
B_1(s) &= B_0(s) \setminus f^{-1}\big(C_0\big) \\
&\vdots \\
B_{2n}(s) &= B_{2n-1}(s) \setminus f^{-1}\big(C_{2n-1}\big),
\end{aligned}$$

missä

$$C_{i'} = \{(i,j) \ge f(s(i')) \mid 0 \le i \le p, 0 \le j \le q\}, \quad \text{kun } 0 \le i' < 2n.$$

Joukko $C_{i'}$ sisältää siis ne alkiot, jotka poistuvat pelialueesta vuoron i' siirrolla. Funktio f^{-1} muuttaa nämä alkiot vastaaviksi pelin siirroiksi. Uusi sallittujen siirtojen joukko saadaan poistamalla edellisten sallittujen siirtojen joukosta näitä joukon $C_{i'}$ alkioita vastaavat siirrot. Olkoon nyt joukko

$$\begin{aligned}
A = \big\{ s \in \omega^{2n} \,\big|\, & s(i') = 0 \text{ jollakin parittomalla } i' \in \{0,\dots,2n\} \text{ tai} \\
& s(i') \notin B_{i'}(s) \text{ jollakin parittomalla } i' \in \{0,\dots,2n\} \\
& \text{siten, että kaikilla } j' < i' \text{ pätee } s(j') \ne 0 \text{ ja } s(j') \in B_{j'}(s) \big\},
\end{aligned}$$

missä s on pelin erä. Tällöin joukkoon A liittyvä kombinatorinen peli $G_n(A)$ on Chomp-peli, sillä jos pelaaja 1 valitsee alkion $(0,0)$ jollakin pelin kierroksella, niin $s \notin A$ eli pelaaja 2 voittaa. Jos taas pelaaja 2 valitsee alkion $(0,0)$ jollakin pelin kierroksella, niin $s \in A$ eli pelaaja 1 voittaa. Lisäksi, jos pelaaja 1 valitsee jonkin alkion pelialueen ulkopuolelta, eli vuorolla i' joukosta $\omega \setminus B_{i'}(s)$, ensimmäisenä pelaajana, niin $s \notin A$ ja pelaaja 2 voittaa. Jos pelaaja 2 valitsee jonkin alkion pelialueen ulkopuolelta ensimmäisenä pelaajana, niin $s \in A$ ja pelaaja 1 voittaa.

Huomautus. Jos kahdessa pelissä on pelattu sellaiset siirrot, että sallittujen siirtojen joukko on sama, on pelien tilanne tällöin sama.

4.2 Voittostrategia

Yksi Chomp-pelin erikoisuus on, että pelin tilanteesta on mahdollista tietää kummalla pelaajalla on voittostrategia, vaikka itse voittostrategiaa ei tunnettaisikaan. Tähän liittyy strategian varastamisen käsite. Seuraavan esimerkin jälkeen esitellään siis strategian varastaminen ja käytetään sitä hyödyksi, kun osoitetaan, että vähintään kaksi alkiota sisältävässä perusmuotoisessa Chomp-pelissä pelaajalla 1 on aina voittostrategia.

Esimerkki 4.2. Olkoot $p, q \in \omega$ siten, että $p = 0$ ja $q = 0$. Jos

$$\{(i, j) \mid 0 \leq i \leq p, 0 \leq j \leq q\}$$

on Chomp-pelin pelialue, niin pelaajalla 2 on triviaali voittostrategia. Pelaajalla 1 on ainoastaan yksi mahdollinen sallittu siirto, nimittäin poistaa alkio $(0, 0)$. Tällöin pelaaja 1 häviää pelin aina ensimmäisen siirtonsa jälkeen.

Lemma 4.3 (Strategian varastaminen)**.** *Tarkastellaan kahta Chomp-pelin tilannetta, tilannetta 1 ja tilannetta 2, joissa sallittujen siirtojen joukot ovat samat. Tällöin vuorossa olevalla pelaajalla on voittostrategia tilanteesta 1 jos ja vain jos vuorossa olevalla pelaajalla on voittostrategia tilanteesta 2.*

Todistus. Oletetaan, että pelaajalla 1 on voittostrategia σ pelissä $G(A; s_1)$, missä s_1 on pelatut siirrot. Tarkastellaan toista pelierää, jossa on pelattu siirrot s_2 ja sallittujen siirtojen joukko on sama. Oletetaan, että toisessa tilanteessa on pelaajan 2 vuoro. Määritellään pelaajalle 2 strategia τ pelissä $G(A; s_2)$ asettamalla

$$\begin{aligned} \tau(s_2) &= y_0 = \sigma(s_1) \\ \tau(s_2^\frown(y_0, x_1)) &= y_1 = \sigma(s_1^\frown(y_0, x_1)) \\ &\vdots \\ \tau(s_2^\frown(y_0, x_1, \ldots, y_{i-1}, x_i)) &= y_i = \sigma(s_1^\frown(y_0, x_1, \ldots, y_{i-1}, x_i)), \end{aligned}$$

missä x_i ovat pelaajan 1 siirtoja ja y_i ovat pelaajan 2 siirtoja. Koska σ on voittostrategia, niin pelin erä $s = s_1^\frown(\sigma * y) \in A$ kaikilla jonoilla y pelaajan 2 siirtoja. Tällöin pelaajan 1 noudattaessa strategiaa σ kyseisen pelaajan vuorolla ei tule valittua alkiota $(0, 0)$ tai alkiota pelialueen ulkopuolelta. Siis $s(i) = 0$ tai $s(i) \notin B_i(s)$ jollakin parittomalla i siten, että kaikilla $j < i$ pätee $s(j) \neq 0$ ja $s(j) \in B_i(s)$, missä joukko $B_i(s)$ on sallittujen siirtojen joukko. Koska strategia τ soveltaa strategiaa σ eri pelaajan vuorolle, pelaajan 2 noudattaessa strategiaa τ tämän vuorolla ei tule valittua alkiota $(0, 0)$ tai alkiota pelialueen ulkopuolelta. Siis $s(i) = 0$ tai $s(i) \notin B_i(s)$ jollakin parillisella i siten, että kaikilla $j < i$ pätee $s(j) \neq 0$ ja $s(j) \in B_i(s)$. Tällöin siis pätee $s_2^\frown(x * \tau) \notin A$ kaikilla pelaajan 1 siirroilla x eli pelaajalla 2 on toisessa tilanteessa voittostrategia τ.

Oletetaan sitten, että toisessa tilanteessa on pelaajan 1 vuoro. Tällöin pelaaja 1 voi vastaavasti noudattaa voittostrategiaa σ kyseisestä tilanteesta eteenpäin. Yllä oleva pätee selvästi myös silloin, kun tilanteet vaihdetaan päikseen. Siis vuorossa olevalla pelaajalla on voittostrategia tilanteesta 1 jos ja vain jos vuorossa olevalla pelaajalla on voittostrategia tilanteesta 2. □

Lause 4.4. *(Vrt. [9, s. 169]). Olkoot $p, q \in \omega$ siten, että $p > 0$ tai $q > 0$. Jos*

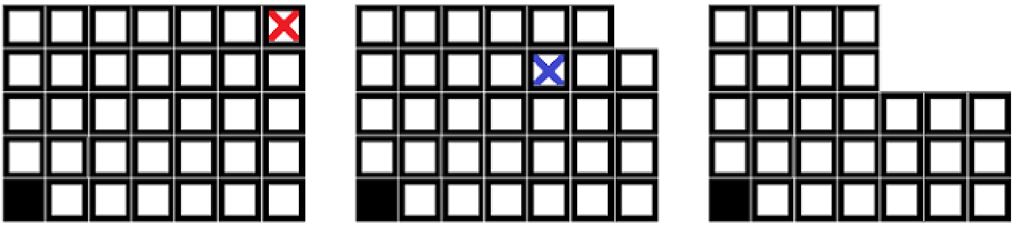
$$\{(i, j) \mid 0 \leq i \leq p, 0 \leq j \leq q\}$$

on Chomp-pelin pelialue, niin pelaajalla 1 on voittostrategia.

Todistus. (Vrt. [9, s. 169]). Oletetaan vastoin väitettä, että pelaajalla 1 ei ole voittostrategiaa Chomp-pelissä. Tällöin seurauksen 3.4 nojalla pelaajalla 2 on voittostrategia. Olkoon τ pelaajan 2 voittostrategia. Olkoon nyt pelaajan 1 ensimmäinen siirto alkion (p, q) poistaminen. Merkitään tätä siirtoa x_0. Nyt pelaajan 2 siirto $y_0 = \tau((x_0))$ on voittostrategian mukainen. Mutta tällöin siirto $y_0 = (i_0, j_0)$ on sellainen, että $(i_0, j_0) \leq (p, q)$, koska alkio (p, q) on pelialueen suurin alkio. Eli pelaajan 2 siirto poistaisi myös suurimman alkion (p, q). Siis pelaaja 1 olisi voinut tehdä kyseisen siirron omalla ensimmäisellä vuorollaan ja sallittujen siirtojen joukko $B_0((x_0))$ olisi sama kuin sallittujen siirtojen joukko $B_1((x_0, y_0))$ nyt pelaajan 2 siirron jälkeen, mikä nähdään myös kuvasta 4.2. Siis pelaaja 1 voi varastaa pelaajan 2 voittostrategian lemman 4.3 nojalla. Voidaan siis määritellä pelaajalle 1 voittostrategia σ siten, että

$$\sigma(()) = \tau((x_0))$$
$$\vdots$$
$$\sigma((x_0, y_0, \ldots x_n, y_n)) = \tau((x_0, y_0, \ldots, y_{n-1}, x_n)).$$

Tämä on ristiriita oletuksen kanssa, joten pelaajalla 1 on voittostrategia Chomp-pelissä. □



Kuva 4.2: Strategian varastaminen onnistuu, koska pelaajan 1 on mahdollista päästä ensimmäisellä vuorollaan suoraan kolmannen kuvan tilanteeseen.

Huomautus. (Vrt. [7, s. 38]). Edellisen todistuksen nojalla tiedetään, että kaksiulotteisessa yleisessä $m \times n$ -kokoisessa Chomp-pelissä pelaajalla 1 on voittostrategia, mutta ei ole tiedossa mitä siirtoja tähän yleisen tapauksen voittostrategiaan kuuluu. Jos pelaajan 1 ensimmäinen siirto on suurimman alkion valinta, mutta se ei ole voittostrategian mukainen siirto, niin pelaajan 2 ensimmäinen siirto paljastaa voittostrategian ensimmäisen siirron, jos pelaaja 2 tuntee voittostrategian ja noudattaa sitä.

Huomautus. (Vrt. [3, s. 6]). Ei tunneta tehokasta algoritmia, jolla pystyttäisiin eksplisiittisesti ratkaisemaan, mikä pelaajan 1 voittostrategia on Chomp-pelissä. Algoritmit, joilla voittostrategiaa yritetään ratkaista, perustuvat siihen, että käydään läpi kaikki pelin mahdolliset siirrot. Näin ollen voittostrategian löytäminen Chomp-pelille on monissa tapauksissa hyvin vaikeaa.

4.3 Esimerkkejä

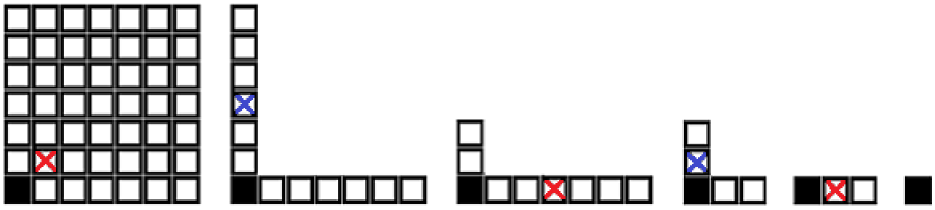
On olemassa tunnettuja tilanteita, joissa on pystytty määräämään pelaajan 1 voittostrategia. Seuraavaksi esitetään joitakin tällaisia tilanteita, ensimmäisenä neliönmuotoinen ja sitten kaksirivinen Chomp-pelin pelialue.

Esimerkki 4.5 (Neliönmuotoinen Chomp-pelialue)**.** (Vrt. [9, s. 170]). Olkoon $p \in \omega$. Olkoon nyt

$$\{(i, j) \mid 0 \leq i \leq p, 0 \leq j \leq p\}$$

Chomp-pelin pelialue. Olkoon pelaajan 1 ensimmäinen siirto alkion $(1, 1)$ poisto. Tällöin pelialueeksi jää symmetrinen L-muotoinen alue. Jos pelaajan 2 siirto on poistaa alkio $(0, 0)$, $(0, 1)$ tai $(1, 0)$, on pelaajalla 1 triviaali voittostrategia. Jos pelaajan 2 siirto on alkion $(0, i_0)$ poisto jollakin

$0 < i_0 \le p$, niin pelaajan 1 seuraava siirto on peilaava siirto eli alkion $(i_0, 0)$ poisto. Vastaavasti, jos pelaajan 2 siirto on alkion $(i_0, 0)$ poisto, niin pelaajan 1 seuraava siirto on alkion $(0, i_0)$ poisto. Tällä tavoin pelaten lopulta jäljelle jää ainoastaan alkio $(0, 0)$ pelaajan 2 valittavaksi, kuten nähdään myös kuvasta 4.3. Siis kuvattu strategia on pelaajan 1 voittostrategia.



Kuva 4.3: Neliönmuotoisen Chomp-pelin kulku lyhyesti, kun pelaaja 1 noudattaa esimerkissä 4.5 kuvattua strategiaa.

Esimerkki 4.6 (Kaksirivinen Chomp-pelialue)**.** (Vrt. [9, s. 170-171]). Olkoon $p \in \omega$. Olkoon nyt

$$\{(i, j) \mid 0 \le i \le p, 0 \le j \le 1\}$$

Chomp-pelin pelialue. Tällöin pelaajan 1 tavoite on aina omalla siirrollaan päästä sellaiseen tilanteeseen, että ylemmässä rivissä on yksi alkio vähemmän kuin alemmassa rivissä. Osoitetaan, että tämä on voittostrategia pelaajalle 1.

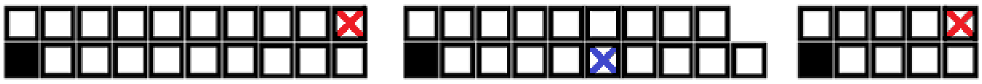
Jos $p = 0$, niin pelialueessa on kaksi alkiota, $(0, 0)$ ja $(0, 1)$. Pelaajan 1 siirto on tietenkin alkion $(0, 1)$ poisto, jolloin pelaajan 2 valittavaksi jää vain alkio $(0, 0)$. Jos $p = 1$, niin pelialue on neliönmuotoinen, joten pelaaja 1 voi noudattaa edellisen esimerkin strategiaa. Tarkastellaan siis tilannetta $p > 1$.

Olkoon pelaajan 1 ensimmäinen siirto alkion $(p, 1)$ poisto. Nyt jos pelaajan 2 siirto on alkion $(i_0, 0)$ poisto jollakin $i_0 \le p$, niin pelitilanne

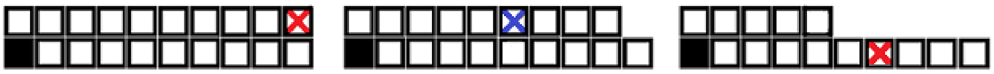
$$\{(i, j) \mid 0 \le i \le i_0, 0 \le j \le 1\}$$

on kuten alkutilanne ja pelaaja 1 voi edelleen valita alkion $(i_0, 1)$ poistettavaksi, kuten kuvassa 4.4. Jos taas pelaajan 2 siirto on alkion $(i_0, 1)$ jollakin $i_0 < p$, niin pelaaja 1 voi valita poistettavaksi alkion $(i_0 + 1, 0)$, jolloin pelialue saadaan vastaavaksi kuin pelaajan 1 ensimmäisen siirron jälkeen. Tämä tilanne on esitetty kuvassa 4.5.

Tällä tavoin pelaten lopulta päädytään tilanteeseen $\{(0, 0), (0, 1), (1, 0)\}$, jonkin pelaajan 1 vuoron jälkeen, jolloin edellisen esimerkin nojalla pelaaja 1 voittaa. Siis yllä kuvattu strategia on voittostrategia pelaajalle 1.



Kuva 4.4: Kaksirivisessä Chomp-pelissä päädytään alkutilannetta vastaavaan tilanteeseen, jos pelaaja 2 valitsee poistettavan alkion alemmalta riviltä.



Kuva 4.5: Jos pelaaja 2 valitsee poistettavan alkion ylemmältä riviltä kaksirivisessä Chomp-pelissä, niin pelaaja 1 voi poistaa alkion alemmalta riviltä siten, että päädytään vastaavaan tilanteeseen kuin pelaajan 1 ensimmäisen siirron jälkeen.

Koska jo kolmerivinen Chomp on paljon monimutkaisempi tapaus, käsitellään se omana lukunaan.

4.4 Kolmerivinen Chomp

Kolmerivisen perusversion, eli suorakaiteen mallisen Chomp-pelialueen strategioiden kannalta on hyödyllistä tarkastella myös keskeneräisiä tilanteita. Tarkastellaan siis ensin Chomp-pelin tilanteita, joissa pelialue koostuu kolmesta mahdollisesti eripituisesta rivistä.

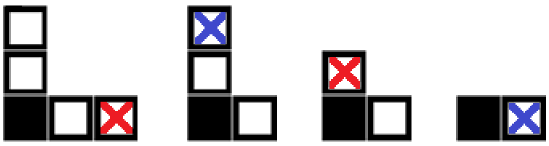
Määritelmä 4.7. (Vrt. [9, s. 173]). Merkitään kolmerivistä Chomp-pelin tilannetta $[a, b, c]$, missä a, b ja c ovat rivien pituudet alhaalta ylös. Tällöin Chomp-pelin pelialue on

$$\{(i_0, 0) \mid 0 \leq i_0 < a\} \cup \{(i_1, 1) \mid 0 \leq i_1 < b\} \cup \{(i_2, 2) \mid 0 \leq i_2 < c\}.$$

Tarkastellaan ensin tapauksia, joissa $c = 1$.

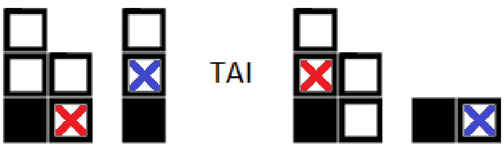
Lemma 4.8. *(Väite vrt. [9, s. 173], todistus itse työstetty). Pelin tilanteissa* $[3, 1, 1]$ *ja* $[2, 2, 1]$ *pelaajalla 2 on voittostrategia.*

Todistus. Tilanteessa $[3, 1, 1]$ pelaajan 2 voittostrategia on esimerkissä 4.5 kuvattu symmetrinen alkion poisto. Tilanne on myös esitetty kuvassa 4.6.



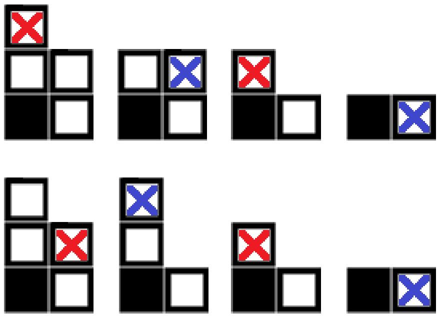
Kuva 4.6: Pelaajan 2 voittostrategia Chomp-pelin tilanteesta $[3, 1, 1]$.

Tilanteessa $[2, 2, 1]$ pelaajan 1 siirto on poistaa jokin alkio $(0, 0), (1, 0), (0, 1), (1, 1)$ tai $(0, 2)$. Alkion $(0, 0)$ poisto johtaa suoraan pelaajan 1 häviöön. Jos pelaaja 1 poistaa alkion $(0, 1)$ tai $(1, 0)$, niin pelaaja 2 voi seuraavalla siirrolla vastaavasti poistaa joko alkion $(1, 0)$ tai $(0, 1)$. Tällöin jäljelle jää vain alkio $(0, 0)$ eli pelaaja 1 häviää pelin, kuten nähdään kuvasta 4.7.



Kuva 4.7: Pelaajan 2 voittostrategia Chomp-pelin tilanteesta $[2, 2, 1]$, kun pelaajan 1 siirto on alkion $(0, 1)$ tai $(1, 0)$ poisto.

Jos pelaaja 1 poistaa alkion $(0, 2)$ tai $(1, 1)$, niin pelaaja 2 voi seuraavalla siirrolla vastaavasti poistaa joko alkion $(1, 1)$ tai $(0, 2)$. Tällöin molemmissa tapauksissa jäljelle jää tilanne $[2, 1, 0]$, johon pelaaja 2 voi käyttää strategiana esimerkissä 4.5 kuvattua symmetristä alkion poistoa. Itse asiassa pelaaja 2 voi kummankin pelaajan 1 siirron jälkeen noudattaa esimerkissä 4.6 kuvattua kaksirivisen Chomp-pelin strategiaa sovellettuna kahteen sarakkeeseen. Siis pelaaja 1 häviää pelin, mikä nähdään myös kuvasta 4.8. □

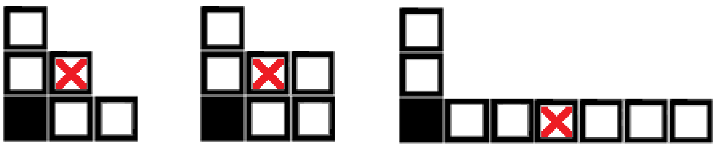


Kuva 4.8: Pelaajan 2 voittostrategia Chomp-pelin tilanteesta $[2, 2, 1]$, kun pelaajan 1 siirto on alkion $(0, 2)$ tai $(1, 1)$ poisto.

Lemma 4.9. *(Vrt. [9, s. 173-174]). Pelaajalla 1 on voittostrategia pelin tilanteista*

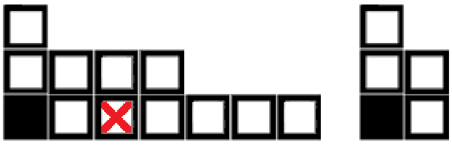
$$\begin{aligned}
&[3, 2, 1],\\
&[3, 3, 1],\\
&[4 + a, 1, 1], \quad a \geq 0 \quad \text{ja}\\
&[2 + a, 2 + b, 1], \quad a \geq b \geq 0, \quad a > 0.
\end{aligned}$$

Todistus. (Vrt. [9, s. 174]). Tilanteista $[3, 2, 1]$ ja $[3, 3, 1]$ saadaan tilanne $[3, 1, 1]$ poistamalla alkio $(1, 1)$. Lisäksi tilanteesta $[4 + a, 1, 1]$, $a \geq 0$ saadaan tilanne $[3, 1, 1]$ poistamalla alkio $(3, 0)$. Nämä siirrot on esitetty kuvassa 4.9. Edellisen lemman nojalla tilanteessa $[3, 1, 1]$ toisena pelaavalla on voittostrategia eli tässä tapauksessa pelaajalla 1 on voittostrategia. Nyt lemman 2.26 nojalla pelaajalla 1 on voittostrategia myös tilanteista $[3, 2, 1], [3, 3, 1]$ ja $[4 + a, 1, 1]$.



Kuva 4.9: Pelaajan 1 voittostrategian ensimmäiset siirrot Chomp-pelin tilanteista $[3, 2, 1], [3, 3, 1]$ ja $[4 + a, 1, 1]$, $a \geq 0$.

Tilanteesta $[2 + a, 2 + b, 1]$, $a \geq b \geq 0$, $a > 0$ saadaan tilanne $[2, 2, 1]$ poistamalla alkio $(2, 0)$, kuten nähdään kuvasta 4.10. Edellisen lemman nojalla tilanteessa $[2, 2, 1]$ toisena pelaavalla on voittostrategia eli tässä tapauksessa pelaajalla 1 on voittostrategia. Nyt lemman 2.26 nojalla pelaajalla 1 on voittostrategia myös tilanteesta $[2 + a, 2 + b, 1]$. □



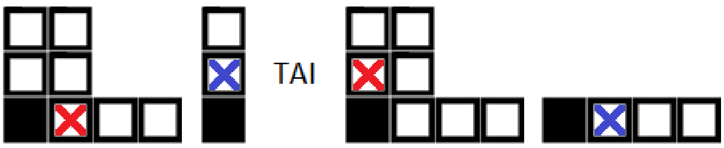
Kuva 4.10: Pelaajan 1 voittostrategian ensimmäinen siirto Chomp-pelin tilanteesta $[2+a, 2+b, 1]$, missä $a \geq b \geq 0$, $a > 0$.

Tarkastellaan seuraavaksi tapausta $c = 2$.

Lause 4.10. *(Vrt. [9, s. 174]). Chomp-pelin tilanteessa* $[a, b, 2]$ *pelaajalla 2 on voittostrategia, jos* $a - b = 2$*.*

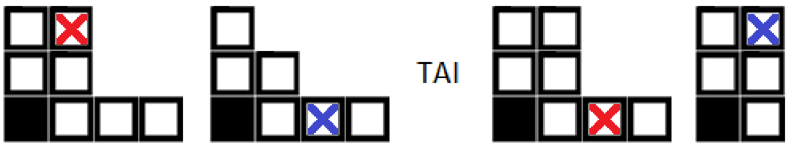
Todistus. (Vrt. [1, s. 633]). Oletetaan, että $a - b = 2$. Todistetaan induktiolla, että pelaajalla 2 on voittostrategia tilanteesta $[a, b, 2]$.

1) Perusaskel. Tarkastellaan tilannetta $[4, 2, 2]$. Jos pelaajan 1 siirto on alkion $(0, 1)$ tai $(1, 0)$ poisto, niin pelaajan 2 siirto on alkion $(1, 0)$ tai $(0, 1)$ poisto, jolloin selvästi pelaajalla 2 on voittostrategia, kuten nähdään kuvasta 4.11.



Kuva 4.11: Pelaajan 2 voittostrategiat Chomp-pelin tilanteesta $[4, 2, 2]$, kun pelaajan 1 siirto on $(0, 1)$ tai $(1, 0)$.

Jos pelaajan 1 siirto on alkion $(1, 2)$ tai $(2, 0)$ poisto, niin pelaaja 2 voi poistaa vastaavasti alkion $(2, 0)$ tai $(1, 2)$, jolloin päästään tilanteeseen $[2, 2, 1]$. Nämä siirrot on esitetty kuvassa 4.12. Lemman 4.8 nojalla pelaajalla 2 on tilanteessa voittostrategia.

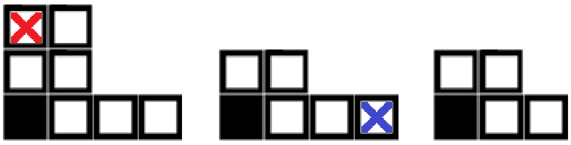


Kuva 4.12: Pelaajan 2 voittostrategiat Chomp-pelin tilanteesta $[4, 2, 2]$, kun pelaajan 1 siirto on $(1, 2)$ tai $(2, 0)$.

Jos pelaajan 1 siirto on alkion $(1, 1)$ tai $(3, 0)$ poisto, niin pelaaja 2 voi poistaa vastaavasti alkion $(3, 0)$ tai $(1, 1)$, jolloin päästään tilanteeseen $[3, 1, 1]$, mikä nähdään myös kuvasta 4.13. Lemman 4.8 nojalla pelaajalla 2 on tilanteessa voittostrategia.

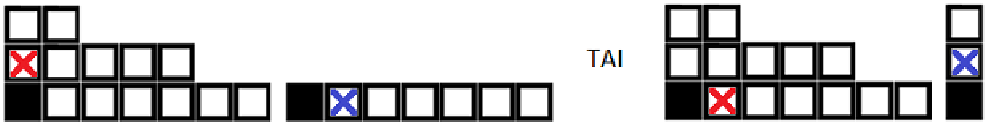
Kuva 4.13: Pelaajan 2 voittostrategiat Chomp-pelin tilanteesta $[4, 2, 2]$, kun pelaajan 1 siirto on $(1, 1)$ tai $(3, 0)$.

Jos pelaajan 1 siirto on alkion $(0, 2)$ poisto, niin poistamalla alkion $(3, 0)$ saadaan tilanne $[3, 2, 0]$, kuten kuvassa 4.14, jossa esimerkin 4.6 nojalla pelaajalla 2 on voittostrategia. Tällöin lemman 2.26 nojalla pelaajalla 2 on voittostrategia tilanteesta $[4, 2, 2]$.



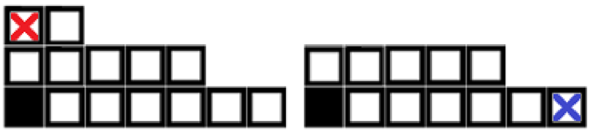
Kuva 4.14: Pelaajan 2 voittostrategian ensimmäinen siirto Chomp-pelin tilanteesta $[4, 2, 2]$, kun pelaajan 1 siirto on $(0, 2)$.

2) Induktioaskel. Tehdään induktio-oletus, että pelaajalla 2 on voittostrategia kaikissa tilanteissa $[k, k-2, 2]$, missä $4 \leq k \leq n$. Todistetaan nyt induktioväite, että tilanteessa $[n+1, n-1, 2]$ pelaajalla 2 on voittostrategia. Pelaajalla 2 on triviaalisti voittostrategia, jos pelaaja 1 poistaa alkion $(0, 1)$ tai alkion $(1, 0)$. Nämä triviaalit voittostrategiat on esitetty kuvassa 4.15.



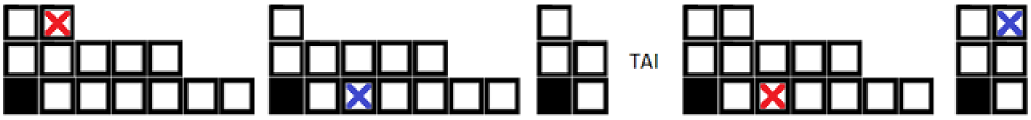
Kuva 4.15: Tilanteet, joissa pelaajalla 2 on triviaali voittostrategia.

Jos pelaajan 1 siirto on poistaa alkio $(0, 2)$, kuten kuvassa 4.16, niin esimerkin 4.6 nojalla pelaajalla 2 on voittostrategia kaksirivisestä tilanteesta $[n + 1, n - 1, 0]$.



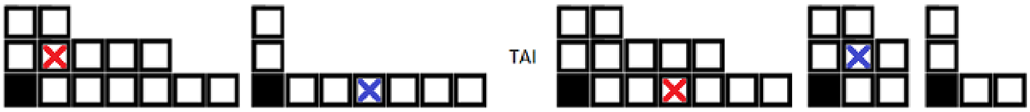
Kuva 4.16: Jos pelaajan 1 siirto on poistaa alkio $(0, 2)$, niin saadaan kaksirivinen pelitilanne.

Jos pelaajan 1 siirto on alkion $(1, 2)$ tai $(2, 0)$ poisto, niin pelaaja 2 voi poistaa vastaavasti alkion $(2, 0)$ tai $(1, 2)$, jolloin päästään tilanteeseen $[2, 2, 1]$. Nämä siirrot on esitetty kuvassa 4.17. Lemman 4.8 nojalla pelaajalla 2 on tilanteessa voittostrategia.



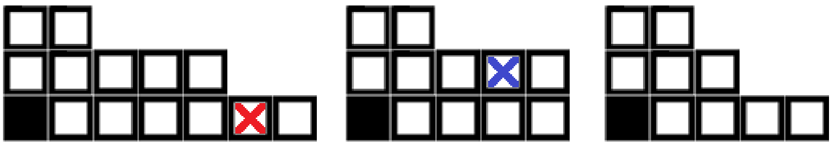
Kuva 4.17: Pelaajien siirrot, joilla päädytään tilanteeseen $[2, 2, 1]$.

Jos pelaajan 1 siirto on alkion $(1, 1)$ tai $(3, 0)$ poisto, niin pelaaja 2 voi poistaa vastaavasti alkion $(3, 0)$ tai $(1, 1)$, jolloin päästään tilanteeseen $[3, 1, 1]$. Nämä siirrot on esitetty kuvassa 4.18. Lemman 4.8 nojalla pelaajalla 2 on tilanteessa voittostrategia.



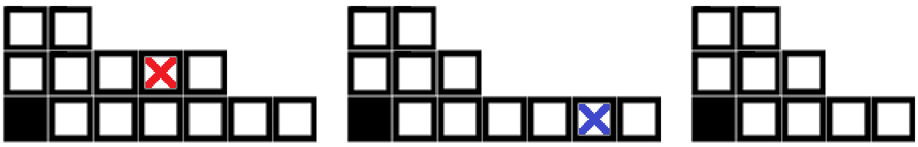
Kuva 4.18: Pelaajien siirrot, joilla päädytään tilanteeseen $[3, 1, 1]$.

Nyt, jos pelaajan 1 siirto on poistaa alkio $(0, j)$, missä $4 \leq j \leq n+1$, niin pelaajan 2 poistaessa alkion $(1, j-2)$ päädytään tilanteeseen $[j-1, j-3, 2]$, jossa induktio-oletuksen nojalla pelaajalla 2 on voittostrategia. Tämä nähdään myös kuvasta 4.19.



Kuva 4.19: Pelaajan 1 siirto on poistaa alkio $(0, j)$, missä $4 \leq j \leq n + 1$, jolloin pelaajan 2 siirrolla päädytään induktio-oletuksen tilanteeseen.

Jos pelaajan 1 siirto on poistaa alkio $(1, j)$, missä $2 \leq j \leq n - 1$, niin pelaajan 2 poistaessa alkion $(0, j+2)$ päädytään tilanteeseen $[j+1, j-1, 2]$, jossa induktio-oletuksen nojalla pelaajalla 2 on voittostrategia. Tämä nähdään myös kuvasta 4.20.



Kuva 4.20: Pelaajan 1 siirto on poistaa alkio $(1, j)$, missä $2 \leq j \leq n - 1$, jolloin pelaajan 2 siirrolla päädytään induktio-oletuksen tilanteeseen.

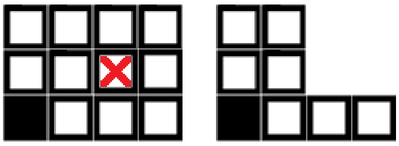
Nyt kaikki mahdolliset tapaukset on käyty läpi, joten induktioperiaatteen nojalla pelaajalla 2 on voittostrategia tilanteesta $[n + 1, n - 1, 2]$. □

Tarkastellaan seuraavaksi kahta perusmuotoista, 4×3 -kokoista ja 5×3 -kokoista, Chomp-pelialuetta.

Esimerkki 4.11. Olkoon joukko

$$\{(i, j) \mid 0 \leq i \leq 3, 0 \leq j \leq 2\}$$

Chomp-pelin pelialue. Olkoon pelaajan 1 ensimmäinen siirto poistaa alkio $(2,1)$. Tällöin päädytään tilanteeseen $[4,2,2]$, jossa lauseen 4.10 nojalla toisena pelaavalla on voittostrategia, eli tässä tapauksessa pelaajalla 1 on voittostrategia. Tämä on esitetty myös kuvassa 4.21.



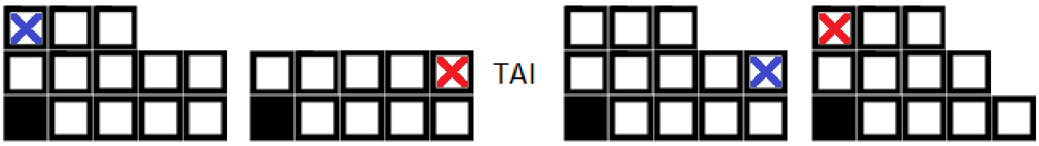
Kuva 4.21: Jos pelaajan 1 siirto on poistaa alkio $(2,1)$, päädytään tilanteeseen $[4,2,2]$.

Seuraavassa esimerkissä tarkastellaan pelialuetta, jonka koko on 5×3. Esimerkissä käydään läpi kaikki mahdolliset pelaajan 2 siirrot pelaajan 1 ensimmäisen siirron jälkeen.

Esimerkki 4.12. Olkoon joukko

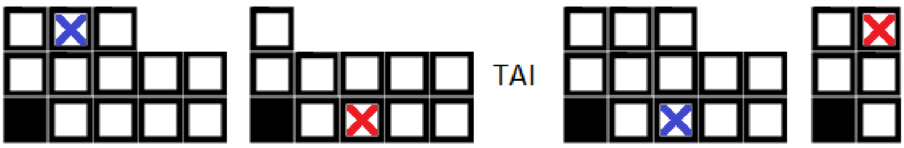
$$\{(i,j) \mid 0 \leq i \leq 4, 0 \leq j \leq 2\}$$

Chomp-pelin pelialue. Olkoon pelaajan 1 siirto poistaa alkio $(3,2)$. Tällöin päädytään tilanteeseen $[5,5,3]$. Jos nyt pelaajan 2 siirto on poistaa alkio $(0,1)$ tai $(1,0)$, niin pelaajalla 1 on triviaali voittostrategia. Jos pelaajan 2 siirto on poistaa alkio $(0,2)$ tai $(4,1)$, niin pelaaja 1 pääsee kaksirivisen Chomp-pelin voittostrategian tilanteeseen, joka on esitetty esimerkissä 4.6, poistamalla vastaavasti alkion $(4,1)$ tai $(0,2)$. Nämä siirrot on esitetty kuvassa 4.22.



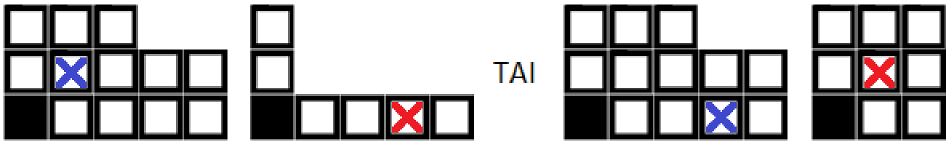
Kuva 4.22: Pelaajan 1 siirrot, kun pelaajan 2 siirto on poistaa alkio $(0,2)$ tai $(4,1)$.

Jos pelaajan 2 siirto on poistaa alkio $(1,2)$ tai $(2,0)$, kuten kuvassa 4.23, niin poistamalla vastaavasti alkion $(2,0)$ tai $(1,2)$ pelaaja 1 pääsee tilanteeseen $[2,2,1]$. Tässä tilanteessa lemman 4.8 nojalla toisena pelaavalla on voittostrategia, eli tässä tapauksessa pelaajalla 1 on voittostrategia.



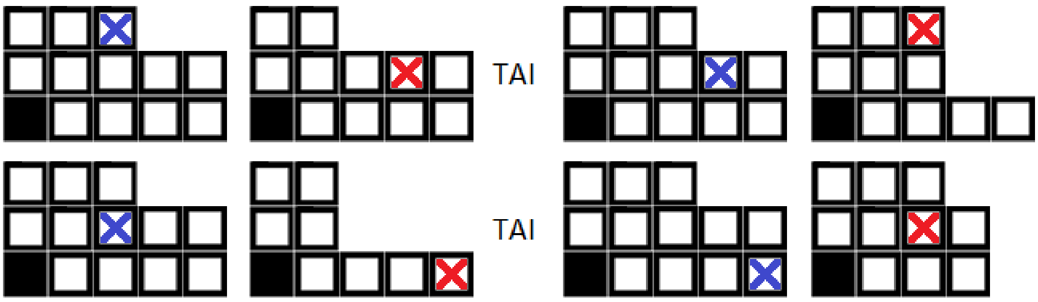
Kuva 4.23: Pelaajan 1 siirrot, kun pelaajan 2 siirto on poistaa alkio $(1,2)$ tai $(2,0)$.

Jos pelaaja 2 poistaa alkion $(1,1)$ tai $(3,0)$, kuten kuvassa 4.24, niin pelaaja 1 voi vastaavasti poistaa alkion $(3,0)$ tai $(1,1)$, jolloin päästään tilanteeseen $[3,1,1]$. Myös tässä tilanteessa lemman 4.8 nojalla toisena pelaavalla on voittostrategia, eli tässä tapauksessa pelaajalla 1 on voittostrategia.



Kuva 4.24: Pelaajan 1 siirrot, kun pelaajan 2 siirto on poistaa alkio $(1,1)$ tai $(3,0)$.

Jos pelaajan 2 siirto on poistaa alkio $(2,2)$ tai $(3,1)$, niin pelaajan 1 siirto voi vastaavasti olla alkion $(3,1)$ tai $(2,2)$ poisto, jolloin päästään tilanteeseen $[5,3,2]$. Myös jos pelaajan 2 siirto on poistaa alkio $(2,1)$ tai $(4,0)$ ja pelaajan 1 siirto on vastaavasti poistaa alkio $(4,0)$ tai $(2,1)$, päästään tilanteeseen $[4,2,2]$. Nämä tilanteet on esitetty kuvassa 4.25. Molemmissa tilanteissa pätee $a-b=2$, koska $5-3=2$ ja $4-2=2$, joten lauseen 4.10 nojalla toisena pelaavalla on voittostrategia, eli tässä tapauksessa pelaajalla 1 on voittostrategia.



Kuva 4.25: Pelaajien siirrot, joilla päädytään tilanteeseen $[a,b,2]$, missä $a-b=2$.

Kaikki tapaukset on käyty läpi, joten pelaajalla 1 on voittostrategia tässä pelissä, kun ensimmäinen siirto on poistaa alkio $(3,2)$.

Huomautus. (Vrt. [9, s. 171-172]). Ei tunneta yleistä ratkaisua $n \times 3$ -kokoiselle Chomp-pelialueelle.

5 Chomp-pelin laajennukset

Chomp-peli voidaan yleistää mihin tahansa osittain järjestettyyn joukkoon, josta löytyy pienin alkio. Tällöin pelataan osittain järjestetyllä joukolla, josta alkioita poistamalla saadaan uusi joukko. Uuden joukon osittainjärjestys on tällöin alkuperäisen joukon osittainjärjestyksen rajoittuma uuteen joukkoon. Peliä jatketaan tällä uudella osittain järjestetyllä joukolla. Myös yleistetyssä pelissä pienin alkio on myrkyllinen pala, joten pelaaja, joka poistaa joukon pienimmän alkion, häviää.

Huomautus. Riittää, että äärellisessä osittain järjestetyssä joukossa on suurin alkio, jotta pelaajalla 1 on joukkoa vastaavassa Chomp-pelissä voittostrategia. Tämä perustuu lauseen 4.4 todistukseen.

Tässä luvussa suurin osa tuloksista on käsitelty kokonaan itse. Kolmiulotteisen $2 \times 2 \times n$ -kokoisen Chomp-pelin käsittelyyn liittyvät väitteet ovat peräisin lähteistä, mutta niiden todistukset ovat itse työstettyjä. Useampiulotteisen ja äärettömän Chomp-pelin tilanteita käsittelevät tulokset ovat kaikki täysin itse tuotettuja tuloksia.

5.1 Kolmiulotteinen Chomp

Eräs mielenkiintoinen tapaus on tarkastella osittainjärjestetyksiä kolmikoiden joukoissa. Laajennetaan siis Chomp-pelin pelialue tässä luvussa kolmiulotteiseksi.

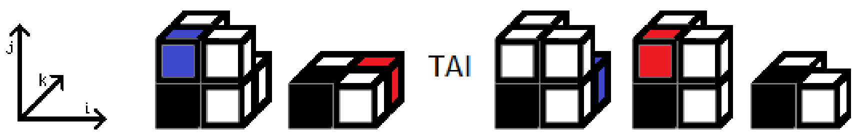
Määritelmä 5.1 (Kolmiulotteinen Chomp-pelialue)**.** Olkoot $p, q, r \in \omega$. Tällöin Chomp-pelin pelialue on osittain järjestetty joukko $\{(i, j, k) \mid 0 \leq i \leq p, 0 \leq j \leq q, 0 \leq k \leq r\}$, missä $(i', j', k') \leq (i, j, k)$, kun $i' \leq i$, $j' \leq j$ ja $k' \leq k$. Tällöin joukossa on pienin alkio $(0,0,0)$ ja suurin alkio (p, q, r). Olkoon pienin alkio $(0,0,0)$ myrkyllinen pala. Jos pelaajan siirto on alkion (i_0, j_0, k_0) valinta, niin pelialueesta poistetaan kaikki ne alkiot (i', j', k'), joille pätee $(i', j', k') \geq (i_0, j_0, k_0)$. Kolmiulotteista peliä koskevat samat säännöt kuin kaksiulotteista peliä.

Tarkastellaan ensin yksinkertaista $2 \times 2 \times 2$ -kokoista Chomp-pelialuetta.

Esimerkki 5.2. Olkoon joukko

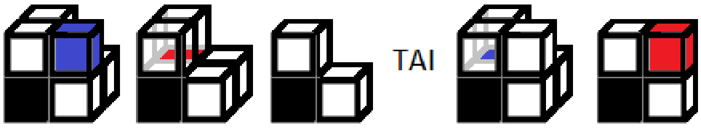
$$\{(i, j, k) \mid 0 \leq i \leq 1, 0 \leq j \leq 1, 0 \leq k \leq 1\}$$

Chomp-pelin pelialue. Olkoon pelaajan 1 ensimmäinen siirto poistaa alkio $(1,1,1)$. Jos pelaajan 2 siirto on poistaa alkio $(0,1,0)$ tai $(1,0,1)$, niin pelaaja 1 voi vastaavasti poistaa alkion $(1,0,1)$ tai $(0,1,0)$, jolloin jäljelle jää kolme alkiota $(0,0,0)$, $(1,0,0)$ ja $(0,0,1)$. Siis pelialueeksi jää kaksiulotteinen symmetrinen L-muotoinen alue, kuten kuvassa 5.1, missä esimerkin 4.5 nojalla toisena pelaavalla on voittostrategia, eli tässä tapauksessa pelaajalla 1 on voittostrategia.

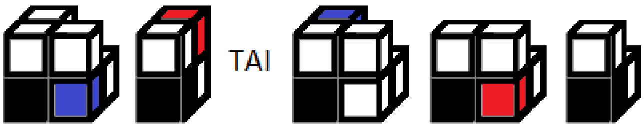


Kuva 5.1: Kolmiulotteinen Chomp-peli, kun pelaajan 2 ensimmäinen siirto on poistaa alkio $(0,1,0)$ tai $(1,0,1)$.

Vastaavasti myös muiden pelaajan 2 mahdollisten siirtojen kohdalla pelaaja 1 voi omalla vuorollaan poistaa peilaavan alkion. Tällöin pelialueeseen jää kolme alkiota siten, että pelialue on kaksiulotteinen symmetrinen L-muotoinen alue, jossa pelaajalla 1 on voittostrategia. Nämä tilanteet on esitetty kuvissa 5.2 ja 5.3. Siis pelaaja 1 voittaa, jos ensimmäinen siirto on poistaa suurin alkio $(1, 1, 1)$.



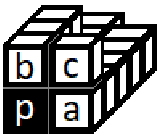
Kuva 5.2: Kolmiulotteinen Chomp-peli, kun pelaajan 2 ensimmäinen siirto on poistaa alkio $(1, 1, 0)$ tai $(0, 0, 1)$.



Kuva 5.3: Kolmiulotteinen Chomp-peli, kun pelaajan 2 ensimmäinen siirto on poistaa alkio $(1, 0, 0)$ tai $(0, 1, 1)$.

Seuraavaksi esitettävien tulosten käsittelyn helpottamiseksi määritellään kolmiulotteiselle $2 \times 2 \times n$ Chomp-pelialueelle oma merkintä, joka hyödyntää alkioiden lukumääriä.

Määritelmä 5.3. (Vrt. [2, s. 3]). Merkitään kolmiulotteisen $2 \times 2 \times n$ Chomp-pelialueen keskeneräistä tilannetta $[p, a, b, c]$, missä p, a, b ja c vastaavat jonojen syvyyksiä järjestyksessä alhaalta vasemmalta oikealle sekä ylhäältä vasemmalta oikealle. Jonot on merkitty kuvaan 5.4.

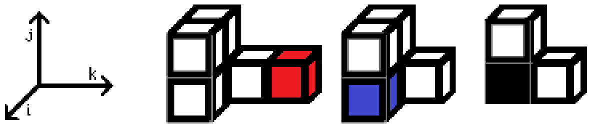


Kuva 5.4: Kolmiulotteisen Chomp-pelin tilanne $[6, 5, 3, 1]$, jossa siis jonojen syvyydet ovat $p = 6$, $a = 5$, $b = 3$ ja $c = 1$.

Esimerkki 5.4. Tarkastellaan tilannetta $[3, 1, 1, 1]$, jossa on siis kuusi alkiota $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(1, 1, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$ ja $(0, 0, 2)$. Jos pelaaja 1 poistaa minkä tahansa alkion lukuunottamatta alkiota $(0, 0, 0)$, pelaaja 2 saa pelialueen kaksiulotteiseen L-muotoiseen symmetriseen tilanteeseen. Nämä pelaajien siirrot voivat olla

$$\begin{array}{lllll}
(1,0,0) & \text{ja} & (0,0,2) & & \\
(0,1,0) & \text{ja} & (0,0,2) & & \\
(1,1,0) & \text{ja} & (0,0,1) & & \\
(0,0,1) & \text{ja} & (1,1,0) & & \\
(0,0,2) & \text{ja} & (1,0,0) & \text{tai} & (0,1,0),
\end{array}$$

joista siirrot $(0, 0, 2)$ ja $(1, 0, 0)$ on esitetty kuvassa 5.5. Siis pelaajalla 2 on voittostrategia tilanteesta $[3, 1, 1, 1]$.



Kuva 5.5: Esimerkki kolmiulotteisen Chomp-pelin tilanteen $[3, 1, 1, 1]$ siirroista $(0, 0, 2)$ ja $(1, 0, 0)$ kuvattuna sivulta.

Seuraavaksi todistetaan, että $2 \times 2 \times n$ -kokoisessa Chomp-pelialueessa pelaajan 1 voittostrategian ensimmäinen siirto on poistaa suurin alkio. Todistukseen liittyvät pelin keskeneräiset tilanteet

$$[k, k, k, k-1] \quad \text{ja} \tag{5.1}$$

$$[p, a, b, c], \tag{5.2}$$

jossa on voimassa ehdot

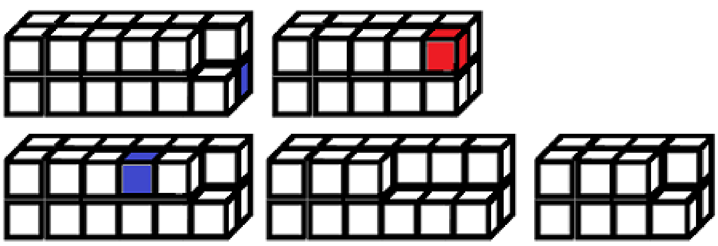
$$a + b = p - 1 \qquad \text{ja} \tag{5.3}$$

$$c = \min(a, b). \tag{5.4}$$

Todistetaan ensin, että tilanteesta (5.1) pelaajan 1 millä tahansa siirrolla pelaaja 2 saa tilanteen joko tilanteen (5.1) muotoon tai tilanteen (5.2) muotoon. Vastaavasti tilanteesta (5.2) pelaajan 1 millä tahansa siirrolla pelaaja 2 saa tilanteen joko tilanteen (5.1) muotoon tai tilanteen (5.2) muotoon. Näin pelaten päädytään lopulta pelaajan 2 vuoron jälkeen johonkin yksinkertaiseen pelitilanteeseen, jossa pelaajalla 2 tiedetään olevan voittostrategia.

Lemma 5.5. *(Väite vrt. [2, s. 3], todistus itse työstetty). Tarkastellaan kolmiulotteisen* $2 \times 2 \times n$ *-kokoisen Chomp-pelialueen keskeneräisiä tilanteita* $[k, k, k, k-1]$ *sekä* $[p, a, b, c]$*, jossa ehdot* (5.3) *ja* (5.4) *pätevät. Osoitetaan, että pelaajalla 2 on voittostrategia molemmista tilanteista.*

Todistus. Tarkastellaan ensin tilannetta $[k, k, k, k-1]$. Jos pelaaja 1 poistaa jonkin alkion $(0, 0, k')$, missä $k' < k$, niin pelaaja 2 voi poistaa alkion $(1, 1, k'-1)$, jolloin pelitilanteeksi saadaan $[k', k', k', k'-1]$. Jos pelaaja 1 poistaa jonkin alkion $(1, 1, k')$, missä $k' < k-1$, niin pelaaja 2 voi poistaa alkion $(0, 0, k'+1)$. Tällöin pelitilanteeksi saadaan $[k'+1, k'+1, k'+1, k']$. Nämä siirrot sovellettuna esimerkkitilanteeseen on esitetty kuvassa 5.6.



Kuva 5.6: Pelaajan 2 siirtoihin $(0, 0, 5)$ ja $(1, 1, 3)$ sopivat pelaajan 1 vastaukset $(1, 1, 4)$ ja $(0, 0, 4)$ kuvattuna sivulta.

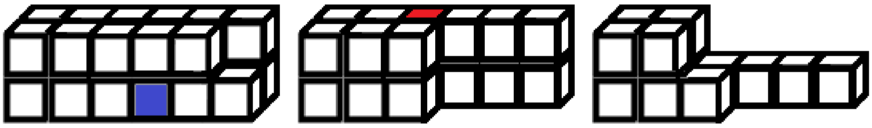
Jos pelaajan 1 siirto on poistaa jokin alkio $(1, 0, k')$ tai $(0, 1, k')$, missä $k' < k$, niin pelaaja 2 voi poistaa joko alkion $(0, 1, k-k'-1)$ tai $(1, 0, k-k'-1)$. Näiden siirtojen jälkeen saadaan pelitilanne

$$[k, k', (k - k' - 1), \min(k', k - k' - 1)] \quad \text{tai}$$
$$[k, (k - k' - 1), k', \min(k - k' - 1, k')].$$

Siis saadaan tilanne $[p', a', b', c']$, missä $p' = k$, $a' = k'$, $b' = (k - k' - 1)$ ja $c = \min(k', k - k' - 1)$ tai vastaavasti $a' = (k - k' - 1)$, $b' = k'$ sekä p' ja c' ovat kuten edellä. Tällöin pelitilanteelle pätee

$$a' + b' = k' + (k - k' - 1) = k - 1 = p' - 1$$
$$c' = \min(k', k - k' - 1) = \min(a', b')$$

eli tilanteen (5.2) ehdot (5.3) ja (5.4) toteutuvat. Tämän tapauksen siirrot sovellettuna esimerkkitilanteeseen on esitetty kuvassa 5.7.

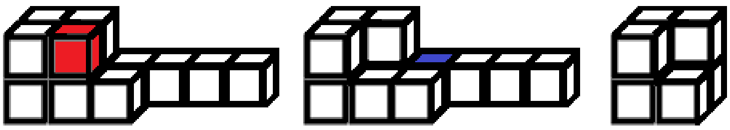


Kuva 5.7: Pelaajien siirrot $(1, 0, 3)$ ja $(0, 1, 2)$, joilla päästään tilanteeseen $[6, 3, 2, 2]$ kuvattuna sivulta.

Tarkastellaan seuraavaksi tilannetta (5.2) eli tilannetta $[p, a, b, c]$, missä

$$a + b = p - 1 \qquad \text{ja}$$
$$c = \min(a, b).$$

Jos pelaajan 1 siirto on poistaa alkio $(1, 1, c')$, missä $c' < c$, niin pelaaja 2 voi poistaa alkion $(0, 0, c' + 1)$, jolloin päästään tilanteeseen $[c' + 1, c' + 1, c' + 1, c']$. Vastaavasti jos pelaajan 1 siirto on poistaa alkio $(0, 0, c')$, kun $c' \leq c$, niin pelaaja 2 voi poistaa alkion $(1, 1, c' - 1)$, jolloin päästään tilanteeseen $[c', c', c', c' - 1]$. Nämä siirrot sovellettuna esimerkkitilanteeseen on esitetty kuvassa 5.8.



Kuva 5.8: Esimerkkitilanne $[6, 3, 2, 2]$ kuvattuna sivulta, jossa pelaajien siirrot ovat $(1, 1, c')$ ja $(0, 0, c' + 1)$, kun $c' < c$. Tässä tapauksessa $c' = 1$ ja $c = 2$.

Jos pelaajan 1 siirto on poistaa alkio $(0, 0, c')$, kun $c' > c$, niin pelaaja 2 voi poistaa alkion joko jonosta a tai b siten, että päästään ehdot (5.3) ja (5.4) täyttävään tilanteeseen $[p_1, a_1, b_1, c_1]$. Alkio poistetaan enemmän alkioita sisältävästä jonosta ja poistettava indeksi lasketaan pelaajan 1 jonosta p poistamien alkioiden lukumäärän mukaan. Huomataan, että $a + b = p - 1$, joten $p - \min(a, b) = \max(a, b) + 1$ ja $c' > c$ eli $c' > \min(a, b)$. Tällöin

$$\begin{aligned} \max(a, b) - (p - c') &> \max(a, b) - (p - \min(a, b)) \\ &= \max(a, b) - (\max(a, b) + 1) \\ &= -1 \\ \Rightarrow \max(a, b) - (p - c') &\geq 0, \end{aligned}$$

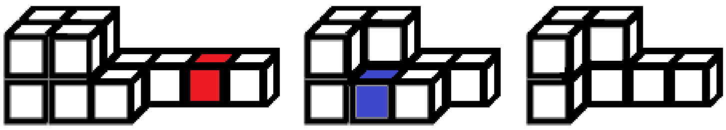
missä siis $p - c'$ on jonosta p poistettujen alkioiden lukumäärä. Siis poistettavan alkion indeksi voidaan laskea kaavalla $\max(a, b) - (p - c')$. Täten, jos $\max(a, b) = a$, niin pelaaja 2 poistaa alkion $(1, 0, a - (p - c'))$ ja jos $\max(a, b) = b$, niin pelaaja 2 poistaa alkion $(0, 1, b - (p - c'))$. Tällöin jonojen alkioiden lukumääriksi saadaan

$$\begin{aligned} p_1 &= c' \\ a_1 &= \max(a, b) - (p - c') \\ b_1 &= \min(a, b) \\ c_1 &= \min(a_1, b_1) \end{aligned} \qquad \text{tai} \qquad \begin{aligned} p_1 &= c' \\ a_1 &= \min(a, b) \\ b_1 &= \max(a, b) - (p - c') \\ c_1 &= \min(a_1, b_1), \end{aligned}$$

jolloin

$$\begin{aligned} a_1 + b_1 &= \max(a, b) - (p - c') + \min(a, b) \\ &= a + b - (p - c') \\ &= p - 1 - (p - c') \\ &= c' - 1 = p_1 - 1. \end{aligned}$$

Siis päästään tilanteeseen $[p_1, a_1, b_1, c_1]$, jossa ehdot (5.3) ja (5.4) pätevät. Tämän tapauksen siirrot sovellettuna esimerkkitilanteeseen on esitetty kuvassa 5.9.



Kuva 5.9: Esimerkkitilanne $[6, 3, 2, 2]$ kuvattuna sivulta, jossa pelaajien siirrot ovat $(0, 0, c')$ ja $(1, 0, a - (p - c'))$, kun $c' > c$. Tässä tapauksessa $p = 6$, $c' = 4$, $a = 3$ ja $b = c = 2$, eli siirrot ovat $(0, 0, 4)$ ja $(1, 0, 1)$.

Jos pelaajan 1 siirto on poistaa alkio $(1, 0, c')$, kun $c' < a$ tai $(0, 1, c')$, kun $c' < b$, niin pelaaja 2 voi poistaa alkion jonosta p siten, että ehdot (5.3) ja (5.4) pätevät. Jos poistettavan alkion sisältävän jonon alkuperäinen pituus on a, niin pelaaja 2 voi poistaa alkion $(0, 0, p - (a - c'))$. Vastaavasti, jos poistettavan alkion sisältävän jonon alkuperäinen pituus on b, niin pelaaja 2 voi poistaa alkion $(0, 0, p - (b - c'))$. Tällöin jonojen alkioiden lukumääriksi saadaan

$$\begin{aligned} p_1 &= p - (a - c') \\ a_1 &= c' \\ b_1 &= b \\ c_1 &= \min(a_1, b_1) \end{aligned} \qquad \text{tai} \qquad \begin{aligned} p_1 &= p - (b - c') \\ a_1 &= a \\ b_1 &= c' \\ c_1 &= \min(a_1, b_1). \end{aligned}$$

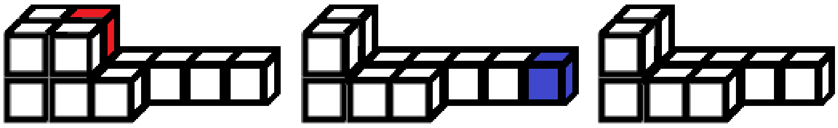
Tällöin myös ehto (5.3) pätee uusilla jonojen alkioiden lukumäärillä, sillä alkuperäisillä jonojen pituuksilla pätee $a + b = p - 1$ eli $a = p - 1 - b$ ja $b = p - 1 - a$, jolloin saadaan

$$\begin{aligned} a_1 + b_1 &= c' + b \\ &= c' + p - 1 - a \\ &= p - (a - c') - 1 = p_1 - 1, \end{aligned}$$

jos pelaajan 1 siirto on poistaa alkio $(1, 0, c')$ tai

$$\begin{aligned} a_1 + b_1 &= a + c' \\ &= p - 1 - b + c' \\ &= p - (b - c') - 1 = p_1 - 1, \end{aligned}$$

jos pelaajan 1 siirto on poistaa alkio $(0, 1, c')$. Siis päästään tilanteeseen $[p_1, a_1, b_1, c_1]$, jossa ehdot (5.3) ja (5.4) pätevät. Tämän tapauksen siirrot sovellettuna esimerkkitilanteeseen on esitetty kuvassa 5.10.



Kuva 5.10: Esimerkkitilanne $[6, 3, 2, 2]$ kuvattuna sivulta, jossa pelaajien siirrot ovat $(0, 1, c')$ ja $(0, 0, p-(b-c'))$. Tässä tapauksessa $p = 6$, $c' = 1$ ja $b = c = 2$, eli siirrot ovat $(0, 1, 1)$ ja $(0, 0, 5)$.

Siis molemmista tilanteista (5.1) ja (5.2) päästään pelaajan 2 vuorolla joko tilanteeseen $[k', k', k', k' - 1]$ tai tilanteeseen $[p', a', b', c']$, jossa ehdot (5.3) ja (5.4) pätevät. Lopulta päädytään tilanteeseen $[2, 2, 2, 1]$, jossa pelaajalla 2 on esimerkin 5.2 nojalla voittostrategia, tai tilanteeseen $[3, 1, 1, 1]$, jossa pelaajalla 2 on esimerkin 5.4 nojalla voittostrategia. Siis pelaajalla 2 on voittostrategia molemmista tilanteista (5.1) ja (5.2). □

Lemma 5.6. *(Vrt. [2, s. 3]). Tarkastellaan $2 \times 2 \times n$ -kokoista Chomp-pelialuetta. Olkoon siis joukko*

$$\{(i, j, k) \mid 0 \leq i \leq 1, 0 \leq j \leq 1, 0 \leq k < n\}$$

Chomp-pelin pelialue. Osoitetaan, että pelaajalla 1 on voittostrategia, jonka ensimmäinen siirto on suurimman alkion poisto.

Todistus. Olkoon pelaajan 1 ensimmäinen siirto alkion $(1, 1, n-1)$ poisto. Tällöin saadaan tilanne $[n, n, n, n-1]$. Nyt lemman 5.5 nojalla tilanteessa toisena pelaavalla eli tässä tapauksessa pelaajalla 1 on voittostrategia. Siis pelaajan 1 voittostrategian ensimmäinen siirto on suurimman alkion poisto. □

Huomautus. (Vrt. [8, s. 1]). Pelaajan 1 voittostrategiaa ei ole pystytty ratkaisemaan yleisessä kolmiulotteisessa äärellisessä $n \times n \times n$ -kokoisessa Chomp-pelissä.

5.2 Useampiulotteinen Chomp

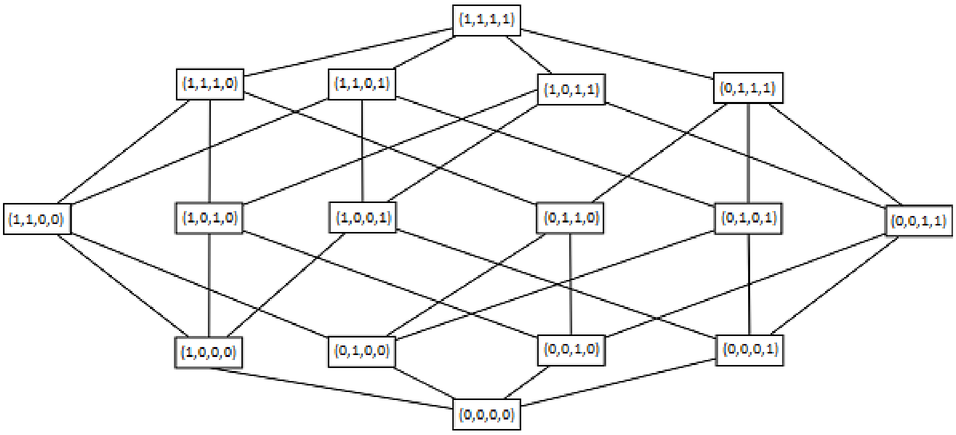
Chomp-pelialue voidaan myös laajentaa useampiulotteiseksi kuin kolmiulotteiseksi. Esitetään seuraavaksi tämän määritelmä.

Määritelmä 5.7 (Useampiulotteinen Chomp-pelialue)**.** Olkoot $p_0, p_1, \ldots, p_{n-1} \in \omega$. Tällöin n-ulotteinen Chomp-pelialue on osittain järjestetty joukko

$$\{(i_0, i_1, \ldots, i_{n-1}) \mid 0 \leq i_0 \leq p_0, 0 \leq i_1 \leq p_1, \ldots, 0 \leq i_{n-1} \leq p_{n-1}\},$$

missä $(i'_0, i'_1, \ldots, i'_{n-1}) \leq (i_0, i_1, \ldots, i_{n-1})$, kun $i'_0 \leq i_0$, $i'_1 \leq i_1, \ldots$ ja $i'_{n-1} \leq i_{n-1}$. Tällöin joukossa on pienin alkio $(0, 0, \ldots, 0)$ ja suurin alkio $(p_0, p_1, \ldots, p_{n-1})$. Olkoon pienin alkio $(0, 0, \ldots, 0)$ myrkyllinen pala. Jos pelaajan siirto on alkion $(j_1, j_2, \ldots, j_{n-1})$ valinta, niin pelialueesta poistetaan kaikki ne alkiot $(j'_1, j'_2, \ldots, j'_{n-1})$, joille pätee $(j'_1, j'_2, \ldots, j'_{n-1}) \geq (j_1, j_2, \ldots, j_{n-1})$. Useampiulotteista peliä koskevat samat säännöt kuin kaksiulotteista peliä.

Koska useampiulotteinen Chomp on jo erittäin monimutkainen käsitellä, otetaan esimerkiksi yksinkertainen neliulotteinen $2 \times 2 \times 2 \times 2$ -kokoinen pelialue. Kuvataan pelin tilanteet eli osittainjärjestykset Hasse-diagrammin avulla, koska pelin havainnollistaminen on muutoin hankalaa. Alkutilanne $2 \times 2 \times 2 \times 2$ -kokoiselle pelialueelle on esitetty kuvassa 5.11.



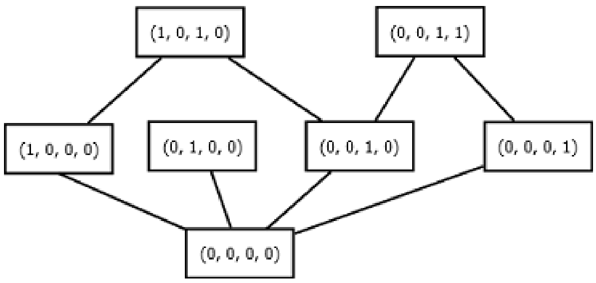
Kuva 5.11: Neliulotteisen Chomp-pelin $2 \times 2 \times 2 \times 2$ pelialue kuvattuna lähtötilanteessa.

Neliulotteisen $2 \times 2 \times 2 \times 2$ -kokoisen Chomp-pelialueen käsittelyn avuksi tarkastellaan ensin keskeneräistä neliulotteista Chomp-pelin tilannetta.

Lemma 5.8. *Jos Chomp-pelin pelialue sisältää alkiot* $(0, 0, 0, 0)$*,* $(1, 0, 0, 0)$*,* $(0, 1, 0, 0)$*,* $(0, 0, 1, 0)$ *ja* $(0, 0, 0, 1)$ *sekä lisäksi tasan kaksi alkiota seuraavista*

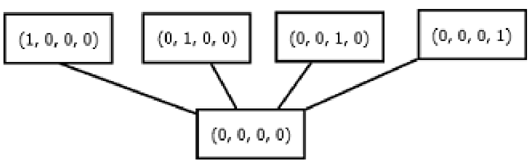
$$(1, 1, 0, 0), (1, 0, 1, 0), (1, 0, 0, 1), (0, 1, 1, 0), (0, 1, 0, 1), (0, 0, 1, 1),$$

niin pelaajalla 2 on tilanteessa voittostrategia.



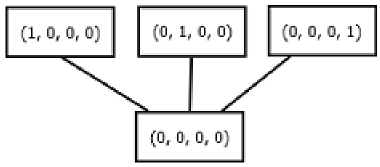
Kuva 5.12: Lemman 5.8 esimerkkitilanne.

Todistus. Alkiot $(1, 0, 0, 0)$, $(0, 1, 0, 0)$, $(0, 0, 1, 0)$ ja $(0, 0, 0, 1)$ ovat osittainjärjestyksen suhteen tasolla 1 ja yllä olevan listan alkiot ovat osittainjärjestyksen suhteen tasolla 2. Jos pelaajan 1 ensimmäinen siirto on poistaa jompikumpi tason 2 alkioista, niin pelaaja 2 voi poistaa jäljelle jäävän tason 2 alkion. Tällöin pelialueeseen jää pienimmän alkion lisäksi ainoastaan neljä tason 1 alkiota, kuten nähdään kuvasta 5.13. Tällöin valitsematta pienintä alkiota pelaajat pystyvät poistamaan vain yhden alkion kerrallaan, jolloin lopulta pelaajalle 1 jää pienimmän alkion valinta.



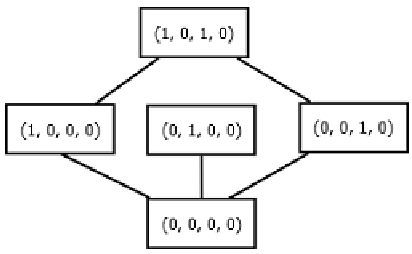
Kuva 5.13: Pelaajan 1 vuorolla jäljellä olevat alkiot, kun tason 2 alkiot on poistettu.

Jos pelaaja 1 poistaa jonkin tason 1 alkion, niin saadaan kolme erilaista tilannetta. Tällöin joko molemmat tason 2 alkiot poistuvat, kuten kuvassa 5.14, toinen tason 2 alkio poistuu, kuten kuvassa 5.15, tai kumpikaan tason 2 alkioista ei poistu, kuten kuvassa 5.16. Jos molemmat tason 2 alkioista poistuvat, jäljelle jää kolme tason 1 alkiota pelaajan 1 vuoron jälkeen, joten lopulta pienimmän alkion valinta jää pelaajalle 1.



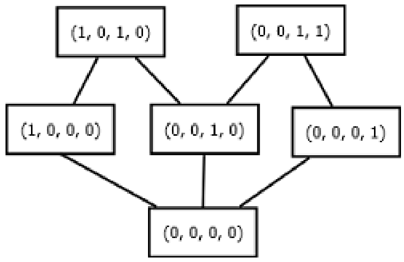
Kuva 5.14: Pelin tilanne, kun pelaajan 1 siirrolla poistui yksi tason 1 alkio ja kaksi tason 2 alkiota.

Jos pelaaja 1 valitsee sellaisen tason 1 alkion, että toinen tason 2 alkioista poistuu, niin pelaaja 2 voi vuorollaan valita sellaisen tason 1 alkion, joka poistaa myös toisen tason 2 alkion. Tällöin jäljelle jää kaksi tason 1 alkiota pelaajan 2 vuoron jälkeen, eli lopulta pienimmän alkion valinta jää pelaajalle 1.



Kuva 5.15: Pelaajan 1 siirrolla poistui yksi tason 1 alkio ja toinen tason 2 alkio, joten pelaaja 2 voi nyt valita joko alkion $(1,0,0,0)$ tai $(0,0,1,0)$, jotta toinenkin tason 2 alkio poistuu.

Jos kumpikaan tason 2 alkioista ei poistu pelaajan 1 poistaessa alkion tasolta 1, niin pelaajan 2 valittavaksi jää kolme tason 1 alkiota ja kaksi tason 2 alkiota. Jokaisen tason 2 alkion poistoon on kaksi vaihtoehtoista alkiota tasolla 1. Siis kolmesta tason 1 alkiosta yhden on poistettava molemmat tason 2 alkiot. Tällöin pelaaja 2 voi siis valita tason 1 alkion, jolla molemmat tason 2 alkiot poistuvat ja jäljelle jää vain kaksi tason 1 alkiota. Siis lopulta pienimmän alkion valinta jää pelaajalle 1.



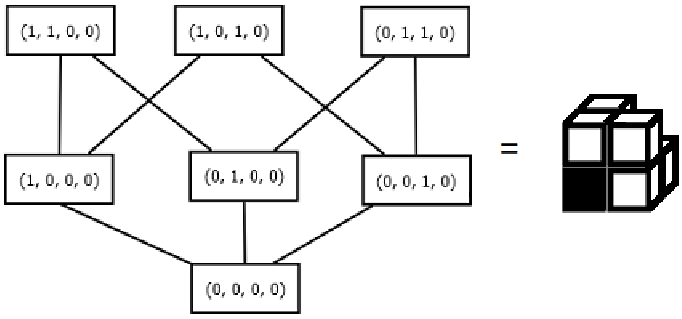
Kuva 5.16: Pelaaja 2 voi nyt valita alkion $(0,0,1,0)$, jolloin pelialueelle jää vain kolme alkiota.

Kaikki tapaukset on käyty läpi, joten pelaajalla 2 on tässä tilanteessa voittostrategia. □

Esimerkki 5.9. Tarkastellaaan $2 \times 2 \times 2 \times 2$ -kokoista Chomp-pelialuetta. Olkoon siis joukko

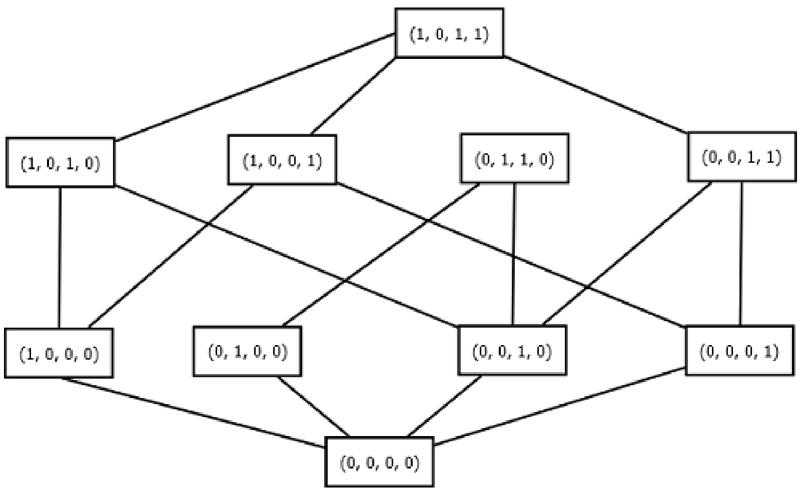
$$\{(i,j,k,l) \mid 0 \le i \le 1, 0 \le j \le 1, 0 \le k \le 1, 0 \le l \le 1\}$$

Chomp-pelin pelialue. Osoitetaan, että pelaajan 1 voittostrategian ensimmäinen siirto on suurimman alkion poisto. Olkoon pelaajan 1 ensimmäinen siirto siis alkion $(1,1,1,1)$ poisto. Jos pelaajan 2 siirto on poistaa jokin alkioista $(1,1,1,0)$, $(1,1,0,1)$, $(1,0,1,1)$ tai $(0,1,1,1)$, niin pelaaja 1 voi poistaa peilaavan alkion $(0,0,0,1)$ $(0,0,1,0)$ $(0,1,0,0)$ tai $(1,0,0,0)$, jolloin pelialue palautuu kolmiulotteiseen tilanteeseen $[2,2,2,1]$. Tällöin pelialue vastaa $2\times2\times2$ pelialuetta, josta suurin alkio on poistettu, mikä nähdään myös kuvasta 5.17. Esimerkin 5.2 nojalla pelaajalla 1 on tässä tilanteessa voittostrategia. Vastaavasti kyseiseen tilanteeseen päästään, jos pelaajan 2 siirto on poistaa jokin alkioista $(0,0,0,1)$ $(0,0,1,0)$ $(0,1,0,0)$ tai $(1,0,0,0)$ ja pelaaja 1 poistaa peilaavan alkion $(1,1,1,0)$, $(1,1,0,1)$, $(1,0,1,1)$ tai $(0,1,1,1)$.



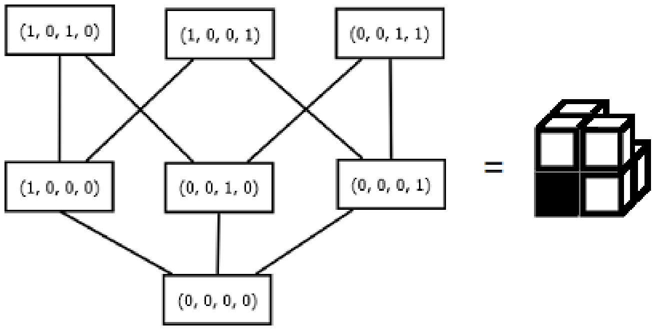
Kuva 5.17: Chomp-pelin tilanne kun on tehty siirrot $(1,1,1,1)$, $(1,1,1,0)$ ja $(0,0,0,1)$.

Tarkastellaan tilannetta, kun pelaaja 2 poistaa alkion $(1,1,0,0)$. Tällöin pelaaja 1 voi poistaa alkion $(0,1,0,1)$, jolloin päästään tilanteeseen, jossa pelaajalla 2 on yhdeksän vaihtoehtoista siirtoa, kun alkiota $(0,0,0,0)$ ei oteta huomioon. Tilanne on esitetty myös kuvassa 5.18. Samaan tilanteeseen päästään, jos pelaaja 2 poistaa alkion $(0,1,0,1)$ ja pelaaja 1 alkion $(1,1,0,0)$. Käydään kaikki pelaajan 2 tämän tilanteen mahdolliset siirrot läpi.



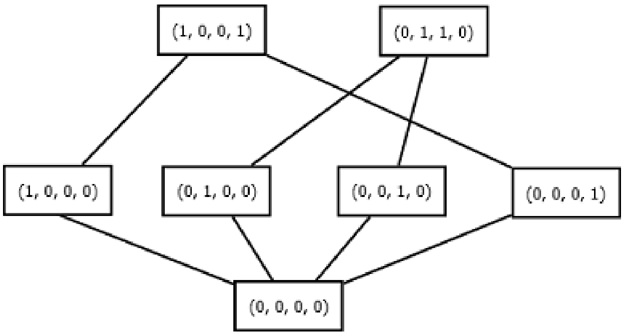
Kuva 5.18: Chomp-pelin tilanne kun on tehty siirrot $(1,1,1,1)$, $(1,1,0,0)$ ja $(0,1,0,1)$.

Jos pelaajan 2 siirto on poistaa alkio $(1,0,1,1)$ tai $(0,1,0,0)$, pelaaja 1 voi poistaa vastaavasti alkion $(0,1,0,0)$ tai $(1,0,1,1)$, jolloin päädytään kolmiulotteiseen tilanteeseen $[2,2,2,1]$, kuten kuvassa 5.19.



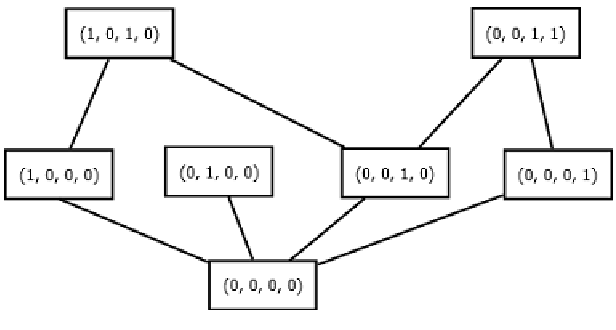
Kuva 5.19: Chomp-pelin kuvan 5.18 tilanne siirtojen $(1,0,1,1)$ ja $(0,1,0,0)$ jälkeen.

Jos pelaajan 2 siirto on poistaa alkio $(1,0,1,0)$ tai $(0,0,1,1)$, pelaaja 1 voi poistaa vastaavasti alkion $(0,0,1,1)$ tai $(1,0,1,0)$, jolloin päädytään tilanteeseen, jossa lemman 5.8 nojalla toisena pelaavalla on voittostrategia. Siis pelaajalla 1 on tässä tilanteessa voittostrategia. Tilanne on esitetty kuvassa 5.20.



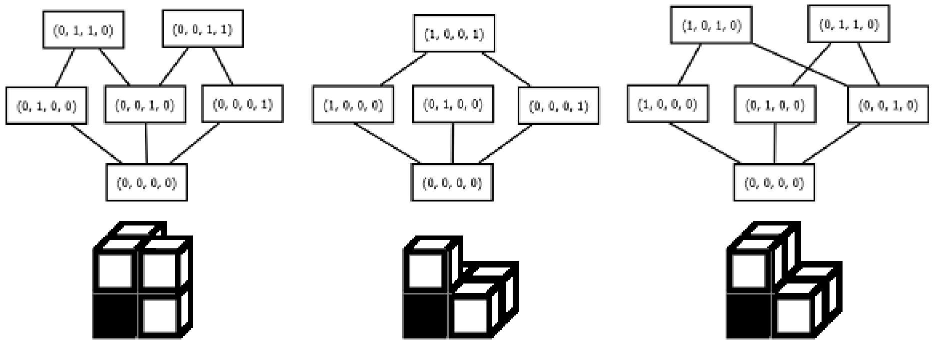
Kuva 5.20: Chomp-pelin kuvan 5.18 tilanne siirtojen $(1,0,1,0)$ ja $(0,0,1,1)$ jälkeen.

Jos pelaajan 2 siirto on poistaa alkio $(1,0,0,1)$ tai $(0,1,1,0)$, pelaaja 1 voi poistaa vastaavasti alkion $(0,1,1,0)$ tai $(1,0,0,1)$, jolloin myös päädytään tilanteeseen, jossa lemman 5.8 nojalla toisena pelaavalla on voittostrategia. Siis pelaajalla 1 on myös tässä tilanteessa voittostrategia. Tämä tilanne on esitetty kuvassa 5.21.



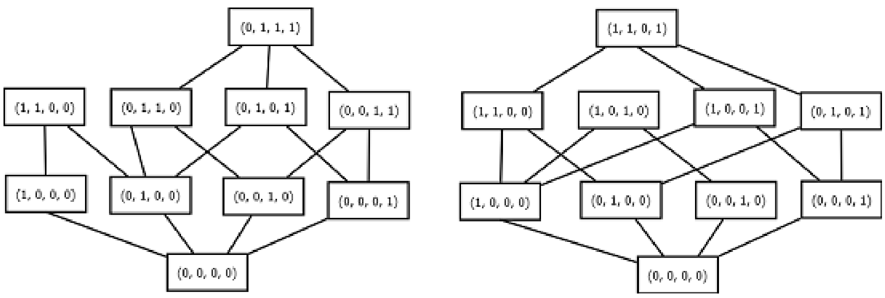
Kuva 5.21: Chomp-pelin kuvan 5.18 tilanne siirtojen $(1,0,0,1)$ ja $(0,1,1,0)$ jälkeen.

Jos pelaajan 2 siirto on poistaa alkio $(1,0,0,0)$, $(0,0,1,0)$ tai $(0,0,0,1)$, päädytään kolmiulotteiseen Chomp-pelin tilanteeseen $[2,1,2,1]$, $[2,2,1,0]$ tai $[2,2,2,0]$, jotka on esitetty kuvassa 5.22. Näissä kaikissa tilanteissa pelaajalla 1 on voittostrategia.



Kuva 5.22: Chomp-pelin kuvan 5.18 tilanne siirtojen $(1,0,0,0)$, $(0,0,1,0)$ tai $(0,0,0,1)$ jälkeen.

Ensimmäisen siirron jälkeen pelattuja siirtoja $(1,1,0,0)$ ja $(0,1,0,1)$ vastaavaan tilanteeseen päästään, jos pelaaja 2 poistaa alkion $(1,0,1,0)$ ja pelaaja 1 alkion $(1,0,0,1)$ tai pelaaja 2 poistaa alkion $(0,1,1,0)$ ja pelaaja 1 alkion $(0,0,1,1)$ tai nämä siirrot päinvastoin. Näiden tilanteiden osittainjärjestykset ovat isomorfisia, joten pelaaja 1 voi pelata yllä kuvatulla tavalla myös näissä tilanteissa. Nämä vaihtoehtoiset tilanteet on myös esitetty kuvassa 5.23. Tällöin kaikki mahdolliset pelaajan 2 siirrot on käyty läpi, joten pelaaja 1 voittaa poistamalla alkion $(1,1,1,1)$ ensimmäisellä siirrollaan.



Kuva 5.23: Chomp-pelin tilanne siirtojen $(1,1,1,1)$, $(1,0,1,0)$ ja $(1,0,0,1)$ sekä siirtojen $(1,1,1,1)$, $(0,1,1,0)$ ja $(0,0,1,1)$ jälkeen. Näiden tilanteiden osittainjärjestykset sekä siirtojen $(1,1,1,1)$, $(1,1,0,0)$ ja $(0,1,0,1)$ jälkeisen tilanteen osittainjärjestys, joka on esitetty kuvassa 5.18, ovat isomorfisia keskenään.

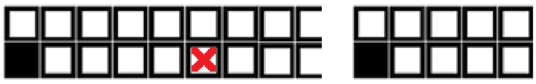
5.3 Laajennus äärettömäksi

Tarkastellaan seuraavaksi joitakin äärettömäksi laajennettuja kaksiulotteisia ja kolmiulotteisia Chomp-pelialueita. Osittain järjestetty joukko voidaan laajentaa äärettömäksi siten, että Chomp-pelin sääntöjä on mahdollista soveltaa siihen. Tällöin joukossa on oltava edelleen pienin alkio, joten joukkoa voidaan siis laajentaa äärettömäksi niin moneen positiiviseen suuntaan, kuin joukossa on ulottuvuuksia. Tarkastellaan ensin yhteen suuntaan ääretöntä kaksirivistä Chomp-pelialuetta.

Esimerkki 5.10 (Kaksirivinen, oikealle ääretön Chomp-pelialue)**.** Olkoon joukko

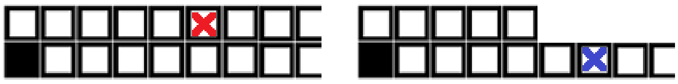
$$\{(i,j) \mid i \geq 0, 0 \leq j \leq 1\}$$

Chomp-pelin pelialue. Tällöin pelaajalla 2 on voittostrategia. Jos pelaajan 1 ensimmäinen siirto on $(0,0)$, $(0,1)$ tai $(1,0)$, niin pelaajan 2 voittostrategia on triviaali. Olkoon siis pelaajan 1 siirto poistaa jokin alkio $(j, 0)$ alemmalta riviltä, kuten kuvassa 5.24. Tällöin päädytään äärelliseen kaksiriviseen Chomp-pelialueeseen, jossa esimerkin 4.6 nojalla ensimmäisenä pelaavalla on voittostrategia eli tässä tapauksessa pelaajalla 2 on voittostrategia.



Kuva 5.24: Kaksirivinen ääretön peli, kun pelaaja 1 valitsee poistettavan alkion alemmalta riviltä.

Jos pelaajan 1 siirto on poistaa jokin alkio $(j, 1)$ ylemmältä riviltä, kuten kuvassa 5.25, niin pelaaja 2 voi poistaa alkion $(j+1, 0)$, jolloin päästään esimerkissä 4.6 kuvattuun voittostrategian tilanteeseen. Tässä tilanteessa ensimmäisenä pelaavalla on voittostrategia eli tässä tapauksessa pelaajalla 2 on voittostrategia.



Kuva 5.25: Kaksirivinen ääretön peli, kun pelaaja 1 valitsee poistettavan alkion ylemmältä riviltä.

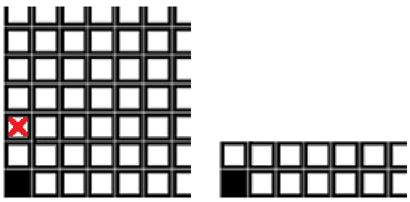
Huomautus. Jos Chomp-pelialueessa on kaksi ääretöntä saraketta, voidaan yllä olevaa strategiaa soveltaa tilanteeseen peilaten. Tällöin pelaajalla 2 on voittostrategia myös tässä pelissä.

Seuraavassa esimerkissä kuvataan kahteen suuntaan äärettömän kaksiulotteisen Chomp-pelialueen voittostrategia.

Esimerkki 5.11 (Kaksiulotteisesti ääretön Chomp-pelialue)**.** Olkoon joukko

$$\{(i, j) \mid i \geq 0, j \geq 0\}$$

Chomp-pelin pelialue. Osoitetaan, että pelaajalla 1 on voittostrategia tässä pelissä. Olkoon pelaajan 1 siirto poistaa alkio $(0, 2)$, kuten kuvassa 5.26. Tällöin pelialueeksi jää kaksirivinen oikealle ääretön Chomp-pelialue, jossa esimerkin 5.10 nojalla toisena pelaavalla on voittostrategia, eli tässä tapauksessa pelaajalla 1 on voittostrategia.



Kuva 5.26: Pelaajan 1 voittostrategian ensimmäinen siirto kaksiulotteisesti äärettömässä Chomp-pelissä.

Huomautus. Yllä kuvattua pelaajan 1 voittostrategiaa voidaan soveltaa kaikkiin $\omega \times n$ tai $n \times \omega$ Chomp-pelialueisiin, kun $n > 2$.

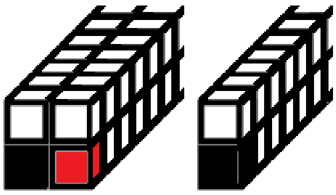
Huomautus. (Vrt. [8, s. 1]). Pelaajan 1 vaihtoehtoinen voittostrategia $\omega \times \omega$ -kokoisessa Chomp-pelissä on soveltaa esimerkissä 4.5 esitettyä neliönmuotoisen Chomp-pelialueen voittostrategiaa äärettömään pelialueeseen.

Tarkastellaan lopuksi kolmiulotteista yhteen suuntaan ääretöntä Chomp-pelialuetta sekä kolmiulotteista kahteen suuntaan ääretöntä Chomp-pelialuetta yksinkertaisten esimerkkien avulla.

Esimerkki 5.12. Olkoon joukko

$$\{(i, j, k) \mid 0 \leq i \leq 1, 0 \leq j \leq 1, k \geq 0\}$$

Chomp-pelin pelialue. Olkoon pelaajan 1 ensimmäinen siirto alkion $(1, 0, 0)$ poisto, kuten kuvassa 5.27. Tällöin pelialueeksi jää kaksirivinen ääretön pelialue, jossa esimerkin 5.10 nojalla toisena pelaavalla on voittostrategia, eli tässä tapauksessa pelaajalla 1 on voittostrategia. Huomataan, että myös alkion $(0, 1, 0)$ poistolla päästään kaksiriviseen äärettömään tilanteeseen, joten pelaajan 1 voittostrategian ensimmäinen siirto voi olla kumpi tahansa.



Kuva 5.27: Pelaajan 1 voittostrategian ensimmäinen siirto kolmiulotteisessa yhteen suuntaan äärettömässä $2 \times 2 \times \omega$ Chomp-pelissä.

Huomautus. Yllä kuvattua voittostrategiaa voi soveltaa myös vastaaviin pelialueisiin $2 \times \omega \times 2$ ja $\omega \times 2 \times 2$. Lisäksi strategiaa voi soveltaa myös esimerkiksi alueisiin $n \times 2 \times \omega$ ja $2 \times n \times \omega$, joissa siis $n \geq 2$.

Esimerkki 5.13. Olkoon joukko

$$\{(i, j, k) \mid 0 \leq i \leq 1, j \geq 0, k \geq 0\}$$

Chomp-pelin pelialue. Olkoon pelaajan 1 ensimmäinen siirto alkion $(0, 1, 0)$ poisto. Tällöin pelialueeksi jää kaksirivinen ääretön pelialue, jossa esimerkin 5.10 nojalla toisena pelaavalla on voittostrategia, eli tässä tapauksessa pelaajalla 1 on voittostrategia. Huomataan, että myös alkion $(0, 0, 1)$ poistolla päästään ääretöntä kaksiriviständ aluetta vastaavaan tilanteeseen, joten pelaajan 1 voittostrategian ensimmäinen siirto voi olla kumpi tahansa.

Huomautus. Yllä kuvattua voittostrategiaa voi soveltaa myös vastaaviin pelialueisiin $\omega \times 2 \times \omega$ ja $\omega \times \omega \times 2$.

Huomautus. (Vrt. [4, s. 482]). Ei ole pystytty ratkaisemaan kummalla pelaajalla on voittostrategia kolmiulotteisessa kolmeen suuntaan äärettömässä $\omega \times \omega \times \omega$ Chomp-pelissä.

Lähteet

[1] E. R. Berlekamp, J. H. Conway, R. K. Guy, *Winning Ways for Your Mathematical Plays*, Volume 3, 2nd ed., A.K. Peters, Massachusetts, 2003.

[2] A. E. Brouwer, G. Horváth, I. Molnár-Sáska, C. Szabó, *On Three-Rowed Chomp*, [Viitattu 15.02.2019]. URL https://www.emis.de/journals/INTEGERS/papers/fg7/fg7.pdf.

[3] S. A. Fenner, J. Rogers, *Combinatorial Game Complexity: An Introduction with Poset Games*, [Viitattu 27.12.2018]. URL https://pdfs.semanticscholar.org/6223/86d10d29f03265682b3825ab7582acd86c1b.pdf.

[4] R. K. Guy, *Unsolved Problems in Combinatorial Games, Games of No Chance*, (R. J. Nowakowski ed., MSRI Publications, Volume 29), Cambridge University Press, Cambridge, 1998.

[5] Y. Khomskii, *Infinite Games*, [Viitattu 13.12.2018]. URL https://www.math.uni-hamburg.de/home/khomskii/infinitegames2010/Infinite%20Games%20Sofia.pdf.

[6] D. Marker, *Descriptive Set Theory*, [Viitattu 13.12.2018]. URL http://homepages.math.uic.edu/~marker/math512/dst.pdf.

[7] A. N. Siegel, *Combinatorial Game Theory*, Graduate Studies in Mathematics, Volume 146. American Mathematical Society, Rhode Island, 2013.

[8] X. Sun, *Improvements on Chomp*, [Viitattu 08.02.2019]. URL http://math.colgate.edu/~integers/cg1/cg1.pdf.

[9] D. Zeilberger, *Three-Rowed CHOMP*, [Viitattu 24.01.2019]. URL http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.145.7362&rep=rep1&type=pdf.

[10] Wikipedia, *Combinatorial game theory*. [Viitattu 04.03.2019] URL https://en.wikipedia.org/wiki/Combinatorial_game_theory.

[11] Wikipedia, *Chomp*. [Viitattu 04.03.2019] URL https://en.wikipedia.org/wiki/Chomp.