Tampereen yliopisto

Jenni Rytilä

Signalointi IF-logiikassa

Informaatioteknologian ja viestinnän tiedekunta
Valinnaisten opintojen tutkielma
Matematiikka
Helmikuu 2019

TIIVISTELMÄ

Jenni Rytilä: Signalointi IF-logiikassa
Valinnaisten opintojen tutkielma
Tampereen yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen tutkinto-ohjelma
Helmikuu 2019

Tutkielman aiheena on IF-logiikka ('Independence-Friendly logic') ja siinä esiintyvä signaloinniksi kutsuttu ilmiö. IF-logiikka on tavallisen ensimmäisen kertaluvun predikaattilogiikan laajennus, jossa voidaan esittää monipuolisemmin kvanttoreiden välisiä riippumattomuuksia. Tutkielmassa käytetään peliteoreettista semantiikkaa, jossa logiikan kaavat tulkitaan kahden pelaajan, verifioijan ja falsifioijan pelaamana semanttisena pelinä.

Peliteoreettinen semantiikka määritellään ensin ensimmäisen kertaluvun logiikalle. Logiikan kaavoille merkityksen antava semanttinen peli määritellään ja annetaan pelin voittostrategiaan nojaava peliteoreettinen totuusmääritelmä. Tämän jälkeen esitellään IF-logiikan syntaksi ja riippumattomien kvanttorien vaikutus peliteoreettiseen semantiikkaan. Erona on, että IF-logiikan kaavojen semanttisissa peleissä pelaajien informaatiota pelin aiemmista siirroista voidaan rajoittaa.

Signaloinnilla tarkoitetaan sitä, että pelaaja välittää itselleen omien siirtojensa avulla sellaista informaatiota, jota hän ei jonkin myöhemmän siirtonsa aikana saisi tietää. Tutkielmassa tarkastellaan erilaisia signaloinnin muotoja: signalointia ylimääräisten kvanttorien avulla, signalointia konnektiivien avulla sekä mahdollisuutta hyödyntää vastapelaajan siirtoja signaloinnin tapaiseen informaatiorajoitusten kiertämiseen.

Tutkielman lopuksi tarkastellaan IF-logiikan ilmaisuvoimaa ja osoitetaan, että IF-logiikka on ilmaisuvoimaisempi kuin ensimmäisen kertaluvun logiikka. Signaloinnin mahdollisuus on yksi tekijä, jonka ansiosta IF-logiikka on ilmaisuvoimaltaan yhtä vahva kuin eksistentiaalinen toisen kertaluvun logiikka.

Avainsanat: IF-logiikka, peliteoreettinen semantiikka, signalointi
Tämän julkaisun alkuperäisyys on tarkastettu Turnitin OriginalityCheck -ohjelmalla.

Sisältö

1 Johdanto

IF-logiikka eli *Independence-Friendly logic* on tavallisen ensimmäisen kertaluvun predikaattilogiikan laajennus, jossa voidaan ilmaista, mitkä kvanttorit ovat riippumattomia toisistaan. Riippumattomuus esitetään uudella notaatiolla, jossa kvanttorin jälkeen kirjoitetaan kauttaviivalla erotettuna ne muuttujat, joista kvantifioitu muuttuja on riippumaton. Yksinkertainen esimerkki IF-logiikan kaavasta on

$$\forall x(\exists y/\{x\})(x = y), \tag{1.1}$$

jossa muuttuja y on riippumaton muuttujasta x. IF-logiikan esittelivät 1989 Jaakko Hintikka ja Gabriel Sandu artikkelissa *Informational Independence as a Semantical Phenomenon* [7]. Motivaationa kvanttoreiden välisten riippumattomuuksien monipuolisempaan esittämiseen heillä oli pyrkimys kuvata tavallisen kielen lauseissa esiintyviä tiedollisia riippumattomuuksia formaalisti, ja ensimmäisen kertaluvun logiikka ei kaikissa tilanteissa tähän riitä. Hintikka ja Sandu sekä useat muut loogikot ovat myöhemmin kehittäneet IF-logiikkaa pidemmälle ja tutkineet sen ominaisuuksia.

IF-logiikan kaavojen tulkinnassa käytetään tyypillisesti *peliteoreettista semantiikkaa.* Peliteoreettisessa semantiikassa logiikan kaavat tulkitaan kahden pelaajan pelaamana semanttisena pelinä, jossa toinen pelaajista yrittää verifioida ja toinen falsifioida kaavan ja jota pelataan annetussa mallissa. Verifioijalle annetaan nimi Eloise ja falsifioijalle nimi Abelard.[1] Nimien alkukirjaimet kuvaavat pelin siirtovuoroja: eksistenssikvanttori $\exists$ on Eloisen siirtovuoro ja universaalikvanttori $\forall$ Abelardin siirtovuoro.

Peliteoreettisesti ymmärrettynä ensimmäisen kertaluvun logiikan kaava

$$\forall x \exists y(x = y) \tag{1.2}$$

on peli, jossa Abelard yrittää falsifioida kaavan valitsemalla muuttujalle x arvon, joka toimisi vastaesimerkkinä kaavan väitteelle, että $\exists y(x = y)$ pätee kaikilla x:n arvoilla. Tämän jälkeen Eloise yrittää verifioida kaavan etsimällä sellaisen muuttujan y arvon, jolla $x = y$ on tosi. Tämä käy helposti, koska Eloise tietää omalla valintavuorollaan, miten Abelard on valinnut. Peli päättyy, kun kaikki valinnat on tehty eli kun jäljellä on atomikaava. Jos tämä atomikaava on tosi pelissä käytössä olevassa mallissa, Eloise voittaa pelin, ja jos atomikaava on epätosi, Abelard voittaa pelin. Huomataan, että Eloise pystyy aina voittamaan pelin eli verifioimaan kaavan $\forall x \exists y(x = y)$ valitsemalla saman arvon kuin Abelard. Peliteoreettisessa semantiikassa kaavan totuus samaistetaan sen kanssa, että Eloisella on voittostrategia eli systemaattinen tapa voittaa kaavan peli riippumatta siitä, miten Abelard pelaa.

IF-logiikan kaavojen semanttisissa peleissä pelaajat voivat joutua tekemään valintoja tietämättä, mitä aiemmin pelissä on tapahtunut. Kaavan 1.1 pelissä Eloise ei siirtovuorollaan kvanttorin $(\exists y/\{x\})$ kohdalla tiedä Abelardin valitsemaa x:n arvoa, koska viivamerkintä kertoo y:n valinnan olevan riippumaton muuttujasta x. Koska Abelardin ja Eloisen tekemät valinnat ovat riippumattomia toisistaan, peli voi päättyä kumman tahansa voittoon,

[1] Abelard oli keskiajalla elänyt loogikko ja Eloise hänen oppilaansa ja rakastajansa (esim. [11, s. 32]).

eikä kummallakaan pelaajalla ole voittostrategiaa. Esimerkki havainnollistaa yhtä merkittävää eroa IF-logiikan ja ensimmäisen kertaluvun logiikan välillä: kaikilla IF-logiikan kaavoilla ei ole määrättyä totuusarvoa eli kolmannen poissuljetun laki ei päde IF-logiikassa.

Toinen kiinnostava eroavaisuus IF-logiikan ja ensimmäisen kertaluvun logiikan välillä on *signaloinnin* mahdollisuus. Signaloinnilla tarkoitetaan sitä, että pelaaja välittää itselleen omien siirtojensa avulla sellaista informaatiota, jota hän ei jonkin myöhemmän siirtonsa aikana saisi tietää. Signaloimalla voi siis joissain tapauksissa kiertää riippumattomuuksien luomia rajoituksia pelaajan tiedolle. Jos kaavaan 1.1 lisätään ylimääräinen eksistenssikvanttori ja pelataankin semanttinen peli kaavalla

$$\forall x \exists z (\exists y/\{x\})(x = y), \tag{1.3}$$

Eloise pystyy kiertämään kvanttorin $(\exists y/\{x\})$ kiellon nähdä Abelardin valitseman x:n arvon. Eloise voi välittää itselleen tiedon Abelardin valinnasta valitsemalla muuttujan z arvon samaksi kuin x:n arvon. Seuraavassa siirrossaan Eloise voi valita y:n arvon samaksi kuin z, jolloin $x = y$ on pelin päätteeksi tosi. Eloisen ei siis tarvitse y:n arvoa valitessaan tietää Abelardin valintaa, mutta signaloinnin ansiosta hän silti voittaa aina pelin.

Sen ansiosta, että IF-logiikassa voidaan esittää monipuolisempia riippuvuuksia ja riippumattomuuksia, IF-logiikka on ilmaisuvoimaltaan vahvempi kuin ensimmäisen kertaluvun logiikka. IF-logiikalla pystytään määrittelemään sellaisia mallien ominaisuuksia, joita ensimmäisen kertaluvun logiikalla ei voida määritellä. Tarkalleen ottaen IF-logiikka on ilmaisuvoimaltaan yhtä vahva kuin eksistentiaalinen toisen kertaluvun logiikka. Yksi IF-logiikan ilmaisuvoimaa lisäävä tekijä on signaloinnin mahdollisuus.

Alunperin Hintikka ja Sandu (esim. [6], [8]) määrittelivät IF-logiikan siten, että pelaajan siirrot ovat aina riippumattomia omista aiemmista siirroista, jolloin signalointia ei voi esiintyä. Myöhemmin otettiin käyttöön IF-logiikan muoto, jossa pelaaja voi tehdä siirtoja myös omien siirtojensa pohjalta ([9, Hodges 1997]). Tämä ominaisuus mahdollistaa erilaisten strategioiden käytön semanttisissa peleissä ja sillä on merkittävä vaikutus siihen, mitkä kaavat ovat IF-logiikassa tosia.

Tässä tutkielmassa erityisenä tutkimuskohteena on erilaiset signaloinnin muodot ja signaloinnin vaikutus IF-logiikan ilmaisuvoimaan, joten käytössä on IF-logiikan muoto, jossa signalointi on mahdollista. Tärkeimpänä lähteenä ja pohjana IF-logiikan määrittelylle tässä tutkielmassa käytetään teosta *Independence-Friendly Logic; A Game-Theoretic Approach* [11, Mann, Sandu ja Sevenster, 2011].

Tutkielman rakenne

Ennen tutkielman varsinaiseen aiheeseen eli IF-logiikkaan siirtymistä esitellään luvussa 2 peliteoreettinen semantiikka tavalliselle ensimmäisen kertaluvun logiikalle. Lukijalta ei odoteta esitietoja logiikasta, joten ensin määritellään ensimmäisen kertaluvun logiikan syntaksi sekä mallin ja tulkinnan käsitteet. Lisäksi esitellään joitakin peliteorian keskeisiä käsitteitä. Luvun 2 keskeisenä sisältönä on semanttisen pelin määrittely ja pelin voittostrategiaan nojaava peliteoreettinen totuusmääritelmä.

Luvussa 3 määritellään IF-logiikan syntaksi ja annetaan sille peliteoreettinen semantiikka. Luvussa 4 siirrytään tarkastelemaan signalointia. Esimerkkien avulla esitellään erilaisia signaloinnin muotoja: signalointia ylimääräisten kvanttorien avulla, signalointia konnektiivien avulla sekä mahdollisuutta hyödyntää vastapelaajan siirtoja signaloinnin tapaiseen informaatiorajoitusten kiertämiseen.

Luvussa 5 osoitetaan, että IF-logiikka on ilmaisuvoimaltaan vahvempi kuin ensimmäisen kertaluvun logiikka. Tätä varten määritellään, mitä logiikan ilmaisuvoimalla tarkoitetaan ja esitellään yleisellä tasolla toisen kertaluvun logiikka sekä skolem-funktion käsite. Luvussa 5 tarkastellaan myös IF-logiikkaa edeltänyttä toisenlaista tapaa ilmaista kvanttorien välisiä riippumattomuuksia: osittainjärjestettyjä kvanttoreita eli Henkin-kvanttoreita. Lopuksi luvussa 6 tarkastellaan vielä lyhyesti IF-logiikan filosofista merkitystä.

2 Peliteoreettinen semantiikka ensimmäisen kertaluvun logiikassa

Ensimmäisen kertaluvun logiikka (engl. *first-order logic,* FO) – tai toiselta nimeltään predikaattilogiikka – on formaali kieli, jossa voidaan ilmaista täsmällisesti yksilöiden ominaisuuksia ja suhteita koskevia väitelauseita. Lisäksi kvanttoreilla voidaan ilmaista, että väitteet pätevät kaikille tai joillekin yksilöille. Ensimmäistä kertalukua tästä logiikasta tekee se, että siinä puhutaan pelkästään yksilöolioista eli muuttujista, yksilöiden ominaisuuksista eli predikaateista sekä yksilöiden välisistä relaatioista, eikä kompleksisemmista entiteeteistä kuten esimerkiksi joukoista. Ensimmäisen kertaluvun logiikkaa pidetään yleisesti perustavana logiikkana sekä matematiikassa että filosofiassa.

Tässä luvussa määritellään ensin ensimmäisen kertaluvun logiikan syntaksi ja sitten annetaan sille peliteoreettinen semantiikka. Peliteoreettisessa semantiikassa logiikan kaavojen merkitys ja totuus määritellään erityisen pelin avulla, jossa kaavassa esiintyvät kvanttorit ja konnektiivit vastaavat pelin siirtoja. Pelissä tehdyt valinnat antavat kaavalle merkityksen ja pelin lopputulos määrää, onko kaava tosi vai epätosi.

2.1 Logiikan syntaksi

Logiikan syntaksi kuvaa, mitä symboleja kielessä on käytössä ja miten symboleja yhdistelemällä muodostetaan kielen ilmaukset oikein. Määritelmät pohjautuvat teoksissa [11, luku 3.1] ja [2, luku II] annettuihin määritelmiin.

Loogisessa kielessä on käytössä seuraavat *loogiset symbolit*:

- numeroituva määrä muuttujasymboleja: $x_0, x_1, x_2, \dots$
- konnektiivit: $\neg$ (negaatio), $\vee$ (disjunktio), $\wedge$ (konjunktio),
- kvanttorit: $\forall$ (universaalikvanttori), $\exists$ (eksistenssikvanttori)
- identiteettisymboli: $=$
- sulkumerkit: (,)

Jatkossa muuttujiin viitataan tavallisesti symboleilla $x, y, z, \dots$.

Lisäksi on käytössä konnektiivit $\to$ (implikaatio) ja $\leftrightarrow$ (ekvivalenssi). Implikaatio $\varphi \to \psi$ ymmärretään lyhennysmerkinnäksi kaavalle $\neg\varphi \vee \psi$ ja ekvivalenssi $\varphi \leftrightarrow \psi$ ymmärretään lyhennysmerkinnäksi kaavalle $(\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)$.

Lisäksi ensimmäisen kertaluvun logiikan kielessä on käytössä vaihtuva joukko *ei-loogisia symboleja*, joista muodostuu kielen *aakkosto*.

Määritelmä 2.1. Aakkosto L on jokin joukko seuraavia symboleja:

- Relaatiosymbolit: $R_0, R_1, R_2, \dots$

- Funktiosymbolit: $f_0, f_1, f_2, \ldots$
- Vakiosymbolit: $c_0, c_1, c_2, \ldots$

Relaatio- ja funktiosymboleihin liitetään *paikkaluku* n ($n \in \mathbb{Z}_+$), joka kertoo kuinka moneen argumenttiin symbolia sovelletaan. Paikkalukuja merkitään $\mathrm{ar}(R)$ ja $\mathrm{ar}(f)$.

Yksipaikkaisia relaatiosymboleita kutsutaan myös *predikaateiksi.*

$\dashv$

Aakkosto L määrittelee ensimmäisen kertaluvun kielen, jota merkitään FO_L. Esimerkiksi aakkosto $L = \{+, \cdot, 0, 1\}$ määrittelee sellaisen kielen, jota voidaan käyttää ilmaisemaan tavallisia luonnollisten lukujen laskutoimituksia, kuten $0 \cdot 1 = 0$ tai $x_1 = x_2 + 1$.

Jatkossa relaatioista käytetään tavallisesti symboleja $P, Q, R, S, \ldots$, funktioista symboleja $f, g, h, \ldots$ ja vakioista symboleja $c, d, e, \ldots$.

Kun ei ole tarpeen määritellä, mistä kvanttorista on kyse, käytetään symbolia $Q \in \{\forall, \exists\}$. Samoin määrittelemättömän konnektiivin paikalla voidaan käyttää symbolia $\circ \in \{\vee, \wedge\}$.

Logiikan aakkoston symboleja yhdistelemällä saadaan muodostettua *termejä* ja edelleen *kaavoja*, joista koostuu ensimmäisen kertaluvun logiikan kieli FO_L.

Määritelmä 2.2. Olkoon L aakkosto. *L-termien* joukko saadaan soveltamalla seuraavia sääntöjä äärellisen monta kertaa:

- Jokainen muuttujasymboli on L-termi.
- Jokainen vakiosymboli on L-termi.
- Jos $f \in L$ on n-paikkainen funktiosymboli ja $t_1, \ldots, t_n$ ovat L-termejä, niin $f(t_1, \ldots, t_n)$ on L-termi.

$\dashv$

Määritelmä 2.3. Olkoon L aakkosto. *L-kaavat* muodostetaan soveltamalla seuraavia sääntöjä äärellisen monta kertaa:

- Jos t_1 ja t_2 ovat L-termejä, niin $t_1 = t_2$ on L-kaava.
- Jos $t_1, \ldots, t_n$ ovat L-termejä ja $R \in L$ on n-paikkainen relaatiosymboli, niin $R(t_1, \ldots, t_n)$ on L-kaava.
- Jos φ on L-kaava, niin $\neg\varphi$ on L-kaava.
- Jos φ ja ψ ovat L-kaavoja, niin $(\varphi \vee \psi)$ ja $(\varphi \wedge \psi)$ ovat L-kaavoja.
- Jos φ on L-kaava ja x on muuttujasymboli, niin $\forall x\varphi$ ja $\exists x\varphi$ ovat L-kaavoja.

Atomikaavoja ovat muotoa $t_1 = t_2$ ja $R(t_1, \ldots, t_n)$ olevat L-kaavat.

$\dashv$

Luettavuuden parantamiseksi kaavojen ympärille voidaan lisätä ylimääräisiä sulkuja. Konnektiiveilla yhdistetyistä kaavoista voidaan myös jättää uloimmat sulut pois tilanteissa, joissa monitulkintaisuuden vaaraa ei ole. Jatkossa aakkosto L jätetään merkitsemättä silloin, kun se on ilmeinen tai ei ole tarkastelun kannalta oleellista, mikä aakkosto on käytössä.

Määritelmä 2.4. Kaavan φ *alikaavojen* joukko $\mathrm{Sub}(\varphi)$ määritellään rekursiolla:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Sub}(\psi) &= \{\psi\}, \qquad \text{kun } \psi \text{ on atomikaava} \\
\mathrm{Sub}(\neg\psi) &= \{\neg\psi\} \cup \mathrm{Sub}(\psi) \\
\mathrm{Sub}(\psi \circ \psi') &= \{\psi \circ \psi'\} \cup \mathrm{Sub}(\psi) \cup \mathrm{Sub}(\psi') \\
\mathrm{Sub}(Qx\psi) &= \{Qx\psi\} \cup \mathrm{Sub}(\psi).
\end{aligned}$$

⊣

Huomautus. Saman alikaavan eri esiintymiä kohdellaan tässä tutkielmassa erillisinä ja toisistaan erotettavina. Esimerkiksi kaavassa $\psi \vee \psi$ on kaksi toisistaan erotettavaa alikaavaa: vasen disjunkti ψ ja oikea disjunkti ψ. Saman kaavan eri esiintyjien erottaminen jätetään tässä implisiittiseksi ja ohitetaan täsmällisempi erottamistapa. [1]

Kaavan $Qx\varphi$ alikaava φ, kaikki kaavan φ alikaavat, sekä kaikki alikaavoissa esiintyvät muuttujat ja kvanttorit kuuluvat kvanttorin Qx *vaikutusalaan.*

Määritelmä 2.5. Termissä t esiintyvien muuttujasymbolien joukko $\mathrm{Var}(t)$ määritellään rekursiolla seuraavasti:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(x_i) &= \{x_i\} \\
\mathrm{Var}(c) &= \varnothing \\
\mathrm{Var}(f(t_1, \ldots, t_n)) &= \mathrm{Var}(t_1) \cup \cdots \cup \mathrm{Var}(t_n)
\end{aligned}$$

⊣

Määritelmä 2.6. Muuttujan x esiintymä on *vapaa* jos se ei kuulu minkään muotoa Qx olevan kvanttorin vaikutusalaan eikä ole kvanttorissa Qx oleva muuttujan x esiintymä. Jos muuttujan esiintymä ei ole vapaa, se on *sidottu.*

Kaavan φ vapaiden muuttujien joukko $\mathrm{Free}(\varphi)$ määritellään rekursiolla:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Free}(t_1 = t_2) &= \mathrm{Var}(t_1) \cup \mathrm{Var}(t_2) \\
\mathrm{Free}(R(t_1, \ldots, t_n)) &= \mathrm{Var}(t_1) \cup \cdots \cup \mathrm{Var}(t_n) \\
\mathrm{Free}(\neg\varphi) &= \mathrm{Free}(\varphi) \\
\mathrm{Free}(\varphi \circ \psi) &= \mathrm{Free}(\varphi) \cup \mathrm{Free}(\psi) \\
\mathrm{Free}(Qx\varphi) &= \mathrm{Free}(\varphi) \setminus \{x\}
\end{aligned}$$

Kaava φ on *lause*, jos siinä ei esiinny lainkaan vapaita muuttujia eli $\mathrm{Free}(\varphi) = \varnothing$.

⊣

[1] Täsmällisesti eri esiintymien erillisyys voidaan ilmaista esimerkiksi lisäämällä kaavaan kaikkien alikaavojen ympärille indeksöidyt sulut. Tällöin esimerkiksi kaavan $P(x) \vee \neg P(x)$ täsmällinen kirjoitusasu olisi $((P(x))_2 \vee (\neg(P(x))_4)_3)_1$.

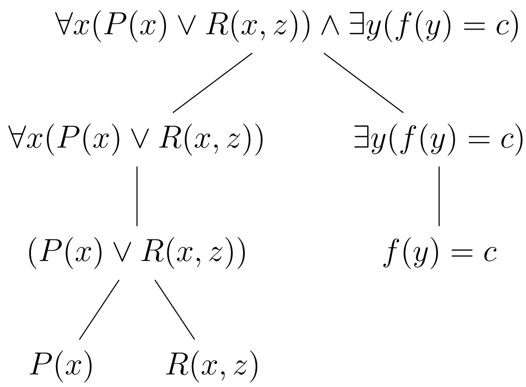
Esimerkki 2.7. Olkoon aakkostona $L = \{P, R, f, c\}$, jossa $\mathrm{ar}(P) = 1$, $\mathrm{ar}(R) = 2$ ja $\mathrm{ar}(f) = 1$. L-termejä ovat esimerkiksi muuttujat x, y, z, vakio c ja funktiosymbolin f avulla muodostetut termit $f(x)$ ja $f(y)$.

Näistä termeistä voidaan kaavanmuodostussääntöjä soveltamalla muodostaa esimerkiksi seuraavat L-kaavat:

$$R(x, y) \qquad f(x) = x \qquad (P(x) \vee R(x, y)) \qquad \exists x(f(x) = x) \qquad \forall x \exists y R(x, y)$$

Tarkastellaan L-kaavaa $\varphi = \forall x(P(x) \vee R(x, z)) \wedge \exists y(f(y) = c)$.

Kaavan φ kaikkien alikaavojen joukko $\mathrm{Sub}(\varphi)$ on kätevä esittää puurakenteena:



Puusta nähdään helposti, että jokainen muuttujan x esiintymä on sidottu, koska alikaavat $P(x)$ ja $R(x, z)$ kuuluvat kvanttorin $\forall x$ vaikutusalaan, ja myös muuttujan y esiintymät ovat sidottuja, koska termi $f(y)$ kuuluu kvanttorin $\exists y$ vaikutusalaan. Alikaavassa $R(x, z)$ esiintyvä muuttuja z on vapaa, koska sitä ei ole kaavassa kvantifioitu. Siis $\mathrm{Free}(\varphi) = \{z\}$.

$\dashv$

2.2 Peliteoreettinen semantiikka

Pelkät oikein muodostetut logiikan kaavat eivät sinällään tarkoita mitään. Symbolien jonoilla voidaan ilmaista asioita vasta kun niille annetaan jokin merkitys, eli kun syntaksiin liitetään semantiikka.

Tavallinen tapa antaa logiikan kaavoille merkitys on tulkita ne tietyssä *mallissa*, eli tulkita kaavan symbolien viittavan annettuun joukkoon yksilöolioita sekä näiden ominaisuuksiin ja keskinäisiin relaatioihin. Esimerkiksi kun tarkastellaan mallia, jonka oliot ovat pelilaudalla olevat shakkinappulat ja jossa kuvataan nappuloiden värit predikaateilla M ja V, kaava $\exists x M(x) \wedge \exists y V(y)$ tässä mallissa tulkittuna tarkoittaa, että laudalla on ainakin yksi musta ja yksi valkoinen nappula.

Tavallisesti käytetyssä Tarski-semantiikassa kaavojen totuus määräytyy rekursiivisten totuusehtojen mukaisesti. Tarskin totuusmääritelmä on kompositionaalinen: lauseen totuusarvo määräytyy sen osien totuusarvoista tiettyjen sääntöjen mukaisesti. Kaavan totuuden määrittämisessä lähdetään liikkeelle atomikaavoista: $t_1 = t_2$ ja $R(t_1, \ldots, t_n)$ ovat tosia mallissa jos ja vain jos mallissa tulkittuna kaavoissa mainittujen termien välillä tosiaan on identiteetti tai relaatio R. Muiden kaavojen totuusehdot nojaavat tavalliseen ymmärrykseen konnektiivien ja kvanttorien merkityksistä. Esimerkiksi konjunktion totuusehdon mukaan kaava $\varphi \wedge \psi$ on tosi mallissa kun sekä φ että ψ ovat tosia mallissa. Kaava $\exists x\varphi$ on tosi kun mallista löytyy jokin sellainen alkio, että sille φ on tosi. Muiden konnektiivien ja kvanttorien totuusehdot annetaan vastaavasti.

Tarski-semantiikan sijaan tässä tutkielmassa käytetään *peliteoreettista semantiikkaa*. Peliteoreettisessa semantiikassa kaavojen merkitys määrittyy semanttisen pelin G kautta. Pelaajia on kaksi, Eloise ($\exists$) ja Abelard ($\forall$). Kaavassa esiintyvät kvanttorit ja konnektiivit ovat pelin valintatilanteita. Pelissä Eloise pyrkii pelaamaan siten, että pelin kohteena olevasta kaava on pelin päättyessä tosi, ja Abelard taas siten, että kaavasta tulee epätosi. Kaavan totuus tarkoittaa sitä, että Eloisella on tapa voittaa aina kaavaan liittyvä semanttinen peli.

Peliteoreettisessa semantiikassa merkityksenannon suunta on päinvastainen kuin kompositionaalisessa semantiikassa: kaavan tulkinnassa lähdetään kokonaisesta kaavasta ja edetään aina vain pienempiin alikaavoihin. Tarski-semantiikka ja peliteoreettinen semantiikka ovat kuitenkin ensimmäisen kertaluvun logiikassa ekvivalentteja keskenään, eli kaikki samat kaavat ovat niissä tulkittuina tosia [11, s. 48].

2.2.1 Mallit

Määritelmät pohjautuvat teoksissa [11, luku 3.2] ja [2, luku III] annettuihin määritelmiin.

Määritelmä 2.8. Olkoon L aakkosto. *L-malli* muodostuu epätyhjästä joukosta M, jota kutsutaan mallin *universumiksi*, sekä tulkinnoista $X^{\mathcal{M}}$ jokaiselle aakkoston L symbolille X seuraavasti:

- Jos $R \in L$ on n-paikkainen relaatiosymboli, niin tulkinta on $R^{\mathcal{M}} \subseteq M^n$.
- Jos $f \in L$ on n-paikkainen funktiosymboli, niin tulkinta on funktio $f^{\mathcal{M}} : M^n \to M$.
- Jos $c \in L$ on vakiosymboli, niin tulkinta on $c^{\mathcal{M}} \in M$.

$\dashv$

Jos aakkosto on $L = \{P, R, f, g, c\}$, niin L-malli $\mathcal{M}$ esitetään muodossa

$$\mathcal{M} \;=\; (M; P^{\mathcal{M}}, R^{\mathcal{M}}, f^{\mathcal{M}}, g^{\mathcal{M}}, c^{\mathcal{M}}).$$

Sanotaan, että malli $\mathcal{M}$ on *sopiva* kaavalle φ, jos se antaa tulkinnat kaikille kaavassa esiintyville relaatio-, funktio- sekä vakiosymboleille.

Malli kertoo, miten kaavoissa esiintyvät relaatiot ja funktiot tulee ymmärtää, mutta ei vielä kerro, mihin yksilöihin kaavoissa esiintyvät muuttujat viittaavat. Tähän tarvitaan tulkintafunktiota, joka tulkitsee muuttujat mallin universumin alkioiksi.

Määritelmä 2.9. Olkoon $\mathcal{M}$ L-malli.

Mallin *tulkintafunktio* eli *tulkinta* s on osittainen kuvaus $\{x_0, x_1, x_2, \dots\} \to M$.

Tulkintafunktion muuttujalle x antamaa tulkintaa merkitään $s(x) = a$, jossa $a \in M$. Merkintä $s(x, y, z) = (a, b, c)$ on lyhennetty tapa sanoa $s(x) = a, s(y) = b$ ja $s(z) = c$.

Jos s on mallin $\mathcal{M}$ tulkintafunktio ja $a \in M$, niin merkitään $s[x_i, a]$ tulkintafunktiota, joka saadaan muuttamalla x_i:n tulkinnaksi a:

$$s[x_i, a](x_j) = \begin{cases} a, & \text{kun } i = j, \\ s(x_j), & \text{kun } i \neq j. \end{cases}$$

Tulkintafunktion muutos $s[x_i, a]$ laajentaa tulkintafunktiota s tai jos $x \in \mathrm{dom}(s)$, niin x:n tulkinta korvautuu uudella tulkinnalla. Kun tulkintafunktioon tehdään peräkkäin useita muutoksia, esimerkiksi $((s[x, a])[y, b])[z, c]$, tämä voidaan merkitä yksinkertaisemmin $s[(x, a), (y, b), (z, c)]$.

$\dashv$

Määritelmä 2.10. Olkoon L aakkosto. Termin $t \in L$ arvo $\langle t \rangle^{\mathcal{M},s}$ L-mallissa $\mathcal{M}$ ja tulkinnalla s määritellään seuraavasti:

- $\langle x_i \rangle^{\mathcal{M},s} = s(x_i)$, kun x_i on muuttujasymboli.
- $\langle c \rangle^{\mathcal{M},s} = c^{\mathcal{M}}$, kun $c \in L$ on vakiosymboli.
- $\langle f(t_1, \dots, t_n) \rangle^{\mathcal{M},s} = f^{\mathcal{M}}(\langle t_1 \rangle^{\mathcal{M},s}, \dots, \langle t_n \rangle^{\mathcal{M},s})$, kun $f \in L$ on n-paikkainen funktiosymboli ja $t_1, \dots, t_n$ ovat L-termejä.

$\dashv$

Kun muuttujille, termeissä esiintyville vakioille ja funktiosymboleille sekä relaatiosymboleille on annettu tulkinnat ja termeille arvot mallin ja tulkintafunktion kautta, voidaan määrittää milloin atomikaavat ovat tosia ja milloin epätosia.

Atomikaavojen totuus määritellään suoraan termien arvojen perusteella samalla tavalla sekä peliteoreettisessa semantiikassa että Tarski-semantiikassa.

Merkintä $\mathcal{M}, s \models \varphi$ tarkoittaa, että φ on *tosi* mallissa $\mathcal{M}$ tulkinnalla s. Tällöin sanotaan myös, että $(\mathcal{M}, s)$ *toteuttaa* kaavan φ.

Merkintä $\mathcal{M}, s \not\models \varphi$ tarkoittaa, että φ on *epätosi* mallissa $\mathcal{M}$ tulkinnalla s.

Määritelmä 2.11. Olkoon L aakkosto, $\mathcal{M}$ L-malli ja s mallin $\mathcal{M}$ tulkintafunktio. Tällöin

$$\begin{aligned} \mathcal{M}, s \models t_1 = t_2 \quad & \text{jos ja vain jos} \quad \langle t_1 \rangle^{\mathcal{M},s} = \langle t_2 \rangle^{\mathcal{M},s} \\ \mathcal{M}, s \models R(t_1, \dots, t_n) \quad & \text{jos ja vain jos} \quad (\langle t_1 \rangle^{\mathcal{M},s}, \dots, \langle t_n \rangle^{\mathcal{M},s}) \in R^{\mathcal{M}}. \end{aligned}$$

$\dashv$

Atomikaavoja monimutkaisempien kaavojen merkitys ja totuusehdot määritellään peliteoreettisessa semantiikassa semanttisen pelin avulla.

2.2.2 Peliteoreettisia käsitteitä

Ennen semanttisen pelin määrittelyä esitellään joitakin tarpeellisia peliteorian käsitteitä. Lähteenä käytetään teosta *Independence-Friendly Logic; A Game-Theoretic Approach* [11, luku 2].

Pelit voidaan jaotella *strategisiin* ja *ekstensiivisiin* peleihin. Strategisessa pelissä jokaisella pelaajalla on vain yksi siirto ja kaikki pelaajat tekevät siirtonsa yhtä aikaa. Esimerkiksi kivi-paperi-sakset on strateginen peli. Ekstensiivisessä pelissä pelaajat tekevät siirtonsa vuorotellen. Pelaaja voi siis siirtoa tehdessään ottaa huomioon pelissä aiemmin tehdyt siirrot. Shakki on esimerkki ekstensiivisestä pelistä.

Ekstensiivisissä peleissä pelaajien saatavilla oleva informaatio pelin aiemmista siirroista voi vaihdella. Esimerkiksi pokerissa pelaajat eivät näe toistensa kortteja, mutta shakissa pelaajat näkevät kaikki vastapelaajan tekemät siirrot samoin kuin omat siirtonsa. *Täydellisen informaation peleissä* kaikki pelaajat tietävät kaiken, mitä pelissä on aiemmin tapahtunut. Oman vuoronsa kohdalla pelaajalla on siis aina täydellinen informaatio, eli hän tietää kaikki muiden pelaajien aiemmin pelissä tekemät siirrot ja valinnat, sekä kaikki omat siirtonsa. *Epätäydellisen informaation peleissä* jollakin pelaajista ei jossakin pelin vaiheessa ole täydellistä informaatiota. Esimerkiksi pelissä voidaan kieltää pelaajia näkemästä toisten pelaajien tekemiä siirtoja.

Peli voi loppua äärellisen määrän siirtoja jälkeen tai teoreettisesti jatkua äärettömän pitkään. *Voitto-häviö-peleiksi* (engl. *win-lose game*) kutsutaan sellaisia pelejä, joissa peli loppuu aina täsmälleen yhden pelaajan voittoon ja muiden pelaajien häviöön. Tässä tutkielmassa käsitellään vain kahden pelaajan ekstensiivisiä voitto-häviö-pelejä, joissa pelataan äärellinen määrä siirtoja.

Yksittäisen satunnaisen pelin kulun tarkastelun sijaan matemaattisesti kiinnostavampaa on tarkastella, miten peliä voidaan säännönmukaisesti pelata eli millaisia strategioita pelissä voidaan noudattaa. *Strategia* on sääntö, joka kertoo pelaajalle mikä siirto hänen tulee omalla vuorollaan tehdä kaikissa mahdollisissa pelin tilanteissa. *Voittostrategia* on strategia, jota noudattamalla pelaaja voittaa aina pelin täysin riippumatta siitä, miten muut pelaajat pelaavat. Peli on *determinoitu* jos yhdellä pelaajista on voittostrategia.

2.2.3 Semanttinen peli

Semanttisen pelin toimintaperiaate pohjautuu kysymykseen siitä, miten logiikan kaavoja voidaan verifioida ja falsifioida. Miten esimerkiksi saadaan todennettua, että kaava $\exists x S(x)$ on tosi? Yksinkertaisesti löydetään jokin sellainen alkio a, jolla $S(a)$ on tosi. Kaava $\forall x P(x)$ taas voidaan osoittaa epätodeksi löytämällä jokin sellainen alkio b, jolla $P(b)$ on epätosi. Konnektiivien kanssa voidaan toimia vastaavalla tavalla. Jos halutaan verifioida disjunktio $\varphi_1 \vee \varphi_2$, valitaan vain alikaavoista toinen ja verifioidaan se. (Ks. [6, s. 23–24].)

Myös matematiikassa on tavallista ymmärtää kvantifiointeja sisältävät väitteet tällä tavalla. Malliesimerkki on epsilon-delta-tekniikka, jolla voidaan osoittaa, että funktiolla f on raja-arvo L pisteessä p. Ehto tämän raja-arvon olemassaololle on

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \ (0 < |x - p| < \delta \to |f(x) - L| < \varepsilon). \tag{2.1}$$

Epsilo-delta-tekniikka voidaan tulkita pelinä, jossa ensimmäinen pelaaja yrittää valita niin pienen epsilonin, että ehto ei täyty. Sitten toinen pelaaja pyrkii löytämään sellaisen deltan, jolla ehto pitää paikkansa kaikilla mahdollisilla x:n arvoilla. Jos sopiva delta voidaan löytää millä tahansa epsilonin valinnalla, raja-arvo on olemassa.

Kvantifioitujen väitteiden verifiointi ja falsifiointi on usein luontevaa tulkita juuri tällaisena pelinomaisena valintojen tekemisenä. Semanttisessa pelissä tavat verifioida ja falsifioida logiikan kaavoja systematisoidaan kahden pelaajan pelaamaksi peliksi, jota pelataan annetussa mallissa.

Tässä annettu määritelmä semanttiselle pelille perustuu artikkeliin [14, s. 693–694]. Määritelmään on lisätty negaatioiden vaikutus peliin.

Määritelmä 2.12. Olkoon φ ensimmäisen kertaluvun logiikan kaava, $\mathcal{M}$ kaavalle φ sopiva malli jonka universumi on M ja s tulkintafunktio, jonka määrittelyjoukkoon sisältyy $\mathrm{Free}(\varphi)$.

Semanttinen peli $G(\mathcal{M}, s, \varphi)$ on ekstensiivinen voitto-häviö-peli, jossa on äärellinen määrä siirtoja ja pelaajilla on täydellinen informaatio.

Pelissä on kaksi pelaajaa: Eloise ($\exists$), joka on pelin alussa verifioija ja Abelard ($\forall$), joka on pelin alussa falsifioija.

Pelin *tilanne* on kolmikko (ψ, s', p), jossa ψ on pelin kohteena oleva φ:n alikaava, s' on voimassa oleva tulkinta ja $p \in \{\exists, \forall\}$ kertoo, kumpi pelaajista on verifioija. Pelaajan p vastapelaajaa merkitään $\overline{p}$.

Pelin alkaa tilanteesta $(\varphi, s, \exists)$, jossa s on *alkutulkinta*. Alkutulkinta voi olla tyhjä, jota merkitään $\varnothing$.

Peliä pelataan seuraavilla säännöillä:

- Kun pelin tilanne on $(\neg\psi, s', p)$, pelaajien roolit vaihtuvat eli verifioijasta tulee falsifioija ja falsifioijasta tulee verifioija. Peli jatkuu tilanteesta $(\psi, s', \overline{p})$.
- Kun pelin tilanne on $(\psi \vee \theta, s', p)$, verifioija tekee siirron $\chi \in \{\psi, \theta\}$ ja peli jatkuu tilanteesta (χ, s', p).
- Kun pelin tilanne on $(\psi \wedge \theta, s', p)$, falsifioija tekee siirron $\chi \in \{\psi, \theta\}$ ja peli jatkuu tilanteesta (χ, s', p).
- Kun pelin tilanne on $(\exists x\psi, s', p)$, verifioija tekee siirron (x, a) eli valitsee muuttujalle x tulkinnan $a \in M$ ja peli jatkuu tilanteesta $(\psi, s'[x, a], p)$.
- Kun pelin tilanne on $(\forall x\psi, s', p)$, falsifioija tekee siirron (x, a) eli valitsee muuttujalle x tulkinnan $a \in M$ ja peli jatkuu tilanteesta $(\psi, s'[x, a], p)$.
- Kun pelin tilanne on (ψ, s', p), jossa ψ on atomikaava, peli päättyy. Jos $\mathcal{M}, s' \models \psi$ eli atomikaava on tosi mallissa $\mathcal{M}$ tulkinnalla s', pelaaja p voittaa pelin. Jos $\mathcal{M}, s' \not\models \psi$ eli atomikaava on epätosi mallissa $\mathcal{M}$ tulkinnalla s', pelaaja $\overline{p}$ voittaa pelin.

Voimassa oleva tulkinta s' on pelin alussa alkutulkinta s. Jokainen pelin aikana kvanttorin kohdalla tehty siirto (x_i, a) jollakin $a \in M$ muuttaa tai laajentaa tulkintaa. Muut siirrot eivät aiheuta muutoksia tulkintaan.

$\dashv$

Kun pelin kohteena on kaava, jossa ei esiinny negaatioita, peli siis kulkee aina vain syvemmälle alikaavoihin niin, että Eloise valitsee pelin kohteena olevassa kaavassa esiintyvien eksistenssikvantifioitujen muuttujien arvot ja Abelard valitsee universaalikvantifioitujen muuttujien arvot. Lisäksi disjunktiot ovat Eloisen valintavuoroja ja konjunktiot Abelardin. Peli päättyy, kun kaikki valinnat on tehty ja jäljellä on vain atomikaava. Jos kyseinen atomikaava on tosi pelin mallissa ja voimassa olevalla tulkinnalla, Eloise voittaa pelin. Jos atomikaava on epätosi, Abelard voittaa pelin. Atomikaavan totuus määrittyy termien arvojen perusteella määritelmän 2.11 mukaisesti.

Negaatiot vaikuttavat peliin vaihtamalla pelaajien roolit: Eloisesta tuleekin falsifioija ja Abelardista verifioija. Tämä on luontevaa, sillä jos Eloise pyrkii verifioimaan kaavan $\neg\varphi$, niin tämä onnistuu pyrkimällä falsifioimaan kaava φ.

Semanttisen pelin kulku voidaan kuvata kertomalla, mitä siirtoja pelin aikana on tehty.

Määritelmä 2.13. Olkoon $G(\mathcal{M}, s, \varphi)$ semanttinen peli.

Historia h on pelin kulkua kuvaava jono

$$h = (S_1, S_2, \dots, S_n),$$

jossa $S_1, S_2, \dots, S_n$ ovat pelin G aikana tehdyt siirrot. Siirrot voivat olla alikaavan valintoja tai muuttujan tulkinnan valintoja, eli

$$S_i \in \{\chi \mid \chi \in \mathrm{Sub}(\varphi)\} \cup \{(x_i, a) \mid a \in M\}.$$

Pelin alkutilanteeseen $(\varphi, s, \exists)$ liitetään tyhjä historia h_0, joka on pelin yksikäsitteinen *alkuhistoria*.

Jokaista historiaa h seuraa yksikäsitteinen pelin tilanne (ψ, s_h, p), jossa s_h on historian h jälkeen voimassa oleva tulkinta.

Historia h on *maksimaalinen*, jos sitä seuraa tilanne (ψ, s_h, p), jossa ψ on atomikaava. Maksimaalista historiaa kutsutaan myös *pelieräksi*.

$\dashv$

Historiaa h, jossa on tehty vain siirrot (x, a) ja (y, b) tässä järjestyksessä, voidaan merkitä lyhyemmin myös h_{ab}. Samoin vastaavaa tulkintaa s_h voidaan merkitä s_{ab}.

Esimerkki 2.14. Havainnollistetaan esimerkin avulla, miten semanttista peliä pelataan.

Pelataan yksi pelierä semanttisessa pelissä $G(\mathcal{M}, \varnothing, \varphi)$. Pelin malli on $\mathcal{M} = (\mathbb{N}; <)$, eli universumina on luonnolliset luvut ja mallissa on määritelty tavallinen pienempi kuin -relaatio $<$. Pelin alkutulkinta s on tyhjä. Pelin kohteena oleva kaava φ on

$$\forall x \exists y (x < y \land \neg \exists z (x < z \land z < y)). \tag{2.2}$$

Ensimmäisenä kaavassa on universaalikvanttori, joten falsifioija eli Abelard aloittaa pelin. Abelard pyrkii valitsemaan sellaisen arvon muuttujalle x, jolla kaavasta φ tulee epätosi. Abelard valitsee arvoksi jonkin mielivaltaisen suuren luonnollisen luvun n, eli tekee siirron (x, n). Seuraavaksi kaavassa on eksistenssikvanttori, joten on verifioijan eli Eloisen siirtovuoro. Eloise pyrkii saamaan kaavan φ todeksi, joten hän valitsee Abelardin valitsemaa lukua suuremman arvon muuttujalle y. Eloise tekee siirron $(y, n + 1)$.

Peli jatkuu tilanteesta $((x < y \wedge \neg\exists z(x < z \wedge z < y)), s[(x, n), (y, n + 1)], \exists)$. Konjunktion kohdalla on Abelardin siirtovuoro. Abelard huomaa, että voimassa olevalla tulkinnalla konjunktion vasen puoli on tosi, joten jotta hän ei heti häviäisi peliä, hän tekee siirron $\neg\exists z(x < z \wedge z < y)$. Nyt pelin tilanteen alikaava alkaa negaatiolla, joten pelaajien roolit vaihtuvat; Eloisesta tulee falsifioija ja Abelardista tulee verifioija.

Peli jatkuu nyt tilanteesta $(\exists z(x < z \wedge z < y), s[(x, n), (y, n + 1)], \forall)$. Eksistenssikvanttorin kohdalla on siis Abelardin siirtovuoro. Abelard pyrkii nyt verifioimaan pelatun alikaavan $\exists z(x < z \wedge z < y)$, joten hän yrittää valita muuttujalle z arvon, joka on sekä suurempi kuin x:n arvo että pienempi kuin y:n arvo. Abelardilla ei ole hyviä vaihtoehtoja, mutta hän tekee siirron $(z, n + 1)$. Seuraava pelin valintatilanne on konjunktio, joten on falsifioijan eli nyt Eloisen siirtovuoro. Eloise huomaa, että alikaava $x < z$ on tosi voimassa olevalla tulkinnalla $s' = s[(x, n), (y, n + 1), (z, n + 1)]$, joten hän valitsee konjunktiosta alikaavan $z < y$. Tämä on atomikaava, joten peli päättyy tähän. Koska $n + 1 < n + 1$ ei pidä paikkaansa, on voimassa $\mathcal{M}, s' \not\models z < y$, joten Eloise voittaa pelin.

Pelattu pelierä on $h = ((x, n), (y, n + 1), \neg\exists z(x < z \wedge z < y), (z, n + 1), z < y))$. Eloise on tässä pelierässä onnistunut verifioimaan kaavan φ, vaikka hän roolivaihdon takia toimiikin pelin loppupuolella falsifioijana.

$\dashv$

2.2.4 Totuusmääritelmä

Yksittäisen pelierän voitto ei vielä kerro kaavan totuudesta mitään, sillä seuraava pelierä voi päättyä vastapelaajan voittoon. Semanttisessa pelissä on yksittäisten siirtojen ja pelierien sijaan olennaista se, millä tavalla pelaajat voivat pelata säännönmukaisesti kaikissa tietyn kaavan peleissä. Säännönmukaista pelitapaa kutsutaan *strategiaksi*. Pelaajan strategia kertoo, miten pelaajan tulee jokaisessa pelin tilanteessa pelata.

Määritelmä 2.15. (Ks. [11, Määr. 2.4])

Pelaajan *strategia* pelissä $G(\mathcal{M}, s, \varphi)$ on funktio σ, joka liittää siirron $\sigma(h)$ jokaiseen pelin historiaan h, jota seuraavassa tilanteessa on pelaajan siirtovuoro.

Pelaaja noudattaa strategiaa σ historiassa h, jos aina kun $h' = (S_1, \ldots, S_m)$ on jokin historian h alkusegmentti, historia $(S_1, \ldots, S_m, \sigma(h'))$ on joko h tai h:n alkusegmentti.

Pelaajan strategia σ on *voittostrategia*, jos jokainen maksimaalinen historia, jossa pelaaja noudattaa strategiaa σ, päättyy pelaajan voittoon.

$\dashv$

Jos asiayhteydestä on selvää, mihin historiaan strategian σ mukainen siirto $\sigma(h) = S$ liittyy, voidaan kirjoittaa lyhyesti myös $\sigma(S_n) = S$, jossa S_n on historian h viimeinen siirto. Esimerkiksi jos $h = ((x, a), \psi, (y, b))$, merkinnät $\sigma(h) = (z, c)$ ja $\sigma((y, b)) = (z, c)$ ilmaisevat saman asian.

Jos Eloisella on voittostrategia jonkin kaavan semanttisessa pelissä, hän siis pystyy aina voittamaan pelin eli verifioimaan pelin kohteena olevan kaavan. Tällöin kyseinen kaava on tosi pelin mallissa.

Määritelmä 2.16. [11, Määr. 3.11]

Olkoon φ ensimmäisen kertaluvun logiikan kaava, $\mathcal{M}$ sopiva malli ja s tulkintafunktio. Tällöin

$$\mathcal{M}, s \models \varphi \qquad \text{jos ja vain jos} \qquad \begin{array}{l}\text{Eloisella on voittostrategia}\\ \text{semanttisessa pelissä } G(\mathcal{M}, s, \varphi).\end{array}$$

Tällöin sanotaan, että ($\mathcal{M}$, s) *toteuttaa* kaavan φ.

Kun φ on lause, merkitään $\mathcal{M} \models \varphi$ jos ja vain jos $\mathcal{M}, \emptyset \models \varphi$. Tällöin sanotaan, että φ on *tosi* mallissa $\mathcal{M}$ ja $\mathcal{M}$ on φ:n malli.

$\dashv$

Koska negaatio ennen kaavaa φ aiheuttaa roolinvaihdon, eli Abelardista tulee verifioija ja Eloisesta falsifioija, saadaan:

$$\mathcal{M}, s \models \neg\varphi \qquad \text{jos ja vain jos} \qquad \begin{array}{l}\text{Abelardilla on voittostrategia}\\ \text{semanttisessa pelissä } G(\mathcal{M}, s, \varphi).\end{array}$$

Sanotaan, että lause φ on epätosi mallissa $\mathcal{M}$, kun $\mathcal{M} \models \neg\varphi$.

Merkintä $\mathcal{M}, s \not\models \varphi$ tarkoittaa, että Eloisella *ei* ole voittostrategiaa pelissä $G(\mathcal{M}, s, \varphi)$. Tämä ei ole automaattisesti sama asia kuin se, että Abelardilla on voittostrategia.

Täydellisen informaation semanttisille peleille pätee kuitenkin Gale-Stewart-teoreemaksi kutsuttu tulos, joka takaa, että toisella pelaajista on aina voittostrategia.

Gale ja Stewart (1953) tutkivat äärettömän pituisia, kahden pelaajan ekstensiivisiä nollasummapelejä, joissa pelaajilla on täydellinen informaatio, ja todistivat, että tietynlaiset niin sanotusti hyvinkäyttäytyvät pelit ovat determinoituja. Jo aiemmin oli tunnettu tulos, että jokainen äärellinen täydellisen informaation peli on determinoitu. Voittajan määrittely äärellisten maksimaalisten historioiden kohdalla on yksinkertaista, mutta jotta voidaan tarkastella voittostrategioita äärettömän pitkissä peleissä, täytyy määritellä myös, milloin pelaaja voittaa äärettömän pitkän historian. Voidaan määritellä, että pelaaja voittaa jokaisen äärettömän pitkän historian, jonka kaikilla äärellisillä alkusegmenteillä on jokin maksimaalinen jatkohistoria, jonka pelaaja voittaa. Tällöin sanotaan, että peli on *suljettu*. Gale-Stewart-teoreeman mukaan jokainen suljettu peli on determinoitu. [11, s. 15]

Todistetaan tässä pelkästään semanttisia pelejä koskeva Gale-Stewart-teoreeman erityistapaus. Semanttiset pelit ovat aina äärellisen pituisia, koska kaikki pelin kohteena olevat kaavat ovat vain äärellisen pitkiä.

Lause 2.17. *Jokainen täydellisen informaation semanttinen peli on determinoitu eli toisella pelaajista on voittostrategia.*

Todistus. (Mukailtu todistuksesta [11, s. 15].)

Merkitään $p \in \{\exists, \forall\}$ semanttisen pelin pelaajaa ja h_p sellaista historiaa, jota seuraava tilanne on pelaajan p siirtovuoro.

Määritellään ensin, milloin pelin kulun aikana pelaajalla p on *voittoasema*:

1. Maksimaalinen historia on pelaajan p voittoasema, jos p voittaa tällöin pelin.
2. Historia h_p on pelaajan p voittoasema, jos on olemassa siirto S siten, että $h' = (h_p, S)$ on pelaajan p voittoasema. Muuten h_p on p:n vastapelaajan voittoasema.

Voittoasemat siis määritellään pelin lopputilanteesta alkaen edeten pelin alkuun asti jokaiselle mahdolliselle pelin kululle. Pelaaja on omalla vuorollaan voittoasemassa silloin, kun hän pystyy omilla valinnoillaan etenemään pelin voittoon.

Voittoaseman määritelmä on muotoiltu niin, että jokainen pelin historia on voittoasema toiselle pelaajista. Tämä voidaan osoittaa taaksepäin maksimaalisista historioista pelin alkuun kulkevalla induktiolla historian pituuden eli siirtojen lukumäärän suhteen.

Maksimaalisen historia on aina vain toisen pelaajan voittoasema, koska semanttinen peli on voitto-häviö-peli. Oletetaan, että jokainen n:n siirron pituinen historia h_n on voittoasema toiselle pelaajista, ja osoitetaan, että sama pätee kaikille näitä yhdellä siirrolla edeltäville historioille h_{n-1}. Jos mielivaltainen $n-1$ pituinen historia h_p on maksimaalinen, se selvästi on voittoasema toiselle pelaajista. Muutoin historiasta h_p päästään pelaajan p mahdollisilla siirroilla historioihin $h_{n_1}, h_{n_2}, \dots$, joille on oletuksen mukaan määritelty voittoasemat. Jos jokin näistä historioista $h_{n_1}, h_{n_2}, \dots$ on pelaajan p voittoasema, määritelmän mukaan h_p on pelaajan p voittoasema. Jos mikään historioista $h_{n_1}, h_{n_2}, \dots$ ei ole pelaajan p voittoasema, määritelmän mukaan h_p on p:n vastapelaajan voittoasema. Siispä jokainen $n-1$ siirron pituinen historia on voittoasema toiselle pelaajista.

Kun voittoasemat määritellään näin, niiden avulla on yksinkertaista muodostaa alussa voittoasemassa olevalle pelaajalle voittostategia: valitaan aina sellainen siirto, jolla päästään uuteen voittoasemaan. Osoitetaan vielä tällaisen voittostrategian olemassaolo täsmällisesti.

Olkoon $G(\mathcal{M}, s, \varphi)$ semanttinen peli ja h_0 sen alkuhistoria. Oletetaan, että h_0 on pelaajan $\exists$ voittoasema.

Määritellään pelaajan $\exists$ strategia σ voittoasemien avulla: jos h_p on $\exists$:n voittoasema, valitaan sellainen siirto $S = \sigma(h_p)$, että (h_p, S) on $\exists$:n voittoasema. Jos h_p ei ole $\exists$:n voittoasema, valitaan $S = \sigma(h_p)$ satunnaisesti. Osoitetaan, että σ on voittostrategia todistamalla induktiolla historian pituuden suhteen, että jokainen h, jossa $\exists$ noudattaa strategiaa σ, on $\exists$:n voittoasema.

Oletuksen nojalla h_0 on $\exists$:n voittoasema. Tehdään induktio-oletus, että h', jossa $\exists$ noudattaa strategiaa σ, on $\exists$:n voittoasema. Osoitetaan induktioväite: historia (h', S), jossa S on jommankumman pelaajan tekemä siirto ja jossa $\exists$ noudattaa strategiaa σ, on $\exists$:n voittoasema.

Jos $h' = h_\exists$, niin $S = \sigma(h')$ ja σ:n määritelmän nojalla $(h', \sigma(h'))$ on $\exists$:n voittoasema. Jos $h' = h_\forall$, niin historian (h', S) on oltava $\exists$:n voittoasema, sillä jos (h', S) olisi $\forall$:n voittoasema, niin myös h':n olisi oltava $\forall$:n voittoasema, mikä on vastoin induktio-oletusta.

Siis jokainen h, jossa $\exists$ noudattaa strategiaa σ, on $\exists$:n voittoasema. Erityisesti $\exists$ voittaa jokaisen maksimaalisen historian, jossa hän noudattaa strategiaa σ, joten σ on voittostrategia.

Vastaavalla tavalla ja sillä oletuksella, että h_0 on pelaajan $\forall$ voittoasema, voidaan todistaa, että pelaajalla $\forall$ on voittostrategia. Toisella pelaajista on siis aina voittostrategia.

□

Gale-Stewart-teoreemasta seuraa, että Abelardilla on voittostrategia täsmälleen silloin, kun Eloisella ei ole voittostrategiaa.

Lause 2.18. *$\mathcal{M}, s \models \neg\varphi$ jos ja vain jos $\mathcal{M}, s \not\models \varphi$*

Todistus. Oletetaan ensin, että $\mathcal{M}, s \models \neg\varphi$ eli Abelardilla on voittostrategia pelissä $G(\mathcal{M}, s, \varphi)$. Koska G on voitto-häviö-peli, Eloisella ei voi olla voittostrategiaa, joten $\mathcal{M}, s \not\models \varphi$. Oletetaan sitten, että $\mathcal{M}, s \not\models \varphi$ eli Eloisella ei ole voittostrategiaa pelissä $G(\mathcal{M}, s, \varphi)$. Lauseen 2.17 nojalla toisella pelaajista, nyt Abelardilla, on voittostrategia, joten $\mathcal{M}, s \models \neg\varphi$.

□

Esimerkki 2.19. Kivi-paperi-sakset

Otetaan esimerkiksi ekstensiivinen versio kivi-paperi-sakset -pelistä, jossa pelaajat tekevät valinnat vuorotellen.

Pelin malli on $\mathcal{M} = (M; <)$, jossa $M = \{k, p, s\}$ on pelissä valittavien esineiden joukko eli kivi k, paperi p tai sakset s, ja relaatio $<$ määrittelee, mikä esine voittaa minkä:

$$< := \{(k \ < \ p), (p \ < \ s), (s \ < \ k)\}.$$

Peli voidaan kuvata ensimmäisen kertaluvun kaavalla φ:

$$\forall x \exists y (x < y) \tag{2.3}$$

Pelissä ensin Abelard valitsee esineen eli muuttujan x tulkinnan, sitten Eloise valitsee oman esineen eli muuttujan y tulkinnan, minkä jälkeen peli päättyy ja katsotaan kumpi voitti. Molemmilla pelaajilla on pelissä täydellinen informaatio. Yksinkertaisuuden vuoksi tavanomaisesta kivi-paperi-sakset -pelistä poiketen tässä Abelard voittaa pelin, jos pelaajat valitsevat samoin.

Koska Eloise pääsee tekemään siirtonsa Abelardin jälkeen ja myös näkee minkä valinnan Abelard on tehnyt, Eloise voi aina voittaa pelin valitsemalla sen esineen, joka voittaa Abelardin valitseman esineen. Määritellään Eloiselle strategia σ seuraavasti:

$$\begin{aligned} \sigma(h_k) &= (y, p) \\ \sigma(h_p) &= (y, s) \\ \sigma(h_s) &= (y, k). \end{aligned}$$

Kaikki mahdolliset eri pelierät, joissa Eloise noudattaa strategiaa σ, ovat siis $h_{kp} = ((x, k), (y, p))$, $h_{ps} = ((x, p), (y, s))$ ja $h_{sk} = ((x, s), (y, k))$. Pelin lopuksi atomikaava on joko $(k < p), (p < s)$ tai $(s < k)$, jotka ovat kaikki tosia mallissa $\mathcal{M}$ pelin lopussa voimassa olevalla tulkinnalla. Noudattamalla strategiaa σ Eloise siis voittaa aina pelin, joten σ on voittostrategia.

⊣

3 IF-logiikka

IF-logiikka eli *independence-friendly logic* on ensimmäisen kertaluvun logiikan laajennus, jossa nimensä mukaisesti voidaan ilmaista kvanttoreiden välisiä riippumattomuuksia. Ensimmäisen kertaluvun logiikassa kvanttoreiden esiintymisjärjestys määrää, miten ne riippuvat toisistaan. IF-logiikassa voidaan ilmaista myös, että sisempänä kaavassa esiintyvä kvantifiointi on riippumaton sellaisistakin kvantifioinneista, joiden vaikutusalaan se kuuluu. Tämä tehdään ottamalla kvanttoreille käyttöön uusi merkintätapa (Qx/W), jossa kauttaviiva ja sitä seuraava muuttujajoukko kertovat, mistä muuttujista kvantifioidun muuttujan x valinta on riippumaton. Esimerkiksi kvanttorissa $(\exists x/\{y, z\})$ muuttuja x on riippumaton muuttujista y ja z.

Peliteoreettisessa semantiikassa kauttaviivamerkintä tarkoittaa, että siirtovuorossa oleva pelaaja ei saa valintaa tehdessään nähdä viivalla erotettujen muuttujien arvoja. Pelaajille saatavilla olevaa informaatiota voidaan siis rajata. IF-logiikan kaavat tulkitaankin peliteoreettisessa semantiikassa epätäydellisen informaation peleinä.

3.1 Lisäykset syntaksiin

Tässä seurataan teoksen [11, luku 4] määritelmiä ja merkintätapoja.

Yksinkertaisuuden vuoksi määritellään IF-logiikan syntaksi siten, että sallitaan negaatioiden esiintyvän vain atomikaavojen edessä. Tällöin IF-kaavan semanttisessa pelissä Eloise on aina verifioija. Rajoitus voidaan tehdä vähentämättä IF-logiikan ilmaisuvoimaa, sillä on osoitettu, että muualla kaavassa esiintyvät negaatiot voidaan siirtää atomikaavan eteen tavanomaisilla negaationsiirtosäännöillä ilman, että peliteoreettisesti määritetty totuusarvo muuttuu [11, s. 95–96].

Merkitään symboleilla $U, V, W, \ldots$ äärellisiä joukkoja muuttujia.

Määritelmä 3.1. Olkoon L aakkosto. L-termit muodostetaan samoin kuin ensimmäisen kertaluvun logiikassa. IF-kielen IF_L kaavat muodostetaan soveltamalla seuraavia sääntöjä äärellisen monta kertaa:

- Jos t_1 ja t_2 ovat L-termejä, niin $t_1 = t_2$ ja $\neg(t_1 = t_2)$ ovat IF_L-kaavoja.
- Jos $R \in L$ on n-paikkainen relaatiosymboli ja $t_1, \ldots, t_n$ ovat L-termejä, niin $R(t_1, \ldots, t_n)$ ja $\neg R(t_1, \ldots, t_n)$ ovat IF_L-kaavoja.
- Jos φ ja ψ ovat IF_L-kaavoja, niin $(\varphi \vee \psi)$ ja $(\varphi \wedge \psi)$ ovat IF_L-kaavoja.
- Jos φ on IF_L-kaava, x on muuttuja ja W on äärellinen joukko muuttujia, niin $(\exists x/W)\varphi$ ja $(\forall x/W)\varphi$ ovat IF_L-kaavoja.

$\dashv$

Jatkossa silloin kun ei ole tarpeen korostaa, mikä aakkosto L on käytössä, jätetään se merkitsemättä ja puhutaan IF-kaavoista.

Atomikaavoja ja niiden negaatioita eli muotoa $t_1 = t_2$, $\neg(t_1 = t_2)$, $R(t_1, \ldots, t_n)$ ja $\neg R(t_1, \ldots, t_n)$ olevia kaavoja kutsutaan *literaaleiksi*. IF-kaavan semanttisessa pelissä peli päättyy literaaliin.

Kvanttoreissa $(\exists x/W)$ ja $(\forall x/W)$ esiintyvää muuttujajoukkoa W kutsutaan *piilojoukoksi* (engl. *slash set*). Piilojoukko kertoo, mistä muuttujista kvanttori on riippumaton. Semanttisessa pelissä tämä tarkoittaa sitä, että pelaajan täytyy valita muuttujan tulkinta näkemättä piilojoukkoon kuuluvien muuttujien tulkintoja. Osa peliä koskevasta informaatiosta on siis piilotettu pelaajalta.

Kun piilojoukko on tyhjä, kirjoitetaan lyhyesti $\exists x$ ja $\forall x$ sen sijaan, että kirjoitettaisiin $(\exists x/\emptyset)$ ja $(\forall x/\emptyset)$. Jokainen ensimmäisen kertaluvun logiikan kaava on siis myös IF-kaava lyhyemmin kirjoitettuna.

IF-kaavan alikaavat ja vapaat muuttujat määritellään pieniä muutoksia lukuun ottamatta samaan tapaan kuin ensimmäisen kertaluvun logiikassa.

Määritelmä 3.2. IF-kaavan φ *alikaavojen* joukko $\mathrm{Sub}(\varphi)$ määritellään rekursiolla:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Sub}(\psi) &= \{\psi\} \qquad \text{kun } \psi \text{ on literaali} \\
\mathrm{Sub}(\psi \circ \psi') &= \{\psi \circ \psi'\} \cup \mathrm{Sub}(\psi) \cup \mathrm{Sub}(\psi') \\
\mathrm{Sub}((Qx/W)\psi) &= \{(Qx/W)\psi\} \cup \mathrm{Sub}(\psi).
\end{aligned}$$

$\dashv$

Saman alikaavan eri esiintymät erotetaan edelleen toisistaan.

IF-kaavan φ vapaiden muuttujien joukko $\mathrm{Free}(\varphi)$ määritellään muuten samoin kuin määritelmässä 2.6, mutta kvanttoreita koskeva sääntö on

$$\mathrm{Free}((Qx/W)\varphi) = (\mathrm{Free}(\varphi) \setminus \{x\}) \cup W.$$

Esimerkiksi kaavassa

$$\forall x(\exists y/\{x\})(R(x,y) \wedge (\exists z/\{x\})P(z))$$

jälkimmäisen piilojoukon x on vapaa muuttuja, ja kaikki muut muuttujien esiintymät ovat sidottuja.

IF-kaava, jossa ei ole lainkaan vapaita muuttujia, on IF-*lause*.

IF-kaavoissa voi esiintyä ensinäkemältä erikoisen näköisiä kvantifiointeja. Esimerkiksi IF-kaavassa $(\exists x/\{y,z\})R(x,y)$ muuttuja x on riippumaton sellaisista muuttujista, joita ei ole kvantifioitu tai jota ei edes esiinny kaavassa. IF-kaavassa $\forall x \exists y (\exists y/\{x\}) x = y$ taas kvantifioidaan peräkkäin samaa muuttujaa. Näennäisesti turhan näköisillä piilojoukoilla ja kvanttoreilla voi kuitenkin olla merkittävä vaikutus semanttisen pelin kulkuun, kuten jatkossa nähdään.

Joskus on hyödyllistä tarkastella vain sellaisia IF-kaavoja, joissa ei esiinny tällaisia erikoisempia kvantifiointeja, joten määritellään säännöllisten IF-kaavojen luokka.

Määritelmä 3.3. IF-kaava on *säännöllinen*, jos se täyttää seuraavat ehdot:

1. Jos (Qy/W) on sellainen kvanttori, että $x \in W$, niin se kuuluu muotoa (Qx/V) olevan kvanttorin vaikutusalaan.

2. Mikään muotoa (Qx/W) oleva kvanttori ei kuulu muotoa (Qx/V) olevan kvanttorin vaikutusalaan.

$\dashv$

Ensimmäinen ehto varmistaa, että kvanttori on riippumaton vain sellaisista muuttujista, jotka on jo kvantifioitu eli joille on pelin aikana annettu tulkinta. Toinen ehto estää saman muuttujan kvantifioinnin useita kertoja peräkkäin eli varmistaa, että jokaiselle muuttujalle annetaan pelissä tulkinta vain kerran.

3.2 Peliteoreettinen semantiikka ja totuusmääritelmät

IF-logiikan peliteoreettisessa semantiikassa kaavat tulkitaan kahden pelaajan pelaamina semanttisina peleinä samoin kuin luvussa 2 tehtiin ensimmäisen kertaluvun logiikan tapauksessa. Ensimmäisen kertaluvun logiikan kaavojen semanttisista peleistä poiketen IF-kaavojen peleissä pelaajien informaatiota pelin aiemmista siirroista ja voimassa olevasta tulkinnasta voidaan rajoittaa. Kyseessä on siis epätäydellisen informaation peli.

Koska IF-logiikan syntaksi määriteltiin niin, että negaatioita esiintyy vain atomikaavojen edessä, IF-kaavan semanttisessa pelissä ei ole negaatioista johtuvia roolinvaihdoksia, vaan Eloise on aina verifioija ja Abelard falsifioija. Peli päättyy atomikaavan sijaan literaaliin. Kun literaali on muotoa $\neg\varphi$, jossa φ on atomikaava, määritellään $\mathcal{M}, s \models \neg\varphi$ jos ja vain jos $\mathcal{M}, s \not\models \varphi$.

Semanttinen peli IF-kaavalle määritellään samaan tapaan kuin ensimmäisen kertaluvun kaavalle, mutta ilman negaatiosääntöä ja pelin tilanteeseen sisällytettyä tietoa verifioijasta.

Määritelmä 3.4. Olkoon φ IF-logiikan kaava, $\mathcal{M}$ kaavalle φ sopiva malli jonka universumi on M ja s tulkintafunktio, jonka määrittelyjoukkoon sisältyy $\mathrm{Free}(\varphi)$.

Semanttinen peli $G(\mathcal{M}, s, \varphi)$ on epätäydellisen informaation ekstensiivinen voitto-häviö-peli, jossa on äärellinen määrä siirtoja. Pelissä on kaksi pelaajaa: Eloise ($\exists$) ja Abelard ($\forall$).

Pelin *tilanne* on pari (ψ, s'), jossa ψ on pelin kohteena oleva φ:n alikaava ja s' on voimassa oleva tulkinta. Pelin alkaa tilanteesta (φ, s), jossa s on *alkutulkinta*. Alkutulkinta voi olla tyhjä, jota merkitään $\varnothing$.

Peliä pelataan pelataan seuraavilla säännöillä:

- Kun pelin tilanne on $(\psi \vee \theta, s')$, Eloise tekee siirron $\chi \in \{\psi, \theta\}$ ja peli jatkuu tilanteesta (χ, s').
- Kun pelin tilanne on $(\psi \wedge \theta, s')$, Abelard tekee siirron $\chi \in \{\psi, \theta\}$ ja peli jatkuu tilanteesta (χ, s').
- Kun pelin tilanne on $((\exists x/W)\psi, s')$, Eloise tekee siirron (x, a) eli valitsee muuttujalle x tulkinnan $a \in M$ ja peli jatkuu tilanteesta $(\psi, s'[x, a])$.
- Kun pelin tilanne on $((\forall x/W)\psi, s')$, Abelard tekee siirron (x, a) eli valitsee muuttujalle x tulkinnan $a \in M$ ja peli jatkuu tilanteesta $(\psi, s'[x, a])$.

- Kun pelin tilanne on (ψ, s'), jossa ψ on literaali, peli päättyy. Jos tällöin $\mathcal{M}, s' \models \psi$, Eloise voittaa pelin. Jos $\mathcal{M}, s' \not\models \psi$, Abelard voittaa pelin.

$\dashv$

IF-kaavan semanttisessa pelissä pelin siirrot tehdään samalla tavalla kuin ensimmäisen kertaluvun kaavojen peleissä, joten pelin historiat määritellään pieniä muutoksia lukuunottamatta samalla tavalla kuin määritelmässä 2.13.

Määritelmä 3.5. Olkoon $G(\mathcal{M}, s, \varphi)$ IF-kaavan φ semanttinen peli.

Historia h on pelin kulkua kuvaava jono

$$h = (S_1, S_2, \ldots, S_n),$$

jossa $S_1, S_2, \ldots, S_n$ ovat pelin G aikana tehdyt siirrot.

Pelin alkutilanteeseen (φ, s) liitetään tyhjä historia h_0, joka on pelin yksikäsitteinen *alkuhistoria.*

Jokaista historiaa h seuraa yksikäsitteinen pelin tilanne (ψ, s_h), jossa s_h on historian h jälkeen voimassa oleva tulkinta.

Historia h on *maksimaalinen*, jos sitä seuraa tilanne (ψ, s_h), jossa ψ on literaali. Maksimaalista historiaa kutsutaan myös *pelieräksi.*

$\dashv$

Pelin siirrot tehdään samojen sääntöjen mukaan kuin täydellisen informaation semanttisessa pelissä, mutta pelaajien saatavilla oleva informaatio siirtoa tehdessä voi olla rajoitettu. Informaation rajoittaminen ei vaikuta siihen, millaisia siirtoja pelissä voidaan tehdä, mutta sillä on vaikutusta siihen, millaisia strategioita pelaaja voi noudattaa. Pelaajille saatavilla oleva informaatio esitetään eri tulkintojen välisten ekvivalenssirelaatioiden avulla.

Määritelmä 3.6. [11, Määr. 4.4]

Tulkinnat s ja s', joilla $W \subseteq \mathrm{dom}(s) = \mathrm{dom}(s')$, ovat *W-ekvivalentit*, jos $s(x) = s'(x)$ jokaisella muuttujalla $x \in \mathrm{dom}(s) \backslash W$. Tällöin merkitään $s \approx_W s'$.

$\dashv$

W-ekvivalentit tulkinnat s ja s' voivat siis erota toisistaan pelkästään piilojoukkoon W kuuluvien muuttujien osalta, joten tilanteissa $((Qx/W)\psi, s)$ ja $((Qx/W)\psi, s')$ tulkinnat näyttävät siirtovuorossa olevalle pelaajalle täysin samalta. Tästä seuraa, että pelaajan on pelattava samalla tavalla kummassakin tapauksessa.

Määritelmä 3.7. (ks. [14, s. 697])

Pelaajan strategia IF-kaavan φ semanttisessa pelissä $G(\mathcal{M}, s, \varphi)$ on funktio σ, joka liittää siirron $\sigma(h)$ jokaiseen pelin historiaan h, jota seuraavassa tilanteessa on pelaajan siirtovuoro.

Strategia σ on pelaajalle *uniformi*, jos aina kun h ja h' ovat historioita, joita seuraavat pelin tilanteet ovat (ψ, s_h) ja $(\psi, s_{h'})$ ja $\psi = (Qx/W)\chi$ on pelaajan siirtovuoro, pätee ehto:

jos $s_h \approx_W s'_h$, niin $\sigma(h) = \sigma(h')$.

Pelaajan strategia σ on *voittostrategia*, jos σ on uniformi ja jos jokainen maksimaalinen historia, jossa pelaaja noudattaa strategiaa σ, päättyy pelaajan voittoon.

$\dashv$

Esimerkki 3.8. Kivi-paperi-sakset

Tarkastellaan tavallista kivi-paperi-sakset-peliä, jossa pelaajat tekevät valintansa samanaikaisesti. Pelin malli on sama kuin esimerkissä 2.19, ja peli voidaan kuvata IF-kaavalla φ:

$$\forall x(\exists y/\{x\})(x < y) \tag{3.1}$$

Kaava kuvaa epätäydellisen informaation peliä, jossa Eloisen on valittava muuttujan y tulkinta näkemättä Abelardin tekemää x:n tulkinnan valintaa. Kaava voidaan siis tulkita ekstensiivisenä pelinä, jossa pelaajat tekevät valintansa vuorotellen käsi selän takana, mutta peli toimii silloin samoin kuin strateginen peli, jossa siirrot tehdään samanaikaisesti. Poikkeuksena tavallisesta kivi-paperi-sakset-pelistä tässä Abelard voittaa tasatilanteessa.

Muistetaan, että esimerkin 2.19 täydellisen informaation pelissä Eloisella oli voittostrategia. Onko nyt jommallakummalla pelaajalla voittostrategia?

Olkoon σ Eloisen strategia. Abelard aloittaa pelin, minkä jälkeen Eloisen siirtovuorolla pelin tilanne on $((\exists y/\{x\})(x < y), s')$, jota edeltää kolme eri mahdollista historiaa: $h_k = (x, k)$, $h_p = (x, p)$ ja $h_s = (x, s)$. Voimassa oleva tulkinta s' on siis joko s_k, s_p tai s_s. Muuttujan x tulkinta on ainoa eroavaisuus eri tulkintojen välillä, joten tulkinnat s_k, s_p ja s_s ovat kaikki $\{x\}$-ekvivalentteja keskenään. Eloisen on siis tehtävä kaikissa mahdollisissa tilanteissa sama siirto, eli $\sigma(h_k) = \sigma(h_p) = \sigma(h_s)$. Merkitään tätä siirtoa (y, c), jossa $c \in \{k, p, s\}$. Kaikki mahdolliset pelierät ovat siis $h_{kc} = ((x, k), (y, c))$, $h_{pc} = ((x, p), (y, c))$ ja $h_{sc} = ((x, s), (y, c))$. Näistä Eloise voittaa täsmälleen yhden ja häviää muut kaksi, joten σ ei ole voittostrategia.

Olkoon sitten τ Abelardin strategia. Abelardin siirto on ensimmäinen, joten strategia on $\tau(h_0) = (x, d)$, jossa $d \in \{k, p, s\}$. Eloise voi valita y:n tulkinnan aivan vapaasti, joten kaikki mahdolliset eri pelierät ovat $h_{dk} = ((x, d), (y, k))$, $h_{dp} = ((x, d), (y, p))$ ja $h_{ds} = ((x, d), (y, s))$. Näistä Abelard voittaa kaksi, mutta Eloise voittaa yhden, joten τ ei ole voittostrategia.

Kumpikaan pelaajista ei siis voi aina varmasti voittaa tavallista kivi-paperi-sakset-peliä.

$\dashv$

Epätäydellisen informaation peleissä voi siis käydä niin, että kummallakaan pelaajista ei ole voittostrategiaa. Koska kaikki semanttiset pelit IF-kaavoille eivät ole determinoituja, kaavan epätotuutta ei voida määritellä Eloisen voittostrategian puuttumisena. Tämän vuoksi käsitellään kaavan totuus ja epätotuus erikseen.

Määritelmä 3.9. [11, Määr. 4.6]

Olkoon $\mathcal{M}$ sopiva malli, s tulkintafunktio ja φ IF-logiikan kaava. Tällöin

$$\mathcal{M}, s \models^{+} \varphi \quad \text{jos ja vain jos} \quad \begin{array}{l}\text{Eloisella on voittostrategia} \\ \text{semanttisessa pelissä } G(\mathcal{M}, s, \varphi).\end{array}$$

Tällöin sanotaan, että kaava φ on tosi mallissa $\mathcal{M}$ tulkinnalla s.

Samaan tapaan,

$$\mathcal{M}, s \models^{-} \varphi \quad \text{jos ja vain jos} \quad \begin{array}{l}\text{Abelardilla on voittostrategia} \\ \text{semanttisessa pelissä } G(\mathcal{M}, s, \varphi).\end{array}$$

Tällöin sanotaan, että kaava φ on epätosi mallissa $\mathcal{M}$ tulkinnalla s.

$\dashv$

IF-logiikka siis eroaa merkittävällä tavalla ensimmäisen kertaluvun logiikasta: kolmannen poissuljetun laki ei päde IF-logiikassa.

Yleensä kiinnostuksen kohteena on kuitenkin vain se, onko tietty kaava tosi, ja jos kaava ei ole tosi, ei ole suurta merkitystä sillä, onko kaava epätosi vai ilman totuusarvoa. Näissä tapauksissa voidaan rajoittua tarkastelemaan semanttista peliä Eloisen näkökulmasta. Jotta kaava olisi tosi, Eloisen on voitava voittaa peli täysin riippumatta siitä, miten Abelard pelaa. Abelardin käyttämällä strategialla tai tälle asetetuilla informaatiorajoituksilla ei siis ole vaikutusta siihen, onko Eloisella voittostrategiaa eli onko kaava tosi.

Jotta voidaan jättää huomiotta erilaisten alkutulkintojen vaikutus pelaajien strategioihin, rajoitutaan seuraavassa määritelmässä ja lauseessa pelkästään IF-lauseisiin.

Määritelmä 3.10. (Ks. [11, Määr. 5.14].)

IF-lauseet φ ja ψ ovat *totuusekvivalentit* eli $\varphi \equiv^{+} \psi$, jos jokaisella sopivalla mallilla $\mathcal{M}$:

$$\mathcal{M} \models^{+} \varphi \text{ jos ja vain jos } \mathcal{M} \models^{+} \psi.$$

$\dashv$

Eloisella on voittostrategia IF-lauseen φ pelissä täsmälleen silloin kun hänellä on voittostrategia myös sellaisen lauseen φ' pelissä, joka on muuten sama kuin φ', mutta josta on poistettu kaikkien universaalikvanttoreiden piilojoukot. Kun tarkastellaan vain lauseen totuutta, universaalikvanttoreiden piilojoukoilla ei ole vaikutusta, joten ne voidaan jättää kaavasta pois.

Lause 3.11. *Olkoon φ* IF*-lause ja φ'* IF*-lause, joka on saatu korvaamalla jokainen lauseessa φ esiintyvä kvanttori $(\forall x/W)$ kvanttorilla $(\forall x/W')$, jossa $W' \neq W$. Erityisesti voi olla $W' = \varnothing$. Tällöin*

$$\varphi \equiv^{+} \varphi'.$$

Todistus. Oletetaan, että $\mathcal{M} \models^+ \varphi$ eli Eloisella on voittostrategia σ lauseen φ pelissä G. Osoitetaan, että σ on voittostrategia myös lauseen φ' pelissä G'.

Koska lauseet φ ja φ' eroavat toisistaan pelkästään universaalikvanttoreiden piilojoukkojen osalta, jotka eivät vaikuta siihen, mitä siirtoja pelaajien on pelien aikana mahdollista tehdä, peleissä G ja G' ovat mahdollisia kaikki samat historiat.

Olkoon h jokin pelin G' pelierä, jossa Eloise noudattaa strategiaa σ. Tällöin h on myös pelin G pelierä, jossa Eloise noudattaa strategiaa σ. Koska σ on voittostrategia, Eloise voittaa pelierän h. Lisäksi σ on uniformi myös pelissä G', sillä Eloisen informaatio on molemmissa peleissä jokaisessa tilanteessa sama.

Tämä pätee kaikille strategian σ mukaan pelatuille pelin G' pelierille, joten σ' on myös voittostrategia ja $\mathcal{M} \models^+ \varphi'$. Päätellään samoin toiseen suuntaan.

$\square$

4 Signalointi IF-logiikassa

Ensimmäisen kertaluvun logiikassa saman kvanttorin lisääminen kaavaan tai sellaisen muuttujan kvantifiointi, jota kaavassa ei esiinny, ei vaikuta kaavan totuuteen. Esimerkiksi kaava $\exists x \exists x \forall y \forall y R(x,y)$ on tosi täsmälleen silloin kun $\exists x \forall y R(x,y)$ tosi. Ensimmäisen kaavan semanttisessa pelissä muuttujien arvot vain valitaan kaksi kertaa, eikä ensimmäisellä valinnalla ole vaikutusta kaavan totuuteen, joten peli on oleellisesti sama kuin toisen kaavan semanttinen peli. Samaan tapaan myöskään saman kaavan yhdistäminen konnektiivilla alkuperäiseen ei vaikuta kaavan totuuteen. Ensimmäisen kertaluvun kaava $\forall x(\exists y R(x,y) \vee \exists y R(x,y))$ on tosi täsmälleen silloin kun $\forall x(\exists y R(x,y))$ on tosi. Peli etenee samalla tavalla valittiin sitten disjunktion vasen tai oikea puoli.

IF-logiikassa ylimääräiset kvanttorit tai konnektiivit voivat kuitenkin vaikuttaa kaavan totuusarvoon. Tämä johtuu siitä, että ne luovat mahdollisuuksia kiertää epätäydellisen informaation aiheuttamia rajoituksia. Kyseistä ilmiötä kutsutaan *signaloinniksi*. Sanotaan, että pelaajalla on signalointimahdollisuus semanttisessa pelissä, jos hän voi jonkin oman siirtonsa avulla välittää itselleen sellaista informaatiota, joka on myöhemmässä pelin tilanteessa häneltä piilotettu.

Signaloinnin mahdollisuuden IF-logiikassa huomasi ensimmäisen kerran Hodges [9, s. 548–549]. On kuitenkin huomattava, että tämä vaatii IF-logiikan määrittelyn sillä tavalla, että siirtoja voi tehdä omien siirtojensa pohjalta. IF-logiikan voi määritellä myös siten, että pelaajan tekemät siirrot ovat riippumattomia kaikista pelaajan omista siirroista, jolloin pelaajan käyttämä strategia pohjautuu pelkästään vastapelaajan siirtoihin (esim. Hintikka [6]). Tällöin signalointimahdollisuuksia ei esiinny. Tässä tutkielmassa määritelty IF-logiikan muoto kuitenkin sallii pelaajan siirtojen riippuvan myös omista aiemmista siirroista, mikä mahdollistaa erilaisia strategioita, joissa hyödynnetään signalointimahdollisuuksia.

Sekä kvanttorit että konnektiivit voivat tarjota pelaajille signalointimahdollisuuksia. Tarkastellaan ensin tyypillisempiä tapauksia, joissa ylimääräisiä kvanttoreita käytetään signaloimaan informaatiota, ja sitten tapauksia, joissa informaatiota signaloidaan konnektiivien avulla. Lisäksi käsitellään mahdollisuutta kiertää informaatiorajoituksia käyttäen signaaleina vastapelaajan siirtoja.

4.1 Signalointi ylimääräisten kvanttorien avulla

Esimerkki 4.1. Kuvitellaan, että Abelard ja Eloise pelaavat esimerkin 3.8 kivi-paperi-sakset-peliä siten, että Abelard tekee siirtonsa ensin, mutta selän takana, joten Eloise ei näe sitä tehdessään omaa siirtoaan. Muistetaan, että tässä pelissä kummallakaan ei ole voittostrategiaa.

Nyt Eloise kuitenkin huijaa: hänellä on apuri, joka seisoo Abelardin selän takana ja voi viestittää eli signaloida Eloiselle Abelardin tekemän valinnan. Tämä peli voidaan kuvata IF-kaavalla φ:

$$\forall x \exists z (\exists y/\{x\})(x < y) \tag{4.1}$$

Pelin malli on sama $\mathcal{M} = (\{k, p, s\}; <)$ kuin aiemmin. Peli etenee siis niin, että Abelard valitsee x:n tulkinnaksi jonkin esineen piilossa Eloiselta, joka valitsee y:n tulkinnan. Ennen Eloisen siirtoa Eloisen apuri, joka näkee Abelardin valinnan, valitsee z:n tulkinnan, ja tämän valinnan Eloise näkee.

Nyt Eloisella apureineen on yhteinen voittostrategia σ. Olkoon Abelardin siirto (x, c), jossa $c \in \{k, p, s\}$. Eloisen apuri kopioi Abelardin valinnan eli $\sigma(x, c) = (z, c)$, ja sitten Eloise valitsee sen esineen, joka voittaa apurin valitseman esineen, eli tekee siirron $\sigma((x, c), (z, c)) = (y, d)$, jossa $c < d$. Kun Eloise apureineen noudattaa tätä strategiaa, ainoat mahdolliset pelierät ovat h_{kkp}, h_{pps} ja h_{ssk}, jotka kaikki Eloise voittaa. Strategia on myös uniformi, sillä Eloise tekee siirtonsa apurin valinnan pohjalta aina samalla tavalla, on Abelardin valinta mikä hyvänsä.

Vaihtoehtoisesti Eloise apureineen voi pelata niin, että apuri valitsee Abelardin valinnan voittavan esineen, ja Eloise kopioi apurin valinnan. Tämäkin strategia on Eloiselle voittostrategia. Olennaista on, että Eloise ja apuri voivat etukäteen sopia, minkä strategian mukaan peliä pelataan.

Ensimmäisen kertaluvun kaavassa kvanttorilla $\exists z$ ei olisi vaikutusta kaavan totuuteen, koska muuttujaa z ei esiinny muualla kaavassa. Nyt Eloise voi kuitenkin hyödyntää tätä ylimääräistä kvanttoria, ja signaloida z:n tulkinnan valinnalla itselleen informaatiota, joka on muuten olisi häneltä piilotettu. Näennäisesti turhalta vaikuttava kvanttori antaakin nyt Eloiselle voittostrategian. Kaava, joka ilman tätä niin kutsuttua valekvanttoria (engl. *dummy quantifier*) ei ole tosi eikä epätosi, onkin nyt tosi mallissa $\mathcal{M}$.

$\dashv$

Huomautus. Esimerkin peli voitaisiin kuvata yhtä hyvin myös kaavalla

$$\forall x \exists y (\exists y/\{x\})(x < y), \tag{4.2}$$

jossa ylimääräisen kvanttorin $\exists z$ sijaan kvantifioidaan y kaksi kertaa. Tämä kaava ei kuitenkaan ole säännöllinen, kun taas kaava 4.1 täyttää säännöllisen IF-kaavan ehdot.

Eloisella on signalointimahdollisuus kaavan φ semanttisessa pelissä aina kun φ sisältää samankaltaisen sarjan kvanttoreita kuin kaavassa 4.1, eli niin sanotun *signalointikuvion* (engl. *signalling pattern*, ks. [1]). Yksinkertaisuuden vuoksi rajoitutaan tässä vain säännöllisiin IF-kaavoihin.

Määritelmä 4.2. Olkoon φ säännöllinen IF-kaava. Kaava φ sisältää Eloisen signalointikuvion, jos kaavassa esiintyy kvanttorit $(\forall x/W)$, $(\exists y/V)$ ja $(\exists z/U)$, joille pätee:

1. $(\exists y/V)$ ja $(\exists z/U)$ kuuluvat kvanttorin $(\forall x/W)$ vaikutusalaan ja $(\exists z/U)$ kuuluu kvanttorin $(\exists y/V)$ vaikutusalaan, ja
2. $x \notin V$, $x \in U$ ja $y \notin U$.

$\dashv$

Abelardille signalointimahdollisuuden antava signalointikuvio voidaan määritellä vastaavasti mutta vaihtaen kvanttorit. Esimerkiksi kaava

$$\exists x \exists y \forall z (\forall w/\{x\})(x \neq w \land P(y))$$

sisältää Abelardin signalointikuvion; Abelard voi z:n arvon valinnallaan signaloida x:n arvon ja valita sitten w:n samaksi. Näin Abelard saa aina literaalin $x \neq w$ epätodeksi ja voittaa pelin. Abelardin signalointimahdollisuuksilla ei kuitenkaan usein ole merkitystä, sillä yleensä kiinnostuksen kohteena on tietyn kaavan totuus eikä sen epätotuus.

Eloisen mahdollisuus signalointiin voidaan estää rikkomalla Eloisen signalointikuvio

$$\ldots(\forall x/W)\ldots(\exists y/V)\ldots(\exists z/U)\psi,$$

jossa y:n valinta riippuu x: arvosta ja z:n valinta riippuu y:n arvosta mutta on riippumaton x:n arvosta. Keskimmäinen kvanttori $(\exists y/V)$ on niin kutsuttu valekvanttori. Signalointikuvion rikkominen onnistuu joko lisäämällä muuttuja x piilojoukkoon V, mikä estää Eloisea näkemästä Abelardin valintaa valekvanttorin kohdalla, tai lisäämällä muuttuja y piilojoukkoon U, mikä estää Eloisea näkemästä valitsemaansa valekvanttorin arvoa. Kumpikin lisäys riittää siihen, että valekvanttoria ei voida käyttää signalointiin.

On kuitenkin huomattava, että pelaajalla voi olla myös muunlaisia signalointimahdollisuuksia kuin signalointikuvioon perustuvia. Konnektiiveihin perustuvaa signalointia tarkastellaan seuraavassa alaluvussa 4.2.

Edellinen esimerkki 4.1 tuo esille luontevan tavan tulkita sellaiset semanttiset pelit, jossa esiintyy signalointia. Jos kaavan 4.1 peli ajatellaan tavallisena kahden pelaajan pelinä ilman apuria, Eloise ensin tietää Abelardin valinnan ensimmäisen oman siirtonsa kohdalla, mutta sitten joutuu unohtamaan tämän toisen siirtonsa kohdalla. Oikeissa pelitilanteissa kerran tiedettyä informaatiota ei kuitenkaan niin vain unohdeta. Signalointia hyödyntävät pelaajat onkin luontevampaa tulkita useamman pelaajan tiimeinä; peliä pelaavatkin kahden yksittäisen pelaajan sijaan Abelard-tiimi ja Eloise-tiimi. Pelaajatiimin pelaajilla on pelissä samat intressit ja he pelaavat yhteisen strategian mukaisesti. Tiimin jäsenet vastaavat pelin aikana eri siirtojen tekemisestä ja heillä voi siten olla saatavilla eri informaatiota pelissä tehdyistä siirroista. Pelaajatiimi voi etukäteen sopia keskenään pelissä käytettävän strategian, mutta pelin aikana tiimin jäsenet eivät voi siirtojen ulkopuolella kommunikoida keskenään. Tiimin pelaajat voivat kuitenkin hyödyntää signalointia, eli välittää omilla siirroillaan muille tiimin jäsenille heiltä piilotettua informaatiota, kuten edellisessä esimerkissä apuri signaloi Eloiselle tältä piilotetun muuttujan tulkinnan. (Ks. esim. [13, s. 26].)

Tosielämän esimerkki signaloinnin hyödyntämisestä on bridge-korttipeli. Bridgessä on neljä pelaajaa, mutta peliä pelataan yhteistyössä partnerin kanssa, joten bridge on luontevaa kuvata kahden pelaajan pelinä, jossa pelaajat ovat pareja. Partnerit eivät näe toistensa kortteja, eivätkä saa kommunikoida niitä toisilleen. Partnerit voivat kuitenkin ennen peliä sopia pelistrategian, jonka mukaisesti pelattaessa he voivat signaloida tietyillä siirroilla toisilleen informaatiota omista korteistaan. ([12, s. 53].)

4.2 Signalointi konnektiivien avulla

Pelaajat pystyvät joissain peleissä signaloimaan piilotettujen muuttujien arvoja itselleen myös konnektiivien avulla. Tämä perustuu siihen, että konnektiivin valintatilanteessa pelaaja voi nähdä sellaisten muuttujien arvot, jotka myöhemmässä vaiheessa on kvanttorissa piilotettu. Yksinkertainen esimerkki tästä ilmiöstä on seuraava IF-kaava φ [11, s. 85]:

$$\forall x((\exists y/\{x\})(x = y)) \vee (\exists y/\{x\})(x = y))). \tag{4.3}$$

Olkoon pelin malli $\mathcal{M}$, jonka universumi on $\{a, b\}$. Kaavan $\forall x(\exists y/\{x\})(x = y)$ pelissä Eloise joutuu valitsemaan y:n tulkinnan satunnaisesti, joten hänellä ei ole voittostrategiaa. Mutta kun yhdistetään alikaavaan $(\exists y/\{x\})(x = y)$ toinen saman kaavan esiintymä disjunktiolla, tilanne muuttuu.

Merkitään disjunktion vasenta puolta ψ_1 ja oikeaa puolta ψ_2. Kaava 4.3 on siis $\forall x(\psi_1 \vee \psi_2)$, jossa $\psi_1 = \psi_2 = ((\exists y/\{x\})(x = y))$. Disjunktiosta valitessaan Eloise näkee Abelardin valitseman x:n tulkinnan, joka on seuraavassa pelin tilanteessa piilotettu Eloiselta. Eloise, joka nyt tulkitaan kahden pelaajan tiiminä Eloise_1 ja Eloise_2, voi kuitenkin etukäteen sopia strategian, jonka mukaan Eloise_1 valitsee ψ_1, jos Abelard valitsee (x, a), ja ψ_2, jos Abelard valitsee (x, b). Vaikka Eloise_2 ei omalla siirtovuorollaan tilanteessa $((\exists y/\{x\})(x = y), s')$ näe x:n tulkintaa, hän voi kuitenkin seuraamalla strategiaa $\sigma(\psi_1) = (y, a)$ ja $\sigma(\psi_2) = (y, b)$ valita y:n tulkinnan niin, että Eloise aina voittaa. Signaloinnin hyödyntäminen antaa siis Eloiselle voittostrategian kaavan φ pelissä. Strategian voi muodostaa tällä tavalla, koska oletetaan, että Eloise voi erottaa toisistaan saman alikaavan eri esiintymät (ks. huomautus määritelmään 2.4).

Esimerkki 4.3. Jatketaan kivi-paperi-sakset-pelin mallin $\mathcal{M} = (\{k, p, s\}; <)$ parissa. Olkoon φ seuraava IF-kaava:

$$\forall x(\exists y/\{x\})(\exists z/\{x, y\})(y < x \wedge x < z). \tag{4.4}$$

Merkitään ψ:llä alikaavaa $(\exists y/\{x\})(\exists z/\{x, y\})(y < x \wedge x < z)$.

Kaavan φ kuvaamassa pelissä Eloise valitsee kaksi eri esinettä riippumatta toisistaan tai Abelardin valinnasta. Eloise voittaa, jos ensimmäinen esine häviää Abelardin esineelle ja toinen esine voittaa Abelardin esineen. On ilmeistä, että semanttisessa pelissä $G(\mathcal{M}, \varnothing, \varphi)$ Eloisella ei ole voittostrategiaa. Eloise ei kummallakaan siirtovuorollaan näe Abelardin valintaa, eikä myöskään omaa aiempaa valintaansa, vaan joutuu valitsemaan satunnaisesti, joten peli voi päättyä kumman tahansa voittoon. Esimerkiksi Eloise voittaa pelierän $((x, p), (y, k), (z, s))$, mutta Abelard voittaa pelierän $((x, p), (y, s), (z, k))$ sekä useimmat muut mahdolliset pelierät.

Eloiselle saadaan signalointimahdollisuus yhdistämällä disjunktiolla kaavaa ψ itseensä kaksi kertaa, jolloin saadaan kaava $\varphi' = \forall x((\psi_1 \vee \psi_2) \vee \psi_3)$, jossa $\psi_1 = \psi_2 = \psi_3 = \psi$.

Ajatellaan Eloisen nyt olevan kolmen pelaajan tiimi, jotka pelaavat yhteisellä strategialla σ. Eloise_1 tekee siirrot disjunktioiden kohdalla, joten hän näkee Abelardin valinnan. Eloise_1 pelaa seuraavasti:

$$\begin{aligned}
&\sigma(x, k) = (\psi_1 \vee \psi_2) \text{ ja } \sigma((x, k), (\psi_1 \vee \psi_2)) = \psi_1 \\
&\sigma(x, p) = (\psi_1 \vee \psi_2) \text{ ja } \sigma((x, p), (\psi_1 \vee \psi_2)) = \psi_2 \\
&\sigma(x, s) = \psi_3.
\end{aligned}$$

Eloise_2 valitsee y:n tulkinnan näkemättä Abelardin valintaa, mutta tekee valintansa pelattavan alikaavan perusteella noudattamalla strategiaa $\sigma(\psi_1) = (y, s)$, $\sigma(\psi_2) = (y, k)$ ja $\sigma(\psi_3) = (y, p)$.

Eloise_3 taas valitsee z:n tulkinnan näkemättä Abelardin valintaa tai Eloise_2:n valintaa, mutta voi myös tehdä siirtonsa pelattavan alikaavan perusteella: Jos pelataan kaavan ψ_1 alikaavaa, strategian σ mukainen siirto on (z, p). Jos pelataan kaavan ψ_2 alikaavaa, tehdään siirto (z, s). Jos pelataan kaavan ψ_3 alikaavaa, siirto on (z, k).

Strategia σ on uniformi ja sitä noudattamalla pelin päättyessä mahdollisten literaalien joukko on sama kuin voittorelaatio $<$, joten σ on voittostrategia.

$\dashv$

Samassa kaavassa voi esiintyä kahdenlaisia signalointimahdollisuuksia. Määritellään IF-kaava φ seuraavasti:

$$\varphi = \forall x \forall y(\psi_1 \vee \psi_2), \tag{4.5}$$

jossa

$$\psi_1 = \psi_2 = (\exists v/\{x\})\exists z(\exists u/\{y\})(v = x \wedge u = y). \tag{4.6}$$

Kaavan φ semanttisessa pelissä Eloisen täytyy siis valita v:n arvo samaksi kuin Abelardin valitsema x:n arvo näkemättä valintatilanteessa x:n arvoa, ja samaan tapaan valita u:n arvo samaksi kuin y:n arvo näkemättä valintatilanteessa y:n arvoa. Ilman signalointia tämä ei onnistuisi, mutta kun peli pelataan kaksialkioisessa mallissa $\mathcal{M} = (\{a, b\})$, Eloisella on voittostrategia, jossa hän signaloi itselleen informaatiota sekä konnektiivin että kvanttorin avulla.

Eloise voi signaloida x:n arvon valitsemalla ψ_1, kun Abelard on valinnut (x, a), ja ψ_2, kun Abelard on valinnut (x, b), ja sitten valita v:n arvon oikein katsomalla, kumpaa alikaavaa pelataan. Tämän jälkeen Eloise voi signaloida itselleen y:n arvon valitsemalla z:n arvon samaksi, ja u:n arvoa valitessaan ottaa z:n arvon. Tämä strategia ei kuitenkaan toimi, jos mallissa on enemmän kuin kaksi alkiota, koska tällöin konnektiivin avulla signalointi ei takaa Eloiselle voittoa.

4.3 Vastapelaajan siirrot signaaleina

Informaatiorajoituksia voi yrittää kiertää muutenkin kuin signaloimalla eli välittämällä itselleen piilotettua informaatiota. Tarkastellaan tapausta, jossa Eloise käyttää Abelardin tekemiä siirtoja viestittämään piilotettua informaatiota Abelardin oletetun strategian perusteella. Tällöin Abelard ikään kuin signaloi tahattomasti Eloiselle tältä piilotettua informaatiota, vaikka kyse ei tarkalleen ottaen ole signaloinnista eli informaation välittämisestä itselleen omilla siirroillaan.

Esimerkki 4.4. Otetaan esimerkiksi IF-kaava φ:

$$\forall x(\exists y/\{x\})((\exists z/\{x, y\})(x = y \vee z \neq x) \wedge (\exists z/\{x, y\})(x \neq y \vee z \neq x)) \tag{4.7}$$

Merkitään kaavassa konjunktiolla yhdistettyjä alikaavoja $\psi_1 = (\exists z/\{x, y\})(x = y \vee z \neq x)$ ja $\psi_2 = (\exists z/\{x, y\})(x \neq y \vee z \neq x)$. Peli pelataan kaksialkioisessa mallissa $\mathcal{M} = (\{a, b\})$.

Eloisen strategia on sellainen, että valitaan aina (y, a), ja katsotaan miten Abelard valitsee konjunktion kohdalla. Nyt täytyy olettaa, että Abelard pelaa rationaalisesti ja pyrkien pelin voittoon. Oletuksena tässä on, että Abelard valitsee alikaavoista sen, jossa jo tulkitut muuttujat x ja y sisältävä literaali, eli $x = y$ tai $x \neq y$, on annetuilla tulkinnoilla epätosi. Jos Abelard valitsee ψ_1, Eloise voi päätellä, että x:n arvo on b. Tällöin Eloise tekee siirron (z, a), ja sitten valitsee disjunktiosta literaalin $z \neq x$. Samaan tapaan jos Abelard valitsee ψ_2, Eloise voi päätellä, että x:n arvo on a. Nyt Eloisen siirto on (z, b), ja disjunktiosta valitaan literaali $z \neq x$. Kummassakin tapauksessa pelin lopussa literaali $z \neq x$ on annetuilla tulkinnoilla tosi, eli Eloise voittaa pelin.

Tämä uniformi strategia ei kuitenkaan ole voittostrategia, sillä ei ole takeita siitä, että Abelard pelaa oletuksen mukaisesti. Abelard saattaa myös pelata täysin satunnaisesti tai oman etunsa vastaisesti. Pelierä, jossa Eloise noudattaa tätä strategiaa mutta Abelard ei pelaa oletetusti, voi olla esimerkiksi $h = ((x, a), (y, a), \psi_1, (z, a), z \neq x)$. Tämän pelierän voittaa Abelard.

Edellä kuvatussa strategiassa Eloisen valinta disjunktion kohdalla on riippumaton muuttujien tulkinnoista, eli strategia on myös konnektiivin suhteen uniformi. Tilanne on sama kuin jos disjunktioon liitettäisiin piilojoukko; tällöin konnektiivina olisi $\vee/\{x, y, z\}$. [1] Jos Eloisen strategiaa muutetaan hiukan niin, että disjunktion kohdalla nähdessään kaikkien muuttujien tulkinnat Eloise valitsee literaaleista sen, kumpi on tosi, strategia onkin voittostrategia.

Nyt kaikki mahdolliset pelierät, joissa Eloise noudattaa tätä strategiaa, ovat

$$
\begin{aligned}
h_1 &= ((x, a), (y, a), \psi_2, (z, b), z \neq x)\\
h_2 &= ((x, a), (y, a), \psi_1, (z, a), x = y)\\
h_3 &= ((x, b), (y, a), \psi_1, (z, a), z \neq x)\\
h_4 &= ((x, b), (y, a), \psi_2, (z, b), x \neq y),
\end{aligned}
$$

jotka kaikki Eloise voittaa.

$\dashv$

Esimerkin pelissä Eloise valitsee z:n arvon sen perusteella, miten hän ennakoi Abelardin pelaavan. Oikeissa peleissä onkin usein hyödyllistä yrittää ennakoida vastapelaajan strategia ja pelata sen mukaisesti. Kuten esimerkin semanttisessa pelissä, joissain tapauksissa vastapelaajan pelitapaa tarkastelemalla ja sitä ennakoimalla voidaan päätellä piilotettua informaatiota. Esimerkiksi pokerissa pelaajan panostusten perusteella voidaan yrittää arvioida, millaiset kortit pelaajalla on kädessä. Pokerissa pelaajien kannattaakin harjoittaa niin sanotusti käänteistä signalointia, eli yrittää harhauttaa muita pelaajia bluffaamalla tai pelaamalla epäsäännönmukaisesti ([12, s. 54]).

[1] Joissain IF-logiikan versioissa sallitaan riippumattomien kvanttoreiden lisäksi myös tällaiset riippumattomat konnektiivit (esim. [8]). Konnektiivin riippumattomuus voidaan kuitenkin ilmaista myös tietynlaisella riippumattomalla kvantifioinnilla, joten piilojoukkojen salliminen vain kvanttoreissa ei rajoita sitä, mitä IF-logiikalla voidaan ilmaista [11, s. 97].

IF-logiikan varhaisemmissa versioissa on sallittu myös konnektiivien esiintyminen piilojoukoissa. Alunperin Hintikka ja Sandu [7] esittelivät IF-logiikan siten, että mikä tahansa ilmaisu voidaan merkitä kauttaviivalla riippumattomaksi mistä vain ilmaisusta. Jos nyt kaavaan 4.7 lisätään konjunktio kvanttorin $(\exists z/\{x, y\})$ piilojoukkoon, Eloise ei saa nähdä Abelardin konjunktion kohdalla tekemää valintaa eikä siis voi käyttää kuvattua strategiaa. Piilotetut valinnat konnektiivien kohdalla voivat olla kuitenkin ongelmallisia pelin pelattavuuden kannalta. Hodges [9, s. 547] huomauttaa, että pelaajan on aina voitava tietää, mistä tilanteesta peliä jatketaan, joten konnektiivin kohdalla tehtävää alikaavan valintaa ei itse asiassa voi piilottaa.

5 IF-logiikan ilmaisuvoima

IF-logiikan perustava ominaisuus eli kyky esittää kvanttorien välisiä riippumattomuuksia mahdollistaa sen, että IF-logiikalla voidaan ilmaista enemmän asioita kuin ensimmäisen kertaluvun logiikalla.

Loogisilla kielillä voidaan ilmaista erilaisia mallien ominaisuuksia. Esimerkiksi ominaisuus 'yksialkioisuus' voidaan ilmaista ensimmäisen kertaluvun lauseella $\exists x \forall y(y = x)$, koska lause on tosi täsmälleen niissä malleissa, joissa on vain yksi alkio, ja epätosi kaikissa muissa malleissa. Tietyn ominaisuuden määrittelevä lause määrittelee siis samalla mallien luokan. Mallien ominaisuus P onkin oleellisesti sama asia kuin niiden mallien luokka $\mathcal{K}_P$, joilla on tämä ominaisuus.

Määritelmä 5.1. (Ks. [11, Määr. 6.1 ja Määr 6.2])

Olkoon L aakkosto ja $\mathcal{K}_P$ luokka L-malleja, johon kuuluu täsmälleen ne mallit, joilla on ominaisuus P.

Ensimmäisen kertaluvun logiikan lause φ_{FO} *määrittelee* ominaisuuden P, jos jokaisella L-mallilla $\mathcal{M}$ pätee

$$\mathcal{M} \in \mathcal{K}_P \quad \text{jos ja vain jos} \quad \mathcal{M} \models \varphi_{\mathrm{FO}}.$$

Tällöin ominaisuus P on *määriteltävä* ensimmäisen kertaluvun logiikalla ja sanotaan, että mallien luokka $\mathcal{K}_P$ on *elementaarinen*.

Samaan tapaan IF-logiikan lause φ_{IF} *määrittelee* ominaisuuden P, jos jokaisella L-mallilla $\mathcal{M}$ pätee

$$\mathcal{M} \in \mathcal{K}_P \quad \text{jos ja vain jos} \quad \mathcal{M} \models^+ \varphi_{\mathrm{IF}}.$$

Tällöin ominaisuus P – ja siis samalla mallien luokka $\mathcal{K}_P$ – on *määriteltävä* IF-logiikalla.

$\dashv$

Loogisen kielen eli logiikan *ilmaisuvoima* kuvaa sitä, miten paljon erilaisia mallien ominaisuuksia kielessä pystytään määrittelemään. Eri logiikoita voidaan asettaa järjestykseen ilmaisuvoiman suhteen.

Määritelmä 5.2. Olkoot $\mathcal{L}$ ja $\mathcal{L}'$ eri logiikoita.

- $\mathcal{L}'$ on ilmaisuvoimaisempi kuin $\mathcal{L}$ eli $\mathcal{L} < \mathcal{L}'$, jos niille pätee ehdot:
    1. kaikilla ominaisuuksilla P pätee: jos P on määriteltävä logiikalla $\mathcal{L}$, niin P on määriteltävä logiikalla $\mathcal{L}'$, ja
    2. on olemassa ominaisuus P', joka on määriteltävä logiikalla $\mathcal{L}'$, mutta ei logiikalla $\mathcal{L}$.

- $\mathcal{L}'$ on vähintään yhtä ilmaisuvoimainen kuin $\mathcal{L}$ eli $\mathcal{L} \leq \mathcal{L}'$, jos edellisen kohdan ehto 1 pätee.

- Logiikoilla $\mathcal{L}$ ja $\mathcal{L}'$ on sama ilmaisuvoima eli $\mathcal{L} \equiv \mathcal{L}'$, jos $\mathcal{L} \leq \mathcal{L}'$ ja $\mathcal{L}' \leq \mathcal{L}$.

$\dashv$

Koska jokainen ensimmäisen kertaluvun lause on samalla IF-logiikan lause, jossa kaikki piilojoukot ovat tyhjiä, jokainen ensimmäisen kertaluvun logiikalla määriteltävä ominaisuus on määriteltävä myös IF-logiikalla. Tämän perusteella IF-logiikka on vähintään yhtä ilmaisuvoimainen kuin ensimmäisen kertaluvun logiikka, eli FO $\leq$ IF ([11, Seuraus 6.4]). IF-logiikalla voidaan kuitenkin määritellä myös ominaisuuksia, joiden määrittelyyn tarvitaan ensimmäisen kertaluvun logiikkaa vahvempaa kieltä, toisen kertaluvun logiikkaa.

5.1 Toisen kertaluvun logiikka

Logiikan kielen ilmaisuvoimaa voidaan lisätä kvantifioimalla monimutkaisempia entiteettejä, eli siirtymällä korkeampaan kertalukuun. Kun ensimmäisen kertaluvun logiikassa kvantifioidaan vain muuttujia, eli mallin universumin alkioita, toisen kertaluvun logiikassa voidaan kvantifioida myös relaatioita ja funktioita. Esimerkiksi toisen kertaluvun logiikan lause $\exists R \forall x R(x,x)$ sanoo, että on olemassa relaatio, jossa jokainen muuttuja on itsensä kanssa. Kun R on identiteettirelaatio, lause on selvästi tosi. Yksipaikkaiset relaatiot voidaan samaistaa mallin universumin osajoukkoihin, joten toisen kertaluvun logiikassa voidaan kvantifioida joukkoja, ja esittää joukkoja koskevia väitteitä. Relaatioiden kvantifioinnin ansiosta toisen kertaluvun logiikassa voidaan määritellä useita sellaisia ominaisuuksia, joita ensimmäisen kertaluvun logiikassa ei pystytä määrittelemään.

Eksistentiaalinen toisen kertaluvun logiikka koostuu kaikista niistä toisen kertaluvun logiikan kaavoista, joissa kaikki toisen kertaluvun kvanttorit ovat eksistenssikvanttoreita, ja ne esiintyvät kaavan alussa. Eksistentiaalisesta toisen kertaluvun logiikasta käytetään yleisesti lyhennettä ESO (*existential second-order*) sekä merkintää Σ^1_1. [1]

Esimerkiksi $\exists R \exists S \forall x \forall y (R(x,y) \wedge \exists z S(z,x,y))$ on Σ^1_1-kaava, sillä ainoat relaatiomuuttujat eksistenssikvantifioidaan ja ne esiintyvät kaavan alussa. Toisen kertaluvun kaava $\exists f \forall g \exists x \exists y (f(x) = g(y))$ ei ole Σ^1_1-kaava, sillä kaavassa on universaalikvantifioitu funktiomuuttuja. Myöskään $\forall x \exists y (x = y \wedge \exists f (f(x) = f(y)))$ ei ole Σ^1_1-kaava, sillä toisen kertaluvun eksistenssikvanttori $\exists f$ ei ole kaavan alussa.

Jokainen IF-lause – samoin kuin ensimmäisen kertaluvun logiikan lause – on ekvivalentti erityisen eksistentiaalisen toisen kertaluvun logiikan kaavan kanssa, jota kutsutaan kaavan toisen kertaluvun *Skolem-muodoksi* ([11, Lause 6.10]).

Ensimmäisen kertaluvun Skolem-muodossa muuttujien väliset riippuvuudet esitetään korvaamalla eksistenssikvantifioidut muuttujat aina uuden funktiosymbolin sisältävillä termeillä. Skolem-muodon uusia funktioita kutsutaan Skolem-funktioiksi, ja niiden avulla kaavan muuttujien väliset riippuvuudet tulevat selvästi näkyviin. Skolem-funktion argumentteja ovat kaikki ne muuttujat, joista korvattu muuttuja on riippuvainen.

Esimerkiksi kaavassa $\forall x \exists y \forall z R(x,z,y)$ eksistenssikvantifioitu muuttuja y riippuu vain muuttujasta x. Kaava muutetaan Skolem-muotoon korvaamalla y termillä $f(x)$, jolloin

[1] Merkintätavassa yläindeksi kertoo kvantifioitavien entiteettien korkeimman kertaluvun: 0 on ensimmäisen kertaluvun kvantifiointi vain mallin alkioiden yli, 1 on toisen kertaluvun kvantifiointi relaatioiden yli, ja niin edelleen monimutkaisempiin entiteetteihin ja korkeampiin kertalukuihin. Kirjain Σ kertoo, että kaava alkaa eksistenssikvanttorilla; universaalikvanttorilla alkavia kaavoja merkitään kirjaimella Π. Alaindeksi kertoo kuinka monta kertaa korkeimman kertaluvun kvantifiointien kvanttorityyppi vaihtuu, ja alaindeksi on 0, kun näitä kvanttoreita ei esiinny lainkaan. Esimerkiksi $\exists x \exists y \forall z \exists w R(x,y,z,w)$ on Σ^0_3-lause ja $\forall R \exists S \forall x (R(x) \rightarrow S(x))$ on Π^1_2-lause.

saadaan $\forall x \forall z R(x, z, f(x))$. Tästä muodosta nähdään suoraan, että relaation R kolmas jäsen riippuu ensimmäisestä jäsenestä x jollakin tavalla, jota kuvaa Skolem-funktio f. Jos kaavan kvanttorien järjestystä vaihdetaan ja tarkastellaankin kaavaa $\forall x \forall z \exists y R(x, z, y)$, saadaan tälle Skolem-muoto $\forall x \forall z R(x, z, f(x, z))$. Koska nyt y riippuu kummastakin universaalikvantifioidusta muuttujasta, se on korvattu termillä $f(x, z)$.

Toisen kertaluvun Skolem-muodossa Skolem-funktioita kohdellaan funktiomuuttujina ja ne eksistenssikvantifioidaan. Toisen kertaluvun Skolem-muodossa oleva kaava on muotoa:

$$\exists f_1 \ldots \exists f_n \varphi,$$

jossa $f_1, \ldots, f_n$ ovat Skolem-funktioita ja φ on ensimmäisen kertaluvun kaava, jossa ei esiinny eksistenssikvanttoreita.

Esitellään tässä IF-lauseiden muuttaminen Skolem-muotoon esimerkkien avulla, ja ohitetaan täsmällisempi määritelmä (ks. [11, Määr. 4.9 ja 6.8]).

Olkoon φ IF-lause $\forall x \exists z (\forall y/\{z\})(\exists w/\{x, z\})(x = z \wedge y = w)$. Kaavan muokkaaminen aloitetaan sisimmästä kvanttorista. Ensin korvataan vain muuttujasta y riippuva eksistenssikvantifioitu w uuden funktiomuuttujan sisältävällä termillä $f(y)$, ja saadaan kaava $\exists f \forall x \exists z (\forall y/\{z\})(x = z \wedge y = f(y))$. Koska Skolem-muodossa tarkastellaan vain kaavan totuutta, universaalikvantifioitujen muuttujien riippuvuuksia ei oteta huomioon, joten muutetaan kvanttori $(\forall y/\{z\})$ muotoon $\forall y$. Korvataan sitten vielä muuttujasta x riippuva eksistenssikvantifioitu z termillä $g(x)$. Näin saadaan lauseen φ toisen kertaluvun Skolem-muoto $\exists g \exists f \forall x \forall y (x = g(x) \wedge y = f(z))$.

Samalla menettelyllä saadaan muodostettua kaavan $\forall x \exists z (\exists y/\{x\})(x < y)$ toisen kertaluvun Skolem-muoto on $\exists f \exists g \forall x (x < g(f(x))$. Ensin on korvattu vain muuttujasta z riippuva y termillä $g(z)$, jolloin saadaan kaava $\exists g \forall x \exists z (x < g(z))$, ja sitten on korvattu muuttujasta x riippuva z vielä termillä $f(x)$.

Skolem-funktiot koodaavat Eloisen voittostrategian eksistenssikvanttorien osalta.[2] Jos lauseen, jossa ei esiinny disjunktioita, Skolem-muoto on tosi, olemassaolevat Skolem-funktiot muodostavat strategian Eloiselle, jota noudattamalla jokainen pelierä päättyy toteen kaavaan eli Eloisen voittoon, ja joka on uniformi, koska Skolem-funktiot riippuvat vain Eloiselle näkyvissä olevista muuttujista. Lauseen Skolem-muoto siis kertoo lauseen totuusehdot.

5.2 Henkin-kvanttorit

Ennen kuin IF-logiikkaa oli kehitetty Leon Henkin (1961, [5]) esitti toisenlaisen tavan esittää kvanttorien välisiä riippumattomuuksia: osittainjärjestetyt kvanttorit, joita kutsutaan myös Henkin-kvanttoreiksi. [3]

Yksinkertaisin Henkin-kvanttori on neljän kvanttorin muodostama osittainjärjestetty jono, joka kirjoitetaan kahtena rivinä sulkujen sisään. Tällainen kvanttori on seuraavassa

[2] Hintikka [6, s. 31] esittää tavan antaa myös disjunktioille skolem-funktioiden tapainen käännös toisen kertaluvun logiikkaan, joka täydentää Eloisen voittostrategian.

[3] Samassa artikkelissa Henkin myös viittasi peliteoreettisen semantiikan ideaan ja esitti, että kaavat, joissa esiintyy useita – jopa ääretön määrä – kvanttoreita vuorotellen, on luontevaa tulkita kahden pelaajan peleinä, jossa pelaajat vuorotellen valitsevat kvantifioitujen muuttujien arvot ([5, s. 179]).

kaavassa:

$$\begin{pmatrix} \forall x & \exists z \\ \forall y & \exists u \end{pmatrix} R(x,y,z,u), \tag{5.1}$$

Kaavan Henkin-kvanttorisssa $\exists z$ riippuu kvanttorista $\forall x$ mutta ei kvanttorista $\forall y$, ja $\exists u$ riippuu kvanttorista $\forall y$ mutta ei kvanttorista $\forall x$.

Jokainen Henkin-kvanttori voidaan esittää standardimuodossa ([17, s. 542], [1]):

$$\begin{pmatrix} \forall x_1^1 & \forall x_1^2 & \dots & \forall x_1^n & \exists y_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \forall x_k^1 & \forall x_k^2 & \dots & \forall x_k^n & \exists y_k \end{pmatrix} \tag{5.2}$$

Jokainen $\exists y_i$ riippuu vain kvanttoreista $\forall x_i^1 \dots \forall x_i^n$ mutta on kaikista muista kvanttoreista riippumaton. Samoin jokainen $\forall x_i^m$ riippuu vain kvanttoreista $\forall x_i^1 \dots \forall x_i^{m-1}$.

Henkin-kvanttoreita ei voida kirjoittaa tavallisen ensimmäisen kertaluvun logiikan kvanttorijonoina, vaan ne tuovat logiikkaan lisää ilmaisuvoimaa. Jo 1958 Ehrenfeucht todisti, että Henkin-kvanttorilla voidaan ilmaista sellaisia ominaisuuksia, jotka eivät ole määriteltävissä ensimmäisen kertaluvun logiikalla ([5, s. 182]). Ehrenfeuchtin todistuksessa tällaisena ominaisuutena on kaavan ekstension äärettömyys. Kaavan ekstensiolla tarkoitetaan kaikkien niiden universumin alkioiden joukkoa, joille kyseinen kaava pätee. Esimerkiksi luonnollisten lukujen mallissa kaavan $x < 2$ ekstensio on joukko $\{0, 1\}$, sillä vain näillä luvuilla kaava on tosi. Ehrenfeuchtin todistusta vastaavalla tavalla voidaan määritellä myös mallin universumin äärettömyys.

Esimerkki 5.3. Mallin universumin äärettömyys voidaan määritellä Henkin-kvanttorin sisältävällä lauseella φ_∞:

$$\exists z \begin{pmatrix} \forall x \; \exists v \\ \forall y \; \exists w \end{pmatrix} ((x = y \leftrightarrow v = w) \wedge z \neq v). \tag{5.3}$$

Se, miksi φ_∞ on tosi täsmälleen äärettömissä malleissa, tulee esille, kun muutetaan lauseen Henkin-kvanttorilla alkava alikaava Skolem-muotoon. Näin saadaan φ_∞:n kanssa ekvivalentti lause:

$$\exists z \exists f \exists g \forall x \forall y ((x = y \leftrightarrow f(x) = g(y)) \wedge z \neq f(x)). \tag{5.4}$$

Jakamalla lauseessa esiintyvä ekvivalenssi osiin saadaan lause:

$$\exists z \exists f \exists g \forall x \forall y ((x{=}y \to f(x){=}g(y)) \wedge (f(x){=}g(y) \to x{=}y) \wedge z{\neq} f(x)). \tag{5.5}$$

Konjunktion ensimmäinen osa $(x = y \to f(x) = g(y))$ universaalikvantifioituna sanoo, että funktiot f ja g kuvaavat kaikki alkiot samalla tavalla, joten itse asiassa $f = g$. Kun sovelletaan tätä tietoa lauseeseen 5.5, saadaan φ_∞:n kanssa ekvivalentti lause:

$$\exists z \exists f \forall x \forall y ((x{=}y \to f(x){=}f(y)) \wedge (f(x){=}f(y) \to x{=}y) \wedge z{\neq} f(x)). \tag{5.6}$$

Tämä lause sanoo, että on olemassa kuvaus mallin alkioiden välillä, joka on injektio, eli jokaisella mallin alkiolla on eri kuva, ja lisäksi on olemassa sellainen mallin alkio, joka ei ole minkään alkion kuva. Tämä on mahdollista vain kun mallissa on ääretön määrä alkioita. Tarkemmin sanottuna lause 5.6 määrittelee mallin Dedekind-äärettömyyden: joukko – tässä mallin universumi – on Dedekind-ääretön, kun on olemassa injektio joukolta sen aidolle osajoukolle. (Ks. esim. [15, 4.1].)

$\dashv$

Henkin-kvanttorit voidaan kuitenkin kirjoittaa ekvivalentisti IF-logiikalla. Kaava 5.1 IF-logiikalle käännettynä on:

$$\forall x \exists z (\forall y / \{x, z\})(\exists u / \{x, z\}) R(x, y, z, u) \tag{5.7}$$

Lauseen 3.11 nojalla voidaan kaavan totuutta tarkasteltaessa jättää universaalikvanttorin piilojoukko pois, joten tällöin kaava 5.1 voidaan kääntää myös IF-logiikan kaavaksi:

$$\forall x \exists z \forall y (\exists u / \{x, z\}) R(x, y, z, u). \tag{5.8}$$

Näillä kaavoilla sekä Henkin-kvanttorin sisältävällä kaavalla 5.1 on kaikilla sama Skolem-muoto $\exists f \exists g \forall x \forall y R(x, y, f(x), g(y))$.

Walkoe [17, Lause 4.3] osoitti, että jokainen Σ_1^1-lause on ekvivalentti jonkin lauseen $Q\psi$ kanssa, jossa Q on standardimuotoinen Henkin-kvanttori ja ψ kvanttoriton ensimmäisen kertaluvun lause. Henkin-kvanttoreilla saadaan siis sama ilmaisuvoima kuin eksistentiaalisella toisen kertaluvun logiikalla; kaikki Σ_1^1-määriteltävät ominaisuudet ovat määriteltäviä myös Henkin-kvanttoreiden avulla. Koska jokainen Henkin-kvanttorin sisältävä lause on ekvivalentti jonkin IF-logiikan lauseen kanssa, myös IF-logiikalla voidaan määritellä kaikki samat ominaisuudet.

Tästä seuraa suoraan seuraava tunnettu tulos (mm. [11], [8, s. 421], [1]):

Lause 5.4. IF*-logiikan ilmaisuvoima on sama kuin eksistentiaalisen toisen kertaluvun logiikalla, eli*

$$\mathrm{IF} \equiv \Sigma_1^1.$$

5.3 Signaloinnin vaikutus ilmaisuvoimaan

IF-logiikan ilmaisuvoimaisuus ei perustu pelkästään Henkin-kvanttoreita vastaaviin kvanttoriyhdistelmiin. Myös signalointia hyödyntämällä voidaan määritellä ominaisuuksia, jotka eivät ole määriteltäviä tavallisessa ensimmäisen kertaluvun logiikassa. Tarkastellaan yhtä tällaista ominaisuutta seuraavassa esimerkissä.

Esimerkki 5.5. Olkoon φ signalointikuvion sisältävä IF-lause

$$\forall x \exists y (\exists z / \{x\}) \Big((P(x) \leftrightarrow \neg P(y)) \wedge z = x \Big). \tag{5.9}$$

Huomataan, että lauseen φ kvantifiointeja ei voida korvata Henkin-kvanttorilla, sillä Henkin-kvanttorissa eksistenssikvanttorit ovat aina toisistaan riippumattomia. Lauseessa φ taas on oleellista, että kvanttori $(\exists z / \{x\})$ on riippuvainen kvanttorista $\exists y$.

Osoitetaan, että IF-lause φ määrittelee niiden mallien luokan, joissa alkioita, joille pätee P on yhtä monta kuin niitä alkioita, joille P ei päde.

Predikaatin P tulkinta mallissa $\mathcal{M}$ on $P^{\mathcal{M}} = \{x \in M \mid P(x) \text{ on tosi}\}$, joka on kaavan $P(x)$ ekstensio. Kaavan $\neg P(x)$ ekstensio on joukon $P^{\mathcal{M}}$ komplementti $\overline{P^{\mathcal{M}}} = M \setminus P^{\mathcal{M}}$. Lause φ siis määrittelee joukkojen $P^{\mathcal{M}}$ ja $\overline{P^{\mathcal{M}}}$ yhtämahtavuuden, jota merkitään $|P^{\mathcal{M}}| = |\overline{P^{\mathcal{M}}}|$.

Osoitetaan, että φ on tosi täsmälleen niissä malleissa, joissa $|P^{\mathcal{M}}| = |\overline{P^{\mathcal{M}}}|$.

Oletetaan ensin, että mallissa $\mathcal{M}$ pätee $|P^{\mathcal{M}}| = |\overline{P^{\mathcal{M}}}|$. Näytetään, että tällöin Eloisella on signalointia hyödyntävä voittostrategia pelissä $G(\mathcal{M}, \varnothing, \varphi)$. Koska joukoissa $P^{\mathcal{M}}$ ja $\overline{P^{\mathcal{M}}}$ on yhtä monta alkiota, Eloise voi muodostaa näiden joukkojen välille yksi-yhteenvastaavuuden eli bijektion $f : P^{\mathcal{M}} \to \overline{P^{\mathcal{M}}}$ ja sen käänteiskuvauksen $f^{-1} : \overline{P^{\mathcal{M}}} \to P^{\mathcal{M}}$.

Nyt Eloisen strategia σ on seuraavanlainen: kun Abelard on tehnyt siirron (x, a), Eloise valitsee $\sigma((x, a)) = (y, g(a))$ siten, että jos $a \in P$, niin $g = f$ ja jos $a \in \overline{P^{\mathcal{M}}}$, niin $g = f^{-1}$. Tämän jälkeen Eloise voi näkemättä x:n arvoa valita z:n arvon sopivasti käyttämällä y:n arvoa signaloimaan x:n arvoon liittyvää informaatiota. Eloisen siirto on $\sigma((y, g(a)) = (z, g^{-1}(g(a)))$. Tätä strategiaa noudattamalla Eloise voittaa jokaisen pelierän, sillä identiteetti $z = x$ on tällöin tosi ja kuvaus g poimii aina y:n arvon eri joukosta kuin mihin x:n arvo kuuluu, joten ekvivalenssi $P(x) \leftrightarrow \neg P(y)$ on tosi. Strategia σ on myös uniformi, koska y:n arvon ollessa sama z:n arvo valitaan aina samalla tavalla. Siispä σ on voittostrategia, eli φ on tosi mallissa $\mathcal{M}$.

Oletetaan sitten, että Eloisella on voittostrategia pelissä $G(\mathcal{M}, \varnothing, \varphi)$ eli lause φ on tosi mallissa $\mathcal{M}$.

Muodostetaan lauseen φ kanssa totuusekvivalentti toisen kertaluvun Skolem-muoto φ_{sk}:

$$\exists f \exists g \forall x \Big((P(x) \leftrightarrow \neg P(f(x))) \wedge g(f(x)) = x \Big). \tag{5.10}$$

Koska φ_{sk} on tosi, on olemassa kuvaus $f : M \to M$, joka kuvaa jokaisen alkion, jolle pätee predikaatti P, alkioksi, jolle ei päde P, ja toisinpäin. Tämä kuvaus on yhdiste kuvauksista $f_1 : P^{\mathcal{M}} \to \overline{P^{\mathcal{M}}}$ ja $f_2 : \overline{P^{\mathcal{M}}} \to P^{\mathcal{M}}$ eli $f = f_1 \cup f_2$. Lisäksi koska $g(f(x)) = x$ pätee kaikilla x, g on f:n käänteiskuvaus, eli f on bijektio. On siis olemassa bijektio f joukkojen $P^{\mathcal{M}}$ ja $\overline{P^{\mathcal{M}}}$ välillä, joten $|P^{\mathcal{M}}| = |\overline{P^{\mathcal{M}}}|$.

Predikaatin ja sen negaation ekstensioiden yhtämahtavuus voidaan siis määritellä IF-logiikalla hyödyntämällä signalointia.

$\dashv$

Huomautus. Vastaavan ominaisuuden voi ilmaista IF-logiikalla myös ilman signalointia Henkin-kvanttoria vastaavalla kvantifioinnilla. Hintikka [6, s. 186] määrittelee yhtämahtavuuden kahden predikaatin F_1 ja F_2 ekstensioille seuraavalla lauseella[4]:

$$\begin{aligned} \forall x \forall z (\exists y/\{z\})(\exists u/\{x, y\})\Big((F_1(x) \to F_2(y)) \wedge (F_2(z) \to F_1(u)) \wedge \\ ((y = z) \leftrightarrow (u = x))\Big). \end{aligned} \tag{5.11}$$

Tässä on kyseessä yleisempi ominaisuus kuin esimerkissä 5.5, sillä predikaattien F_1 ja F_2 ekstensioiden ei tarvitse olla erillisiä. Täsmälleen sama ominaisuus kuin esimerkissä 5.5 saadaan sijoittamalla lauseeseen 5.11 P ja $\neg P$ predikaattien F_1 ja F_2 paikalle.

[4]Merkintätapa on muutettu vastaamaan tässä tutkielmassa käytettyä.

Lauseen 5.11 pelissä Eloise tekee muuttujien tulkintojen valinnat pelkästään Abelardin valitsemien muuttujien tulkintojen perusteella, eikä signaloimalla omilla siirroillaan itselleen tarvittavaa informaatiota. Eloisella on voittostrategia eli lause on tosi kaikissa sellaisissa malleissa, joissa predikaattien F_1 ja F_2 ektensioiden välillä on Eloisen tuntema bijektio f. Kun Eloise valitsee $y = f(x)$ ja $u = f^{-1}(z)$, Eloise voittaa aina pelin. Tämä on kuitenkin mahdollista vain, kun bijektio voidaan muodostaa, eli kun predikaattien F_1 ja F_2 ekstensiot ovat yhtämahtavat.

Esimerkissä 5.5 IF-logiikalla määriteltyä ominaisuutta ei kuitenkaan tunnetusti pystytä määrittelemään ensimmäisen kertaluvun logiikalla (esim. [15, luku 4.1] ja [6, s. 187]).

Lause 5.6. *Kahden predikaatin tai kaavan ekstensioiden yhtämahtavuus ei ole määriteltävissä ensimmäisen kertaluvun logiikalla.*

Tuloksen todistusta varten otetaan käyttöön pelaamiseen pohjautuva malliteoreettinen työkalu, Ehrenfeucht-Fraïssé-peli, eli lyhyesti EF-peli. Täsmällinen EF-pelin määrittely ja siihen liittyvien tulosten todistukset ohitetaan, mutta esitetään ennen lauseen 5.6 todistusta lyhyesti pelin periaate ja kulku. EF-pelit ja niiden käyttö määrittelemättömyystuloksien todistamiseen esitetään tarkemmin teoksissa *Finite model theory* [3, luku 1] ja *Elements of finite model theory* [10, luku 3].

EF-pelissä vertaillaan kahta mallia $\mathcal{A}$ ja $\mathcal{B}$. Pelaajia on kaksi, duplikaattori ja spoileri. Duplikaattorin tavoitteena on osoittaa, että mallit ovat samanlaiset, ja spoileri pyrkii osoittamaan eron mallien välillä. Pelissä pelataan ennalta määrätty määrä m kierroksia, joiden aikana spoileri valitsee yhden malleista ja sieltä jonkin alkion, ja sitten duplikaattori valitsee jonkin alkion toisesta mallista. Duplikaattori voittaa pelin, jos pelin päätyttyä mallista $\mathcal{A}$ valitut m alkiota ja mallista $\mathcal{B}$ valitut m alkiota muodostavat osittaisisomorfismin mallien $\mathcal{A}$ ja $\mathcal{B}$ välillä. Tämä tarkoittaa, että mallit ovat valittujen alkioiden osalta rakenteeltaan samat. Jos duplikaattorilla on voittostrategia m kierroksen EF-pelissä, eli hän pystyy kaikissa peleissä valitsemaan osittaisisomorfismin säilyttävät alkiot, merkitään $\mathcal{A} \cong_m \mathcal{B}$. ([10, s. 26–27].)

EF-pelien yhteyden mallien ominaisuuksien määriteltävyyteen antaa seuraava tulos ([3, Lause 1.2.12. ja Seuraus 1.3.3., s. 20–21]):

Lause 5.7. *Mallien luokka $\mathcal{K}$ ei ole määriteltävissä ensimmäisen kertaluvun logiikalla jos ja vain jos jokaista $m \in \mathbb{N}$ kohti on olemassa sellaiset mallit $\mathcal{A}$ ja $\mathcal{B}$, että $\mathcal{A} \in \mathcal{K}$, $\mathcal{B} \notin \mathcal{K}$ ja $\mathcal{A} \cong_m \mathcal{B}$.*

Jos kahta mallia, joista toisella on tietty ominaisuus ja toisella ei, ei pystytä äärellisen monen siirron EF-pelillä erottamaan toisistaan, tätä ominaisuutta ei siis pystytä määrittelemään.

Lauseen 5.6 todistus. Tuloksen todistamiseksi riittää lauseen 5.7 nojalla siis osoittaa, että duplikaattorilla on voittostrategia malleilla $\mathcal{A}$ ja $\mathcal{B}$ pelattavassa m kierroksen EF-pelissä, kun $\mathcal{A}$ on malli $(A; P^{\mathcal{A}})$, jossa $|P^{\mathcal{A}}| = |\overline{P^{\mathcal{A}}}| = m$, ja $\mathcal{B}$ on malli $(B; P^{\mathcal{B}})$, jossa $|P^{\mathcal{B}}| = m$ ja $|\overline{P^{\mathcal{B}}}| = m + 1$.

Todistus tehdään induktiolla pelin kierrosten suhteen. Pelin alussa tyhjät valinnat muodostavat triviaalin osittaisisomorfismin mallien välille. Kierroksella $k + 1$, kun $k < m$, duplikaattorin strategia on seuraavanlainen: jos spoileri valitsee mallista $\mathcal{A}$ uuden alkion $a \in P^{\mathcal{A}}$, eli sellaisen, jota ei ole vielä pelin aikana valittu, duplikaattori valitsee mallista $\mathcal{B}$ jonkin uuden alkion $b \in P^{\mathcal{B}}$. Jos spoileri valitsee uuden alkion $a \in \overline{P^{\mathcal{A}}}$, duplikaattori valitsee uuden alkion $b \in \overline{P^{\mathcal{B}}}$. Samoin mutta toisinpäin toimitaan, jos spoileri valitsee mallista $\mathcal{B}$ uuden alkion. Koska joukoissa $P^{\mathcal{A}}, P^{\mathcal{B}}, \overline{P^{\mathcal{A}}}$ ja $\overline{P^{\mathcal{B}}}$ on kaikissa vähintään m alkiota, löytyy aina sopiva uusi alkio, jonka duplikaattori voi valita. Jos spoileri valitsee alkion, joka on pelin aikana jo valittu jollain kierroksella i, duplikaattori valitsee kierroksella i valituista alkiosta toisen.

Induktio-oletuksen nojalla k kierroksen jälkeen mallien välillä on osittaisisomorfismi, eli joukosta $P^{\mathcal{A}}$ on valittu yhtä monta alkiota kuin joukosta $P^{\mathcal{B}}$, ja joukosta $\overline{P^{\mathcal{A}}}$ on valittu yhtä monta alkiota kuin joukosta $\overline{P^{\mathcal{B}}}$. Kierroksella $k+1$ tehdyt valinnat säilyttävät osittaisisomorfismin, sillä strategiaa noudattamalla valitaan yhdet alkiot lisää joko joukoista $P^{\mathcal{A}}$ ja $P^{\mathcal{B}}$ tai joukoista $\overline{P^{\mathcal{A}}}$ ja $\overline{P^{\mathcal{B}}}$, tai valitaan jo osittaisisomorfismiin kuuluvan alkiot. Pelaamalla kuvatun strategian mukaan pelin lopussa m kierroksen jälkeen mallien $\mathcal{A}$ ja $\mathcal{B}$ välillä on osittaisisomorfismi, joten duplikaattorin strategia on voittostrategia, eli $\mathcal{A} \cong_m \mathcal{B}$.

□

Esimerkki 5.5 ja lause 5.6 osoittavat, että signaloinnin ansiosta IF-logiikalla voidaan ilmaista enemmän kuin ensimmäisen kertaluvun logiikalla. Itse asiassa pelkän signaloinnin avulla, ilman Henkin-kvanttoreita vastaavia kvantifiointeja, saadaan ilmaistua kaikki IF-logiikalla määriteltävät ominaisuudet. Barbero, Hella ja Rönnholm [1] osoittivat, että jokainen Σ_1^1-määriteltävä ominaisuus voidaan määritellä tietynlaisella IF-lauseella, joka sisältää signalointikuvioita mutta ei Henkin-kvantifiointeja.

Nämä lauseet kuuluvat IF-logiikan osaan IF_{sig}, joka koostuu kaikista säännöllisistä kaavoista, joissa kvanttorit esiintyvät kaavan alussa, ja jotka täyttävät ehdon: jos kvanttori $(\exists v/V)$ kuuluu kvanttorin $(\exists u/U)$ vaikutusalaan, niin $u \notin V$. Ehto tarkoittaa, että Eloise ei voi unohtaa aiemmin tekemiään siirtoja. Tämä estää Henkin-kvanttoreiden kirjoittamisen, sillä Henkin-kvanttorissa eksistenssikvanttorit ovat toisistaan riippumattomia. Signalointi on kuitenkin mahdollista logiikassa IF_{sig}.

Artikkelissa [1] osoitetaan, että jokainen kaksirivisen standardimuotoisen Henkin-kvanttorin avulla esitetty lause voidaan ilmaista sen kanssa ekvivalenttina IF_{sig} -lauseena. Koska jokainen Henkin-lause on ekvivalentti jonkin Σ_1^1-lauseen kanssa, tämä todistaa seuraavan tuloksen:

Lause 5.8. [1, Teoreema 2]

IF*-logiikan osan* IF_{sig} *ilmaisuvoima on sama kuin eksistentiaalisen toisen kertaluvun logiikalla, eli*

$$\mathrm{IF}_{sig} \equiv \Sigma_1^1.$$

Siis jo pelkästään signaloinnin mahdollisuus nostaa IF-logiikan ilmaisuvoimaltaan ensimmäisestä kertaluvusta eksistentiaalisen toisen kertaluvun tasolle.

6 Lopuksi: IF-logiikan filosofinen merkitys

IF-logiikan keskeinen kehittäjä Jaakko Hintikka argumentoi teoksessaan *The Principles of Mathematics Resivited* [6, (1996)], että tavallisen ensimmäisen kertaluvun predikaattilogiikan sijaan IF-logiikka on todellinen perustava logiikka. Yksi keskeinen argumentti Hintikan väitteen puolesta on IF-logiikan suurempi ilmaisuvoima. IF-logiikassa voidaan määritellä sellaisia matemaattisia käsitteitä ja tehdä matemaattisia päättelyitä, joihin ensimmäisen kertaluvun logiikka ei riitä. Hintikan mukaan IF-logiikka on kuitenkin ensimmäistä kertalukua sen suhteen, mitä entiteettejä kvantifioidaan, joten vältetään korkeamman kertaluvun logiikoiden mukana tuleva ontologinen sitoutuminen joukkojen ja muiden korkeamman kertaluvun entiteettien olemassaoloon (esim. [6, s. 129]).

Toinen keskeinen Hintikan esittämä syy pitää IF-logiikka perustavana on se, että totuuspredikaatti IF-logiikan lauseille voidaan muodostaa IF-logiikassa itsessään (esim. [6, s. 118]). Tämä tarkoittaa, että IF-logiikassa totuuden määrittelyyn ei tarvita yleisemmän tason metakieleen vetoamista. Tilanne on toinen ensimmäisen kertaluvun logiikassa: Tarskin tunnetun teoreeman mukaan tietyt oletukset täyttävän loogisen kielen totuusmääritelmä voidaan antaa vain vahvemmassa metakielessä. Yksi Tarskin oletuksista kielelle on determinoituvuus, joten tulos ei päde IF-logiikalle. (Ks. [15, luku 4.5].)

Muut matemaatikot ja filosofit eivät ole olleet vakuuttuneita Hintikan IF-logiikan asemaa perustavana logiikkana koskevista väitteistä. Yhtenä syynä on se, että IF-logiikalta puuttuu joitakin ensimmäisen kertaluvun logiikan hyviä ominaisuuksia. Keskeinen puute on, että IF-logiikalle ei voida antaa täydellistä päättelysysteemiä eikä se ole aksiomatisoituva (esim. [15, 4.3]). Hintikkaa tämä puute ei haittaa, sillä hän pitää ensisijaisena logiikan deskriptiivistä roolia matemaattisten käsitteiden sisällön kuvaamisessa, mutta esimerkiksi Feferman [4] puolustaa logiikan deduktiivista roolia matemaattisten päättelyiden tekemisessä. Myös Hintikan väite siitä, että IF-logiikka on ensimmäistä kertalukua, on kyseenalaistettu. Feferman [4] esittää, että vaikka IF-logiikka on syntaktisesti ensimmäistä kertalukua, se on semanttisesti korkeampaa kertalukua. IF-kaavojen totuus ja validius edellyttää voittostrategioiden, jotka funktioina ovat toisen kertaluvun entiteettejä, olemassaoloa. Sama kritiikki koskee kyllä myös peliteoreettisesti tulkittua ensimmäisen kertaluvun logiikkaa, mutta sille on myös ensimmäisessä kertaluvussa pysyvä kompositionaalinen semantiikka.

Vaikka IF-logiikalla ei ole erityisasemaa peruslogiikkana, se tarjoaa kuitenkin kiinnostavalla tavalla erilaisen näkökulman logiikan ilmiöihin ja niiden tutkimukseen. Informaation piilottaminen antaa IF-logiikalle totutusta poikkeavia ilmiöitä ja ominaisuuksia, jotka voivat olla myös epäintuitiivisia ja yllättäviä. Hodges [9, s. 546] toteaakin, että vaikka idealla siitä, mitä pelaajan on sallittua tietää, on vahva intuitiivinen merkitys, se voi olla hyvin harhaanjohtavaa. Tämä näkyy erityisesti signaloinnissa. Signaloinnin takia monet ensimmäisen kertaluvun logiikassa yksinkertaiset tulokset eivät sellaisenaan päde IF-logiikassa. Esimerkiksi kvanttorien siirtämisen kanssa on oltava tarkkana, sillä vaikka piilojoukoissa esitetyt riippumattomuudet ottaa huomioon ja tekee niihin tarvittavat muutokset, kvanttorien siirtäminen saattaa estää signalointimahdollisuuksia ja näin vaikuttaa strategioihin. Tämän takia signalointi halutaankin usein estää. Alkuperäisessä Hintikan ja Sandun määrittelemässä IF-logiikassa näin tehtiin edellyttämällä, että eksistenssikvanttorit ovat aina riippumattomia toisistaan. Signaloinnin estäminen oli Hintikan kirjoitusten perusteella tarkoituksellista. Hintikka [6, s. 63] kertoo, että ilman edellämainittua ehtoa voitaisiin välittävien eksistenssikvanttoreiden avulla luoda riippuvuuksia, jotka muuten ovat kiellettyjä. Tästä juuri signaloinnissa on kyse.

Signaloinnin mahdollistaminen kuitenkin monipuolistaa käytettävissä olevia strategioita ja tuo semanttisten pelien pelaamiseen uudenlaisia mahdollisuuksia. Se, että omien siirtojen perusteella voi myöhemmin pelissä tehdä valintoja ja että siirtojaan voi myös hyödyntää informaation välittämisessä, tuo semanttisen pelin pelaamisen lähemmäksi konkreettisia pelaamistapoja. Signalointiin liittyvä aiemmin tiedetyn informaation unohtaminen pelin myöhemmässä vaiheessa tuo kyllä oman outoutensa pelaamiseen, mutta kun pelaajat tulkitsee usean pelaajan tiimeinä, pelaamisesta tulee luontevaa. Tosielämän peleissä tuntuisi keinotekoiselta rajoitukselta estää pelaajaa hyödyntämästä omia aiempia siirtojaan. Semanttisen pelin tapauksessa rajoitus on perusteltua tehdä, mutta signaloinnin mahdollisuus tekee pelaamisesta – ja samalla IF-logiikasta – monipuolisempaa ja kiinnostavampaa.

Peliteoreettinen semantiikka tuo mukanaan myös erilaisen tavan ymmärtää logiikan kaavojen totuus. Tarskin totuusteorian tapaisia, kielen ja maailman tai mallin väliseen vastaavuuteen perustuvia totuuden määritelmiä on kritisoitu siitä, että määritelmät vain vetoavat abstraktiin relaatioon, eivätkä selitä, miksi kyse on juuri totuudesta. Tällainen totuusmääritelmä jättää täysin avoimeksi sen, miten tietyn lauseen totuus voidaan todentaa. Tätä vastoin peliteoreettisen totuuskäsityksen etuna on, että lauseen määrittelеminen todeksi kytkeytyy tapoihin, joilla lause voidaan verifioida semanttisen pelin kautta. Peliteoreettisella semantiikalla onkin selvä yhteys Wittgensteinin ajatukseen kielipeleistä, eli tiettyjen sääntöjen mukaisista tavoista käyttää kieltä, joista kielen ilmaisut saavat merkityksensä. (Ks. esim. [6, s. 22].)

Peliteoreettisen semantiikan tapa analysoida logiikan kaavoja ulkoa sisälle päin eikä kompositionaalisesti sisältä ulos päin sopii luontevasti IF-logiikkaan siksi, että IF-logiikassa kaavojen merkitykset voivat olla kontekstisidonnaisia. Tästä johtuen Hintikka [6, s. 112] esitti, että IF-logiikalle ei ole mahdollista antaa kompositionaalista semantiikkaa. Hodges [9] osoitti tämän väitteen osittain vääräksi ja muotoili tarskilaisen kompositionaalisen semantiikan IF-logiikalle. Tämä vaati kuitenkin sitä, että yksittäisten tulkintojen sijaan tarkastellaan useiden tulkintojen tiimejä.

Hodgesin työ on toiminut inspiraationa IF-logiikalle vaihtoehtoiselle *riippuvuuslogiikalle*, jossa IF-logiikan tavoin voidaan esittää monipuolisesti muuttujien välisiä riippuvuuksia. Riippuvuuslogiikan esitteli Jouko Väänänen teoksessaan *Dependence Logic* [16, (2007)]. Kvanttorien välisten riippumattomuuksien sijaan riippuvuuslogiikassa muuttujien väliset riippuvuudet esitetään lisäämällä kieleen uudenlainen atomikaava $=(x_1 \dots x_n, y)$, joka kertoo, että muuttuja y riippuu muuttujista $x_1 \dots x_n$. Riippuvuuslogiikassa pääasiassa käytetään Hodgesin kompositionaaliseen semantiikkaan pohjautuvaa tiimisemantiikkaa.

Ensimmäisen kertaluvun logiikan sallimia monipuolisempien riippuvuuksien ja riippumattomuuksien tutkimisen historia on edennyt Henkin-kvanttoreista peliteoreettisesti tulkittuun IF-logiikkaan ja sen erilaisiin versioihin, ja edelleen useisiin erilaisiin riippuvuuslogiikoihin, joissa käytetään tarskilaista tiimisemantiikkaa. Riippumattomuus-ystävällisyys ei rajoitu pelkästään IF-logiikkaan, vaan riippumattomuudessa riittää tutkittavaa myös muissa logiikoissa ja erilaisista näkökulmista.

Lähteet

[1] Barbero, Fausto; Hella, Lauri; Rönnholm, Raine. 2017. 'Independence-Friendly Logic Without Henkin Quantification.' Teoksessa *Logic, Language, Information, and Computation*, toim. Kennedy J., de Queiroz R.. WoLLIC 2017. Lecture Notes in Computer Science, vol 10388. Springer, Berlin, Heidelberg.

[2] Ebbinghaus, H.-D.; Flum, J.; Thomas, W. 1984. *Mathematical Logic.* New York: Springer.

[3] Ebbinghaus, H.; Flum, J. 1995. *Finite Model Theory.* Berlin: Springer.

[4] Feferman, Solomon. 2006. 'What Kind of Logic is Independence-Friendly Logic?'. Teoksessa *The Philosophy of Jaakko Hintikka. Library of Living Philosophers.* Toim. R. E. Auxier and L. E. Hahn. vol. 30, Open Court. Sivut 453–69.

[5] Henkin, L. 1961. 'Some remarks on infinitely long formulas'. Teoksessa *Infinitistic methods: Proceedings of the Symposium on Foundations on Mathematics, Warsaw, 2-9 September 1959.* Oxford-Lontoo-New York-Pariisi: Pergamont Press. Sivut 167–183.

[6] Hintikka, Jaakko. 1996. *The Principles of Mathematics Revisited.* Cambridge: Cambridge University Press.

[7] Hintikka, Jaakko; Sandu, Gabriel. 1989. 'Informational Independence as a Semantical Phenomenon'. Teoksessa *Logic, Methodology and Philosophy of Science VIII.* Toim. J. E. Fenstad ym. Amsterdam: Elsevier. Sivut 571–589.

[8] Hintikka, Jaakko; Sandu, Gabriel. 2011. 'Game-Theoretical Semantics'. Teoksessa *Handbook of Logic and Language*, toinen painos, toim. Johan van Benthem, Alice ter Meulen. Amsterdam: Elsevier. Sivut 415–465.

[9] Hodges, W. 1997. 'Compositional Semantics for a Langauge of Imperfect Information'. *Logic Journal of the IGPL*, 5: 539–563.

[10] Libkin, Leonid. 2004. *Elements of Finite Model Theory.* Berlin: Springer-Verlag.

[11] Mann, Allen L.; Sandu, Gabriel; Sevenster, Merlijn. 2011. *Independence-Friendly Logic; A Game-Theoretic Approach.* Cambridge: Cambridge University Press.

[12] von Neumann, John; Morgenstern, Oskar. 1974. *Theory of Games and Economic Behaviour.* Kolmas painos. Princeton: Princeton University Press.

[13] Sandu, Gabriel. 2001. 'Signaling In Languages With Imperfect Information'. *Synthese* 127: 21–34.

[14] Sandu, Gabriel. 2012. 'Independendly-Friendly Logic: Dependence and Independence of Quantifiers in Logic'. *Philosophy Compass* 7/10: 691–711.

[15] Tulenheimo, Tero. 2018. 'Independence Friendly Logic'. *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Fall 2018 Edition), toim. Edward N. Zalta. Arkistoituna osoitteessa: https://plato.stanford.edu/archives/fall2018/entries/logic-if/.

[16] Väänänen, Jouko. 2007. *Dependence Logic: A New Approach to Independence Friendly Logic*, (London Mathematical Society student texts, 70). Cambridge: Cambridge University Press.

[17] Walkoe, W. 1970. 'Finite Partially-Ordered Quantification'. *Journal of Symbolic Logic,* Vol. 35, nro 4. Sivut 535–555.