TAMPEREEN YLIOPISTO
Pro gradu -tutkielma

Anne Immonen

Vektorilaskentaa lukiolaiselle

Luonnontieteiden tiedekunta
Matematiikka
Marraskuu 2018

Tampereen yliopisto
Luonnontieteiden tiedekunta
IMMONEN, ANNE: Vektorilaskentaa lukiolaiselle
Pro gradu -tutkielma, 52 s.
Matematiikka
Marraskuu 2018

Tiivistelmä

Tämän pro gradu -tutkielman on tarkoitus toimia lukion laajan matematiikan Vektorit -kurssin syventävänä teoksena, joka vahvistaa lineaarialgebran perusteita ja johdattelee opiskelijaa yliopistomaiseen oppimistyyliin. Kurssin sisältö eroaa voimassaolevan opetussuunnitelman vaatimuksista sillä, että joitain matemaattisia ominaisuuksia todistetaan aksiomaattisesti, joka on yliopistomatematiikassa tavanomaisempaa. Tutkielmassa käsitellään osa lukion Vektorit -kurssin vaatimuksista, keskittyen vektorien aritmetiikkaan geometrisesti ja algebrallisesti ja pistetulon ominaisuuksiin. Pistetulon hyödyntämisestä esitellään kohtisuoruuden ja projektioiden määritelmät. Rajaus jättää opetussuunnitelmaan kuuluvat yhtälöryhmät, suorat ja tasot tehtiin tarkoituksena käydä mukaanotetut aihealueet lukion oppimäärää syvällisemmin. Lisäksi tässä tutkielmassa esitellään muutamia vektoreiden käytännön sovelluksia, kuten näyttöpäätteiden värin määritykseen soveltuva RGB-värimalli ja fysiikan mekaniikan maailmaan kiinteästi liittyvät voimavektorit. Materiaali sisältää jokaisesta aihealueesta harjoitustehtäviä ratkaisuineen, tehtävien painopisteen sijoittuessa vektoriaritmetiikkaan. Tämän pro gradu -tutkielman teorian pääteoksena on käytetty Howard Antonin teosta *Elementary Linear Algebra*. Harjoituksiin on haettu vaihtelevaa näkökulmaa useista englanninkielisistä lineaarialgebraa käsittelevistä oppikirjoista sekä lukiotason saksankielisistä oppikirjoista, ja teknillisen korkeakoulun käytössä olevasta laajan fysiikan oppikirjasta.

Asiasanat: vektorit, vektoriaritmetiikka, pistetulo

Sisältö

1 Johdanto

Tässä pro gradu -tutkielmassa perehdytään vektoreihin vuoden 2016 voimaan tulleen lukion opetussuunnitelman perusteiden sisältöjä seuraten. Kukin mukaanotettu aihealue käydään lukion oppimääriä yksityiskohtaisemmin, todistaen esitellyt ominainaisuudet aksiomaattisesti. Jokaiseen aihealueeseen tarjotaan esimerkkejä ja harjoituksia, joihin on tarjolla myös ratkaisut. Tätä tutkielmaa voi hyödyntää ilman aiempaa kokemusta vektoreista, sillä kaikki tarvittavat käsitteet määritellään ja todistetaan vaihe vaiheelta. Luvussa 6, joka käsittelee vektorien sovelluksia, tarvitaan tehtävien ratkaisemiseksi aiempia fysiikan opintoja.

Luku 2 keskittyy esittelemään tämän hetkisen lukion pitkän matematiikan opetussuunnitelman Vektorit -kurssin sisältöä ja tavoitteita ja pohtii kurssin suhdetta tämän tutkielman sisältöön. Sisältöjen ollessa hieman toisistaan poikkeavia, tätä tutkielmaa voisi pitää sitovana aineistona lukiokurssin ja yliopistotasoisen lineaarialgebran välillä.

Luvussa 3 esitellään vektorit geometrisinä objekteina, joilla on suunta ja pituus. Lisäksi kerrotaan, miten tässä tutkielmassa vektoreita ja skalaareita merkitään.

Luku 4 sisältää vektoreiden perusmääritelmät yhteenlaskun, vähennyslaskun ja skalaarilla kertomisen geometrisinä objekteina. Vektorit kiinnitetään 2- ja 3-ulotteisiin koordinaatistoihin ja esitetään, miten niiden avulla laskutoimitukset on perusteltuja tehdä komponenteittain.

Luku 5 käsittelee varsinaisesti vektoriaritmetiikan, jossa vektorien laskusäännöt todistetaan aksiomaattisesti. Vektoreilla laskemista laajennetaan muutamien tehtävien ja esimerkkien avulla useampiulotteisiin vektoriavaruuksiin, esimerkiksi 5-ulotteisiin. Vektoriaritmetiikkaan kuuluu olennaiselta osin vektorin pituuden ja vektorien välisten etäisyyksien määritteleminen. Lisäksi luvussa määritellään yksikkövektorit ja edelleen niiden avulla yksikkökoordinaattivektorit.

Pistetulon käsite, joka liittyy vektoriaritmetiikkaan, esitellään luvussa 6. Pistetuloa apuna käyttäen määritellään vektorin kohtisuorat projektiot, jotka ovat edelleen määriteltävissä kantavektoriensa avulla.

Viimeisessä luvussa esitellään sovelluksena vektoreista yhtä tietokoneiden näyttöjen värikoodaamiseen käytettävää RGB-värimallia, sekä vektorit fysiikan mekaniikan apuvälineinä havainnollistamaan fysiikan lakien vaikutusta yksittäisiin kappaleisiin.

Tutkielma päälähteenä on käytetty Howard Antonin teosta Elementary Linear Algebra [1] vuodelta 1973. Tästä teoksesta on lisäksi ollut käytössä lisäosalla varustettu teos vuodelta 2011 [3]. Matematiikan tehtäviin on pääteoksen lisäksi haettu käytännönläheistä kulmaa lähteistä [2], [4], [5], [7], [9] ja [10], sekä RGB-värimallin teoriaan, että tutkimiseen internetsivustoja [8], [11], [12] ja [13].

2 Tutkielman suhde lukion opetussuunnitelmaan

Uusimmassa, vuoden 2016, opetussuunnnnitelman perusteissa, laajan matematiikan osalta, Vektorit -kurssin tavoitteena on käydä läpi vektorien perusominaisuudet ja yhteen- ja vähennyslasku, sekä skalaarilla kertominen. Lisäksi kurssiin sisältyy koordinaatistoon sijoittuvien vektorien pistetulo eli skalaaritulo. Kurssiin kuuluu myös yhtälöryhmien ratkaiseminen, sekä suorien ja tasojen käsitteleminen avaruudessa.

Tässä pro gradu -tutkielmassa perehdytään perusominaisuuksiin lukion oppimäärää syvällisemmin, todistaen vektorien ominaisuuksia aksiomaattisesti. Vektorilaskentaa lähestytään geometrisesti ja algebrallisesti ja koska on haluttu keskittyä vektoreihin ja niiden perusominaisuuksiin, tutkielmassa ei käsitellä yhtälöryhmien ratkaisemista, eikä suoria ja tasoja. Sen sijaan on haluttu tuoda lukion vektorikurssia laajemmin esille vektorien merkitys jokapäiväisessä ympäristössämme ja viimeiseen lukuun on koottu muutamia esimerkkejä siitä, missä vektoreilla operoimisesta on hyötyä reaalimaailmassa.

Työstä on jätetty pois vektorien käsittely tietokoneen laskinohjelmistoilla, sekä graafisilla käyttöliittymillä. Koska lukiokurssit suoritetaan tänä päivänä digitaalisissa ympäristöissä, on luontevaa, että tästä aiheesta tehtävät jatkotarkastelut olisi hyvä siirtää sähköiseen oppimisympäristöön. Tämän kaltaista tutkielmaa voikin parhaiten hyödyntää, kun haluaa vahvistaa yliopistotasoisen lineaarialgebran perusteita. Yliopistomaailmassa ei vuonna 2018 juurikaan olla siirrytty sähköisiin oppimisalustoihin ja yliopistomatematiikan opiskelijaksi aikovan on hyvä palauttaa mieleen matematiikan tekeminen pelkän kynän ja paperin avulla.

Lineaarialgebraksi kutsuttu matematiikan ala tutkii vektoreita hyvin laaja-alaisesti ja sillä on sovelluksia etenkin fysiikassa ja tekniikassa. Lineaarialgebran perusteissa tulevat käyttöön mm. matriisit. Matriisien käsite otetaan esille lukio-opetuksessa lähinnä niissä lukioissa, joissa on painotus matematiikkaan. Esimerkiksi Tampereen teknillisessä lukiossa aihetta voi opiskella Lineaarialgebra MAA17 -kurssilla, jossa esitellään matriisien lisäksi lineaariset yhtälöryhmät ja niiden käsittelyyn vaadittavia tekniikoita. Tampereen yliopistossa on mahdollista opiskella lineaarialgebraa sekä perusteita käsittelevien aineopintokurssien että hyvin abstrakteja rakenteita tutkivien syventävien kurssien avulla.

3 Geometriset vektorit

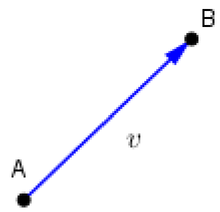
Tässä luvussa 3 vektorit esitellään geometrisesti. Tekstissä määritellään vektorien aritmeettiset operaatiot ja todistetaan joitakin perusoperaatioita.

Useat fysikaaliset suureet, kuten pinta-ala, pituus ja massa, ovat täydellisesti määritettyjä, kun suure ilmaistaan reaalilukuna. Monet fysikaaliset suureet eivät ole täydellisesti määriteltyjä ennen kuin sekä suuruus että suunta ovat annetut. Voima, paikka ja nopeus ovat esimerkkejä vektoreista.

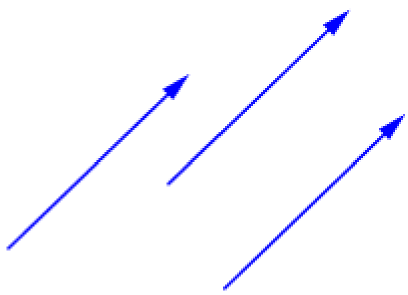
Vektorit voidaan esittää geometrisesti suuntajanan tai nuolen avulla 2- tai 3-ulotteisessa avaruudessa; nuolen *suunta* antaa vektorin suunnan ja sen *pituus* suuruuden. Nuolen pyrstöä kutsutaan vektorin *alkupisteeksi* ja sen kärkeä *loppupisteeksi*. Tässä työssä vektoreita merkitään pienillä kursivoiduilla kirjaimilla, joiden päällä on viiva, kuten $\overline{a}, \overline{k}, \overline{v}, \overline{w}$ ja $\overline{x}$. Vektoreiden yhteydessä luvuista käytetään ilmaisua *skalaari*. Tässä esityksessä skalaarit ovat reaalilukuja ja niitä merkitään pienellä tavallisilla kirjaimilla, kuten a, k, v, w ja x .

Kuvassa 3.1 vektorin $\overline{v}$ alkupiste on A ja loppupiste B. Merkitään

$$\overline{v} = \overrightarrow{AB}.$$



Kuva 3.1: Vektori $\overrightarrow{AB}$



Kuva 3.2: Ekvivalentteja vektoreita

Vektoreita, joilla on sama *pituus* ja sama *suunta*, kuten kuvassa 3.2, kutsutaan *ekvivalenteiksi*. Koska vektori halutaan määritellä pituutensa ja suuntansa avulla, ekvivalentteja vektoreita pidetään samoina vektoreina, vaikka ne sijaitsisivat eri paikassa. Ekvivalentit vektorit tulkitaan samaksi vektoriksi. Jos vektorit $\overline{v}$ ja $\overline{w}$ ovat ekvivalentteja, merkitään $\overline{v} = \overline{w}$.

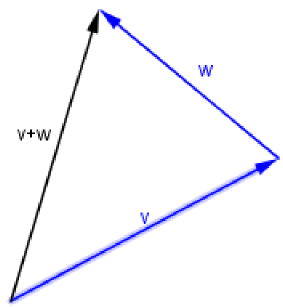
Vektorin, jonka alkupiste ja loppupiste yhtyvät, pituus on nolla. Tällaista vektoria kutsutaan *nollavektoriksi* ja sitä merkitään symbolilla $\overline{0}$. Nollavektorilla ei ole suuntaa, sen ajatellaan osoittavan tehtävän ratkaisun kannalta olennaiseen suuntaan.

4 Vektorien laskutoimituksia ja vektorit koordinaatistossa

Vektoreilla on useita tärkeitä operaatioita, joilla yleensä on fysiikan lait lähtökohtanaan.

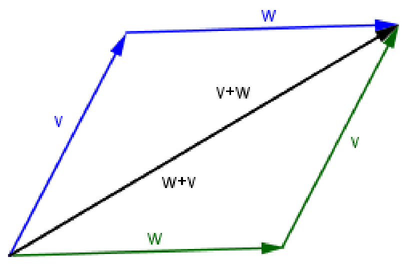
4.1 Vektorien yhteenlasku

Määritelmä 4.1. Jos $\overline{v}$ ja $\overline{w}$ ovat kaksi vektoria, niin niiden *summa* $\overline{v} + \overline{w}$ on vektori, joka määritellään seuraavasti. Asetetaan vektori $\overline{w}$ siten, että sen alkupiste on vektorin $\overline{v}$ loppupisteessä. Vektori $\overline{v} + \overline{w}$ esitetään nuolella, joka lähtee vektorin $\overline{v}$ alkupisteestä ja päättyy vektorin $\overline{w}$ loppupisteeseen (kuva 4.1). Laskutoimitusta sanotaan *yhteenlaskuksi*.



Kuva 4.1: Vektorien summa

Kuvassa 4.2 on esitetty kaksi summaa, $\overline{v}+\overline{w}$ (sinisin nuolin) ja $\overline{w}+\overline{v}$ (vihrein nuolin).



Kuva 4.2: Vektorien yhteenlaskun vaihdannaisuus

On ilmeistä, että

$$\overline{v} + \overline{w} = \overline{w} + \overline{v}$$

ja vektorien $\overline{v}$ ja $\overline{w}$ summa yhtyy niiden määrittelemän suunnikkaan lävistäjän kanssa, kun vektorit lähtevät samasta alkupisteestä. Nollavektorin yhteenlasku on määritelty kaavalla

$$\overline{0} + \overline{v} = \overline{v} + \overline{0} = \overline{v}$$

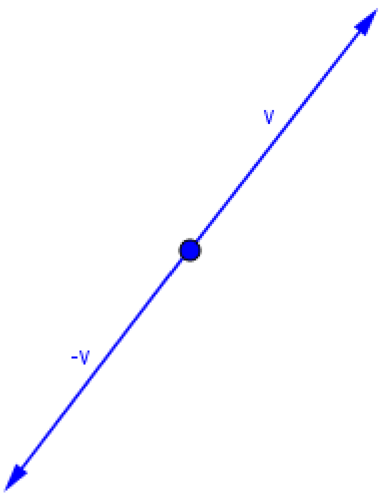
kaikille vektoreille $\overline{v}$.

Mikäli $\overline{v}$ on nollasta poikkeava vektori, on yksiselitteistä, että ainoa vektori $\overline{w}$, joka toteuttaa yhtälön $\overline{v}+\overline{w} = \overline{0}$ on vektori, jonka suuruus on yhtäsuuri kuin vektorin $\overline{v}$, mutta suunta on vastakkainen, kuten kuvassa 4.3. Tätä vektoria $\overline{w}$ kutsutaan vektorin $\overline{v}$ *vastavektoriksi* ja merkitään

$$\overline{w} = -\overline{v}.$$

Lisäksi määritellään

$$-\overline{0} = \overline{0}.$$



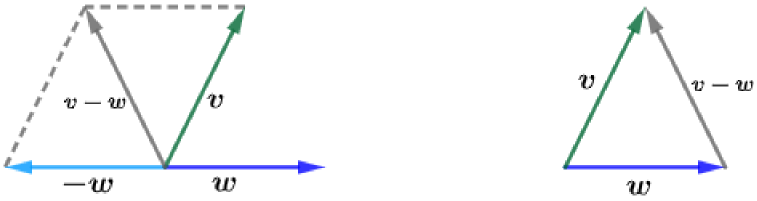
Kuva 4.3: Vastavektori

4.2 Vektorien vähennyslasku

Määritelmä 4.2. Jos $\overline{v}$ ja $\overline{w}$ ovat kaksi vektoria, niiden *erotus* toisistaan on määritelty kaavalla

$$\overline{v} - \overline{w} = \overline{v} + (-\overline{w}).$$

Vektori $\overline{v} - \overline{w}$ pystytään ilmaisemaan ilman vektorin $-\overline{w}$ määrittelyä. Asetetaan vektorit $\overline{v}$ ja $\overline{w}$ niin, että vektorien alkupisteet yhtyvät; vektoriksi $\overline{v} - \overline{w}$ kutsutaan vektoria, jonka alkupiste on vektorin $\overline{w}$ loppupisteessä ja loppupiste vektorin $\overline{v}$ loppupisteessä (kuva 4.4).

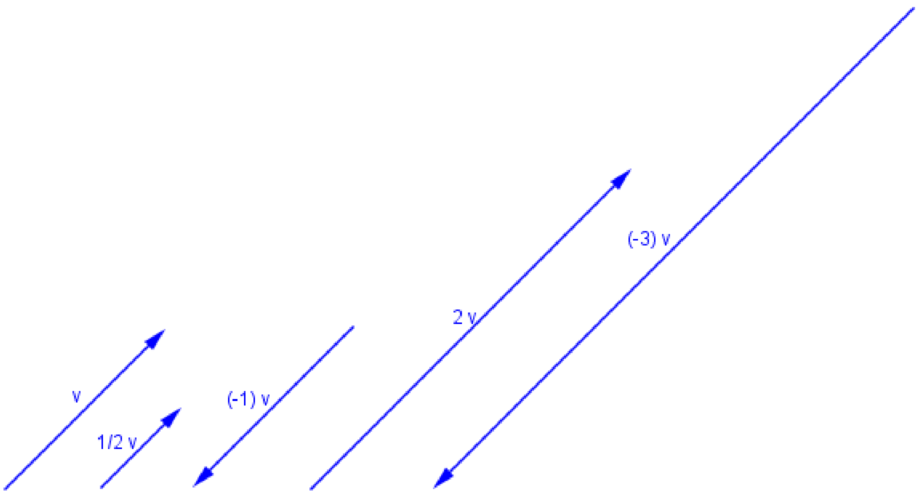


Kuva 4.4: Vektoreiden erotus

4.3 Vektorin kertominen skalaarilla

Määritelmä 4.3. Jos $\overline{v} \neq \overline{0}$ on vektori ja $k \neq 0$ on reaaliluku (skalaari), niin tulo $k\overline{v}$ on määritelty vektoriksi, jonka pituus on $|k|$ kertaa vektorin $\overline{v}$ pituus ja joka on vektorin $\overline{v}$ suuntainen, jos $k > 0$, ja vastakkaissuuntainen vektorille $\overline{v}$, jos $k < 0$. Lisäksi määritellään $k\overline{v} = 0$, jos $k = 0$ tai $\overline{v} = \overline{0}$.

Kuva 4.5 havainnollistaa vektorien $\overline{v}$, $\frac{1}{2}\overline{v}$, $(-1)\overline{v}$, $2\overline{v}$ ja $(-3)\overline{v}$ välisiä suhteita.



Kuva 4.5: Vektori $\overline{v}$ kerrottuna eri skalaareilla

Huomaa, että vektorin $(-1)\overline{v}$ pituus on yhtä suuri vektorin $\overline{v}$ pituuden kanssa, mutta vektorit ovat vastakkaissuuntaiset. Täten $(-1)\overline{v}$ on vektorin $\overline{v}$ vastavektori, siis

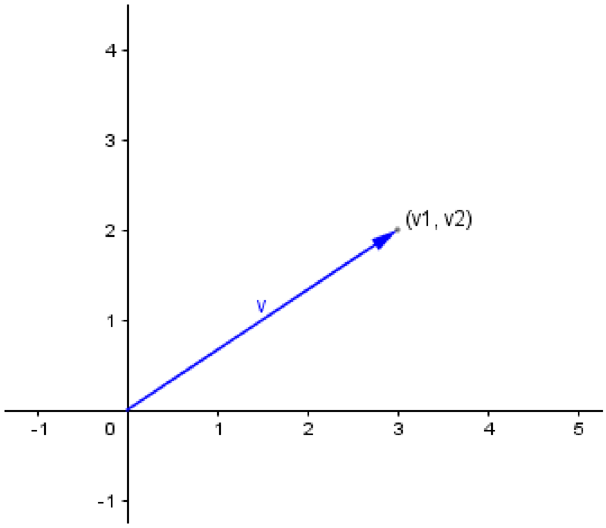
$$(-1)\overline{v} = -\overline{v}.$$

.

4.4 Vektorit tasokoordinaatistossa

Tutkitaan vektoreita seuraavaksi 2-ulotteisessa avaruudessa eli tasossa. Olkoon $\overline{v}$ mikä tahansa tason vektori. Oletetaan, kuten kuvassa 4.6, että vektorin alkupiste on tasokoordinaatiston origossa. Vektorin $\overline{v}$ loppupisteen koordinaatteja v_1 ja v_2 kutsutaan vektorin $\overline{v}$ *komponenteiksi* ja kirjoitetaan

$$\overline{v} = (v_1, v_2).$$



Kuva 4.6: Vektorin komponentit

Jos ekvivalentit vektorit, $\overline{v}$ ja $\overline{w}$, sijoitetaan siten, että niiden alkupiste sijaitsee origossa, on ilmeistä, että myös niiden loppupisteiden tulee olla samat (koska vektoreilla on sama pituus ja suunta). Näin ollen vektoreilla on samat komponentit. On yhtä ilmeistä, että vektoreilla, joilla on samat komponentit, täytyy olla yhtä suuri pituus ja sama suunta, mistä seuraa, että vektorien on oltava samat. Täten siis kaksi vektoria

$$\overline{v} = (v_1, v_2) \qquad \text{ja} \qquad \overline{w} = (w_1, w_2)$$

ovat sama vektori, jos ja vain jos

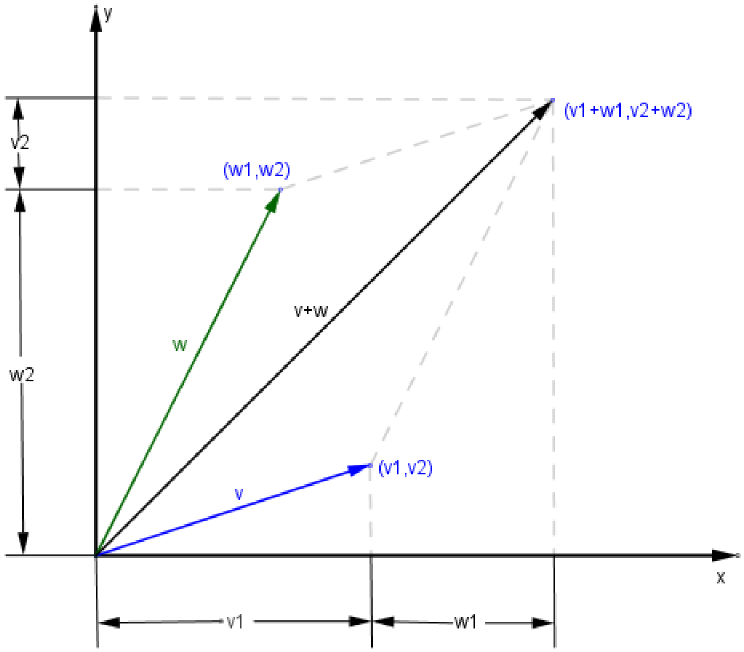
$$v_1 = w_1 \qquad \text{ja} \qquad v_2 = w_2.$$

Vektorien yhteen- ja vähennyslasku sekä skalaarilla kertominen on hyvin helppoa ilmaista komponenttien avulla. Kuvasta 4.7 käy ilmi, että jos

$$\overline{v} = (v_1, v_2) \qquad \text{ja} \qquad \overline{w} = (w_1, w_2)$$

niin

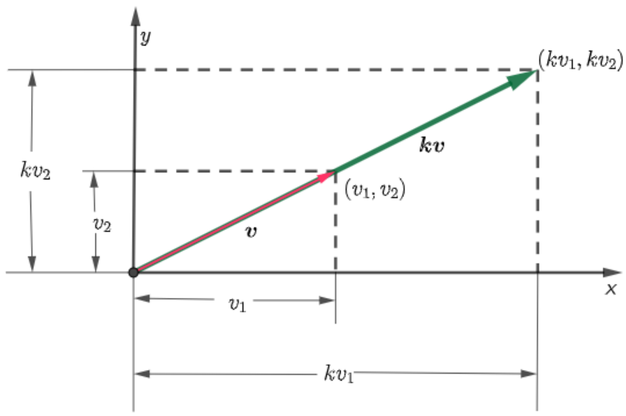
$$\overline{v} + \overline{w} = (v_1 + w_1, v_2 + w_2)$$



Kuva 4.7: Vektorien yhteenlasku komponenteittain

Jos $\overline{v} = (v_1, v_2)$ on vektori ja $k \neq 0$ on skalaari, niin käyttäen yhtenevien kolmioiden geometrista perustelua (ks. kuva 4.8), voidaan osoittaa, että

$$k\overline{v} = (kv_1, kv_2).$$



Kuva 4.8: Vektorin kertominen skalaarilla

Samalla tavoin komponenteittain voidaan ilmaista vastavektori

$$-\overline{v} = (-1)\overline{v} = (-v_1, -v_2)$$

ja vektorien vähennyslasku

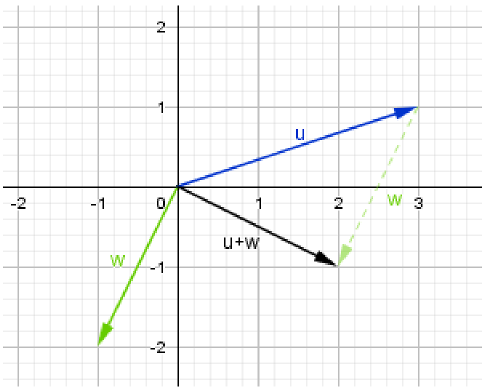
$$\overline{w} - \overline{v} = \overline{w} + (-\overline{v}) = (w_1 + (-v_1), w_2 + (-v_2)).$$

Esimerkki 4.1. Vektorien yhteenlasku. Olkoon $\overline{u} = (3, 1)$, $\overline{v} = (2, -3)$ ja $\overline{w} = (-1, -2)$ kolme vektoria. Vektoreita voidaan laskea yhteen komponenteittain, jolloin

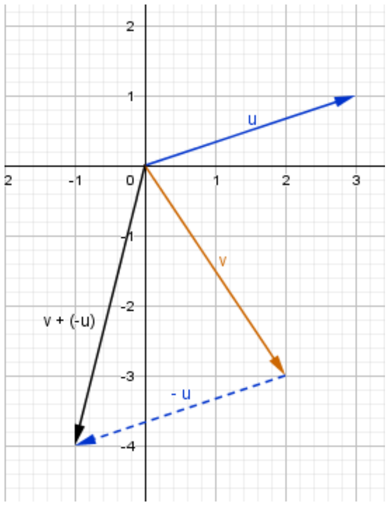
a) $\overline{u} + \overline{w} = (3, 1) + (-1, -2) = (3 + (-1), 1 + (-2)) = (2, -1)$

b) $\overline{v} - \overline{u} = (2, -3) - (3, 1) = (2 - 3, -3 - 1) = (-1, -4)$.

Ks. kuva 4.9.



(a) $\overline{u} + \overline{v}$



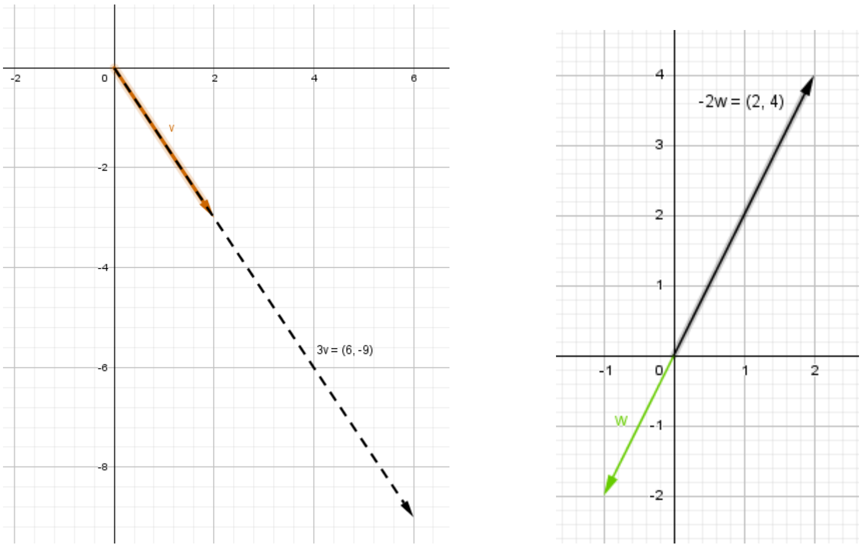
(b) $\overline{v} - \overline{u}$

Kuva 4.9

Esimerkki 4.2. Vektorin kertominen skalaarilla. Olkoot $\overline{u}$, $\overline{v}$, ja $\overline{w}$ vektorit kuten esimerkissä 4.1. Vektorin pituutta voidaan skaalata kertomalla kukin komponentti skalaarilla (ks. kuva 4.10):

a) $3\overline{v} = 3(2, -3) = (3 \cdot 2, 3 \cdot (-3)) = (6, -9)$

b) $-2\overline{w} = -2(-1, -2) = ((-2) \cdot (-1), (-2) \cdot (-2)) = (2, 4)$.



(a) $3\overline{u}$ (b) $-2\overline{w}$

Kuva 4.10

4.5 Vektorit kolmiulotteisessa koordinaatistossa

Aivan kuten tason vektorit voidaan ilmaista lukuparien avulla, 3-ulotteisessa avaruudessa vektorit voidaan ilmaista reaalilukukolmikkoina. Tämä tapahtuu ottamalla käyttöön suorakulmainen koordinaatisto.

Valitaan ensin piste O, jota kutsutaan *origoksi*. Tämän jälkeen valitaan kolme origon kautta kulkevaa, toisiaan kohtisuoraan olevaa suoraa, joita kutsutaan *koordinaattiakseleiksi*. Nämä akselit nimetään x-,y-, ja z-akseleiksi ja valitaan jokaiselle positiivinen suunta sekä pituusyksikkö etäisyyksien määrittämiseksi. Jokainen koordinaattiakselipari määrittää tason, jota kutsutaan koordinaattitasoksi. Niihin viitataan nimillä xy-taso, xz-taso ja yz-taso. Jokaiseen 3-ulotteisen avaruuden pisteeseen P voidaan viitatata lukukolmikolla (x, y, z) seuraavasti. Koordinaattitasojen kanssa yhdensuuntaiset tasot asetetaan kulkemaan pisteen P kautta ja tasojen leikkauspisteitä koordinaattiakselien kanssa merkitään kirjaimin X, Y, Z (kuva 4.11). Pisteen P koordinaatit määritellään pituuksina

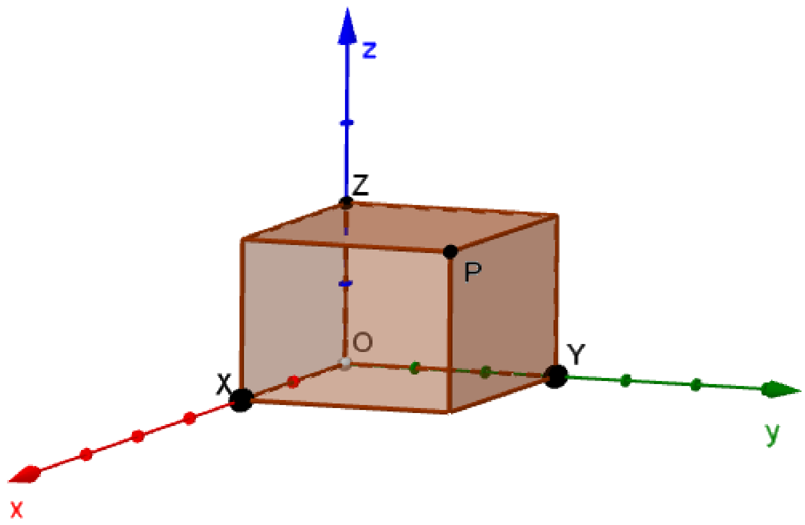
$$x = \left\|\overrightarrow{OX}\right\|, \quad y = \left\|\overrightarrow{OY}\right\|, \quad z = \left\|\overrightarrow{OZ}\right\|,$$

kun X, Y, Z ovat positiivisella suunnalla origoon nähden.

Jos 3-ulotteisen avaruuden vektorin $\overline{v}$ alkupiste on sijoitettu suorakulmaisen koordinaatiston origoon, tällöin loppupisteen koordinaatteja kutsutaan vektorin $\overline{v}$ *komponenteiksi* ja kirjoitetaan

$$\overline{v} = (v_1, v_2, v_3).$$

Jos $\overline{v} = (v_1, v_2, v_3)$ ja $\overline{w} = (w_1, w_2, w_3)$ ovat kaksi 3-ulotteisen avaruuden



Kuva 4.11: Piste P 3-ulotteisessa koordinaatistossa

vektoria, niin samoin argumentein kuin tasokoordinaatiston vektoreille voidaan todeta seuraavat tulokset:

(i) $\overline{v}$ ja $\overline{w}$ ovat ekvivalentteja, jos ja vain jos $v_1 = w_1, v_2 = w_2, v_3 = w_3$,

(ii) $\overline{v} + \overline{w} = (v_1 + w_1, v_2 + w_2, v_3 + w_3)$,

(iii) $k\overline{v} = (kv_1, kv_2, kv_3)$, missä k on mikä tahansa skalaari,

(iv) $-\overline{v} = -(v_1, v_2, v_3) = (-v_1, -v_2, -v_3)$,

(v) $\overline{v} - \overline{w} = (v_1, v_2, v_3) - (w_1, w_2, w_3) = (v_1 - w_1, v_2 - w_2, v_3 - w_3)$.

Esimerkki 4.3. Olkoot $\overline{u}$, $\overline{v}$ ja $\overline{w}$ vektoreita, missä $\overline{u} = (3, 2, 1)$, $\overline{v} = (1, -3, 2)$ ja $\overline{w} = (-1, 3, 2)$. Silloin saadaan:

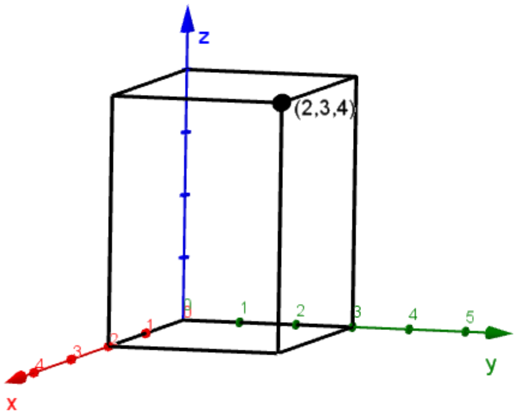
a) $-\overline{u} = -(3, 2, 1) = (-3, -2, -1)$,

Yhteenlaskussa vektorit voidaan laskea komponenteittain yhteen:

b) $\overline{w} + \overline{u} = (-1, 3, 2) + (3, 2, 1) = (-1 + 3, 3 + 2, 2 + 1) = (2, 5, 3)$.

Vähennyslaskun kanssa toimitaan samoin:

c) $\overline{v} - \overline{w} = (1, -3, 2) - (-1, 3, 2) = (1 - (-1), (-3) - 3, 2 - 2) = (2, -6, 0)$.



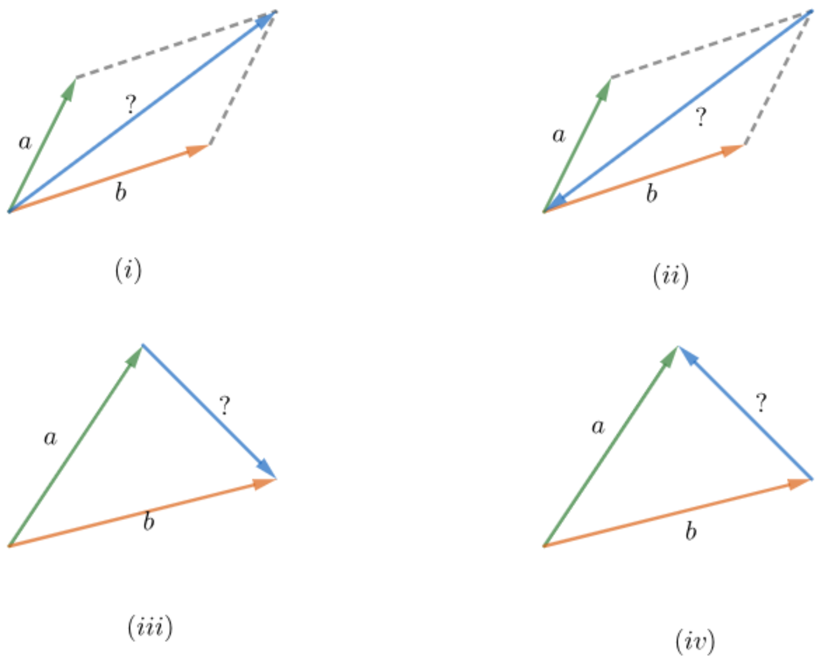
Kuva 4.12: Piste, jonka koordinaatit ovat $(2, 3, 4)$

Jos vektoreita skaalataan, toimitaan kuten edellä. Ensin kirjoitetaan vektorit komponenttimuodossa ja sen jälkeen kertoimilla kerrotaan kukin komponentti laskujärjestyksen mukaisessa järjestyksessä. Tässä ensin sulkujen sisällä oleva kerroin 2 kerrotaan sisään, sitten lasketaan sulkujen sisällä oleva vähennyslasku (edelleen komponenteittain) ja lopuksi kerrotaan saadun vektorin komponentteja luvulla 3. Siis

d) $3(\overline{u} - 2\overline{w}) = 3((3, 2, 1) - 2(-1, 3, 2))$
$= 3((3, 2, 1) - (2 \cdot (-1), 2 \cdot 3, 2 \cdot 2))$
$= 3((3, 2, 1) - (1, 6, 4))$
$= 3(3 - 1, 2 - 6, 1 - 4)$
$= 3(2, -4, -3)$
$= (6, -12, -9).$

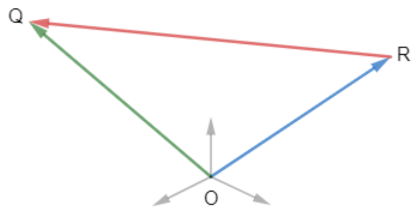
4.6 Harjoitustehtäviä

1. Olkoon $\overline{a} = (4, -3)$ ja $\overline{b} = (-4, 1)$. Laske
   (a) $\overline{a} + \overline{b}$
   (b) $\overline{b} - \overline{a}$
   (c) $\frac{1}{2}\overline{a}$
   (d) $\frac{3}{4}\overline{b}$
   (e) $2(\overline{a} - \overline{b})$.
2. Etsi sellainen vektori $\overline{u}$, että $2\overline{u} = \overline{v}$, kun vektori $\overline{v} = (8, 2, -\frac{6}{3})$.
3. Lausu tuntematon vektori tunnettujen vektorien avulla (ks. kuva 4.13).



Kuva 4.13

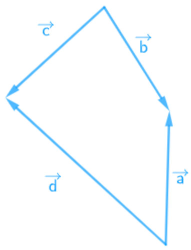
4. Olkoot vektorit $\overrightarrow{OR}$ ja $\overrightarrow{OQ}$ kuten kuvassa 4.14. Tällöin $\overrightarrow{RQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OR} = (q_1 - r_1, q_2 - r_2, q_3 - r_3)$. Jos piste $Q = (4, -2, -3)$ ja piste $R = (1, -5, -6)$, niin mikä on vektori $\overrightarrow{QR}$?



Kuva 4.14

5. Olkoot $\overline{u} = (-4, 3, 6)$ ja $\overline{v} = (4, 1, 5)$ kaksi vektoria 3-ulotteisessa avaruudessa. Laske
   (a) $\overline{v} + \overline{u}$
   (b) $\overline{u} + \overline{u}$
   (c) $2(\overline{u} - 3\overline{v})$
   (d) $4\overline{u} + 3\overline{v}$
   (e) Etsi sellainen skalaari k, jolle pätee $k\overline{w} = \overline{u} + \overline{u}$? Mikä tällöin on vektori $\overline{w}$?

6. Kuvan 4.15 vektorit $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ ja $\overline{d}$ voidaan lausua muiden vektorien avulla: $\overline{a} = \overline{d} - \overline{c} + \overline{b}$. Lausu vektorit $\overline{b}$, $\overline{c}$ ja $\overline{d}$ samoin muiden vektorien avulla.



Kuva 4.15

7. Pisteet A ja B ovat annettuja. Määritä $\overrightarrow{AB}$ ja $\overrightarrow{BA}$, kun

   (a) $A = (0, 0, 0)$ ja $B = (1, 2, 3)$

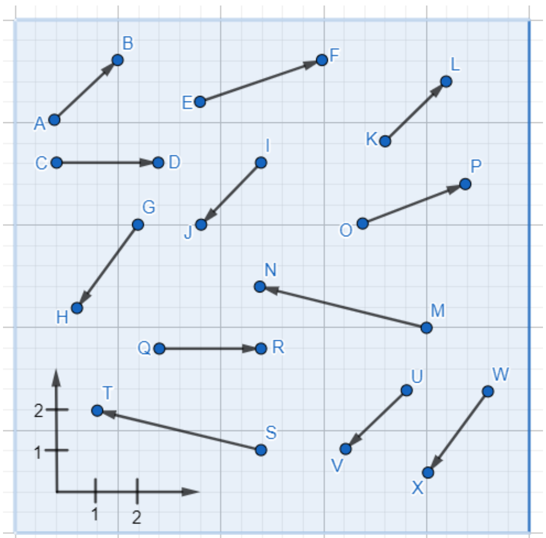
   (b) $A = (3, -4, 5)$ ja $B = (0, 0, 0)$

   (c) $A = (1, -3, -4)$ ja $B = (-5, 3, -4)$

   (d) $A = (3, -4, 5)$ ja $B = (2, 2, -6)$

8. Suunnikkaan kolmen kulman pisteiden koordinaatit tunnetaan: $A = (1, 2, 3)$, $B = (3, 4, 1)$ ja $C = (1, 5, 3)$. Määritä piste D siten, että pisteistä muodostuu suunnikas $ABCD$, jossa $\overrightarrow{AD}$ on yhdensuuntainen (ks. määritelmä 5.1) sivun $\overrightarrow{BC}$ kanssa (merkitään $\overrightarrow{AD} \parallel \overrightarrow{BC}$) ja $\overrightarrow{DC} \parallel \overrightarrow{AB}$.

9. Mitkä suuntajanoista ("nuolista") kuuluvat samaan vektoriin (ks. kuva 4.16)? Nimeä ja anna vektorien koordinaatit.



Kuva 4.16

5 Vektoriaritmetiikkaa

Tässä luvussa esitellään vektoriaritmetiikan laskusäännöt ja vektorin pituus sekä 2- että 3-ulotteisessa avaruudessa. Lisäksi tutustutaan yhdensuuntaisten vektorien ja yksikkövektorin määritelmään ja hyödynnetään yksikkövektoreita ilmaisemaan vektoreiden komponenttimuoto toisella tavalla.

5.1 Vektorien laskusäännöt

Lause 5.1. *Jos $\overline{u}, \overline{v}$ ja $\overline{w}$ ovat vektoreita 2- tai 3-ulotteisessa avaruudessa ja k ja l ovat skalaareja, niin*

(a) $\overline{u} + \overline{v} = \overline{v} + \overline{u}$

(b) $(\overline{u} + \overline{v}) + \overline{w} = \overline{u} + (\overline{v} + \overline{w})$

(c) $\overline{u} + \overline{0} = \overline{0} + \overline{u} = \overline{u}$

(d) $\overline{u} + (-\overline{u}) = \overline{0}$

(e) $k(l\overline{u}) = (kl)\overline{u}$

(f) $k(\overline{u} + \overline{v}) = k\overline{u} + k\overline{v}$

(g) $(k + l)\overline{u} = k\overline{u} + l\overline{u}$

(h) $1\overline{u} = \overline{u}$.

Ennen todistamista on huomattava, että vektoreihin on olemassa kaksi lähestymistapaa: geometrinen, jossa vektorit esitetään nuolina tai suuntajanoina, ja analyyttinen, jossa vektorit esitetään lukupareina tai -kolmikkoina. Tämän johdosta lauseen 5.1 tulokset voidaan todistaa sekä geometrisesti että analyyttisesti. Seuraavaksi esitetään kohdan (b) todistus molemmin tavoin.

Todistus (b) analyyttisesti. Olkoot $\overline{u}, \overline{v}$ ja $\overline{w}$ 2-ulotteisen avaruuden vektoreita. (Todistus 3-ulotteiselle vektoreille menee samalla tavalla.) Jos $\overline{u} = (u_1, u_2)$, $\overline{v} = (v_1, v_2)$ ja $\overline{w} = (w_1, w_2)$, niin

$$
\begin{aligned}
&(\overline{u} + \overline{v}) + \overline{w} \\
&= [(u_1, u_2) + (v_1, v_2)] + (w_1, w_2) \\
&= (u_1 + v_1, u_2 + v_2) + (w_1, w_2) \\
&= ([u_1 + v_1] + w_1, [u_2 + v_2] + w_2) \\
&= (u_1 + [v_1 + w_1], u_2 + [v_2 + w_3]) \\
&= (u_1, u_2) + (v_1 + w_1, v_2 + w_2) \\
&= \overline{u} + (\overline{v} + \overline{w}).
\end{aligned}
$$

$\square$

Todistus (b) geometrisesti. (Kuva 5.1). Olkoot $\overline{u}, \overline{v}$ ja $\overline{w}$ 2-ulotteisen avaruuden vektoreita. Tässä vektorit $\overline{u}, \overline{v}$ ja $\overline{w}$ esitetään suuntajanoina $\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{QR}$ ja $\overrightarrow{RS}$. Tällöin

$$\overline{v} + \overline{w} = \overrightarrow{QS} \quad \text{ja} \quad \overline{u} + (\overline{v} + \overline{w}) = \overrightarrow{PS}.$$

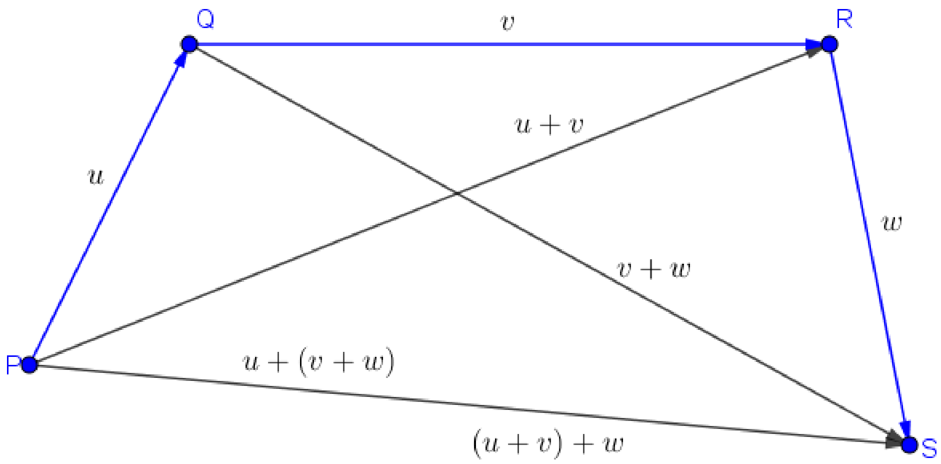
Myös

$$\overline{u} + \overline{v} = \overrightarrow{PR} \quad \text{ja} \quad (\overline{u} + \overline{v}) + \overline{w} = \overrightarrow{PS}.$$

Siis

$$\overline{u} + (\overline{v} + \overline{w}) = (\overline{u} + \overline{v}) + \overline{w}.$$

$\square$



Kuva 5.1: Vektorien yhteenlaskun vaihdannaisuus

Esimerkki 5.1. Vektorien laskusäännöistä lauseessa 5.1 esitetään seuraavat esimerkit. Olkoot $\overline{u} = (2, 5)$, $\overline{v} = (6, -1)$, $\overline{w} = (1, 1)$ ja $\overline{0} = (0, 0)$ 2-ulotteisen avaruuden vektoreita. Tällöin

(a) $\overline{u} + \overline{v} = (2, 5) + (6, -1) = (2 + 6, 5 - 1) = (8, 4)$
$\overline{v} + \overline{u} = (6, -1) + (2, 5) = (6 + 2, -1 + 5) = (8, 4)$

(b) $(\overline{u}+\overline{v})+\overline{w} = ((2, 5)+(6, -1))+(1, 1) = (8, 4)+(1, 1) = (8+1, 4+1) = (9, 5)$
$\overline{u} + (\overline{v} + \overline{w}) = (2, 5) + ((6, -1) + (1, 1))$
$= (2, 5) + (6 + 1, -1 + 1) = (2, 5) + (7, 0) = (2 + 9, 5 + 0) = (9, 5)$

(c) $\overline{u}+\overline{0}=(2,5)+(0,0)=(2+0,5+0)=(2,5)=\overline{u}$

(d) $\overline{u}+(-\overline{u})=(2,5)+(-(2,5))=(2,5)+(-2,-5)=(2-2,5-5)=(0,0)=\overline{0}$

(e) $3(2\overline{w})=3(2(1,1))=3(2,2)=(6,6)$
$(3\cdot 2)\overline{w}=6(1,1)=(6,6)$

(f) $4(\overline{u}+\overline{w})=4((2,5)+(1,1))=4(2+1,5+1)=4(3,6)=(4\cdot 3,4\cdot 6)=(12,24)$
$4\overline{u}+4\overline{w}=4(2,5)+4(1,1)=(4\cdot 2,4\cdot 5)+(4\cdot 1,4\cdot 1)=(8,20)+(4,4)=$
$(8+4,20+4)=(12,24)$

(g) $(2+3)\overline{u}$
$=5\overline{u}=5(2,5)=(5\cdot 2,5\cdot 5)=(10,25)$
$2\overline{u}+3\overline{u}=2(2,5)+3(2,5)=(2\cdot 2,2\cdot 5)+(3\cdot 2,3\cdot 5)$
$=(4,10)+(6,15)=(4+6,10+15)=(10,25)$

(h) $1\overline{u}=1(2,5)=(1\cdot 2,1\cdot 5)=\overline{u}$.

Esimerkki 5.2. Tämä esimerkki käsittelee 5-ulotteista avaruutta, jolla on samanlaisia ominaisuuksia, kuin 2- ja 3-ulotteisilla. Olkoot vektorit $\overline{u}=(2,1,-3,1,-1)$ ja $\overline{v}=(-2,-1,1,0,3)$. Etsi skalaarit a ja b siten, että $a\overline{u}+b\overline{v}=(10,5,-9,2,-11)$.

Ratkaisu: Sijoitetaan vektorit yhtälöön komponenttimuodossa, jolloin saadaan

$$a\overline{u}+b\overline{v}=a(2,1,-3,1,-1)+b(-2,-1,1,0,3)=(10,5,-9,2,-11).$$

Kerrotaan skalaareilla kukin komponentti, jolloin saadaan

$$(2a,a,-3a,a,-a)+(-2b,-b,b,0,3b)=(10,5,-9,2,-11).$$

Muodostetaan yhtälöryhmä

$$\begin{cases} 2a-2b=10 \\ a-b=5 \\ -3a+b=-9 \\ a+0=2 \\ -a+3b=-11 \end{cases}$$

Yhtälöstä saadaan ratkaisuksi $a=2$ ja $b=-3$. Tarkistetaan sijoittamalla arvot yhtälöryhmän ylimpään lausekkeeseen:

$$2a-2b=2\cdot 2-2\cdot(-3)=4+6=10.$$

Vastaus: Yhtälö pätee, kun $a=2$ ja $b=-3$.

Esimerkki 5.3. Tämä esimerkki käsittelee 4-ulotteista avaruutta. Olkoot vektorit $\overline{v} = (-3, 1, 0, 2)$ ja $\overline{w} = (1, 4, -2, 0)$. Määritä vektori $\overline{z}$, jolle pätee

$$2\overline{z} - 3\overline{w} = 3(\overline{v} + \overline{z}).$$

Ratkaisu: Ratkaistaan yhtälöstä vektori $\overline{z}$ seuraavasti

$$\begin{aligned}
2\overline{z} - 3\overline{w} &= 3(\overline{v} + \overline{z}) && \| \text{ kerrotaan sulut auki} \\
2\overline{z} - 3\overline{w} &= 3\overline{v} + 3\overline{z} && \| + 3\overline{w} \text{ ja } - 3\overline{z} \\
2\overline{z} - 3\overline{z} &= 3\overline{v} + 3\overline{w} \\
-\overline{z} &= 3\overline{v} + 3\overline{w}. \\
\overline{z} &= -3\overline{v} - 3\overline{w}.
\end{aligned}$$

Sijoitetaan edelliseen yhtälöön vektorit komponenttimuodossa, $\overline{v} = (-3, 1, 0, 2)$ ja $\overline{w} = (1, 4, -2, 0)$. Saadaan

$$\begin{aligned}
\overline{z} &= -3\overline{v} - 3\overline{w} \\
\overline{z} &= -3(-3, 1, 0, 2) - 3(1, 4, -2, 0) \\
\overline{z} &= (9, -3, 0, -6) - (3, 12, -6, 0) \\
\overline{z} &= (9 - 3, -3 - 12, 0 - (-6), -6 - 0) \\
\overline{z} &= (6, -15, 6, -6).
\end{aligned}$$

Vastaus: Kun $\overline{z}$ on vektori $(6, -15, 6, -6)$, niin yhtälö $2\overline{z} - 3\overline{w} = 3(\overline{v} + \overline{z})$ on tosi.

5.2 Yhdensuuntaiset vektorit

Määritelmä 5.1. Nollasta poikkeavia vektoreita $\overline{u}$ ja $\overline{v}$ kutsutaan *yhdensuuntaisiksi* vektoreiksi, jos on olemassa reaaliluku k siten, että

$$\overline{u} = k\overline{v}. \tag{5.1}$$

Jos $k > 0$, vektorien $\overline{u}$ ja $\overline{v}$ sanotaan olevan *samansuuntaiset.* Jos $k < 0$, niiden sanotaan olevan *vastakkaissuuntaiset.*

Esimerkki 5.4. Olkoot vektori $\overline{u} = (-2, 8, 1)$ ja $\overline{v} = (-1, 4, \frac{1}{2})$. Määritä kerroin k siten että vektorit ovat yhdensuuntaiset eli $\overline{u} = k\overline{v}$.
Ratkaisu:

$$\begin{aligned}
\overline{u} &= k\overline{v} = k(-1, 4, \frac{1}{2}) \\
(-2, 8, 1) &= k(1, 4, \frac{1}{2}) \\
(-2, 8, 1) &= (-k, 4k, \frac{1}{2}k)
\end{aligned}$$

Tästä saadaan vastavuudet

$$
\begin{aligned}
-2 &= -k \\
8 &= 4k \\
1 &= \frac{1}{2}k.
\end{aligned}
$$

Kaikista yhtälöistä saadaan kertoimelle k arvoksi 2.

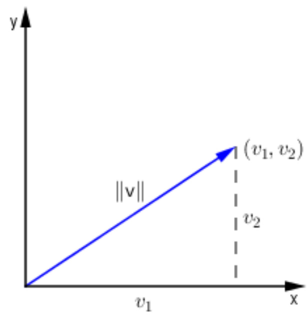
5.3 Vektorin pituus 2-ulotteisessa avaruudessa

Vektorin $\overline{v}$ pituutta kutsutaan usein vektorin $\overline{v}$ *normiksi* ja sitä merkitään notaatiolla $\|\overline{v}\|$. Pythagoraan lauseesta seuraa, että

$$
\|\overline{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}, \tag{5.2}
$$

kun

$$
\overline{v} = (v_1, v_2).
$$



Kuva 5.2: Vektorin $\overline{v}$ normi eli pituus

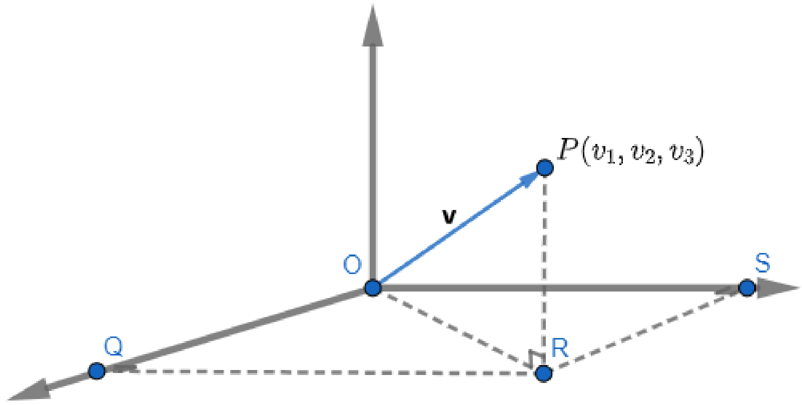
Esimerkki 5.5. Vektorin $\overline{v} = (3, 2)$ normi yhtälön (5.2) perusteella on

$$
\|\overline{v}\| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13}
$$

5.4 Vektorin pituus 3-ulotteisessa avaruudessa

Olkoon $\overline{v} = (v_1, v_2, v_3)$ vektori 3-ulotteisessa avaruudessa. Vektorin $\overline{v}$ normi määritetään tällöin (kuva 5.3) Pythagoraan avulla seuraavasti:

$$
\|\overline{v}\|^2 = \left\|(\overrightarrow{OR})\right\|^2 + \left\|(\overrightarrow{OS})\right\|^2 + \left\|(\overrightarrow{RP})\right\|^2 = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2.
$$



Kuva 5.3: Vektorin $\overline{v}$ normi eli pituus 3-ulotteisessa vektoriavaruudessa

Tällöin

$$\|\overline{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}. \tag{5.3}$$

Jos pisteet $P_1(x_1, y_1, z_3)$ ja $P_2(x_2, y_2, z_2)$ ovat 3-ulotteisen avaruuden kaksi pistettä, silloin niiden välinen etäisyys d on vektorin $\overrightarrow{P_1P_2}$ normi (ks. kuva 5.4). Koska

$$\overrightarrow{P_1P_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1),$$

niin

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Samoin jos $P_1(x_1, y_1)$ ja $P_2(x_2, y_2)$ ovat pisteitä 2-ulotteisessa avaruudessa, niiden välinen etäisyys on:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Esimerkki 5.6. (a) Vektorin $\overline{u} = (3, -2, 6)$ normi yhtälön (5.3) perusteella on

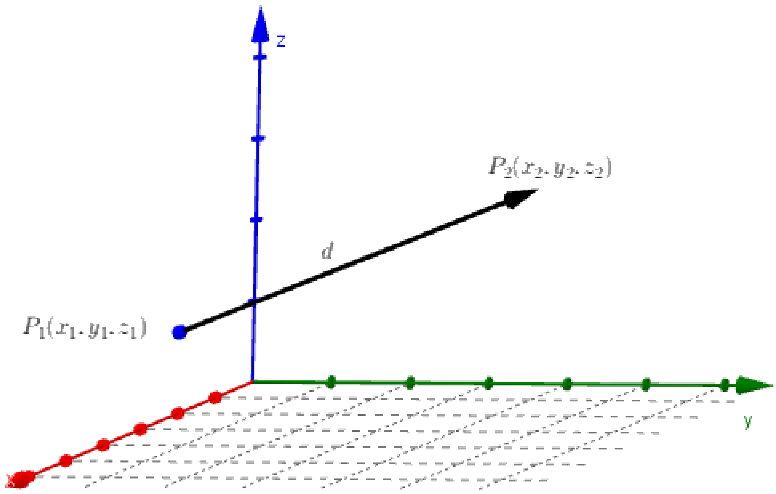
$$\|\overline{u}\| = \sqrt{3^2 + (-2)^2 + 6^2} = \sqrt{9 + 4 + 36} = \sqrt{49} = 7.$$

(b) Pisteiden $P_1 = (0, -7, 3)$ ja $P_2 = (-1, -6, 3)$ välinen etäisyys on

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{(0 - (-1))^2 + (-7 - (-6))^2 + (3 - 3)^2} \\ &= \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 0^2} = \sqrt{1 + 1 + 0} \\ &= \sqrt{2}. \end{aligned}$$

Koska pisteiden koordinaattien erotus korotetaan toiseen potenssiin, ei ole merkitystä kumpi on vähennettävä ja kumpi vähentäjä. Esimerkiksi tässä

$$d = \sqrt{(-1-0)^2 + (-6-(-7))^2 + (3-3)^2} = \sqrt{2}.$$



Kuva 5.4: Kahden pisteen välinen etäisyys d 3 -ulotteisessa vektoriavaruudessa

5.5 Yksikkövektorit

Vektoreita, joiden pituus on 1, kutsutaan *yksikkövektoreiksi*. Jos $\overline{a}$ on nollasta poikkeava vektori, on olemassa yksikkövektori $\overline{u}_{\overline{a}}$ vektorin $\overline{a}$ suuntaan. Vektorin $\overline{u}_{\overline{a}}$ määrittämiseksi tiedetään, että

$$\|\overline{u}_{\overline{a}}\| = 1 \text{ ja } \overline{u}_{\overline{a}} = k\overline{a} \text{ jollekin } k > 0.$$

Tästä seuraa, että

$$1 = \|\overline{u}_{\overline{a}}\| = \|k\overline{a}\| = |k|\,\|\overline{a}\| = k\,\|\overline{a}\|\,.$$

Täten

$$k = \frac{1}{\|\overline{a}\|},$$

mistä seuraa, että

$$\overline{u}_{\overline{a}} = \frac{1}{\|\overline{a}\|}\overline{a}. \tag{5.4}$$

Kuva 5.5: Vektorin $\overline{a}$ yksikkövektori $\overline{u}_{\overline{a}}$

Esimerkki 5.7. Etsi sellainen yksikkövektori $\overline{u}_{\overline{a}}$, joka on yhdensuuntainen vektorin $\overline{a} = (4, 3)$ kanssa.
Ratkaisu: Vektorin $\overline{a}$ pituus saadaan

$$\|\overline{a}\| = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$$

ja tällöin

$$\overline{u}_{\overline{a}} = \frac{1}{5}(4, 3) = (\frac{4}{5}, \frac{3}{5}).$$

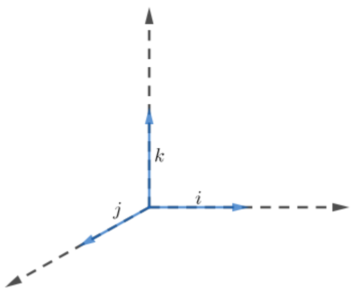
Harjoitustehtävänä on varmistaa, että vektorin $\overline{u}_{\overline{a}}$ pituus on 1.

2- ja 3-ulotteisten avaruuksien akselit määritellään yksikkökoordinaattivektorien $\overline{\imath}$, $\overline{\jmath}$ ja $\overline{k}$ avulla. 2-ulotteisessa avaruudessa nämä vektorit ovat

$$\overline{\imath} = (1, 0) \text{ ja } \overline{\jmath} = (0, 1)$$

ja 3-ulotteisessa avaruudessa

$$\overline{\imath} = (1, 0, 0),\ \overline{\jmath} = (0, 1, 0) \text{ ja } \overline{k} = (0, 0, 1).$$



Kuva 5.6: Yksikkövektorit koordinaattiakseleilla

Jokainen vektori $\overline{v} = (v_1, v_2)$ 2-ulotteisessa avaruudessa ja vektori $\overline{u} = (u_1, u_2, u_3)$ 3-ulotteisessa avaruudessa voidaan ilmaista *kantavektoriensa lineaarikombinaationa*:

$$\overline{v} = (v_1, v_2) = v_1(1, 0) + v_2(0, 1) = v_1\overline{\imath} + v_2\overline{\jmath}$$
$$\overline{u} = (u_1, u_2, u_3) = u_1(1, 0, 0) + u_2(0, 1, 0) + u_3(0, 0, 1) = u_1\overline{\imath} + u_2\overline{\jmath} + u_3\overline{k}.$$

Standardin kannan n-ulotteiselle vektoriavaruudelle muodostavat kantavektorit $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \ldots, \overline{e}_n$, missä

$$\overline{e}_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0), \quad \overline{e}_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, \quad \overline{e}_n = (0, 0, 0, \ldots, 1),$$

jolloin vektori $\overline{v}$ voidaan lausua n-ulotteisessa avaruudessa kantavektorien lineaarikombinaationa seuraavasti:

$$\overline{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n) = v_1\overline{e}_1 + v_2\overline{e}_2 + \cdots + v_n\overline{e}_n.$$

Esimerkki standardikannan lineaarikombinaatiosta 3-ulotteisessa avaruudessa on

$$(-1, 3, 5) = -\overline{\imath} + 3\overline{\jmath} + 5\overline{k}$$

ja 6-ulotteisessa vektoriavaruudessa on

$$(-2, 1, 0, 3, 4, 1) = -2\overline{e}_1 + \overline{e}_2 + 3\overline{e}_4 + 4\overline{e}_5 + \overline{e}_6.$$

Siis 3-ulotteisessa avaruudessa

$$\overline{\imath} = \overline{e}_1,\ \overline{\jmath} = \overline{e}_2 \text{ ja } \overline{k} = \overline{e}_3.$$

Kannan täsmällinen käsittely on tässä tutkielmassa sivuutettu. Tässä luvussa on lähteinä käytetty teoksia [3],[10].

5.6 Harjoitustehtäviä

1. Laske seuraavien pisteiden välinen etäisyys
   (a) $P_1(5, -1)$ ja $P_2(3, 4)$
   (b) $P_1(2, -3, 7)$ ja $P_2(-6, 2, 3)$.
2. Laske vektoreiden $\overline{u}$ ja $\overline{v}$ välinen etäisyys (eli erotusvektorin pituus), kun
   (a) $\overline{u} = (0, -2)$ ja $\overline{v} = (-3, 2)$
   (b) $\overline{u} = (2, 2, 2)$ ja $\overline{v} = (4, 0, 1)$.
3. Olkoon $\overline{u} = (3, 2, 4)$, $\overline{v} = (2, -1, 5)$ ja $\overline{w} = (1, 0, -1)$. Laske:
   (a) $\|\overline{u}\|$
   (b) $\|\overline{v}\|$
   (c) $\|\overline{u} + \overline{v}\|$
   (d) $\|-3\overline{v}\| - 3\|\overline{v}\|$
   (e) $\frac{1}{\|\overline{w}\|}\overline{w}$.
4. Etsi sellainen skalaari k, että $\|k\overline{v}\| = 5$, kun $\overline{v} = (4, 1, 2)$.

5. Laske vektorin $\overline{u} = (\frac{4}{5}, \frac{3}{5})$ pituus.

6. Laske vektorin $\overline{v} = (2, -2, -1)$ pituus ja etsi vektori $\overline{u}$, jonka pituus on 1 ja joka on vektorin $\overline{v}$ suuntaan (eli $\overline{u} = k\overline{v}, k > 0$).

7. Sievennä

   (a) $(2\overline{\imath} + \overline{\jmath} - \overline{k}) - (\overline{\imath} - 2\overline{\jmath} + 4\overline{k})$

   (b) $2(\overline{\jmath} - \overline{k}) - (\overline{\imath} + \overline{\jmath})$

   (c) $(2\overline{\imath} - \overline{\jmath} + 2\overline{k}) + 2(5\overline{\jmath} - \overline{k})$

   (d) $2(\overline{\imath} - \overline{\jmath}) + 5(2\overline{\imath} + \overline{\jmath} - \overline{k})$

8. Muunna edellisen tehtävän kohtien (b), (c) ja (d) sievennetyt yksikkövektoriesitykset lukukolmikkomuotoon.
   Esim. $5\overline{\imath} - 4\overline{\jmath} + 3\overline{k} = (5, -4, 3)$.

9. Etsi skalaari b siten että vektorit $-\overline{\imath} + 5\overline{\jmath} + \overline{k}$ ja $2\overline{\imath} - b\overline{\jmath} - 2\overline{k}$ ovat yhdensuuntaisia (mikäli sellainen on olemassa).

10. Etsi skalaari b siten että vektorit $3\overline{\imath} + \overline{\jmath}$ ja $b\overline{\jmath} - \overline{k}$ ovat yhtä pitkiä (mikäli sellainen on olemassa).

11. Olkoot $\overline{a} = 2\overline{\imath} + 9\overline{\jmath} - 8\overline{k}$ ja $\overline{b} = 2\overline{\imath} + 3\overline{\jmath} - \overline{k}$

    (a) Ilmaise $2\overline{b} - \overline{a}$ yksikkövektorien $\overline{\imath}, \overline{\jmath}$ ja $\overline{k}$ avulla.

    (b) Laske $\left\|2\overline{b} - \overline{a}\right\|$.

    (c) Etsi yksikkövektori $\overline{u}_{\overline{c}}$ suuntaan $\overline{c} = 2\overline{b} - \overline{a}$.

12. Olkoot

    $\overline{a} = -2\overline{\imath} + 2\overline{\jmath} - 4\overline{k} \qquad \overline{b} = 3\overline{\imath} - 3\overline{\jmath} + 6\overline{k} \qquad \overline{c} = \overline{\imath} - \overline{\jmath} + 2\overline{k} \qquad \overline{d} = 2\overline{\imath} - \overline{\jmath} + 2\overline{k}$

    (a) Mitkä vektoreista ovat yhdensuuntaisia?

    (b) Mitkä vektoreista ovat samansuuntaisia?

    (c) Mitkä vektoreista ovat vastakkaissuuntaiset?

13. Etsi skalaari b siten että $\left\|b\overline{\imath} + (b-1)\overline{\jmath} + (b+1)\overline{k}\right\| = 2$.

14. Todista väite: Jos $\overline{v}$ on vektori 2-ulotteisessa vektoriavaruudessa ja k on reaaliluku, niin $\|k\overline{v}\| = |k|\|\overline{v}\|$.

6 Pistetulo

Tässä luvussa esitellään eräänlainen tulo vektoreille 2- ja 3-ulotteisessa avaruudessa. Tulon aritmeettisia ominaisuuksia todistetaan ja esitellään muutamia tulon sovelluksia.

6.1 Määritelmä ja perusominaisuuksia

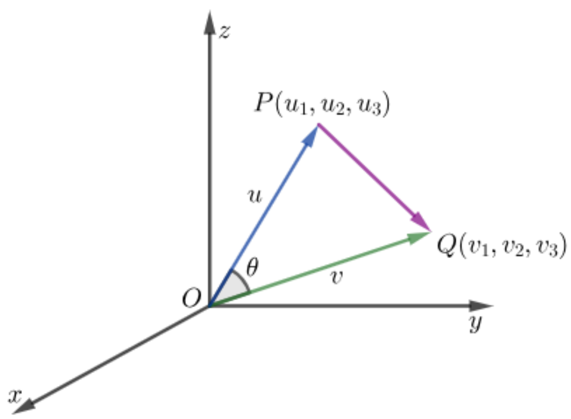
Olkoot $\overline{u}$ ja $\overline{v}$ kaksi nollavektorista poikkeavaa vektoria 2- tai 3-ulotteisessa avaruudessa ja oletetaan niiden alkupisteiden olevan samassa pisteessä. Vektorien $\overline{u}$ ja $\overline{v}$ *välinen kulma* määritellään siten, että $0 < \theta < \pi$ (ks. kuva 6.1).

Määritelmä 6.1. Jos $\overline{u}$ ja $\overline{v}$ ovat vektoreita 2- tai 3-ulotteisessa avaruudessa ja θ vektorien $\overline{u}$ ja $\overline{v}$ välinen kulma, niin *pistetulo* $\overline{u} \cdot \overline{v}$ (nimeltään myös euklidinen sisätulo) määritellään

$$\overline{u} \cdot \overline{v} = \begin{cases} \|\overline{u}\| \, \|\overline{v}\| \cos\theta, & \text{jos } \overline{u} \neq \overline{0} \text{ ja } \overline{v} \neq \overline{0} \\ 0, & \text{jos } \overline{u} = \overline{0} \text{ tai } \overline{v} = \overline{0}. \end{cases} \tag{6.1}$$

Olkoot $\overline{u} = (u_1, u_2, u_3)$ ja $\overline{v} = (v_1, v_2, v_3)$ kaksi nollasta poikkeavaa vektoria. Merkitään $\overline{u} = \overrightarrow{OP}$ ja $\overline{v} = \overrightarrow{OQ}$. Jos kulma θ on vektorien $\overline{u}$ ja $\overline{v}$ välinen kulma, niin kosinilauseesta saadaan

$$\left\|\overrightarrow{PQ}\right\|^2 = \|\overline{u}\|^2 + \|\overline{v}\|^2 - 2\,\|\overline{u}\|\,\|\overline{v}\| \cos\theta.$$



Kuva 6.1

Koska $\overrightarrow{PQ} = \overline{v} - \overline{u}$, voidaan kirjoittaa toisin

$$\|\overline{u}\|\,\|\overline{v}\| \cos\theta = \frac{1}{2}(\|\overline{u}\|^2 + \|\overline{v}\|^2 - \|\overline{v} - \overline{u}\|^2)$$

eli

$$\overline{u}\cdot\overline{v} = \frac{1}{2}(\|\overline{u}\|^2 + \|\overline{v}\|^2 - \|\overline{v}-\overline{u}\|^2).$$

Koska 3-ulotteisessa vektoriavaruudessa

$$\|\overline{u}\|^2 = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 \quad \text{ja} \quad \|\overline{v}\|^2 = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2$$

ja

$$\|\overline{v}-\overline{u}\|^2 = (v_1-u_1)^2 + (v_2-u_2)^2 + (v_3-u_3)^2,$$

saadaan sievennettynä

$$\overline{u}\cdot\overline{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3. \tag{6.2}$$

Mikäli vektorit $\overline{u} = (u_1, u_2)$ ja $\overline{v} = (v_1, v_2)$ ovat vektoreita 2-ulotteisessa avaruudessa, niin pistetulo $\overline{u}\cdot\overline{v}$ on vastaavasti

$$\overline{u}\cdot\overline{v} = u_1v_1 + u_2v_2.$$

Esimerkki 6.1. Olkoot vektorit $\overline{u} = (2,1,1)$ ja $\overline{v} = (1,-1,2)$. Määritä vektorien välinen pistetulo $\overline{u}\cdot\overline{v}$ sekä vektorien välinen kulma θ.
Ratkaisu: Määritelmän 6.1 mukaan $\overline{u}\cdot\overline{v} = \|\overline{u}\|\,\|\overline{v}\|\cos\theta$. Toisaalta kaavan (6.2) perusteella $\overline{u}\cdot\overline{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 = 2\cdot 1 + 1\cdot(-1) + 1\cdot 2 = 3$. Kaavan (5.3) mukaan

$$\|\overline{u}\| = \sqrt{2^2+1^2+1^2} = \sqrt{6} \text{ ja } \|\overline{v}\| = \sqrt{1^2+(-1)^2+2^2} = \sqrt{6}.$$

Tällöin

$$\cos\theta = \frac{\overline{u}\cdot\overline{v}}{\|\overline{u}\|\,\|\overline{v}\|} = \frac{3}{\sqrt{6}\sqrt{6}} = \frac{1}{2}.$$

Siis $\theta = \frac{\pi}{2}$.

Lause 6.1. *Olkoot $\overline{u}$ ja $\overline{v}$ vektoreita 2- tai 3-ulotteisessa vektoriavaruudessa. Tällöin*

(a) $\overline{v}\cdot\overline{v} = \|\overline{v}\|^2$ *eli* $\|\overline{v}\| = \sqrt{\overline{v}\cdot\overline{v}}$,

(b) *jos $\overline{u} \neq \overline{0}$ ja $\overline{v} \neq \overline{0}$ ja merkitään niiden välistä kulmaa kirjaimella θ, niin*

$$\begin{cases} \theta \text{ on terävä kulma } \Leftrightarrow \overline{u}\cdot\overline{v} > 0 \\ \theta \text{ on tylppä kulma } \Leftrightarrow \overline{u}\cdot\overline{v} < 0 \\ \theta = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \overline{u}\cdot\overline{v} = 0. \end{cases}$$

Todistus. (a) Koska vektoreiden $\overline{v}$ ja $\overline{v}$ välinen kulma $\theta = 0$, saadaan

$$\overline{v}\cdot\overline{v} = \|\overline{v}\|\,\|\overline{v}\|\cos\theta = \|\overline{v}\|^2\cos 0 = \|\overline{v}\|^2$$

(b) Koska $\|\overline{u}\| > 0$ ja $\|\overline{v}\| > 0$ ja $\overline{u} \cdot \overline{v} = \|\overline{u}\| \, \|\overline{v}\| \cos\theta$, pistetulo $\overline{u} \cdot \overline{v}$ on saman merkkinen kuin $\cos\theta$.

Koska kulma θ asettuu välille $0 < \theta < \pi$, niin kulma θ on terävä, jos ja vain jos $\cos\theta > 0$.

Kulma θ on tylppä, jos ja vain jos $\cos\theta < 0$, ja kulma $\theta = \frac{\pi}{2}$, jos ja vain jos $\cos\theta = 0$.

□

Esimerkki 6.2. Jos $\overline{u} = (-2, 3, -1)$, $\overline{v} = (-1, -5, 5)$ ja $\overline{w} = (-8, -6, -2)$, niin

$$\overline{u} \cdot \overline{v} = (-2) \cdot (-1) + 3 \cdot (-5) + (-1) \cdot 5 = -18$$
$$\overline{u} \cdot \overline{w} = (-2) \cdot (-8) + 3 \cdot (-6) + (-1) \cdot (-2) = 0$$
$$\overline{v} \cdot \overline{w} = (-1) \cdot (-8) + (-5) \cdot (-6) + 5 \cdot (-2) = 28$$

Tällöin vektorien $\overline{u}$ ja $\overline{v}$ välinen kulma on tylppä, vektorit $\overline{u}$ ja $\overline{w}$ ovat toisiaan vastaan kohtisuorassa ja vektorien $\overline{v}$ ja $\overline{w}$ välinen kulma on terävä.

Pistetulon tärkeimmät aritmeettiset ominaisuudet on esitetty lauseessa 6.2.

Lause 6.2. *Jos $\overline{u}$, $\overline{v}$ ja $\overline{w}$ ovat vektoreita 2- tai 3- ulotteisessa avaruudessa ja k on skalaari, niin*

(a) $\overline{u} \cdot \overline{v} = \overline{v} \cdot \overline{u}$

(b) $\overline{u} \cdot (\overline{v} + \overline{w}) = \overline{u} \cdot \overline{v} + \overline{u} \cdot \overline{w}$

(c) $k(\overline{u} \cdot \overline{v}) = (k\overline{u}) \cdot \overline{v} = \overline{u} \cdot (k\overline{v})$

(d) $\overline{u} \cdot \overline{u} > 0$, *jos* $\overline{u} \neq \overline{0}$, *ja* $\overline{u} \cdot \overline{u} = 0$, *jos* $\overline{u} = \overline{0}$.

Todistus. (a) Olkoot $\overline{u}$ ja $\overline{v}$ 2-ulotteisen vektoriavaruuden vektoreita. Merkitään $\overline{u} = (u_1, u_2)$ ja $\overline{v} = (v_1, v_2)$. Silloin

$$\overline{u} \cdot \overline{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 = v_1 u_1 + v_2 u_2 = \overline{v} \cdot \overline{u}.$$

Todistus menee samoin, jos $\overline{u}$ ja $\overline{v}$ ovat 3-ulotteisen vektoriavaruuden vektoreita.

(b) Olkoot $\overline{u}$, $\overline{v}$ ja $\overline{w}$ 2-ulotteisen vektoriavaruuden vektoreita. Merkitään vastaavasti $\overline{u} = (u_1, u_2)$, $\overline{v} = (v_1, v_2)$ ja $\overline{w} = (w_1, w_2)$. Tällöin

$$\begin{aligned}
\overline{u} \cdot (\overline{v} + \overline{w}) &= \overline{u} \cdot ((v_1, v_2) + (w_1, w_2)) \\
&= \overline{u} \cdot (v_1 + w_1, v_2 + w_2) \\
&= (u_1, u_2) \cdot (v_1 + w_1, v_2 + w_2) \\
&= u_1(v_1 + w_1) + u_2(v_2 + w_2) \\
&= u_1 v_1 + u_1 w_1 + u_2 v_2 + u_2 w_2 \\
&= u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_1 w_1 + u_2 w_2 \\
&= \overline{u} \cdot \overline{v} + \overline{u} \cdot \overline{w}.
\end{aligned}$$

(c) Olkoot $\overline{u}$ ja $\overline{v}$ 2-ulotteisen vektoriavaruuden vektoreita ja olkoon k skalaari. Merkitään $\overline{u} = (u_1, u_2)$ ja $\overline{v} = (v_1, v_2)$.

Hyödyntämällä kaavaa (6.2), saadaan

$$k(\overline{u} \cdot \overline{v}) = k(u_1v_1 + u_2v_2) = k(u_1v_1) + k(u_2v_2) = (ku_1)v_1 + (ku_2)v_2 = (k\overline{u}) \cdot \overline{v}.$$

Vastaasti, kerroin k voidaan liittää vektoriin $\overline{v}$, koska

$$k(\overline{u} \cdot \overline{v}) = k(u_1v_1 + u_2v_2) = ku_1v_1 + ku_2v_2 = u_1(kv_1) + u_2(kv_2) = \overline{u} \cdot (k\overline{v}).$$

(d) Olkoon $\overline{u} = (u_1, u_2)$. Tällöin

$$\overline{u} \cdot \overline{u} = u_1u_1 + u_2u_2 = u_1^2 + u_2^2.$$

Siis

$$\overline{u} \cdot \overline{u} > 0, \text{ jos } \overline{u} \neq \overline{0}$$

ja

$$\overline{u} \cdot \overline{u} = u_1^2 + u_2^2 = 0 \Leftrightarrow u_1 = 0 \text{ ja } u_2 = 0 \Leftrightarrow \overline{u} = (0, 0) = \overline{0}.$$

□

Laskettaessa pistetuloa, on huomioitava, että pistetulo voidaan laskea vain vektorien välillä ja sen lopputulos on skalaari, ei vektori. Pistetulon merkintä ja tavanomainen skalaarien kertolasku merkitään tässä tutkielmassa samalla pisteellä, joten lukijan on tiedostettava kumpaa matemaattista operaatiota $(\cdot)$ kulloinkin tarkoitetaan. Seuraavassa esimerkissä tähän kannattaa paneutua ajatuksella.

Esimerkki 6.3. Olkoot vektorit $\overline{u} = (1, 1)$, $\overline{v} = (4, 2)$ ja $\overline{w} = (-1, -2)$ ja olkoon $k = 7$. Lasketaan lauseen 6.2 kohtiin (a), (b) ja (c) liittyvät esimerkit yhtälöiden vasemmalta puolelta. Harjoitustehtäväksi jää laskea yhtälöiden oikeanpuoleiset pistetulot.

(a) $\overline{u} \cdot \overline{v} = 1 \cdot 4 + 1 \cdot 2 = 6$

(b) $(\overline{v} + \overline{w}) = (4, 2) + (-1, -2) = (4 - 1, 2 - 2) = (3, 0)$,
joten $\overline{u} \cdot (\overline{v} + \overline{w}) = (1, 1) \cdot (3, 0) = 1 \cdot 3 + 1 \cdot 0 = 3$.

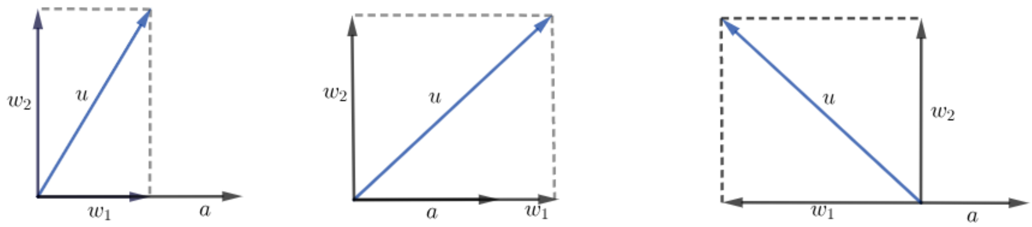
(c) $(k\overline{u}) \cdot \overline{v} = (7(1, 1)) \cdot (4, 2)$
$= (7 \cdot 1, 7 \cdot 1) \cdot (4, 2) = (7, 7) \cdot (4, 2) = 7 \cdot 4 + 7 \cdot 2 = 28 + 14 = 42.$

6.2 Kohtisuoruus ja projektiot

Vektorien $\overline{u}$ ja $\overline{a}$ sanotaan olevan *ortogonaaliset* eli kohtisuorassa toisiaan vasten (merkitään $\overline{u} \perp \overline{a}$), jos $\overline{u} \cdot \overline{a} = 0$. Pistetulolla on käytännön merkitystä esimerkiksi, kun vektori halutaan ilmaista kahden, toisiaan vastaan kohtisuoran vektorin summan avulla. Olkoot $\overline{u} \neq \overline{0}$ ja $\overline{a} \neq \overline{0}$ vektoreita 2- tai 3-ulotteisessa avaruudessa. Tällöin $\overline{u}$ voidaan aina lausua muodossa

$$\overline{u} = \overline{w}_1 + \overline{w}_2,$$

missä $\overline{w}_1$ on vektorin $\overline{a}$ skalaarimonikerta ja $\overline{w}_2$ on kohtisuorassa vektoria $\overline{a}$ vastaan. Vektoria $\overline{w}_2$ kutsutaan vektorin $\overline{u}$ komponentiksi, joka on ortogonaalinen vektorille $\overline{a}$. Koska $\overline{w}_1$ on vektorin $\overline{a}$ skalaarimonikerta, se voidaan kirjoittaa



Kuva 6.2: Vektorin $\overline{u}$ ortogonaaliprojektioita

muodossa $\overline{w}_1 = k\overline{a}$. Täten

$$\overline{u} = \overline{w}_1 + \overline{w}_2 = k\overline{a} + \overline{w}_2.$$

Kun molemmilta puolilta otetaan pistetulo vektorin $\overline{a}$ kanssa, niin lauseiden 6.1 ja 6.2 tuloksia hyödyntämällä saadaan

$$\overline{u} \cdot \overline{a} = (k\overline{a} + \overline{w}_2) \cdot \overline{a} = k \left\| \overline{a} \right\|^2 + \overline{w}_2 \cdot \overline{a}.$$

Koska $\overline{w}_2$ on kohtisuorassa vektorin $\overline{a}$ kanssa, näiden välinen pistetulo on $\overline{w}_2 \cdot \overline{a} = 0$, joten edellisestä yhtälöstä saadaan

$$k = \frac{\overline{u} \cdot \overline{a}}{\left\| \overline{a} \right\|^2},$$

ja koska $\overline{w}_1 = k\overline{a}$, saadaan

$$\overline{w}_1 = \frac{\overline{u} \cdot \overline{a}}{\left\| \overline{a} \right\|^2} \overline{a}.$$

Tässä $\overline{w}_1$ on vektorin $\overline{u}$ *ortogonaaliprojektio* vektorille $\overline{a}$. Ratkaisemalla $\overline{w}_2$ yhtälöstä

$$\overline{u} = \overline{w}_1 + \overline{w}_2$$

saadaan

$$\overline{w}_2 = \overline{u} - \frac{\overline{u} \cdot \overline{a}}{\left\| \overline{a} \right\|^2} \overline{a}.$$

Tässä siis $\overline{w}_2$ on $\overline{u}$:n vektorikomponentti, joka on ortogonaalinen vektorille $\overline{a}$.

Esimerkki 6.4. Olkoot $\overline{u} = (1, 2, 3)$ ja $\overline{a} = (3, 2, 1)$ vektoreita 3-ulotteisessa vektoriavaruudessa. Tällöin

$$\overline{u} \cdot \overline{a} = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 = 10$$

ja

$$\|\overline{a}\|^2 = (\sqrt{3^2 + 2^2 + 1^2})^2 = 14.$$

Vektorin $\overline{u}$ ortogonaaliprojektio vektorille $\overline{a}$ on

$$\overline{w}_1 = \frac{\overline{u} \cdot \overline{a}}{\|\overline{a}\|^2}\overline{a} = \frac{10}{14}(3, 2, 1) = (\frac{15}{7}, \frac{10}{7}, \frac{5}{7}).$$

Vektorin $\overline{u}$ vektorikomponentti, joka on ortogonaalinen vektorille $\overline{a}$, on

$$\overline{w}_2 = \overline{u} - \overline{w}_1 = (1, 2, 3) - (\frac{15}{7}, \frac{10}{7}, \frac{5}{7}) = (1 - \frac{15}{7}, 2 - \frac{10}{7}, 3 - \frac{5}{7}) = (-\frac{8}{7}, \frac{4}{7}, \frac{16}{7}).$$

6.3 Harjoitustehtäviä

1. Osoita, että esimerkin 6.4 vektorit $\overline{a}$ ja $\overline{w}_2$ ovat toisiaan vastaan kohtisuorat laskemalla niiden pistetulo.

2. Muodostuuko seuraavien vektorien välille tylppä, terävä vai suora kulma?

   (a) $\overline{u} = (7, 2, 4)$ ja $\overline{v} = (-8, 3, 1)$
   (b) $\overline{u} = (6, 0, 2)$ ja $\overline{v} = (4, -1, -7)$
   (c) $\overline{u} = (1, 0, 0)$ ja $\overline{v} = (-1, -1, -1)$
   (d) $\overline{u} = (4, 3, 6)$ ja $\overline{v} = (-3, 2, 1)$

3. Laske seuraavat pistetulot ja vertaa tuloksia esimerkkissä 6.3 saatuihin tuloksiin. Olkoot vektorit $\overline{u} = (1, 1)$, $\overline{v} = (4, 2)$ ja $\overline{w} = (-1, -2)$ ja $k = 7$.

   (a) $\overline{v} \cdot \overline{u}$
   (b) $\overline{u} \cdot \overline{v} + \overline{u} \cdot \overline{w}$
   (c) $\overline{u} \cdot (k\overline{v})$

4. Määritä vektorin $\overline{u}$ ortogonaaliprojektio vektorille $\overline{a}$. Merkitse tätä projektiota kirjaimella $\overline{w}$ ja piirrä kuva kohtiin (a) ja (b), kun

   (a) $\overline{u} = (4, 2)$ ja $\overline{a} = (6, 0)$
   (b) $\overline{u} = (2, 2)$ ja $\overline{a} = (-3, 1)$
   (c) $\overline{u} = (4, 2, -3)$ ja $\overline{a} = (3, 6, 9)$
   (d) $\overline{u} = (0, 0, 2)$ ja $\overline{a} = (8, -2, 2)$.

5. Etsi kaksi vektoria, joiden normi on 1 ja jotka ovat ortogonaalisia vektorille $(-3, 2)$.

6. Miksi seuraavat lausekkeet eivät ole määriteltyjä (2- tai 3-ulotteisessa avaruudessa), oletetaan, että $\overline{u}$, $\overline{w}$ ja $\overline{v}$ ovat vektoreita ja k skalaari:

   (a) $(\overline{u} \cdot \overline{w}) \cdot \overline{v}$

   (b) $\overline{w} + (\overline{v} \cdot \overline{u})$

   (c) $\|\overline{w} \cdot \overline{w}\|$

   (d) $k \cdot (\overline{u} + \overline{v})$

7. Määritä kuution diagonaalin ja yhden sen tahkon välinen kulma.

7 Sovelluksia vektoreista

Vektoreita hyödynnetään useissa arkielämän sovelluksissa. Tässä tutkielmassa esitellään niistä kaksi. Matemaattisten rakenteiden oppiminen muuttuu mielekkäämmäksi, kun teoriaa pystyy soveltamaan käytäntöön. Vektoreita erityisesti esiintyy monilla fysiikan, mutta nykypäivänä myös tietotekniikan eri osa-alueilla.

7.1 RGB-väriavaruus

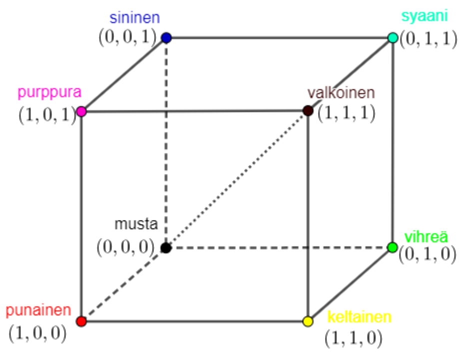
Värit tietokoneen näytöllä on määritely hyödyntämällä vektorien lineaarikombinaatioita kolmiulotteisessa avaruudessa. Tätä mallia kutsutaan RGB-värimalliksi. Järjestelmä perustuu kolmeen perusväriin: punaiseen (R), vihreään (G) ja siniseen (B). Muut värit luodaan laskemalla yhteen näitä värejä eri suhteissa eli prosenteissa.

Voidaan olettaa seuraavasti: väriä punainen edustaa vektori $\overline{r} = (1, 0, 0)$, vihreää vektori $\overline{g} = (0, 1, 0)$ ja väriä sininen vektori $\overline{b} = (0, 0, 1)$. Tällöin vektorissa $\overline{r}$ on 100% punaista ja 0% muita sävyjä. Esimerkiksi keltainen väri saadaan punaisen ja vihreän värin avulla. Keltaista väriä edustaa vektori $\overline{y} = (1, 1, 0)$.

Kaikkien värien joukkoa kutsutaan RGB-väriavaruudeksi. Täten jokainen väri voidaan lausua vektorina $\overline{c}$ tässä vektoriavaruudessa ja ilmaista vektorien $\overline{r}$, $\overline{g}$ ja $\overline{b}$ lineaarikombinaationa seuraavasti, kun $0 \leq k_i \leq 1$ (ks. [3]):

$$
\begin{aligned}
\overline{c} &= k_1\overline{r} + k_2\overline{g} + k_3\overline{b} \\
&= k_1(1, 0, 0) + k_2(0, 1, 0) + k_3(0, 0, 1) \\
&= (k_1, k_2, k_3).
\end{aligned} \tag{7.1}
$$

.



Kuva 7.1: Värivektorien joukkoa kutsutaan RGB-väriavaruudeksi.

Kaikki tarvittavat värit voidaan esittää kolmen päävärin intensiteettinä. Päävärien kirkkaudet määritellään 24 bitin värisyvyyttä käytettäessä asteikolla

0-255 (ks.[8]). Käytännössä tietokoneen näytöllä näkyvien kuvien värien arvot voidaan ilmoittaa R:_ G:_ B:_. Esimerkiksi arvot voisivat olla $(0, 82, 165)$ tai $(255, 255, 255)$. Saatko selville, mitä värejä nämä edustavat?

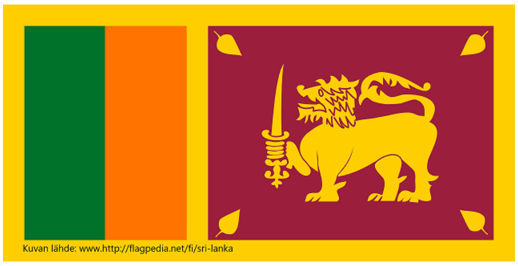
Internet-ohjelmoinnissa värikoodit voidaan antaa muodossa $\#rrggbb$, jossa kokonaisluvut ilmaisevat punaisen, vihreän ja sinisen värin osuutta kyseisessä värisävyssä. Lukujen vaihteluväli on minimiarvosta 00 maksimiarvoon ff. Kirjaimella f voidaan siis ilmaista halutun sävyn suurinta intensiteettiä. Esimerkiksi taustavärin määrittelyyn voi käyttää komentoa:

$$style = "background - color : \#f59951".$$

Värien muutosta internet-ohjelmoinnissa voi tutkia esimerkiksi verkkosivustolla https://www.w3schools.com/colors/ [13].

Tehtävä: Hyödyntämällä kaavaa (7.1) etsi kertoimet k_1, k_2, k_3, kun RGB-arvot ovat $(15, 204, 153)$. RGB-arvot ovat välillä $0 < RGB < 255$. Millainen väri on kyseessä?

Esimerkki 7.1. Sri Lankan lipussa on useita eri värejä, joista jokainen väri symboloi jotain asiaa. Leijonan taustavärinä oleva kastanjanruskea ilmaisee Sri Lankan valtion ylläpitämän verkkosivuston mukaan maan vähemmistöuskontoja [11]. Kastanjanruskea väri saadaan RGB-värikoodauksella, jossa puhtaanpunaisen värin kirkkautta on vähennetty noin puoleen [12]. Anna RGB arvoilla kastanjanruskean värin vektorimuoto.



Kuva 7.2: Sri Lankan lippu

Ratkaisu: Puhtaan punaisen RGB-arvo on $(255, 0, 0)$, joten kun punaista väriä vähennetään noin puoleen, saadaan vektori $(128, 0, 0)$. Wikipedian mukaan [12] kastanjanruskean sävyjä on kuitenkin nimetty useampia. Mitä mieltä olet, kumpi sävy on lähempänä lipun kastanjanruskeaa: $(195, 33, 72)$ vai edellämainittu?

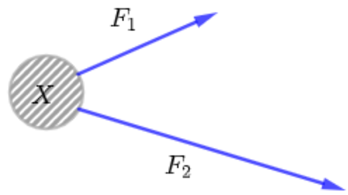
7.2 Voima vektorisuureena

Fysiikan tehtäviä ratkottaessa, esimerkiksi tutkittaessa kappaleen liikettä, kappaleeseen vaikuttavia voimia ilmennetään vektorien avulla. Kun kappaleeseen kohdistuvat voimat on piirretty näkyviin vektoreina, jää tehtäväksi matematiikan keinoin ratkaista voimista johtuvan liiketilan muutoksia. Trigonometriaa ja geometriaa hyödyntäen saadaan tavanomaisimmat lukiotason fysiikan mekaniikan tehtävät ratkaistua.

7.2.1 Dynamiikan lakien vektoriesitys

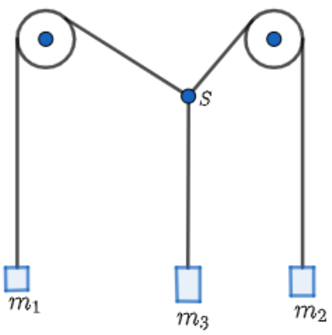
Tässä aliluvssa on käytetty lähtenä teosta [7].

Kappaleeseen X ajatellaan vaikuttavan kaksi erisuuntaista voimaa, kuvan 7.3 osoittamalla tavalla.



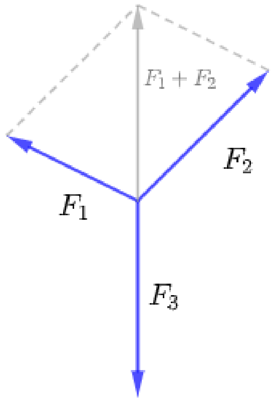
Kuva 7.3: Kappaleeseen vaikuttaa kaksi erisuuntaista voimaa.

Vektorien yhteenlaskulakien mukaan vektorien $\overline{F}_1$ ja $\overline{F}_2$ *resultanttivektori* $\overline{F}$ aiheuttaa kappaleeseen yhtä suuren kiihtyvyyden, kuin voimavektorit $\overline{F}_1$ ja $\overline{F}_2$, vaikuttaessaan kappaleeseen samanaikaisesti. Yksi käytännön koe, joka auttaa näkemään voiman vektorisuureena, on esitetty kuvassa 7.4.



Kuva 7.4: Koejärjestely, jolla voidaan osoittaa voimien käyttäytyvän vektorisumman mukaisesti

Venymättömiin lankoihin kiinnitetään punnukset, joiden massat tunnetaan. Systeemin annetaan asettua tasapainoon. Langat yhtyvät pisteessä S. Kelojen pyöriessä kitkatta, voidaan lankaan kohdistuvan voiman katsoa riippuvan suoraan siihen kiinnitetyn punnuksen massasta. Koska lankojen kiinnityskohta (S) ei liiku tasapainotilan saavutettuaan, täytyy mitkä tahansa kaksi kuvassa 7.4 esitettyä vektoria tasapainottaa kolmas voimavektori. Tällöin kahden lankaa pitkin välittyvän voiman on oltava tasapainossa kolmannen voiman kanssa.



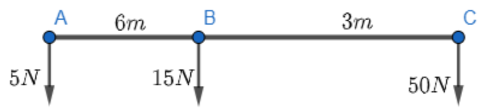
Kuva 7.5

Jos keloja kiertäviin lankoihin kohdistuvat voimavektorit lasketaan yhteen, nähdään summavektorin $\overline{F}_1 + \overline{F}_2$ olevan yhtä suuri, mutta vastakkaissuuntainen, kuin kolmanteen lankaan kohdistuva voimavektori $\overline{F}_3$ on (ks. kuva 7.5).

Täten mikäli voimien suuruudet lasketaan yhteen vektoreina, havaitaan niiden nettovaikutuksen olevan nolla, kuten edellytetään, jotta piste S säilyttää tasapainoasemansa. Newtonin toinen laki sanoo, että jos kappaleeseen vaikuttavien voimien summa F ei ole nolla, kappale ei pysy levossa vaan lähtee liikkeelle kiihtyvyydellä

$$a = \frac{F}{m}.$$

Esimerkki 7.2. Painottomaksi oletettuun suoraan sauvaan on kiinnitetty kolme punnusta pisteisiin A, B ja C, kuvan 7.6 mukaisesti. Määritä resultanttivoiman etäisyys (eli sauvan painopiste) $\left\|\overrightarrow{AE}\right\|$ ja suuruus.



Kuva 7.6

Ratkaisu: Lasku jaetaan kahteen osaan, jossa ensin ratkaistaan painojen A ja B, välinen tasapainokohta. Merkitään tätä tasapainopistettä kirjaimella D. Toisessa vaiheessa ratkaistaan kysytty tasapainopiste E. Painojen A ja B välinen pystysuora resultanttivektori, suuruudeltaan $20N$ vaikuttaa pisteessä D. Voidaan lausua kuvan arvojen perusteella

$$\left\|\overrightarrow{AD}\right\| = \frac{15N}{20N} \cdot \left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \frac{3}{4} \cdot 6m = 4.5m.$$

Tämän $20N$:n ja $50N$:n vektorien resultantti on suuruudeltaan $70N$ vaikuttaen pisteen E kautta kohtisuoraan sauvan pituuteen nähden, missä

$$\left\|\overrightarrow{DE}\right\| = \frac{50N}{70N} \cdot \left\|\overrightarrow{DC}\right\| = \frac{5}{7} \cdot 4.5m = \frac{45}{14}m = 3.2m.$$

Tästä saadaan ratkaistua kysytty

$$\left\|\overrightarrow{AE}\right\| = \left\|\overrightarrow{AD}\right\| + \left\|\overrightarrow{DE}\right\| = 4.5m + 3.2m = 7.7m$$

.

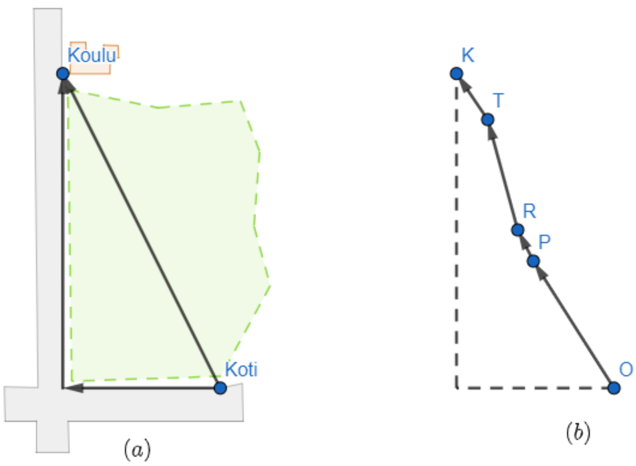
7.3 Harjoitustehtäviä

1. Kuvaile miten ja mikä väri muuttuu, kun vektorin $\overline{c} = k_1\overline{r} + k_2\overline{g} + k_3\overline{b}$ kertoimet $k_1 = k_2 = k_3$ käyvät läpi arvot 1,2,3 ja 4. Väriä ilmaiseva vektori $\overline{c}$ muodostuu vektorien $\overline{r} = (64, 0, 0)$, $\overline{g} = (0, 64, 0)$ ja $\overline{b} = (0, 0, 64)$ ja kertoimen k lineaarikombinaationa.

2. Sisarukset Riku ja Emma kävelevät kouluun. Emma kävelee teitä pitkin ja Riku oikaisee metsän lapi. Emman tie kotoa kouluun kulkeen ensin itään yhden kilometrin ja sitten pohjoiseen 2 km. Riku kulkee suoraa reittiä kuvan 7.7(a) mukaisesti metsän läpi.

   (a) Kuinka pitkä kummankin koulumatka on, kun oletetaan reittien kulkevan tasamaastossa?

   (b) Entä kuinka pitkä Rikun koulumatka on tilanteessa, jossa kulkureitti metsän läpi kulkee kukkulan kautta, jonka Emma teitä pitkin kulkemalla välttää. Maasto Rikun reitillä muuttuu seuraavasti (ks. kuva 7.7(b)): Reitin lähtöpiste on origossa, pisteessä $O(0, 0, 0)$. Tämän jälkeen polku nousee pisteeseen $P(500, 500, 50)$, josta alkaa rappuset, päättyen kukkulan laelle pisteeseen $R(520, 525, 70)$. Tästä jatkuu ulkoilureitti tasaisessa maastossa ja pisteestä $T(800, 1700, 60)$ alkaa jyrkkä alamäki koulun taakse pisteeseen $K(1000, 2000, 0)$. Pisteiden yksiköt on annettu metreissä.



Kuva 7.7

3. Jäykkään kappaleeseen kohdistuu kaksi samansuuntaista voimaa, suuruudeltaan 6N ja 11N. Voimien vaikutussuorien välillä on matkaa 1m. Kuinka kaukana resultanttivektorin vaikutussuora on pienemmän voiman vaikutussuorasta?

4. Varautuneeseen öljypisaraan kohdistuu sähkökentän vaikutuksesta vaakasuora $0,29mN$:n voima positiiviseen x-akselin suuntaan ja pystysuora $0,50mN$:n maan vetovoiman aiheuttama voima. Kuinka suuri kokonaisvoima pisaraan kohdistuu ja miten suuren kulman se muodostaa positiivisen x-akselin kanssa?

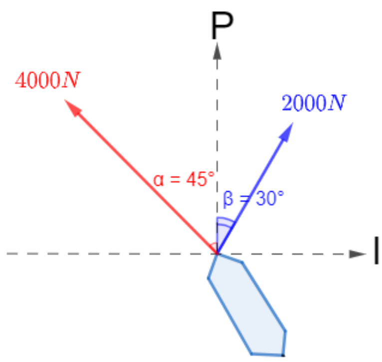
5. Kaksi hinaajaa vetävät perässään massaltaan $8000kg$ painoista laivaa, kuvan 7.8 osoittamalla tavalla. Hinaaja A vetää $4000N$:n voimalla luoteeseen, hinaajan B vetäessä $2000N$:n voimalla $30°$ pohjoisesta koillisen suuntaan.

    (a) Minkä suuruisen nettovoiman hinaajat kohdistavat laivaan?

    (b) Mihin suuntaan laiva lähtee liikkumaan siihen vaikuttavien voimien seurauksena?

    (c) Jos laivan kiihtyvyydeksi todetaan $0,10\frac{m}{s^2}$, miten suuren vastavoiman vesi kohdistaa laivaan?

    Oletetaan positiiviseksi x-akseliksi ilmansuunta itä ja positiiviseksi y-akseliksi ilmansuunta pohjoinen.



Kuva 7.8

8 Harjoitustehtävien ratkaisut

8.1 Ratkaisut tehtäviin 4.6

1. $\overline{a} = (4, -3)$ ja $\overline{b} = (-4, 1)$

   a) $\overline{a} + \overline{b} = (4, -3) + (-4, 1) = (4 + (-4), -3 + 1) = (0, -2)$

   b) $\overline{b} - \overline{a} = (-4, 1) - (4, -3) = (-4 - 4, 1 - (-3) = (-8, 4)$

   c) $\frac{1}{2}\overline{a} = \frac{1}{2}(4, -3) = (\frac{1}{2} \cdot 4, \frac{1}{2}(-3)) = (2, -\frac{3}{2})$

   d) $\frac{3}{4}\overline{b} = (-3, \frac{3}{4})$

   e) $2(\overline{a} - \overline{b}) = 2((4, -3) - (-4, 1)) = 2(4 - (-4), (-3) - 1) = 2(8, -4)$
   $= (16, -8)$

2. $2\overline{u} = \overline{v}$ ja $\overline{v} = (8, 2, -\frac{6}{3}) = 2(4, 1, -1)$. Siis $\overline{u} = (4, 1, -1)$

3. i) $\overline{a} + \overline{b}$

   ii) $-\overline{a} - \overline{b}$

   iii) $\overline{b} - \overline{a}$

   iv) $\overline{a} - \overline{b}$

4. $\overrightarrow{RQ} = -\overrightarrow{OR} + \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OR} = (q_1 - r_1, q_2 - r_2, q_3 - r_3)$.
   $Q = (4, -2, -3)$ ja $R = (1, -5, 6)$
   Siis $\overrightarrow{QR} = -\overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OR} = -(4, -2, -3) + (1, -5, 6) = (-4, 2, 3) + (1, -5, 6) =$
   $(-4 + 1, 2 + (-5), 3 + 6) = (-3, -3, 9)$.

5. $\overline{u} = (-4, 3, 6)$ ja $\overline{v} = (4, 1, 5)$

   a) $\overline{v} + \overline{u} = (0, 4, 11)$

   b) $\overline{u} + \overline{u} = (-8, 6, 12)$

   c) $2(\overline{u} - 3\overline{v}) = (-32, 0, -18)$

   d) $4\overline{u} + 3\overline{v} = (-4, 15, 39)$

   e) $k\overline{w} = \overline{u} + \overline{u}$
   Kohdan b) tuloksen perusteella $\overline{u} + \overline{u} = (-8, 6, 12) = (2 \cdot (-4), 2 \cdot 3, 2 \cdot 6)$
   $= 2(-4, 3, 6)$.
   Tästä saadaan $k = 2$ ja $\overline{w} = (-4, 3, 6)$.

6. $\overline{b} = \overline{c} - \overline{d} + \overline{a}$
   $\overline{c} = \overline{b} - \overline{a} + \overline{d}$
   $\overline{d} = \overline{a} - \overline{b} + \overline{c}$

7. a) $A = (0,0,0)$ ja $B = (1,2,3)$
$\overrightarrow{AB} = (1-0, 2-0, 3-0) = (1,2,3)$ ja
$\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB} = -(1,2,3) = (-1,-2,-3)$

b) $A = (3,-4,5)$ ja $B = (0,0,0)$
$\overrightarrow{AB} = (0-3, 0-(-4), 0-5) = (-3,4,-5)$
$\overrightarrow{BA} = (3-0, -4-0, 5-0) = (3,-4,5)$

c) Ol. $O = (0,0,0)$, $A = (1,-3,-4)$ ja $B = (-5,3,-4)$
$\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = -(1-0, -3,0, -4-0) + (-5-0, 3-0, -4-0)$
$= (-1,3,4) + (-5,3,4) = (-1+(-5), 3+3, 4-4) = (-6,6,0)$
$\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = (1,-3,-4) - (-5,3,-4)$
$= (1,-3,-4) + (5,-3,4) = (1+5, -3+(-3), -4+4) = (6,-6,0)$

d) Ol. $O = (0,0,0)$, $A = (3,-4,5)$ ja $B = (2,2,-6)$
$\overrightarrow{AB} = (-1,6,-11)$
$\overrightarrow{BA} = (1,-6,11)$

8. Ol. $O = (0,0,0)$, $A = (1,2,3)$, $B = (3,4,1)$, $C = (1,5,3)$ ja $D = ?$ ja $\overrightarrow{AD} \parallel \overrightarrow{BC}$.
$\overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = -(3,4,1) + (1,5,3) = (-3,-4,-1) + (1,5,3)$
$= (-3+1, (-4)+5, (-1)+3) = (-2,1,2)$
$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}$
$= -(1,2,3) + (3,4,1) + (-2,1,2) + (-(1,5,3)) + \overrightarrow{OD} = (-1,-2,-3) + \overrightarrow{OD}$
$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} \quad \Leftrightarrow \quad (-1,-2,-3) + \overrightarrow{OD} = (-2,1,2)$
$\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{OD} = (-2,1,2) - (-1,-2,-3) = ((-2)+1, 1+2, 2+3) = (-1,3,5).$
Siis $D = (-1,3,5)$

9. $\overrightarrow{AB} = (\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$, $\overrightarrow{CD} = (\frac{5}{2}, 0)$, $\overrightarrow{EF} = (3,1)$, $\overrightarrow{GH} = (-2, -\frac{3}{2})$,
$\overrightarrow{IJ} = (-\frac{3}{2}, -\frac{3}{2})$, $\overrightarrow{KL} = (\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$, $\overrightarrow{MN} = (-4,1)$, $\overrightarrow{OP} = (\frac{5}{2}, 1)$,
$\overrightarrow{QR} = (\frac{5}{2}, 0)$, $\overrightarrow{ST} = (-4,1)$, $\overrightarrow{UV} = (-\frac{3}{2}, -\frac{3}{2})$, $\overrightarrow{WX} = (-2, -\frac{3}{2})$.
Siis $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{KL}$, $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{QR}$, $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{UV}$, $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{ST}$, $\overrightarrow{GH} = \overrightarrow{WX}$ ja $\overrightarrow{EF} \neq \overrightarrow{OP}$

8.2 Ratkaisut tehtäviin 5.6

1. a) $P_1(5,-1)$ ja $P_2(3,4)$
$\overrightarrow{P_1P_2} = (3-5, 4-(-1))$
$d_{P_1P_2} = \sqrt{(3-5)^2 + (4-(-1))^2} = \sqrt{29}$

b) $P_1(2,-3,7)$ ja $P_2(-6,2,3)$
$\overrightarrow{P_1P_2} = (-6-2, 2-(-3), 3-7) = (-8,5,-4)$
$d_{P_1P_2} = \sqrt{(-8)^2 + 5^2 + (-4)^2} = \sqrt{105}$

2. a) $\overline{u} = (0, -2)$ ja $\overline{v} = (-3, 2)$
$\overline{v} - \overline{u} = (-3, 4)$
$\|\overline{v} - \overline{u}\| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$

b) $\overline{u} = (2, 2, 2)$ ja $\overline{v} = (4, 0, 1)$
$\overline{v} - \overline{u} = (2, -2, -1)$
$\|\overline{v} - \overline{u}\| = \sqrt{2^2 + (-2)^2 + (-1)^2} = \sqrt{9} = 3$

3. $\overline{u} = (3, 2, 4)$, $\overline{v} = (2, -1, 5)$, $\overline{w} = (1, 0, -1)$

a) $\|\overline{u}\| = \sqrt{29}$

b) $\|\overline{v}\| = \sqrt{30}$

c) $\|\overline{u} + \overline{v}\| = \sqrt{107}$

d) b)-kohdan perusteella: $3\,\|\overline{v}\| = 3\sqrt{30}$
$\|-3\overline{v}\| = \|-3(2, -1, 5)\| = \|(-6, 3, -15\| = \sqrt{(-6)^2 + 3^2 + (-15)^2}$
$= 3\sqrt{30}$
Siis $\|-3\overline{v}\| - 3\,\|\overline{v}\| = 3\sqrt{30} - 3\sqrt{30} = 0$
tai $\|-3\overline{v}\| - 3\,\|\overline{v}\| = |-3|\,\|\overline{v}\| - 3\,\|\overline{v}\| = 0$

e) $\frac{1}{\|\overline{w}\|}\overline{w}$, kun $\overline{w} = (1, 0, -1)$, niin $\|\overline{w}\| = \sqrt{2}$. Tällöin $\frac{1}{\sqrt{2}}\overline{w} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1)$
$= (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}})$

4. $\|k\overline{v}\| = 5$, kun $\overline{v} = (4, 1, 2)$
$\|k\overline{v}\| = \|k(4, 1, 2)\| = \|(4k, k, 2k)\| = \sqrt{(4k)^2 + k^2 + (2k)^2}$
Siis $\sqrt{16k^2 + k^2 + 4k^2} = 5$
$\Leftrightarrow \quad \sqrt{21k^2} = 5$
$\Leftrightarrow \quad \pm k\sqrt{21} = 5$
$\Leftrightarrow \quad k = \pm\frac{5}{\sqrt{21}}$
tai $\|k\overline{v}\| = 5 \Leftrightarrow |k|\,\|\overline{v}\| = 5 \Leftrightarrow |k|\,\sqrt{21} = 5 \Leftrightarrow |k| = \frac{5}{\sqrt{21}} = \pm\frac{5}{\sqrt{21}}$

5. $\overline{u} = (\frac{4}{5}, \frac{3}{5})$
$\|\overline{u}\| = \sqrt{(\frac{4}{5})^2 + (\frac{3}{5})^2} = 1$

6. $\overline{v} = (2, -2, -1)$
$\|\overline{u}\| = 1$ ja $\overline{u} = k\overline{v}$
$\overline{u}$ on vektorin $\overline{v}$ yksikkövektori
$\overline{u} = \frac{1}{\|\overline{v}\|}\overline{v} = \frac{1}{\sqrt{2^2+(-2)^2+(-1)^2}}(2, -2, -1) = \frac{1}{3}(2, -2, -1) = (\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3})$

7. a) $(2\overline{\imath} + \overline{\jmath} - \overline{k}) - (\overline{\imath} - 2\overline{\jmath} + 4\overline{k}) = \overline{\imath} + 3\overline{\jmath} - 5\overline{k}$

b) $2(\overline{\jmath} - \overline{k}) - (\overline{\imath} + \overline{\jmath}) = -\overline{\imath} + \overline{\jmath} - 2\overline{k}$

c) $(2\overline{\imath} - \overline{\jmath} + 2\overline{k}) + 2(5\overline{\jmath} - \overline{k}) = 2\overline{\imath} + 9\overline{\jmath}$

d) $2(\overline{\imath} - \overline{\jmath}) + 5(2\overline{\imath} + \overline{\jmath} - \overline{k}) = 12\overline{\imath} + 3\overline{\jmath} - 5\overline{k}$

8. b) $(-1, 1, -2)$
c) $(2, 9, 0)$
d) $(12, 3, -5)$

9. $-\overline{\imath} + 5\overline{\jmath} + \overline{k} = (-1, 5, 1)$ ja $2\overline{\imath} - b\overline{\jmath} - 2\overline{k} = (2, -b, -2)$
Yhdensuuntaisuusehto $\overline{u} = k\overline{v}$. Tässä olkoon $\overline{u} = (-1, 5, 1)$ ja $\overline{v} = (2, -b, -2)$.
Tällöin
$(-1, 5, 1) = k(2, -b, -2)$
$(-1, 5, 1) = (2k, -kb, -2k)$
Yhtäsuuruus pätee, jos $\begin{cases} -1 = 2k \\ 5 = -kb \\ 1 = -2k \end{cases}$
$-1 = 2k \Rightarrow k = -\frac{1}{2}$ ja $1 = -2k \Rightarrow k = -\frac{1}{2}$
Siis $k = -\frac{1}{2}$, jolloin, kun $5 = -kb$
niin $b = \frac{5}{-k} = \frac{5}{-(-\frac{1}{2})} = 5 \cdot 2$
$b = 10$

10. Olkoot $\overline{u} = (3, 1, 0)$ ja $\overline{v} = (0, b, -1)$. Kun määritellään b siten, että $3\overline{\imath} + \overline{\jmath}$ ja $b\overline{\jmath} - \overline{k}$ ovat yhtä pitkiä, niin tällöin
$\|\overline{u}\| = \sqrt{3^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{10}$ ja $\|\overline{v}\| = \sqrt{0^2 + b^2 + (-1)^2}$
Siis $\sqrt{b^2 + 1} = \sqrt{10} \quad \|()^2$
$b^2 + 1 = 10 \quad \| -1$
$b^2 = 10 - 1$
$b = \sqrt{9} = 3$

11. $\overline{a} = 2\overline{\imath} + 9\overline{\jmath} - 8\overline{k}$ ja $\overline{b} = 2\overline{\imath} + 3\overline{\jmath} - \overline{k}$

a) $2\overline{b} - \overline{a} = 2(2\overline{\imath} + 3\overline{\jmath} - \overline{k}) - (2\overline{\imath} + 9\overline{\jmath} - 8\overline{k}) = 2\overline{\imath} - 3\overline{\jmath} + 6\overline{k}$

b) $\left\|2\overline{b} - \overline{a}\right\| = \sqrt{49} = 7$

c) $\overline{c} = 2\overline{b} - \overline{a} = 2\overline{\imath} - 3\overline{\jmath} + 6\overline{k}$ ja $\overline{u_{\overline{c}}} = k\overline{c}$, $\|\overline{u_{\overline{c}}}\| = 1$
$\overline{u_{\overline{c}}} = k\overline{c} = k(2\overline{\imath} - 3\overline{\jmath} + 6\overline{k}) = (2k, -3k, 6k)$
$\|\overline{u_{\overline{c}}}\| = \sqrt{(2k)^2 + (-3k)^2 + (6k)^2} = \sqrt{k^2(4 + 9 + 36)} = \sqrt{49k^2} = 7k$
$\|\overline{u_{\overline{c}}}\| = 7k = 1 \Rightarrow k = \frac{1}{7} \Rightarrow \overline{u_{\overline{c}}} = \frac{1}{7}(\overline{2\imath} - 3\overline{\jmath} + 6\overline{k}) = \frac{2}{7}\overline{\imath} - \frac{3}{7}\overline{\jmath} + \frac{6}{7}\overline{k}$

12. $\overline{a} = -2\overline{\imath} + 2\overline{\jmath} - 4\overline{k}$, $\overline{b} = 3\overline{\imath} - 3\overline{\jmath} + 6\overline{k}$, $\overline{c} = \overline{\imath} - \overline{\jmath} + 2\overline{k}$, $\overline{d} = 2\overline{\imath} - \overline{\jmath} + 2\overline{k}$

a) Yhdensuuntaisuusehto: $\overline{u} = k\overline{v}$
$\overline{a} = (-2, 2, -4)$
$\overline{b} = (3, -3, 6)$
$\overline{c} = (1, -1, 2)$
$\overline{d} = (2, -1, 2)$
$\overline{b} = 3(1, -1, 2)$, tällöin $\overline{b} = 3\overline{c}$ eli $\overline{b} \| \overline{c}$
$\overline{a} = -2(1, -1, 2)$, tällöin $\overline{a} = -2\overline{c}$ eli $\overline{a} \| \overline{c}$ ja tällöin myös $\overline{a} \| \overline{b}$, $\overline{a} = -\frac{2}{3}\overline{b}$

b) Vektorit ovat samansuuntaiset, kun kerroin $k > 0$. Vektorit $\overline{b}$ ja $\overline{c}$ ovat samansuuntaiset, sillä $\overline{b} = 3\overline{c}$, jossa $k = 3 > 0$

c) Vektoreista vastakkaissuuntaisia ovat $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ sekä $\overline{a}$ ja $\overline{c}$, sillä $\overline{a} = -\frac{2}{3}\overline{b}$, jossa $k = -\frac{2}{3} < 0$ ja $\overline{a} = -2\overline{c}$, jossa $k = -2 < 0$.

13. Merkitään $\overline{a} = 2b\overline{\imath} + (b-1)\overline{\jmath} + (b+1)\overline{k} = (2b, (b-1), (b+1))$
$\|\overline{a}\| = \sqrt{(2b)^2 + (b-1)^2 + (b+1)^2} = \sqrt{6b^2+2}$

$$\begin{aligned} \|\overline{a}\| = 2 \Leftrightarrow \qquad \sqrt{6b^2+2} &= 2 \quad \|()^2 \\ 6b^2 + 2 &= 4 \quad \| -2 \\ 6b^2 &= 2 \quad \| : 6 \\ b^2 &= \frac{2}{6} \quad \|\sqrt{} \\ b &= \pm\sqrt{\frac{1}{3}} \\ b &= \pm\frac{1}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

14. Oletukset: $\overline{v} = (v_1, v_2)$ ja k on reaaliluku.
Väite: $\|k\overline{v}\| = |k|\,\|\overline{v}\|$

Todistus:$k\overline{v} = k(v_1, v_2) = (kv_1, kv_2)$
$\|k\overline{v}\| = \sqrt{(kv_1)^2 + (kv_2)^2} = \sqrt{k^2{v_1}^2 + k^2{v_2}^2} = \sqrt{k^2({v_1}^2 + {v_2}^2)}$
$= \sqrt{k^2}\sqrt{{v_1}^2 + {v_2}^2} = |k|\,\|\overline{v}\|$

8.3 Ratkaisut tehtäviin 6.3

Ratkaisuja tarkastellessa tulee pitää mielessä, että pistetuloa ja skalaarien kertolaskua merkitään samalla $(\cdot)$-merkillä, vaikka pistetulossa tulon tekijöinä ovat vektorit ja skalaarikertolaskussa reaalilukuja.

1. $\overline{a} = (3, 2, 1)$, $\overline{w}_2 = (-\frac{8}{7}, \frac{4}{7}, \frac{16}{7})$
$\overline{a} \cdot \overline{w}_2 = 3 \cdot (-\frac{8}{7}) + 2 \cdot \frac{4}{7} + 1 \cdot \frac{16}{7} = 0$

2. a) $\overline{u} = (7, 2, 4)$ ja $\overline{v} = (-8, 3, 1)$
$\overline{u} \cdot \overline{v} = 7 \cdot (-8) + 2 \cdot 3 + 4 \cdot 1 = -46$, joten vektorien välinen kulma on tylppä

b) $\overline{u} = (6, 0, 2)$ ja $\overline{v} = (4, -1, -7)$
$\overline{u} \cdot \overline{v} = 6 \cdot 4 + 0 \cdot (-1) + 2 \cdot (-7) = 10$, joten kulma on terävä

c) $\overline{u} = (1, 0, 0)$ ja $\overline{v} = (-1, -1, -1)$
$\overline{u} \cdot \overline{v} = 1 \cdot (-1) + 0 \cdot (-1) + 0 \cdot (-1) = -1$, joten kulma on tylppä

d) $\overline{u} = (4, 3, 6)$ ja $\overline{v} = (-3, 2, 1)$
$\overline{u} \cdot \overline{v} = 4 \cdot (-3) + 3 \cdot 2 + 6 \cdot 1 = 0$ eli vektorien välillä on suorakulma

3. $\overline{u} = (1,1)$, $\overline{v} = (4,2)$, $\overline{w} = (-1,-2)$ ja $k = 7$

   a) $\overline{v} \cdot \overline{u} = 4 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 6$

   b) $\overline{u} \cdot \overline{v} + \overline{u} \cdot \overline{w} = (1 \cdot 4 + 1 \cdot 2) + (1 \cdot (-1) + 1 \cdot (-2)) = 3$

   c) $\overline{u} \cdot k\overline{v} = (1,1) \cdot k(4,2) = (1,1) \cdot (4k, 2k) = 6k$, ja kun $k = 7$, niin $\overline{u} \cdot k\overline{v} = 42$

4. a) $\overline{u} = (4,2)$ ja $\overline{a} = (6,0)$
   $\overline{w} = \frac{\overline{u} \cdot \overline{a}}{(\|\overline{a}\|)^2}\overline{a} = \frac{4 \cdot 6 + 2 \cdot 0}{(\sqrt{6^2+0^2})^2}\overline{a} = \frac{24}{36}\overline{a} = \frac{2}{3}\overline{a} = \frac{2}{3}(6,0) = (\frac{12}{3}, \frac{0}{3}) = (4,0)$

   b) $\overline{u} = (2,2)$ ja $\overline{a} = (-3,1)$
   $\overline{w} = (\frac{6}{5}, -\frac{2}{5})$

   c) $\overline{u} = (4,2,-3)$ ja $\overline{a} = (3,6,9)$
   $\overline{w} = (-\frac{1}{14}, -\frac{1}{7}, -\frac{3}{14})$

   d) $\overline{u} = (0,0,2)$ ja $\overline{a} = (8,-2,2)$
   $\overline{w} = (\frac{4}{9}, -\frac{1}{9}, \frac{1}{9})$

5. Olkoon $\overline{u} = (-3,2)$. Etsitään vektorit $\overline{y} = (y_1, y_2)$: $\overline{u} \cdot \overline{y} = 0$ ja $\|\overline{y}\| = 1$. Ratkaistaan ensin vektorin $\overline{y}$ komponentit y_1 ja y_2 pistetulon ja vektorin pituuden avulla.
   $\overline{u} \cdot \overline{y} = 0 \Leftrightarrow (-3,2) \cdot (y_1, y_2) = 0 \Leftrightarrow y_1 = \frac{2}{3}y_2$
   Sijoitetaan tulos vektorin $\overline{y}$ pituuden lauskkeeseen: $\|\overline{y}\| = \sqrt{y_1^2 + y_2^2} = 1$.
   Saadaan $\sqrt{(\frac{2}{3}y_2)^2 + y_2^2} = 1$. Josta yhtälö ratkaisemalla saadaan tulokseksi $y_2 = \pm\frac{3}{\sqrt{13}}$. Kun $y_2 = \frac{3}{\sqrt{13}}$, niin $y_1 = \frac{2}{3}y_2 = \frac{2}{\sqrt{13}}$ ja $\overline{y} = (\frac{2}{\sqrt{13}}, \frac{3}{\sqrt{13}})$.
   Kun $y_2 = -\frac{3}{\sqrt{13}}$, niin $y_1 = -\frac{2}{\sqrt{13}}$ ja toinen ortogonaalivektori, merk.
   $\overline{z} = (-\frac{2}{\sqrt{13}}, -\frac{3}{\sqrt{13}})$.

6. a) Pistetuloa ei ole määritelty skalaarin ja vektorin välille (tässä pistetulo $(\overline{u} \cdot \overline{w})$ on skalaari).

   b) Vektorin ja skalaarin yhteenlaskua ei ole määritelty (tässä pistetulo $(\overline{v} \cdot \overline{u})$ on skalaari).

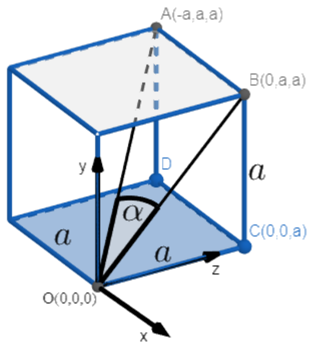
   c) Skalaarin pituutta ei ole määritelty (tässä pistetulo $(\overline{w} \cdot \overline{w})$ on skalaari).

   d) Skalaarin pistetuloa vektorin kanssa ei ole määritelty (tässä $\overline{u} + \overline{v}$ on vektori).

7. Kuvassa 8.1 kuutio, johon merkitty kulma α ratkaistaan suuntavektoreiden avulla. Pisteiden koordinaatit on merkattu seuraavasti:
   $O = (0,0,0), A = (-a,a,a), B = (0,a,a), C = (0,0,a)$.
   $\left\|\overrightarrow{OA}\right\| = \sqrt{(a(\sqrt{2}))^2 + a^2} = \sqrt{(a^2(\sqrt{2})^2 + a^2} = \sqrt{a^2(2+1)} = a\sqrt{3}$
   $\left\|\overrightarrow{OB}\right\| = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2}$
   $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = (-a,a,a) \cdot (0,a,a) = -a \cdot 0 + a \cdot a + a \cdot a = 2a^2$

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}}{\left\|\overrightarrow{OA}\right\|\left\|\overrightarrow{OB}\right\|} = \frac{2a^2}{a\sqrt{3}\cdot a\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{6}}$$

$\alpha = 35.3°$



Kuva 8.1

8.4 Ratkaisut tehtäviin 7.3

1. Katso sivuston https://www.w3schools.com/colors/ avulla värit.

   i) $k = 1$, jolloin $\bar{c} = 1(64,0,0) + 1(0,64,0) + 1(0,0,64) = (64,64,64)$ ja väri tumman harmaa

   ii) $k = 2$, jolloin $\bar{c} = 2(64,0,0) + 2(0,64,0) + 2(0,0,64)$
   $= (128,0,0) + (0,128,0) + (0,0,128) = (128,128,128)$
   ja väri keskiharmaa

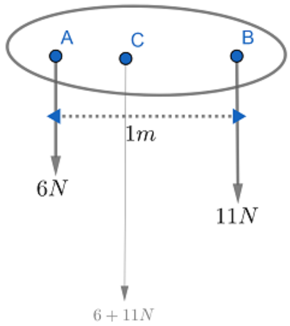
   iii) $k = 3$, jolloin $\bar{c} = 3(64,0,0) + 3(0,64,0) + 3(0,0,64)$
   $= (192,0,0) + (0,192,0) + (0,0,192) = (192,192,192)$
   ja väri vaalean harmaa

   iv) $k = 4$, jolloin $\bar{c} = 4(64,0,0) + 4(0,64,0) + 4(0,0,64)$
   $= (256,0,0) + (0,256,0) + (0,0,256) = (256,256,256)$
   ja väri on valkoinen, kun tuloksen pyöristää RGB-arvojen maksimiin 255:een.

2. a) Emman koulumatka: $3km$ ja Rikun koulumatka $2.2km$.

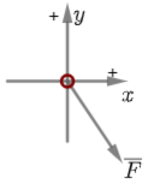
   b) Lasketaan vektorisumma:
   $\left\|\overrightarrow{OK}\right\| = \left\|\overrightarrow{OP}\right\| + \left\|\overrightarrow{PR}\right\| + \left\|\overrightarrow{RT}\right\| + \left\|\overrightarrow{TK}\right\| = 3025$
   eli Rikun koulutien pituus $\overrightarrow{OK}$ on $3,0km$, kun se kulkee metsäisen kukkulan läpi.

3. Jäykän kappaleen (ks. kuva 8.2) resultantin suuruus on vaikuttavien voimien summa, koska voimat ovat samansuuntaiset. Eli $F_r = 6N + 11N = 17N$. Jolloin resultantti saadaan verrannosta $\frac{11N}{17N} \cdot 1m = 0.65m$. Eli resultantti voima vaikuttaa pisteen C kautta samansuuntaisesti kuin kaksi muuta voimaa ja piste C sijaitsee $0,65m$ pisteestä A.



Kuva 8.2

4. Kokonaisvoiman $\overline{F}$ laskemiseksi tarvitaan x- ja y-akselin suuntaiset voimavektorit. Komponentit ovat F_x ja F_y ja niiden suuruudet saadaan suoraan tehtävän annosta.

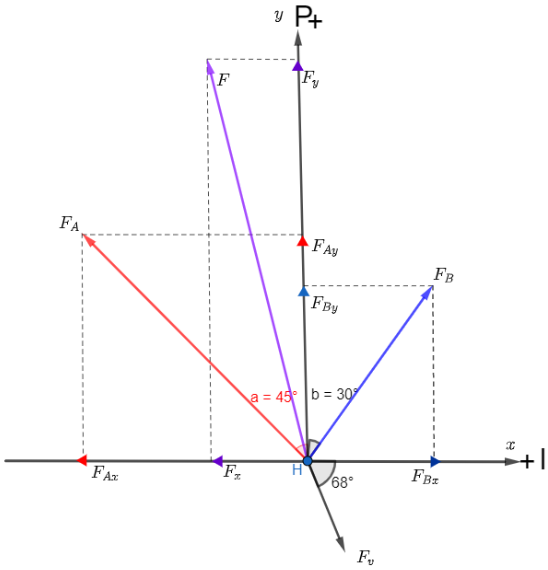


Kuva 8.3

$F_x = 0,29mN$ ja suunta huomioiden $F_y = -0,50mN$.
Tällöin kokonaisvoiman kulma saadaan ratkaistua:
$\tan\alpha = \frac{F_y}{F_x} = \frac{-0{,}50mN}{0{,}29mN} = -\frac{50}{29}$, josta $\alpha \approx -60°$.
Voiman suuruus ratkaistaan vektorin pituuden avulla:
$\|\overline{F}\| = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{0,29^2 + (-0,50)^2} \approx 0,58$. Siis $\|\overline{F}\| = 0,58mN$.

5. Valitaan itä (I), positiiviseksi x-akseliksi ja pohjoinen (P), positiiviseksi y-akseliksi. Hinaaja A kohdistaa laivaan voiman $\overline{F}_A$ ja hinaaja B voiman $\overline{F}_B$. Hinaajien yhteisvaikutusta merkitään vektorilla F. Kuvaan 8.4 on merkitty voimat ja niiden komponentit akselien suunntaan.

   Voimavektorin $\overline{F}_A$ suuruus on 4000N ja sen ortogonaaliset komponentit saadaan laskettua sinin ja cosinin avulla. Niiden (F_{Ax} ja F_{Ay}) suuruuden avulla lausutaan voima $\overline{F}_A$ koordinaattimuodossa. Se edellyttää kuitenkin origon määrittämistä, ja tässä kuvassa 8.4 se on asetettu kohtaan jossa hinaajien köysien ajatellaan kiinnittyvän laivan keulaan.



Kuva 8.4

Lasketaan ensin kummankin hinaajan ortogonaaliset, akselien suuntaisten komponenttien suuruudet:

$F_{Ax} = F_A \cos 45 = 2828N \qquad F_{Ay} = F_A \sin 45 = 2828N$
$F_{Bx} = F_B \cos 60 = 1000N \qquad F_{By} = F_B \sin 60 = 1732N$
Näiden suuruuksien avulla lausutaan vektorit, suunnat huomioiden:
$\overline{F}_A = (-2829, 2828)$ ja $\overline{F}_B = (1000, 1732)$.

a) Resultanttivektorin $\overline{F}$ suunta ja suuruus saadaan vektoriaritmetiikan periaatteita hyödyntäen: $\overline{F} = \overline{F}_A + \overline{F}_B = (-2829, 2828) + (1000, 1732)$
$= (-2829 + 1000, 2828 + 1732) = (-1829, 4560)$
ja edelleen $\|\overline{F}\| = \sqrt{(-1829)^2 + (4560)^2} = 4912$.
Siis hinaajat kohdistavat laivaan noin 4900N:n voiman.

b) Hinaajat vetävät laivaa suuntaan $\overline{F} = (-1829, 4560)$. Vektorin $\overline{F}$ ja x-akselin (tässä hyödynnetään vektoria $\overline{F}_x$) välinen kulma saadaan ratkaistua kaavaa (6.1) hyödyntäen. Kun $\overline{F}_x = (-1829, 0)$ ja $\|\overline{F}\| = 4912$ (a-kohdan tulos), niin

$$\cos\alpha = \frac{\overline{F} \cdot \overline{F}_x}{\|\overline{F}\| \, \|\overline{F}_x\|} = \frac{(-1829, 4560) \cdot (-1829, 0)}{4912 \cdot \sqrt{(-1829)^2}}$$

$$= \frac{(-1829) \cdot (-1829) + 4560 \cdot 0}{4912 \cdot 1829} = \frac{1829}{4912}$$

$$\Rightarrow \alpha = \cos^{-1}(\frac{1829}{4912}) = 68°.$$

Laiva liikkuu näin ollen 68° lännestä pohjoiseen päin.

c) Koska laivaan vaikuttavien voimien (hinaajien veto ja veden vastus) summa ei ole nolla, laiva on kiihtyvässä liikkeessä $0,10\frac{m}{s^2}$ vektorin $\overline{F}$ suuntaan. Voimien, jotka aiheuttavat laivaan kyseisen kiihtyvyyden, suuruus saadaan Newtonin II laista: $\sum \overline{F}_{kok} = m\bar{a}$. Ratkaisemalla ensin voiman $\overline{F}_v$ suuruus, saadaan ilmaistua kyseinen voima myös vektorimuodossa. Tässä tapauksessa liikettä vastustavan voiman suuruus lasketaan

$$F + F_v = 8000kg \cdot 0,10\frac{m}{s^2} = 800N \quad \| - F$$

$$F_v = 800N - F = 800N - 4912N = -4112N$$

Näin ollen vesi kohdistaa laivaan noin 4100N suuruisen vastustavan voiman. Negatiivinen etumerkki kertoon voiman $\overline{F}_v$ olevan voimalle $\overline{F}$ vastakkaissuuntainen.

Kuten alussa lausuttiin vektori $\overline{F}$ ortogonaalikomponenttiensa avulla, voidaan voima $\overline{F}_v$ lausua x- ja y-akselin suuntaisten komponenttiensa avulla. Vektorin $\overline{F}_v$ ja x-akselin välinen kulma on ristikulmana myös 68°, joten saadaan:

$$F_{vx} = F_v \cos(68) = 4112N \cdot \cos(68) = 1540N$$
$$F_{vy} = F_v \sin(68) = 4112N \cdot \sin(68) = 3812N$$

Voima $\overline{F}_v$ on siis vastakkaissuuntainen voimalle $\overline{F}$ ja osoittaa positiiviseen x-akselin ja negatiiviseen y-akselin suuntaan (ks. kuva 8.4). Suunnaat huomioiden saadaan määriteltyä $\overline{F}_v = (1540, -3812)$.

Lähteet

[1] Anton, H. *Elementary Linear Algebra.* New York: Quinn & Boden, 1973.

[2] Anton, H., Rorres, C. *Elementary Linear Algebra Applications Version.* John Wiley & Sons Inc., 1991

[3] Anton, H., Rorres, C. *Elementary Linear Algebra with Supplemental Applications.* John Wiley & Sons Pte Ltd, 2011.

[4] Griesel, H. *Elelemente der Mathematik: Leistungskurs Lineare Algebra Analytische Geometrie mit Orientierungswissen Stochastik.* Braunschweig: Westermann Schroedel, 2004.

[5] Heard, T.*Mechanics and Vectors.* United Kindom: Cambridge University Press, 1986.

[6] Kenwood, H.M., Staley, G.M. *Mathematics An Intergrated Approach.* Macmillan Education Limited, 1980.

[7] Mansfield, M., O'Sullivan, C. *Understanding Physics.* United Kindom: John Wiley & Sons Ltd, 1998.

[8] Opinto- ja opetuspalvelut (UEF). Värimallit -RGB ja CYMK, Tieto- ja viestintätekniikan käytön oppaita ja oppimateriaaleja. Itä-Suomen Yliopisto, 2014. https://wiki.uef.fi/pages/viewpage.action?pageId=5046319. Viitattu 7.10.2018.

[9] Rahikka, M. *Vektorien yhteenlasku.* Helsingin yhteislyseo, 1999. http://hyl.edu.hel.fi/sivut/mikko/fysiikka/napa/napa.html. Viitattu 12.11.2018.

[10] Salas, S.L. *Calculus: One and Several variables, with Analytic Geometry.* Canada: John Wiley & Sons Inc, 1986.

[11] Government of Sri Lanka. National symbols of Sri Lanka. http://bit.do/eynjr. Viitattu 10.10.2018.

[12] Wikipedia. Maroon. https://en.wikipedia.org/wiki/Maroon. Viitattu 10.10.2018.

[13] W3schools, Colors tutorial. Refsnes Data, Norway. https://www.w3schools.com/colors. Viitattu 7.10.2018.