TAMPEREEN YLIOPISTO
Pro gradu -tutkielma

Manu Harsu

Derivoidut funktorit

Luonnontieteiden tiedekunta
Matematiikka
Elokuu 2018

Tampereen yliopisto
Luonnontieteiden tiedekunta
HARSU, MANU: Derivoidut funktorit
Pro gradu -tutkielma, 83 s.
Matematiikka
Elokuu 2018

Tiivistelmä

Tämä tutkielma käsittelee derivoituja funktoreita. Jotta voidaan edes puhua funktoreista, tarvitaan kategoriateoriaa. Erityisesti kategoriateoriaan liittyen osoitetaan, että $\mathrm{Hom}(A, \bullet)$ ja $\mathrm{Hom}(\bullet, A)$ funktoreita sekä esitellään luonnollinen transformaatio. Tämän jälkeen määritellään eksakti jono, lyhyt eksakti jono, lohkeava eksakti jono ja eksaktit funktorit.

Ennen projektiivisia ja injektiivisiä moduleita kerrataan välttämättömiä tuloksia lineaarialgebrasta, erityisesti tensoritulosta. Tensoritulosta johdetaan kaksi tärkeää funktoria, $A\otimes$ ja $\otimes A$. Projektiivisista ja injektiivisistä moduleista osoitetaan lauseita liittyen lyhyisiin eksakteihin jonoihin, jonon lohkeamiseen ja niiden yhteydestä funktoreiden $\mathrm{Hom}(A, \bullet)$ ja $\mathrm{Hom}(\bullet, A)$ eksaktisuuteen. Mutta kuitenkin tärkeimmät tulokset ovat, että jokainen moduli on jonkin projektiivisen modulin homomorfinen kuva ja jokainen moduli voidaan upottaan injektiiviseen moduliin.

Ketjukomplekseista esitellään erityisesti homologia ja osoitetaan, että siitä saadaan funktori. Lisäksi esitellään lause, jonka avulla saadaan pitkiä eksakteja jonoja ketjukompleksien lyhyistä eksateista jonoista.

Sekä projektiivisille että injektiivisille resoluutioille esitellään kaksi tärkeää lausetta. Ensinnäkin, että jokaisella modulilla on olemassa sekä projektiivinen, että injektiivinen resoluutio, ja toiseksi näiden vertailulauseet. Myöhemmin näistä lauseista seuraa derivoitujen funktoreiden olemassaolo, ja että nämä ovat riippumattomia resoluution valinnasta. Lisäksi derivoiduista funktoreista todistetaan näihin liittyvien pitkien eksaktien jonojen olemassaolo.

Lopuksi esitellään kaksi tärkeintä derivoitua funktoria, Ext ja Tor. Kumpikin näistä voidaan määritellä kahdella eri tavalla, mutta osoitetaan että ne tuottavat isomorfiset modulit.

Sisältö

1 Johdanto

Tässä pro gradu -tutkielmassa perehdytään homologiseen algebraan, erityisesti derivoituihin funktoreihin.

Luvussa 2 esitellään lyhyesti kategoriateorian peruskäsitteitä. Tärkeimpänä näistä käsitteistä on tietenkin funktori. Tutkielman tyypiesimerkit funktoreista ovat $\mathrm{Hom}(A, \bullet)$ ja $\mathrm{Hom}(\bullet, A)$, jotka esiintyvät useassa tilanteessa. Luvun lopussa esitellään luonnollinen transformaatio.

Luvussa 3 tutustutaan eksakteihin jonoihin. Tärkeä käsite liittyen eksateihin jonoihin liittyen on jonon lohkeaminen, jolle esitetään kolme yhtäpitävää ehtoa. Lisäksi määritellään funktorin eksaktisuus ja osoitetaan, että kumpikin $\mathrm{Hom}(A, \bullet)$ ja $\mathrm{Hom}(\bullet, A)$ ovat vasemmalta eksateja.

Luku 4 alkaa lyhyellä kertauksella lineaarialgebraa. Ensin esitetään kolme lausetta vapaista moduleista, jonka jälkeen on lyhyt katsaus tensorituloon. Tensoritulosta johdetaan kaksi funktoria, $A\otimes$ ja $\otimes A$. Lisäksi nämä osoitetaan oikealta eksateiksi. Näiden jälkeen alaluvussa 4.2 määritellään projektiivinen moduli ja osoitetaan yksinkertaisia tuloksia siihen liittyen. Näistä lauseista tärkein on kuitenkin, että jokainen moduli on projektiivisen modulin homomorfinen kuva. Kyseisestä lauseesta seuraan myöhemmin, että jokaisella modulilla on olemassa projektiivinen resoluutio. Alaluvussa 4.3 esitellään projektiivisen modulin duaali, injektiivinen moduli. Injektiivisille moduleille osoitetaan lauseita, jotka ovat duaalisia projektiivisille moduleille esitetyistä lauseista. Näistä lauseista tärkein on, että jokainen moduli voidaan upottaa injektiiviseen moduliin. Kuitenkin tämän lauseen todistus ei ole aivan yksinkertainen. Tätä varten todistetaan Baerin kriteeri, määritellään divisiibeli moduli ja osoitetaan sen yhteys injektiiviseen moduliin.

Luvussa 5 määritellään ketjukompleksi, joka on yksinkertaisesti vain eksaktin jonon yleistys. Ketjukompleksille voidaan määritellä homologia, joka osoitetaan funktoriksi. Luvun lopuksi määritellään ketjukompleksien lyhyt eksaktijono ja osoitetaan miten niistä saadaan pitkiä eksateja jonoja.

Luku 6 käsittelee projektiivisia ja injektiivisiä resoluutioita. Näiden olemassaolo seuraa jo edellä mainitusita luvun 4 lausesita. Mutta lisäksi tarvitaan niin sanotut vartailulauseet. Näistä vertailulauseista seuraa myöhemmin, että derivoitujen funktoreiden arvot eivät riipu resoluution valinnasta.

Luvussa 7 päästään viimein itse derivoituihin funktoreihin. Kuitenkin alaluku 7.1 käsittelee vielä additiivisia funktoreita. Näistä esitetään joitakin yksinkertaisia tuloksia, joita tarvitaan myöhemmissä luvuissa. Derivoiduista funktoreista keskitytään enemmän kovariantteihin tapauksiin, koska kaikki neljä derivoitua funktoria noudattavat saamaa kaavaa. Kaikille derivoiduille funktoreille saadaan pitkä eksakti jono, mutta niiden todistaminen vaatii niin kutsutut hevosenkenkälemmat.

Luvussa 8 määritellään Ext ja Tor, jotka ovat tärkeimmät derivoidut funktorit. Näistä Ext on johdettu Hom-funktoreista ja Tor taas on johdettu tensoritulo $\otimes$-funktoreista. Vaikka molemmat voidaan määritellä kahdella tavalla, ne osoitetaan tuottavan isomorfiset modulit.

Tutkielman päälähteitä ovat [1], [2] ja [4], joita on käytetty hyvin tasapuolisesti. Kuitenkin viimeinen luku perustuu pitkälti lähteeseen [3]. Lukijan oletetaan hallitsevan lineaarialgebraa moduleilla. Tampereen yliopiston kurssi Lineaarialgebra 2 antaa vaadittavat esitiedot.

2 Kategoriateorian alkeita

Määritelmä 2.1. *Kategoria* $\mathcal{C}$ koostuu kolmesta osasta, objekteista, morfismeista ja morfismien yhdisteestä. Objektit, $\mathrm{Obj}(\mathcal{C})$, muodostaa luokan ja jokaisella $A, B \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ on olemssa joukko morfismeja, $\mathrm{Hom}(A, B)$. Kun $f \in \mathrm{Hom}(A, B)$, niin merkitään $f\colon A \longrightarrow B$ tai $A \xrightarrow{f} B$. Lisäksi merkitään $\mathrm{dom}(f) = A$ ja $\mathrm{codom}(f) = B$. Näitä morfismeja voidaan yhdistää. Tosin sanoen morfismien yhdiste on kuvaus

$$\circ\colon \mathrm{Hom}(B, C) \times \mathrm{Hom}(A, B) \longrightarrow \mathrm{Hom}(A, C),$$

missä $A, B, C \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$. Kun $f \in \mathrm{Hom}(A, B)$ ja $g \in \mathrm{Hom}(B, C)$, niin näiden yhdisteestä käytetään merkitää $g \circ f$ tai vain yksinkertaisesti gf.

Lisäksi seuraavien ehtojen on oltava voimassa:

- morfismien joukot ovat pareittain erillisiä. Toisin sanoen

  $$\text{jos } \mathrm{Hom}(A, B) \cap \mathrm{Hom}(C, D) \neq \emptyset, \text{ niin } A = C \text{ ja } B = D$$

  kaikilla $A, B, C, D \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$.

- kaikilla $f \in \mathrm{Hom}(A, B),\ g \in \mathrm{Hom}(B, C)$ ja $h \in \mathrm{Hom}(C, D)$ pätee

  $$(hg)f = h(gf),$$

  missä $A, B, C, D \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$

- kaikilla $X \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ on olemassa $1_X \in \mathrm{Hom}(X, X)$ siten, että

  $$f1_A = f \quad \text{ja} \quad 1_B f = f$$

  jokaisella $f \in \mathrm{Hom}(A, B)$.

On helppo huomata, että tämä *identtinen morfismi* 1_X on yksikäsitteinen. Lisäksi tämän tutkielman kannalta ensimmäinen ehto triviaali, sillä kaikki morfismit tulevat olemaan kuvauksia (tai kuvausjonoja).

Morfismia $f \in \mathrm{Hom}(A, B)$ sanotaan *isomorfismiksi*, jos on olemassa sellainen morfismi $g \in \mathrm{Hom}(B, A)$, että

$$gf = 1_A \quad \text{ja} \quad fg = 1_B.$$

Morfismi g on yksikäsitteinen ja sitä kutsutaan morfismin f *käänteismorfismiksi*. Tällöin merkitään $g = f^{-1}$.

Seuraavaksi esitellään joitakin yksinkertaisia sekä tutkielman kannalta tärkeitä kategorioita, (joissa jokaisessa morfismien yhdisteenä on tavallinen kuvausten yhdistäminen).

1. **Set**
   Joukkojen kategoriassa objekteina on joukot ja morfismeina kuvaukset.

2. **Ab**
   Abelin ryhmien kategoriassa objekteina on Abelin ryhmät ja morfismeina ryhmähomomorfismit.

3. ${}_R$**Mod**
   (Vasenten) R-modulien kategoriassa objekteina on (vasemmat) R-modulit ja morfismeina R-homomorfismit.

Määritelmä 2.2. Olkoot $\mathcal{C}$ ja $\mathcal{D}$ kategorioita. Funktion $T\colon \mathrm{Obj}(\mathcal{C}) \to \mathrm{Obj}(\mathcal{D})$ sanotaan olevan *kovariantti funktori*, mikäli

- jokaisella kategorian $\mathcal{C}$ morfismilla $f\colon A \to B$ on olemassa yksikäsitteinen morfismi $T(f)\colon T(A) \to T(B)$ kategoriassa $\mathcal{D}$,
- kaikilla kategorian $\mathcal{C}$ morfismeilla $f\colon A \to B$ ja $g\colon B \to C$ pätee

$$T(gf) = T(g)T(f),$$

- jokaisella $A \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ pätee

$$T(1_A) = 1_{T(A)}.$$

Tällöin merkitään $T\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$.

Määritelmä 2.3. Olkoot $\mathcal{C}$ ja $\mathcal{D}$ kategorioita. Funktion $T\colon \mathrm{Obj}(\mathcal{C}) \to \mathrm{Obj}(\mathcal{D})$ sanotaan olevan *kontravariantti funktori*, mikäli

- jokaisella kategorian $\mathcal{C}$ morfismilla $f\colon A \to B$ on olemassa yksikäsitteinen morfismi $T(f)\colon T(B) \to T(A)$ kategoriassa $\mathcal{D}$,
- kaikilla kategorian $\mathcal{C}$ morfismeilla $f\colon A \to B$ ja $g\colon B \to C$ pätee

$$T(gf) = T(f)T(g),$$

- jokaisella $A \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ pätee

$$T(1_A) = 1_{T(A)}.$$

Tällöin merkitään $T\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$.

Huomautus. Kun R on rengas ja M ja N ovat R-moduleita, niin $\mathrm{Hom}(M, N)$ on Abelin ryhmä. Lisäksi jos R on vaihdannainen, niin $\mathrm{Hom}(M, N)$ on R-moduli. Näiden faktojen nojalla saadaan seuraavat lauseet.

Lause 2.1. *Olkoon R rengas ja A R-moduli. Tällöin kuvaus*

$$T_A\colon {}_R\mathbf{Mod} \to \mathbf{Ab}, \quad T_A(X) = \mathrm{Hom}(A, X)$$

on kovariantti funktori. Tässä on asetettu

$$T_A(f)\colon \mathrm{Hom}(A, B) \to \mathrm{Hom}(A, C), \quad T_A(f)(\varphi) = f\varphi$$

kaikilla R-moduleilla B ja C sekä R-homomorfismeilla $f\colon B \to C$ ja $\varphi\colon A \to B$.

Todistus (vrt. [2, s. 462]). Olkoot B, C ja D R-moduleita ja $f\colon B \to C$ ja $g\colon C \to D$ R-homomorfismeja. Olkoon lisäksi $\varphi\colon A \to B$ R-homomorfismi. Tällöin

$$\begin{aligned} T_A(gf)(\varphi) &= (gf)\varphi = g(f\varphi) = T_A(g)(f\varphi) \\ &= T_A(g)(T_A(f)(\varphi)) = (T_A(g)T_A(f))(\varphi). \end{aligned}$$

Siis $T_A(gf) = T_A(g)T_A(f)$. Lisäksi

$$T_A(1_B)(\varphi) = 1_B\varphi = \varphi,$$

joten $T_A(1_B) = 1_{\mathrm{Hom}(A,B)} = 1_{T_A(B)}$.

Näin ollen T_A on kovariantti funktori ${}_R\mathbf{Mod} \to \mathbf{Set}$. Todetaan lopuksi, että $T_A(f)$ on ryhmähomomorfismi. Olkoot $\varphi, \varphi'\colon A \to B$ R-homomorfismeja. Tällöin

$$T_A(f)(\varphi + \varphi') = f(\varphi + \varphi') = f\varphi + f\varphi' = T_A(f)(\varphi) + T_A(f)(\varphi').$$

Siis $T_A(f)$ on ryhmähomomorfismi, jolloin T_A on kovariantti funktori ${}_R\mathbf{Mod} \to \mathbf{Ab}$. □

Usein merkitään $T_A = \mathrm{Hom}(A, \bullet)$.

Lause 2.2. *Olkoon R rengas ja A R-moduli. Tällöin kuvaus*

$$T^A\colon {}_R\mathbf{Mod} \to \mathbf{Ab}, \quad T^A(X) = \mathrm{Hom}(X, A)$$

on kontravariantti funktori. Tässä on asetettu

$$T^A(f)\colon \mathrm{Hom}(C, A) \to \mathrm{Hom}(B, A), \quad T^A(f)(\varphi) = \varphi f$$

kaikilla R-moduleilla B ja C sekä R-homomorfismeilla $f\colon B \to C$ ja $\varphi\colon C \to A$.

Todistus (vrt. [2, s. 464]). Olkoot B, C ja D R-moduleita ja $f\colon B \to C$ ja $g\colon C \to D$ R-homomorfismeja. Olkoon lisäksi $\varphi\colon D \to A$ R-homomorfismi. Tällöin

$$\begin{aligned} T^A(gf)(\varphi) &= \varphi(gf) = (\varphi g)f = T^A(f)(\varphi g) \\ &= T^A(f)(T^A(g)(\varphi)) = (T^A(f)T^A(g))(\varphi). \end{aligned}$$

Siis $T^A(gf) = T^A(f)T^A(g)$. Lisäksi

$$T^A(1_D)(\varphi) = \varphi 1_D = \varphi,$$

joten $T^A(1_D) = 1_{\mathrm{Hom}(D,A)} = 1_{T^A(D)}$.

Näin ollen T^A on kontravariantti funktori ${}_R\mathbf{Mod} \to \mathbf{Set}$. Todetaan lopuksi, että $T^A(f)$ on ryhmähomomorfismi. Olkoot $\varphi, \varphi' \colon C \to A$ R-homomorfismeja. Tällöin

$$T^A(f)(\varphi + \varphi') = (\varphi + \varphi')f = \varphi f + \varphi' f = T^A(f)(\varphi) + T^A(f)(\varphi')$$

Siis T^A on ryhmähomomorfismi, jolloin T^A on kontravariantti funktori ${}_R\mathbf{Mod} \to \mathbf{Ab}$. □

Usein merkitään $T^A = \mathrm{Hom}(\bullet, A)$.

Jos rengas R on vaihdannainen, niin $\mathrm{Hom}(A, \bullet)$ ja $\mathrm{Hom}(\bullet, A)$ ovat funktoreita ${}_R\mathbf{Mod} \to {}_R\mathbf{Mod}$. Oletetaan tästä lähtien, että renkaat ovat aina vaihdannaisia, ellei toisin mainita.

Määritelmä 2.4. Olkoot R ja S renkaita sekä $T \colon {}_R\mathbf{Mod} \to {}_S\mathbf{Mod}$ (kovariantti tai kontravariantti) funktori. Sanotaan, että T on *additiivinen*, jos

$$T(f + g) = T(f) + T(g)$$

kaikilla $f, g \colon A \to B$, missä A ja B ovat R-moduleita.

On helppo huomata, että funktorit $\mathrm{Hom}(\bullet, A)$ ja $\mathrm{Hom}(A, \bullet)$ ovat additiivisia. Määritellään seuraavaksi luonnollinen transformaatio. Sillä on kaksi eri tapausta; yksi kummallekkin funktori-tyypille.

Määritelmä 2.5. Olkoot $\mathcal{C}$ ja $\mathcal{D}$ kategorioita.

1. Olkoot $U, T \colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ kovariantteja funktoreita. Sanotaan, että kuvaus $\mu \colon T \to U$ on *luonnollinen tranformaatio*, jos jokaisella objektilla $A \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ on olemssa morfismi $\mu_A \colon T(A) \to U(A)$ kategoriassa $\mathcal{D}$ siten, että kaavio

$$\begin{tikzcd} T(A) \arrow[r, "T(f)"] \arrow[d, "\mu_A"'] & T(B) \arrow[d, "\mu_B"] \\ U(A) \arrow[r, "U(f)"'] & U(B) \end{tikzcd}$$

kommutoi jokaisella kategorian $\mathcal{C}$ morfismilla $f \colon A \to B$. Toisin sanoen

$$U(f) \circ \mu_A = \mu_B \circ T(f).$$

Lisäksi jos μ_A on isomorfismi jokaisella objektilla $A \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$, niin sanotaan että μ on *luonnollinen ekvivalenssi*. Tällöin funktoreiden U ja T sanotaan olevan *luonnollisesti ekvivalentit*.

2. Olkoot $U, T \colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ kontravariantteja funktoreita. Sanotaan, että kuvaus $\mu \colon T \to U$ on *luonnollinen tranformaatio*, jos jokaisella objektilla $A \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ on olemssa morfismi $\mu_A \colon T(A) \to U(A)$ kategoriassa $\mathcal{D}$ siten, että kaavio

$$\begin{tikzcd} T(B) \arrow[r, "T(f)"] \arrow[d, "\mu_B"'] & T(A) \arrow[d, "\mu_A"] \\ U(B) \arrow[r, "U(f)"'] & U(A) \end{tikzcd}$$

kommutoi jokaisella kategorian $\mathcal{C}$ morfismilla $f \colon A \to B$. Toisin sanoen

$$U(f) \circ \mu_B = \mu_A \circ T(f)$$

Lisäksi jos μ_A on isomorfismi jokaisella objektilla $A \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$, niin sanotaan että μ on *luonnollinen ekvivalenssi*. Tällöin funktoreiden U ja T sanotaan olevan *luonnollisesti ekvivalentit*.

3 Eksaktit jonot

Määritelmä 3.1. Olkoon R rengas, M_i $(i \in \mathbb{Z})$ R-moduleita ja $f_i \colon M_i \to M_{i-1}$ R-homomorfismeja jokaisella $i \in \mathbb{Z}$,

$$\ldots \to M_{n+1} \xrightarrow{f_{n+1}} M_n \xrightarrow{f_n} M_{n-1} \to \ldots.$$

Tällöin näiden muodostamaa jonoa sanotaan *eksaktiksi*, jos $\mathrm{Im}(f_{n+1}) = \mathrm{Ker}(f_n)$ jokaisella $i \in \mathbb{Z}$.

Eksaktia jonoa, joka on muotoa

$$0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0.$$

kutsutaan *lyhyeksi eksaktiksi jonoksi*.

Kuvauksia $0 \to A$ ja $C \to 0$ ei tarvitse erikseen ilmaista, sillä ne ovat välttämättä nollakuvauksia.

Huomautus. Jos

$$\ldots \to M_{n+1} \xrightarrow{f_{n+1}} M_n \xrightarrow{f_n} M_{n-1} \to \ldots.$$

on eksakti jono R-moduleita ja R-homomorfismeja, niin $f_n f_{n+1} = 0$, jokaisella $n \in \mathbb{Z}$.

Todistus. Olkoon $x \in M_{n+1}$. Tällöin $f_{n+1}(x) \in \mathrm{Im}(f_{n+1})$, joten jonon eksaktisuuden nojalla $f_{n+1}(x) \in \mathrm{Ker}(f_n)$. Siis $f_n f_{n+1}(x) = 0$ eli $f_n f_{n+1} = 0$. □

Lause 3.1. *Olkoon R rengas, A ja B R-moduleita ja $f \colon A \to B$ R-homomorfismi Tällöin*

1. *jono $0 \to A \xrightarrow{f} B$ on eksakti, jos ja vain jos f on injektio,*
2. *jono $A \xrightarrow{f} B \to 0$ on eksakti, jos ja vain jos f on surjektio,*
3. *jono $0 \to A \xrightarrow{f} B \to 0$ on eksakti, jos ja vain jos f on bijektio.*

Todistus (vrt. [2, s. 436]). 1. Oletetaan aluksi, että jono $0 \to A \xrightarrow{f} B$ on eksakti. Nyt nollakuvausken kuva on triviaali eli $\mathrm{Im}(0) = \{0\}$. Mutta nyt jonon ekskatisuuden nojalla $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Im}(0) = \{0\}$. Siis f on injektio.

Oletetaan sitten, että f on injektio. Tällöin $\ker(f) = \{0\}$. Toisaalta nollakuvauksen kuva on edeleen triviaali. Joten $\mathrm{Ker}(f) = \{0\} = \mathrm{Im}(0)$ eli jono $0 \to A \xrightarrow{f} B$ on eksakti.

2. Oletetaan aluksi, että jono $A \xrightarrow{f} B \to 0$ on eksakti. Nyt nollakuvauksen ydin on koko B eli $\mathrm{Ker}(0) = B$. Mutta jono eksaktisuuden nojalla $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Ker}(0) = B$ eli f on surjektio.

Oletetaan sitten, että f on surjektio. Tällöin $\mathrm{Im}(f) = B$. Toisaalta nollakuvauksen ydin on edelleen koko B eli $\mathrm{Ker}(0) = B$. Siis jono $A \xrightarrow{f} B \to 0$ on eksakti.

3. Seuraa suoraan edellisistä kohdista. □

Lause 3.2. *Olkoon R rengas, A, B ja C R-moduleita ja $f\colon A \to B$ ja $g\colon B \to C$ R-homomorfismeja, joilla jono*

$$0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$$

on eksakti. Tällöin seuraavat ovat yhtäpitäviä:

1. *on olemassa R-homomorfismi $\alpha\colon B \to A$, jolla $\alpha f = 1_A$,*
2. *on olemassa R-homomorfismi $\beta\colon C \to B$, jolla $g\beta = 1_C$,*
3. *on olemassa alimoduli $K \subseteq B$, jolla $B = Im(f) \oplus K$.*

Todistus (vrt. [4, s. 11]). Osoitetaan $1 \Rightarrow 3 \Rightarrow 2 \Rightarrow 1$.

Oletetaan aluksi, että on olemassa R-homomorfismi $\alpha\colon B \to C$, jolla $\alpha f = 1_A$ ja osoitetaan, että $B = \mathrm{Im}(f) \oplus \mathrm{Ker}(\alpha)$. Olkoon $b \in B$. Tällöin

$$\alpha(b) = 1_A\alpha(b) = \alpha f \alpha(b),$$

joten $\alpha(b - f\alpha(b)) = 0$. Siis $b - f\alpha(b) \in \mathrm{Ker}(\alpha)$. Tästä saadaan

$$b = (b - f\alpha(b)) + f\alpha(b) \in \mathrm{Ker}(\alpha) + \mathrm{Im}(f).$$

Täten $B = \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Ker}(\alpha)$. Osoitetaan vielä, että summa on suora. Olkoon $b \in \mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}(\alpha)$. Tällöin on olemassa $a \in A$, jolla $f(a) = b$. Siis

$$0 = \alpha(b) = \alpha(f(a)) = 1_A(a) = a,$$

jolloin myös $b = f(a) = f(0) = 0$. Joten $B = \mathrm{Im}(f) \oplus \mathrm{Ker}(\alpha)$.

Oletetaan sitten, että on olemassa alimoduli $K \subseteq B$, jolla $B = \mathrm{Im}(f) \oplus K$. Olkoon $c \in C$. Tällöin kuvauksen g surjektiivisuuden nojalla on olemassa $b \in B$, jolla $g(b) = c$. Nyt oletuksen nojalla $b = f(a) + k$, joillakin $a \in A$ ja $k \in K$. Joten saadaan

$$c = g(b) = g(f(a) + k) = gf(a) + g(k) = 0 + g(k) = g(k).$$

Osoitetaan, että k on yksikäsitteinen. Olkoon $k' \in K$ toinen alkio, jolla $g(k') = c$. Tällöin $g(k - k') = 0$ eli $k - k' \in \mathrm{Ker}(g) = \mathrm{Im}(f)$. Mutta nyt $k - k' \in \mathrm{Im}(f) \cap K = \{0\}$, sillä oletuksen nojalla summa oli suora. Siis $k = k'$. Tästä seuraa, että on olemassa kuvaus $\beta\colon C \to B$, $\beta(c) = k_c$, missä $k_c \in K$ on se yksikäsitteinen alkio, jolla $c = g(k_c)$. Lisäksi kuvauksen β homomorfisuus seuraa suoraan kuvauksen g homomorfisuudesta. Sekä tietenkin

$$g\beta(c) = g(k_c) = c,$$

joten $g\beta = 1_C$.

Oletetaan lopuksi, että on olemassa R-homomorfismi $\beta\colon C \to B$, jolla $g\beta = 1_C$. Olkoon $b \in B$. Merkitään $c = g(b)$. Tällöin

$$g(b) = c = 1_C(c) = g\beta(c).$$

Siis $g(b - \beta(c)) = 0$ eli $b - \beta(c) \in \mathrm{Ker}(g) = \mathrm{Im}(f)$. Joten on olemassa $a \in A$, jolla $f(a) = b - \beta(c)$. Ratkaisemalla tästä alkion b, saadaan $b = \beta(c) + f(a)$. Osoitetaan, että esitys on yksikäsitteinen. Olkoot $a' \in A, c' \in C$ toiset alkiot, joille $\beta(c) + f(a) = b = \beta(c') + f(a')$. Tästä saadaan $\beta(c - c') = f(a' - a)$. Kun tähän soveltaa kuvausta g, saadaan

$$0 = gf(a' - a) = g\beta(c - c') = 1_C(c - c') = c - c'.$$

Joten $c = c'$. Edellä todetun nojalla

$$f(a' - a) = \beta(c - c') = \beta(0) = 0,$$

joten kuvauksen f injektiivisyyden nojalla $a = a'$. Näin ollen on olemassa kuvaus $\alpha\colon B \longrightarrow A$, $\alpha(\beta(c) + f(a)) = a$. Tämän kuvauksen homomorfisuus, seuraa suoraan kuvausten β ja f homomorfisuudesta sekä

$$\alpha f(a) = \alpha(0 + f(a)) = \alpha(\beta(0) + f(a)) = a$$

jokaisella $a \in A$. Joten $\alpha f = 1_A$. □

Määritelmä 3.2. Olkoon R rengas, A, B ja C R-moduleita sekä $f\colon A \longrightarrow B$ ja $g\colon B \longrightarrow C$ R-homomorfismeja, joilla jono

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

on eksakti. Tämän jonon sanotaan *lohkeavan*, jos edellisen lauseen ehdot ovat voimassa.

Lause 3.3 (5-lemma)**.** *Olkoon*

$$\begin{array}{ccccccccc}
A_1 & \xrightarrow{f_1} & A_2 & \xrightarrow{f_2} & A_3 & \xrightarrow{f_3} & A_4 & \xrightarrow{f_4} & A_5 \\
\downarrow{\scriptstyle\varphi_1} & & \downarrow{\scriptstyle\varphi_2} & & \downarrow{\scriptstyle\varphi_3} & & \downarrow{\scriptstyle\varphi_4} & & \downarrow{\scriptstyle\varphi_5} \\
B_1 & \xrightarrow{g_1} & B_2 & \xrightarrow{g_2} & B_3 & \xrightarrow{g_3} & B_4 & \xrightarrow{g_4} & B_5
\end{array}$$

on kommutoiva kaavio R-moduleita ja R-homomorfismeja. Oletetaan, että kaavion rivit ovat eksakteja ja $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_4$ ja φ_5 ovat isomorfismeja. Tällöin φ_3 on isomorfismi.

Todistus (kts. [1, s. 23]). Kaaviojahti. □

Lause 3.4. *Olkoon*

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

on lohkeava eksakti jono R-moduleita ja R-homomorfismeja. Tällöin $B \cong A \oplus C$.

Todistus (vrt. [1, s. 23]). Ensinnäkin on helppo huomata, että jono

$$0 \to A \xrightarrow{i} A \oplus C \xrightarrow{p} C \to 0$$

on eksakti, kun $i(a) = (a, 0)$ ja $p(a, c) = c$ kaikilla $a \in A$ ja $c \in C$.

Nyt lauseen 3.2 nojalla on olemassa kuvaus $\alpha\colon B \to A$, jolla $\alpha f = 1_A$. Merkitään (α, g) on kuvaus $B \to A \oplus C$ siten, että $(\alpha, g)(b) = (\alpha(b), g(b))$ jokaisella $b \in B$. Siis saadaan kommutoiva kaavio

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "1_A"] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "(\alpha,g)"] & C \arrow[r] \arrow[d, "1_C"] & 0 \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "i"] & A \oplus C \arrow[r, "p"] & C \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Tässä kaaviossa kuvaukset 0, 1_A ja 1_C ovat tietenkin isomorfismeja, joten 5-lemman nojalla $B \cong A \oplus C$. □

Määritelmä 3.3. Olkoon R rengas. Kovarianttia funktoria $F\colon {}_R\mathbf{Mod} \to \mathbf{Ab}$ sanotaan:

(a) *puolieksaktiksi*, jos

$$F(A) \xrightarrow{F(f)} F(B) \xrightarrow{F(g)} F(C)$$

on eksakti,

(b) *oikealta eksaktiksi*, jos

$$F(A) \xrightarrow{F(f)} F(B) \xrightarrow{F(g)} F(C) \to 0$$

on eksakti,

(c) *vasemmalta eksaktiksi*, jos

$$0 \to F(A) \xrightarrow{F(f)} F(B) \xrightarrow{F(g)} F(C)$$

on eksakti,

(d) *eksaktiksi*, jos

$$0 \to F(A) \xrightarrow{F(f)} F(B) \xrightarrow{F(g)} F(C) \to 0$$

on eksakti

kaikilla lyhyillä eksakteilla jonoilla R-moduleita ja R-homomorfismeja

$$0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0.$$

Määritelmä 3.4. Olkoon R rengas. Kontravarianttia funktoria $F\colon {}_R\mathbf{Mod} \to \mathbf{Ab}$ sanotaan:

(a) *puolieksaktiksi*, jos
$$F(C) \xrightarrow{F(g)} F(B) \xrightarrow{F(f)} F(A)$$
on eksakti,

(b) *oikealta eksaktiksi*, jos
$$F(C) \xrightarrow{F(g)} F(B) \xrightarrow{F(f)} F(A) \to 0$$
on eksakti,

(c) *vasemmalta eksaktiksi*, jos
$$0 \to F(C) \xrightarrow{F(g)} F(B) \xrightarrow{F(f)} F(A)$$
on eksakti,

(d) *eksaktiksi*, jos
$$0 \to F(C) \xrightarrow{F(g)} F(B) \xrightarrow{F(f)} F(A) \to 0$$
on eksakti

kaikilla lyhyillä eksakteilla jonoilla R-moduleita ja R-homomorfismeja
$$0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0.$$

Lause 3.5. *Olkoon R rengas ja X R-moduli. Tällöin*

a) Hom*$(X, \bullet)$ on vasemmalta eksakti,*

b) Hom*$(\bullet, X)$ on vasemmalta eksakti.*

Todistus (vrt. [4, s. 63]). a) Olkoon
$$0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0.$$
lyhyt eksakti jono R-moduleita ja R-homomorfismeja. Soveltamalla tähän funktoria $\mathrm{Hom}(X, \bullet)$, saadaan jono
$$0 \to \mathrm{Hom}(X, A) \xrightarrow{f^*} \mathrm{Hom}(X, B) \xrightarrow{g^*} \mathrm{Hom}(X, C).$$
Tässä $f^*(\varphi) = f\varphi$ ja $g^*(\psi) = g\psi$ kaikilla $\varphi \in \mathrm{Hom}(X, A)$ ja $\psi \in \mathrm{Hom}(X, B)$.

Osoitetaan aluksi, että $\mathrm{Im}(0) = \mathrm{Ker}(f^*)$. Nyt tietenkin $\mathrm{Im}(0) = \{0\}$. Olkoon $\alpha \in \mathrm{Ker}(f^*)$. Siis $0 = f^*(\alpha) = f\alpha$. Kun $x \in X$, saadaan $0 = f\alpha(x) = f(\alpha(x))$. Jolloin kuvauksen f injektiivisyyden nojalla $\alpha(x) = 0$. Siis $\alpha = 0$. Näin ollen $\mathrm{Im}(0) = \{0\} = \mathrm{Ker}(f^*)$.

Osoitetaan sitten, että $\mathrm{Im}(f^*) = \mathrm{Ker}(g^*)$. Olkoon $\alpha \in \mathrm{Im}(f^*)$. Tällöin on olemassa $\beta \in \mathrm{Hom}(X, A)$, jolla $f^*(\beta) = \alpha$. Nyt

$$g^*(\alpha) = g^*(f^*(\beta)) = g^*(f\beta) = g(f\beta) = (gf)\beta = 0\beta = 0.$$

Joten $\alpha \in \mathrm{Ker}(g^*)$ eli $\mathrm{Im}(f^*) \subseteq \mathrm{Ker}(g^*)$.

Olkoon $\alpha \in \mathrm{Ker}(g^*)$. Siis $0 = g^*(\alpha) = g\alpha$. Nyt jos $x \in X$, niin $g(\alpha(x)) = 0$. Joten $\alpha(x) \in \mathrm{Ker}(g) = \mathrm{Im}(f)$. Siis on olemassa sellainen $y \in A$, että $\alpha(x) = f(y)$. Tämä $y \in A$ on yksikäsitteinen, sillä f on injektio. Näin ollen saadaan kuvaus $\beta \colon X \longrightarrow A$, $\beta(x) = y_x$, missä $y_x \in A$ on se yksikäsitteinen alkio, jolla $\alpha(x) = f(y_x)$.

Nyt kuvauksen β R-homomorfisuus seuraa suoraan kuvausten f ja α R-homomorfisuudesta. Joten $\beta \in \mathrm{Hom}(X, A)$. Lisäksi jos $x \in X$, niin

$$f^*(\beta)(x) = f(\beta(x)) = f(y_x) = \alpha(x).$$

Joten $\alpha = f^*(\beta) \in \mathrm{Im}(f^*)$ eli $\mathrm{Ker}(g^*) \subseteq \mathrm{Im}(f^*)$.

On siis todistettu, että $\mathrm{Im}(f^*) = \mathrm{Ker}(g^*)$, joten jono

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(X, A) \xrightarrow{f^*} \mathrm{Hom}(X, B) \xrightarrow{g^*} \mathrm{Hom}(X, C).$$

on eksakti.

b) Olkoon

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0.$$

lyhyt eksakti jono R-moduleita ja R-homomorfismeja. Soveltamalla tähän funktoria $\mathrm{Hom}(\bullet, X)$, saadaan jono

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(C, X) \xrightarrow{g^*} \mathrm{Hom}(B, X) \xrightarrow{f^*} \mathrm{Hom}(A, X).$$

Tässä $f^*(\varphi) = \varphi f$ ja $g^*(\psi) = \psi g$ kaikilla $\varphi \in \mathrm{Hom}(B, X)$ ja $\psi \in \mathrm{Hom}(C, X)$.

Osoitetaan aluksi, että $\mathrm{Im}(0) = \mathrm{Ker}(g^*)$. Nyt tietenkin $\mathrm{Im}(0) = \{0\}$. Olkoon $\alpha \in \mathrm{Ker}(g^*)$. Siis $0 = g^*(\alpha) = \alpha g$. Kun $b \in B$, saadaan $\alpha(g(b)) = 0$, joten kuvauksen g surjektiivisuuden nojalla $\alpha(c) = 0$ kaikilla $c \in C$. Siis $\alpha = 0$. Näin ollen $\mathrm{Im}(0) = \{0\} = \mathrm{Ker}(g^*)$.

Osoitetaan sitten, että $\mathrm{Im}(g^*) = \mathrm{Ker}(f^*)$. Olkoon $\alpha \in \mathrm{Im}(g^*)$. Tällöin on olemassa $\beta \in \mathrm{Hom}(C, X)$, jolla $g^*(\beta) = \alpha$. Nyt

$$f^*(\alpha) = f^*(g^*(\beta)) = f^*(\beta g) = (\beta g)f = \beta(gf) = \beta 0 = 0.$$

Joten $\alpha \in \mathrm{Ker}(f^*)$ eli $\mathrm{Im}(g^*) \subseteq \mathrm{Ker}(f^*)$.

Olkoon $\alpha \in \mathrm{Ker}(f^*)$. Siis $0 = f^*(\alpha) = \alpha f$. Nyt jos $c \in C$, niin on olemassa $b \in B$, jolla $g(b) = c$, sillä kuvaus g on surjektio. Määritellään kuvaus $\beta \colon C \longrightarrow X$, $\beta(c) = \alpha(b_c)$, missä $g(b_c) = c$. Osoitetaan, että tämä kuvaus on hyvinmääritelty. Olkoon $b, b' \in B$ siten, että $g(b) = g(b')$. Tällöin $g(b - b') = g(b) - g(b') = 0$, joten $b - b' \in \mathrm{Ker}(g) = \mathrm{Im}(f)$. Siis on olemssa $a \in A$, jolla $f(a) = b - b'$. Saadaan

$$\alpha(b) - \alpha(b') = \alpha(b - b') = \alpha(f(a)) = \alpha f(a) = 0(a) = 0.$$

Joten $\alpha(b) = \alpha(b')$, mikä tarkottaa, että β on hyvinmääritelty.

Nyt kuvauksen β R-homomorfisuus seuraa suoraan kuvausten g ja α R-homomorfisuudesta. Joten $\beta \in \mathrm{Hom}(C, X)$. Lisäksi jos $b_c \in B$, niin

$$g^*(\beta)(b_c) = \beta g(b_c) = \beta(c) = \alpha(b_c).$$

Joten $\alpha = g^*(\beta) \in \mathrm{Im}(g^*)$ eli $\mathrm{Ker}(f^*) \subseteq \mathrm{Im}(g^*)$.

On siis todistettu, että $\mathrm{Im}(g^*) = \mathrm{Ker}(f^*)$, joten jono

$$0 \to \mathrm{Hom}(C, X) \xrightarrow{g^*} \mathrm{Hom}(B, X) \xrightarrow{f^*} \mathrm{Hom}(A, X).$$

on eksakti. □

Lause 3.6. *Olkoot R ja S renkaita, $F\colon {}_R\mathbf{Mod} \to {}_S\mathbf{Mod}$ additiivinen kovariantti funktori. Tällöin F on oikealta eksakti, jos ja vain jos kaikilla eksakteilla jonoilla R-moduleita ja R-homomorfismeja*

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$$

myös jono

$$F(A) \xrightarrow{F(f)} F(B) \xrightarrow{F(g)} F(C) \to 0$$

on eksakti.

Todistus (vrt. [4, s. 59]). Oletetaan, että F on oikealta eksakti. Olkoon siis

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$$

lyhyt eksakti jono R-moduleita ja R-homomorfismeja. Tällöin saadaan lyhyet eksaktit jonot

$$0 \to \mathrm{Ker}(f) \xrightarrow{i} A \xrightarrow{\bar{f}} \mathrm{Im}(f) \to 0 \quad \text{ja} \quad 0 \to \mathrm{Ker}(g) \xrightarrow{j} B \xrightarrow{g} C \to 0,$$

missä tietenkin $\mathrm{Ker}(g) = \mathrm{Im}(f)$. Tässä $i\colon \mathrm{Ker}(f) \to A$ ja $j\colon \mathrm{Ker}(g) \to B$ ovat inkluusioita sekä $f = j\bar{f}$. Nyt koska F oli oikealta eksakti, saadaan eksaktit jonot

$$F(\mathrm{Ker}(f)) \xrightarrow{F(i)} F(A) \xrightarrow{F(\bar{f})} F(\mathrm{Im}(f)) \to 0$$
$$F(\mathrm{Im}(f) \xrightarrow{F(j)} F(B) \xrightarrow{F(g)} F(C) \to 0$$

Huomataan, että $F(j)F(\bar{f}) = F(j\bar{f}) = F(f)$. Joten yhdistämällä nämä ekaktit jonot saadaan eksakti jono

$$F(A) \xrightarrow{F(f)} F(B) \xrightarrow{F(g)} F(C) \to 0.$$

□

Edellisellä lauseella on olemassa vastineet sekä kontravarianteille, että vasemmalta eksakteille funktoreille.

4 Projektiiviset ja injektiiviset modulit

4.1 Kertausta moduleista

Vapaat modulit

Lause 4.1. *Olkoon R rengas ja F vapaa R-moduli. Tällöin*

$$F \cong \bigoplus_{j \in J} R$$

jollakin indeksijoukolla J.

Todistus (kts. [4, s. 8]). Sivuutetaan. □

Lause 4.2. *Olkoon R rengas ja M R-moduli. Tällöin*

$$M \cong F/S,$$

jollakin vapaalla R-modulilla F ja sen alimodulilla S.

Todistus (kts. [2, s. 473]). Sivuutetaan. □

Lause 4.3. *Olkoon R rengas ja M R-moduli. Tällöin on olemassa vapaa R-moduli F ja surjektiivinen R-homomorfismi $p\colon F \to M$. Toisin sanoen jokainen moduli on vapaan modulin homomorfinen kuva.*

Todistus (kts. [2, s. 472]). Sivuutetaan. □

Tesoritulo

Tässä alaluvussa on erityisen tärkeää, että rengas R on vaihdannainen. Jos R ei olisi vaihdanainen, niin kahden R-modulin tesoritulo ei olisi välttämättä R-moduli.

Määritelmä 4.1 (Tensoritulon universaaliominaisuus)**.** Olkoon R rengas ja M ja N R-moduleita. Modulien M ja N *tensoritulo*, on pari $(M \otimes N, \varphi)$, missä $M \otimes N$ on R-moduli ja kuvaus $\varphi\colon M \times N \to M \otimes N$, $\varphi(m, n) = m \otimes n$, on R-bilineaarinen. Lisäksi jokaisella R-modulilla A ja R-bilineaarikuvauksella $f\colon M \times N \to A$ on olemassa yksikäsitteinen R-homomorfismi $\tilde{f}\colon M \otimes N \to A$, jolla $f = \tilde{f}\varphi$. Toisin sanoen kaavio

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "f"'] & & M \otimes N \arrow[dl, dashed, "\tilde{f}"] \\ & A & \end{tikzcd}$$

kommutoi. On helppo huomata, että modulien tesoritulo on isomorfiaa vaille yksikäsitteinen. Lisäksi kahden modulin tensoritulo on aina olemassa, mutta sen todistus ohitetaan.

Muodostetaan tensoritulosta kaksi funktoria. Olkoon R rengas ja A R-moduli. Asetetaan

$$T_A\colon {}_R\mathbf{Mod} \to {}_R\mathbf{Mod}, \quad T_A(X) = A \otimes X$$

kaikilla R-moduleilla X.

Olkoot lisäksi B ja C R-moduleita sekä $f\colon B \to C$ R-homomorfismi. Tällöin on olemassa tensoritulot $(A \otimes B, \varphi)$ ja $(A \otimes C, \varphi')$. Merkitään

$$(1_A, f)\colon A \times B \to A \times C, \quad (1_A, f)(a, b) = (a, f(b))$$

kaikilla $a \in A$ ja $b \in B$. Tämä kuvaus on R-bilineaarinen, jolloin myös kuvaus $\varphi' \circ (1_A, f)$ on R-bilineaarinen. Siis tensoritulon universaaliominaisuuden nojalla on olemassa yksikäsitteinen R-homomorfismi $\tilde{f}\colon A \otimes B \to A \otimes C$, jolla kaavio

$$\begin{tikzcd}
A \times B \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "(1_A,f)"'] & & A \otimes B \arrow[dd, dashed, "\tilde{f}"] \\
& A \times C \arrow[dr, "\varphi'"'] & \\
& & A \otimes C
\end{tikzcd}$$

kommutoi eli $\varphi' \circ (1_A, f) = \tilde{f} \circ \varphi$. Siis

$$\tilde{f}(a \otimes b) = a \otimes f(b)$$

kaikilla $a \in A$ ja $b \in B$. Asetetaan $T_A(f) = \tilde{f}$. Usein merkitään $\tilde{f} = 1_A \otimes f$.

Lause 4.4. *Olkoon R rengas ja A R-moduli. Tällöin edellä mainittu $T_A\colon {}_R\mathbf{Mod} \to {}_R\mathbf{Mod}$ on additiivinen kovariantti funktori.*

Todistus (vrt. [1, s. 19]). Olkoot B, C ja D R-moduleita sekä $f\colon B \to C$ ja $g\colon C \to D$ R-homomorfismeja. Olkoon lisäksi $a \otimes b \in A \otimes B$. Tällöin

$$T_A(gf)(a \otimes b) = a \otimes gf(b) = T_A(g)(a \otimes f(b)) = T_A(g)T_A(f)(a \otimes b).$$

Siis $T_A(gf) = T_A(g)T_A(f)$. Lisäksi

$$T_A(1_B)(a \otimes b) = a \otimes 1_B(b) = a \otimes b.$$

Joten $T_A(1_B) = 1_{A \otimes B} = 1_{T_A(B)}$.

Näin ollen T_A on kovariantti funktori ${}_R\mathbf{Mod} \to \mathbf{Set}$. Nyt $T_A(f) = \tilde{f}$ tensoritulon universaaliominaisuuden tuottamana R-homomorfismi, joten T_A kovariantti funktori ${}_R\mathbf{Mod} \to {}_R\mathbf{Mod}$.

Todetaan lopuksi, että T_A on additiivinen. Olkoot $f, f'\colon B \to C$ R-homomorfismeja sekä $a \otimes b \in A \otimes B$. Tällöin

$$\begin{aligned}
&T_A(f + f')(a \otimes b) \\
&= a \otimes (f + f')(b) = a \otimes (f(b) + f'(b)) = a \otimes f(b) + a \otimes f'(b) \\
&= T_A(f)(a \otimes b) + T_A(f')(a \otimes b) = (T_A(f) + T_A(f'))(a \otimes b).
\end{aligned}$$

Siis $T_A(f + f') = T_A(f) + T_A(f')$ eli T_A on additiivinen. □

Usein merkitään $T_A = A\otimes$. Toinen funktori saadaan vastaavasti, kun asetetaan

$$T^A \colon {}_R\mathbf{Mod} \to {}_R\mathbf{Mod}, \quad T^A(X) = X \otimes A$$

kaikilla R-moduleilla X ja

$$T^A(f) = \tilde{f}.$$

Tässä kuvaus $\tilde{f}(b \otimes a) = f(b) \otimes a$ on tensoritulon universaaliominaisuuden tuottama yksikäsitteinen R-homomorfismi. Tämä todistetaan additiiviseksi kovariantiksi funktoriksi täysin samalla tavalla kuin T_A.

Usein merkitään $T^A = \otimes A$.

Lause 4.5. *Olkoon R rengas X R-moduli. Tällöin*

a) $X\otimes$ on oikealta eksakti,

b) $\otimes X$ on oikealta eksakti.

Todistus (vrt. [1, s. 25]). Todistetaan vain a-kohta. Olkoon

$$0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0.$$

lyhyt eksakti jono R-moduleita ja R-homomorfismeja. Soveltamalla tähän funktoria $X\otimes$, saadaan jono

$$X \otimes A \xrightarrow{\tilde{f}} X \otimes B \xrightarrow{\tilde{g}} X \otimes C \to 0,$$

missä $\tilde{f}$ ja $\tilde{g}$ ovat tensoritulon universaaliominaisuuden tuottamat yksikäsitteiset R-homomorfismit.

Osoitetaan aluksi, että $\mathrm{Im}(\tilde{f}) \subseteq \mathrm{Ker}(\tilde{g})$. Olkoon $x \otimes a \in X \otimes A$. Tällöin

$$\tilde{g}\tilde{f}(x \otimes a) = \tilde{g}(x \otimes f(a)) = x \otimes gf(a) = x \otimes 0 = 0.$$

Siis $\mathrm{Im}(\tilde{f}) \subseteq \mathrm{Ker}(\tilde{g})$.

Osoitetaan seuraavaksi, että $\mathrm{Ker}(\tilde{g}) \subseteq \mathrm{Im}(\tilde{f})$. Määritellään

$$\hat{g} \colon (X \otimes B)/\mathrm{Im}(\tilde{f}) \to X \otimes C, \quad \hat{g}(x \otimes b + \mathrm{Im}(\tilde{f})) = x \otimes g(b)$$

kaikilla $x \in X$ ja $b \in B$. Nyt edellisen kohdan nojalla $\mathrm{Im}(\tilde{f}) \subseteq \mathrm{Ker}(\tilde{g})$, joten $\hat{g}$ on hyvinmääritelty. Jos $\pi \colon X \otimes B \to (X \otimes B)/\mathrm{Im}(\tilde{f})$ on kanoninen surjektio, niin

$$\hat{g}\pi = \tilde{g}.$$

Siis kaavio

$$\begin{tikzcd}
X \otimes B \arrow[rr, "\pi"] \arrow[dr, "\tilde{g}"'] & & (X \otimes B)/\mathrm{Im}(\tilde{f}) \arrow[dl, "\hat{g}"] \\
& X \otimes C &
\end{tikzcd}$$

kommutoi. Osoitetaan, että $\hat{g}$ on isomorfismi antamalla sille käänteiskuvaus. Määritellään aluksi

$$h\colon X \times C \to (X \otimes B)/\mathrm{Im}(\tilde{f}).$$

Jos $c \in C$, niin kuvauksen g surjektiivisuuden nojalla on olemassa sellainen $b \in B$, että $c = g(b)$. Asetetaan

$$h(x, c) = x \otimes b + \mathrm{Im}(\tilde{f}).$$

Osoitetaan, että h on hyvinmääritelty. Olkoot $b, b' \in B$, joilla $g(b) = g(b')$. Tällöin $g(b - b') = 0$, joten $b - b' \in \mathrm{Ker}(g) = \mathrm{Im}(f)$. Siis on olemassa sellainen $a \in A$, että $b - b' = f(a)$. Näin ollen

$$x \otimes b - x \otimes b' = x \otimes (b - b') = x \otimes f(a) = \tilde{f}(x \otimes a) \in \mathrm{Im}(\tilde{f}).$$

Joten h on hyvinmääritelty. Lisäksi h on selvästi R-bilineaarinen. Siis tensoritulon universaaliominaisuuden nojalla on olemassa R-homomorfismi

$$\tilde{h}\colon X \otimes C \to (X \otimes B)/\mathrm{Im}(\tilde{f}), \quad \tilde{h}(x \otimes c) = x \otimes b + \mathrm{Im}(\tilde{f}).$$

Olkoon $x \otimes c \in X \otimes C$. Tällöin on olemassa sellainen $b \in B$, että $c = g(b)$. Saadaan

$$\hat{g}\tilde{h}(x \otimes c) = \hat{g}(x \otimes b + \mathrm{Im}(\tilde{f})) = x \otimes g(b) = x \otimes c.$$

Olkoon sitten $x \otimes b + \mathrm{Im}(\tilde{f}) \in (X \otimes B)/\mathrm{Im}(\tilde{f})$. Tällöin

$$\tilde{h}\hat{g}(x \otimes b + \mathrm{Im}(\tilde{f})) = \tilde{h}(x \otimes g(b)) = x \otimes b + \mathrm{Im}(\tilde{f}).$$

Siis $\hat{g}$ on isomorfismi. Näin ollen

$$\mathrm{Ker}(\tilde{g}) = \mathrm{Ker}(\hat{g}\pi) = \mathrm{Ker}(\pi) = \mathrm{Im}(\tilde{f}).$$

Osoitetaan lopuksi, että $\tilde{g}$ on surjektio. Olkoon $y \in X \otimes C$. Tällöin on olemassa sellaiset $x_1, \ldots, x_n \in X$ ja $c_1, \ldots c_n \in C$, että

$$y = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes c_i$$

Nyt kuvauksen g surjektiivisuuden nojalla on olemassa sellaiset $b_1, \ldots, b_n \in B$, että $c_i = g(b_i)$ kaikilla $i = 1, \ldots, n$. Siis

$$y = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes c_i = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes g(b_i) = \sum_{i=1}^{n} \tilde{g}(x_i \otimes b_i) = \tilde{g}\Big(\sum_{i=1}^{n} x_i \otimes b_i\Big)$$

eli $\tilde{g}\colon X \otimes B \to X \otimes C$ on surjektio. Joten jono

$$X \otimes A \xrightarrow{\tilde{f}} X \otimes B \xrightarrow{\tilde{g}} X \otimes C \to 0$$

on eksakti. $\square$

4.2 Projektiiviset modulit

Määritelmä 4.2. Olkoon R rengas ja P R-moduli. Tällöin P on *projektiivinen*, jos kaikilla R-moduleilla A ja B sekä R-homomorfismilla $f\colon P \to B$ ja surjektiivisilla R-homomorfismeilla $p\colon A \to B$ on olemassa R-homomorfismi $\alpha\colon P \to A$, jolla $f = p\alpha$. Toisin sanoen on olemassa kommutoiva kaavio

$$\begin{tikzcd}
 & P \arrow[dl, dashed, "\alpha"'] \arrow[d, "f"] & \\
A \arrow[r, "p"'] & B \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

missä vaakarivi on eksakti.

Lause 4.6. *Olkoon R rengas ja P R-moduli. Tällöin P on projektiivinen, jos ja vain jos funktori* $\mathrm{Hom}(P, \bullet)$ *on eksakti.*

Todistus (vrt. [4, s. 76]). Oletetaan aluksi, että $\mathrm{Hom}(P, \bullet)$ on eksakti funktori. Olkoot A ja B R-moduleita sekä $p\colon A \to B$ surjektiivinen R-homomorfismi ja $f\colon P \to B$ R-homomorfismi. Siis meillä on kaavio

$$\begin{tikzcd}
 & P \arrow[d, "f"] & \\
A \arrow[r, "p"] & B \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Nyt saadaan lyhyt eksakti jono

$$0 \to \mathrm{Ker}(p) \xrightarrow{i} A \xrightarrow{p} B \to 0.$$

Kun tähän soveltaa funktoria $\mathrm{Hom}(P, \bullet)$, saadaan oletuksen nojalla eksakti jono

$$0 \to \mathrm{Hom}(P, \mathrm{Ker}(p)) \xrightarrow{i^*} \mathrm{Hom}(P, A) \xrightarrow{p^*} \mathrm{Hom}(P, B) \to 0.$$

Jonon eksaktisuuden nojalla p^* on surjektio. Lisäksi $f \in \mathrm{Hom}(P, B)$, joten on olemassa kuvaus $\alpha \in \mathrm{hom}(P, A)$ siten, että $f = p^*(\alpha) = p\alpha$. Siis P on projektiivinen.

Oletetaan sitten, että P on projektiivinen. Nyt lauseen 3.5 nojalla tiedetään, että $\mathrm{Hom}(P, \bullet)$ on vasemmalta eksakti. Siis riittää osoittaa, että $p^*\colon \mathrm{Hom}(P, A) \to \mathrm{Hom}(P, B)$ on surjektio kaikilla surjektiivisilla $p\colon A \to B$. Olkoon siis $p\colon A \to B$ surjektiivinen R-homomorfismi. Olkoon lisäksi $f \in \mathrm{Hom}(P, B)$. Nyt oletuksen nojalla P on projektiivinen, joten on olemassa R-homomorfismi $\alpha\colon P \to A$, jolla $f = p\alpha = p^*(\alpha)$. Siis p^* on surjektio, jolloin $\mathrm{Hom}(P, \bullet)$ on eksakti. □

Lause 4.7. *Olkoon R rengas sekä P_1 ja P_2 R-moduleita. Tällöin $P_1 \oplus P_2$ on projektiivinen, jos ja vain jos P_1 ja P_2 ovat projektiivisia.*

Todistus (vrt. [4, s. 75]). Merkitään

$$\begin{aligned} i_1\colon P_1 \to P_1 \oplus P_2, &\quad i_1(x) = (x, 0) \\ i_2\colon P_2 \to P_1 \oplus P_2, &\quad i_2(y) = (0, y) \\ p_1\colon P_1 \oplus P_2 \to P_1, &\quad p_1(x, y) = x \\ p_2\colon P_1 \oplus P_2 \to P_2, &\quad p_2(x, y) = y \end{aligned}$$

kaikilla $x \in P_1$ ja $y \in P_2$.

Oletetaan aluksi, että modulit P_1 ja P_2 ovat projektiivisia. Olkoot A ja B R-moduleita, $f\colon P_1 \oplus P_2 \to B$ R-homomorfismi ja $p\colon A \to B$ surjektiivinen R-homomorfismi. Nyt saadaan yhdistetyt kuvaukset $i_1 f\colon P_1 \to B$ ja $i_2 f\colon P_2 \to B$. Siis meillä on kaaviot

$$\begin{tikzcd} & P_1 \arrow[d, "i_1"] & \\ & P_1 \oplus P_2 \arrow[d, "f"] & \\ A \arrow[r, "p"] & B \arrow[r] & 0 \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & P_2 \arrow[d, "i_2"] & \\ & P_1 \oplus P_2 \arrow[d, "f"] & \\ A \arrow[r, "p"] & B \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Nyt oletuksen nojalla modulit P_1 ja P_2 ovat projektiivisia, joten on olemassa sellaiset R-homomorfismit $\alpha_1\colon P_1 \to A$ ja $\alpha_2\colon P_2 \to A$, että $fi_1 = p\alpha_1$ ja $fi_2 = p\alpha_2$. Määritellään kuvaus

$$\alpha\colon P_1 \oplus P_2 \to A, \quad \alpha(x, y) = \alpha_1(x) + \alpha_2(y)$$

kaikilla $x \in P_1$ ja $y \in P_2$. Tämä on tietenkin R-homomorfismi. Lisäksi kun $(x, y) \in P_1 \oplus P_2$, niin

$$\begin{aligned} & p\alpha(x, y) \\ &= p(\alpha_1(x) + \alpha_2(y)) = p\alpha_1(x) + p\alpha_2(y) \\ &= fi_1(x) + fi_2(y) = f(i_1(x) + i_2(y)) = f(x, y). \end{aligned}$$

Siis $p\alpha = f$ eli moduli $P_1 \oplus P_2$ on projektiivinen.

Oletetaan sitten, että moduli $P_1 \oplus P_2$ on projektiivinen. Osoitetaan vain moduli P_1 projektiiviseksi, sillä P_2 todistetaan projektiiviseksi täysin vastaavasti. Olkoot A ja B R-moduleita, $f_1\colon P_1 \to B$ R-homomorfismi sekä $p\colon A \to B$ surjektiivinen R-homomorfismi. Nyt saadaan yhdistetty kuvaus $f_1 p_1\colon P_1 \oplus P_2 \to B$. Siis meillä on kaavio

$$\begin{tikzcd} & P_1 \oplus P_2 \arrow[d, "p_1"] & \\ & P_1 \arrow[d, "f_1"] & \\ A \arrow[r, "p"] & B \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Nyt oletuksen nojalla moduli $P_1 \oplus P_2$ on projektiivinen, joten on olemassa sellainen R-homomorfimsi $\alpha\colon P_1 \oplus P_2 \to A$, että $f_1 p_1 = p\alpha$. Merkitään $\alpha_1 = \alpha i_1$. Tällöin

$$p\alpha_1 = p\alpha i_1 = f_1 p_1 i_1 = f_1 1_{P_1} = f_1.$$

Siis moduli P_1 on projektiivinen. □

Lause 4.8. *Olkoon R rengas ja F vapaa R-moduli. Tällöin F on projektiivinen.*

Todistus (vrt. [3, s. 99]). Olkoot A ja B R-moduleita sekä $p\colon A \to B$ surjektiivinen R-homomorfismi ja $f\colon F \to B$ R-homomorfismi. Siis meillä on kaavio

$$\begin{tikzcd} & F \arrow[d, "f"] & \\ A \arrow[r, "p"] & B \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Olkoon lisäksi E modulin F kanta. Nyt $f(e) \in B$ jokaisella $e \in E$. Joten kuvauksen p surjektiivisuuden nojalla jokaisella $e \in E$ on olemassa $a_e \in A$, jolla $p(a_e) = f(e)$. Täten (valinta-aksiooman nojalla) on olemassa kuvaus $\alpha\colon E \to A, \alpha(e) = a_e$ kaikilla $e \in E$. Nyt koska E oli modulin F kanta, kuvaus α voidaan laajentaa R-homomorfismiksi $\alpha\colon F \to A$. Lisäksi kuvauksella α on voimassa

$$f(e) = p(a_e) = p(\alpha(e)) = p\alpha(e)$$

jokaisella $e \in E$. Joten myös $f(x) = p\alpha(x)$ jokaisella $x \in F$. Siis $f = p\alpha$ eli F on projektiivinen. □

Lause 4.9. *Olkoon R rengas ja M R-moduli. Tällöin on olemassa projektiivinen R-moduli P ja surjektiivinen R-homomorfismi $p\colon P \to A$.*
Toisin sanoen, jokainen moduli on projektiivisen modulin homomorfinen kuva.

Todistus (vrt. [4, s. 77]). Nyt lauseen 4.3 nojalla on olemassa vapaa R-moduli F ja surjektiivinen R-homomorfismi $p\colon F \to M$. Mutta edellisen lauseen nojalla F on projektiivinen, mikä todistaa väitteen. □

Lause 4.10. *Olkoon R rengas ja P R-moduli. Tällöin P on projektiivinen, jos ja vain jos jokainen eksakti jono,*

$$0 \to A \to B \to P \to 0$$

R-moduleita ja R-homomorfismeja, lohkeaa.

Todistus (vrt. [4, s. 77]). Oletetaan aluksi, että moduli P on projektiivinen. Olkoot A ja B R-moduleita sekä $f\colon A \to B$ ja $g\colon B \to P$ R-homomorfismeja niin, että jono

$$0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} P \to 0$$

on eksakti. Nyt oletuksen nojalla P on projektiivinen, joten on olemassa R-homomorfismi $\alpha\colon P \to B$, jolla $1_P = g\alpha$. Jolloin saadaan kommutoiva kaavio,

$$\begin{tikzcd}
 & & & P \arrow[dl, dashed, "\alpha"'] \arrow[d, "1_P"] & \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f"] & B \arrow[r, "g"] & P \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

jossa vaakarivi on eksakti. Siis lauseen 3.2 nojalla lyhyt eksakti jono

$$0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} P \to 0$$

lohkeaa.

Oletetaan sitten, että kaikki lyhyet eksaktit jonot

$$0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} P \to 0$$

lohkeavat. Nyt edellisen lauseen nojalla moduli P on projektiivisen modulin kuva R-homomorfismissa. Joten on olemassa projektiivinen R-moduli P' ja surjektiivinen R-homomorfismi $f\colon P' \to P$. Nyt saadaan eksakti jono

$$0 \to \mathrm{Ker}(f) \xrightarrow{i} P' \xrightarrow{f} P \to 0.$$

Siis oletuksen nojalla jono lohkeaa, joten lauseesta 3.4 seuraa, että $P' \cong \mathrm{Ker}(f) \oplus P$. Nyt lauseen 4.7 nojalla P on projektiivinen. □

4.3 Injektiiviset modulit

Määritelmä 4.3. Olkoon R rengas ja E R-moduli. Tällöin E on *injektiivinen*, jos kaikilla R-moduleilla A ja B sekä R-homomorfimsilla $f\colon A \to E$ ja injektiivisellä R-homomorfismilla $i\colon A \to B$ on olemassa R-homomorfismi $\alpha\colon B \to E$, jolle $f = \alpha i$. Toisin sanoen on olemassa kommutoiva kaavio

$$\begin{tikzcd}
 & E & \\
0 \arrow[r] & A \arrow[u, "f"] \arrow[r, "i"'] & B \arrow[ul, dashed, "\alpha"']
\end{tikzcd}$$

missä vaakarivi on eksakti.

Lause 4.11. *Olkoon R rengas ja E R-moduli. Tällöin E on injektiivinen, jos ja vain jos* $\mathrm{Hom}(\bullet, E)$ *on eksakti.*

Todistus (vrt. [4, s. 82]). Oletetaan aluksi, että $\mathrm{Hom}(\bullet, E)$ on eksakti. Olkoot A ja B R-moduleita sekä $f\colon A \to E$ R-homomorfismi ja $i\colon A \to B$ injektiivinen R-homomorfismi. Siis meillä on kaavio

$$\begin{tikzcd}
 & E & \\
0 \arrow[r] & A \arrow[u, "f"] \arrow[r, "i"'] & B
\end{tikzcd}$$

Nyt saadaan lyhyt eksakti jono

$$0 \to A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{\pi} B/\mathrm{Im}(i) \to 0.$$

Kun tähän soveltaa funktoria $\mathrm{Hom}(\bullet, E)$, saadaan oletuksen nojalla eksakti jono.

$$0 \to \mathrm{Hom}(B/\mathrm{Im}(i), E) \xrightarrow{\pi^*} \mathrm{Hom}(B, E) \xrightarrow{i^*} \mathrm{Hom}(A, E) \to 0.$$

Jonon eksaktisuuden nojalla i^* on surjektio. Lisäksi $f \in \mathrm{Hom}(A, E)$, joten on olemassa $\alpha \in \mathrm{Hom}(B, E)$, jolla $f = i^*(\alpha) = \alpha i$. Siis E on injektiivinen.

Oletetaan sitten, että E on injektiivinen. Nyt lauseen 3.5 nojalla tiedetään, että $\mathrm{Hom}(\bullet, E)$ on vasemmalta eksakti. Siis riittää osoittaa, että $i^*\colon \mathrm{Hom}(B, E) \to \mathrm{Hom}(A, E)$ on surjektio kaikilla injektiivisillä $i\colon A \to B$. Olkoon siis $i\colon A \to B$ injektiivinen R-homomorfismi. Olkoon lisäksi $f \in \mathrm{Hom}(A, E)$. Nyt oletuksen nojalla E on injektiivinen, joten on olemassa R-homomorfismi $\alpha\colon B \to E$, jolla $f = \alpha i = i^*(\alpha)$. Siis i^* on surjektio, jolloin $\mathrm{Hom}(\bullet, E)$ on eksakti. □

Lause 4.12. *Olkoon R rengas ja E_1 ja E_2 R-moduleita. Tällöin $E_1 \oplus E_2$ on injektiivinen, jos ja vain jos E_1 ja E_2 ovat injektiivisiä.*

Todistus (vrt. [4, s. 81]). Merkitään

$$
\begin{aligned}
i_1 &\colon E_1 \to E_1 \oplus E_2, \quad && i_1(x) = (x, 0) \\
i_2 &\colon E_2 \to E_1 \oplus E_2, \quad && i_2(y) = (0, y) \\
p_1 &\colon E_1 \oplus E_2 \to E_1, \quad && p_1(x, y) = x \\
p_2 &\colon E_1 \oplus E_2 \to E_2, \quad && p_2(x, y) = y
\end{aligned}
$$

kaikilla $x \in E_1$ ja $y \in E_2$.

Oletetaan aluksi, että modulit E_1 ja E_2 ovat injektiivisiä. Olkoot A ja B R-moduleita sekä $f\colon A \to E_1 \oplus E_2$ R-homomorfismi ja $i\colon A \to B$ injektiivinen R-homomorfismi. Nyt saadaan yhdistetyt kuvaukset $p_1 f\colon A \to E_1$ ja $p_2 f\colon A \to E_2$. Siis meillä on kaaviot

$$
\begin{tikzcd}
 & E_1 & \\
 & E_1 \oplus E_2 \arrow[u, "p_1"] & \\
0 \arrow[r] & A \arrow[u, "f"] \arrow[r, "i"] & B
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & E_2 & \\
 & E_1 \oplus E_2 \arrow[u, "p_2"] & \\
0 \arrow[r] & A \arrow[u, "f"] \arrow[r, "i"] & B
\end{tikzcd}
$$

Nyt oletuksen nojalla modulit E_1 ja E_2 ovat injektiivisiä, joten on olemassa sellaiset R-homomorfismit $\alpha_1\colon B \to E_1$ ja $\alpha_2\colon B \to E_2$, että $p_1 f = \alpha_1 i$ ja $p_2 f = \alpha_2 i$. Määritellään kuvaus

$$\alpha\colon B \to E_1 \oplus E_2, \quad \alpha(b) = (\alpha_1(b), \alpha_2(b))$$

kaikilla $b \in B$. Tämä on tietenkin R-homomorfismi. Lisäksi kun $a \in A$, saadaan

$$\alpha i(a) = (\alpha_1 i(a), \alpha_2 i(a)) = (p_1 f(a), p_2 f(a)) = f(a).$$

Siis $\alpha i = f$ eli moduli $E_1 \oplus E_2$ on injektiivinen.

Oletetaan sitten, että moduli $E_1 \oplus E_2$ on injektiivinen. Osoitetaan vain moduli E_1 injektiiviseksi, sillä E_2 todistetaan injektiiviseksi täysin vastaavasti. Olkoot A ja B R-moduleita, $f_1\colon A \to E_1$ R-homomorfismi sekä $i\colon A \to B$ injektiivinen R-homomorfismi. Nyt saadaan yhdistetty kuvaus $i_1 f\colon A \to E_1 \oplus E_2$. Siis meillä on kaavio

$$
\begin{tikzcd}
 & E_1 \oplus E_2 & \\
 & E_1 \arrow[u, "i_1"] & \\
0 \arrow[r] & A \arrow[u, "f"] \arrow[r, "i"] & B
\end{tikzcd}
$$

Nyt oletuksen nojalla moduli $E_1 \oplus E_2$ on injektiivinen, joten on olemassa sellainen R-homomorfismi $\alpha\colon B \to E_1 \oplus E_2$, että $i_1 f = \alpha i$. Merkitään $\alpha_1 = p_1 \alpha$. Tällöin

$$\alpha_1 i = p_1 \alpha i = p_1 i_1 f = 1_{E_1} f = f.$$

Siis moduli E_1 on injektiivinen. $\square$

Lause 4.13 (Baerin kriteeri). *Olkoon R rengas ja E R-moduli. Tällöin E on injektiivinen, jos ja vain jos jokainen R-homomorfismi $f\colon I \to E$ voidaan laajentaa R-homomorfismiksi $R \to E$, missä I on renkaan R ideaali.*

$$\begin{tikzcd}
 & E & \\
0 \arrow[r] & I \arrow[u, "f"] \arrow[r, "i"'] & R \arrow[ul, dashed, "\alpha"']
\end{tikzcd}$$

Todistus (vrt. [2, s. 483]). Jos E on injektiivinen, niin väite seuraa suoraan injektiivisen modulin määritelmästä.

Oletetaan sitten, että jokainen R-homomorfismi $f\colon I \to E$ voidaan laajentaa R-homomorfismiksi $R \to E$. Todistus perustuu Zornin lemmaan. Jos B on moduli ja A sen alimoduli sekä $f\colon A \to E$ R-homomorfismi, niin meillä on kaavio.

$$\begin{tikzcd}
 & E & \\
0 \arrow[r] & A \arrow[u, "f"] \arrow[r, "i"'] & B
\end{tikzcd}$$

Määritellään osittainjärjestys joukkoon

$$X = \{\, (A', g) \mid A \subseteq A' \subseteq B \text{ ja } g\colon A' \to E,\ g|A = f\}$$

asettamalla

$$(A', g') \leq (A'', g'') \quad \Longleftrightarrow \quad A' \subseteq A'' \text{ ja } g''|A' = g'.$$

Toisin sanoen kuvaus g'' laajentaa kuvausta g'. On helppo huomata, että $X \neq \emptyset$ ja relaatio $\leq$ on todella osittainjärjestys. Jotta voidaan soveltaa Zornin lemmaa, täytyy joukon X ketjujen olla ylhäältä rajoitettuja. Olkoon siis $C \subseteq X$ epätyhjä ketju. Merkitään

$$C = \{\, (A_j, g_j) \mid j \in J\}.$$

Nyt $\bigcup_{j\in J} A_i$ on modulin B alimoduli, sillä $A_p \subseteq A_q$ tai $A_q \subseteq A_p$ kaikilla $p, q \in J$. Lisäksi kuvaus $g\colon \bigcup_{j\in J} A_j \to E, g(x) = g_k(x)$ kaikilla $x \in A_k$, on hyvinmääritelty, sillä C oli ketju. On siis löydetty ketjulle C yläraja. Joten Zornin lemman nojalla joukossa X on olemassa maksimaalinen alkio (A_0, g_0). Osoitetaan, että $A_0 = B$.

Tehdään vastaoletus, että $A_0 \neq B$. Siis on olemassa alkio $b \in B$ siten, että $b \notin A_0$. Merkitään

$$I_0 = \{r \in R \mid rb \in A_0\}$$

Tämä on renkaan R ideaali. Määritellään lisäksi kuvaus $h\colon I_0 \to E, h(r) = g_0(rb)$ kaikilla $r \in I_0$, joka on R-homomorfismi. Siis oletuksen nojalla h voidaan laajentaa R-homomorfismiksi $h^*\colon R \to E$.

Merkitään $A_1 = A_0 + \langle b \rangle$ ja

$$g_1 \colon A_1 \to E,\ g_1(a_0 + rb) = g_0(a_0) + rh^*(1).$$

kaikilla $a_0 \in A_0$ ja $r \in R$. Kuvaus g_1 on hyvinmääritelty. Nimittäin kun $a_0, a_0' \in A_0$ ja $r, r' \in R$ niin, että $a_0 + rb = a_0' + r'b$. Saadaan $(r' - r)b = a_0 - a_0' \in A_0$, joten $r' - r \in I_0$. Tästä seuraa, että

$$\begin{aligned} g_0(a_0) - g_0(a_0') &= g_0(a_0 - a_0') = g_0((r' - r)b) = h(r' - r) \\ &= h^*(r' - r) = (r' - r)h^*(1) = r'h^*(1) - rh^*(1). \end{aligned}$$

Siis $g_0(a_0) + rh^*(1) = g_0(a') + r'h^*(1)$ eli g_1 on hyvinmääritelty. Lisäksi g_1 on R-homomorfismi ja $g_1(a_0) = g_0(a_0)$ kaikilla $a_0 \in A_0$, joten $g_1|A_0 = g_0$. Siis $(A_0, g_0) < (A_1, g_1)$, mikä on ristiriidassa alkion (A_0, g_0) maksimaalisuuden kanssa. Näin ollen g_0 on R-homomorfismi $B \to E$, joka laajentaa kuvausta f. Joten moduli E on injektiivinen. □

Määritelmä 4.4. Olkoon R kokonaisalue ja D R-moduli. Tällöin modulin D sanotaan olevan *divisiibeli*, jos kaikilla $d \in D$ ja $r \in R \setminus \{0\}$ on olemassa $d' \in D$, jolla $d = rd'$.

Esimerkki 4.1. Rationaaliluvut $\mathbb{Q}$ on divisiibeli $\mathbb{Z}$-modulina.

Todistus. Olkoot $d \in \mathbb{Q}$ ja $r \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Merkitään $d' = r^{-1}d \in \mathbb{Q}$. Tällöin $rd' = rr^{-1}d = d$, joten $\mathbb{Q}$ on divisiibeli. □

Lause 4.14. *Olkoon R kokonaisalue ja D divisiibeli R-moduli. Olkoon lisäksi S modulin D alimoduli. Tällöin D/S on divisiibeli.*

Todistus (vrt. [2, s. 485]). Olkoon $d + S \in D/S$ ja $r \in R \setminus \{0\}$. Tällöin oletusksen nojalla on olemassa $d' \in D$, jolla $d = rd'$. Siis saadaan $d + S = rd' + S = r(d' + S)$ Joten R/S on divisiibeli. □

Lause 4.15. *Olkoon R kokonaisalue ja D_j ($j \in J$) divisiibeleitä moduleja. Tällöin $\bigoplus_{j \in J} D_j$ on divisiibeli.*

Todistus (vrt. [2, s. 485]). Olkoot $\sum_{j \in J} d_j \in \bigoplus_{j \in J} D_j$ ja $r \in R \setminus \{0\}$. Nyt oletuksen nojalla on olemassa $d_j' \in D_j$ siten, että $d_j = rd_j'$ kaikilla $j \in J$. Siis saadaan

$$\sum_{j \in J} d_j = \sum_{j \in J} rd_j' = r \sum_{j \in J} d_j'.$$

Joten $\bigoplus_{j \in J} D_j$ on divisiibeli. □

Lause 4.16. *Olkoon R kokonaisalue ja E injektiivinen R-moduli. Tällöin E on divisiibeli.*

Todistus (vrt. [2, s. 485]). Olkoon $e \in E$ ja $r \in R \setminus \{0\}$. Määritellään kuvaus

$$f : \langle r \rangle \to E, \quad f(ar) = ae$$

kaikilla $a \in R$. Tämä on hyvinmääritelty. Nimittäin kun $a, a' \in R$ siten, että $ar = a'r$, saadaan $a = a'$, koska R on kokonaisalue. Lisäksi f on R-homomorfismi. Joten Baerin kriteerin nojalla f voidaan laajentaa kuvaukseksi $f^* : R \to E$. Siis

$$e = f(r) = f^*(r) = rf^*(1),$$

missä $f^*(1) \in E$. Näin ollen E on divisiibeli. □

Lause 4.17. *Olkoon R pääideaalialue ja M R-moduli. Tällöin M on injektiivinen, jos ja vain jos M on divisiibeli.*

Todistus (vrt. [4, s. 87]). Jos M on injektiivinen, niin väite seuraa edellisestä lauseesta.

Oletetaan sitten, että M on divisiibeli. Todistetaan M injektiiviseksi käyttäen Baerin kriteeriä. Olkoon I renkaan R ideaali ja $f : I \to M$ R-homomorfismi. Nyt oletuksen nojalla R on pääideaalialue, joten $I = \langle r_0 \rangle$ jollakin $r_0 \in R$. Jos $r_0 = 0$, niin $I = \{0\}$, jolloin jokainen R-homomorfismi $R \to M$ laajentaa kuvausta f. Voidaan siis olettaa, että $r_0 \neq 0$.

Nyt $f(r_0) \in M$, joten oletuksen nojalla on olemassa $d' \in M$, jolla $f(r_0) = r_0 d'$. Määritellään kuvaus

$$g : R \to M, \quad g(r) = rd'$$

kaikilla $r \in R$. Kuvaus g selvästi R-homomorfismi. Lisäksi kun $x \in I$, niin $x = ar_0$ jollakin $a \in R$. Siis saadaan

$$g(x) = xd' = ar_0 d' = af(r_0) = f(ar_0) = f(x).$$

Joten g laajentaa kuvausta f. Nyt Baerin kriteerin nojalla M on injektiivinen. □

Lause 4.18. *Jokainen $\mathbb{Z}$-moduli M voidaan upottaa injektiiviseen $\mathbb{Z}$-moduliin. Toisin sanoen on olemassa injektiivinen $\mathbb{Z}$-moduli E ja injektiivinen $\mathbb{Z}$-homomorfismi $f : M \to E$.*

Todistus (vrt. [4, s. 95]). Olkoon M $\mathbb{Z}$-moduli. Tällöin lauseen 4.2 on olemassa vapaa $\mathbb{Z}$-moduli F ja sen alimoduli S, joilla $M \cong F/S$. Nyt lauseen 4.1 nojalla voidaan olettaa, että $F = \bigoplus_{j \in J} \mathbb{Z}$, jollakin indeksijoukolla J. Siis

$$M \cong F/S = \Big(\bigoplus_{j \in J} \mathbb{Z}\Big)/S \subseteq \Big(\bigoplus_{j \in J} \mathbb{Q}\Big)/S.$$

Todetaan vielä, että $\mathbb{Z}$-moduli $Q/S = \left(\bigoplus_{j \in J} \mathbb{Q}\right)/S$ on injektiivinen. Esimerkin 4.1 nojalla $\mathbb{Q}$ on divisiibeli $\mathbb{Z}$-modulina. Edelleen lauseen 4.15 nojalla Q on divisiibeli. Lopuksi lauseesta 4.14 seuraa, että Q/S on divisiibeli. Mutta nyt $\mathbb{Z}$ on pääideaalialue, jolloin lauseen 4.17 nojalla Q/S on injektiivinen. □

Kun R on rengas ja M R-moduli, niin merkitään

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, M) = \{f : R \to M \mid f \text{ on } \mathbb{Z}\text{-homomorfismi}\},$$

missä R ja M ovat tulkittu $\mathbb{Z}$-moduleiksi.

Lause 4.19. *Olkoon R rengas ja D divisiibeli $\mathbb{Z}$-moduli. Tällöin $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, D)$ on injektiivinen R-moduli, kun skalaarikertolasku määritellään kaikilla $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, D)$ ja $a \in R$*

$$(af)(r) = f(ra)$$

jokaisella $r \in R$.

Todistus (kts. [3, s. 122]). Sivuutetaan. □

Lause 4.20. *Olkoon R rengas. Tällöin jokainen R-moduli M voidaan upottaa injektiiviseen R-moduliin. Toisin sanoen on olemassa injektiivinen R-moduli E ja injektiivinen R-homomorfismi $f : M \to E$.*

Todistus (vrt. [3, s. 122]). Tulkitaan M $\mathbb{Z}$-moduliksi ja määritellään kuvaus $\varphi : M \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, M)$ asettamalla $\varphi(m) = \varphi_m$, missä $\varphi_m : R \to M$, $\varphi_m(r) = rm$. Kuvaus φ on ryhmähomomorfismi, joten se on myös $\mathbb{Z}$-homomorfismi. Lisäksi φ on injektio. Nimittäin kun $m, m' \in M$ siten, että $\varphi_m = \varphi_{m'}$, niin $rm = rm'$ kaikilla $r \in R$. Erityisesti kun $r = 1$, saadaan $m = m'$ eli φ on injektio.

Koska M tulkitaan $\mathbb{Z}$-moduliksi, niin lauseen 4.18 nojalla on olemassa $\mathbb{Z}$-moduli E ja injektiivinen $\mathbb{Z}$-homomorfimsi $i : M \to E$. Siis saadaan lyhyt eksakti jono

$$0 \to M \xrightarrow{i} E \xrightarrow{\pi} E/\mathrm{Im}(i) \to 0.$$

Kun tähän jonoon sovelletaan funktoria $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, \bullet)$, Saadaan eksakti jono

$$0 \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, M) \xrightarrow{i^*} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, E) \xrightarrow{\pi^*} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, E/\mathrm{Im}(i)).$$

Siis jonon eksaktisuuden nojalla i^* on injektio, jolloin $\mathbb{Z}$-homomorfismi $i^*\varphi$ on myös injektio.

Osoitetaan vielä, että $i^*\varphi$ on R-homomorfismi. Olkoot siis $a, r \in R$ ja $m \in M$. Nyt R-modulin $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, D)$ skalaarikertolaskun määritelmästä seuraa, että $a(i^*(\varphi_m)(r)) = i^*(\varphi_m)(ra)$. Joten myös $a(i\varphi_m)(r) = i\varphi_m(ra)$. Siis saadaan

$$\begin{aligned}(i^*\varphi(am))(r) &= (i^*(\varphi_{am}))(r) = i\varphi_{am}(r) = i(r(am)) = i((ra)m) \\ &= i\varphi_m(ra) = a(i\varphi_m)(r) = a(i^*(\varphi_m))(r) = a(i^*\varphi(m))(r).\end{aligned}$$

Näin ollen $i^*\varphi(am) = ai^*\varphi(m)$ eli $i^*\varphi$ on R-homomorfismi. Joten R-moduli M upotettiin injektiiviseen R-moduliin $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, E)$. □

Lause 4.21. *Olkoon R rengas ja E R-moduli. Tällöin E on injektiivinen, jos ja vain jos jokainen eksakti jono,*

$$0 \to E \xrightarrow{f} A \xrightarrow{g} B \to 0$$

R-moduleita ja R-homomorfismeja, lohkeaa.

Todistus (vrt. [4, s. 82]). Oletetaan aluksi, että E on injektiivinen. Olkoot A ja B R-moduleita sekä $f: E \to A$ ja $g: A \to B$ R-homomorfismeja siten, että jono

$$0 \to E \xrightarrow{f} A \xrightarrow{g} B \to 0$$

on eksakti. Nyt oletuksen nojalla E on injektiivinen, joten on olemassa R-homomorfismi $\alpha: A \to E$, jolla $1_E = \alpha f$. Jolloin saadaan kommutoiva kaavio

$$\begin{tikzcd}
 & E & & & \\
0 \arrow[r] & E \arrow[u, "1_E"] \arrow[r, "f"] & A \arrow[ul, dashed, "\alpha"'] \arrow[r, "g"] & B \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

missä vaakarivi on eksakti. Siis lauseen 3.2 nojalla lyhyt eksakti jono

$$0 \to E \xrightarrow{f} A \xrightarrow{g} B \to 0$$

lohkeaa.

Oletetaan sitten, että kaikki lyhyet eksaktit jonot

$$0 \to E \xrightarrow{f} A \xrightarrow{g} B \to 0$$

lohkeavat. Nyt edellisen lauseen nojalla E voidaan upottaa injektiiviseen moduliin. Joten on olemassa injektiivinen R-moduli E' ja injektiivinen R-homomorfismi $f: E \to E'$. Nyt saadaan eksakti jono

$$0 \to E \xrightarrow{f} E' \xrightarrow{\pi} E'/\operatorname{Im}(f) \to 0.$$

Siis oletuksen nojalla jono lohkeaa, joten lauseesta 3.4 seuraa, että

$$E' \cong E \oplus E'/\operatorname{Im}(f).$$

Nyt lauseen 4.12 nojalla E on injektiivinen. $\square$

5 Ketjukompleksit

5.1 Homologia

Määritelmä 5.1. Olkoon R rengas. Olkoot lisäksi C_n ($n \in \mathbb{Z}$) R-moduleita ja kuvaukset $d_n \colon C_n \to C_{n-1}$ R-homomorfismeja kaikilla $n \in \mathbb{Z}$. Sanotaan, että näiden muodostama jono $(C_\bullet, d_\bullet) = ((C_n, d_n))_{n\in\mathbb{Z}}$

$$C_\bullet\colon \qquad \ldots \to C_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} C_n \xrightarrow{d_n} C_{n-1} \to \ldots$$

on *ketjukompleksi*, jos $d_n \circ d_{n+1} = 0$ kaikilla $n \in \mathbb{Z}$. Tässä esiintyviä R-homomorfismeja $d_n \colon C_n \to C_{n-1}$ kutsutaan *reunakuvauksiksi*. Lisäksi moduleilla C_n ($n \in \mathbb{Z}$) on alimoduleina *syklit* $Z_n(C_\bullet) = \mathrm{Ker}(d_n)$ ja *reunat* $B_n(C_\bullet) = \mathrm{Im}(d_{n+1})$.

Huomautus. Jos $(C_\bullet, d_\bullet) = ((C_n, d_n))_{n\in\mathbb{Z}}$ on ketjukompleksi, niin $B_n(C_\bullet) \subseteq Z_n(C_\bullet)$ jokaisella $n \in \mathbb{Z}$.

Todistus. Olkoon $x \in B_n(C_\bullet) = \mathrm{Im}(d_{n+1})$. Siis on olemassa sellainen $y \in C_{n+1}$, että $x = d_{n+1}(y)$. Joten saadaan

$$d_n(x) = d_n(d_{n+1}(x)) = d_n d_{n+1}(x) = 0(x) = 0.$$

Täten $x \in \mathrm{Ker}(d_n) = Z_n(C_\bullet)$. □

Määritelmä 5.2. Olkoon $(C_\bullet, d_\bullet) = ((C_n, d_n))_{n\in\mathbb{Z}}$ ketjukompleksi. Tällöin sen *homologiamodulit* ovat

$$H_n(C_\bullet) = Z_n(C_\bullet)/B_n(C_\bullet),$$

missä $n \in \mathbb{Z}$.

Määritelmä 5.3. Olkoon R rengas. Olkoot lisäksi C^n ($n \in \mathbb{Z}$) R-moduleita ja kuvaukset $d^n \colon C^n \to C^{n+1}$ R-homomorfismeja kaikilla $n \in \mathbb{Z}$. Sanotaan, että näiden muodostama jono $(C^\bullet, d^\bullet) = ((C^n, d^n))_{n\in\mathbb{Z}}$

$$C^\bullet\colon \qquad \ldots \to C^{n-1} \xrightarrow{d^{n-1}} C^n \xrightarrow{d^n} C^{n+1} \to \ldots$$

on *koketjukompleksi*, jos $d^n \circ d^{n-1} = 0$ kaikilla $n \in \mathbb{Z}$. Lisäksi moduleilla C^n on alimoduleina *kosyklit* $Z^n(C^\bullet) = \mathrm{Ker}(d^n)$ ja *koreunat* $B^n(C^\bullet) = \mathrm{Im}(d^{n-1})$.

Huomautus. Jos $(C^\bullet, d^\bullet) = ((C^n, d^n))_{n\in\mathbb{Z}}$ on koketjukompleksi, niin $B^n(C^\bullet) \subseteq Z^n(C^\bullet)$ jokaisella $n \in \mathbb{Z}$.

Määritelmä 5.4. Olkoon $(C^\bullet, d^\bullet) = ((C^n, d^n))_{n\in\mathbb{Z}}$ koketjukompleksi. Tällöin sen *kohomologiamodulit* ovat

$$H^n(C^\bullet) = Z^n(C^\bullet)/B^n(C^\bullet),$$

missä $n \in \mathbb{Z}$.

Huomautus. Jos $(C^\bullet, d^\bullet) = ((C^n, d^n))_{n\in\mathbb{Z}}$ koketjukompleksi, niin siitä saadaan ketjukompleksi $(C_\bullet, d_\bullet) = ((C_n, d_n))_{n\in\mathbb{Z}}$, kun $C_n = C^{-n}$ ja $d_n = d^{-n}$.

$$\begin{tikzcd}
\dots \arrow[r] & C^{n-1} \arrow[r, "d^{n-1}"] \arrow[d, equal] & C^n \arrow[r, "d^n"] \arrow[d, equal] & C^{n+1} \arrow[r] \arrow[d, equal] & \dots \\
\dots \arrow[r] & C_{-n+1} \arrow[r, "d_{-n+1}"] & C_{-n} \arrow[r, "d_{-n}"] & C_{-n-1} \arrow[r] & \dots
\end{tikzcd}$$

Tämän takia seuraavien lauseiden ja määritelmien vastinenita ei esitetä.

Määritelmä 5.5. Olkoon R rengas, $(C_\bullet, d_\bullet) = ((C_n, d_n))_{n\in\mathbb{Z}}$ ja $(C'_\bullet, d'_\bullet) = ((C'_n, d'_n))_{n\in\mathbb{Z}}$ R-modulien ja R-homomorfismien ketjukomplekseja. Tällöin kuvausten jonoa, $f_\bullet = (f_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, missä $f_n\colon C_n \to C'_n$ jokaisella $n \in \mathbb{Z}$, sanotaan *ketjukuvaukseksi*, jos

$$d'_n f_n = f_{n-1} d_n$$

kaikilla $n \in \mathbb{Z}$. Toisin sanoen seuraava kaavio kommutoi:

$$\begin{tikzcd}
\dots \arrow[r] & C_{n+1} \arrow[r, "d_{n+1}"] \arrow[d, "f_{n+1}"] & C_n \arrow[r, "d_n"] \arrow[d, "f_n"] & C_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "f_{n-1}"] & \dots \\
\dots \arrow[r] & C'_{n+1} \arrow[r, "d'_{n+1}"] & C'_n \arrow[r, "d'_n"] & C'_{n-1} \arrow[r] & \dots
\end{tikzcd}$$

Lause 5.1. *Olkoon R rengas. Tällöin R-modulien ja R-homomorfismien ketjukompleksit muodostavat kategorian, kun morfismeina on ketjukuvaukset.*

Todistus (vrt. [2, s. 817]). Kun $(C_\bullet, d_\bullet), (C'_\bullet, d'_\bullet)$ ja $(C''_\bullet, d''_\bullet)$ ovat ketjukomplekseja sekä $f_\bullet\colon C_\bullet \to C'_\bullet$ ja $g_\bullet\colon C'_\bullet \to C''_\bullet$ ovat ketjukuvauksia, niin näiden yhdiste, määritellään $(g_\bullet f_\bullet)_n = g_n f_n$ kaikilla $n \in \mathbb{Z}$.

Pitää osoittaa kolme asiaa: kahden ketjukuvauksen yhdiste on ketjukuvaus, morfismien yhdistäminen on liitännäinen operaatio ja että on olemassa identtinen morfismi. Ensinnäkin morfismien yhdistämisen liitännäisyys seuraa suoraan kuvausten liitännäisyydestä ja yhdisteen määritelmästä.

Nyt saadaan

$$\begin{aligned}
d''_n(g_\bullet f_\bullet)_n &= d''_n(g_n f_n) = (d''_n g_n) f_n = (g_{n-1} d'_n) f_n = g_{n-1}(d'_n f_n) \\
&= g_{n-1}(f_{n-1} d_n) = (g_{n-1} f_{n-1}) d_n = (g_\bullet f_\bullet)_{n-1} d_n.
\end{aligned}$$

Siis ketjukuvausten $f_\bullet$ ja $g_\bullet$ yhdiste on ketjukuvaus.

Osoitetaan lopuksi, että jono $1_{C_\bullet} = (1_{C_n})_{n\in\mathbb{Z}}$ on identtinen morfismi. Ensinnäkin $(1_{C_n})_{n\in\mathbb{Z}}$ on ketjukuvaus. Nimittäin

$$d_n 1_{C_n} = d_n = 1_{C_{n-1}} d_n.$$

Todetaan lopuksi, että

$$(f_\bullet 1_{C_\bullet})_n = f_n 1_{C_n} = f_n \quad \text{ja} \quad (1_{C'_\bullet} f_\bullet)_n = 1_{C'_n} f_n = f_n$$

jokaisella $n \in \mathbb{Z}$. Joten $f_\bullet 1_{C_\bullet} = f_\bullet$ ja $1_{C'_\bullet} f_\bullet = f_\bullet$. □

Ketjukompleksien kategoriasta käytetään usein merkintää **Ch**, ${}_R$**Comp** tai **Comp**. Kun R rengas, $(C_\bullet, d_\bullet)$ ja $(C'_\bullet, d'_\bullet)$ R-modulien ja R-homomorfismien ketjukomplekseja sekä $f_\bullet, f'_\bullet\colon C_\bullet \to C'_\bullet$ ketjukuvauksia, niin määritellään ketjukuvausten summa asettamalla

$$(f_\bullet + f'_\bullet)_n = f_n + f'_n$$

kaikilla $n \in \mathbb{Z}$.

Lause 5.2. *Olkoon R rengas, $(C_\bullet, d_\bullet)$ ja $(C'_\bullet, d'_\bullet)$ R-modulien ja R-homomorfismien ketjukomplekseja. Olkoon lisäksi $f_\bullet\colon C_\bullet \to C'_\bullet$ ketjukuvaus. Tällöin*

a) $f_n(Z_n(C_\bullet)) \subseteq Z_n(C'_\bullet)$,

b) $f_n(B_n(C_\bullet)) \subseteq B_n(C'_\bullet)$.

Todistus (vrt. [2, s. 818]). a) Olkoon $z \in Z_n(C_\bullet)$. Siis $d_n(z) = 0$. Nyt

$$d'_n(f_n(z)) = f_{n-1}d_n(z) = f_{n-1}(0) = 0.$$

Joten $f_n(z) \in \mathrm{Ker}(d'_n) = Z_n(C'_\bullet)$. Näin ollen $f_n(Z_n(C_\bullet)) \subseteq Z_n(C'_\bullet)$

b) Olkoon $z \in B_n(C_\bullet)$. Siis $z = d_{n+1}(y)$ jollakin $y \in C_{n+1}$. Nyt

$$f_n(z) = f_n(d_{n+1}(y)) = d'_{n+1}(f_{n+1}(y)) \in \mathrm{Im}(d'_{n+1}) = B_n(C'_\bullet).$$

Joten $f_n(B_n(C_\bullet)) \subseteq B_n(C'_\bullet)$. □

Lause 5.3. *Olkoon R rengas, $(C_\bullet, d_\bullet)$ ja $(C'_\bullet, d'_\bullet)$ R-modulien ja R-homomorfismien ketjukomplekseja. Olkoon lisäksi $f_\bullet\colon C_\bullet \to C'_\bullet$ ketjukuvaus. Tällöin $f_\bullet$ indusoi R-homomorfismit*

$$H_n(f_\bullet)\colon H_n(C_\bullet) \to H_n(C'_\bullet),$$

missä jokaisella $z \in Z_n(C_\bullet)$,

$$H_n(f_\bullet)(z + B_n(C_\bullet)) = f_n(z) + B_n(C'_\bullet).$$

Todistus (vrt. [2, s. 818]). Osoitetaan aluksi, että kuvaus $H_n(f_\bullet)$ on hyvinmääritelty. Ensinnäkin edellisen lauseen nojalla $f_n(Z_n(C_\bullet)) \subseteq Z_n(C'_\bullet)$, joten $f_n(z) + B_n(C'_\bullet) \in H_n(C'_\bullet)$ kaikilla $z \in Z_n(C_\bullet)$.

Todetaan sitten, että kuva ei riipu sivuluokan edustajan valinnasta. Olkoot siis $z_1, z_2 \in Z_n(C_\bullet)$ niin, että $z_1 + B_n(C_\bullet) = z_2 + B_n(C_\bullet)$. Siis $z_1 - z_2 \in B_n(C_\bullet)$. Nyt edellisen lauseen nojalla

$$f_n(z_1) - f_n(z_2) = f_n(z_1 - z_2) \in f_n(B_n(C_\bullet)) \subseteq B_n(C'_\bullet).$$

Näin ollen $f_n(z_1) + B_n(C'_\bullet) = f_n(z_2) + B_n(C'_\bullet)$.

Osoitetaan lopuksi, että $H_n(f_\bullet)$ on R-homomorfismi. Olkoot $z_1, z_2 \in Z_n(C_\bullet)$ ja $r \in R$. Tällöin

$$\begin{aligned}
&H_n(f_\bullet)((z_1 + B_n(C_\bullet)) + (z_2 + B_n(C_\bullet))) \\
&= H_n(f_\bullet)((z_1 + z_2) + B_n(C_\bullet)) = f_n(z_1 + z_2) + B_n(C'_\bullet) \\
&= f_n(z_1) + f_n(z_2) + B_n(C'_\bullet) = (f_n(z_1) + B_n(C'_\bullet)) + (f_n(z_2) + B_n(C'_\bullet)) \\
&= H_n(f_\bullet)(z_1 + B_n(C_\bullet)) + H_n(f_\bullet)(z_2 + B_n(C_\bullet))
\end{aligned}$$

ja

$$
\begin{aligned}
&H_n(f_\bullet)(r(z_1 + B_n(C_\bullet))) \\
&= H_n(f_\bullet)(rz_1 + B_n(C_\bullet)) = f_n(rz_1) + B_n(C'_\bullet) = rf_n(z_1) + B_n(C'_\bullet) \\
&= r(f_n(z_1) + B_n(C'_\bullet)) = rH_n(f_\bullet)(z_1 + B_n(C_\bullet)).
\end{aligned}
$$

□

Lause 5.4. *Olkoon R rengas. Tällöin homologia*

$$H_n\colon {}_R\mathbf{Comp} \to {}_R\mathbf{Mod}$$

on additiivinen kovariantti funkori, kaikilla $n \in \mathbb{Z}$.

Todistus (vrt. [2, s. 818]). Osoitetataan aluksi, että H_n on funktori. Olkoon $(C_\bullet, d_\bullet)$, $(C'_\bullet, d'_\bullet)$ ja $(C''_\bullet, d''_\bullet)$ ketjukomplekseja sekä $f_\bullet\colon C_\bullet \to C'_\bullet$ ja $g_\bullet\colon C'_\bullet \to C''_\bullet$ ketjukuvauksia. Tällöin

$$H_n(1_{C_\bullet})(z + B_n(C_\bullet)) = 1_{C_n}(z) + B_n(C_\bullet) = z + B_n(C_\bullet)$$

kaikilla $z \in Z_n(C_\bullet)$, joten $H_n(1_{C_\bullet}) = 1_{H_n(C_\bullet)}$. Lisäksi

$$
\begin{aligned}
&H_n(g_\bullet f_\bullet)(z + B_n(C_\bullet)) \\
&= (g_\bullet f_\bullet)_n(z) + B_n(C''_\bullet) = g_n f_n(z) + B_n(C''_n) \\
&= H_n(g_\bullet)(f_n(z) + B_n(C'_\bullet)) = H_n(g_\bullet)(H_n(f_\bullet)(z + B_n(C_\bullet))) \\
&= H_n(g_\bullet)H_n(f_\bullet)(z + B_n(C_\bullet))
\end{aligned}
$$

kaikilla $z \in Z_n(C_\bullet)$, joten $H_n(g_\bullet f_\bullet) = H_n(g_\bullet)H_n(f_\bullet)$.

Todetaan lopuksi, että H_n on additiivinen. Olkoon siis $f'_\bullet\colon C_\bullet \to C'_\bullet$ toinen ketjukuvaus. Nyt

$$
\begin{aligned}
&H_n(f_\bullet + f'_\bullet)(z + B_n(C_\bullet)) \\
&= (f_\bullet + f'_\bullet)_n(z) + B_n(C'_\bullet) = (f_n + f'_n)(z) + B_n(C'_\bullet) \\
&= f_n(z) + f'_n(z) + B_n(C'_\bullet) = f_n(z) + B_n(C'_\bullet) + f'_n(z) + B_n(C_\bullet) \\
&= H_n(f_\bullet)(z + B_n(C_\bullet)) + H_n(f'_\bullet)(z + B_n(C_\bullet)) \\
&= (H_n(f_\bullet) + H_n(f'_\bullet))(z + B_n(C_\bullet))
\end{aligned}
$$

kaikilla $z \in Z_n(C_\bullet)$, joten $H_n(f_\bullet + f'_\bullet) = H_n(f_\bullet) + H_n(f'_\bullet)$. □

Määritelmä 5.6. Olkoon R rengas, $(C_\bullet, d_\bullet)$ ja $(C'_\bullet, d'_\bullet)$ R-modulien ja R-homomorfismien ketjukomplekseja. Olkoon lisäksi $f_\bullet\colon C_\bullet \to C'_\bullet$ ketjukuvaus. Tällöin ketjukuvausta $f_\bullet$ sanotaan *nollahomotooppiseksi*, jos on olemassa jono R-homomorfismeja $(h_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, missä $h_n\colon C_n \to C'_{n+1}$ niin, että

$$f_n = d'_{n+1}h_n + h_{n-1}d_n$$

kaikilla $n \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{tikzcd}
\dots \arrow[r] & C_{n+1} \arrow[r, "d_{n+1}"] \arrow[d, "f_{n+1}"] & C_n \arrow[r, "d_n"] \arrow[d, "f_n"] \arrow[dl, "h_n"] & C_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "f_{n-1}"] \arrow[dl, "h_{n-1}"] & \dots \\
\dots \arrow[r] & C'_{n+1} \arrow[r, "d'_{n+1}"'] & C'_n \arrow[r, "d'_n"'] & C'_{n-1} \arrow[r] & \dots
\end{tikzcd}$$

Ketjukuvauksia $f_\bullet, g_\bullet \colon C_\bullet \to C'_\bullet$ sanotaan *homotoopisiksi*, $f_\bullet \simeq g_\bullet$, jos $f_\bullet - g_\bullet$ on nollahomotooppinen.

Lause 5.5. *Olkoon R rengas, $(C_\bullet, d_\bullet)$ ja $(C'_\bullet, d'_\bullet)$ R-modulien ja R-homomorfismien ketjukomplekseja. Jos $f_\bullet, g_\bullet \colon C_\bullet \to C'_\bullet$ ovat homotooppisia ketjukuvauksia, niin ne indusoivat saman R-homomorfismin homologiamodulien välille eli $H_n(f_\bullet) = H_n(g_\bullet)$ jokaisella $n \in \mathbb{Z}$.*

Todistus (vrt. [4, s. 112]). Nyt oletuksen nojalla on olemassa jono R-homomorfismeja $(h_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, joilla

$$f_n - g_n = d'_{n+1}h_n + h_{n-1}d_n$$

kaikilla $n \in \mathbb{Z}$. Olkoon $z \in Z_n(C_\bullet)$. Saadaan

$$\begin{aligned}
&H_n(f_\bullet)(z + B_n(C_\bullet)) \\
&= f_n(z) + B_n(C'_\bullet) = (g_n + d'_{n+1}h_n + h_{n-1}d_n)(z) + B_n(C'_\bullet) \\
&= g_n(z) + d'_{n+1}h_n(z) + h_{n-1}d_n(z) + B_n(C'_\bullet) \\
&= g_n(z) + d'_{n+1}h_n(z) + h_{n-1}(0) + B_n(C'_\bullet) \\
&= g_n(z) + d'_{n+1}h_n(z) + B_n(C'_\bullet) \\
&= g_n(z) + B_n(C'_\bullet) = H_n(g_\bullet)(z + B_n(C_\bullet)).
\end{aligned}$$

Siis $H_n(f_\bullet) = H_n(g_\bullet)$. □

5.2 Pitkät eksaktit jonot

Määritelmä 5.7. Jonoa ketjukomplekseja ja ketjukuvauksia

$$0_\bullet \to C'_\bullet \xrightarrow{f_\bullet} C_\bullet \xrightarrow{g_\bullet} C''_\bullet \to 0_\bullet$$

sanotaan *lyhyeksi eksaktiksi jonoksi*, jos jonot

$$0 \to C'_n \xrightarrow{f_n} C_n \xrightarrow{g_n} C''_n \to 0$$

ovat eksakteja kaikilla $n \in \mathbb{Z}$. Toisin sanoen kaavio

$$\begin{tikzcd}
 & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & C'_{n+1} \arrow[r, "f_{n+1}"] \arrow[d, "d'_{n+1}"] & C_{n+1} \arrow[r, "g_{n+1}"] \arrow[d, "d_{n+1}"] & C''_{n+1} \arrow[r] \arrow[d, "d''_{n+1}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & C'_n \arrow[r, "f_n"] \arrow[d, "d'_n"] & C_n \arrow[r, "g_n"] \arrow[d, "d_n"] & C''_n \arrow[r] \arrow[d, "d''_n"] & 0 \\
0 \arrow[r] & C'_{n-1} \arrow[r, "f_{n-1}"] \arrow[d] & C_{n-1} \arrow[r, "g_{n-1}"] \arrow[d] & C''_{n-1} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{tikzcd}$$

kommutoi ja sen rivit ovat eksakteja.

Lause 5.6. *Olkoon R rengas ja*

$$0_\bullet \to C'_\bullet \xrightarrow{f_\bullet} C_\bullet \xrightarrow{g_\bullet} C''_\bullet \to 0_\bullet$$

lyhyt eksakti jono ketjukomplekseja ja ketjukuvauksia. Tällöin on olemassa sellainen jono R-homomorfismeja $\partial_n \colon H_n(C''_\bullet) \to H_{n-1}(C'_\bullet)$, että jono

$$\ldots \to H_{n+1}(C''_\bullet) \xrightarrow{\partial_{n+1}} H_n(C'_\bullet) \xrightarrow{H_n(f_\bullet)} H_n(C_\bullet) \xrightarrow{H_n(g_\bullet)} H_n(C''_\bullet) \xrightarrow{\partial_n} H_{n-1}(C'_\bullet) \to \ldots$$

on eksakti

Todistus (vrt. [1, s. 49]). Meillä on kommutoiva kaavio

$$\begin{tikzcd}
 & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & C'_{n+1} \arrow[r, "f_{n+1}"] \arrow[d, "d'_{n+1}"] & C_{n+1} \arrow[r, "g_{n+1}"] \arrow[d, "d_{n+1}"] & C''_{n+1} \arrow[r] \arrow[d, "d''_{n+1}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & C'_n \arrow[r, "f_n"] \arrow[d, "d'_n"] & C_n \arrow[r, "g_n"] \arrow[d, "d_n"] & C''_n \arrow[r] \arrow[d, "d''_n"] & 0 \\
0 \arrow[r] & C'_{n-1} \arrow[r, "f_{n-1}"] \arrow[d] & C_{n-1} \arrow[r, "g_{n-1}"] \arrow[d] & C''_{n-1} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{tikzcd}$$

Meidän täytyy ensin määritellä kuvaus ∂_n. Olkoon $x \in Z_n(C''_\bullet)$. Tällöin toisen rivin eksaktisuuden nojalla kuvaus g_n on surjektio, joten on olemassa sellainen $y \in C_n$, että $x = g_n(y)$. Nyt $d_n \colon C_n \to C_{n-1}$, joten $d_n(y) \in C_{n-1}$. Havaitaan, että

$$g_{n-1}(d_n(y)) = d''_n(g_n(y)) = d''_n(x) = 0,$$

sillä $x \in Z_n(C''_\bullet)$. Siis $d_n(y) \in \mathrm{Ker}(g_{n-1})$. Nyt kolmannen rivin eksaktisuuden nojalla $\mathrm{Ker}(g_{n-1}) = \mathrm{Im}(f_{n-1})$, joten on olemassa $z \in C'_{n-1}$, jolla $d_n(y) = f_{n-1}(z)$. Todetaan seuraavaksi, että $z \in Z_{n-1}(C'_\bullet)$. Nyt

$$f_{n-2}(d'_{n-1}(z)) = d_{n-1}(f_{n-1}(z)) = d_{n-1}(d_n(y)) = 0.$$

Siis $d'_{n-1}(z) \in \mathrm{Ker}(f_{n-2})$. Mutta rivien eksaktisuuden nojalla, kuvaus f_{n-2} on injektio eli $\mathrm{Ker}(f_{n-2}) = \{0\}$. Näin ollen $d'_{n-2}(z) = 0$, joten $z \in \mathrm{Ker}(d'_{n-1}) = Z_{n-1}(C'_\bullet)$. Asetetaan

$$\partial_n \colon H_n(C''_n) \to H_{n-1}(C'_\bullet), \quad \partial_n(x + B_n(C''_\bullet)) = z + B_{n-1}(C'_\bullet).$$

Osoitetaan, että kuvaus ∂_n on hyvinmääritelty. Täytyy todeta kolme asiaa. Ensinnäkin, että $z + B_{n-1}(C'_\bullet)$ ei riipu alkion $z \in C'_{n-1}$ valinnasta, toiseksi, että $z + B_{n-1}(C'_\bullet)$ ei riipu alkion $y \in C_n$ valinnasta ja kolmanneksi, että $z + B_{n-1}(C'_\bullet)$ ei riipu alkion $x \in Z_n(C''_\bullet)$ sivuluokan edustajan valinnasta. Näistä ensimmäinen on triviaali, sillä kuvaus f_{n-1} on injektio.

Olkoot sitten $y, y' \in C_n$ niin, että $g_n(y) = x = g_n(y')$, $d_n(y) = f_{n-1}(z)$ ja $d_n(y') = f_{n-1}(z')$, missä $z, z' \in Z'_{n-1}$. Osoitetaan, että $z + B_{n-1}(C'_\bullet) = z' + B_{n-1}(C'_\bullet)$. Nyt $g_n(y - y') = 0$ eli $y - y' \in \mathrm{Ker}(g_n)$. Nyt eksaktisuuden nojalla $y - y' \in \mathrm{Im}(f_n)$, joten on olemassa sellainen $u \in C'_n$, että $y - y' = f_n(u)$. Saadaan

$$\begin{aligned} f_{n-1}(z - z') &= f_{n-1}(z) - f_{n-1}(z') = d_n(y) - d_n(y') = d_n(y - y') \\ &= d_n(f_n(u)) = f_{n-1}(d'_n(u)). \end{aligned}$$

Siis kuvauksen f_{n-1} injektiivisyyden nojalla $z - z' = d'_n(u) \in B_{n-1}(C'_\bullet)$. Näin ollen $z + B_{n-1}(C'_\bullet) = z' + B_{n-1}(C'_\bullet)$.

Olkoon sitten $x' \in Z''_n$ siten, että $x + B_n(C''_\bullet) = x' + B_n(C''_\bullet)$. Siis $x' - x \in B_n(C''_\bullet)$, joten on olemassa sellainen $c \in C''_{n+1}$, että $x' - x = d''_{n+1}(c)$. Nyt kuvauksen g_{n+1} surjektiivisuuden nojalla on olemassa $u \in C_{n+1}$, jolla $c = g_{n+1}(u)$. Saadaan

$$x' - x = d''_{n+1}(c) = d''_{n+1}(g_{n+1}(u)) = g_n(d_{n+1}(u)).$$

Nyt koska $x = g_n(y)$, niin

$$x' = x + g_n(d_{n+1}(u)) = g_n(y) + g_n(d_{n+1}(u)) = g_n(y + d_{n+1}(u)).$$

Siis edellä todetun nojalla alkion $y \in C_n$ valinnalla ei ole merkitystä, joten voidaan valita $y' = y + d_{n+1}(u)$. Tällöin alkiolle $z' \in C'_{n-1}$ on voimassa

$$\begin{aligned} f_{n-1}(z') &= d_n(y') = d_n(y + d_{n+1}(u)) = d_n(y) + d_n(d_{n+1}(u)) \\ &= d_n(y) + 0 = d_n(y) = f_{n-1}(z), \end{aligned}$$

joten kuvauksen f_{n-1} injektiivisyyden nojalla $z' = z$.

Ollaan siis osoitettu, että ∂_n on kuvaus $H_n(C''_\bullet) \to H_{n-1}(C'_\bullet)$. Osoitetaan seuraavaksi, että ∂_n on R-homomorfismi. Olkoot $x, x' \in Z_n(C''_\bullet)$ ja $r \in R$. Nyt on olemassa kuvauksen ∂_n konstruktiossa esiintyneet $y, y' \in C_n$ ja $z, z' \in Z_{n-1}(C'_\bullet)$, joille

$$x = g_n(y),\ x' = g_n(y'),\ d_n(y) = f_{n-1}(z),\ d_n(y') = f_{n-1}(z').$$

Siis

$$\begin{aligned} x + x' &= g_n(y) + g_n(y') = g_n(y + y'), \\ d_n(y + y') &= d_n(y) + d_n(y') = f_{n-1}(z) + f_{n-1}(z') = f_{n-1}(z + z'). \end{aligned}$$

Joten

$$\begin{aligned} &\partial_n((x + B_n(C''_\bullet)) + (x' + B_n(C''_\bullet))) \\ &= \partial_n(x + x' + B_n(C''_\bullet)) = z + z' + B_{n-1}(C'_\bullet) \\ &= (z + B_{n-1}(C'_\bullet) + (z' + B_{n-1}(C'_\bullet)) \\ &= \partial_n(x + B_n(C''_\bullet)) + \partial_n(x + B_n(C''_\bullet)). \end{aligned}$$

Lisäksi

$$\begin{aligned} rx &= rg_n(y) = g_n(ry), \\ d_n(ry) &= rd_n(y) = rf_{n-1}(z) = f_{n-1}(rz). \end{aligned}$$

Joten

$$\begin{aligned} &\partial_n(r(x + B_n(C''_\bullet))) \\ &= \partial_n(rx + B_n(C''_\bullet)) = rz + B_{n-1}(C'_\bullet) \\ &= r(z + B_{n-1}(C'_\bullet)) = r\partial_n(x + B_n(C''_\bullet)). \end{aligned}$$

Siis kuvaus ∂_n on R-homomorfismi.

Osoitetaan sitten, että jono

$$\ldots \to H_{n+1}(C''_\bullet) \xrightarrow{\partial_{n+1}} H_n(C'_\bullet) \xrightarrow{H_n(f_\bullet)} H_n(C_\bullet) \xrightarrow{H_n(g_\bullet)} H_n(C''_\bullet) \xrightarrow{\partial_n} H_{n-1}(C'_\bullet) \to \ldots$$

on eksakti.

- $\mathrm{Im}(\partial_{n+1}) \subseteq \mathrm{Ker}(H_n(f_\bullet))$:
  Olkoon $x' + B_n(C'_\bullet) \in \mathrm{Im}(\partial_{n+1})$. Siis on olemassa sellainen $x \in Z_{n+1}(C''_\bullet)$, että $x' + B_n(C'_\bullet) = \partial_{n+1}(x + B_{n+1}(C''_\bullet))$. Edelleen on olemassa sellaiset $y \in C_{n+1}$ ja $z \in Z_n(C'_\bullet)$, että $x = g_{n+1}(y)$ ja $d_{n+1}(y) = f_n(z)$. Saadaan

$$\begin{aligned} &H_n(f_\bullet)(x' + B_n(C'_\bullet)) \\ &= H_n(f_\bullet)(\partial_{n+1}(x + B_{n+1}(C''_\bullet)) = H_n(f_\bullet)(z + B_n(C'_\bullet)) \\ &= f_n(z) + B_n(C_\bullet) = d_{n+1}(y) + B_n(C_\bullet) = B_n(C_\bullet) = 0. \end{aligned}$$

  Siis $x' + B_n(C'_\bullet) \in \mathrm{Ker}(H_n(f_\bullet))$.

- $\mathrm{Ker}(H_n(f_\bullet)) \subseteq \mathrm{Im}(\partial_{n+1})$:
  Olkoon $z + B_n(C'_\bullet) \in \mathrm{Ker}(H_n(f_\bullet))$. Siis

$$0 = H_n(f_\bullet)(z + B_n(C'_\bullet)) = f_n(z) + B_n(C_\bullet),$$

  joten $f_n(z) \in B_n(C_\bullet)$. Näin ollen on olemassa sellainen $y \in C_{n+1}$, että $f_n(z) = d_{n+1}(y)$. Nyt $g_{n+1}(y) \in C''_{n+1}$, mutta lisäksi

$$d''_{n+1}(g_{n+1}(y)) = g_n(d_{n+1}(y)) = g_n(f_n(z)) = 0.$$

  Siis $g_{n+1}(y) \in Z_{n+1}(C''_\bullet)$. Näin ollen $z + B_n(C'_\bullet) = \partial_{n+1}(g_{n+1}(y) + B_{n+1}) \in \mathrm{Im}(\partial_{n+1})$.

- $\mathrm{Im}(H_n(f_\bullet)) \subseteq \mathrm{Ker}(H_n)(g_\bullet)$:
  Nyt

$$H_n(g_\bullet) \circ H_n(f_\bullet) = H_n(g_\bullet \circ f_\bullet) = H_n(0_\bullet) = 0,$$

  joten $\mathrm{Im}(H_n(f_\bullet)) \subseteq \mathrm{Ker}(H_n)(g_\bullet)$.

- $\mathrm{Ker}(H_n(g_\bullet)) \subseteq \mathrm{Im}(H_n(f_\bullet))$:
  Olkoon $y + B_n(C_\bullet) \in \mathrm{Ker}(H_n(g_\bullet))$. Siis

$$0 = H_n(g_\bullet)(y + B_n(C_\bullet)) = g_n(y) + B_n(C''_\bullet),$$

  joten $g_n(y) \in B_n(C''_\bullet)$. Näin ollen on olemassa sellainen $x \in C''_{n+1}$, että $g_n(y) = d''_{n+1}(x)$. Nyt kuvauksen g_{n+1} surjektiivisuuden nojalla, on olemassa sellainen $y' \in C_{n+1}$, että $x = g_{n+1}(y')$. Saadaan

$$g_n(y) = d''_{n+1}(x) = d''_{n+1}(g_{n+1}(y')) = g_n(d_{n+1}(y')),$$

joten $g_n(y - d_{n+1}(y')) = 0$. Siis $y - d_{n+1}(y') \in \mathrm{Ker}(g_n)$, mutta eksaktisuuden nojalla $\mathrm{Ker}(g_n) = \mathrm{Im}(f_n)$. Joten on olemassa sellainen $z \in C'_n$, että $y - d_{n+1}(y') = f_n(z)$. Lisäksi

$$\begin{aligned} f_{n-1}(d'_n(z)) = d_n(f_n(z)) &= d_n(y - d_{n+1}(y')) \\ &= d_n(y) + d_n(d_{n+1}(y')) = 0 + 0 = 0, \end{aligned}$$

joten kuvauksen f_{n-1} injektiivisyyden nojalla $d_n(z) = 0$ eli $z \in \mathrm{Ker}(d'_n) = Z_n(C'_\bullet)$. Näin ollen

$$\begin{aligned} &H_n(f_\bullet)(z + B_n(C'_\bullet)) \\ &= f_n(z) + B_n(C_\bullet) = y - d_{n+1}(y') + B_n(C_\bullet) = y + B_n(C_\bullet) \end{aligned}$$

Siis $y + B_n(C_\bullet) \in \mathrm{Im}(H_n(f_\bullet))$.

- $\mathrm{Im}(H_n(g_\bullet)) \subseteq \mathrm{Ker}(\partial_n)$:
  Olkoon $x + B_n(C''_\bullet) \in \mathrm{Im}(H_n(g_\bullet))$. Siis on olemassa sellainen $y \in Z_n(C_\bullet)$, että $x + B_n(C''_\bullet) = H_n(g_\bullet)(y + B_n(C_\bullet)) = g_n(y) + B_n(C''_\bullet)$. Siis saadaan

  $$\partial_n(x + B_n(C''_\bullet)) = \partial_n(g_n(y) + B_n(C''_\bullet)) = z + B_n(C'_\bullet),$$

  missä $f_{n-1}(z) = d_n(y) = 0$. Siis kuvauksen f_{n-1} injektiivisyyden nojalla $z = 0$. Joten $x + B_n(C''_\bullet) \in \mathrm{Ker}(\partial_n)$.

- $\mathrm{Ker}(\partial_n) \subseteq \mathrm{Im}(H_n(g_\bullet))$
  Olkoon $x + B_n(C''_\bullet) \in \mathrm{Ker}(\partial_n)$. Siis $\partial_n(x + B_n(C''_\bullet)) = 0$. Jos $y \in C_n$ ja $z \in Z_{n-1}(C'_\bullet)$ siten, että $x = g_n(y)$ ja $d_n(y) = f_{n-1}(z)$, niin tällöin

  $$0 = \partial_n(x + B_n(C''_\bullet)) = z + B_{n-1}(C'_\bullet).$$

  Joten $z \in B_{n-1}(C'_\bullet)$ eli on olemassa sellainen $z' \in C'_n$, että $z = d'_n(z')$. Siis

  $$d_n(y) = f_{n-1}(z) = f_{n-1}(d'_n(z')) = d_n(f_n(z')),$$

  joten $d_n(y - f_n(z')) = 0$ eli $y - f_n(z') \in \mathrm{Ker}(d_n) = Z_n(C_\bullet)$. Nyt

  $$\begin{aligned} &H_n(g_\bullet)(y - f_n(z') + B_n(C_\bullet)) \\ &= g_n(y - f_n(z')) + B_n(C''_\bullet) = g_n(y) - g_n(f_n(z')) + B_n(C''_\bullet) \\ &= g_n(y) + 0 + B_n(C''_\bullet) = x + B_n(C''_\bullet) \end{aligned}$$

  Siis $x + B_n(C''_\bullet) \in \mathrm{Im}(H_n(g_\bullet))$.

Näin ollen jono

$$\ldots \to H_{n+1}(C''_\bullet) \xrightarrow{\partial_{n+1}} H_n(C'_\bullet) \xrightarrow{H_n(f_\bullet)} H_n(C_\bullet) \xrightarrow{H_n(g_\bullet)} H_n(C''_\bullet) \xrightarrow{\partial_n} H_{n-1}(C'_\bullet) \to \ldots$$

on eksakti. □

Määritelmä 5.8. Edellisen lauseen R-homomorfismeja ∂_n kutsutaan *yhdistäviksi homomorfismeiksi*.

Lause 5.7 (∂_n luonnollinen)**.** *Jos kaavio*

$$\begin{tikzcd}
0_\bullet \arrow[r] & C'_\bullet \arrow[r, "i_\bullet"] \arrow[d, "f_\bullet"] & C_\bullet \arrow[r, "p_\bullet"] \arrow[d, "g_\bullet"] & C''_\bullet \arrow[r] \arrow[d, "h_\bullet"] & 0_\bullet \\
0_\bullet \arrow[r] & A'_\bullet \arrow[r, "i'_\bullet"] & A_\bullet \arrow[r, "p'_\bullet"] & A''_\bullet \arrow[r] & 0_\bullet
\end{tikzcd}$$

jossa rivit ovat eksakteja, kommutoi, niin myös kaavio

$$\begin{tikzcd}
\dots \arrow[r] & H_n(C'_\bullet) \arrow[r, "H_n(i_\bullet)"] \arrow[d, "H_n(f_\bullet)"] & H_n(C_\bullet) \arrow[r, "H_n(p_\bullet)"] \arrow[d, "H_n(g_\bullet)"] & H_n(C''_\bullet) \arrow[r, "\partial_n"] \arrow[d, "H_n(h_\bullet)"] & H_{n-1}(C'_\bullet) \arrow[r] \arrow[d, "H_{n-1}(f_\bullet)"] & \dots \\
\dots \arrow[r] & H_n(A'_\bullet) \arrow[r, "H_n(i'_\bullet)"] & H_n(A_\bullet) \arrow[r, "H_n(p'_\bullet)"] & H_n(A''_\bullet) \arrow[r, "\partial'_n"] & H_{n-1}(A'_\bullet) \arrow[r] & \dots
\end{tikzcd}$$

jossa rivit ovat eksakteja, kommutoi.

Todistus (vrt. [2, s. 826]). Ensinnäkin kaavion rivit ovat eksakteja edellisen lauseen nojalla.

Alkuperäinen kaavio kommutoi, joten $i'_\bullet f_\bullet = g_\bullet i_\bullet$ ja $p'_\bullet g_\bullet = h_\bullet p_\bullet$. Siis

$$H_n(i'_\bullet)H_n(f_\bullet) = H_n(i'_\bullet f_\bullet) = H_n(g_\bullet i_\bullet) = H_n(g_\bullet)H_n(i_\bullet),$$
$$H_n(p'_\bullet)H_n(g_\bullet) = H_n(p'_\bullet g_\bullet) = H_n(h_\bullet p_\bullet) = H_n(h_\bullet)H_n(p_\bullet),$$

sillä H_n on funktori. Joten kaavion kaksi ensimmäistä neliötä kommutoivat.

Osoitetaan lopuksi, että kolmaskin neliö kommutoi. Olkoon $x \in Z_n(C''_\bullet)$. Nyt $\partial_n(x + B_n(C''_\bullet)) = z + B_{n-1}(C'_\bullet)$, missä $i_{n-1}(z) = d_n(y)$ ja $x = p_n(y)$ ($y \in C_n$). Joten

$$H_{n-1}(f_\bullet)(\partial_n(x + B_n(C''_\bullet))) = H_{n-1}(f_\bullet)(z + B_{n-1}(C'_\bullet)) = f_{n-1}(z) + B_{n-1}(A'_\bullet).$$

Toisaalta $H_n(h_\bullet)(x + B_n(C''_\bullet)) = h_n(x) + B_n(A''_\bullet)$ ja edelleen

$$\partial'_n(H_n(h_\bullet)(x + B_n(C''_\bullet)) = \partial'_n(h_n(x) + B_n(A''_\bullet)) = z' + B_{n-1}(A'_\bullet),$$

missä $i'_{n-1}(z') = \delta_n(y')$ ja $h_n(x) = p'_n(y')$ ($y' \in A_n$). Tässä δ_n on reunakuvaus $A_n \to A_{n-1}$. Nyt

$$h_n(x) = h_n(p_n(y)) = p'_n(g_n(y)),$$

joten voidaan valita $y' = g_n(y)$. Siis

$$i'_{n-1}(z') = \delta_n(y') = \delta_n(g_n(y)) = g_{n-1}(d_n(y)) = g_{n-1}((i_{n-1})(z)) = i'_{n-1}(f_{n-1}(z)),$$

joten kuvauksen i_{n-1} injektiivisyyden nojalla $z' = f_{n-1}(z)$. Näin ollen $\partial'_n \circ H_n(h_\bullet) = H_{n-1}(f_\bullet) \circ \partial_n$ eli kolmaskin neliö kommutoi. □

Lause 5.8. *Olkoon R rengas ja*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A' \arrow[r] \arrow[d, "f"] & A \arrow[r] \arrow[d, "g"] & A'' \arrow[r] \arrow[d, "h"] & 0 \\
0 \arrow[r] & B' \arrow[r] & B \arrow[r] & B'' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

kommutoiva kaavio R-moduleita ja R-homomorfismeja, missä rivit ovat eksakteja. Tällöin on olemassa eksakti jono

$$0 \to \mathrm{Ker}(f) \to \mathrm{Ker}(g) \to \mathrm{Ker}(h) \to \mathrm{Coker}(f) \to \mathrm{Coker}(g) \to \mathrm{Coker}(h) \to 0.$$

Todistus (vrt. [2, s. 826]). Kaavion sarakkeet muodostavat kolme ketjukompleksia, joissa on kaksi nollasta eroavaa termiä. Joten saadaan ketjukompleksien lyhyt eksakti jono. On helppo huomata, että homologia kohdassa A' on $\mathrm{Ker}(f)$ ja kohdassa B' se on $\mathrm{Coker}(f)$. Vastaavasti kohdissa A, B, A'' ja B''. Siis lauseen 5.6 nojalla on olemassa pitkä eksakti jono

$$0 \to \mathrm{Ker}(f) \to \mathrm{Ker}(g) \to \mathrm{Ker}(h) \to \mathrm{Coker}(f) \to \mathrm{Coker}(g) \to \mathrm{Coker}(h) \to 0.$$

□

Itseasiassa edelliselle lauseelle saadaan "vahvempi"muotoilu.

Lause 5.9. *Olkoon R rengas ja*

$$\begin{tikzcd}
 & A' \arrow[r] \arrow[d, "f"] & A \arrow[r] \arrow[d, "g"] & A'' \arrow[r] \arrow[d, "h"] & 0 \\
0 \arrow[r] & B' \arrow[r] & B \arrow[r] & B'' &
\end{tikzcd}$$

kommutoiva kaavio R-moduleita ja R-homomorfismeja, missä rivit ovat eksakteja. Tällöin on olemassa eksakti jono

$$\mathrm{Ker}(f) \to \mathrm{Ker}(g) \to \mathrm{Ker}(h) \to \mathrm{Coker}(f) \to \mathrm{Coker}(g) \to \mathrm{Coker}(h).$$

Todistus (vrt. [4, s. 101]). Sivuutetaan. □

6 Resoluutiot

6.1 Projektiiviset resoluutiot

Määritelmä 6.1. Olkoon R rengas ja M R-moduli. Sanotaan, että eksakti jono

$$\mathbf{P}\colon \quad \ldots \to P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{\varepsilon} M \to 0$$

on R-modulin M *projektiivinen resoluutio*, jos R-modulit P_i ovat projektiivisia jokaisella $i \in \mathbb{N}$. Lisäksi sanotaan, että ketjukompleksi

$$\mathbf{P}_M\colon \quad \ldots \to P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \to 0$$

on R-modulin M *katkaistu projektiivinen resoluutio*.

Lause 6.1. *Jos R on rengas, niin jokaisella R-modulilla M on olemassa projektiivinen resoluutio.*

Todistus (vrt. [4, s. 118]). Olkoon M R-moduli. Todistetaan väite induktiolla. Nyt lauseen 4.9 nojalla on olemassa projektiivinen R-moduli P_0 ja surjektiivinen R-homomorfismi $\varepsilon\colon P_0 \to M$. Siis saadaan eksakti jono

$$P_0 \xrightarrow{\varepsilon} M \to 0.$$

Oletetaan sitten, että meillä on eksakti jono

$$P_n \xrightarrow{d_n} P_{n-1} \to \ldots \to P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{\varepsilon} M \to 0,$$

missä modulit P_i ovat projektiivisia kaikilla $i = 0, \ldots, n$. Sovelletaan uudestaan lausetta 4.9, mutta tällä kertaa moduliin $\mathrm{Ker}(d_n)$. Siis on olemassa projektiivinen R-moduli P_{n+1} ja surjektiivinen R-homomorfismi $\delta_n\colon P_{n+1} \to \mathrm{Ker}(d_n)$. Joten saadaan kaavio

$$\begin{tikzcd}
P_{n+1} \arrow[rr, dashed, "d_{n+1}"] \arrow[dr, "\delta_{n+1}"'] & & P_n \arrow[r, "d_n"] & P_{n-1} \arrow[r] & \ldots \arrow[r] & P_0 \arrow[r, "\varepsilon"] & M \arrow[r] & 0 \\
& \mathrm{Ker}(d_n) \arrow[ur, "i_n"'] & & & & & &
\end{tikzcd}$$

Merkitään $d_{n+1} = i_n \delta_{n+1}$. Joten

$$\mathrm{Im}(d_{n+1}) = \mathrm{Im}(i_n \delta_{n+1}) = \mathrm{Im}(i_n) = \mathrm{Ker}(d_n),$$

sillä δ_{n+1} on surjektio. Näin ollen jono

$$P_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} P_n \xrightarrow{d_n} P_{n-1} \to \ldots \to P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{\varepsilon} M \to 0,$$

on eksakti.

Siis induktioperiaatteen nojalla modulilla M on olemassa projektiivinen resoluutio. □

Lause 6.2. *Olkoon R rengas, A, B ja C R-moduleita sekä P projektiivinen R-moduli. Olkoot lisäksi $g\colon A \to B$, $h\colon B \to C$ ja $f\colon P \to B$ R-homomorfismeja niin, että kaavion*

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dashed, "\alpha"'] \arrow[d, "f"] & \\ A \arrow[r, "g"'] & B \arrow[r, "h"'] & C \end{tikzcd}$$

rivi on eksakti ja $hf = 0$. Tällöin on olemassa sellainen R-homomorfismi $\alpha\colon P \to A$, että $f = g\alpha$.

Todistus (vrt. [4, s. 74]). Nyt R-homomorfismi g indusoi kuvauksen $\bar{g}\colon A \to \mathrm{Im}(g)$. Tämä on titenkin hyvinmääritelty sekä R-homomorfismi. Joten voidaan merkitä $g = i\bar{g}$, missä $i\colon \mathrm{Im}(g) \to B$ on inkluusio.

Lisäksi määritellään kuvaus $\bar{f}\colon P \to \mathrm{Im}(g)$, $\bar{f}(x) = f(x)$. Ehdosta $hf = 0$ seuraa, että $\mathrm{Im}(f) \subseteq \mathrm{Ker}(h) = \mathrm{Im}(g)$, joka varmistaa, että kuvaus $\bar{f}$ on hyvinmääritelty. Tietenkin se on myös R-homomorfismi, joten voidaan merkitä $f = i\bar{f}$.

Siis saadaan kaavio

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dashed, "\alpha"'] \arrow[d, "\bar{f}"] & \\ A \arrow[r, "\bar{g}"'] & \mathrm{Im}(g) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Näin ollen modulin P projektiivisuuden nojalla on olemassa sellainen R-homomorfismi $\alpha\colon P \to A$, että $\bar{f} = \bar{g}\alpha$. Joten

$$f = i\bar{f} = i\bar{g}\alpha = g\alpha.$$

□

Lause 6.3 (Vertailulause)**.** *Olkoon R rengas A ja A' R-moduleita sekä $f\colon A \to A'$ R-homomorfismi. Oletetaan, että meillä on kaavio*

$$\begin{tikzcd} \dots \arrow[r] & P_2 \arrow[r, "d_2"] & P_1 \arrow[r, "d_1"] & P_0 \arrow[r, "\varepsilon"] & A \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\ \dots \arrow[r] & X_2 \arrow[r, "d_2'"] & X_1 \arrow[r, "d_1'"] & X_0 \arrow[r, "\varepsilon'"] & A' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

missä rivit ovat ketjukomplekseja, ylärivin modulit P_i ovat projektiivisia jokaisella $i \in \mathbb{N}$ ja alempi rivi on eksakti. Tällöin on olemassa ketjukuvaus $f_\bullet\colon \mathbf{P}_A \to \mathbf{X}_{A'}$, jolla $\varepsilon' f_0 = f\varepsilon$. Lisäksi ketjukuvaukset, jotka toteuttavat nämä ehdot, ovat homotooppisia.

Todistus (vrt. [2, s. 832]). Todistetaan ketjukuvauksen $f_\bullet$ olemassaolo induktiolla. Nyt koska P_0 on projektiivinen ja $f\varepsilon\colon P_0 \to A'$ R-homomorfismi sekä ε' on surjektiivinen R-homomorfismi, niin on olemassa sellainen R-homomorfismi $f_0\colon P_0 \to X_0$, että $\varepsilon' f_0 = f\varepsilon$.

$$
\begin{tikzcd}
 & P_0 \arrow[dl, dashed, "f_0"'] \arrow[d, "f\varepsilon"] & \\
X_0 \arrow[r, "\varepsilon'"] & A' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
$$

Oletetaan sitten, että meillä on jo kuvaukset $f_i\colon P_i \to X_i$, $i = 0, \dots, n$, joilla

$$d'_i f_i = f_{i-1} d_i \text{ kaikilla } i = 0, \dots, n \text{ ja } \varepsilon' f_0 = f\varepsilon.$$

$$
\begin{tikzcd}
\dots \arrow[r] & P_{n+1} \arrow[r, "d_{n+1}"] & P_n \arrow[r, "d_n"] \arrow[d, "f_n"] & P_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "f_{n-1}"] & \dots \\
\dots \arrow[r] & X_{n+1} \arrow[r, "d'_{n+1}"] & X_n \arrow[r, "d'_n"] & X_{n-1} \arrow[r] & \dots
\end{tikzcd}
$$

Meidän on löydettävä R-homomorfismi $f_{n+1}\colon P_{n+1} \to X_{n+1}$. Ensinnäkin

$$d'_n(f_n d_{n+1}) = f_{n-1} d_n d_{n-1} = f_{n-1} 0 = 0$$

Joten edellisen lauseen nojalla on olemassa sellainen R-homomorfismi $f_{n+1}\colon P_{n+1} \to X_{n+1}$, että $f_n d_{n+1} = d'_{n-1} f_{n+1}$.

$$
\begin{tikzcd}
 & P_{n+1} \arrow[dl, dashed, "f_{n+1}"'] \arrow[d, "f_n d_{n+1}"] & \\
X_{n+1} \arrow[r, "d'_{n-1}"'] & X_n \arrow[r, "d'_n"'] & X_{n-1}
\end{tikzcd}
$$

Siis induktioperiaatteen nojalla on löydetty haluttu ketjukuvaus.

Osoitetaan lopuksi induktiolla, että tälläiset ketjukuvaukset ovat homotooppisia. Olkoon $g_\bullet\colon \mathbf{P}_A \to \mathbf{X}'_A$ toinen tälläinen ketjukuvaus. Meidän täytyy määritellä jono R-homomorfismeja $s_i\colon P_i \to X_{i+1}$, jolla $f_i - g_i = d'_{i+1} s_i + s_{i-1} d_i$ kaikilla $i \in \mathbb{N}$. Määritellään $s_{-1} = 0$, missä $s_{-1}\colon A \to X_0$. Nyt

$$\varepsilon'(f_0 - g_0) = \varepsilon' f_0 - \varepsilon' g_0 = f\varepsilon - f\varepsilon = 0,$$

joten saadaan edellisen lauseen mukainen kaavio

$$
\begin{tikzcd}
 & P_0 \arrow[dl, dashed, "s_1"'] \arrow[d, "f_0 - g_0"] & \\
X_1 \arrow[r, "d'_1"'] & X_0 \arrow[r, "d'_\varepsilon"'] & A'
\end{tikzcd}
$$

Siis on olemassa sellainen R-homomorfismi $s_1 \colon P_0 \to X_1$, että $f_0 - g_0 = d'_1 s_1 = d'_1 s_1 + s_{-1} d_0$.

Oletetaan sitten, että meillä on jo kuvaukset $s_i \colon P_i \to X_{i+1}$, joilla

$$\begin{cases} f_i - g_i = d'_{i+1} s_i + s_{i-1} d_i, & \text{kun } i = 1, \dots, n, \\ f_0 - g_0 = d'_1 s_0 + s_{-1}\varepsilon. \end{cases}$$

Todetaan, että

$$\begin{aligned} & d'_{n+1}(f_{n+1} - g_{n+1} - s_n d_{n+1}) \\ &= d'_{n+1} f_{n+1} - d'_{n+1} g_{n+1} - d'_{n+1} s_n d_{n+1} \\ &= f_n d_{n+1} - g_n d_{n+1} - d'_{n+1} s_n d_{n+1} \\ &= (f_n - g_n - d'_{n+1} s_n) d_{n+1} \\ &= s_{n-1} d_n d_{n+1} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Joten edellisen lauseen nojalla on olemassa sellainen R-homomorfismi $s_{n+1} \colon P_{n+1} \to X_{n+2}$, että $f_{n+1} - g_{n+1} - s_n d_{n+1} = d'_{n+2} s_{n+1}$.

$$\begin{tikzcd} & P_{n+1} \arrow[dl, dashed, "s_{n+1}"'] \arrow[d, "f_{n+1}-g_{n+1}-s_n d_{n+1}"] & \\ X_{n+2} \arrow[r, "d'_{n+2}"'] & X_{n+1} \arrow[r, "d'_{n+1}"'] & X_n \end{tikzcd}$$

Siis induktioperiaatteen nojalla ketjukuvaukset $f_\bullet$ ja $g_\bullet$ ovat homotooppisia.

□

Määritelmä 6.2. Olkoon R rengas, A ja A' R-moduleita sekä $f \colon A \to A'$ R-homomorfismi. Olkoot lisäksi $\mathbf{P}$ modulin A ja $\mathbf{P}'$ modulin A' projektiiviset resoluutiot. Tällöin ketjukuvauksen $f_\bullet \colon \mathbf{P}_A \to \mathbf{P}'_{A'}$

$$\begin{tikzcd} \dots \arrow[r] & P_2 \arrow[r, "d_2"] \arrow[d, "f_2"] & P_1 \arrow[r, "d_1"] \arrow[d, "f_1"] & P_0 \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, "f_0"] & A \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\ \dots \arrow[r] & P'_2 \arrow[r, "d'_2"] & P'_1 \arrow[r, "d'_1"] & P'_0 \arrow[r, "\varepsilon'"] & A' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

sanotaan olevan *yli kuvauksen* f, jos

$$\varepsilon' f_0 = f\varepsilon.$$

6.2 Injektiiviset resoluutiot

Määritelmä 6.3. Olkoon R rengas ja M R-moduli. Sanotaan, että eksakti jono

$$\mathbf{E}\colon \quad 0 \to M \xrightarrow{\eta} E^0 \xrightarrow{d^0} E^1 \xrightarrow{d^1} E^2 \to \dots$$

on R-modulin M *injektiivinen resoluutio*, jos R-modulit E^i ovat injektiivisiä jokaisella $i \in \mathbb{N}$. Lisäksi sanotaan, että koketjukompleksi

$$\mathbf{E}^M\colon \quad 0 \to E_0 \xrightarrow{d^0} E_1 \xrightarrow{d^1} E_2 \to \dots$$

on R-modulin M *katkaistu injektiivinen resoluutio*.

Lause 6.4. *Jos R on rengas, niin jokaisella R-modulilla M on olemassa injektiivinen resoluutio.*

Todistus (vrt. [2, s. 814]). Olkoon M R-moduli. Todistetaan väite induktiolla. Nyt lauseen 4.20 nojalla on olemassa injektiivinen R-moduli E^0 ja injektiivinen R-homomorfismi $\eta\colon M \to E^0$. Siis saadaan eksakti jono

$$0 \to M \xrightarrow{\eta} E^0.$$

Oletetaan sitten, että meillä on eksakti jono

$$0 \to M \to E_0 \xrightarrow{d^0} E_1 \to \dots \to E^{n-1} \xrightarrow{d^{n-1}} E^n,$$

missä modulit E^i ovat injektiivisiä kaikilla $i = 0, \dots, n$. Sovelletaan uudestaan lausetta 4.20, mutta tällä kertaa moduliin $E^n / \operatorname{Im}(d^{n-1})$. Siis on olemassa injektiivinen R-moduli E^{n+1} ja injektiivinen R-homomorfismi $\delta_n\colon E^n / \operatorname{Im}(d^{n-1}) \to E^{n+1}$. Joten saadaan kaavio

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M \arrow[r, "\eta"] & E^0 \arrow[r] & \dots \arrow[r] & E^{n-1} \arrow[r, "d^{n-1}"] & E^n \arrow[rr, dashed, "d^n"] \arrow[dr, "\pi_n"'] & & E^{n+1} \\
& & & & & & E^n / \operatorname{Im}(d^{n-1}) \arrow[ur, "\delta_n"'] &
\end{tikzcd}$$

Merkitään $d^n = \delta_n \pi_n$. Joten

$$\operatorname{Ker}(d^n) = \operatorname{Ker}(\delta_n \pi_n) = \operatorname{Ker}(\pi_n) = \operatorname{Im}(d^{n-1}),$$

sillä δ_n on injektio. Näin ollen jono

$$0 \to M \to E_0 \xrightarrow{d^0} E_1 \to \dots \to E^{n-1} \xrightarrow{d^{n-1}} E^n \xrightarrow{d^n} E^{n+1}$$

on eksakti.

Siis induktioperiaatteen nojalla modulilla M on olemassa injektiivinen resoluutio.

$\square$

Lause 6.5. *Olkoon R rengas ja A, B ja C R-moduleita sekä E injektiivinen R-moduli. Olkoot lisäksi $g\colon A \to B$, $h\colon B \to C$ ja $f\colon B \to E$ R-homomorfismeja niin, että kaavion*

$$\begin{tikzcd} & E & \\ A \arrow[r, "g"'] & B \arrow[u, "f"] \arrow[r, "h"'] & C \arrow[ul, dashed, "\alpha"'] \end{tikzcd}$$

rivi on eksakti ja $fg = 0$. Tällöin on olemassa sellainen R-homomorfismi $\alpha\colon C \to E$, että $f = \alpha h$.

Todistus (vrt. [4, s. 81]). Nyt R-homomorfismi h indusoi kuvauksen $\bar{h}\colon B/\mathrm{Ker}(h) \to E$, $\bar{h}(x + \mathrm{Ker}(h)) = h(x)$. Tämä on tietenkin hyvinmääritelty ja R-homomorfismi. Siis voidaan merkitä $h = \bar{h}\pi$, missä $\pi\colon B \to B/\mathrm{Ker}(h)$ on kanoninen surjektio.

Lisäksi määritelään kuvaus $\bar{f}\colon B/\mathrm{Ker}(h) \to E$, $\bar{f}(x + \mathrm{Ker}(h)) = f(x)$. Ehdosta $fg = 0$ seuraa, että $\mathrm{Ker}(h) = \mathrm{Im}(g) \subseteq \mathrm{Ker}(f)$, joka varmistaa, että kuvaus $\bar{f}$ on hyvinmääritelty. Tietenkin se on myös R-homomorfismi, joten voidaan merkitä $f = \bar{f}\pi$.

Siis saadaan kaavio

$$\begin{tikzcd} & E & \\ 0 \arrow[r, "g"'] & B/\mathrm{Ker}(h) \arrow[u, "\bar{f}"] \arrow[r, "\bar{h}"'] & C \arrow[ul, dashed, "\alpha"'] \end{tikzcd}$$

Näin ollen modulin E injektiivisyyden nojalla on olemassa sellainen R-homomorfismi $\alpha\colon C \to E$, että $\bar{f} = \alpha\bar{h}$. Joten

$$f = \bar{f}\pi = \alpha\bar{h}\pi = \alpha h.$$

□

Lause 6.6 (Vertailulause)**.** *Olkoon R rengas A ja A' R-moduleita sekä $f\colon A \to A'$ R-homomorfismi. Oletetaan, että meillä on kaavio*

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "\eta'"] & E^0 \arrow[r, "\delta^0"] & E^1 \arrow[r, "\delta^1"] & E^2 \arrow[r] & \dots \\ 0 \arrow[r] & A \arrow[u, "f"] \arrow[r, "\eta"] & X^0 \arrow[r, "d^0"] & X^1 \arrow[r, "d^1"] & X^2 \arrow[r] & \dots \end{tikzcd}$$

missä rivit ovat koketjukomplekseja, ylärivin modulit E^i ovat injektiivisiä jokaisella $i \in \mathbb{N}$ ja alempi rivi on eksakti. Tällöin on olemassa koketjukuvaus $f^\bullet\colon \mathbf{X}^A \to \mathbf{E}^{A'}$, jolla $\eta' f = f^0\eta$. Lisäksi ketjukuvaukset, jotka toteuttavat nämä ehdot, ovat homotooppisia.

Todistus (vrt. [4, s. 123]). Todistetaan ketjukuvauksen $f^\bullet$ olemassaolo induktiolla. Nyt koska E^0 on injektiivinen ja $\eta' f \colon A \to E^0$ on R-homomorfismi sekä η on injektiivinen R-homomorfismi, niin on olemassa sellainen R-homomorfismi $f^0 \colon X^0 \to E^0$, että $\eta' f = f^0 \eta$.

$$\begin{tikzcd}
 & E^0 & \\
0 \arrow[r] & A \arrow[u, "\eta' f"] \arrow[r, "\eta"'] & X^0 \arrow[ul, dashed, "f^0"']
\end{tikzcd}$$

Oletetaan sitten, että meillä on jo kuvaukset $f^i \colon X^i \to E^i$, $i = 0, \ldots, n$, joilla

$$\delta^i f^i = f^{i+1} d^i \ \text{ kaikilla } i = 0, \ldots, n \ \text{ ja } \ \eta' f = f^0 \eta.$$

$$\begin{tikzcd}
\ldots \arrow[r] & X^{n-1} \arrow[r, "d^{n-1}"] \arrow[d, "f^{n-1}"] & X^n \arrow[r, "d^n"] \arrow[d, "f^n"] & X^{n+1} \arrow[r] & \ldots \\
\ldots \arrow[r] & E^{n-1} \arrow[r, "\delta^{n-1}"] & E^n \arrow[r, "\delta^n"] & E^{n+1} \arrow[r] & \ldots
\end{tikzcd}$$

Meidän on löydettävä R-homomorfismi $f^{n+1} \colon X^{n+1} \to E^{n+1}$. Nyt kaaviossa

$$\begin{tikzcd}
 & E^{n+1} & \\
X^{n-1} \arrow[r, "d^{n-1}"] & X^n \arrow[u, "\delta^n f^n"] \arrow[r, "d^n"'] & X^{n+1} \arrow[ul, dashed, "f^{n+1}"']
\end{tikzcd}$$

rivi on eksakti, E^{n+1} on injektiivinen sekä

$$(\delta^n f^n) d^{n-1} = \delta^n \delta^{n-1} f^{n-1} = 0 f^{n-1} = 0.$$

Joten edellisen lauseen nojalla on olemassa sellainen R-homomorfismi $f^{n+1} \colon X^{n+1} \to E^{n+1}$, että $\delta^n f^n = f^{n+1} d^n$. Siis induktioperiaatteen nojalla on löydetty haluttu ketjukuvaus.

Osoitetaan lopuksi induktiolla, että tälläiset ketjukuvaukset ovat homotooppisia. Olkoon $g^\bullet \colon \mathbf{X}^A \to \mathbf{E}^{A'}$ toinen tälläinen ketjukuvaus. Meidän täytyy määritellä jono R-homomorfismeja $s^i \colon X^i \to E^{i-1}$, jolla $f^i - g^i = \delta^{i-1} s^i + s^{i+1} d^i$ kaikilla $i \in \mathbb{N}$. Tässä $\delta^{-1} = \eta'$. Määritellään $s^0 = 0$, missä $s^0 \colon X^0 \to A'$. Nyt

$$(f^0 - g^0)\eta = f^0 \eta - g^0 \eta = \eta' f - \eta' f = 0,$$

joten saadaan edellisen lauseen mukainen kaavio

$$\begin{tikzcd}
 & E^0 & \\
A \arrow[r, "\eta"'] & X^0 \arrow[u, "f^0 - g^0"] \arrow[r, "d^0"'] & X^1 \arrow[ul, dashed, "s^1"']
\end{tikzcd}$$

Siis on olemassa sellainen R-homomorfismi $s^1 \colon X^1 \to E^0$, että $f^0 - g^0 = s^1 d^0 = \eta' s^0 + s^1 d^0$.

Oletetaan sitten, että meillä on jo kuvaukset $s_i \colon X^i \to E^{i-1}$, joilla

$$\begin{cases} f^i - g^i = \delta^{i-1} s^i + s^{i+1} d^i, & \text{kun } i = 1, \dots, n-1, \\ f^0 - g^0 = \eta' s^0 + s^1 d^0. \end{cases}$$

Todetaan, että

$$\begin{aligned} &(f^n - g^n - \delta^{n-1} s^n) d^{n-1} \\ &= f^n d^{n-1} - g^n d^{n-1} - \delta^{n-1} s^n d^{n-1} \\ &= \delta^{n-1} f^{n-1} - \delta^{n-1} g^{n-1} - \delta^{n-1} s^n d^{n-1} \\ &= \delta^{n-1} (f^{n-1} - g^{n-1} - s^n d^{n-1}) \\ &= \delta^{n-1} \delta^{i-2} s^{i-1} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Joten edellisen lauseen nojalla on olemassa sellainen R-homomorfismi $s^{n+1} \colon X^{n+1} \to E^n$, että $f^n - g^n - \delta^{n-1} s^n = s^{n+1} d^n$.

$$\begin{tikzcd} & E^n & \\ X^{n-1} \arrow[r, "d^{n-1}"'] & X^n \arrow[u, "f^n - g^n - \delta^{n-1} s^n"] \arrow[r, "d^n"'] & X^{n+1} \arrow[ul, dashed, "s^n"'] \end{tikzcd}$$

Siis induktioperiaatteen nojalla ketjukuvaukset $f^\bullet$ ja $g^\bullet$ ovat homotooppisia. $\square$

Määritelmä 6.4. Olkoon R rengas, A ja A' R-moduleita sekä $f \colon A \to A'$ R-homomorfismi. Olkoot lisäksi $\mathbf{E}$ modulin A ja $\mathbf{F}$ modulin A' injektiiviset resoluutiot. Tällöin ketjukuvauksen $f^\bullet \colon \mathbf{E}^A \to \mathbf{F}^{A'}$

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "\eta'"] & F^0 \arrow[r, "\delta^0"] & F^1 \arrow[r, "\delta^1"] & F^2 \arrow[r] & \dots \\ 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\eta"] \arrow[u, "f"] & E^0 \arrow[r, "d^0"] \arrow[u, "f^0"] & E^1 \arrow[r, "d^1"] \arrow[u, "f^1"] & E^2 \arrow[r] \arrow[u, "f^2"] & \dots \end{tikzcd}$$

sanotaan olevan *yli kuvauksen f*, jos

$$\eta' f = f^0 \eta.$$

7 Derivoidut funktorit

7.1 Additiiviset funktorit

Määritelmä 7.1. Olkoot R ja S renkaita sekä $T\colon {}_R\mathbf{Mod} \to {}_S\mathbf{Mod}$ (kovariantti tai kontravariantti) funktori. Sanotaan, että T on *additiivinen*, jos

$$T(f+g) = Tf + Tg$$

kaikilla $f, g\colon A \to B$, missä A ja B ovat R-moduleita.

Huomautus. Jos $T\colon {}_R\mathbf{Mod} \to {}_S\mathbf{Mod}$ additiivinen funktori, niin $T(0) = 0$.

Todistus. Nyt

$$T(0) = T(0+0) = T(0) + T(0),$$

joten $T(0) = 0$.

□

Lause 7.1. *Olkoot R ja S renkaita sekä $T\colon {}_R\mathbf{Mod} \to {}_S\mathbf{Mod}$ additiivinen funktori. Olkoot lisäksi $(C_\bullet, d_\bullet)$ ja $(C'_\bullet, d'_\bullet)$ R-modulien ja R-homomorfismien ketjukomplekseja ja $f_\bullet, g_\bullet\colon C_\bullet \to C'_\bullet$ ovat homotooppisia ketjukuvauksia, $f_\bullet \simeq g_\bullet$. Tällöin myös ketjukuvaukset $Tf_\bullet, Tg_\bullet\colon TC_\bullet \to TC'_\bullet$ ovat homotooppisia, $Tf_\bullet \simeq Tg_\bullet$.*
Tässä merkitään $Tf_\bullet = (Tf_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ ja $TC_\bullet = (TC_n)_{n\in\mathbb{Z}}$.

Todistus (vrt. [4, s. 113]). Todistetaan väite kovariantille funktorille. Nyt koska $f_\bullet$ ja $g_\bullet$ ovat homotooppisia, niin on olemassa sellainen jono R-homomorfismeja $(h_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, että

$$f_n - g_n = d'_{n+1}h_n + h_{n-1}d_n$$

jokaisella $n \in \mathbb{Z}$. Siis

$$\begin{aligned}
&Tf_n - Tg_n \\
&= T(f_n - g_n) = T(d'_{n+1}h_n + h_{n-1}d_n) = T(d'_{n+1}h_n) + T(h_{n-1}d_n) \\
&= Td'_{n+1}Th_n + Th_{n-1}Td_n,
\end{aligned}$$

Joten $Tf_\bullet \simeq Tg_\bullet$. □

Lause 7.2. *Olkoon R rengas sekä A, B ja M R-moduleita. Tällöin $M \cong A \oplus B$, jos ja vain jos on olemassa R-homomorfismit $i\colon A \to M, j\colon B \to M, p\colon M \to A$ ja $q\colon M \to B$, joilla on voimassa*

$$pi = 1_A,\ qj = 1_B,\ pj = 0,\ qi = 0 \text{ ja } ip + jq = 1_M.$$

Todistus (vrt. [2, s. 432]). Oletetaan aluksi, että $M \cong A \oplus B$. Siis on olemassa bijektiivinen R-homomorfismi $f\colon M \to A \oplus B$.

Merkitään

$$
\begin{aligned}
i_1 &\colon A \to A \oplus B, \quad i_1(x) = (x, 0)\\
i_2 &\colon B \to A \oplus B, \quad i_2(y) = (0, y)\\
p_1 &\colon A \oplus B \to A, \quad p_1(x, y) = x\\
p_2 &\colon A \oplus B \to A, \quad p_2(x, y) = y
\end{aligned}
$$

kaikilla $x \in A$ ja $y \in B$. Tällöin $i = f^{-1}i_1, j = f^{-1}i_2, p = p_1 f, q = p_2 f$ ovat sopivat kuvaukset.

Oletetaan sitten, että on olemassa R-homomorfismit $i\colon A \to M$, $j\colon B \to M$, $p\colon M \to A$ ja $q\colon M \to B$, joilla on voimassa

$$pi = 1_A,\ qj = 1_B,\ pj = 0,\ qi = 0 \text{ ja } ip + jq = 1_M.$$

Määritellään kuvaus $f\colon A \oplus B \to M$, asettamalla

$$f(x, y) = i(x) + j(y)$$

kaikilla $x \in A$, $y \in B$. Tämä on tietenkin R-homomorfismi. Todetaan vielä, että se on bijektio antamalla käänteiskuvaus. Olkoon $g\colon M \to A \oplus B$ R-homomorfismi, jolla

$$g(m) = (p(m), q(m))$$

kaikilla $m \in M$. Olkoon $x \in A$, $y \in B$ ja $m \in M$. Tällöin

$$
\begin{aligned}
(f \circ g)(m) &= f(p(m), q(m)) = ip(m) + jq(m) = (ip + jq)(m)\\
&= 1_M(m) = m,\\
(g \circ f)(x, y) &= g(i(x) + j(y)) = (p(i(x) + j(y)), q(i(x) + j(y)))\\
&= (pi(x) + pj(y), qi(x) + qj(y)) = (x + 0, 0 + y)\\
&= (x, y).
\end{aligned}
$$

Siis $f\colon A \oplus B \cong M$. □

Lause 7.3. *Olkoot R ja S renkaita, $T\colon {}_R\mathbf{Mod} \to {}_S\mathbf{Mod}$ additiivinen funktori sekä A ja B R-moduleita. Tällöin*

$$T(A \oplus B) \cong T(A) \oplus T(B)$$

Todistus (vrt. [2, s. 466]). Oletetaan, että T on kovariantti. Merkitään

$$
\begin{aligned}
i &\colon A \to A \oplus B, \quad i(x) = (x, 0)\\
j &\colon B \to A \oplus B, \quad j(y) = (0, y)\\
p &\colon A \oplus B \to A, \quad p(x, y) = x\\
q &\colon A \oplus B \to A, \quad q(x, y) = y
\end{aligned}
$$

kaikilla $x \in A$ ja $y \in B$. Näillä on voimassa

$$pi = 1_A,\ qj = 1_B,\ pj = 0,\ qi = 0 \text{ ja } ip + jq = 1_{A \oplus B}.$$

Nyt koska T on additiivinen funktori, saadaan

$$
\begin{aligned}
T(p)T(i) &= T(pi) = T(1_A) = 1_{T(A)}, \\
T(q)T(j) &= T(qj) = T(1_B) = 1_{T(B)}, \\
T(p)T(j) &= T(pj) = T(0) = 0, \\
T(q)T(i) &= T(qi) = T(0) = 0
\end{aligned}
$$

sekä

$$T(i)T(p) + T(j)T(q) = T(ip) + T(jq) = T(ip + jq) = T(1_{A\oplus B}) = 1_{T(A\oplus B)}.$$

Siis edellisen lauseen nojalla $T(A \oplus B) \cong T(A) \oplus T(B)$. □

Lause 7.4. *Olkoot R ja S renkaita sekä $T: {}_R\mathbf{Mod} \to {}_S\mathbf{Mod}$ additiivinen funktori. Olkoon lisäksi*

$$0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$$

lohkeava lyhyt ekaskti jono. Jos T on kovariantti, niin myös lyhyt eksakti jono

$$0 \to TA \xrightarrow{Tf} TB \xrightarrow{Tg} TC \to 0,$$

lohkeaa. Jos taas T on kontravariantti, niin lyhyt eksakti jono

$$0 \to TC \xrightarrow{Tg} TB \xrightarrow{Tf} TA \to 0.$$

lohkeaa.

Todistus (vrt. [2, s. 466]). Seuraa lauseista 7.3 ja 3.4 □

7.2 Kovariantit vasemmalta derivoidut funktorit

Olkoot R ja S renkaita ja $T\colon {}_R\mathbf{Mod} \to {}_S\mathbf{Mod}$ additiivinen kovariantti funktori. Kiinnitetään jokaiselle R-modulille A katkaistu projektiivinen resoluutio $\mathbf{P}_A$. Sovelletaan nyt funktoria T tähän, jolloin saadaan ketjukompleksi

$$T\mathbf{P}_A\colon \qquad \ldots \to T(P_2) \xrightarrow{T(d_2)} T(P_1) \xrightarrow{T(d_1)} T(P_0) \to 0.$$

(Jono ei ole enään välttämättä eksakti, mutta $T(d_n)T(d_{n+1}) = T(d_n d_{n+1}) = T(0) = 0$.) Määritellään

$$(\mathcal{L}_nT)A = H_n(T\mathbf{P}_A).$$

jokaisella R-modulilla A.

Lisäksi jos A ja A' ovat R-moduleita ja $f\colon A \to A'$ on R-homomorfismi, niin vertailulauseen (lause 6.3) nojalla on olemassa ketjukuvaus $\hat{f}_\bullet\colon \mathbf{P}_A \to \mathbf{P}'_{A'}$ yli kuvauksen f. Tällöin jono $(T\hat{f}_n)_{n\in\mathbb{Z}} = T\hat{f}_\bullet\colon T\mathbf{P}_A \to T\mathbf{P}'_{A'}$ on ketjukuvaus ja määritellään

$$(\mathcal{L}_nT)f = H_n(T\hat{f}_\bullet).$$

Vertailulauseen nojalla ketjukuvaus $\hat{f}_\bullet$ on homotopiaa vaille yksikäsitteinen, joten jos $\hat{g}_\bullet\colon \mathbf{P}_A \to \mathbf{P}'_{A'}$ on ketjukuvaus yli kuvauksen f, niin $\hat{f}_\bullet \simeq \hat{g}_\bullet$. Jolloin myös $T\hat{f}_\bullet \simeq T\hat{g}_\bullet$. Siis lauseen 5.5 nojalla

$$(\mathcal{L}_nT)f = H_n(T\hat{f}_\bullet) = H_n(T\hat{g}_\bullet) = (\mathcal{L}_nT)g.$$

Näin ollen $(\mathcal{L}_nT)f$ ei riipu ketjukuvauksen $\hat{f}_\bullet$ valinnasta.

Lause 7.5. *Olkoot R ja S renkaita ja $T\colon {}_R\mathbf{Mod} \to {}_S\mathbf{Mod}$ additiivinen kovariantti funktori. Tällöin $\mathcal{L}_nT\colon {}_R\mathbf{Mod} \to {}_S\mathbf{Mod}$ on additiivinen kovariantti funktori jokaisella $n \in \mathbb{Z}$.*

Todistus (vrt. [2, s. 836]). Osoitetaan aluksi, että $\mathcal{L}_nT$ on kovariantti funktori. Olkoot A, B ja C R-moduleita sekä $f\colon A \to B$ ja $g\colon B \to C$ R-homomorfismeja. Tällöin on olemassa näiden katkaistut projektiiviset resoluutiot $\mathbf{P}_A, \mathbf{P}'_B$ ja $\mathbf{P}''_C$ sekä ketjukuvakset $\hat{f}_\bullet\colon \mathbf{P}_A \to \mathbf{P}'_B$ yli kuvauksen f ja $\hat{g}_\bullet\colon \mathbf{P}'_B \to \mathbf{P}''_C$ yli kuvauksen g. Nyt jono $\hat{g}_\bullet\hat{f}_\bullet\colon \mathbf{P}_A \to \mathbf{P}''_C$ on ketjukuvaus yli kuvauksen gf. Siis

$$T(\hat{g}_\bullet\hat{f}_\bullet) = (T(\hat{g}_n\hat{f}_n))_{n\in\mathbb{Z}} = (T\hat{g}_nT\hat{f}_n)_{n\in\mathbb{Z}} = T\hat{g}_\bullet T\hat{f}_\bullet,$$

jolloin

$$\mathcal{L}_nT(gf) = H_n(T(\hat{g}_\bullet\hat{f}_\bullet)) = H_n(T\hat{g}_\bullet T\hat{f}_\bullet) = H_n(T\hat{g}_\bullet)H_n(T\hat{f}_\bullet) = \mathcal{L}_nT(g)\mathcal{L}_nT(f).$$

Lisäksi jos $1_A\colon A \to A$ on identtinen kuvaus, niin $1_{\mathbf{P}_A}\colon \mathbf{P}_A \to \mathbf{P}_A$ on ketjukuvaus yli kuvauksen 1_A. Siis

$$T(1_{\mathbf{P}_A}) = (T(1_{P_n}))_{n\in\mathbb{Z}} = (1_{TP_n})_{n\in\mathbb{Z}} = 1_{T\mathbf{P}_A},$$

jolloin

$$\mathcal{L}_nT(1_A) = H_n(T(1_{\mathbf{P}_A})) = H_n(1_{T\mathbf{P}_A}) = 1_{H_n(T\mathbf{P}_A)} = 1_{(\mathcal{L}_nT)A}.$$

Joten $\mathcal{L}_nT$ on kovariantti funktori.

Osoitetaan lopuksi, että $\mathcal{L}_nT$ on additiivinen. Olkoot A ja B R-moduleita sekä $f, g\colon A \to B$ R-homomorfismeja. Tällöin on olemassa näiden katkaistut projektiiviset resoluutiot $\mathbf{P}_A$ ja $\mathbf{P}'_B$ sekä ketjukuvaukset $\hat{f}_\bullet\colon \mathbf{P}_A \to \mathbf{P}'_B$ yli kuvauksen f ja $\hat{g}_\bullet\colon \mathbf{P}_A \to \mathbf{P}'_B$ yli kuvauksen g. Tällöin jono $\hat{f}_\bullet + \hat{g}_\bullet = (\hat{f}_n + \hat{g}_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ on ketjukuvaus yli kuvauksen $f+g$. Siis

$$T(\hat{f}_\bullet + \hat{g}_\bullet) = (T(\hat{f}_n + \hat{g}_n))_{n\in\mathbb{Z}} = (T\hat{f}_n + T\hat{g}_n)_{n\in\mathbb{Z}} = T\hat{f}_\bullet + T\hat{g}_\bullet,$$

jolloin

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_nT(f+g) &= H_n(T(\hat{f}_\bullet + \hat{g}_\bullet)) = H_n(T\hat{f}_\bullet + T\hat{g}_\bullet)\\ &= H_n(T\hat{f}_\bullet) + H_n(\hat{g}_\bullet) = \mathcal{L}_nT(f) + \mathcal{L}_nT(g).\end{aligned}$$

Siis $\mathcal{L}_nT$ on additiivinen. □

Luvun alussa jokaiselle R-modulille kiinnitetiin yksi projektiivinen resoluutio. Kiinnitetään nyt jokaiselle R-modulille A toinen katkaistu projektiivinen resoluutio $\tilde{\mathbf{P}}_A$. Merkitään vielä, että $\tilde{\mathcal{L}}_nT$ on tätä resoluutiota vastaava funktori.

Lause 7.6. *Olkoot R ja S renkaita ja $T\colon {}_R\mathbf{Mod} \to {}_S\mathbf{Mod}$ additiivinen kovariantti funktori. Tällöin funktorit $\mathcal{L}_nT$ ja $\tilde{\mathcal{L}}_nT$ ovat luonnollisesti ekvivalentit. Erityisesti*

$$(\mathcal{L}_nT)A \cong (\tilde{\mathcal{L}}_nT)A.$$

kaikilla R-moduleilla A, jolloin $\mathcal{L}_nT$ ei riipu resoluution valinnasta.

Todistus (vrt. [2, s. 837]). Nyt vertailulauseen (lause 6.3) nojalla on olemassa ketjukuvaus $f_\bullet\colon \mathbf{P}_A \to \tilde{\mathbf{P}}_A$ yli identtisen kuvauksen $1_A\colon A \to A$.

$$\begin{tikzcd}
\dots \arrow[r] & P_2 \arrow[r, "d_2"] \arrow[d, dashed, "f_2"] & P_1 \arrow[r, "d_1"] \arrow[d, dashed, "f_1"] & P_0 \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, dashed, "f_0"] & A \arrow[r] \arrow[d, "1_A"] & 0 \\
\dots \arrow[r] & \tilde{P}_2 \arrow[r, "\tilde{d}_2"] & \tilde{P}_1 \arrow[r, "\tilde{d}_1"] & \tilde{P}_0 \arrow[r, "\tilde{\varepsilon}"] & A \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Toisaalta vertailulauseen nojalla on olemassa toinen ketjukuvaus $g_\bullet\colon \tilde{\mathbf{P}}_A \to \mathbf{P}_A$ yli identtisen kuvauksen $1_A\colon A \to A$.

$$\begin{tikzcd}
\dots \arrow[r] & \tilde{P}_2 \arrow[r, "\tilde{d}_2"] \arrow[d, dashed, "g_2"] & \tilde{P}_1 \arrow[r, "\tilde{d}_1"] \arrow[d, dashed, "g_1"] & \tilde{P}_0 \arrow[r, "\tilde{\varepsilon}"] \arrow[d, dashed, "g_0"] & A \arrow[r] \arrow[d, "1_A"] & 0 \\
\dots \arrow[r] & P_2 \arrow[r, "d_2"] & P_1 \arrow[r, "d_1"] & P_0 \arrow[r, "\varepsilon"] & A \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Nyt näiden yhdisteet $g_\bullet f_\bullet \colon \mathbf{P}_A \to \mathbf{P}_A$ ja $f_\bullet g_\bullet \colon \tilde{\mathbf{P}}_A \to \tilde{\mathbf{P}}_A$ ovat molemmat ketjukuvauksia yli identtisen kuvauksen 1_A. Joten vertailulauseen lisäyksen nojalla on olemassa homotopiat $g_\bullet f_\bullet \simeq 1_{\mathbf{P}_A}$ ja $f_\bullet g_\bullet \simeq 1_{\tilde{\mathbf{P}}_A}$.

Kun näihin ketjukuvauksiin sovelletaan funktoria T, saadaan lauseen 7.1 homotooppiset ketjukuvaukset

$$Tg_\bullet Tf_\bullet = T(g_\bullet f_\bullet) \simeq T(1_{\mathbf{P}_A}) = 1_{T\mathbf{P}_A},$$

ja

$$Tf_\bullet Tg_\bullet = T(f_\bullet g_\bullet) \simeq T(1_{\tilde{\mathbf{P}}_A}) = 1_{T\tilde{\mathbf{P}}_A}$$

Edelleen jos sovelletaan funktoria H_n, saadaan lauseen 5.5 nojalla

$$H_n(Tg_\bullet)H_n(Tf_\bullet) = H_n(Tg_\bullet Tf_\bullet) = H_n(1_{T\mathbf{P}_A}) = 1_{H_n(T\mathbf{P}_A)} = 1_{(\mathcal{L}_nT)A},$$

ja

$$H_n(Tf_\bullet)H_n(Tg_\bullet) = H_n(Tf_\bullet Tg_\bullet) = H_n(1_{T\tilde{\mathbf{P}}_A}) = 1_{H_n(T\tilde{\mathbf{P}}_A)} = 1_{(\tilde{\mathcal{L}}_nT)A}.$$

Siis $H_n(Tf_\bullet) \colon (\mathcal{L}_nT)A \to (\tilde{\mathcal{L}}_nT)A$ on isomorfismi, käänteiskuvauksena $H_n(Tg_\bullet)$. Merkitään $\mu_A = H_n(Tf_\bullet)$.

Osoitetaan lopuksi, että kaavio

$$\begin{tikzcd}
(\mathcal{L}_nT)A \arrow[r, "\mu_A"] \arrow[d, "(\mathcal{L}_nT)\varphi"'] & (\tilde{\mathcal{L}}_nT)A \arrow[d, "(\tilde{\mathcal{L}}_nT)\varphi"] \\
(\mathcal{L}_nT)B \arrow[r, "\mu_B"'] & (\tilde{\mathcal{L}}_nT)B
\end{tikzcd}$$

kommutoi, kun $\varphi \colon A \to B$ on R-homomorfismi. Tässä $\mu_B = H_n(Tf'_\bullet)$, missä $f'_\bullet \colon \mathbf{Q}_B \to \tilde{\mathbf{Q}}'_B$ on ketjukuvaus yli identtisen kuvauksen 1_B sekä $\mathbf{Q}_B$ ja $\tilde{\mathbf{Q}}'_B$ ovat modulin B kaksi projektiivista resoluutiota.

Nyt vertailulauseen nojalla on olemassa ketjukuvaukset $\varphi_\bullet \colon \mathbf{P}_A \to \mathbf{Q}'_B$ ja $\tilde{\varphi}_\bullet \colon \tilde{\mathbf{P}}_A \to \tilde{\mathbf{Q}}'_B$ yli kuvauksen φ. Joten saadaan kaaviot

$$\begin{tikzcd}
\dots \arrow[r] & P_2 \arrow[r, "d_2"] \arrow[d, dashed, "f_2"] & P_1 \arrow[r, "d_1"] \arrow[d, dashed, "f_1"] & P_0 \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, dashed, "f_0"] & A \arrow[r] \arrow[d, "1_A"] & 0 \\
\dots \arrow[r] & \tilde{P}_2 \arrow[r, "\tilde{d}_2"] \arrow[d, dashed, "\tilde{\varphi}_2"] & \tilde{P}_1 \arrow[r, "\tilde{d}_1"] \arrow[d, dashed, "\tilde{\varphi}_1"] & \tilde{P}_0 \arrow[r, "\tilde{\varepsilon}"] \arrow[d, dashed, "\tilde{\varphi}_0"] & A \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"] & 0 \\
\dots \arrow[r] & \tilde{Q}_2 \arrow[r, "\tilde{\delta}_2"] & \tilde{Q}_1 \arrow[r, "\tilde{\delta}_1"] & \tilde{Q}_0 \arrow[r, "\tilde{\varepsilon}'"] & B \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

ja

$$\begin{tikzcd}
\dots \arrow[r] & P_2 \arrow[r, "d_2"] \arrow[d, dashed, "\varphi_2"] & P_1 \arrow[r, "d_1"] \arrow[d, dashed, "\varphi_1"] & P_0 \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, dashed, "\varphi_0"] & A \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"] & 0 \\
\dots \arrow[r] & Q_2 \arrow[r, "\delta_2"] \arrow[d, dashed, "f_2'"] & Q_1 \arrow[r, "\delta_1"] \arrow[d, dashed, "f_1'"] & Q_0 \arrow[r, "\varepsilon'"] \arrow[d, dashed, "f_0'"] & B \arrow[r] \arrow[d, "1_B"] & 0 \\
\dots \arrow[r] & \tilde{Q}_2 \arrow[r, "\tilde{\delta}_2"] & \tilde{Q}_1 \arrow[r, "\tilde{\delta}_1"] & \tilde{Q}_0 \arrow[r, "\tilde{\varepsilon}'"] & B \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Siis jono $\tilde{\varphi}_\bullet f_\bullet \colon \mathbf{P}_A \to \tilde{\mathbf{Q}}_B$ on ketjukuvaus yli kuvauksen $\varphi 1_A = \varphi$ sekä jono $f_\bullet' \varphi_\bullet \colon \mathbf{P}_A \to \tilde{\mathbf{Q}}_B$ on ketjukuvaus yli kuvauksen $1_B \varphi = \varphi$. Näin ollen vertailulauseen nojalla nämä ovat homotooppisia, $\tilde{\varphi}_\bullet f_\bullet \simeq f_\bullet' \varphi_\bullet$. Siis soveltamalla funktoria T, saadaan

$$T\tilde{\varphi}_\bullet T f_\bullet = T(\tilde{\varphi}_\bullet f_\bullet) \simeq T(f_\bullet' \varphi_\bullet) = T f_\bullet' T \varphi_\bullet$$

Edelleen soveltamalla funktoria H_n, saadaan

$$\begin{aligned}
(\tilde{\mathcal{L}}_n T)\varphi \circ \mu_A &= H_n(T\tilde{\varphi}_\bullet) H_n(T f_\bullet) = H_n(T\tilde{\varphi}_\bullet T f_\bullet) \\
&= H_n(T f_\bullet' T \varphi_\bullet) = H_n(T f_\bullet') H_n(T \varphi_\bullet) \\
&= \mu_B \circ (\mathcal{L}_n T)\varphi.
\end{aligned}$$

Näin ollen $\mu \colon \mathcal{L}_n T \to \tilde{\mathcal{L}}_n T$ on luonnollinen ekvivalenssi. □

Määritelmä 7.2. Olkoot R ja S renkaita sekä $T\colon {}_R\mathbf{Mod} \to {}_S\mathbf{Mod}$ kovariantti additiivinen funktori. Sanotaan, että $\mathcal{L}_n T\colon {}_R\mathbf{Mod} \to {}_S\mathbf{Mod}$ ($n \in \mathbb{Z}$) ovat funktorin T *kovariantit vasemmalta derivoidut funktorit*.

Lause 7.7. *Olkoot R ja S renkaita, $T\colon {}_R\mathbf{Mod} \to {}_R\mathbf{Mod}$ kovariantti additiivinen funktori ja A R-moduli. Olkoot lisäksi $\mathcal{L}_n T$ funktorin T vasemmalta derivoidut funktorit. Tällöin*

a) $(\mathcal{L}_n T)A = 0$ *jokaisella* $n < 0$,

b) jos A on projektiivinen, niin $(\mathcal{L}_0 T)A \cong TA$ *ja* $(\mathcal{L}_n T)A = 0$ *jokaisella* $n \neq 0$.

Todistus (vrt. [2, s. 838]). a) Jos $n < 0$, niin modulin A projektiivisessa resoluutiossa $P_n = 0$.

$$\mathbf{P}\colon \quad \dots \to P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{\varepsilon} A \to 0$$

Joten myös $TP_n = 0$. Siis $Z_n(T\mathbf{P}_A) = \operatorname{Ker}(Td_n) = 0$, jolloin

$$(\mathcal{L}_n T)A = H_n(T\mathbf{P}_A) = Z_n(T\mathbf{P}_A)/B_n(T\mathbf{P}_A) = 0.$$

b) Oletetaan, että moduli A on projektiivinen. Tällöin

$$\mathbf{P}\colon \quad \dots \to 0 \to 0 \to A \xrightarrow{1_A} A \to 0.$$

modulin A eräs projektiivinen resoluutio. Soveltamalla funktoria T tämän katkaistuun projektiiviseen resoluutioon, saadaan ketjukompleksi

$$T\mathbf{P}_A\colon \quad 0 \to TA \to 0.$$

Jolloin

$$(\mathcal{L}_0T)A = H_0(T\mathbf{P}_A) = Z_0(T\mathbf{P}_A)/B_0(T\mathbf{P}_A) = TA/0 \cong TA.$$

Lisäksi kuten edellisessä kohdassa $Z_n(T\mathbf{P}_A) = \operatorname{Ker}(Td_n) = 0$, kun $n \neq 0$. Joten

$$(\mathcal{L}_nT)A = H_n(T\mathbf{P}_A) = Z_n(T\mathbf{P}_A)/B_n(T\mathbf{P}_A) = 0,$$

kun $n \neq 0$. □

Pitkät eksaktit jonot

Lause 7.8 (Hevosenkenkälemma)**.** *Olkoon R rengas sekä A, A' ja A'' R-moduleita. Olkoot lisäksi $\mathbf{P}'$ modulin A' ja $\mathbf{P}''$ modulin A'' projektiiviset resoluutiot. Oletetaan, että kaavion*

$$\begin{tikzcd}
 & \vdots \arrow[d] & & \vdots \arrow[d] & \\
 & P'_1 \arrow[d, "d'_1"'] & & P''_1 \arrow[d, "d''_1"] & \\
 & P'_0 \arrow[d, "\varepsilon'"'] & & P''_0 \arrow[d, "\varepsilon''"] & \\
0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "f"] \arrow[d] & A \arrow[r, "g"] & A'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & & 0 &
\end{tikzcd}$$

rivi on eksakti. Tällöin on olemassa modulin A projektiivinen resoluutio $\mathbf{P}$ ja ketjukuvaukset $f_\bullet\colon \mathbf{P}'_{A'} \to \mathbf{P}_A$ yli kuvauksen f ja $g_\bullet\colon \mathbf{P}_A \to \mathbf{P}''_{A''}$ yli kuvauksen g siten, että jono

$$0_\bullet \to \mathbf{P}'_{A'} \xrightarrow{f_\bullet} \mathbf{P}_A \xrightarrow{g_\bullet} \mathbf{P}''_{A''} \to 0_\bullet$$

on eksakti.

Todistus (vrt. [4, s. 132]). Määritellään $P_n = P'_n \oplus P''_n$ sekä $f_n\colon P'_n \to P_n$ ja $g_n\colon P_n \to P''_n$ asettamalla

$$f_n(x') = (x', 0) \quad \text{ja} \quad g_n(x', x'') = x''$$

kaikilla $x' \in P_n$ ja $x'' \in P''_n$. Nyt lauseen 4.7 nojalla $P_n = P'_n \oplus P''_n$ on projektiivinen sekä selvästi jono

$$0 \to P'_n \xrightarrow{f_n} P_n \xrightarrow{g_n} P''_n \to 0$$

on eksakti jokaisella $n \in \mathbb{N}$.

Todistetaan induktiolla, että on olemassa reunakuvaukset $d_n\colon P_n \longrightarrow P_{n-1}$ ja $\varepsilon\colon P_0 \to A$, joilla kaavio

$$
\begin{tikzcd}
& \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d, dashed] & \vdots \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & P_1' \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "d_1'"] & P_1 \arrow[r, "g_1"] \arrow[d, dashed, "d_1"] & P_1'' \arrow[r] \arrow[d, "d_1''"] & 0 \\
0 \arrow[r] & P_0' \arrow[r, "f_0"] \arrow[d, "\varepsilon'"] & P_0 \arrow[r, "g_0"] \arrow[d, dashed, "\varepsilon"] & P_0'' \arrow[r] \arrow[d, "\varepsilon''"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "f"] \arrow[d] & A \arrow[r, "g"] \arrow[d] & A'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
& 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}
$$

kommutoi ja sen rivit ja sarakkeet ovat eksakteja. Nyt koska moduli P_0'' on projektiivinen ja g on surjektio, niin on olemassa sellainen R-homomorfismi $\alpha\colon P_0'' \to A$, että $\varepsilon'' = g\alpha$. Määritellään $\varepsilon\colon P_0 \to A$ asettamalla

$$\varepsilon(x', x'') = f\varepsilon'(x') + \alpha(x'')$$

kaikilla $x' \in P_0'$ ja $x'' \in P_0''$. Tämä on selvästi R-homomorfismi. Todetaan sitten kolme asiaa kuvauksesta ε:

- $\varepsilon f_0 = f\varepsilon'$:
  Olkoon $x' \in P_0'$. Tällöin

  $$\varepsilon f_0(x') = \varepsilon(x', 0) = f\varepsilon'(x') + \alpha(0) = f\varepsilon(x').$$

  Siis $\varepsilon f_0 = f\varepsilon'$.

- $\varepsilon'' g_0 = g\varepsilon$:
  Olkoon $(x', x'') \in P_0$. Tällöin

  $$\begin{aligned} &\varepsilon'' g_0(x', x'') \\ &= \varepsilon''(x'') = g\alpha(x'') = 0 + g\alpha(x'') \\ &= gf\varepsilon'(x') + g\alpha(x'') = g(f\varepsilon'(x') + \alpha(x'')) \\ &= g\varepsilon(x', x''). \end{aligned}$$

  Siis $\varepsilon'' g_0 = g\varepsilon$.

- $\varepsilon\colon P_0 \to A$ on surjektio:
  Olkoon $a \in A$. Tällöin $g(a) \in A''$, joten kuvauksen ε'' surjektiivisuuden nojalla on olemassa sellainen $x'' \in P_0''$, että $g(a) = \varepsilon''(x'')$. Nyt

  $$g(a - \alpha(x'')) = g(a) - g\alpha(x'') = g(a) - \varepsilon''(x'') = 0.$$

Siis $a - \alpha(x'') \in \mathrm{Ker}(g) = \mathrm{Im}(f)$. Näin ollen on olemassa sellainen $y' \in P'$, että $a - \alpha(x'') = f(y')$. Nyt koska ε' on surjektio, niin on olemassa $y' = \varepsilon'(x')$. Siis $a - \alpha(x'') = f\varepsilon'(x')$ eli

$$a = f\varepsilon'(x') + \alpha(x'') = \varepsilon(x', x'').$$

Joten $\varepsilon\colon P_0 \to A$ on surjektio.

Oletetaan sitten, että meillä on jo kuvaukset $d_i\colon P_i \to P_{i-1},\ i = 1, \ldots, n$, joilla kaavio

$$\begin{tikzcd}
 & \vdots \arrow[d] & & \vdots \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & P'_{n+1} \arrow[r, "f_{n+1}"] \arrow[d, "d'_{n+1}"] & P_{n+1} \arrow[r, "g_{n+1}"] & P''_{n+1} \arrow[r] \arrow[d, "d''_{n+1}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & P'_n \arrow[r, "f_n"] \arrow[d, "d'_n"] & P_n \arrow[r, "g_n"] \arrow[d, "d_n"] & P''_n \arrow[r] \arrow[d, "d''_n"] & 0 \\
0 \arrow[r] & P'_{n-1} \arrow[r, "f_{n-1}"] \arrow[d] & P_{n-1} \arrow[r, "g_{n-1}"] \arrow[d] & P''_{n-1} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{tikzcd}$$

kommutoi ja sen rivit ja sarakkeet ovat eksakteja. Meidän täytyy löytää R-homomorfismi $d_{n+1}\colon P_{n+1} \to P_n$.

Merkitään $K_n = \mathrm{Ker}(d_n)$, $K'_n = \mathrm{Ker}(d'_n)$ ja $K''_n = \mathrm{Ker}(d''_n)$ sekä $i\colon K_n \to P_n$, $i'\colon K'_n \to P'_n$ ja $i''\colon K''_n \to P''_n$ ovat inkluusioita. Nyt kuvauksen f_n rajoittuma indusoi kuvauksen $\bar{f}_n\colon K'_n \to K_n$. Nimittäin kun $x' \in K'_n = \mathrm{Ker}(d'_n)$, niin

$$d_n f_n(x') = f_{n-1} d'_n(x') = f_{n-1}(0) = 0.$$

Joten $f_n(x') \in \mathrm{Ker}(d_n) = K_n$. Samoin kuvauksen g_n rajoittuma indusoi kuvauksen $\bar{g}_n\colon K_n \to K''_n$. Osoitetaan, että jono

$$0 \to K'_n \xrightarrow{\bar{f}_n} K_n \xrightarrow{\bar{g}_n} K''_n \to 0$$

on eksakti. Tietenkin $\bar{f}_n$ on injektio sekä $\bar{g}_n\bar{f}_n = 0$, joten $\mathrm{Im}(\bar{f}_n) \subseteq \mathrm{Ker}(\bar{g}_n)$. Olkoon sitten $(x', x'') \in \mathrm{Ker}(\bar{g}_n)$. Siis

$$0 = \bar{g}_n(x', x'') = g(x', x'') = x''.$$

Toisaalta $(x', x'') \in \mathrm{Ker}(\bar{g}_n) \subseteq K_n = \mathrm{Ker}(d_n)$. Joten

$$0 = d_n(x', x'') = d_n(x', 0) = d_n f_n(x') = f_{n-1} d'_n(x')$$

Siis kuvauksen f_{n-1} injektiivisyyden nojalla $d'_n(x') = 0$ eli $x' \in \mathrm{Ker}(d'_n) = K'_n$. Täten

$$(x', x'') = (x', 0) = f_n(x') = \bar{f}_n(x') \in \mathrm{Im}(\bar{f}_n).$$

Näin ollen $\mathrm{Im}(\bar{f}_n) = \mathrm{Ker}(\bar{g}_n)$. Todetaan vielä, että $\bar{g}_n$ on surjektio. Olkoon $x'' \in K''_n = \mathrm{Ker}(d''_n)$. Nyt koska $K''_n \subseteq P''_n$ ja $g_n\colon P_n \to P''_n$ on surjektio, niin on olemassa sellainen $y \in P_n$, että $x'' = g_n(y)$. Tällöin

$$0 = d''_n(x) = d''_n(g_n(y)) = g_{n-1}(d_n(y)).$$

Siis $d_n(y) \in \mathrm{Ker}(g_{n-1}) = \mathrm{Im}(f_{n-1})$, joten on olemassa sellainen $y' \in P'_{n-1}$, että $d_n(y) = f_{n-1}(y')$. Tällöin

$$0 = d_{n-1}d_n(y) = d_{n-1}f_{n-1}(y') = f_{n-2}d'_{n-1}(y')$$

Siis kuvauksen f_{n-2} injektiivisyyden nojalla $d'_{n-1}(y') = 0$ eli $y' \in \mathrm{Ker}(d'_{n-1}) = \mathrm{Im}(d'_n)$. Joten on olemassa sellainen $x' \in P'_n$, että $y' = d'_n(x')$. Nyt

$$d_n(y - f_n(x')) = d_n(y) - d_n f_n(x') = f_{n-1}(y') - f_{n-1}d'_n(x') = 0.$$

Siis $y - f_n(x') \in \mathrm{Ker}(d_n) = K_n$. Lisäksi

$$\bar{g}_n(y - f_n(x')) = g_n(y - f_n(x')) = g_n(y) - g_n f_n(x') = x'' - 0 = x''.$$

Siis $\bar{g}_n\colon K_n \to K''_n$ on surjektio. Täten jono

$$0 \to K'_n \xrightarrow{\bar{f}_n} K_n \xrightarrow{\bar{g}_n} K''_n \to 0$$

on eksakti. Siis saadaan kommutoiva kaavio

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & K'_n \arrow[r, "\bar{f}_n"] \arrow[d, "i'"] & K_n \arrow[r, "\bar{g}_n"] \arrow[d, "i"] & K''_n \arrow[r] \arrow[d, "i''"] & 0 \\
0 \arrow[r] & P'_n \arrow[r, "f_n"] \arrow[d, "\bar{d}'_n"] & P_n \arrow[r, "g_n"] \arrow[d, "\bar{d}_n"] & P''_n \arrow[r] \arrow[d, "\bar{d}''_n"] & 0 \\
0 \arrow[r] & K'_{n-1} \arrow[r, "\bar{f}_{n-1}"] \arrow[d] & K_{n-1} \arrow[r, "\bar{g}_{n-1}"] \arrow[d] & K''_{n-1} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

jonka rivit ja sarakkeet ovat eksakteja.

Nyt reunakuvaukset d'_{n+1} ja d''_{n+1} indusoivat surjektiot $\bar{d}'_{n+1}\colon P'_{n+1} \to K'_n$ ja $\bar{d}''_{n+1}\colon P''_{n+1} \to K''_n$. (Nimittäin jonojen eksaktisuuden nojalla $\mathrm{Im}(d'_{n+1}) = \mathrm{Ker}(d'_n) = K'_n$ ja d''_{n+1} vastaavasti.) Siis voidaan merkitä $d'_{n+1} = i'\bar{d}'_{n+1}$ ja $d''_{n+1} = i''\bar{d}''_{n+1}$. Nyt moduli P''_{n+1} on projektiivinen ja $\bar{g}_n$ on surjektio, joten on olemassa sellainen R-homomorfismi $\alpha_{n+1}\colon P''_{n+1} \to K_n$, että $\bar{g}_n\alpha_{n+1} = \bar{d}''_{n+1}$.

$$\begin{tikzcd}
 & & & P''_{n+1} \arrow[dl, dashed, "\alpha_{n+1}"'] \arrow[d, "\bar{d}_{n+1}"] & \\
0 \arrow[r] & K'_n \arrow[r, "\bar{f}_n"'] & K_n \arrow[r, "\bar{g}_n"'] & K''_n \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Määritellään kuvaus $\bar{d}_{n+1}: P_{n+1} \longrightarrow K_n$ asettamalla

$$\bar{d}_{n+1}(x', x'') = \bar{f}_n \bar{d}'_{n+1}(x') + \alpha_{n+1}(x'')$$

kaikilla $x' \in P'_{n+1}$ ja $x'' \in P''_{n+1}$. Tämä on tietenkin R-homomorfismi. Todetaan vielä, että kaavio

$$\begin{tikzcd}
 & \vdots \arrow[d] & & \vdots \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & P'_{n+1} \arrow[r, "f_{n+1}"] \arrow[d, "d'_{n+1}"] & P_{n+1} \arrow[r, "g_{n+1}"] \arrow[d, "d_{n+1}"] & P''_{n+1} \arrow[r] \arrow[d, "d''_{n+1}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & P'_n \arrow[r, "f_n"] \arrow[d, "d'_n"] & P_n \arrow[r, "g_n"] \arrow[d, "d_n"] & P''_n \arrow[r] \arrow[d, "d''_n"] & 0 \\
0 \arrow[r] & P'_{n-1} \arrow[r, "f_{n-1}"] \arrow[d] & P_{n-1} \arrow[r, "g_{n-1}"] \arrow[d] & P''_{n-1} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{tikzcd}$$

kommutoi, kun $d_{n+1} = i\bar{d}_{n+1}$.

- $d_{n+1}f_{n+1} = f_n d'_{n+1}$:
  Olkoon $x' \in P'_{n+1}$. Tällöin

  $$\begin{aligned} d_{n+1}f_{n+1}(x') &= d_{n+1}(x', 0) = i\bar{d}_{n+1}(x', 0) = i\bar{f}_n\bar{d}'_{n+1}(x') + i\alpha_{n+1}(0) \\ &= i\bar{f}_n\bar{d}'_{n+1}(x') = f_n i'\bar{d}'_{n+1}(x') = f_n d'_{n+1}(x'). \end{aligned}$$

  Siis $d_{n+1}f_{n+1} = f_n d'_{n+1}$.

- $d''_{n+1}g_{n+1} = g_n d_{n+1}$:
  Olkoon $(x', x'') \in P_{n+1}$. Tällöin

  $$\begin{aligned} g_n d_{n+1}(x', x'') &= g_n i\bar{d}_{n+1}(x', x'') = g_n i\bar{f}_n\bar{d}'_{n+1}(x') + g_n i\alpha_{n+1}(x'') \\ &= g_n f_n i'\bar{d}'_{n+1}(x') + i''\bar{g}_n\alpha_{n+1}(x'') = 0 + i''\bar{d}''_{n+1}(x'') \\ &= d''_{n+1}(x'') = d''_{n+1}g_{n+1}(x', x''). \end{aligned}$$

  Siis $d''_{n+1}g_{n+1} = g_n d_{n+1}$.

Lisäksi kuvauksen $\bar{d}_{n+1}$ surjektiivisuus osoitetaan kuten kuvauksen ε surjektiivisuus, joten

$$\operatorname{Im}(d_{n+1}) = \operatorname{Im}(\bar{d}_{n+1}) = K_n = \operatorname{Ker}(d_n).$$

Täten keskimmäinen sarake on myös eksakti.

Siis induktioperiaatteen nojalla on olemassa reunakuvaus $d_\bullet$, jolla jono

$$\mathbf{P}: \quad \ldots \to P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{\varepsilon} A \to 0$$

on modulin A projektiivinen resoluutio ja jono

$$0_\bullet \to \mathbf{P}'_{A'} \xrightarrow{f_\bullet} \mathbf{P}_A \xrightarrow{g_\bullet} \mathbf{P}''_{A''} \to 0_\bullet$$

on eksakti. □

Lause 7.9. *Olkoot R ja S renkaita, A, A' ja A'' R-moduleita sekä $f\colon A' \to A$ ja $g\colon A \to A''$ R-homomorfismeja, joilla jono*

$$0 \to A' \xrightarrow{f} A \xrightarrow{g} A'' \to 0$$

on eksakti. Olkoon lisäksi $T\colon {}_R\mathbf{Mod} \to {}_S\mathbf{Mod}$ kovariantti additiivinen funktori. Tällöin on olemassa pitkä eksakti jono

$$\begin{aligned} \dots &\longrightarrow (\mathcal{L}_{n+1}T)A' \xrightarrow{(\mathcal{L}_{n+1}T)f} (\mathcal{L}_{n+1}T)A \xrightarrow{(\mathcal{L}_{n+1}T)g} (\mathcal{L}_{n+1}T)A'' \xrightarrow{\partial_{n+1}} \\ &\xrightarrow{\partial_{n+1}} (\mathcal{L}_nT)A' \xrightarrow{(\mathcal{L}_nT)f} (\mathcal{L}_nT)A \xrightarrow{(\mathcal{L}_nT)g} (\mathcal{L}_nT)A'' \longrightarrow \dots \end{aligned}$$

jolla on loppu

$$\cdots \longrightarrow (\mathcal{L}_0T)A' \xrightarrow{(\mathcal{L}_0T)f} (\mathcal{L}_0T)A \xrightarrow{(\mathcal{L}_0T)g} (\mathcal{L}_0T)A'' \longrightarrow 0.$$

Todistus (vrt. [2, s. 840]). Valitaan moduleille A' ja A'' projektiiviset resoluutiot $\mathbf{P}'$ ja $\mathbf{P}''$. Tällöin hevosenkenkälemman nojalla on olemassa modulin A projektiivinen resoluutio $\mathbf{P}$ ja ketjukuvaukset $f_\bullet$ ja $g_\bullet$ joilla jono

$$0_\bullet \to \mathbf{P}'_{A'} \xrightarrow{f_\bullet} \mathbf{P}_A \xrightarrow{g_\bullet} \mathbf{P}''_{A''} \to 0_\bullet$$

on eksakti. Nyt koska modulit P''_n ovat projektiivisia jokaisella $n \in \mathbb{N}$, niin eksaktit jonot

$$0 \to P'_n \xrightarrow{f_n} P_n \xrightarrow{g_n} P''_n \to 0$$

ovat lohkeavia. Siis myös jonot

$$0 \to TP'_n \xrightarrow{Tf_n} TP_n \xrightarrow{Tg_n} TP''_n \to 0$$

ovat lohkeavia eksakteja jonoja jokaisella $n \in \mathbb{N}$. Joten saadaan lyhyt eksakti jono ketjukomplekseja ja ketjukuvauksia

$$0_\bullet \to T\mathbf{P}'_{A'} \xrightarrow{Tf_\bullet} T\mathbf{P}_A \xrightarrow{Tg_\bullet} T\mathbf{P}''_{A''} \to 0_\bullet.$$

Nyt lauseen 5.6 nojalla on olemassa pitkä eksakti jono

$$\begin{aligned} \dots &\longrightarrow H_{n+1}(T\mathbf{P}'_{A'}) \xrightarrow{H_{n+1}(Tf_\bullet)} H_{n+1}(T\mathbf{P}_A) \xrightarrow{H_{n+1}(Tg_\bullet)} H_{n+1}(T\mathbf{P}''_{A''}) \xrightarrow{\partial_{n+1}} \\ &\xrightarrow{\partial_{n+1}} H_n(T\mathbf{P}'_{A'}) \xrightarrow{H_n(Tf_\bullet)} H_n(T\mathbf{P}_A) \xrightarrow{H_n(Tg_\bullet)} H_n(T\mathbf{P}''_{A''}) \longrightarrow \dots \end{aligned}$$

Mutta nyt kovariantin vasemmalta derivoidun funktorin määritelmän nojalla jono saadaan muotoon

$$\begin{aligned} \dots \longrightarrow (\mathcal{L}_{n+1}T)A' &\xrightarrow{(\mathcal{L}_{n+1}T)f} (\mathcal{L}_{n+1}T)A \xrightarrow{(\mathcal{L}_{n+1}T)g} (\mathcal{L}_{n+1}T)A'' \xrightarrow{\partial_{n+1}} \\ &\xrightarrow{\partial_{n+1}} (\mathcal{L}_nT)A' \xrightarrow{(\mathcal{L}_nT)f} (\mathcal{L}_nT)A \xrightarrow{(\mathcal{L}_nT)g} (\mathcal{L}_nT)A'' \longrightarrow \dots \end{aligned}$$

Lisäksi lauseen 7.7 nojalla $(\mathcal{L}_nT)B = 0$ kaikilla $n < 0$ ja kaikilla R-moduleilla B, joten jonolla on loppu

$$\cdots \longrightarrow (\mathcal{L}_0T)A' \xrightarrow{(\mathcal{L}_0T)f} (\mathcal{L}_0T)A \xrightarrow{(\mathcal{L}_0T)g} (\mathcal{L}_0T)A'' \longrightarrow 0.$$

□

Lause 7.10. *Olkoot R ja S renkaita sekä $T\colon {}_R\mathbf{Mod} \to {}_S\mathbf{Mod}$ kovariantti additiivinen funktori. Tällöin $\mathcal{L}_nT$ on puolieksakti kaikilla $n \in \mathbb{N}$ sekä $\mathcal{L}_0T$ on oikealta eksakti.*

Lause 7.11. *Olkoot R ja S renkaita sekä $T\colon {}_R\mathbf{Mod} \to {}_R\mathbf{Mod}$ oikealta eksakti additiivinen kovariantti funktori. Tällöin funktorit T ja $\mathcal{L}_0T$ ovat luonnollisesti ekvivalentit.*

Todistus (vrt. [4, s. 142]). Olkoon A R-moduli ja $\mathbf{P}$ sen jokin projektiivinen resoluutio. Tämän resoluution alku on eksakti jono

$$P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{\varepsilon} A \to 0.$$

Nyt koska funktori T on oikealta eksakti, niin myös jono

$$TP_1 \xrightarrow{Td_1} TP_0 \xrightarrow{T\varepsilon} TA \to 0.$$

on eksakti. Siis ensimmäisen isomorfialauseen nojalla

$$TA = \mathrm{Im}(T\varepsilon) \cong TP_0/\mathrm{Ker}(T\varepsilon) = TP_0/\mathrm{Im}(Td_1) = (\mathcal{L}_0T)A.$$

Olkoon sitten B toinen R-moduli ja $f\colon A \to B$ R-homomorfismi. Olkoon lisäksi $\mathbf{P}'$ modulin B jokin projektiivinen resoluutio. Tällöin vertailulauseen nojalla on olemassa ketjukuvaus $f_\bullet\colon \mathbf{P}_A \to \mathbf{P}'_B$ yli kuvauksen f.

$$\begin{tikzcd} P_1 \arrow[r, "d_1"] \arrow[d, "f_1"] & P_0 \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, "f_0"] & A \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\ P'_1 \arrow[r, "d'_1"] & P'_0 \arrow[r, "\varepsilon'"] & B \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Soveltamalla (oikealta eksaktia) funktoria T saadaan kommutoiva kaavio,

$$\begin{tikzcd} TP_1 \arrow[r, "Td_1"] \arrow[d, "Tf_1"] & TP_0 \arrow[r, "T\varepsilon"] \arrow[d, "Tf_0"] & TA \arrow[r] \arrow[d, "Tf"] & 0 \\ TP'_1 \arrow[r, "Td'_1"] & TP'_0 \arrow[r, "T\varepsilon'"] & TB \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

jonka rivit ovat eksakteja. Tämä indusoi kommutoivan kaavion

$$\begin{tikzcd}
(\mathcal{L}_0T)A \cong TP_0/\mathrm{Im}(Td_1) \arrow[r, "\overline{T\varepsilon}"] \arrow[d, "\overline{Tf_0}"] & TA \arrow[d, "Tf"] \\
(\mathcal{L}_0T)B \cong TP_0'/\mathrm{Im}(Td_1') \arrow[r, "\overline{T\varepsilon'}"] & TB
\end{tikzcd}$$

Siis funktorit T ja $\mathcal{L}_0T$ ovat luonnollisesti ekvivalentit. □

7.3 Kovariantit oikealta derivoidut funktorit

Olkoot R ja S renkaita ja $T\colon {}_R\mathbf{Mod} \to {}_S\mathbf{Mod}$ additiivinen kovariantti funktori. Kiinnitetään jokaiselle R-modulille A katkaistu injektiivinen resoluutio $\mathbf{E}^A$. Sovelletaan nyt funktoria T tähän, jolloin saadaan koketjukompleksi

$$T\mathbf{E}^A\colon \quad 0 \to T(E^0) \xrightarrow{T(d^0)} T(E^1) \xrightarrow{T(d^1)} T(E^2) \to \dots$$

Määritellään

$$(\mathcal{R}^n T)A = H^n(T\mathbf{E}^A)$$

jokaisella R-modulilla A.

Lisäksi jos A ja A' ovat R-moduleita ja $f\colon A \to A'$ on R-homomorfismi, niin vertailulauseen (lause 6.6) nojalla on olemassa koketjukuvaus $\hat{f}^\bullet\colon \mathbf{E}^A \to \mathbf{F}^{A'}$ yli kuvauksen f (tässä $\mathbf{F}$ on modulin A' injektiivinen resoluutio). Tällöin jono $(T\hat{f}^n)_{n\in\mathbb{Z}} = T\hat{f}^\bullet\colon T\mathbf{E}^A \to T\mathbf{F}^{A'}$ on koketjukuvaus ja määritellään

$$(\mathcal{R}^n T)f = H^n(T\hat{f}^\bullet).$$

Vertailulauseen nojalla koketjukuvaus $\hat{f}^\bullet$ on homotopiaa vaille yksikäsitteinen, joten jos $\hat{g}^\bullet\colon \mathbf{P}_A \to \mathbf{P}'_{A'}$ on koketjukuvaus yli kuvauksen f, niin $\hat{f}^\bullet \simeq \hat{g}^\bullet$. Jolloin myös $T\hat{f}^\bullet \simeq T\hat{g}^\bullet$. Siis lauseen 5.5 nojalla

$$(\mathcal{R}^n T)f = H^n(T\hat{f}^\bullet) = H^n(T\hat{g}^\bullet) = (\mathcal{R}^n T)g.$$

Näin ollen $(\mathcal{R}^n T)f$ ei riipu koketjukuvauksen $\hat{f}^\bullet$ valinnasta.

Lause 7.12. *Olkoot R ja S renkaita ja $T\colon {}_R\mathbf{Mod} \to {}_S\mathbf{Mod}$ additiivinen kovariantti funktori. Tällöin $\mathcal{R}^n T\colon {}_R\mathbf{Mod} \to {}_S\mathbf{Mod}$ on additiivinen kovariantti funktori jokaisella $n \in \mathbb{Z}$.*

Todistus (vrt. [2, s. 846]). Osoitetaan aluksi, että $\mathcal{R}^n T$ on kovariantti funktori. Olkoot A, B ja C R-moduleita sekä $f\colon A \to B$ ja $g\colon B \to C$ R-homomorfismeja. Tällöin on olemassa katkaistut injektiiviset resoluutiot $\mathbf{E}^A, \mathbf{F}^B$ ja $\mathbf{G}^C$ sekä koketjukuvaukset $\hat{f}^\bullet\colon \mathbf{E}^A \to \mathbf{F}^B$ yli kuvauksen f ja $\hat{g}^\bullet\colon \mathbf{F}^B \to \mathbf{G}^C$ yli kuvauksen g. Nyt jono $\hat{g}^\bullet\hat{f}^\bullet\colon \mathbf{E}^A \to \mathbf{G}^C$ on koketjukuvaus yli kuvauksen gf. Siis

$$T(\hat{g}^\bullet\hat{f}^\bullet) = (T(\hat{g}^n\hat{f}^n))_{n\in\mathbb{Z}} = (T\hat{g}^n T\hat{f}^n)_{n\in\mathbb{Z}} = T\hat{g}^\bullet T\hat{f}^\bullet,$$

jolloin

$$\mathcal{R}^n T(gf) = H^n(T(\hat{g}^\bullet\hat{f}^\bullet)) = H^n(T\hat{g}^\bullet T\hat{f}^\bullet) = H^n(T\hat{g}^\bullet)H^n(T\hat{f}^\bullet) = \mathcal{R}^n T(g)\mathcal{R}^n T(f).$$

Lisäksi jos $1_A\colon A \to A$ on identtinen kuvaus, niin $1_{\mathbf{E}^A}$ on koketjukuvaus yli kuvauksen 1_A. Siis

$$T(1_{\mathbf{E}^A}) = (T(1_{E^n}))_{n\in\mathbb{Z}} = (1_{TE^n})_{n\in\mathbb{Z}} = 1_{T\mathbf{E}^A},$$

jolloin

$$\mathcal{R}^n T(1_A) = H^n(T(1_{\mathbf{E}^A})) = H^n(1_{T\mathbf{E}^A}) = 1_{H^n(T\mathbf{E}^A)} = 1_{(\mathcal{R}_n T)A}.$$

Joten $\mathcal{L}_n T$ on kovariantti funktori.

Osoitetaan lopuksi, että $\mathcal{R}^n T$ on additiivinen. Olkoot A ja B R-moduleita sekä $f, g\colon A \longrightarrow B$ R-homomorfismeja. Tällöin on olemassa näiden katkaistut injektiiviset resoluutiot $\mathbf{E}^A$ ja $\mathbf{F}^B$ sekä koketjukuvaukset $\hat{f}^\bullet\colon \mathbf{E}^A \longrightarrow \mathbf{F}^B$ yli kuvauksen f ja $\hat{g}^\bullet\colon \mathbf{E}^A \longrightarrow \mathbf{F}^B$ yli kuvauksen g. Siis

$$T(\hat{f}^\bullet + \hat{g}^\bullet) = (T(\hat{f}^n + \hat{g}^n))_{n\in\mathbb{Z}} = (T\hat{f}^n + T\hat{g}^n)_{n\in\mathbb{Z}} = T\hat{f}^\bullet + T\hat{g}^\bullet,$$

jolloin

$$\begin{aligned}\mathcal{R}^n T(f+g) &= H^n(T(\hat{f}^\bullet + \hat{g}^\bullet)) = H^n(T\hat{f}^\bullet + T\hat{g}^\bullet)\\ &= H^n(T\hat{f}^\bullet) + H^n(\hat{g}^\bullet) = \mathcal{R}^n T(f) + \mathcal{R}^n T(g).\end{aligned}$$

Siis $\mathcal{R}^n T$ on additiivinen. □

Luvun alussa jokaiselle R-modulille kiinnitettiin yksi injektiivinen resoluutio. Kiinitetään nyt jokaiselle R-modulille A toinen katkaistu injektiivinen resoluutio $\tilde{\mathbf{E}}^A$. Merkitään vielä, että $\tilde{\mathcal{R}}^n T$ on tätä vastaava funktori.

Lause 7.13. *Olkoot R ja S renkaita ja $T\colon {}_R\mathbf{Mod} \longrightarrow {}_S\mathbf{Mod}$ additiivinen kovariantti funktori. Tällöin funktorit $\mathcal{R}^n T$ ja $\tilde{\mathcal{R}}^n T$ ovat luonnllisesti ekvivalentit. Erityisesti*

$$(\mathcal{R}^n T)A \cong (\tilde{\mathcal{R}}^n T)A.$$

kaikilla R-moduleilla A, jolloin $\mathcal{R}^n T$ ei riipu resoluution valinnasta.

Todistus (kts. [4, s. 129]). Vertaa lauseen 7.6 todistukseen. □

Määritelmä 7.3. Olkoot R ja S renkaita sekä $T\colon {}_R\mathbf{Mod} \longrightarrow {}_S\mathbf{Mod}$ kovariantti additiivinen funktori. Sanotaan, että $\mathcal{R}^n T\colon {}_R\mathbf{Mod} \longrightarrow {}_S\mathbf{Mod}$ $(n \in \mathbb{Z})$ ovat funktorin T *kovariantit oikealta derivoidut funktorit*.

Lause 7.14. *Olkoot R ja S renkaita, $T\colon {}_R\mathbf{Mod} \longrightarrow {}_S\mathbf{Mod}$ kovariantti additiivinen funktori ja A R-moduli. Olkoot lisäksi $\mathcal{R}^n T$ funktorin T oikealta derivoidut funktorit. Tällöin*

a) $(\mathcal{R}^n T)A = 0$ *jokaisella* $n < 0$,

b) jos A on injektiivinen, niin $(\mathcal{R}^0 T)A \cong TA$ *ja* $(\mathcal{R}^n T)A = 0$ *jokaisella* $n \neq 0$.

Todistus (vrt. [2, s. 846]). a) Jos $n < 0$, niin modulin A injektiivisessä resoluutiossa $E^n = 0$.

$$\mathbf{E}\colon \quad 0 \longrightarrow A \xrightarrow{\eta} E^0 \xrightarrow{d^0} E^1 \xrightarrow{d^1} E^2 \longrightarrow \dots$$

Joten myös $TE^n = 0$. Siis $Z^n(T\mathbf{E}^A) = \operatorname{Ker}(Td^n) = 0$, jolloin

$$(\mathcal{R}^n T)A = H^n(T\mathbf{E}^A) = Z^n(T\mathbf{E}^A)/B^n(T\mathbf{E}^A) = 0.$$

b) Oletetaan, että moduli A on injektiivinen. Tällöin

$$\mathbf{E}\colon \quad 0 \longrightarrow A \xrightarrow{1_A} A \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \dots.$$

on modulin A eräs projektiivinen resoluutio. Soveltamalla funktoria T tämän katkaistuun injektiiviseen resoluutioon, saadaan koketjukompleksi

$$T\mathbf{E}^A\colon \quad 0 \to TA \to 0.$$

Jolloin

$$(\mathcal{R}^0T)A = H^0(T\mathbf{E}^A) = Z^0(T\mathbf{E}^A)/B^0(T\mathbf{E}^A) = TA/0 \cong TA.$$

Lisäksi kuten edellisessä kohdassa $Z^n(T\mathbf{E}^A) = \mathrm{Ker}(Td^n) = 0$, kun $n \neq 0$. Joten

$$(\mathcal{R}^nT)A = H^n(T\mathbf{E}^A) = Z^n(T\mathbf{E}^A)/B^n(T\mathbf{E}^A) = 0,$$

kun $n \neq 0$. □

Pitkät eksaktit jonot

Lause 7.15 (Hevosenkenkälemma)**.** *Olkoon R rengas sekä A, A' ja A'' R-moduleita. Olkoot lisäksi* $\mathbf{E}$ *modulin A' ja* $\mathbf{G}$ *modulin A'' injektiiviset resoluutiot. Oletetaan, että kaavion*

$$\begin{tikzcd}
 & \vdots & & \vdots & \\
 & E^1 \arrow[u, "d^1"] & & G^1 \arrow[u, "\delta^1"'] & \\
 & E^0 \arrow[u, "d^0"] & & G^0 \arrow[u, "\delta^0"'] & \\
0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "f"] \arrow[u, "\eta"] & A \arrow[r, "g"] & A'' \arrow[r] \arrow[u, "\eta''"'] & 0 \\
 & 0 \arrow[u] & & 0 \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

rivi on eksakti. Tällöin on olemassa modulin A injektiivinen resoluutio $\mathbf{F}$ *ja koketjukuvaukset $f^\bullet\colon \mathbf{E}^{A'} \to \mathbf{F}^A$ yli kuvauksen f ja $g^\bullet\colon \mathbf{F}^A \to \mathbf{G}^{A''}$ yli kuvauksen g siten, että jono*

$$0^\bullet \to \mathbf{E}^{A'} \xrightarrow{f^\bullet} \mathbf{F}^A \xrightarrow{g^\bullet} \mathbf{G}^{A''} \to 0^\bullet$$

on eksakti.

Todistus (kts. [4, s. 135]). Vertaan lauseen 7.8 todistukseen. □

Lause 7.16. *Olkoot R ja S renkaita, A, A' ja A'' R-moduleita sekä $f\colon A' \to A$ ja $g\colon A \to A''$ R-homomorfismeja, joilla jono*

$$0 \to A' \xrightarrow{f} A \xrightarrow{g} A'' \to 0$$

on eksakti. Olkoon lisäksi $T\colon {}_R\mathbf{Mod} \to {}_S\mathbf{Mod}$ *kovariantti additiivinen funktori. Tällöin on olemassa pitkä eksakti jono*

$$\begin{gathered}\ldots \longrightarrow (\mathcal{R}^nT)A' \xrightarrow{(\mathcal{R}^nT)f} (\mathcal{R}^nT)A \xrightarrow{(\mathcal{R}^nT)g} (\mathcal{R}^nT)A'' \xrightarrow{\partial_n} \\ \xrightarrow{\partial_n} (\mathcal{R}^{n+1}T)A' \xrightarrow{(\mathcal{R}^{n+1}T)f} (\mathcal{R}^{n+1}T)A \xrightarrow{(\mathcal{R}^{n+1}T)g} (\mathcal{R}^{n+1}T)A'' \longrightarrow \ldots\end{gathered}$$

jolla on alku

$$0 \longrightarrow (\mathcal{R}^0T)A \xrightarrow{(\mathcal{R}^0T)f} (\mathcal{R}^0T)A' \xrightarrow{(\mathcal{R}^0T)g} (\mathcal{R}^0T)A'' \longrightarrow \ldots$$

Todistus (vrt. [2, s. 840]). Valitaan moduleille A' ja A'' injektiiviset resoluutiot $\mathbf{E}$ ja $\mathbf{G}$. Tällöin hevosenkenkälemman nojalla on olemassa modulin A injektiivinen resoluutio $\mathbf{F}$ ja ketjukuvaukset $f^\bullet$ ja $g^\bullet$ joilla jono

$$0^\bullet \to \mathbf{E}^{A'} \xrightarrow{f^\bullet} \mathbf{F}^A \xrightarrow{g^\bullet} \mathbf{G}^{A''} \to 0^\bullet$$

on eksakti. Nyt koska modulit E^n ovat injektiivisiä jokaisella $n \in \mathbb{N}$, niin eksaktit jonot

$$0 \to E^n \xrightarrow{f^n} F^n \xrightarrow{g^n} G^n \to 0$$

ovat lohkeavia. Siis myös jonot

$$0 \to TE^n \xrightarrow{Tf^n} TF^n \xrightarrow{Tg^n} TG^n \to 0$$

ovat lohkeavia eksakteja jonoja jokaisella $n \in \mathbb{N}$. Joten saadaan lyhyt eksakti jono koketjukomplekseja ja koketjukuvauksia

$$0^\bullet \to T\mathbf{E}^{A'} \xrightarrow{Tf^\bullet} T\mathbf{F}^A \xrightarrow{Tg^\bullet} T\mathbf{G}^{A''} \to 0^\bullet.$$

Nyt lauseen 5.6 nojalla on olemassa pitkä eksakti jono

$$\begin{gathered}\ldots \longrightarrow H^n(T\mathbf{E}^{A'}) \xrightarrow{H^n(Tf^\bullet)} H^n(T\mathbf{F}^A) \xrightarrow{H^n(Tg^\bullet)} H^n(T\mathbf{G}^{A''}) \xrightarrow{\partial^n} \\ \xrightarrow{\partial^n} H^{n+1}(T\mathbf{E}^{A'}) \xrightarrow{H^{n+1}(Tf^\bullet)} H^{n+1}(T\mathbf{F}^A) \xrightarrow{H^{n+1}(Tg^\bullet)} H^{n+1}(T\mathbf{G}^{A''}) \longrightarrow \ldots\end{gathered}$$

Mutta nyt kovariantin oikealta derivoidun funktorin määritelmän nojalla jono saadaan muotoon

$$\begin{gathered}\ldots \longrightarrow (\mathcal{R}^nT)A' \xrightarrow{(\mathcal{R}^nT)f} (\mathcal{R}^nT)A \xrightarrow{(\mathcal{R}^nT)g} (\mathcal{R}^nT)A'' \xrightarrow{\partial_n} \\ \xrightarrow{\partial_n} (\mathcal{R}^{n+1}T)A' \xrightarrow{(\mathcal{R}^{n+1}T)f} (\mathcal{R}^{n+1}T)A \xrightarrow{(\mathcal{R}^{n+1}T)g} (\mathcal{R}^{n+1}T)A'' \longrightarrow \ldots\end{gathered}$$

Lisäksi lauseen 7.14 nojalla $(\mathcal{R}^nT)B = 0$ kaikilla $n < 0$ ja kaikilla R-moduleilla B, joten jonolla on alku

$$0 \longrightarrow (\mathcal{R}^0T)A' \xrightarrow{(\mathcal{R}^0T)f} (\mathcal{R}^0T)A \xrightarrow{(\mathcal{R}^0T)g} (\mathcal{R}^0T)A'' \longrightarrow \ldots$$

□

Lause 7.17. *Olkoot R ja S renkaita sekä $T\colon {}_R\mathbf{Mod} \to {}_S\mathbf{Mod}$ kovariantti additiivinen funktori. Tällöin $\mathcal{R}^n T$ on puolieksakti kaikilla $n \in \mathbb{N}$ sekä $\mathcal{R}^0 T$ on vasemmalta eksakti.*

Lause 7.18. *Olkoot R ja S renkaita sekä $T\colon {}_R\mathbf{Mod} \to {}_S\mathbf{Mod}$ vasemmalta eksakti, additiivinen, kovariantti funktori. Tällöin funktorit T ja $\mathcal{R}^0 T$ ovat luonnollisesti ekvivalentit.*

Todistus (vrt. [4, s. 142]). Olkoon A R-moduli ja $\mathbf{E}$ sen jokin injektiivinen resoluutio. Tämän resoluution alku on eksakti jono

$$0 \to A \xrightarrow{\eta} E^0 \xrightarrow{d^0} E^1$$

Nyt koska funktori T on vasemmalta eksakti, niin myös jono

$$0 \to TA \xrightarrow{T\eta} TE^0 \xrightarrow{Td^0} TE^1.$$

on eksakti. Siis

$$TA \cong \mathrm{Im}(T\eta) = \mathrm{Ker}(Td^0) \cong \mathrm{Ker}(Td^0)/0 = (\mathcal{R}^0 T)A$$

Olkoon sitten B toinen R-moduli ja $f\colon A \to B$ R-homomorfismi. Olkoon lisäksi $\mathbf{F}$ modulin B injektiivinen resoluutio. Tällöin vertailulauseen nojalla on olemassa koketjukuvaus $f^\bullet\colon \mathbf{E}^A \to \mathbf{F}^B$ yli kuvauksen f.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\eta"] \arrow[d, "f"] & E^0 \arrow[r, "d^0"] \arrow[d, "f^0"] & E^1 \arrow[d, "f^1"] \\
0 \arrow[r] & B \arrow[r, "\eta'"] & F^0 \arrow[r, "\delta^0"] & F^1
\end{tikzcd}$$

Soveltamalla (vasemmalta eksaktia) funktoria T saadaan kommutoiva kaavio

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & TA \arrow[r, "T\eta"] \arrow[d, "Tf"] & TE^0 \arrow[r, "Td^0"] \arrow[d, "Tf^0"] & TE^1 \arrow[d, "Tf^1"] \\
0 \arrow[r] & TB \arrow[r, "T\eta'"] & F^0 \arrow[r, "T\delta^0"] & TF^1
\end{tikzcd}$$

jonka rivit ovat eksakteja. Tämä indusoi kommutoivan kaavion

$$\begin{tikzcd}
TA \arrow[r, "\overline{T\eta}"] \arrow[d, "Tf"'] & \mathrm{Ker}(Td^0) \cong (\mathcal{R}^0 T)A \arrow[d, "\overline{Tf^0}"] \\
TB \arrow[r, "\overline{T\eta'}"] & \mathrm{Ker}(T\delta^0) \cong (\mathcal{R}^0 T)B
\end{tikzcd}$$

Siis funktorit T ja $\mathcal{R}^0 T$ ovat luonnollisesti ekvivalentit. □

7.4 Kontravariantit vasemmalta derivoidut funktorit

Olkoot R ja S renkaita ja $U\colon {}_R\mathbf{Mod} \to {}_S\mathbf{Mod}$ additiivinen kontravariantti funktori. Kiinnitetään jokaiselle R-modulille A katkaistu injektiivinen resoluutio $\mathbf{E}^A$. Sovelletaan nyt funktoria U tähän, jolloin saadaan ketjukompleksi

$$U\mathbf{E}^A\colon \qquad \cdots \to U(E^2) \xrightarrow{U(d^2)} U(E^1) \xrightarrow{U(d^1)} U(E^0) \to 0.$$

Määritellään

$$(\mathcal{L}_n U)A = H_n(U\mathbf{E}^A).$$

Lisäksi jos A ja A' ovat R-moduleita ja $f\colon A \to A'$ on R-homomorfismi, niin vertailulauseen (lause 6.6) nojalla on olemassa koketjukuvaus $\hat{f}^\bullet\colon \mathbf{E}^A \to \mathbf{F}^{A'}$ yli kuvauksen f, missä $\mathbf{F}$ on modulin A' jokin injektiivinen resoluutio. Tällöin jono $(U\hat{f}^n)_{n\in\mathbb{Z}} = U\hat{f}^\bullet\colon U\mathbf{E}^A \to U\mathbf{E}^{A'}$ on ketjukuvaus ja määritellään

$$(\mathcal{L}_n U)f = H_n(U\hat{f}^\bullet).$$

Osoitautuu, että $\mathcal{L}_n U$ on funktori sekä se ei riipu resoluution valinnasta, kuten kovariantti oikealta derivoitu funktori $\mathcal{R}^n T$, missä T on additiivinen kovariantti funktori. Mutta sen sijaan että se on kovariantti, se on kontravariantti. Sanotaan, että $\mathcal{L}_n U\colon {}_R\mathbf{Mod} \to {}_S\mathbf{Mod}$ ($n \in \mathbb{Z}$) on funktorin $U\colon {}_R\mathbf{Mod} \to {}_S\mathbf{Mod}$ *vasemmalta derivoidut kontravariantit funktorit*.

Lisäksi tälle saadaan seuraavat lauseet.

Lause 7.19. *Olkoot R ja S renkaita, A, A' ja A'' R-moduleita sekä $f\colon A' \to A$ ja $g\colon A \to A''$ R-homomorfismeja, joilla jono*

$$0 \to A' \xrightarrow{f} A \xrightarrow{g} A'' \to 0$$

on eksakti. Olkoon lisäksi $U\colon {}_R\mathbf{Mod} \to {}_S\mathbf{Mod}$ additiivinen kontravariantti funktori. Tällöin on olemassa pitkä eksakti jono

$$\begin{aligned}\ldots \longrightarrow (\mathcal{L}_{n+1}U)A'' &\xrightarrow{(\mathcal{L}_{n+1}U)g} (\mathcal{L}_{n+1}U)A \xrightarrow{(\mathcal{L}_{n+1}U)f} (\mathcal{L}_{n+1}U)A' \xrightarrow{\partial_{n+1}} \\ \xrightarrow{\partial_{n+1}} (\mathcal{L}_n U)A'' &\xrightarrow{(\mathcal{L}_n U)g} (\mathcal{L}_n U)A \xrightarrow{(\mathcal{L}_n U)f} (\mathcal{L}_n U)A' \longrightarrow \ldots\end{aligned}$$

jolla on loppu

$$\cdots \longrightarrow (\mathcal{L}_0 U)A'' \xrightarrow{(\mathcal{L}_0 U)g} (\mathcal{L}_0 U)A \xrightarrow{(\mathcal{L}_0 U)f} (\mathcal{L}_0 U)A' \longrightarrow 0$$

Lause 7.20. *Olkoot R ja S renkaita sekä $U\colon {}_R\mathbf{Mod} \to {}_S\mathbf{Mod}$ kontravariantti additiivinen funktori. Tällöin $\mathcal{L}_n U$ on puolieksakti kaikilla $n \in \mathbb{N}$ sekä $\mathcal{L}_0 U$ on oikealta eksakti.*

Lause 7.21. *Olkoot R ja S renkaita sekä $U\colon {}_R\mathbf{Mod} \to {}_S\mathbf{Mod}$ oikealta eksakti additiivinen kontravariantti funktori. Tällöin funktorit U ja $\mathcal{L}_0 U$ ovat luonnollisesti ekvivalentit.*

7.5 Kontravariantit oikealta derivoidut funktorit

Olkoot R ja S renkaita ja $U\colon {}_R\mathbf{Mod} \to {}_S\mathbf{Mod}$ additiivinen kontravariantti funktori. Kiinnitetään jokaiselle R-modulille A katkaistu projektiivinen resoluutio $\mathbf{P}_A$. Sovelletaan nyt funktoria U tähän, jolloin saadaan koketjukompleksi

$$U\mathbf{P}_A\colon \quad 0 \to U(P_0) \xrightarrow{U(d_0)} U(P_1) \xrightarrow{U(d_1)} U(P_2) \to \dots$$

Määritellään

$$(\mathcal{R}^n U)A = H^n(U\mathbf{P}_A).$$

Lisäksi jos A ja A' ovat R-moduleita ja $f\colon A \to A'$ on R-homomorfismi, niin vertailulauseen (lause 6.3) nojalla on olemassa ketjukuvaus $\hat{f}_\bullet\colon \mathbf{P}_A \to \mathbf{P}'_{A'}$ yli kuvauksen f. Tällöin jono $(U\hat{f}_n)_{n\in\mathbb{Z}} = U\hat{f}_\bullet\colon U\mathbf{P}_A \to U\mathbf{P}'_{A'}$ on koketjukuvaus ja määritellään

$$(\mathcal{R}^n U)f = H^n(U\hat{f}_\bullet).$$

Osoitautuu, että $\mathcal{R}^n U$ on funktori sekä se ei riipu resoluution valinnasta, kuten kovariantti vasemmalta derivoitu funktori $\mathcal{L}_n T$, missä T on additiivinen kovariantti funktori. Mutta sen sijaan että se on kovariantti, se on kontravariantti. Sanotaan, että $\mathcal{R}^n U\colon {}_R\mathbf{Mod} \to {}_S\mathbf{Mod}$ ($n \in \mathbb{Z}$) on funktorin $U\colon {}_R\mathbf{Mod} \to {}_S\mathbf{Mod}$ *oikealta derivoidut kontravariantit funktorit*.

Lisäksi tälle saadaan seuraavat lauseet.

Lause 7.22. *Olkoot R ja S renkaita, A, A' ja A'' R-moduleita sekä $f\colon A' \to A$ ja $g\colon A \to A''$ R-homomorfismeja, joilla jono*

$$0 \to A' \xrightarrow{f} A \xrightarrow{g} A'' \to 0$$

on eksakti. Olkoon lisäksi $U\colon {}_R\mathbf{Mod} \to {}_S\mathbf{Mod}$ kontravariantti additiivinen funktori. Tällöin on olemassa pitkä eksakti jono

$$\dots \longrightarrow (\mathcal{R}^n U)A'' \xrightarrow{(\mathcal{R}^n U)g} (\mathcal{R}^n U)A \xrightarrow{(\mathcal{R}^n U)f} (\mathcal{R}^n U)A' \xrightarrow{\partial^n}$$
$$\xrightarrow{\partial^n} (\mathcal{R}^{n+1} U)A'' \xrightarrow{(\mathcal{R}^{n+1} U)g} (\mathcal{R}^{n+1} U)A \xrightarrow{(\mathcal{R}^{n+1} U)f} (\mathcal{R}^{n+1} U)A' \longrightarrow \dots$$

jolla on alku

$$0 \longrightarrow (\mathcal{R}^0 U)A'' \xrightarrow{(\mathcal{R}^0 U)g} (\mathcal{R}^0 U)A \xrightarrow{(\mathcal{R}^0 U)f} (\mathcal{R}^0 U)A' \longrightarrow \dots$$

Lause 7.23. *Olkoot R ja S renkaita sekä $U\colon {}_R\mathbf{Mod} \to {}_S\mathbf{Mod}$ kontravariantti additiivinen funktori. Tällöin $\mathcal{R}^n U$ on puolieksakti kaikilla $n \in \mathbb{N}$ sekä $\mathcal{R}^0 U$ on vasemmalta eksakti.*

Lause 7.24. *Olkoot R ja S renkaita sekä $U\colon {}_R\mathbf{Mod} \to {}_S\mathbf{Mod}$ vasemmalta eksakti kontravariantti additiivinen funktori. Tällöin funktorit U ja $\mathcal{R}^0 U$ ovat luonnollisesti ekvivalentit.*

8 Ext ja Tor

8.1 Tor

Määritelmä 8.1. Olkoon R rengas ja X R-moduli. Asetetaan

$$\begin{aligned}\mathrm{Tor}_n(\bullet, X) &= \mathcal{L}_n(\otimes X),\\ \mathrm{tor}_n(X, \bullet) &= \mathcal{L}_n(X\otimes).\end{aligned}$$

Lause 8.1. *Olkoon R rengas ja X R-moduli. Tällöin*

a) funktorit $\otimes X$ ja $\mathrm{Tor}_0(\bullet, X)$ ovat luonnollisesti ekvivalentit, erityisesti

$$\mathrm{Tor}_0(A, X) \cong A \otimes X$$

jokaisella R-modulilla A,

b) funktorit $X\otimes$ ja $\mathrm{tor}_0(X, \bullet)$ ovat luonnollisesti ekvivalentit, erityisesti

$$\mathrm{tor}_0(X, A) \cong X \otimes A$$

jokaisella R-modulilla A.

Todistus. Väiteet seuraa suoraan lauseesta 7.11. □

Lause 8.2. *Olkoon R rengas ja X R-moduli sekä*

$$0 \to A' \to A \to A'' \to 0$$

lyhyt eksakti jono R-moduleita ja R-homomorfismeja. Tällöin on olemassa pitkät eksaktit jonot

a)

$$\dots \longrightarrow \mathrm{Tor}_{n+1}(A', X) \longrightarrow \mathrm{Tor}_{n+1}(A, X) \longrightarrow \mathrm{Tor}_{n+1}(A'', X) \longrightarrow$$
$$\longrightarrow \mathrm{Tor}_n(A', X) \longrightarrow \mathrm{Tor}_n(A, X) \longrightarrow \mathrm{Tor}_n(A'', X) \longrightarrow \dots$$

jolla on loppu

$$\cdots \longrightarrow \mathrm{Tor}_1(A'', X) \longrightarrow A' \otimes X \longrightarrow A \otimes X \longrightarrow A'' \otimes X \longrightarrow 0,$$

b)

$$\dots \longrightarrow \mathrm{tor}_{n+1}(X, A') \longrightarrow \mathrm{tor}_{n+1}(X, A) \longrightarrow \mathrm{tor}_{n+1}(X, A'') \longrightarrow$$
$$\longrightarrow \mathrm{tor}_n(X, A') \longrightarrow \mathrm{tor}_n(X, A) \longrightarrow \mathrm{tor}_n(X, A'') \longrightarrow \dots$$

jolla on loppu

$$\cdots \longrightarrow \mathrm{tor}_1(X, A'') \longrightarrow X \otimes A' \longrightarrow X \otimes A \longrightarrow X \otimes A'' \longrightarrow 0.$$

Lause 8.3. *Olkoon R rengas ja A R-moduli sekä $T\colon {}_R\mathbf{Mod} \to {}_S\mathbf{Mod}$ additiivinen kovariantti funktori. Olkoon lisäksi* $\mathbf{P}$ *modulin A projektiivinen resoluutio.*

$$\mathbf{P}\colon \quad \ldots \to P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{\varepsilon} A \to 0.$$

Jos merkitään $K_0 = \mathrm{Ker}(\varepsilon)$ *ja* $K_n = \mathrm{Ker}(d_n)$ *jokaisella* $n \geq 1$*, niin tällöin*

$$(\mathcal{L}_{n+1}T)A \cong (\mathcal{L}_nT)K_0 \cong (\mathcal{L}_{n-1}T)K_1 \cong \cdots \cong (\mathcal{L}_1T)K_{n-1}.$$

Todistus (vrt. [3, s. 349]). Nyt $\mathbf{P}$ on projektiivisena resoluutiona eksakti, joten $K_0 = \mathrm{Ker}(\varepsilon) = \mathrm{Im}(d_1)$. Siis jono

$$\mathbf{Q}\colon \quad \cdots \to P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} K_0 \to 0$$

on modulin K_0 projektiivinen resoluutio. Joten

$$(\mathcal{L}_nT)K_0 \cong H_n(T\mathbf{Q}_{K_0}) = \mathrm{Ker}(d_{n+1})/\mathrm{Im}(d_{n+2}) = H_{n+1}(T\mathbf{P}_A) \cong (\mathcal{L}_{n+1}T)A.$$

Muut isomorfismit saadaan iteroimalla. □

Erityisesti lauseesta seuraa, että

$$\mathrm{Tor}_{n+1}(A, X) \cong \mathrm{Tor}_n(K_0, X) \cong \cdots \cong \mathrm{Tor}_1(K_{n-1}, X)$$

ja

$$\mathrm{tor}_{n+1}(X, A) \cong \mathrm{tor}_n(X, K_0) \cong \cdots \cong \mathrm{tor}_1(X, K_{n-1})$$

kaikilla R-moduleilla X.

Lause 8.4. *Olkoon R rengas ja*

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{Ker}(f) \arrow[r] \arrow[d, "i"] & 0 \arrow[d] & \mathrm{Ker}(h) \arrow[d] & \\
\mathrm{Ker}(a) \arrow[r, "j"] \arrow[d] & L' \arrow[r, "a"] \arrow[d, "f"] & M' \arrow[r] \arrow[d, "g"] & N' \arrow[r] \arrow[d, "h"] & 0 \\
0 \arrow[r] & L \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d] & N \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
\mathrm{Ker}(b) \arrow[r] & L'' \arrow[r, "b"] \arrow[d] & M'' \arrow[r] \arrow[d] & N'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

kommutoiva kaavio R-moduleita ja R-homomorfismeja, jolla on eksaktit rivit ja sarakkeet. Tällöin $\mathrm{Ker}(f) \cong \mathrm{Ker}(a)$ *ja* $\mathrm{Ker}(h) \cong \mathrm{Ker}(b)$*.*

Todistus (kts. [3, s. 355]). Lauseen 5.9 nojalla on olemassa ekakti jono

$$\mathrm{Ker}(g) \to \mathrm{Ker}(h) \to \mathrm{Coker}(f) \to \mathrm{Coker}(g).$$

Tässä $\mathrm{Ker}(g) = 0$ sekä ensimmäisen isomorfialauseen nojalla $\mathrm{Coker}(f) \cong L''$ ja $\mathrm{Coker}(g) \cong M''$. Siis saadaan eksakti jono

$$0 \to \mathrm{Ker}(h) \to L'' \xrightarrow{b} M''.$$

Joten $\mathrm{Ker}(h) \cong \mathrm{Ker}(b)$.

Kaavion kommutoinnista seuraa, että $fj = 0$ ja $ai = 0$. Siis

$$\mathrm{Im}(j) \subseteq \mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Im}(i) \quad \text{ja} \quad \mathrm{Im}(i) \subseteq \mathrm{Ker}(a) = \mathrm{Im}(j).$$

Joten $\mathrm{Ker}(f) \cong \mathrm{Im}(i) = \mathrm{Im}(j) \cong \mathrm{Ker}(a)$. □

Lause 8.5. *Olkoon R rengas sekä A ja B R-moduleita. Tällöin*

$$\mathrm{tor}_n(A, B) \cong \mathrm{Tor}_n(A, B)$$

jokaisella $n \in \mathbb{N}$.

Todistus (vrt. [3, s. 355]). Todistetaan väite induktiolla. Ensinnäkin lauseesta 8.1 seuraa, että

$$\mathrm{tor}_0(A, B) \cong A \otimes B \cong \mathrm{Tor}_0(A, B).$$

Oletetaan sitten, että $n \geq 1$. Olkoon $\mathbf{P}$ modulin A ja $\mathbf{Q}$ modulin B projektiivinen resoluutio. Hajoitetaan nämä resoluutiot lyhyiksi eksakteiksi jonoiksi. Kaaviosta

$$\begin{tikzcd}
\dots \arrow[r] & P_2 \arrow[rr, "d_2"] \arrow[dr] & & P_1 \arrow[rr, "d_1"] \arrow[dr] & & P_0 \arrow[r, "\varepsilon"] & A \arrow[r] & 0 \\
& & \mathrm{Ker}(d_1) \arrow[ur] & & \mathrm{Ker}(\varepsilon) \arrow[ur] & & &
\end{tikzcd}$$

saadaan jonot

$$0 \to \mathrm{Ker}(d_i) \to P_i \to \mathrm{Ker}(d_{i-1}) \to 0,$$

jotka ovat eksakteja. Vastaavasti saadaan lyhyet eksaktit jonot

$$0 \to \mathrm{Ker}(d'_i) \to Q_i \to \mathrm{Ker}(d'_{i-1}) \to 0,$$

Merkitään $K_{-1} = A$, $d_0 = \varepsilon$, $V_{-1} = B$, $d'_0 = \varepsilon'$ ja jokaisella $i \in \mathbb{N}$, $K_i = \mathrm{Ker}(d_i)$ ja $V_i = \mathrm{Ker}(d'_i)$.

Kun sovelletaan funktoreiden $\mathrm{Tor}_n(\bullet, V_j)$ ja $\mathrm{tor}_n(K_i, \bullet)$ pitkiä eksakteja jonoja (lause 8.2), saadaan kaikilla $i, j \in \mathbb{N}$, kommutoiva kaavio

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & & 0 \arrow[d] & \\
 & & \mathrm{Tor}_1(K_{i-1}, V_j) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Tor}_1(K_{i-1}, V_{j-1}) \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \mathrm{tor}_1(K_i, V_{j-1}) \arrow[r] \arrow[d] & K_i \otimes V_j \arrow[r] \arrow[d] & K_i \otimes Q_j \arrow[r] \arrow[d] & K_i \otimes V_{j-1} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 \arrow[r] \arrow[d] & P_i \otimes V_j \arrow[r] \arrow[d] & P_i \otimes Q_j \arrow[r] \arrow[d] & P_i \otimes V_{j-1} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{tor}_1(K_{i-1}, V_{j-1}) \arrow[r] & K_{i-1} \otimes V_j \arrow[r] \arrow[d] & K_{i-1} \otimes Q_j \arrow[r] \arrow[d] & K_{i-1} \otimes V_{j-1} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Lisäksi kaavion rivit ja sarakkeet ovat eksakteja sekä kaikki

$$\mathrm{Tor}_1(P_i, V_j), \mathrm{Tor}_1(K_{i-1}, Q_j), \mathrm{Tor}_1(P_i, V_{j-1}), \mathrm{tor}_1(K_i, Q_j), \mathrm{tor}_1(P_i, V_{j-1}), \mathrm{tor}_1(K_{i-1}, Q_j)$$

ovat nollamoduleita, sillä modulit Q_j ja P_i ovat projektiivisia. Tästä syystä ylhäällä ja vasemmalla on alkiona 0. Nyt edellisen lauseen nojalla

$$\mathrm{Tor}_1(K_{i-1}, V_{j-1}) \cong \mathrm{tor}_1(K_{i-1}, V_{j-1})$$

kaikilla $i, j \in \mathbb{N}$. Erityisesti kun $i, j = 0$, saadaan

$$\mathrm{Tor}_1(A, B) \cong \mathrm{tor}_1(A, B).$$

Väite on siis todistettu arvolle $n = 1$.

Osoitetaan lopuksi, että väite on voimassa arvolla $n + 1$. Nyt lauseesta 8.4 ja edellisestä kaaviosta seuraa, että

$$\mathrm{Tor}_1(K_{i-1}, V_j) \cong \mathrm{tor}_1(K_i, V_{j-1}).$$

Jolloin

$$\mathrm{tor}_1(K_i, V_{j-1}) \cong \mathrm{Tor}_1(K_{i-1}, V_j) \cong \mathrm{tor}_1(K_{i-1}, V_j)$$

Lisäksi lauseen 8.3 nojalla

$$\begin{aligned} \mathrm{Tor}_{n+1}(A, B) &\cong \mathrm{Tor}_1(K_{n-1}, B) = \mathrm{Tor}_1(K_{n-1}, V_{-1}), \\ \mathrm{tor}_{n+1}(A, B) &\cong \mathrm{tor}_1(A, V_{n-1}) = \mathrm{tor}_1(K_{-1}, V_{n-1}). \end{aligned}$$

Siis

$$\begin{aligned} \mathrm{tor}_{n+1}(A, B) &\cong \mathrm{tor}_1(K_{-1}, V_{n-1}) \cong \mathrm{tor}_1(K_0, V_{n-2}) \cong \cdots \cong \mathrm{tor}_1(K_{n-1}, V_{-1}) \\ &\cong \mathrm{Tor}_1(K_{n-1}, V_{-1}) \cong \mathrm{Tor}_{n+1}(A, B). \end{aligned}$$

□

8.2 Ext

Määritelmä 8.2. Olkoon R rengas ja X R-moduli. Asetetaan

$$\begin{aligned} \mathrm{Ext}^n(X, \bullet) &= \mathcal{R}^n(\mathrm{Hom}(X, \bullet)), \\ \mathrm{ext}^n(\bullet, X) &= \mathcal{R}^n(\mathrm{Hom}(\bullet, X)). \end{aligned}$$

Lause 8.6. *Olkoon R rengas ja X R-moduli. Tällöin*

a) funktorit $\mathrm{Hom}(X, \bullet)$ *ja* $\mathrm{Ext}^0(X, \bullet)$ *ovat luonnollisesti ekvivalentit, erityisesti*

$$\mathrm{Ext}^0(X, A) \cong \mathrm{Hom}(X, A)$$

jokaisella R-modulilla A,

b) funktorit $\mathrm{Hom}(\bullet, X)$ *ja* $\mathrm{ext}_0(\bullet, X)$ *ovat luonnollisesti ekvivalentit, erityisesti*

$$\mathrm{ext}_0(A, X) \cong \mathrm{Hom}(A, X)$$

jokaisella R-modulilla A.

Todistus. Väiteet seuraa suoraan lauseista 7.18 ja 7.21. □

Lause 8.7. *Olkoon R rengas ja X R-moduli sekä*

$$0 \to A' \to A \to A'' \to 0$$

lyhyt eksakti jono R-moduleita ja R-homomorfismeja. Tällöin on olemassa pitkät eksaktit jonot

a)

$$\ldots \longrightarrow \mathrm{Ext}^n(X, A') \longrightarrow \mathrm{Ext}^n(X, A) \longrightarrow \mathrm{Ext}^n(X, A'') \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \mathrm{Ext}^{n+1}(X, A') \longrightarrow \mathrm{Ext}^{n+1}(X, A) \longrightarrow \mathrm{Ext}^{n+1}(X, A'') \longrightarrow \ldots$$

jolla on alku

$$0 \to \mathrm{Hom}(X, A') \to \mathrm{Hom}(X, A) \to \mathrm{Hom}(X, A'') \to \mathrm{Ext}^1(X, A') \to \ldots$$

b)

$$\ldots \longrightarrow \mathrm{ext}^n(A'', X) \longrightarrow \mathrm{ext}^n(A, X) \longrightarrow \mathrm{ext}^n(A', X) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \mathrm{ext}^{n+1}(A'', X) \longrightarrow \mathrm{ext}^{n+1}(A, X) \longrightarrow \mathrm{ext}^{n+1}(A', X) \longrightarrow \ldots$$

jolla on alku

$$0 \to \mathrm{Hom}(A'', X) \to \mathrm{Hom}(A, X) \to \mathrm{Hom}(A', X) \to \mathrm{ext}^1(A'', X) \to \ldots$$

Lause 8.8. *Olkoon R rengas ja A R-moduli sekä $T\colon {}_R\mathbf{Mod} \to {}_S\mathbf{Mod}$ additiivinen kovariantti funktori. Olkoon lisäksi $\mathbf{E}$ modulin A injektiivinen resoluutio.*

$$\mathbf{E}\colon \quad 0 \to A \xrightarrow{\eta} E^0 \xrightarrow{d^0} E^1 \xrightarrow{d^1} E^2 \to \dots$$

Jos merkitään $V_0 = \operatorname{Im}(\eta)$ ja $V_n = \operatorname{Im}(d^{n-1})$ jokaisella $n \geq 1$, niin tällöin

$$(\mathcal{R}^{n+1}T)A \cong (\mathcal{R}^nT)V_1 \cong (\mathcal{R}^{n-1})V_2 \cong \cdots \cong (\mathcal{R}^1T)V_n.$$

Todistus (vrt. [4, s. 145]). Nyt $\mathbf{E}$ on injektiivisenä resoluutiona eksakti, joten $V_1 = \operatorname{Im}(d^0) = \operatorname{Ker}(d^1)$. Siis jono

$$\mathbf{F}\colon \quad 0 \to V_1 \xrightarrow{i} E^1 \xrightarrow{d^1} E^2 \xrightarrow{d^2} E^3 \to \dots$$

on modulin V_1 injektiivinen resoluutio, kun $i\colon V_1 \to E^1$ on inkluusio. Joten

$$(\mathcal{R}^nT)V_1 = H^n(T\mathbf{F}^{V_1}) = \operatorname{Ker}(Td^{n+1})/\operatorname{Im}(Td^n) = H^{n+1}(T\mathbf{P}^A) = (\mathcal{R}^{n+1}T)A$$

Muut isomorfismit saadaan iteroimalla. □

Lause 8.9. *Olkoon R rengas ja A R-moduli sekä $U\colon {}_R\mathbf{Mod} \to {}_S\mathbf{Mod}$ additiivinen kontravariantti funktori. Olkoon lisäksi $\mathbf{P}$ modulin A projektiivinen resoluutio.*

$$\mathbf{P}\colon \quad \dots \to P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{\varepsilon} A \to 0.$$

Jos merkitään $K_0 = \operatorname{Ker}(\varepsilon)$ ja $K_n = \operatorname{Ker}(d_n)$ jokaisella $n \geq 1$, niin tällöin

$$(\mathcal{R}^{n+1}U)A \cong (\mathcal{R}^nU)K_0 \cong (\mathcal{R}^{n-1}U)K_1 \cong \cdots \cong (\mathcal{R}^1U)K_{n-1}.$$

Todistus (kts. [4, s. 145]). Sivuutetaan. □

Eritysesti näistä lauseista seuraa, että

$$\operatorname{Ext}^{n+1}(X, A) \cong \operatorname{Ext}^n(X, V_1) \cong \cdots \cong \operatorname{Ext}^1(X, V_n)$$

ja

$$\operatorname{ext}^{n+1}(A, X) \cong \operatorname{ext}^n(K_0, X) \cong \cdots \cong \operatorname{ext}^1(K_{n-1}, X)$$

kaikilla R-moduleilla X.

Lause 8.10. *Olkoon R rengas ja*

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & L' \arrow[r] \arrow[d] & M' \arrow[r, "a"] \arrow[d] & N' \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{Coker}(a) \\
0 \arrow[r] & L \arrow[r] \arrow[d, "f"] & M \arrow[r] \arrow[d, "g"] & N \arrow[r] \arrow[d, "h"] & 0 \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & L'' \arrow[r] \arrow[d] & M'' \arrow[r, "b"] \arrow[d] & N'' \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{Coker}(b) \\
 & \operatorname{Coker}(f) & 0 \arrow[r] & \operatorname{Coker}(h) &
\end{tikzcd}$$

kommutoiva kaavio R-moduleita ja R-homomorfismeja, jolla on eksaktit rivit ja sarakeet. Tällöin $\mathrm{Coker}(f) \cong \mathrm{Coker}(a)$ *ja* $\mathrm{Coker}(h) \cong \mathrm{Coker}(b)$.

Todistus. Vertaa lauseen 8.4 todistukseen. □

Lause 8.11. *Olkoon R rengas sekä A ja B R-moduleita. Tällöin*

$$\mathrm{Ext}^n(A, B) \cong \mathrm{ext}^n(A, B)$$

jokaisella $n \in \mathbb{N}$.

Todistus (vrt. [4, s. 151]). Todistetaan väite induktiolla. Ensinnäkin lauseesta 8.6 seuraa, että

$$\mathrm{ext}^0(A, B) \cong \mathrm{Hom}(A, B) \cong \mathrm{Ext}^0(A, B).$$

Oletetaan sitten, että $n \geq 1$. Olkoon $\mathbf{P}$ modulin A projektiivinen resoluutio ja $\mathbf{E}$ modulin B injektiivinen resoluutio. Hajoitetaan nämä resoluutiot lyhyiksi eksakteiksi jonoiksi. Kaavioista

$$\begin{tikzcd}
\dots \arrow[r] & P_2 \arrow[rr, "d_2"] \arrow[dr] & & P_1 \arrow[rr, "d_1"] \arrow[dr] & & P_0 \arrow[r, "\varepsilon"] & A \arrow[r] & 0 \\
& & \mathrm{Ker}(d_1) \arrow[ur] & & \mathrm{Ker}(\varepsilon) \arrow[ur] & & &
\end{tikzcd}$$

ja

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & B \arrow[r, "\eta"] & E^0 \arrow[rr, "d^0"] \arrow[dr] & & E^1 \arrow[rr, "d^1"] \arrow[dr] & & E^2 \arrow[r] & \dots \\
& & & \mathrm{Im}(d^0) \arrow[ur] & & \mathrm{Im}(d^1) \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}$$

saadaan ekaktit jonot

$$0 \to \mathrm{Ker}(d_i) \to P_i \to \mathrm{Ker}(d_{i-1}) \to 0,$$

ja

$$0 \to \mathrm{Im}(d^i) \to E^{i+1} \to \mathrm{Im}(d^{i+1}) \to 0.$$

Merkitään $K_{-1} = A, d_0 = \varepsilon, V_0 = B, d^{-1} = \eta$ ja jokaisella $i \in \mathbb{N}$, $K_i = \mathrm{Ker}(d_i)$ ja $V_i = \mathrm{Im}(d^{i-1})$. Joten saadaan eksaktit jonot

$$0 \to K_i \to P_i \to K_{i-1} \to 0$$

ja

$$0 \to V_i \to E^i \to V^{i+1} \to 0.$$

Kun sovelletaan funktoreiden $\mathrm{Ext}^n(V_i, \bullet)$ ja $\mathrm{ext}^n(\bullet, K_j)$ pitkiä eksakteja jonoja (lause 8.7), saadaan kaikillla $i, j \in \mathbb{N}$, kommutoiva kaavio

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}(K_{i-1}, V_j) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}(P_i, V_j) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}(K_i, V_j) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{ext}^1(K_{i-1}, V_j) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}(K_{i-1}, E^j) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}(P_i, E^j) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}(K_i, E^j) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}(K_{i-1}, V_{j+1}) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}(P_i, V_{j+1}) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}(K_i, V_{j+1}) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{ext}^1(K_{i-1}, V_{j+1}) \arrow[r] & 0 \\
 & \mathrm{Ext}^1(K_{i-1}, V_j) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] & \mathrm{Ext}^1(K_i, V_j) \arrow[d] & & \\
 & 0 & & 0 & &
\end{tikzcd}$$

Lisäksi kaavion rivit ja sarakkeet ovat eksakteja sekä kaikki

$$\mathrm{ext}^1(P_i, V_j), \mathrm{ext}^1(K_{i-1}, E^j), \mathrm{ext}^1(P_i, V_{j+1}), \mathrm{Ext}^1(K_{i-1}, E^j), \mathrm{Ext}^1(P_i, V_j), \mathrm{Ext}^1(K_i, E^j)$$

ovat nollamoduleita, sillä moduli P_i on projektiivinen ja E^j on injektiivinen. Tästä syystä oikealla ja alhaalla on alkiona 0. Nyt edellisen lauseen nojalla

$$\mathrm{Ext}^1(K_{i-1}, V_j) \cong \mathrm{ext}^1(K_{i-1}, V_j)$$

kaikilla $i, j \in \mathbb{N}$. Erityisesti kun $i, j = 0$, saadaan

$$\mathrm{Ext}^1(A, B) \cong \mathrm{ext}^1(A, B).$$

Väite on siis todistettu arvolle $n = 1$.

Osoitetaan lopuksi, että väite on voimassa arvolla $n + 1$. Nyt lauseesta 8.10 ja edellisestä kaaviosta seuraa, että

$$\mathrm{Ext}^1(K_i, V_j) \cong \mathrm{ext}^1(K_{i-1}, V_{j+1}).$$

Jolloin

$$\mathrm{Ext}^1(K_i, V_j) \cong \mathrm{ext}^1(K_{i-1}, V_{j+1}) \cong \mathrm{Ext}^1(K_{i-1}, V_{j+1}).$$

Lisäksi lauseiden 8.8 ja 8.9 nojalla

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ext}^{n+1}(A, B) &\cong \mathrm{Ext}^1(A, V_n) = \mathrm{Ext}^1(K_{-1}, V_n) \\
\mathrm{ext}^{n+1}(A, B) &\cong \mathrm{ext}^1(K_{n-1}, B) = \mathrm{ext}^1(K_{n-1}, V_0)
\end{aligned}$$

Siis

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ext}^{n+1}(A, B) &\cong \mathrm{Ext}^1(K_{-1}, V_n) \cong \mathrm{Ext}^1(K_0, V_{n-1}) \cong \cdots \cong \mathrm{Ext}^1(K_{n-1}, V_0) \\
&\cong \mathrm{ext}^1(K_{n-1}, V_0) \cong \mathrm{ext}^{n+1}(A, B).
\end{aligned}$$

□

Lähteet

[1] Osborne, M. *Basic homological algebra*. Springer, 2000.

[2] Rotman, J. *Advanced modern algebra*. American Mathematical Society, 2003.

[3] Rotman, J. *An Introduction to homological algebra*. Springer, 2009.

[4] Vermani, L. *An Elementary Approach to Homological Algebra*. CRC Press, 2003.