

TAMPEREEN YLIOPISTO

Toimintamateriaali murtolukujen opetuksessa

Kasvatustieteiden tiedekunta

Kasvatustieteiden pro gradu -tutkielma

REETTA HÄLVÄ

Toukokuu 2018

Tutkimus on osa matematiikan opetukseen tarkoitettujen Merkitysten kakut -toimintamateriaalin kehitystä. Tutkimus on kehittämistutkimus, jonka tavoitteena on luoda konkreettinen tuote ja sen toimintaan liittyvää tutkimusta matematiikan akateemisen lukutaidon näkökulmasta. Tutkimuksessa tarkastellaan, kuinka matematiikan akateemisen lukutaidon osa-alueet näkyvät Merkitysten kakut -materiaalin yhteydessä. Lisäksi tutkimuksessa tarkastellaan sitä, millaisia keinoja materiaali tarjoaa opettajalle oppilaan ajattelun ymmärtämiseen.

Tutkimuksen teoreettinen viitekehys muodostuu Judith Moschkovichin (2002) matematiikan akateemisen lukutaidon kolmesta osa-alueesta ja murtolukujen oppimiseen liittyvistä haasteista. Matematiikan akateemisen lukutaidon kolme osa-aluetta ovat matemaattiset käytänteet, matemaattinen osaaminen ja matemaattinen diskurssi. Tutkimus on luonteeltaan kvalitatiivinen.

Tutkimus toteutettiin kehittämistutkimuksen keinoin eräässä pirkanmaalaisessa alakoulussa 3. luokalla yhteistyössä Merkitysten kakut -materiaalin kehittäjän kasvatustieteiden maisteri Marko Blomqvistin kanssa. Tutkimus sisälsi tehtäväkokonaisuuden valmistamisen, opetuskokeilun, aineiston analyysin sekä tehtäväkokonaisuuden kehittämisen analyysin perusteella. Tehtäväkokonaisuus luotiin syksyllä 2017 ja opetuskokeilu toteutettiin tammi-helmikuussa 2018.

Opetuskokeilun aikana aineistoa kerättiin videoinnin ja kirjallisten, tehtäväkokonaisuuteen kuuluvien tehtävien avulla. Videoaineisto ja kirjallinen materiaali analysoitiin teoriaohjaavan sisällönanalyysin keinoin. Tulokset saatiin teemoittelun avulla asettamalla akateemisen lukutaidon eri osa-alueet ja niihin liittyvät taidot tarkasteltaviksi kokonaisuuksiksi, teemoiksi ja alateemoiksi. Tutkimuksessa aineisto jaettiin neljään eri aihealueeseen opettavien asioiden perusteella.

Tutkimuksen tuloksena todettiin, että akateemisen lukutaidon osa-alueista matemaattinen diskurssi korostuu eniten Merkitysten kakut -materiaalin ja siihen liittyvien tehtävien yhteydessä. Matemaattiseen diskurssiin lukeutuvat matematiikan neljä kieltä olivat tehtävien yhteydessä tasapuolisesti käytössä. Matemaattisista käytänteistä harjoitettiin eniten perustelun ja keskustelun taitoja työkalujen käytön ja matemaattisen mallintamisen rinnalla. Käytänteistä vähiten näkyi abstraktin ja kvantitatiivisen päättelyn harjoittaminen. Vähiten koko opetusmateriaalin yhteydessä harjoitettiin proseduraalisen sujuvuuden ja strategisen kompetenssin taitoja, jotka molemmat ovat matemaattiseen osaamiseen lukeutuvia taitoja. Matemaattisesta osaamisesta eniten kehittyi käsitteellisen ymmärtämisen taito.

Materiaalin yhteydessä oppilaat käyttivät matematiikan neljää kieltä monipuolisesti, mikä antoi opettajalle mahdollisuuksia oppilaan ajattelun ymmärtämiseen. Ratkaisujen vaatiminen matematiikan eri kielillä antoi tietoa oppilaan osaamisen tasosta ja ajattelusta. Eri kielistä voi tulkita, onko oppilas oppinut mallin annettujen esimerkkien kautta vai ymmärtänyt ilmiön syvemmin. Tulosten pohjalta alkuperäistä opetusmateriaalia kehitettiin eri osaamisen alueita tasaisemmin huomioivaan suuntaan.

Tutkimuksessa esiteltyä Merkitysten kakut -materiaalia ei ole tutkittu aiemmin ja sen vuoksi sen jatkotutkimusmahdollisuudet ovat moninaiset. Toimintamateriaalin yhteydessä on mahdollista tutkia niin opettajien käyttökokemuksia, ajatuksia toimintamateriaaleista kuin oppilaiden oppimistuloksia. Toimintamateriaali antaa hyvän lähtökohdan erilaisille vertaileville tutkimuksille perinteisen ja uuden mallin välillä.

Avainsanat: matematiikka, kehittämistutkimus, toimintamateriaali, akateeminen lukutaito

SISÄLLYS

1	JOHDANTO	4
2	AKATEEMINEN LUKUTAITO MATEMATIIKASSA	7
2.1	MATEMAATTINEN OSAAMINEN	7
2.2	MATEMAATTISET KÄYTÄNTEET	9
2.3	MATEMAATTINEN DISKURSSI	11
3	MURTOLUKU	15
3.1	KÄSITTEEN YMMÄRTÄMISEN HAASTAVUUS	15
3.2	MURTOLUKUIHIN LIITTYVISTÄ HAVAINTO- JA OPETUSMATERIAALEISTA	18
3.2.1	<i>Toimintamateriaaleista</i>	18
3.2.2	<i>Merkitysten kakut –materiaali</i>	22
4	TUTKIMUSKYSYMYKSET	25
5	KEHITTÄMISTUTKIMUS	26
5.1	HISTORIAA	26
5.2	SUUNTAUKSEN RAJAAMINEN	28
5.3	HAASTEISTA	31
6	TUTKIMUKSEN TOTEUTUS	33
6.1	AINEISTO	33
6.2	SISÄLLÖNANALYYSI	35
6.2.1	<i>Teoriaohjaava sisällönanalyysi</i>	37
6.2.2	<i>Teemoittelu</i>	38
7	TULOKSET	41
7.1	MURTOLUVUN KÄSITE	41
7.2	KOKONAINEN	47
7.3	SUURUUSVERTAILU	50
7.4	MURTOLUVUN YHTeenLASKU	54
7.5	OPETTAJAN MAHDOLLISUUKSISTA	56
8	POHDINTA	60
8.1	POHDINTAA TUTKIMUKSEN TOTEUTUKSESTA	60
8.2	TUTKIMUKSEN LUOTETTAVUUS JA EETTISYYS	63
8.3	JATKOTUTKIMUSKOHTEET	66
	LÄHTEET	70
	LIITTEET	74

1 JOHDANTO

Matematiikka on monipuolinen aihealue, jota voidaan kuvailla monin eri tavoin. Sitä voidaan lähestyä laskemisen, matematiikan rakenteiden tai käytettävyyden kautta. Koulumaailmassa matematiikkaa käsitellään mielestäni aivan liian suppeasti mekaanisen laskemisen näkökulmasta, mikä onkin yksi syy tämän pro gradu -tutkielman kirjoittamiselle. Olen itse opiskellut matematiikkaa yliopistossa, ja vaikka omat opintoni eivät johtaneet tutkintoon matematiikka pääaineena, ne herättivät minussa uudenlaisen kiinnostuksen matematiikkaa kohtaan. Yliopistossa matematiikkaa käsiteltiin hyvin eri näkökulmasta kuin peruskoulussa, mikä avasi silmäni tyystin toisenlaiseen mallien ja rakenteiden maailmaan. Matematiikka tulisi mielestäni nähdä peruskoulussakin laskemista laajemmin rakenteina, joita ilmenee erilaisin tavoin jokapäiväisessä elämässämme. Yhden vaihtoehdoisen näkemyksen matematiikan maailmasta ja tehtävästä koulumaailmassa kuvailee seuraava lainaus:

”Matematiikan avulla ei kehitetä kulttuuriamme vain materiaalisesti, vaan sen kautta kehitetään myös henkistä kulttuuriamme. Matematiikka kehittää ihmisen ajattelua, ja jokainen ihminen voi nauttia matemaattisesta ajattelusta. Kaikki me olemme matemaatikkoja. Meitä kiinnostavat määrä ja muoto, joita on kaikkialla. Kiinnostus on eri ihmisillä eri tasolla, mutta koulun tehtävä on lisätä tätä kiinnostusta kaikissa.” (Malaty 2003, 101.)

Malatyn ajatukset sisältävät paljon sellaisia piirteitä, jotka mielestäni kuuluvat matematiikkaan, mutta jotka koulumaailma sulkee oman kokemukseni mukaan ulkopuolelle. Matematiikan suppea käsittely näkyy siinä, kuinka oppilaat kokevat matematiikan. Esimerkiksi Tikkasen väitöskirjassa (2008) matematiikka koetaan monipuolisesti helpoksi ja vaikeaksi, nopeaksi oppimiseksi, jossa laskeminen korostuu. Tutkimuksessa oppilaat kokevat, että matematiikka on tärkeää, mutta aina sen tärkeyttä ei osata sitoa koulun ulkopuoliseen elämään tai muihin aineisiin. (Tikkanen 2008, 207-231.) Matematiikka tarjoaisi kuitenkin parhaimmillaan mahdollisuuksia pohtia oppilaan oman kokemusmaailman määrittämiä ongelmia, testata ja haastaa omaa ajattelua, keskustella ja väitellä. Näitä taitoja kehitetään harmillisen vähän matematiikan yhteydessä, vaikka materiaalia ja keinoja erilaiseen opetukseen olisi tarjolla.

Pro gradu -tutkielmassani perehdyn tarkemmin yhteen matematiikan opetukseen suunniteltuun toiminnalliseen materiaaliin. Merkitysten kakut -toimintamateriaali on kasvatustieteiden maisteri Marko Blomqvistin kehittämä materiaali, joka kannustaa oppilasta ja opettajaa käyttämään monipuolisesti erilaisia keinoja matemaattisen ajattelun ilmaisuun. Materiaalia ohjaavana ajatuksena onkin matematiikan neljän kielen malli, jossa matemaattinen diskurssi koostuu neljän eri kielen käytöstä ja vuorovaikutuksesta. Nämä neljä Joutsenlahden ja Rättyän määrittämää matematiikan kieltä ovat symbolikieli, kuviokieli, luonnollinen kieli ja taktiilinen toiminnan kieli (Joutsenlahti & Rättyä, 2014).

Tutkimuksessani rakennan opettajan ohjeita ja tehtäviä Merkitysten kakut -materiaaliin liittyen kehittämistutkimuksen keinoin ja tutkin kokoamani tehtäväpaketin ja materiaalin toimivuutta murtolukujen opetuksen pohjana matematiikan akateemisen lukutaidon näkökulmasta. Tavoitteenani on luoda mielekkäitä, erilaisia murtolukuihin liittyviä tehtäviä, jotka haastavat oppilasta ajattelemaan, tekemään, keskustelemaan ja toimimaan. Ja siinä sivussa opettelemaan matematiikkaa ja innostumaan siitä. Matematiikan opetukseen tarkoitettujen toimintamateriaalien käytön tutkiminen on mielekästä, sillä tutkimusmateriaalia niiden käytöstä on hyvin vähän, vaikkakin viime vuosina toimintamateriaaleista ja niiden toimivuudesta osana matematiikan opetusta onkin kiinnostuttu (ks. esim. Liggett 2017, Seyefia 2017, Willingham 2017). Toiminnalliset materiaalit tuntuvat usein jäävän vain pienen piirin käyttöön ja tekijän itsensä markkinoitaviksi. Tämä on harmillista, sillä useasti materiaalien kautta matematiikka voisi monelle oppilaalle avautua oikein käytettynä aivan uudella tavalla. Moni opettaja ei jaksa kehittää materiaalia itse, eikä aikaa työssä valmiiseen materiaaliin tutustumiseenkaan juuri ole.

Tutkimukseni on kokoelma tieteen kentän uusia tuulia monessa mielessä, sillä tutkimani Merkitysten kakut -toimintamateriaali on vielä kehitysvaiheessa. Tämän vuoksi myös uuden tutkimuksen tekemisen tavan valitseminen tuntui tutkimusta suunniteltaessa luonnolliselta ja sopivalta. Vasta vuosituhaten alussa yleistyneessä kehittämistutkimuksessa tavoitteena on kehityksen syklien kautta luoda uutta tietoa ja tuote, joka menee suoraan käyttöön. Kehittämistutkimuksen avulla pyritään pienentämään käytännön ja teorian välistä kuilua, joka usein jää liiankin suureksi ja esimerkiksi pro gradu -tutkielma kirjoittajan oman kirjahyllyn pölyttäjäksi. (Ks. esim. Edelson 2002, Pernaa 2013, The Design-Based Research Collective 2003.) Omassa tutkimuksessani syntyvä tuote on Merkitysten kakut -materiaaliin pohjautuva opetuskokonaisuus, joka sisältää opettajan ohjeet ja kolmannen luokan murtolukusisältöihin liittyviä tehtäviä. Tutkijana, ja tulevana opettajana, koen mieleiseksi sen,

että tutkimukseni tuloksena syntyy konkreettinen, testattu ja tieteellisesti perusteltu tuote, joka voidaan ottaa suoraan käyttöön sellaisenaan.

Tutkimuksen tuloksena syntyvän tuotteen lisäksi tutkimuksessa pureudutaan Merkitysten kakut - materiaalin kehittämiin matemaattisiin taitoihin. Tutkin materiaalin käyttöä ja omaa opetusmateriaaliani kolmannen luokan oppilaiden kanssa eräässä pirkanmaalaisessa alakoulussa ja kerään materiaalia videoinnin ja kirjallisten tehtävien avulla. Tätä keräämäni materiaalia analysoin teoriaohjaavan sisällönanalyysin avulla akateemisen lukutaidon käsitteen näkökulmasta. Matematiikan akateeminen lukutaito (*Academic literacy*) on Moschkovichin (2015a) muodostama malli, jossa matematiikkaan liittyvät taidot jaetaan kolmeen osa-alueeseen: matemaattiseen osaamiseen, matemaattisiin käytänteisiin ja matemaattiseen diskurssiin. (Moschkovich 2015a.) Mallin käsitettä matemaattinen diskurssi käsitellään tässä tutkimuksessa matematiikan kielentämisen neljän kielen mallin avulla (ks. Joutsenlahti & Rättyä 2014). Akateemisen lukutaidon, sen eri osa-alueet ja niihin liittyvät taidot esittelen raporttini toisessa luvussa.

Kolmannessa luvussa käsittelen niitä ongelmia, joita oppilaat kohtaavat murtolukuja opitellessaan ja käsittelen matematiikan toimintamateriaaleihin liittyviä ilmiöitä ja tutkimuksia. Luvussa on tarkoitus syventyä toimintamateriaalien kehitykseen ja käyttöön, sekä pureutua niiden opetuskäytön ongelmiin. Kolmannen luvun lopuksi esittelen tarkemmin, millainen tutkimuksessa tarkasteltu Merkitysten kakut -toimintamateriaali on. Neljännessä luvussa asetan kehittämistutkimuksen tutkimuskysymykset. Viidennessä luvussa esittelen kehittämistutkimuksen historiaa ja rajausta ja kuudennessa tutustun teoriaohjaavaan sisällönanalyysiin metodina ja esittelen tutkimuksen kulun ja siinä kerätyn aineiston. Tutkimuksen tulokset löytyvät luvusta seitsemän ja tutkimukseen liittyvää pohdintaa, jatkotutkimuskysymyksiä ja luotettavuutta tarkastelen luvussa kahdeksan.

2 AKATEEMINEN LUKUTAITO MATEMATIIKASSA

Akateeminen lukutaito on Moschkovichin (2015a) määrittämä käsite, joka pitää sisällään matemaattisen osaamisen (*mathematical proficiency*), matemaattiset käytänteet (*mathematical practises*) ja matemaattisen diskurssin (*mathematical discourse*). Akateeminen lukutaito liittyy matematiikan osaamisen eri osa-alueet toisiinsa ja luonnolliseen kieleen. Sen sisältöihin kuuluu matematiikan ymmärtäminen numeromerkintöjä laajemmin ja aiemmasta poiketen, se huomioi sosiaalisen kanssakäymisen osaksi matematiikan oppimista. Akateemisen lukutaidon eri osa-alueet eivät ole toisistaan erillisiä kokonaisuuksia, vaan toimivat lomittain ja ovat osittain päällekkäisiä. (Moschkovich 2015a & 2015b.)

Tässä luvussa esittelen kolme osa-aluetta, joista akateeminen lukutaito matematiikassa koostuu. Tutkimuksessani matemaattisen diskurssin käsitettä tarkastellaan Joutsenlahden ja Rättyän (2014) matematiikan neljän kielen mallin ja kielentämisen näkökulmasta.

2.1 *Matemaattinen osaaminen*

Kilpatrick, Swafford ja Findell (2001) määrittelevät matemaattisen osaamisen koostuvan viidestä osa-alueesta, jotka lomittuvat toisiinsa luontevasti (Kilpatrick, Swafford & Findell 2001, 115-145). Joutsenlahden ja Kuljun (2016) suomennokset näille käsitteille ovat käsitteellinen ymmärtäminen, proseduraalinen sujuvuus, strateginen kompetenssi, mukautuva päättely sekä yritteliäisyys (Joutsenlahti & Kulju 2016).

Käsitteellisellä ymmärtämisellä tarkoitetaan jäsenneiltyä, toimivaa kokonaisuutta ja ymmärrystä matematiikan koostumisesta. Taidon hallitseva henkilö omaa tarkoin jäsenneilyn kuvan siitä, milloin mitään strategiaa tulee käyttää ja miksi. Hän osaa liittää uusia tietoja ja taitoja loogisesti omien strategioidensa kokoelmaan. Usein nämä tiedot ovat luonnoltaan sellaisia, että oppilas ymmärtää asian jo ennen kuin pystyy täysin kielentämään osaamistaan. (Kilpatrick & kumpp. 2001, 118-120.)

Moschkovich liittyy käsitteellisen ymmärryksen taitoon saadun ratkaisun loogisuuden arvioinnin ja tiedon siitä, miksi matemaattinen keino toimii tietyssä tilanteessa (Moschkovich 2015a, 79).

Symbolikielen merkkien, erilaisten matemaattisten prosessien ja tehtävien muodostama labyrintti ei aukea ainoastaan käsitteellisen ymmärryksen keinoin. Proseduraaliseen sujuvuuteen kuuluu monia osa-alueita aritmeettisen laskutaidon lisäksi. (Moschkovich 2015a, 79.) Proseduraalisella sujuvuudella tarkoitetaan oikean strategian valitsemiseen sekä sen oikeaoppiseen, sujuvaan ja täsmälliseen käyttöön liittyviä taitoja. Perinteisen kynän ja paperin lisäksi tätä taitoa voi osoittaa ja harjoitella myös muiden välineiden avulla. (Kilpatrick & kumpp. 2011, 121-124.)

Strategisella kompetenssilla ”viitataan kykyyn muodostaa matemaattisia ongelmia, esittää niitä ja ratkaista ne” (Kilpatrick & kumpp. 2011, 124). Moschkovich täsmentää, etteivät rutiinitehtävät ja niiden sujuva ratkaiseminen lukeudu tämän taidon piiriin (Moschkovich 2015a, 79). Kilpatrick, Swafford ja Findell huomauttavat koulumaailman ja muun elämän välisestä ongelmasta strategiseen kompetenssiin liittyen. Koulumaailmassa matemaattinen ongelma ja yleensä viitteet ratkaisumalliin annetaan valmiina, kun taas koulun ulkopuolella ongelma täytyy ensin havaita, sitten muokata matematiikan kielelle ja lopuksi valita oikea strategia ratkaisun saamiseksi ja alkuperäisen ongelman ratkaisemiseksi. Heidän mukaansa näitä ongelman matemaattisen muodostamisen taitoja tulisi harjoittaa koulumaailmassa laajemmin. (Kilpatrick & kumpp. 2011, 124.)

Mukautuvalla päättelyllä tarkoitetaan taitoja, joiden avulla arvioidaan asioiden suhteita toisiinsa konseptisidonnaisesti ja tilanne huomioon ottaen. Tällä tarkoitetaan esimerkiksi sitä, ettei saadun ratkaisun tarkistaminen ole ainoa oikea tapa varmistaa oppiminen. Oppilaan oman päättelyketjun toiminnan varmistaminen on usein tärkeämpää. (Kilpatrick & kumpp. 2011, 129-131.) Myös Joutsenlahti ja Kulju (2016) mainitsevat oppilaan ajattelun seuraamisen ja tämän taidon tärkeydestä, sillä virheelliset käsitykset johtavat helposti väärään päättelyyn ja sitä kautta vastaukseen (Joutsenlahti & Kulju 2016).

Yritteliäisyys liitetään ymmärrykseen matematiikan hyödyllisyydestä, tärkeydestä ja halusta ratkaista siihen liittyviä ongelmia. Ymmärrys itsestä ongelmien ratkaisijana ja matematiikan oppijana liitetään tähän matemaattisen osaamisen osa-alueeseen. Itseluottamus omaan osaamiseen ja positiivinen kuva itsestä matematiikan oppijana antaa uskoa ja auttaa ratkaisemaan matemaattisia ongelmia sinnikkäästi. (Kilpatrick & kumpp. 2011, 132-133.) Koulumaailmassa matematiikkaa

harjoitellaan yleensä itse kirjan ääressä puurtaen, mutta esimerkiksi osallisuuden kokemuksen tarjoamisella on positiivinen vaikutus aineen oppimiseen (Moschkovich 2015a, 80-81).

Näistä matemaattisen osaamisen viidestä osa-alueesta, opetus keskittyy perinteisesti proseduraaliseen sujuvuuteen, vaikka muutkin taidot olisivat yhtä lailla tärkeitä sujuvan ja toimivan matemaattisen osaamisen saavuttamiseksi (Moschkovich 2015b, 46). Matematiikan opetuksessa ollaan kuitenkin muutettu suuntaa ja ajatus matematiikan ymmärtämisestä pelkän mekaanisen suorittamisen sijaan opetuksen tavoitteena on kasvattanut suosiotaan. Muutos on kuitenkin hidasta ja vaatii aktiivista ajattelua ja toimintaa tullakseen normaaliksi osaksi koulun arkea. (Kilpatrick & kumpp. 2011, 115-116.)

2.2 Matemaattiset käytänteet

Yhdysvaltalaisista opetusta ohjaavan asiakirjan matematiikan standardeihin kuuluvat kahdeksan pääkohtaa (8 mathematical practises) (Common Core State Standards 2018, myöh. State Standards). Joutsenlahti ja Kulju suomentavat termin matemaattisiksi käytänteiksi (Joutsenlahti & Kulju 2016). Nämä käytänteet koostuvat taidoista, jotka matemaattisesti taitavan oppilaan tulisi hallita koulunsa loputtua. Common Core -ohjelman tarkoituksena on yhtenäistää yhdysvaltalaisista opetusta ja varustaa oppilas kouluikänsä aikana taidoilla, joilla hän selviää tulevaisuudesta ja pärjää työelämässä. (State Standards 2018.) Matemaattiset käytänteet nimeävät taitoja, joita oppilas oppii matemaattisen tiedon lisäksi (Moschkovich 2015a, 81).

Ensimmäinen näistä matematiikan käytänteistä ohjaa lasta ymmärtämiseen ja sinnikkääseen yrittämiseen. Ymmärtämisellä tarkoitetaan tässä yhteydessä muun muassa sitä, että oppilas ”analysoi annettuja arvoja ja tietoja, rajoituksia, suhteita ja ratkaisua” (State Standards 2018). Ymmärtämiseen liitetään saadun ratkaisun arvioiminen. Taidon hallitseva oppilas osaa arvioida, onko saatu ratkaisu suhteessa kysymykseen järkevä ja mahdollisesti oikea. Mikäli vastaus ei oppilaan mielestä ole tällainen, astuu kuvaan sinnikkyys ja tahto yrittää uudelleen. Ensimmäiseen käytänteeseen liitetään myös taito tarkastella tehtävää useasta eri näkökulmasta erilaisia ratkaisumahdollisuuksia etsien ja taito luoda tehtävästä yksinkertaisempi malli monimutkaisen ratkaisun löytämiseksi. (State Standards 2018.)

Käytänteiden toinen kohta ohjaa hyvään abstraktiin ja kvantitatiiviseen päättelyyn. Siinä missä ensimmäinen käytänte tarjoo taitoja, joilla ongelman voi ratkaista, toinen käytänte korostaa

matematiikan eri kielten välistä keskustelua ja matemaattisten merkintöjen tarkoitusta. Toisin sanoen toisessa käytänteessä korostuu matemaattisen ajattelun tärkeys ei niinkään prosessin vaan prosessin taustalla vaikuttavan ajattelun kautta. Osa-alueeseen liitetään ymmärrys matemaattisen ongelman pilkkomisesta pienempiin osiin ja ratkaisun löytämisestä erilaisten keinojen avulla. Tähän käytänteeseen kuuluu ymmärrys matematiikan luonteesta tosielämän kuvaajana symbolikielen keinoin. Myös erilaisten matemaattisten sääntöjen ja rajoitusten ymmärtäminen on osa tätä taitoa. (State Standards 2018.)

Matemaattisista käytänteistä kolmas keskittyy keskustelun käymiseen ja matemaattisten ongelmien ja ratkaisujen sekä kielelliseen että suulliseen perustelemiseen. Tämä taitoalue kannustaa matemaattisten vuorovaikutustaitojen harjoitteluun ja opettaa matematiikan olevan muutakin, kuin itsenäistä laskemista ja päättelyä. Toisten oppilaiden perustelujen kyseenalaistaminen, omien argumenttien kehittäminen ja erilaisista ratkaisuista keskusteleminen tulisi ottaa matematiikan opetuksessa huomioon. (State Standards 2018.) Suomalaisessa matematiikan opetuksessa kielentämisen käsite sisältää samoja ajatusmalleja kuin yhdysvaltalaisen mallin kolmas käytänte (mm. Joutsenlahti 2003).

Kahdeksaan matemaattiseen käytänteeseen kuuluvat matemaattisen mallintamisen taidot. Tällä mallin neljännellä taidolla tarkoitetaan kykyä tehdä matemaattisia malleja arkipäiväisistä tilanteista ja ratkaista ongelmia näiden mallien ja niistä saatavien laskujen ja tehtävien avulla. Mallintamiseen voidaan käyttää eri välineitä, esimerkiksi tietokonetta tai yksinkertaisesti kynää ja paperia. (State Standards 2018).

Käytänteistä viides nostaa esiin matematiikan työkalut, joiden kanssa oppilaat päätyvät tekemisiin matemaattisia ongelmia ratkoessaan. Tämä kohta sisältää niin abstrakteja työkaluja kuin konkreettisiakin apuvälineitä, esimerkiksi laskimia tai tietokoneohjelmia. Nämä välineet hyvin hallitseva oppilas osaa valita oikean välineistön tehtävien ratkaisuun ja käyttää niitä tehtävän kannalta järkevästi ja oikein. Jo pitkälle kehittyneen osaamisen esimerkkejä tällaisesta oikean välineistön käytöstä ja hallinnasta ovat muun muassa matemaattisen tehtävän mallintaminen koneella tai kuvaajan pisteen etsiminen laskimen avulla. Yksinkertaisimmillaan matematiikan työkalujen oikealla käytöllä voidaan tarkoittaa myös viivoittimella oikein mittaamista tai matemaattisen tehtävän ratkaisemista paperilla. (State Standards 2018.)

Matematiikka on täynnä sopimuksia, joita kaikkien tulee noudattaa, jotta tieto säilyy samanlaisena ihmiseltä toiselle. Sen sisällä erityisen tärkeää on yhteinen symbolikieli ja sen hallitseminen. Tällä tavoin varmistetaan, että matemaattisen tekstin kirjoittajan ajatukset siirtyvät eteenpäin oikeanlaisina. Matematiikan käytänteistä kuudes ohjaa tarkkuuteen ja täsmällisyyteen, esimerkiksi matematiikan symbolikielen ja nimeämisen taidon kartuttamiseen tai tarkkaan mittaamiseen. Näillä taidoilla voidaan tarkoittaa esimerkiksi muodoista niiden oikean nimen käyttämistä ja taitoa selittää kotitehtävä oikeiden termien avulla. Myös erilaiset omaan toimintaan liittyvät, selkeän ja seurattavan laskemisen taidot ovat osa käytännettä. (State Standards 2018.) Ilman yhteistä kieltä oppilaan matemaattisen ajattelun seuraaminen ja ymmärryksen varmistaminen on mahdotonta. Oppilas siis tarvitsee tiettyjä taitoja, pystyäkseen harjoittamaan muita. (Kilpatrick & kumpp. 2011.)

Matemaattisista käytänteistä kaksi viimeistä keskittyvät matematiikan perusluonteeseen. Seitsemäs käytänne koostuu matemaattisista rakenteista, joita oppilaiden tulisi löytää ja käyttää hyödyksi opinnoissaan. Yksinkertaisia esimerkkejä näistä malleista ovat esimerkiksi kertolaskun vaihdannaisuus, yhteenlaskun liitännäisyys tai kymmenparit. Tähän käytänteeseen liittyvät tietyt yksinkertaistamisen säännöt ja oppilaan matemaattisen ajattelun kehittäminen. Kahdeksas kohta puolestaan nostaa esiin oppilaan taidon etsiä ja käyttää säännönmukaisuuksia, jotka helpottavat ja nopeuttavat tietynlaisten tehtävien ratkaisujen etsimistä. Etenkin kahdeksas kohta painottaa oppilaan omaa ajattelua ja päättelyä. (State Standards 2018.)

Opetuksessa tulisi kiinnittää huomiota matemaattisen osaamisen lisäksi näihin käytänteisiin. Käytänneet tukevat oppilaan oppimista ja tarjoavat tälle erilaisia keinoja ja mahdollisuuksia ilmaista elämäänsä liittyviä asioita ja tekijöitä. Matematiikka voidaan nähdä myös omana kielenään, jonka säännöt oppilaan tulee opetella pystyäkseen kommunikoimaan sen avulla. Täten matematiikka on myös osa kulttuuria ja sosiaalista maailmaa, johon oppilas kouluaikana sopeutuu, mikä korostaa sen tärkeyttä entisestään. (Moschkovich 2015b, 47.)

2.3 Matemaattinen diskurssi

Moschkovich (2015a) puhuu matemaattisesta diskurssista, joka sisältää matemaattisen viestinnän keinoja monipuolisesti (Moschkovich 2015a, 82–84). Vaikka termin "matematiikan kieli" käyttäminen olisi jossain määrin luonnollista tässä yhteydessä, kuvaa diskurssi paremmin sitä keskustelua ja vuorovaikutusta, jota matematiikan ympärillä tulisi syntyä. Koulumaailmassa äidinkieli ja matematiikka tuntuvat perinteisesti erillisiltä asioilta, vaikka todellisuudessa ne ovat

hyvin läheisessä kontaktissa keskenään. Matemaattisen ajatuksen selkeään kielelliseen ilmaistamiseen tarvitaan erikoistunutta sanastoa, matemaattisia termejä, joiden avulla ilmiötä voi selkeästi kuvata. Toisaalta oppilas, jolle kieli ei ole helpoin keino ajattelun ilmaisuun, matematiikka tarjoaa monia erilaisia mahdollisuuksia muotojen, piirrosten ja symbolikielen merkintöjen muodossa. (Moschkovich 2015b, 44-48.)

Suomalaisessa tutkimuksessa Joutsenlahti ja Kulju (2016) yhdistävät matemaattisen diskurssin kielentämisen käsitteeseen (Joutsenlahti & Kulju 2016). Jorma Joutsenlahden (2003) mukaan, matematiikan kielentämisellä tarkoitetaan koulun kontekstissa sitä, että oppilas itse selittää omaa matemaattista ajatteluaan omalla äidinkielellään. Kielentämisen avulla opettaja pääsee lähemmäs oppilaan ajatusmaailmaa ja pystyy arvioimaan oppilaan todellista osaamista ja etenkin ymmärrystä matemaattisista käsitteistä. Kielennettäessä oppilas rakentaa omaa malliaan matematiikasta ja sen käsitteistöstä sekä rakentaa kuvaa kulloinkin käsittelyssä olevan asian tärkeistä piirteistä. Tämän lisäksi kielennettäessä oppilaan täytyy muodostaa oppimansa järkeväksi puhutun kielen kokonaisuudeksi, josta myös vastaanottaja saa selvää. (Joutsenlahti 2003.)

Koulumaailmassa matematiikkaa kielennetään joko suullisesti tai kirjallisesti. Suullinen kielentäminen voi olla yksinkertaisuudessaan esimerkiksi oman ratkaisun selittämistä ja siinä käytettyjen keinojen erittelyä. Kirjallisella kielentämisellä tarkoitetaan selittämisen tapahtumista kirjallisesti. Esimerkkinä kirjallisesta kielentämisestä voi olla vaikkapa yksinkertainen selitys seuraavaksi suoritettavasta laskutoimituksesta ja sen tarkoituksesta oppilaan vihossa. Kielentäessä opettajan lisäksi myös toiset oppilaat pääsevät käsiksi toistensa ajatusmaailmaan. (Joutsenlahti 2003.) Suullinen kielentäminen ohjaa lasta huomaamaan omia virheitään ja auttaa matemaattisesti taitavaa jäsentämään omaa ymmärrystään esimerkiksi tilanteessa, jossa hän päätyy selittämään tehtävän ratkaisun tai opettamaan uuden asian heikommalle oppilaalle (Mansikka-aho & Sirén 2012, 65-67).

Oppilaan itsetunto ja positiivinen käsitys itsestä matematiikan oppijana on motivaation kannalta tärkeää. Mansikka-aho ja Sirén (2012) tuovat pro gradu -tutkielmassaan esiin sen, kuinka kielennettäessä luokassa vallitseva ilmapiiri on tärkeässä asemassa. Väärin vastaaminen on matematiikkaa kielennettäessä tärkeää, jotta päästäisiin kiinni siihen, miksi oppilaat ymmärtävät asian väärin tai heikosti. Väärin vastaaminen huomattiin Mansikka-ahon ja Sirénin tutkimuksessa kuitenkin koulun kontekstissa negatiiviseksi tai noloksi asiaksi. Matematiikassa epävarmat tai omaa vastausmalliaan epäilevät oppilaat vastasivat luokassa vähemmän ja osoittivat niukempaa

aktiivisuutta. Tutkimuksessa huomataan, että kielentäminen toimii parhaiten pienissä ryhmissä, jolloin hiljaisemmat ja aremmat oppilaat pääsevät ja lähtevät toimintaan mukaan aktiivisemmin. Myös erilaiset toimintamateriaalit koettiin hyväksi kielentämisen apuvälineiksi. (Mansikka-aho & Sirén 2012.) Kielentämiseen liittyvät monet keskustelun, toisen asemaan asettumisen ja vuorovaikutuksen taidot, joita etenkin perusopetuksen opetussuunnitelman perusteiden laaja-alaisen osaamisen tavoitteet ohjaavat opettamaan (POPS 2014).

Kielentämisen ajatus on esillä uusissa peruskoulun opetussuunnitelman perusteissa, vaikkakaan ei kovin runsaissa määrin. Opetussuunnitelmassa määritellään 3.-6.-luokan matematiikan opetuksen yhdeksi tavoitteeksi oppilaan omien tulosten ja matemaattisen ajattelun ilmaisemisen oppiminen monella eri tavalla ja välineistöllä. Tämän lisäksi asiakirjassa huomautetaan arvioinnista puhuttaessa, että ”oppilailta edellytetään aiempaa enemmän matemaattisen ajattelunsa esilletuomista puheen, välineiden, piirtämisen ja kirjallisen työskentelyn avulla”. (POPS 2014.) Opetussuunnitelmassa mainitut, arviointiin vaikuttavat taidot voidaan linkittää sekä Joutsenlahden (2003) kielentämisen käsitteeseen että siihen kuuluviin Joutsenlahden ja Rättyän (2014) määrittämään neljään matematiikan kieleen (Joutsenlahti & Rättyä 2014).

Joutsenlahti ja Kulju (2010) määrittävät matematiikan kolme kieltä, jotka toimivat toistensa lomassa matemaattista keskustelua käytäessä tai ongelmanratkaisua tehtäessä. Nuo kolme Joutsenlahden ja Kuljun erottelemaa kieltä ovat matematiikan symbolikieli, kuviokieli ja luonnollinen kieli. Symbolikieli sisältää matematiikan yleisesti tunnetun symboliston ja kuviokieli matematiikan esittämiseksi käytetyt kuvat. Luonnollisella kielellä tarkoitetaan puhujan tuottamaa, hänelle itselleen ymmärrettävää kieltä. (Joutsenlahti & Kulju 2010.) Näiden kolmen kielen lisäksi Joutsenlahti ja Rättyä (2014) määrittävät neljännen kielen, taktiilisen toiminnan kielen. Tällä kielellä viitataan matematiikan opetuksessa käytettävien toimintamateriaalien yhteydessä käytettävään kieleen, esimerkiksi käsin fyysisesti siirrettäviin murtolukupaloihin, joita käytetään opetuksessa matematiikan konkretisointiin. (Joutsenlahti & Rättyä 2014, 51-52.) Matematiikkaa voidaan hyvällä omalla tunnolla kutsua monikieliseksi. Vaikka oppilas ei osaisi viestittää ajatuksiaan täsmällisesti symbolikielen merkintöjen avulla, on ajattelun ilmaisuun ja tukemiseen myös monia muita keinoja. (Malaty 2003, 104.) Nämä eri keinot jäävät harmillisen usein liian vähälle huomiolle.

Matemaattista diskurssia voidaan käydä välineiden avulla, eikä se vaadi aina puhetta. Se on kuitenkin tärkeä osa oppimista, sillä palautteen saaminen ja väitteiden kirjaaminen ylös tavalla tai toisella, voi auttaa virheajattelun huomaamiseen ja korjaamiseen. Matemaattisen ajattelun

ilmaisemista vaikeuttaa kuva matematiikasta ”jäykän” ilmaisun säännöstönä. Koulumaailmassa oppilailla on kuitenkin usein erilaisia lähteitä, joiden kautta matematiikasta puhutaan. Esimerkiksi kotona puhuttu matematiikka eroaa usein koulussa käytetystä, mikä ei ole tavoiteltavaa. Matemaattisen diskurssin käyminen erilaisin keinoin on tärkeää käytännön ja teorian yhdistämiseksi oppilaiden ajatuksissa toimivaksi kokonaisuudeksi. (Moschkovich 2015b, 47-48.)

3 MURTOLUKU

Murtoluvulla tarkoitetaan lukua, jossa jaetaan jokin kokonaisuus yhtä suuriin osiin. Se on luku, joka ilmoitetaan kahden kokonaisluvun, osoittajan ja nimittäjän, osamäärän avulla ja sitä käytetään esimerkiksi silloin, kun halutaan ilmaista tarkka luku ilman pitkää desimaaliosuutta. Murtoluvut jaetaan kolmeen luokkaan, jotka ovat varsinaiset murtoluvut, epämurtoluvut ja sekaluvut. Aidoilla murtoluvuilla tarkoitetaan lukuja, joissa osoittaja on nimittäjää pienempi. (Jorgensen 2012, 7.) Tällöin puhutaan myös luvuista, jotka ovat ykköstä pienempiä (Malaty 2003, 29). Epämurtoluvuissa puolestaan nimittäjä on osoittajaa pienempi ja sekaluvuilla tarkoitetaan lukuja, jotka koostuvat kokonaisluvusta ja sitä seuraavasta murtoluvusta. (Jorgensen 2012, 7.)

Tässä luvussa esittelen niitä ongelmia, joita oppilailla on murtoluvun opiskelun yhteydessä. Luvun toisessa osassa tutustun tarkemmin toimintamateriaaleihin ja niihin liittyviin tutkimuksiin ja käytön ongelmiin. Kehittämistutkimuksessani nämä murtolukuun ja toimintamateriaaleihin liittyvät ongelmat ovat osa ongelma-analyysia, jonka perusteella opetuskokonaisuus on tehty.

3.1 Käsitteen ymmärtämisen haastavuus

Matemaattinen tieto koostuu monesta muusta kouluaineesta poikkeavasti. Matematiikassa on opeteltava ensin tiettyjä perustaitoja, ennen kuin niiden avulla voidaan opetella uusia. Matematiikan kumulatiivinen luonne on sekä vahvuus että vaikeus koulumaailmassa ja ymmärtämisen tulisikin lähteä liikkeelle jo esiopetuksesta ja alakoulusta. Mikäli oppilas ei ole ymmärtänyt ja oppinut edellistä matematiikan oppisisältöä, saattaa seuraava tuntua vaikealta ja käsittämättömältä, mikäli se pohjautuu edelliseen aiheeseen. Tämä ongelma vain kasvaa oppilaan edetessä koulu-uralla, sillä sama ongelma toisintaa itseään läpi kouluvuosien. Pyramidia ei voi rakentaa ylimmästä kivistä aloittaen. Kumulatiivisuuden lisäksi matematiikan rakenteet ovat abstrakteja, jolloin niiden todellinen ymmärtäminen voi olla haastavaa. Kaikista matematiikan ilmiöistä ei ole mahdollista antaa käytännön esimerkkejä oppimisen tueksi. (Malaty 2003, 99-108.) Seuraavaksi esittelen erilaisia ongelmia, joita erityisesti murtoluvun käsitteen oppimiseen koulumaailmassa liittyy.

Monille oppilaille murtoluvut ovat hankalia ja niiden oppiminen ja ymmärtäminen tuottavat ongelmia. Usein oppilaat ymmärtävät murtoluvun väärin ja muodostavat virheellisiä malleja niiden toiminnasta. (Charles & Nason 2000, 191.) Jo nuorilla oppilaille on kuitenkin olemassa käsitys kokonaislukujen välissä olevista luvuista, esimerkiksi puolikkaista. Tämä ymmärrys syntyy käytännön elämän havainnoista ja tarpeista, esimerkiksi omasta iästä kerrottaessa. (Brizuela 2005, 281-284.) Puolikas on kuitenkin ainoa, melko konkreettinen murtoluku nuorten oppilaiden arjessa. Murdock-Stewart (2005) nimeää kaksi suurta ongelmaa murtolukujen ymmärryksessä. Toinen näistä on käsitteen abstrakti esittely. Useinkaan murtolukuja ei käsitellä konkreettisen mallin kautta. Lisäksi murtoluvut eivät ole osa oppilaan arkea, toisin kuin esimerkiksi kokonaisluvut. (Murdock-Stewart 2005, 4-5.)

Hankaluudet murtoluvun oppimisessa saattavat syntyä koulumaailmassa ja johtua tavasta, joilla niitä opetetaan. Riddle ja Rodzwell (2000) havaitsivat, että oppilaiden luonnollinen tapa ratkaista murtolukuihin liittyviä tehtäviä eroaa tavasta, jolla niiden ratkaisua koulussa opetetaan. Mikäli vaadittu malli ei sovi oppilaan omaan, jo olemassa olevaan ajattelumalliin ja sitä ei käsitellä tarpeeksi, syntyy väärinymmärryksiä ja turhautumista helposti. Ensimmäisellä luokalla murtolukuihin liittyviä tehtäviä pidetään helppoina ja hauskoina kun taas myöhemmin arnejassa ne koetaan haastavina ja hämmentävinä. Tämä on yksi esimerkki siitä, kuinka arkielämässä käyttämiemme metodien ja koulussa opittujen mallien ristiriitaisuus vaikuttavat oppijoiden ajatteluun ja käsityksiin ja sitä kautta ilmiöön liittyviin tunteisiin. (Riddle ja Rodzwell 2000.) Vaikka osa aiemmin mainitsemistani arkipäivän metodeista voi olla toimivia ja johtaa tilanteen näkökulmasta oikeaan lopputulokseen, ne saattavat toimia ainoastaan tilannesidonnaisesti, eivätkä tuota oikeaa vastausta toisessa tilanteessa.

Charles ja Nason (2000) löysivät tutkimuksessaan kaksitoista strategiaa, joilla lapset suorittavat jakamista. Strategioiden avulla pystytään päättämään paljon siitä, millaisella tasolla oppilaan ymmärrys jakamisesta ja murtoluvuista on. Nämä kaksitoista jakamisen strategiaa on jaettu neljään luokkaan, jotka määritellään lopputuloksen sopivuuden kautta. Ensimmäiseen luokkaan kuuluvat metodit, joissa tuotetaan yhtä suuria ja oikea määrä osia halutusta kokonaisuudesta. Ensimmäisen luokan metodeja käyttävillä oppilaille murtoluvun käsitteen hallintaa on havaittavissa ja toiminta tähtää selkeästi loogiseen lopputulokseen. Esimerkiksi yksi pala kahdesta neljään osaan jaetusta pitsasta tunnistettiin tässä ryhmässä yhdeksi kahdeksasosaksi. Toiseen luokkaan kuuluvat ratkaisumetodit eivät tuottaneet tällaista ymmärrystä, vaikka jakaminen saatiin näilläkin keinoilla tuotettua oikein. Kolmanteen ryhmään kuuluvat strategiat tuottivat yhtä suuria palasia

kokonaisuudesta, mutta niiden määrä ei ollut oikea. Esimerkiksi pitsa, joka piti jakaa kolmelle henkilölle, jaettiin aluksi totutusti neljään osaan, jolloin yksi ylimääräinen pala tuotti ratkaisijalle ongelmia. Neljännessä luokassa edes palasten koko ei ollut aina yhtäläinen, jolloin jakamisen ja murtoluvun käsitteen ymmärtäminen vaikeutui entisestään. (Charles & Nason 2000, 210-216.) Murtoluvuista puhuttaessa samankokoisuuden ymmärtäminen on yksi tärkeä avain murtoluvun käsitteen ymmärtämiseen (Murdock-Stewart 2005, 152-162).

Charles ja Nason (2000) huomauttavat, ettei oppilaan ymmärryksen taso selviä yhdestä tehtävästä vaan selittyy osittain tehtävän rakenteella. Toisille suorakulmion jakaminen tasan on tutumpaa ja helpompaa kuin esimerkiksi ympyrän ja toisinpäin. Hankalassa tehtävässä jakamiseen saatetaan käyttää tilanteeseen soveltumattomia strategioita, jotka eivät toimi eivätkä myöskään tuota haluttua lopputulosta. (Charles & Nason 2000, 218.) Käsiteltävän asian konkreettisuus vaikuttaa oppilaan ymmärrykseen ja kykyyn ratkaista kulloinkin esillä oleva tehtävä (Brizuela 2005, 298). Tämän vuoksi yksinkertaisia murtolukutehtäviä ratkaistaessa oppilaat yrittävät piirtää ja käyttää kuvia apuna ja luoda tällä tavoin abstraktista tilanteesta konkreettisemmän mallin. Abstraktimpi ratkaisuvaihtoehto tälle on koulussa opittujen aritmeettisten keinojen käyttäminen. Ongelmia kuitenkin syntyy silloin, kun nämä keinot ja murtoluvun käsite eivät ole täysin hallinnassa ja ymmärrettyjä. Opittuja sääntöjä saatetaan soveltaa väärin, jolloin oikeaan lopputulokseen päätyminen ei ole varmaa. (Riddle & Rodzwell 2000.)

Käsitteen ymmärryksen lisäksi murtoluvun merkitseminen aiheuttaa oppilaille ongelmia. Merkintätapa on helppo sekoittaa kokonaislukujen jakolaskuun, joka sinänsä on oikea havainto, mutta hankaloittaa murtoluvun käsitteen ymmärtämistä ja vaikeuttaa sen avulla toimimista. Brizuela (2005) havainnoi, kuinka esikouluikäiset lapset merkitsevät puheessaan kuuluvan puolikkaan matematiikan symbolikielen avulla. Merkintätapoja ja käsityksiä tästä ”puolikkaasta” oli monia. Kuusivuotias voi helposti kuvitella olevansa seitsemän ja puoli vuotta vanha heti syntymäpäivänsä jälkeisenä aamuna, yhtä hyvin kuin ymmärtää puolikkaan olemista yhden jakamista kahteen yhtä suureen osaan. Osa oppilaista saattaa pitää puolikkaita myös alkuperäisen luvun arvoa vähentävänä tekijänä ja lukusuoraan kuulumattomana osana, kun taas toisille ”puolikkaat” ovat kokonaislukujen väliin lukusuoralle tulevia kokonaisuuksia. (Brizuela 2005, 287-298.)

Toisille oppilaille syy-seuraus-suhteiden ymmärtäminen on äärimmäisen tärkeää, kun taas toisille laskujen mekaaninen ratkaiseminen tuottaa suurinta iloa. Osa oppilaista käyttää näitä erilaisia tiedon muodostamisen ja oppimisen keinoja rinnakkain. (Hallet, Nunes & Bryant 2005, 400-404.) Samalla

tavoin murtoluvun merkitseminen symbolikielen avulla ja merkinnän ymmärtäminen ovat eri asioita ja niiden yhdistäminen toimivaksi kokonaisuudeksi on oppilaalle usein haastavaa. Oppilas saattaa osata merkitä murtoluvun oikein, mutta ymmärtää sen merkityksen väärin. (Brizuela 2005, 299.) Tällaisissa tilanteissa opettajan on haastava havaita puutteita oppilaan taidoissa ja antaa oikeanlaista ja tarkoituksenmukaista apua. Hallet, Nunes ja Bryant (2005) käsittelevät murtolukujen oppimista ja tätä ristiriitaa konseptuaalisen ja proseduraalisen tiedon kehityksen kautta. Konseptuaalisella tiedolla tarkoitetaan linkittyntä ”tietoverkkoa”, jossa kaikki tieto yhdistyy toisiinsa selittäen loogisesti syy-seuraus-suhteita. Proseduraalisella tiedolla tarkoitetaan kykyä ratkaista ongelmia siten, että päädytään oikeaan lopputulokseen tehtävän tarkoitusta välttämättä ymmärtämättä. Siihen, kumman tavan oppilas omaksuu itselleen, vaikuttaa oppilaan oman suuntautumisen lisäksi myös opetuksen tapa. (Hallet, Nunes & Bryant 2005, 395-396.)

3.2 Murtolukuihin liittyvistä havainto- ja opetusmateriaaleista

Matematiikan opetukseen on kehitetty runsaasti erilaisia toimintamateriaaleja, joiden avulla matemaattisia ilmiöitä pyritään selkiyttämään ja joiden avulla matemaattisia, abstraktejakin malleja pyritään esittämään konkreetian keinoin. Konkreetian käyttö opetuksessa perustuu Piaget'n kognitiivisen oppimisen teoriaan, jonka mukaan 7-12-vuotiaat lapset tarvitsevat konkreettisen mallin kehittyvän kielen ja symbolien rinnalle oppiakseen käsiteltävän asian (Domino, 2010, 7). Toimintamateriaaleista käytetään erilaisia nimityksiä suomenkielisissä teksteissä, esimerkiksi taktiilinen materiaali tai joissain yhteyksissä käsitteenmuodostusvälineet (ks. esim. Korhonen 2013). Englanninkielisessä kirjallisuudessa termiin viitataan joko käsitteellä *manipulative materials* tai uudemmassa kirjallisuudessa pelkällä termillä *manipulatives* (ks. esim. Domino 2010, Golafshani 2017). Tässä tutkimuksessa käytän termiä toimintamateriaali, sillä sen asema suomenkielisessä tutkimuksessa on vakiintunut ja tunnistettavissa. Seuraavaksi esittelen matematiikan toimintamateriaaleihin liittyviä piirteitä ja niiden käyttöä opetuksessa yleisesti. Luvun päätteeksi esittelen tässä tutkimuksessa käytetyn Merkitysten kakut -materiaalin.

3.2.1 Toimintamateriaaleista

Toimintamateriaalien avulla opettaminen ei ole uusi ilmiö. Aiemmin käytetyistä kivistä ja tikuista ollaan tultu harppaus eteenpäin ja nykyään saatavilla on paljon erilaisia niin konkreettisia kuin virtuaalisiakin materiaaleja. Domino (2010) luettelee kolme erilaista toimintamateriaalin mallia. Ensimmäinen näistä malleista on arkipäivän esineet. Matematiikan konkretisointiin voidaan käyttää

yksinkertaisia välineitä, kuten munakennoja, helmiä, tikkuja tai käpyjä. Toinen malleista on valmistettu konkreettinen materiaali, joka sisältää monia mahdollisuuksia matemaattisten ilmiöiden käsittelyyn, mutta jonka päätehtävä on toimia lapsen leikin välineenä. Tällaisia materiaaleja ovat esimerkiksi legot. Kolmas materiaalien malli on matematiikan opetukseen suunnitellut ja tarkoitettut materiaalit. Eri malleja voidaan konkreettisten materiaalien lisäksi rakentaa myös virtuaalisessa muodossa, jolloin varsinainen toiminta tapahtuu hiiren tai kosketusnäytön välityksellä. (Domino 2010, 2-3.)

Willingham (2017) koostaa kolme pääajatusta, joiden mukaan toiminnallisten materiaalien käyttöä perustellaan. Näistä ensimmäinen liittyy lasten tapaan jäsentää maailmaa konkreetian kautta. Vaikka lapset saattavat oppia ulkoa monia malleja, esimerkiksi laskemisen, etenkin pienillä lapsilla ei ole vielä käsitystä siitä, mitä heidän luettelemansa sanat konkreettisesti tarkoittavat. Toimintamateriaalien avulla konkreettisuus on helposti rakennettavissa, jolloin sanoille muodostuu uusia tarkoituksia ja assosiaatioita. Toinen peruste toimintamateriaalin käytölle on toiminnan toteuttaminen fyysisesti. Tällöin kognitiivisen ajattelun lisäksi oppiminen tapahtuu moniaistisesti toiminnan kautta. Kolmas teoria puolestaan liittyy siihen, kuinka toimintamateriaalit koetaan jonkin ilmiön konkreettisine rakentajina. Oppilaan elämysmaailman kokemuksen rakentaminen matemaattisten välineiden avulla antaa vanhalle, tutulle asialle uuden merkityksen ja ohjaa oppilasta matemaattisempaan malliin. Esimerkiksi pitsan jakamista voidaan käsitellä ensin konkreettisen mallin kautta ja siten abstraktimpaan symbolikielen ilmaisuun siirtyen. Tällöin konkreettinen malli (muovinen kiekko yms.) toimii ensin pitsan symbolisena kuvana ja muuttuu lopulta oikeanlaisen käsittelyn kautta malliksi murtoluvuista. (Willingham 2017.) Se, kuinka paljon eri oppilaat hyötyvät mistäkin materiaalista, riippuu oppilaan tasosta ja materiaalin käytön tarkoituksenmukaisuudesta. Oikeaan yhteyteen valittu oikeanlainen materiaali vaikuttaa positiivisesti oppilaan ymmärrykseen käsiteltävästä matemaattisesta ilmiöstä. (Lindgren 1990, 151-168.)

Toimintamateriaalien käyttö on viime vuosina lisääntynyt. Osittain tämä selittyy sillä, että opettajat ovat huomanneet niiden positiivisen vaikutuksen oppimiseen. Tutkimuksissa todettu materiaalien oppimista edistävä piirre on vaikuttanut siihen, että opetussuunnitelmissa on alettu vaatia toimintamateriaalien käyttöä osana opetusta. (Golafshani 2013, 139-140.) Matemaattisen tiedon kehittymisen lisäksi toimintamateriaalit vaikuttavat opiskelun mielekkyyteen. Parhaimmillaan toimintamateriaalit kannustavat oppilasta kokeilemaan ja auttavat keksimään matematiikasta uusia, heitä kiinnostavia asioita. Toisaalta väärin käytettynä toimintamateriaalit voivat myös hidastaa tai

vaikeuttaa oppilaan oppimista. (Willingham 2017.) Seuraavaksi esittelen tuoreita tutkimuksia, jotka osoittavat toimintamateriaalien käyttökelpoisuuden osana opetuskokonaisuutta.

Liggettin (2017) tutkimuksessa tarkasteltiin kahden ryhmän oppimistuloksia vertailevan tutkimuksen keinoin toisella luokalla. Toisessa ryhmässä oppilaiden opetuksessa oli mukana toimintamateriaaleja ja toisessa ei. Vaikka ryhmien lähtötaso oli lähes sama alkukartoituksessa, opetuksen jälkeisessä testissä toimintamateriaaleja käyttäneet oppilaat pärjäsivät paremmin. (Liggett 2017.) Liggettin tutkimus toimintamateriaaleista ei ole ainoa laatuaan, vaan vastaavia tuloksia on saatu myös muissa tutkimuksissa ja muilla luokka-asteilla. Senyefia (2017) tutki sekä virtuaalisten että konkreettisten toimintamateriaalien käyttöä yläkoulun puolella. Myös hänen tutkimuksensa osoittaa, että harkitusti käytetty toimintamateriaali vaikuttaa positiivisesti oppilaiden oppimistuloksiin. Erityisesti alkutestissä heikoiksi osajiksi osoittautuneet oppilaat kehittivät enemmän tutkimuksen aikana toimintamateriaaleja hyödyntävässä ryhmässä. (Senyefia 2017.)

Matematiikan oppimisen tulisi tiedollisten sisältöjen lisäksi tuottaa positiivisia kokemuksia, matemaattisen itsetunnon kehittymistä ja onnistumisen iloa (POPS 2014, 234-237). Lindgrenin (1990) tutkimuksessa selviää, että toimintamateriaalien yhteydessä tällaisten kokemusten saaminen on mahdollista. Vaikka tutkimuksen tekemisestä on jo aikaa, sen tulokset eivät ole vanhentuneita. Tutkimuksessa toimintamateriaalien yhteydessä oppilaat saivat onnistumisen elämyksiä, kokivat matematiikan opiskelun hyvänä asiana ja synnyttivät syvemmän ymmärryksen matematiikan sisällöistä. Oppilaat eivät kuitenkaan kyenneet toimimaan itsenäisesti vaan saadessaan itse päättää käyttämänsä välineen, valitsivat liian vaikeita tai helppoja ja sitä kautta motivaatiota heikentäviä tehtäviä. (Lindgren 1990, 169-174.)

Kuten edellä käy ilmi, opettaja on merkittävässä asemassa toimintamateriaalien mielekkäässä käytössä. Opettajan täytyy olla hyvin perehtynyt toimintamateriaalin toimintaperiaatteeseen, jotta hän voi opettaa siihen liittyvät ajatukset selkeästi ja tavoitteellisesti oppilaille. (Willingham 2017.) Vaikka tutkimustulokset toimintamateriaalien käytöstä ovat pääosin kannustavia ja positiivisia, monille opettajille materiaalit ovat edelleen ylimääräinen painolasti. Opettajan asenne materiaalia kohtaan on tärkeässä asemassa, sillä pakon edessä toimivan opettajan yritys käyttää materiaalia osana opetusta saattaa jäädä irralliseksi, eikä vie niin opettajaa kuin oppilastakaan eteenpäin. Tämän vuoksi oppilaiden lisäksi opettajien asenteiden ja toiminnan tutkiminen oppimateriaalien yhteydessä on tärkeää. (Golafshani 2013, 140.) Suomessa toimintamateriaalien hidas yleistyminen koulumaailmassa lasketaan osittain opettajankoulutuksen aiheuttamaksi. Vähäisten matematiikan

didaktiikan kurssien sisällä materiaaleihin ei ehditä tutustua niin laajasti, että niistä tulisi luonnollinen osa valmistuvan opettajan identiteettiä ja arkipäivän työtä. (Korhonen 2013, 39.)

Vaikka opettaja itse olisi motivoitunut toimintamateriaalien käyttöön, käyttöönotto ei ole aina ongelmaton. Uuden materiaalin käyttöönotto vaatii aina aikaa, suunnittelua ja joskus rahaakin. Lisäksi toimintamateriaaleja on monenlaisia ja niistä osa on tarkoitettu jonkin tietyn matematiikan osa-alueen opetukseen ja osa sovellettavissa laajemmin useampaan opeteltavaan sisältöön (Domino 2010, 4). Etenkin pieneen matematiikan osa-alueeseen soveltuvien materiaalien hankinta on aina tarkan harkinnan tulos. Golafshanin (2013) tutkimuksen mukaan opettajien kokemukset toiminnallisen materiaalin käytön ongelmista ovat monipuoliset. Yksi näistä opettajien kokemista ongelmista on toiminnallisten materiaalien rajattu saatavuus. Kaikki materiaalit eivät ole avoimesti opettajien käytössä vaan ne tulisi esimerkiksi hankkia koulun käyttöön. Toinen ongelma syntyy ajan käytöstä. Opettajilla ei ole aikaa syventyä toimintamateriaaleihin, opetella niiden käyttöä itse tai edes käyttää niitä muun opetuksen lomassa. Opettajien kokemuksen mukaan myös luokkahuoneen hallinta toimintamateriaalien yhteydessä on hankalaa. Toimintamateriaalien käyttöönottoa opettajien mielestä tukisi materiaalin helppo saatavuus, vapaaehtoinen koulutus materiaalin käyttöön tai luokkahuoneessa toimiva avustaja. (Golafshanin 2013, 145-150.)

Suomalaisessa kontekstissa toimintamateriaalien tavoitettavuutta on yritetty helpottaa Matikkamaa-projektin avulla. Ikäheimo ja kumppanit (2003) kuvailevat matikkamaa-toimintaa seuraavin sanoin:

”Matikkamaa on sekä fyysinen paikka että toimintaidea. Matikkamaa on opettajien resurssikeskus, joka tarjoaa ideoita, välineitä ja koulutusta matematiikan opetuksen kehittämiseksi esikoulusta lukioon ja ammattikouluun. Matikkamaassa etsitään konkreettisia keinoja, joilla voidaan tukea oppimista sekä perus- että erityisopetuksen ongelmakohdissa.” (Ikäheimo & kumpp. 2003, 48.)

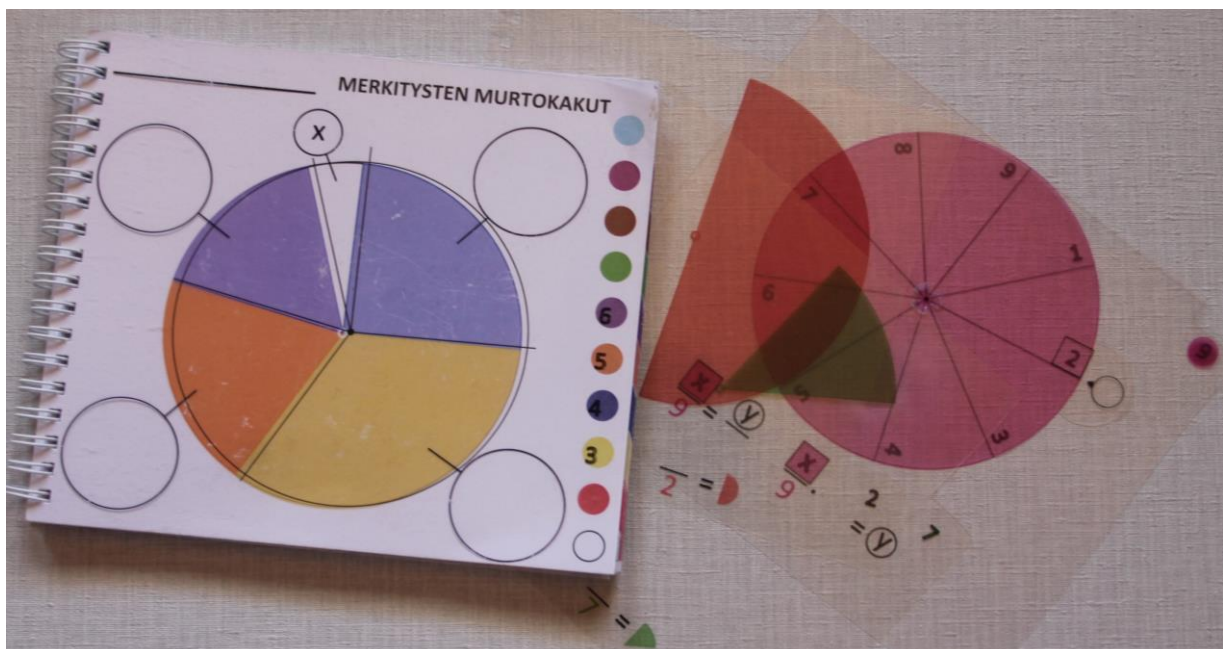
Matikkamaa-toiminta on alkanut vuonna 2000 pääkaupunkiseudulta ja on sen jälkeen levinnyt myös muualle Suomeen. Nykyisin matikkamaan toimipisteitä löytyy tasaisesti eri puolilta maata aina Oulun korkeudelle saakka. Matikkamaan yhteydessä tehdään kehitystyötä ja järjestetään koulutuksia materiaalien käyttöön. Helsingin Matikkamaa on ollut tuomassa Suomeen unkarilaista matematiikan opetuksen mallia, joka sisältää erilaisia toiminnallisia materiaaleja ja erilaisen käsityksen matematiikan pedagogiikasta. (Ikäheimo & kumpp. 2003.) Unkarilainen Varga–Neményi-menetelmä on yksi merkittävimmistä toimintamateriaalien kehittäjistä ja käyttöyhteyksistä Suomessa. Menetelmä on Tamas Vargan ja Eszter C. Neményin kehittämä matematiikan opettamisen malli, joka käyttää monipuolisesti matematiikan eri kieliä ja kannustaa

lasta keksimään itse ja ihmettelemään matemaattisia ilmiöitä. Suomessa järjestetään koulutuksia menetelmän käyttöön, jotta opettajien uskallus, osaaminen ja varmuus toimintamateriaalien käyttäjinä vahvistuisi. (Varga-Neményi Ry 2018.) Varga-Neményi-menetelmän materiaalien suomentaminen on aloitettu vuonna 2000 ja nyt materiaaleja on käytössä alakoulun kolmannelle luokalle saakka (Lampinen 2009).

Vaikka toimintamateriaaleja on paljon erilaisia ja niiden sovelluksia saatavilla esimerkiksi internetistä, ei tutkimusta toimintamateriaalien käytöstä Suomessa ole nähdäkseni tehty tarpeeksi pro gradu -tutkielmien lisäksi. Käytännön kehitystyö puolestaan näkyy esimerkiksi eri sivustoilla, joilla materiaaleja myydään, ja uusia malleja ja materiaaleja kehitetään kaiken aikaa.

3.2.2 Merkitysten kakut –materiaali

Kuten jo edellä käy ilmi, monet toimintamateriaalit soveltuvat vain yhden tai muutaman sisällön opettamiseen. Kouluille, joille lopulta jää vastuu materiaalin hankkimisesta, monien eri materiaalien hankkiminen saattaa käydä kalliiksi ja opettajien kouluttaminen niiden kaikkien käyttöön lähes mahdottomaksi. Merkitysten kakut -materiaali pyrkii kokoamaan useampia sisältöjä yhteen nippuun opettajan työn ja hankittavan materiaalin hankinnan helpottamiseksi.



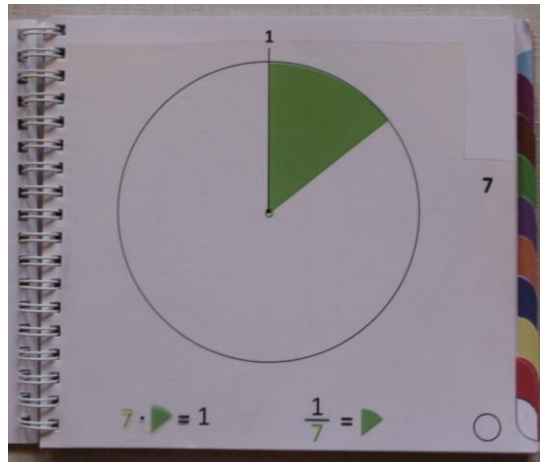
KUVA 1. Merkitysten kakut -materiaali, siihen kuuluvia osakiekoja ja nimittäjäkiekko.

Merkitysten kakut -materiaali (Kuva 1) on reilu satasivuinen vihko, joka koostuu yksittäisistä, lukuja esittävistä sivuista sekä irrotettavista osakiekoista (kokonainen-kymmenesosa) ja nimittäjä-kalvoista (kokonainen-kymmenesosat). Jokainen vihon sivu esittää yhden luvun, sen tekijät värikoodeina ja kuviokielen esityksen luvusta. Lisäksi jokaisella sivulla on lukuja, joista muodostuu kalvoja käytettäessä matematiikan symbolikielen ilmauksia käsiteltävän luvun ja siihen suhteutettavan luvun välisestä suhteesta erilaisissa tilanteissa. Merkitysten kakut -materiaalista saadaan tutkimalla esiin erilaisia matemaattisia tapahtumia matematiikan eri kielien avulla.



KUVA 2. Jakolaskun ilmaisu Merkitysten kakut -materiaalin avulla.

Kuvassa 2 suoritetaan jakolaskua $20 : 5$. Tällaisessa tilanteessa sivuja käsitellään kokonaislukuina. Sivun 20 päälle on asetettu osakiekkoviisi, jolloin kuviokiielestä voidaan lukea vastauksen olevan neljä. Sivun alalaitaan muodostuvat osakiekkon kalvon avulla symbolikielen merkinnät kertolaskulle ($5 \cdot 4 = 20$) ja jakolaskulle ($20 : 5 = 4$). Sivun oikeasta reunasta (värilliset ympyrät) voidaan lukea luvun kaksikymmentä (20) tekijät värikoodien avulla (valkoinen = 1, punainen = 2, violetti = 4, oranssi = 5 ja vaaleansininen = 10).



KUVA 3. Murtoluvun ilmaisu Merkitysten kakut -materiaalin avulla.

Kuvassa 3 esitetään murtoluku Merkitysten kakut -materiaalin avulla. Murtolukuja käsiteltäessä vihon sivu muodostaa aina yhden kokonaisen, toisin kuin esimerkiksi jakolaskua tai kertolaskua käsiteltäessä. Murtolukua muodostettaessa sivun alalaitaan muodostuu symbolikielen merkintä, josta nähdään, kuinka seitsemän seitsemäsosaa muodostaa yhden kokonaisen ($7 \cdot 1/7 = 1$). Sivun alareunan symbolikielestä nähdään myös, kuinka kokonaisen yhtä osaa nimitetään symbolikielen avulla ($1/7$).

Tutkimus on ajallisesti sijoittunut vaiheeseen, jossa Merkitysten kakut -materiaali on vasta saamassa viimeistä muotoaan. Tämän vuoksi tutkimuksessani tuloksia esiteltäessä esiintyä oppilaiden vastauksissa Merkitysten kakut -materiaalista esimerkiksi nimitys Merkitysten murtokakut, joka tuolloin on ollut materiaalin tekonimi. Tämän vuoksi kuvassa 1 materiaalin kannessa lukee Merkitysten murtokakut nimen Merkitysten kakut sijaan. Lisäksi oppilaat käyttivät jakokiekko nimitystä kalvosta, jonka nimi tutkimuksen teon aikana muutettiin osakiekoksi.

4 TUTKIMUSKYSYMYKSET

Toimintamateriaali, jota tutkin, on aivan uusi, eikä siitä ole aiempaa tutkimusta. Tämän vuoksi tutkimuskysymysten valitseminen on haastavaa ja mahdollisia tutkimuskohteita useita. Kehittämistutkimukseni on vain pieni osa Merkitysten kakut -materiaalin kehitystä ja pyrkii keräämään tietoa sen käytöstä sekä samalla tuottamaan materiaalia opetuskäyttöön. Tutkimuksessani aion etsiä vastauksia seuraaviin toimintamateriaaliin liittyviin kysymyksiin matematiikan akateemisen lukutaidon näkökulman kautta.

1. Kuinka akateemisen lukutaidon eri osa-alueet näkyvät Merkitysten kakut -materiaalin pohjalta suunnitelluilla oppitunneilla murtolukuja käsiteltäessä alakoulun 3. luokalla?
2. Millaisia mahdollisuuksia oppilaan ymmärryksen arviointiin Merkitysten kakut -materiaali tarjoaa opettajalle matematiikan neljän kielen avulla?

Lisäksi tutkimuksen lopputuloksena syntyy tuotos, jota voi hyödyntää Merkitysten kakut -materiaalin yhteydessä kolmannen luokan murtolukujen opetuksessa. Tuote on opetuskokonaisuus, johon liittyvät opettajan ohjeet, tarinallinen tehtävänasettelu ja itse tehtävät oppilaille.

5 KEHITTÄMISTUTKIMUS

Kehittämistutkimus on kasvatustieteissä melko uusi suuntaus, jossa pyritään ymmärtämään kasvatuksellisten innovaatioiden käytännön toimintaa. Sen lähtökohtana on halu kehittää opetusta todellisten opetustilanteista nousevien ongelmien perusteella (Pernaa 2013, 11). Kehittämistutkimus keskittyy muun muassa siihen, milloin, miten ja miksi erilaiset innovaatiot toimivat. Lisäksi se pyrkii laajentamaan tietoisuutta innovatiivisten oppimisympäristöjen kehityksestä ja käyttöönotosta sekä tarjoamaan suoria ratkaisuja käytännön ongelmiin. (The Design-Based Research Collective 2003, 5.)

Tässä luvussa tarkastelen kehittämistutkimusta ja sitä tieteellistä asemaa ja rajausta, jonka se on viime vuosina saanut. Käsittelen ensin kehittämistutkimuksen historiaa ja sen rajaamiseen ja toteuttamiseen liittyviä piirteitä. Lopuksi tarkastelen erilaisia haasteita, joita kehittämistutkimuksen tekijä kohtaa tutkimuksen edetessä.

5.1 Historiaa

Perinteisessä tutkimuksessa tutkija on yleensä kaukana käytännöstä ja tekee tutkimusta kentältä saamiensa materiaalien perusteella (Edelson 2002, 107-108). Tällöin kuitenkin monia kentällä toimimiseen liittyviä tekijöitä jää kokonaan tutkijan ulottumattomiin, eikä tutkimuksen tuloksia ole mahdollista arvioida niiden kautta. Yksi vastaus tähän tutkimuksen ja käytännön välisen kuilun ongelmaan on toimintatutkimus. Toimintatutkimus on tutkimusta, jossa pyritään ratkaisemaan ongelma ja etsimään vastauksia aktiivisen toiminnan avulla. Myös tutkijan rooli on tutkimuksen tekemisen aikana aktiivinen. (Kuula 2006, 41.)

Myöhemmin toimintatutkimuksen suosion kasvaessa, on sen rinnalle noussut muita samantyyliisiä tutkimusotteita. Niistä yksi on viime vuosina yleistynyt kehittämistutkimus. (Edelson 2002, 107-108.) Kehittämistutkimuksen juuret ovat 1990-luvulla, jolloin menetelmän kehittäminen alkoi Yhdysvalloissa ja menetelmästä käytettiin englanninkielistä termiä *design experiment*. Myöhemmin

tieteellisessä keskustelussa alettiin puhua nimityksestä *design research* tarkoituksena korostaa ajatusta itsenäisestä tutkimusmenetelmästä. (Pernaa 2013, 10.) Tutkimusotteen suhteellisesta tuoreudesta kielii sen nimien kirjo englanninkielisessä tutkimuksessa. Kananen (2012) huomauttaa, että termi *action research* viittaa yhdessä kontekstissa toimintatutkimukseen ja toisessa kehittämistutkimukseen. Myöhemmin myös termi *design-based research* on saanut oman kannatuksensa englanninkielisessä tekstissä kehittämistutkimuksen kuvaajana. (Kananen 2012, 19-39). Tutkimusote on kaikesta huolimatta saavuttanut aseman tieteen piirissä ja sen suosio on kasvanut tasaisesti 2000-luvulla alkaen Yhdysvalloista ja yleistynyt sittemmin myös muualla maailmassa (Anderson & Shattuck 2012, 18-24).

Nämä kaksi tutkimuksen tekemisen tapaa, toiminta- ja kehittämistutkimus, jakavat monia yhteisiä tieteen tekemiseen liittyviä perusajatuksia. Vaikka täydellistä yhteisymmärrystä näiden kahden erottamisesta ei ole vielä saavutettu, erottavia piirteitä on olemassa. Mikäli tutkimus kohdistuu ihmisiin ja heidän vaikuttamismahdollisuuksiinsa ja sen tavoitteena on kehittää opettajan työtä ja kouluyhteisöä, on toimintatutkimus selkeämpi valinta. Jos taas näkökulmana on oppilaiden oppiminen, sopii kehittämistutkimus siihen paremmin (Juuti & Lavonen 2013, 47.) Toimintatutkimus voidaankin nähdä sosiaalisten käytänteiden muokkaajana ja kehittämistutkimus kaiken ei-sosiaalisen, esimerkiksi prosessin tai palvelun, kehittäjänä (Kananen 2012, 41-44).

Vaikka molemmissa, sekä toiminta- että kehittämistutkimuksissa, reflektointi ja oman toiminnan tarkastelu on tärkeässä osassa, ainoastaan kehittämistutkimuksesta voidaan nimetä reflektoinnin vaihe, jossa tehtyä tutkimusta, sen tuloksia ja tuotettavaa tuotosta arvioidaan monipuolisesti. Toinen erottava tekijä on kehittämistutkimuksen rakentamisen vaihe, jossa valmistellaan testattavaa tuotosta suhteessa teoriaan ja aiempaan tutkimukseen. Toimintatutkimuksessa tutkimusta tekee yleensä koulun kontekstissa opettaja yksin, kun taas kehittämistutkimuksessa tutkija ja opettaja ovat molemmat paikalla. (Anderson & Shattuck 2012, 18.) Lisäksi kehittämistutkimuksen tekoon sisältyy aluksi aina ongelma-analyysi. Sen tarkoitus on selvittää, mihin ongelmaan tulisi kehittää ratkaisu sekä mitkä ovat ongelman mahdollisuudet ja haasteet. Ongelma-analyysi lähtee siis liikkeelle konkreettisesta tarpeesta saada aikaan muutos. Ongelma-analyysi voi sisältää teoreettisen kehyksen lisäksi empiirisen puolen. Empiirinen ongelma-analyysi voidaan toteuttaa esimerkiksi kyselynä teoreettisen analyysin pohjautuessa tutkimuskirjallisuuteen aiheeseen liittyen. Ongelma-analyysin määrittelyn jälkeen tavoitteet siitä, mitä ollaan kehittämässä, selkiytyvät ja tutkimuksen teolle laaditaan kehittämissuunnitelma. (Pernaa 2013, 17.)

Mainitsemani erot eivät tietenkään aina pidä paikkaansa ja toimintatutkimusta ja kehittämistutkimusta käytetään paljon myös päällekkäisinä ja sisäkkäisinä termeinä. Esimerkiksi Tomperi (2015) on käyttänyt toimintatutkimuksen käsitettä tekemänsä kehittämistutkimuksen sisällä tutkimusaineiston keräysmenetelmänä (Tomperi 2015). Tämä johtuu mahdollisesti suuntausten uutuudesta, jolloin niiden rajaukset ja paikka tieteessä eivät ole täysin vakiintuneet. Tämä näkyy mm. aiemmin mainitsemissani ongelmassa kehittämistutkimuksen englanninkielisessä nimeämisessä.

5.2 Suuntauksen rajaaminen

Kehittämistutkimusta ja sen rajausta on koettu rakentaa monin eri tavoin. Wang ja Hannafin (2005) kuvaavat kehittämistutkimusta viiden tutkimusotetta kuvaavan käsitteen kautta. Nämä viisi käsitettä ovat pragmaattisuus, teoriaan pohjautuvuus, integroivuus, kontekstuaalisuus, joustavuus, iteratiivisuus ja interaktiivisuus.

Pragmaattisuudella tarkoitetaan kehittämistutkimuksen pyrkimystä tuottaa tutkimusta ja vastauksia käytännön sanelemiin tarpeisiin. Teoriaan pohjautuvuudella puolestaan tarkoitetaan sitä, kuinka kehittämistutkimusta tehdään aina johonkin kontekstiin ja ohjaavaan teoriaan sitoen. Pohjatietoa käsitellään ikään kuin ankkurina, johon tutkimuksen tuloksia peilataan ja johon palataan aina tutkimuksen edetessä. Integroivuudella tarkoitetaan kehittämistutkimuksesta puhuttaessa sen piirrettä käyttää yhdessä monia eri aineistonkeruumenetelmiä. Kehittämistutkimusta on mahdotonta tehdä sitomatta sitä johonkin käytännön kontekstiin, joka näkyy ja vaikuttaa koko tutkimuksen läpi. Lisäksi joustavuus, iteratiivisuus ja interaktiivisuus määrittävät kehittämistutkimusta. Näillä tarkoitetaan sitä, kuinka kehittämistutkimuksessa toimitaan joustavasti tilanteen vaatimalla tavalla käytännön kontekstissa, toistetaan tutkimussyklejä ja annetaan sekä käytännön että syklien vaikuttaa tutkimuksen lopulliseen tulokseen. (Wang & Hannafin 2005, 8-12.) Syklittäisyys perustuu ajatukselle, jossa tutkimus sisältää useita pieniä kehittämissyklejä. Sykli sisältää kehittämis-, arviointi- ja raportointivaiheet, joiden kautta tutkimuskohdetta testataan ja kehitetään arviointikierron jälkeen aina lisää tavoitteiden syventyessä. (Pernaa 2013, 17.)

The Design-Based Research Collective (2003) on tehnyt oman määritelmänsä ja nimeää viisi hyvän kehittämistutkimuksen piirrettä, jotka takaavat omalta osaltaan tutkimuksen onnistumisen (The Design-Based Research Collective 2003, 5). Tarkastelen seuraavaksi kehittämistutkimusta näiden viiden piirteen näkökulmasta.

Ensimmäisenä kehittämistutkimuksessa tulisi päätyä kokonaisvaltaiseen tulokseen, jossa taustateoriat ja haluttu lopputulos on nidottu selkeästi yhteen. (The Design-Based Research Collective 2003, 5.) Tieteen tekeminen pohjautuu teorioille, jotka muodostavat yksinkertaistetun mallin milloin mistäkin käsiteltävästä ilmiöstä. Kehittämistutkimuksen yhtenä ideana onkin muodostaa teoria, joka toimii myös käytännössä. Pelkästään yleismaailmallinen teoria ei siis ole tutkimuksen tavoitteena, vaan pikemminkin malli, jota päästään hyödyntämään myös käytännössä. (Anderson & Shattuck 2012, 17.) Pelkkä uusi teoria tutkimuksen tuloksena ei riitä, vaan lisäksi olisi ymmärrettävä vanhan teorian, tutkimuskohteeksi luodun uuden vaikuttajan ja käytännön välisiä suhteita. Tällä tavoin uusia asioita tutkittaessa voidaan päätyä myös uudenlaisen teorian muodostamiseen. (The Design-Based Research Collective 2003, 5-6.) Tutkimuksen teoria ja tuote tulisi siis saada keskustelemaan ja toimimaan yhdessä mielekkäällä tavalla ja teoriaa peilata toimintaan tuotteen avulla.

Kehittämistutkimuksessa tulosten yleistettävyyden on äärimmäisen tärkeää suurimman hyödyn ja tutkimuksen tarkoituksen saavuttamiseksi. Yleistettävyyden on yksi päätekijöistä, jotka vaikuttavat taustateorioiden ja päämetodien valintaan kehittämistutkimuksessa. (Edelson 2002, 117.) Tämä ei kuitenkaan ole aivan yksinkertaisesti saavutettava lopputulos, sillä ihmistä tutkittaessa yhden ainoan muuttujan vaikutuksen tarkastelu on hyvin hankalaa. Esimerkiksi fysiikassa massan säätäminen tietylle tasolle on mahdollista kiihtyvyyttä tutkittaessa, mutta ihmistieteissä vastaavaa mahdollisuutta ei ole.

Kehittämistutkimusta tehtäessä pitäisi oppia virheistä, analysoida sekä parannella materiaalia ja muodostaa näin syntyviä kehityksen kierteitä. (The Design-Based Research Collective 2003, 5-6.) Kehittämistutkimuksessa halutaan irti täysin valmiin tuotteen ajatuksesta ja pyritään uuden ja paremman luomiseen kaiken aikaa. Monessakaan kehittämistutkimuksen raportissa ei esitellä täysin valmista tuotetta, vaan ovet kehittämiseen ja jatkojalostukseen pidetään avoimina. (Anderson & Shattuck 2012, 18-24.) Tutkimukset syklit aloitetaan uuden tuotteen tarpeen huomaamisella, tuotteen luomisella ja sen testaamisella käytännössä. Tämän jälkeen tutkimus keskeytetään, sen tuloksia tarkastellaan ja analysoidaan ja lopulta tuotetta parannellaan saatujen tulosten pohjalta. (The Design-Based Research Collective 2003, 7.)

Kolmanneksi lopputuloksena syntyvän tuotteen ja teorian tulisi olla sellainen, että se saadaan suoraan jaettavaksi ja hyödynnettäväksi joko käytäntöön tai jatkokäsittelyyn. Perinteisestä

tutkimuksesta poiketen, kehittämistutkimuksessa on äärimmäisen tärkeää tuloksia esiteltäessä tehdä selväksi se, kuinka tutkimustulokset näkyvät käytännössä ja kuinka niitä voidaan kentällä hyödyntää. (The Design-Based Research Collective 2003, 5.) Tätä käytännön hyödynnettävyyttä ajaa eteenpäin kehitystutkimuksen piirre sijoittua aitoon kasvatukselliseen ympäristöön. Tällä lailla varmistetaan se, että puhutaan aidoista ilmiöistä ja tutkitaan tuotosta realistisessa kontekstissa. Ajatukset ja tulokset eivät millään voi jäädä ainoastaan teorian tasolle kehittämistutkimusta tehtäessä. (Anderson & Shattuck 2012, 16-18.)

Neljäs hyvän kehittämistutkimuksen piirteistä onkin vaatimus tutkimuksen sisältämästä aidon ympäristön kokeilusta, joka automaattisesti ohjaa tutkimustulosten käytännöllisyyteen. Tämän tulee näkyä myös tutkimuksen raportoinnissa. Pelkkä onnistumisen ja epäonnistumisen tarkastelu ei riitä hyvän kehittämistutkimuksen tekemiseksi, vaan tutkijan on raportoitava myös sitä, kuinka haluttu materiaali toimii käytännössä ja millaisia oppimisen piirteitä se yhdistää toisiinsa. Tutkimuksen tavoitteena on saada myös muut ymmärtämään uuden tuotteen toiminta ja vaikutus oppijan oppimiseen sekä saada heidät hyödyntämään tutkimuksen tuloksena syntynyttä tuotetta sellaisenaan. (The Design-Based Research Collective 2003, 5.)

Usein tutkimustulosten kanssa vaarana on tulosten hyödyntämättömyys tutkimuksen jälkeen. Vaikka tutkimusta tehtäisiin koululuokassa, ei aina ole sanottua, että sen tuloksia hyödynnettäisiin. Perinteisesti tutkimusta tehtäessä tutkija tekee kokeilunsa luokassa ja häviää sitten kirjoittamaan ja pohtimaan tuloksia muualle, jolloin tutkimuksen hyödyt katoavat tutkijan mukana. Läheskään aina esimerkiksi tutkimuksen kohteena oleva luokka ei pääse hyötymään tuloksista. Kehittämistutkimuksen yksi hyöty onkin vastaaminen käytännön tarpeisiin, jolloin myös tutkimuksen tuloksena syntynyt ratkaisu jää helpommin, ainakin tutkittavana olleen ympäristön arkeen käyttöön ja pääsee näin muokkaamaan esimerkiksi koulun toimintaa. (Anderson & Shattuck 2012, 17.)

Edellä käsitelty piirre erottaa kehittämistutkimuksen muista tutkimusotteista, sillä se pyrkii suoraan luomaan uusia käytännön sovelluksia kasvattajien ja koulumaailman tarpeisiin pelkän teorian tiedon muodostamisen sijaan. (The Design-Based Research Collective 2003, 7.) Yksi keskeinen syy koko tutkimusmenetelmän synnylle oli opetuksen tutkimukseen kohdistuva kritiikki, jonka mukaan tutkimuksissa ei esiinny tarpeeksi käytännönläheistä tietoa kentällä toimivien opettajien tueksi (Perna 2013, 11). Ei kuitenkaan pidä olettaa, että kehittämistutkimuksen kohteena olisi ainoastaan pelkkä oppiväline, vaan pikemminkin kokonainen oppimisen malli. Tuote itse toimii tutkimuksen

välineenä ja kehittyä siihen liittyvän teorian rinnalla. (The Design-Based Research Collective 2003, 7.)

Viimeisenä The Design-Based Research Collectiven (2003) määritelmän mukaan hyvän kehittämistutkimuksen piirteitä tutkimus tulisi liittää metodeihin, jotka ovat dokumentoitavissa ja siten niiden vaikutus yhdistettävissä saatuun tulokseen. Niistä tulisi myös raportoida tarkasti, jotta tutkimuksen luotettavuus säilyisi. Kehittämistutkimuksessa ei kuitenkaan ole olemassa jotain tiettyä metodologiaa, jota tutkijan tulisi käyttää, vaan metodi on valittavissa kulloisenkin tutkimuksen kohteen ja muiden tarpeiden mukaan. Usein kehittämistutkimuksessa käytetäänkin useita eri metodeja rinnakkain tutkimustulosten varmistamiseksi. (The Design-Based Research Collective 2003, 5-7.)

5.3 Haasteista

Kehittämistutkimuksen tekeminen ei ole täysin ongelmaton, sillä esimerkiksi objektiivisuus, reliabiliteetti ja validiteetti ovat hankalat todentaa. Reliabiliteetin luotettava tarkastelu syntyy kuitenkin useiden käytettyjen metodien ja lähteiden yhteenliittämisestä. Validiteettia perustellaan yleensä sykleillä, jotka ovat kehittämistutkimukselle ominaisia. Sama tutkimussykli toteutetaan yleensä useampaan kertaan, jolloin samansuuntaiset tutkimustulokset tukevat toisiaan. (The Design-Based Research Collective 2003, 7.)

Validiteettia saadaan puolustettua myös sillä, että kehittämistutkimusta toteutetaan usein yhteistutkijuiden avulla. Tällöin saadaan useita eri näkökulmia tutkittavaan aiheeseen ja tutkimuksen validiteetin arviointi on helpompaa. Opettajien ja tutkijoiden yhteistyö nähdään kehittämistutkimuksen yhteydessä positiivisena asiana. Opettajat yleensä ovat alikoulutettuja tai liian kiireisiä töidensä keskellä, joten uuden tutkimuksen tekemiselle ei jää aikaa. Tutkijat puolestaan eivät tunne tutkittavan kohteen ryhmädynamiikkaa ja yksikön toimintamalleja samalla lailla kuin opettajat. Lisäksi tutkijat tuntevat koulutuksen kontekstin teorian näkökulmasta opettajia paremmin. (Anderson & Shattuck 2012, 17.) Täytyy kuitenkin huomioda, että Andersonin ja Shattuckin mielipide ei sellaisenaan päde Suomen kontekstissa, sillä meillä opettajankoulutus on maisteritasoinen ohjelma, mikä vaikuttaa opettajien käsitykseen tutkimuksesta, sen tekemisestä ja tuloksista.

Kehittämistutkimuksessa on omat haasteensa, sillä kentällä toimiessa on vaikeaa huomata kaikki yksityiskohdat, sulkea pois tiettyjä tekijöitä ja lisäksi tiedostaa omien valintojen merkitys

tutkimuksen tuloksille. Informaalin ja formaalin tiedon erottaminen toisistaan ei kentällä ja toiminnan keskellä ole aina ongelmatonta. (Edelson 2002, 107-116.) Jotta kehittämistutkimuksen tulosten arviointia voidaan pitää luotettavana, tutkijan tulee kiinnittää huomiota tarkkaan dokumentointiin tutkimuksen etenemisestä. Tutkimuksessa täytyy kuvata kehittämissuunnan vaiheet, lähtökohtatilanne sekä lopputulema unohtamatta menetelmien yksityiskohtaista kuvaamista. (Kananen 2012, 165.)

Ongelmia tuottaa tutkijan toiminta puolueellisuuden, tai pikemminkin puolueettomuuden, näkökulmasta. Kentällä toimiessa täysi puolueettomuus on harvoin toteutettavissa, sillä oman tuotteen parissa toimiva tutkija pyrkii usein puolustamaan liiankin tiukasti omaa kantaansa ja näkemyksiään. Aikataulullisesti kehittämistutkimuksen tekeminen voi olla haastavaa, sillä kehityksen kierteiden aikatauluttaminen ei aina ole aivan yksinkertaista. (Anderson & Shattuck 2012, 17-18.) Myös oikeiden muuttujien valinta voi olla hankalaa, sillä usein tutkijat keskittyvät olemassa olevaan ongelmaan ja tutkimuksen kohteeseen niin tiiviisti, etteivät huomaa muiden läsnäolevien tekijöiden vaikutusta. Myös monimuotoiset ja -mutkaiset lähtökohdat tarjoavat omat haasteensa kehittämistutkimuksen tekemiselle ja hankaloittavat tutkimuksen rajausta. (The Design-Based Research Collective 2003, 7.)

The Design-Based Research Collective (2003) huomauttaa, kuinka sekä oppilaat että opettajat vaikuttavat valinnoillaan kulloinkin tehtävän tutkimuksen lopputulokseen, eikä näin täysin samanlaista tutkimusta voida toistaa useampaa kertaa. Yksi kehittämistutkimuksen, ja monen muunkin tutkimussuuntauksen, ongelmista onkin ryhmäkoon valinta. Mikäli halutaan tehdä laajalti yleistettävää tutkimusta, tulisi tutkimusjoukon olla suuri. Tällöin tuloksen yleistettävyys olisi helppoa, mutta yksilöiden valintojen tarkastelun mahdollisuus pienenee. Jos taas halutaan olla varmoja tietyn piirteen vaikutuksesta yksilön oppimiseen, on tehokkaampaa tutkia hyvin pientä ryhmää, jolloin rajaaminen on helpompaa ja yleistäminen hankalampaa. (The Design-Based Research Collective 2003, 5-7.)

6 TUTKIMUKSEN TOTEUTUS

Tässä luvussa esittelen ensin tutkimuksen kulun ja sen aikana kootun aineiston. Tämän jälkeen käsittelen tarkemmin teoriaohjaavaa sisällönanalyysia ja teemoittelua tämän tutkimuksen näkökulmasta. Aineistoon ja analyysiin liittyvät piirteet käsitellään rinnakkain, sillä ne ovat vahvasti sidoksissa toisiinsa.

6.1 *Aineisto*

Edelsonin (2002) mukaan kehittämistutkimuksessa on kolme pääkohtaa, jotka löytyvät jokaisesta tutkimuksesta. Nämä kolme pääkohtaa ovat ongelma-analyysi, kehittämisprosessi ja kehittämistutkimuksen lopussa syntyvä tuotos ja siihen liittyvä teoria. (Edelson 2002, 108-110.) Omassa tutkimuksessani ongelma-analyysi koostuu murtoluvun oppimisen vaikeuksista, toimintamateriaalien käytön haasteista ja siitä käytännön ongelmasta, ettei tutkimastani Merkitysten kakut -materiaalista ole olemassa aiempia tieteellisiä tutkimuksia. Tutkimukseni keskittyminen murtolukuihin yhdistyy koulussa meneillään olevaan jaksoon, joka keväällä tutkimuksen teon aikaan oli kolmannella luokalla murtoluvut. Edelsonin (2002) mukaan kehittämisprosessiin kuuluu työryhmän kokoaminen, materiaaliin tutustuminen ja kehitettävän tuotteen ensimmäisen version koostaminen (Edelson 2002, 108-109). Seuraavaksi kuvaan prosessia, joka johtaa opetuskokonaisuuden koostamiseen ja tutkimuksen tekemiseen.

Tekemässäni tutkimuksessa haasteeni oli tutustua opetusvälineeseen, jota tutkimuksessa käytän, ja siihen liittyvään, hiukan erilaiseen ajatusmaailmaan. Merkitysten kakut -materiaaliin tutustumisen lisäksi loin tutkimukseni pohjaksi tehtäviä, joita oppilaat pääsivät tunneilla ratkomaan toimintamateriaalin avulla. (Liite 2) Luomani opetuskokonaisuus käsittelee kolmannen luokan matematiikan murtoluvun osuutta ja toimii sellaisenaan yhdessä Merkitysten kakut -materiaalin kanssa. Charles ja Nason (2000) huomauttavat, että murtolukuja käsiteltäessä yksittäiset tehtävät eivät aina kerro oppilaan osaamisen tasosta (Charles & Nason 2000, 218). Tämän vuoksi

opetuskokonaisuuden tehtävissä olen pyrkinyt tuottamaan mahdollisimman erilaisia tehtäviä, joissa oppilasta pyydetään vastaamaan monella eri matematiikan kielellä ymmärryksen tason mahdollisimman tarkaksi kartoittamiseksi ja tätä kautta tarvittavan avun ja tuen antamiseksi.

Opetuskokonaisuus on suunniteltu toteutettavaksi oppitunti kerrallaan, jolloin jokainen oppitunti koostuu ongelmaan johdattelevasta ja sille puitteet antavasta tarinasta sekä siihen liittyvistä tehtävistä. Tarinat on luotu siten, että niistä koostuu mielekäs ja looginen jatkuva kokonaisuus, jossa oppilaat pääsevät matematiikan keinoin auttamaan tarinassa esiintyviä hahmoja. Opetuskokonaisuuteen on liitetty ohjeet opettajalle, jonka rooli on tietoisesti pyritty pitämään mahdollisimman vähäisenä. Tehtävien tarkoitus on kannustaa oppilasta kokeilemaan, keksimään ja oivaltamaan itse matematiikan rakenteisiin ja murtolukuihin liittyviä piirteitä.

Opetuskokonaisuuden ensimmäisen version valmistuttua tehtäviä kokeiltiin käytännössä. Tein tutkimukseni erään pirkanmaalaisen koulun kolmannella luokalla. Luokalla on 25 oppilasta, joiden vanhemmilta pyydettiin lupa tutkimuksen tekoon oppilaiden mukana kulkevan, kirjallisen lupalomakkeen avulla (Liite 1). Kaikki oppilaat osallistuivat tutkimukseen. Luokan oppilaille Merkitysten kakut -materiaali oli jo ennestään tuttu. Jokaisella oppilaalla oli kolme matematiikan tuntia viikossa. Näistä tunneista kaksi oli jakotunteja puolelle luokalle ja yksi yhteinen, koko ryhmän tunti. Tutkijalle matematiikan tunteja kertyi siis viikossa yhteensä viisi. Keräsin materiaaliani kahden viikon ajan, joten kokonaisuudessaan opetustunteja luokassa kertyi kymmenen.

Luokan jakaantuminen kahteen ryhmään ja ryhmien eriaikainen matematiikan tunti antoi mahdollisuuden materiaalin pieniin muutoksiin matkan varrella. Ensimmäisen ryhmän tuntien jälkeen muokkasin useasti tekemääni materiaalia ja etenkin asettamieni kysymysten sanamuotoa oppilaalle sopivammaksi ja ymmärrettävämmäksi. Ensimmäisellä tunnilla tutkija joutui usein selittämään, mitä kysymyksellä tai jollain ilmaisulla tarkoitetaan. Näin luomani tehtävät kävivät läpi kaksi kokeilukierrosta tutkimuksen aikana ennen viimeistä muotoaan graduni liitteenä (Liite 2). Opetuskokeilun aikana tehdyt pienet sanamuodon ja tehtäväjärjestyksen muutokset on huomioitu analyysissä. Kahden viikon aikana eteneminen aiheesta toiseen oli hitaampaa kuin olin alun perin suunnitellut. Tämän vuoksi paketin viimeiset tehtävät murtoluvun vähennyslaskuun liittyen jäivät

kokeilematta oppilaiden kanssa. Olen kuitenkin liittänyt ne graduuni, sillä tutkimuksen aikana ilmeni monia piirteitä, joiden pohjalta myös viimeisen osion tehtäviä saattoi muokata ilman kokeilua. Mielestäni koko 3. luokan murtoluvun alueen huomioiminen opetuskokonaisuudessa on järkevää ja mielekästä.

Kentällä tehdyn tutkimuksen jälkeen aloitin aineiston analyysin teoriaohjaavan sisällönanalyysin keinoin. Koska videomateriaalia tutkimuksesta kertyi paljon, jouduin rajaamaan aineistoa. Valitsin oppituntien videoinneista ne kohdat, joissa oppilaat työskentelivät Merkitysten kakut -materiaalin parissa tai keskustelivat tehtävistä. Myös erilaiset opettajan ja oppilaan väliset opetustilanteet ja keskustelut otettiin mukaan aineistoon. Jätin tutkimuksen ulkopuolelle esimerkiksi kohdat, joissa itse luin tarinaa oppilaille ääneen ja kohdat, jotka sisälsivät luokan sisäistä välienselvittelyä tai koulun arkeen liittyviä tiedotuksia. Oppilaiden tekemistä tehtävistä huomioin kaikki muutamia poikkeuksia lukuun ottamatta. Osa oppilaista oli hukannut tutkimukseen tarkoitetut tehtävät ennen kuin sain ne käsiini ja muutama oppilas oli jättänyt tehtävät tekemättä tai ehtinyt tehdä ne vain osittain. Minkään aihealueen sisällä puuttuvien tehtävien osuus ei ollut niin suuri, että tehtävät olisi täytynyt jättää analyysin ulkopuolelle. Oppilaat ja opettajat erottelin toisistaan raporttia varten numeroin.

Analyysin jälkeen tarkastelin tekemääni opetusmateriaalia analyysini valossa ja tein siihen korjauksia tulosten perusteella. Pysin lisäämään tehtäviä, joissa oppilaat pääsisivät harjoittamaan sellaisia akateemisen lukutaidon piiriin kuuluvia taitoja, jotka tulosten perusteella tuntuivat jäävän vähemmälle harjoittelulle. Lisäksi korjasin opetusmateriaalista mm. kysymyksiä, joita oppilaat eivät olleet tunnilla ymmärtäneet ja yritin tehdä tehtävistä selkeämpiä. Muokkasin opettajan ohjeita selkeämpään ja uusia tehtäviä vastaavaan muotoon ja lyhensin tarinoita, jotka tuntuivat oppitunneilla liian pitkiltä.

6.2 Sisällönanalyysi

Sisällönanalyysi on analyysitapa, jota voidaan käyttää sekä laadullisessa että määrällisessä tutkimuksessa. Englannin kielinen termi *content analysis* vakiintui vasta 1900-luvun puolivälissä, mutta sen eri keinoja on käytetty jo aiemmin tarkasteltaessa ihmisen tuottamaa tekstiä, kuvaa tai toimintaa. Alun perin sisällönanalyysiä on tehty määrällisen tutkimuksen keinoin, mutta

myöhemmin, laadullisen tutkimuksen muutenkin yleistyessä, on sen käyttö yleistynyt myös laadullisen tutkimuksen puolella. (Krippendorff 2004, 3-17.) Neuendorf (2002) huomauttaa, että sisällönanalyysi on tarkoitettu kaikenlaisen kirjoituksen ja tekstin käsittelyyn. Aineistona voivat olla niin henkilökohtaiset kirjeet kuin mainoksetkin. (Neuendorf 2002, 17-22.) Ihmisen tuottama teksti, oli se sitten kirjoitettu, puhuttu tai vaikkapa video, on lähes poikkeuksetta laadullista aineistoa, käsiteltiin sitä millä keinolla hyvänsä. Rajan vetäminen puhtaasti määrällisen ja laadullisen tutkimuksen välille ei ole yksinkertaista tai aina tarpeellistakaan. (Krippendorff 2004, 3-17.)

Kirjallisuudessa sisällönanalyysin prosesseista on keskusteltu melko vähän, sillä sitä on pidetty liian yksinkertaisena ja laajana metodina. Laadullisessa tutkimuksessa materiaalia on usein niin paljon, että sen kahlaaminen läpi lukien ja katsellen yhä uudelleen ja uudelleen tuntuu suuritöiseltä ja haastavalta. Usein etenkin aloittaminen on sisällönanalyysiä tehtäessä haastavaa. (Elo & Kyngäs 2008, 113.) Tutkimuskohteen ja -aineiston rajaaminen tuottaa päänvaivaa sisällönanalyysin tekijälle, mutta onneksi hyväksyttävissä keinoja aineiston rajaamiseen on monia. Tutkija voi rajoittaa joko tutkimansa ryhmän kokoa tai aineistoa. Ongelmana kuitenkin on, ettei sopivaan aineiston kokoon ole olemassa ohjeita, vaan jokaisen tutkijan täytyy tehdä päätös kulloisenkin kohteensa ja tutkimuksen luonteen perusteella. (Krippendorff 2004, 111-124.)

Sisällönanalyysissä tarvitaan aina sisältö, jota tutkitaan. Tällaista sisältöä voi olla mikä tahansa kirjoitettu teksti, nauhoitettu puhe, video tai kuvat. (Krippendorff 2004.) Suomalaisessa tutkimuksessa nimetään kolme sisällönanalyysin lähestymistapaa, jotka ovat aineistolähtöinen, teorialähtöinen ja teoriaohjaava sisällönanalyysi. Muualla maailmassa eroa näiden kolmen välille ei tehdä samalla tavoin kuin Suomessa, vaan eroja perustellaan induktiivisen ja deduktiivisen päättelyn logiikan avulla. (Tuomi & Sarajärvi 2009, 107-118.) Induktiivisella päättelyllä tarkoitetaan yksittäisten havaintojen perusteella yleisen kuvan muodostamista ja deduktiivisella puolestaan sitä, että yleisistä malleista tehdään myös yksittäisiä tapauksia koskevia päätelmiä. Näiden kahden rinnalle tuodaan joissain tapauksissa myös abduktiivisen päättelyn logiikka, joka ei ole puhtaasti kumpaakaan, ei induktiivista eikä deduktiivista päättelyä, vaan pyrkii yhdistämään näiden piirteitä. Abduktiivisella päättelyllä pyritään parhaaseen mahdolliseen lopputulokseen, jota ei kuitenkaan olla saavutettu puhtaasti induktiivisen tai deduktiivisen päättelyn avulla. (Graneheim, Lindgren & Lundman 2017, 30-31.)

Sisällönanalyysin lähtökohtia on eritelty myös muista näkökulmista. Krippendorff (2004) nimeää kolme lähtökohtaa, joiden pohjalta sisältöä voi lähteä tarkastelemaan. Nämä kolme analyysimallia

ovat sisältölähtöinen, ongelmalähtöinen ja metodilähtöinen analyysi. Sisältölähtöisellä analyysillä tarkoitetaan analyysiä, joka pyrkii etsimään ratkaisua tutkimuskysymyksiin tekstin perusteella. Ongelmalähtöinen puolestaan viittaa analyysiin, jossa pyritään etsimään ratkaisua tutkimuskysymykseen tekstiä tarkastelemalla. Tällöin tutkijan tulee valita aineistoksi tekstejä, joiden hän uskoo antavan ratkaisun tutkimuskysymyksiin. Kolmas analyysin lähtökohta ohjaa metodilähtöiseen analyysiin. Tällöin jotain jo aiemmin tutkittua kohdetta tutkitaan uudella metodilla. (Krippendorff 2004, 340-357.) Käytän tutkimuksessani suomen kielessä tunnettuja termejä kuvaamaan lähestymistapaani tutkimukseen, sillä mielestäni ne kuvaavat selkeimmin niitä toimintoja ja malleja, joita työssäni toteutan.

6.2.1 Teoriaohjaava sisällönanalyysi

Tutkimuksessani materiaalia kerätään opetustuntien videoinnin avulla ja oppilaiden tekemien tehtävien muodossa. Videotiedostot puretaan teoriaohjaavan sisällönanalyysin keinoin. Teoriaohjaavan analyysitavan käyttäminen on järkevää silloin, kun analyysin pohjana on jokin selkeä, aiemmin muodostunut tieto ja teoria, eikä kokonaista uutta teoriaa pyritä tulosten pohjalta muodostamaan (Elo & Kyngäs 2008, 107). Teoriapohjana, johon keräämäni aineistoa peilaan tutkimuksessani, on akateeminen lukutaito, joka sisältää matemaattisen osaamisen, matemaattisten käytänteiden ja matemaattisen diskurssin käsitteet (Moschkovich 2015a). Näistä erityisesti keskityn matemaattiseen diskurssiin ja siihen yhdistyvään matematiikan neljän kielen malliin (Joutsenlahti & Rättyä 2014), jotka toimivat tutkimuksen välineenä olevan Merkitysten kakut -materiaalin pohjana. Teoriaohjaavan analyysin kohteena on yleensä vanha teoria, sen testaaminen ja tarkastelu uudesta näkökulmasta, uudessa kontekstissa tai esimerkiksi eri aikakausien tulosten vertailu. Teoriaohjaavan analyysin tuloksena halutaan saada tietoa siitä, kuinka yleinen teoria toimii uudessa kontekstissa. Tarkoituksena ei siis ole luoda yleistä tietoa vaan syventää uuden näkökulman kautta jo olemassa olevaa tietoa. (Elo & Kyngäs 2008, 107-109.) Kansainvälisessä keskustelussa käytetty abduktiivinen aineiston lähestymistapa vastaa parhaiten suomalaisen jäsentelyn teoriaohjaavaa mallia, sillä se antaa tilaa niin teoriasta kumpuavien asioiden huomioimiselle kuin aineistosta esiin nouseville ilmiöille ja piirteille. (Graneheim, Lindgren & Lundman 2017, 30-31).

Teoriaohjaavaa tutkimusta tehdään vaiheittain ja sen vaiheet ovat valmistautumisvaihe, organisointivaihe ja raportointivaihe. Valmistautumisvaiheessa tutkija tutustuu kenttään, jolla hän tulee tutkimusta tekemään ja ottaa selvää kokonaisuudesta. Organisointivaiheella tarkoitetaan vaihetta, jossa tutkimuksesta saatua materiaalia tarkastellaan teorian näkökulmasta ja jossa

kehitetään tai valitaan jokin malli, jolla tutkimustuloksia lähdetään luokittelemaan ja tarkastelemaan. Analyysivaiheessa tuloksista koostetaan kokonaisuus, joka osoittaa selkeästi, kuinka tutkimuksen tuloksiin on päästy. Tutkimuksen ja sen tulosten selkeä raportointi lisää tutkimuksen luotettavuutta. (Elo & Kyngäs 2008, 109-112.) Laadullisen sisällönanalyysin tuloksia eritellään kategorioiden tai teemojen kautta. Kategorioilla tarkoitetaan luokkia, joihin sisällytetään kulloinkin tutkittavia piirteitä. Teemat puolestaan ovat ”punaisia lankoja”, jotka yhdistävät aineistoa. (Graneheim, Lindgren & Lundman 2017, 32-33.) Kerron tässä tutkimuksessa käytettävästä teemoittelusta ja siihen liittyvistä teemoista seuraavassa alaluvussa.

Teoriaohjaavassa tutkimuksessa on ongelmakohtia. Mikäli tutkimusta tehdään johonkin aiempaan teoriaan pohjautuen, on mahdollista uppoutua liiaksi teorian vietäväksi ja huomata ainoastaan teoriaa tukevat piirteet. Myös valitun mallin ulkopuolelle jääneiden piirteiden sijoittaminen on haastavaa ja sen tulisi aiheuttaa pohdintaa siitä, onko ”yliäämä” hyödyllistä vai hyödytöntä ja tulisiko sen avulla luoda jotain uutta pohjalla olevan teorian rinnalle. Ongelma voi olla myös tutkijan väärä pohjateorian valinta tai pohjateorian lähtökohtainen vajavaisuus. (Graneheim, Lindgren & Lundman 2017, 30-31.) Myös objektiivisen tulkinnan tekeminen on haastavaa sisällönanalyysiä tehtäessä, koska tutkimuksen kohteena on ihminen ja ihmisen tuottama teksti. Jo pelkästään kieli tai murre saattaa aiheuttaa väärinymmärryksiä ihmisten välille. Sen lisäksi tutkimuskohteen sanoman ymmärtäminen oikein ei aina ole yksinkertaista, vaikka lauserakenne sinänsä olisikin tutkijalle tuttu ja selkeä. (Neuendorf 2002, 8-10.)

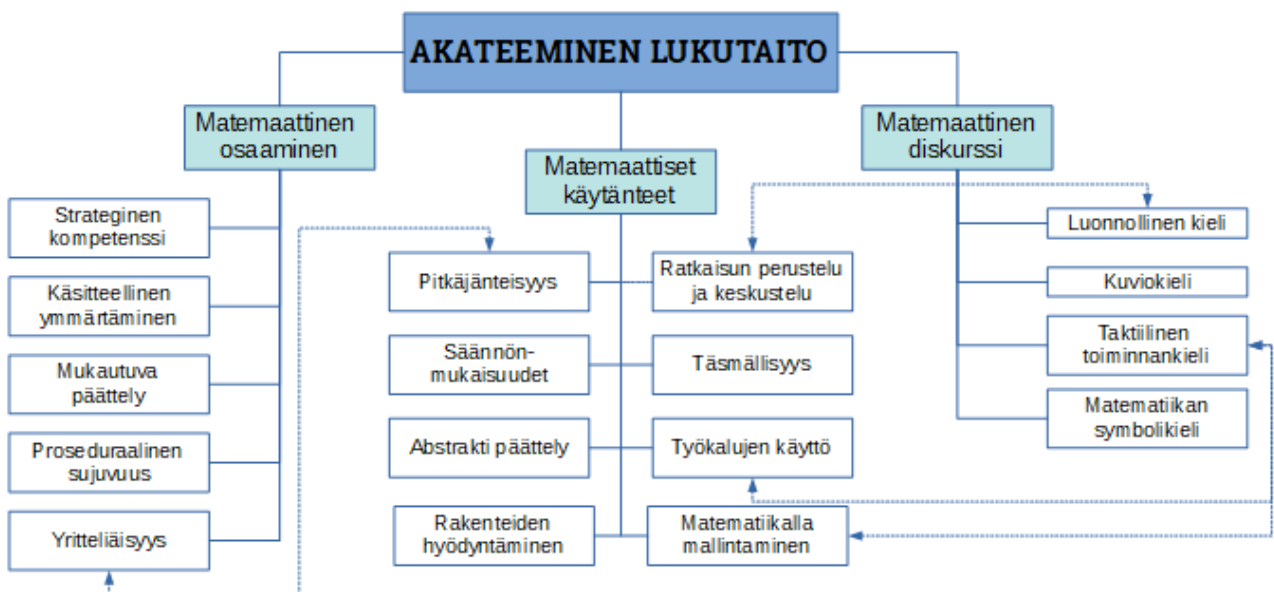
6.2.2 Teemoittelu

Teoriaohjaavan sisällönanalyysin tukena käytän teemoittelua. Lähdän tarkastelemaan aineistoani akateemisen lukutaidon asettamien teemojen avulla. Teemoittelu mahdollistaa eri teemojen ja niiden sisältöjen vertailun toisiinsa, mikä on tässä tutkimuksessa hyödyllinen ja järkevä lähestymistapa (Eskola ja Suoranta 1998, 174). Teemoittelu toimii apuna kehittämistutkimuksen tuloksena syntyvän tuotteen parantelussa, sillä sen avulla näen, mitkä akateemisen lukutaidon asettamista teemoista näkyvät vahvemmin ja mitkä puolestaan heikommin. Tällöin tuotteen parantelu tasapuolisemmaksi on helpompaa.

Teemoittelu on aineistolähtöinen analyysimenetelmä, jonka avulla lähdeaineistojen materiaali jaetaan erilaisten teemojen, pääotsikoiden, alle. Teemoittelussa tarkoitus on löytää pääteemat aineistosta itsestään, mutta myös jonkin teorian pohjalta syntyvä teemoittelu on mahdollista.

Pääteemojen alapuolelle kerääntyneet asiat on mahdollista jakaa pienemmiksi kokonaisuuksiksi, alateemoiksi. (Saaranen-Kauppinen & Puusniekka, 2006.) Aronsonin (1994) mukaan teemoittelu on hyvä aineiston analyysitapa esimerkiksi haastatteluaineistoa purettaessa, sillä se tarjoaa erilaisen tulkinnallisen lähtökohdan analyysille. Teemojen valinta täytyy perustella hyvin lähdekirjallisuuteen ja aiheeseen perusteellisesti tutustumalla. (Aronson 1994.)

Tutkimuksessani teemoittelu toteutetaan teoriaohjaavasti. Pääteemoina toimivat akateemisen lukutaidon osa-alueet matemaattinen osaaminen, matemaattiset käytännöt ja matemaattinen diskurssi, ja alateemoina toimivat niihin lukeutuvat taidot (kuva 4). Akateemiseen lukutaitoon kuuluvista alateemoista osa on niin lähellä toisiaan, että analyysin edetessä rakensin niiden välille linkin. Yhdistetyt termit ovat niin tiukasti sidoksissa toisiinsa, että koen niiden käsittelemisen erillisinä asioina lähes mahdottomana, vaikka niitä eri pääteemojen sisällä katsotaankin hiukan eri näkökulmasta. Käytännön tilanteet, joissa taidot ilmenevät, kehittävät kaikkia toisiinsa linkitettyjä taitoja samanaikaisesti. Tällöin alateemojen yhdistely on mielekästä analyysin helpottamiseksi ja selkiyttämiseksi. Tutkimuksen tuloksia luettaessa on hyvä tiedostaa eri alateemojen yhtäläisyydet.



KUVA 4. Akateeminen lukutaito matematiikassa ja eri osa-alueiden väliset yhteydet.

Teemoitteluun kuuluu aineistoon pohjautuvien sitaattien esittäminen. Sitaattien tarkoitus on lisätä tutkimuksen avoimuutta ja samalla sen uskottavuutta lukijalle. (Saaranen-Kauppinen & Puusniekka 2006.) Eskola ja Suoranta (1998) kuitenkin huomauttavat, että useasti teemoittelun lopputulos on sitaattikokoelma, joka ei tarjoa asiaan vihkiytymättömälle lukijalle juurikaan informaatiota. Sitaattien

määrän valitseminen on jossain määrin ongelmallista, sillä sitaatit ovat lukijalle mielenkiintoisia, mutta vievät tilan tutkijan omilta huomioilta ja tutkimuksen tuloksilta. (Eskola & Suoranta 1998, 178–180.) Olen pyrkinyt raportissani valitsemaan sellaisia sitaatteja, jotka tuovat lukijalle lisäinformaatiota analysoitavan ilmiön esiintymisestä ja sen erilaisista piirteistä tutkimuksessa. Tutkimuksessani monet kuviokielen ja symbolikielen ilmaisut ovat sanallisesti mahdottomia ilmaista, jolloin kuvien käyttö on perusteltua.

Tutkimuksessani rajasin analysoitavan aineiston oppilaiden toiminnan mukaan ja merkitsin videokatkelmiin ja tehtäväkokonaisuuksiin taidot, joita oppilas käyttää tai kehittää tehtävään liittyvän toiminnan aikana. Pyrin merkitsemään vain ne taidot, joita kussakin tilanteessa esiintyy eniten välttääkseni liiallisen tulkitsemisen. Johtuen erilaisista lähtökohdista, käsittelin osa-alueita hiukan eri näkökulmista. Matemaattista diskurssia lähestyin oppilaan käyttämien keinojen kautta. Matemaattisia käytänteitä ja matemaattista osaamista käsittelin oppimisen näkökulmasta nimeten taitoja, joita oppilas toimintansa aikana kehittää. Nämä rajaukset ja täsmennykset siihen, miltä kantilta akateemisen lukutaidon piirteitä lähestyn, juontavat juurensa siihen, että taidot matematiikan hyödyntämisessä paranevat kaiken aikaa, eikä oppilaan voi katsoa olevan valmis taitojen suhteen.

Jaoin tutkimuksen analyysin opetuskokonaisuuden luomiin aihealueisiin, jotka muodostavat myös tulokset-luvun järjestyksen. Aihealueet ovat vahvasti kytköksissä kahden viikon aikana esiintyviin oppisisältöihin. Valitsin alueiksi murtoluvun käsitteen, kokonaisuuden käsitteen, murtolukujen suuruusvertailun ja yhteenlaskun, joista eniten oppitunneilla painottuivat murtoluvun käsite ja suuruusvertailu. Tällainen jaottelu on perusteltua, sillä erilaiset aihealueet tuottavat erilaisia tehtäviä ja sen vuoksi oppilaiden toiminta niitä tehtäessä on erilaista. Aihealueet ovat osittain päällekkäisiä, eikä videomateriaalia ollut aina helppo luokitella vain yhteen luokkaan kuuluvaksi. Tästä syystä osa videomateriaalista on jäsennetty kahteen luokkaan kuuluvaksi.

7 TULOKSET

Jaottelen tutkimuksen tulokset erilaisten murtolukuun liittyvien käsitteiden muodostamien aihealueiden avulla. Nämä aihealueet ovat murtoluvun käsite, kokonaisen käsite, suuruusvertailu ja murtoluvun yhteenlasku. Materiaalipaketissa on sen lisäksi murtoluvun vähennyslaskuun liittyviä tehtäviä, mutta nämä jäävät tutkimuksesta aikataulun vuoksi ulkopuolelle. Jokaisen aihealueen kohdalla käsittelen tulokset akateemisen lukutaidon osa-alueiden, matemaattisen osaamisen, matemaattisten käytänteiden ja matemaattisen diskurssin, avulla. Nämä kohdat vastaavat tutkimukseni ensimmäiseen tutkimuskysymykseen. Lisäksi näiden aihealueiden jälkeen vastaan toiseen tutkimuskysymykseen, joka pyrkii selvittämään, millaisia mahdollisuuksia materiaali tarjoaa opettajalle oppilaan ajatusmaailman ymmärtämiseksi.

Akateemisen lukutaidon osa-alueista matemaattinen diskurssi painottuu analyysissä. Tämä on selitettävissä sillä, että eri kielten vaihtelua tapahtuu Merkitysten kakut -materiaalin yhteydessä jatkuvasti. Esimerkiksi taktiilista toiminnan kieltä käytetään kaiken aikaa materiaalin ollessa esillä. Monet tehtävät myös edellyttävät pareittain työskentelyä, jolloin omien ajatusten kielentäminen ja matematiikasta puhuminen sekä oman ajattelun perustelevminen ovat luonnollinen osa opiskelua. Tämä kannattaa ottaa huomioon analyysia luettaessa.

7.1 Murtoluvun käsite

Murtoluvun käsitteeseen liittyviä tehtäviä ja oppitukioita tunnilla oli eniten. Tämä johtuu osittain omistakin rajausvalinnoistani ja oppituntikonaisuuteni aiheesta. Käsitteeseen kuuluviksi asioiksi olen rajannut nimittäjään ja osoittajaan sekä niiden tehtäviin, nimittäjäkiekkoon ja murtoluvun merkintään liittyvät tehtävät ja oppitukiot. Tähän aihealueeseen liittyviä tukioita tuli myös muiden aihealueiden keskellä, jos aiemmin opittua termiä jouduttiin kertaamaan tai muuten käsittelemään uudelleen.

Murtoluvun käsitteen oppimiselle hankaluuksia aiheutti sen sekoittaminen jakolaskuun. Oppilaiden tekemissä tehtävissä on piirretty murtoluvun perään yhtäsuuruusmerkki, mutta ratkaisua ei ole saatu.

Videoinnilta näkee, kuinka oppilaat hämmentyvät uuden asian edessä ja sanovat ääneen, etteivät osaa laskea annettua laskua. Yhdessä tehtävässä oppilaiden tehtävä oli kirjata ylös jokin oma mielenkiintoinen huomionsa murtoluvuista ja yksi oppilaista onkin kirjoittanut murtoluvun olevan samannäköinen kuin jakolasku. Toisaalta, oppilaat eivät ole väärässä, mutta asian käsittely kolmannella luokalla osoittautui monella tavalla haastavaksi.

Merkitysten kakut -materiaalia on aikaisemmin oppitunneilla käytetty kokonaislukujen kautta, jolloin jokainen sivu ja osakiekkko on tarkoittanut oppilaalle lukumäärää (esimerkiksi sivu kahdeksan merkitsee kahdeksaa (8) rekkaa ja osakiekkko rekkojen kahta (2) omistajaa). Murtolukujen maailmassa tilanne muuttuu hiukan erilaiseksi, sillä nyt jokainen sivu kuvaa yhtä kokonaista, joka on jaettu sivunumeron osoittamaan määrään yhtä suuria osia. Juuri samankokoisuuden ymmärtäminen on tärkeä osa murtoluvun ymmärtämistä (Murdock-Stewart 2005, 152-162). Luokan opettajan ja oman ennako-oletukseni mukaan Merkitysten kakut -materiaaliin liittyvän ajattelun muutos olisi voinut vaikuttaa oppilaisiin, mutta yllättäen oppilaat omaksuivat uuden tavan ajatella materiaalia ja sen sivuja nopeasti.

Murtoluvun käsitteeseen liittyvät tehtävät olivat sekä opettajalle että oppilaille haastavia ja sisälsivät aihealueista ajallisesti vähiten oppilaiden omaa tekemistä ja oivaltamista. Tätä piirrettä saattaa selittää materiaalin uutuus opettajalle ja tehtävyyppien sekä käsitteen uutuus oppilaille. Murtoluvun käsitteeseen keskittyvät tehtäväpaketin ensimmäiset tehtävät vaativat eniten muokkausta ja korjausta oppilaslähtöisempään suuntaan ja eheämmäksi kokonaisuudeksi.

Matemaattinen osaaminen

Murtoluvun käsitettä opeteltaessa eniten havaintoja aineistosta tein käsitteelliseen ymmärrykseen liittyen. Murtolukua yritettiin määrittää monin tavoin ja oppilaiden tehtävissä suosituin määritelmä on murtoluvun määrittäminen pienemmäksi luvuksi kuin yksi. Tämä on tuntien rakenteen vuoksi helposti tehtävä virhepäätelmä, sillä oppilaiden kanssa käsiteltiin aluksi ainoastaan tilannetta, jossa yhtä kokonaista jaettiin pienempiin osiin. Muutaman oppilaan vastauksista on havaittavissa erilaisia määrittelyjä. Eräs oppilas on vastannut kysymykseen siitä, millaisia lukuja murtoluvut ovat, seuraavasti:

”Riippuu siitä mitä lukua jaetaan tai murretaan.” (Oppilas 7)

On vaikea sanoa, viittaako oppilas vastauksellaan murtoluvun kokoon vai johonkin muuhun siihen liittyvään ilmiöön. Vaikka oppilaan muista tehtävistä ja vastauksista pystyy päättelemään, että hän

näkee murtoluvun ykköstä pienempänä lukuna, on vastauksesta havaittavissa alkava ymmärrys murtoluvun tilannesidonnaisuudesta. Tehtäväpakettiin olisi hyvä lisätä jokin murtoluvun tilannesidonnaisuuteen liittyvä pohdintatehtävä. Tämä voisi laajentaa monen oppilaan näkemystä murtoluvuista.

Oppilaiden hämmennys jakolaskusta murtolukuun siirryttäessä voidaan liittää käsitteelliseen ymmärrykseen ja yritteliäisyyteen. Alussa oppilaiden oli hankala päästää irti jakolaskun käsitteestä ja tutusta, totutusta maailmasta. Tämän vuoksi murtoluvut näyttäytyivät aluksi haastavina, mikä näkyi mm. oppilaiden vastauksissa tiettyihin kysymyksiin. Vastauksena kysymykseen siitä, mihin murtolukuja käytetään, yksi oppilas oli kirjoittanut murtolukuja käytettävän ”vaikeiden laskujen laskemiseen” (Oppilas 6). Toisaalta muutama oppilas koki murtoluvun myös helpotuksena, sillä vaikeaa jakolaskua ei tarvinnutkaan laskea loppuun saakka.

Osoittajan ja nimittäjän roolista ja niiden tehtävistä monelle oppilaalle kehittyi selkeä kuva, mikä näkyy luonnollisen kielen vastauksissa. Lähes poikkeuksetta oppilaat ovat osanneet selittää sen, kuinka nimittäjä kertoo, kuinka moneen osaan kokonainen on jaettu ja osoittaja sen, kuinka monta palaa on valittu tai ”värjätty”. Sanan värjätty käyttö tässä yhteydessä liittyy Merkitysten kakut - materiaalin osakiekkoihin ja niiden väreihin. Tämänkin kysymyksen vastauksista on havaittavissa, kuinka oppilaiden ymmärrys murtoluvusta rajoittuu vain ykköstä pienempiin lukuihin.

Kuten jo aiemmistakin vastauksista näkyy, oppilaiden mukautuvan päättelyn taito harjoittuu murtoluvun käsitteestä puhuttaessa. Merkitysten kakut -materiaalin yhteydessä ja tehtäväpaketini tehtävissä vastaus etsitään ja esitetään usein monen eri matematiikan kielen kautta. Tällöin vastauksen tarkistaminen ja tarkastelu on luonnollinen osa oppimista. Strategisen kompetenssin kysymys on haastava, sillä oppilaiden tekemät tehtävät eivät haasta oman ongelman keksimiseen ja matemaattiseen rakentamiseen. Toisaalta oppilaista osa löysi murtoluvun käsitteeseen liittyviä ongelmia, joita he ratkoivat tehtävien ulkopuolella. Yksi hyvä esimerkki tällaisesta toiminnasta on yhden oppilaan hyvin pitkälle edennyt havainto murtoluvun luonteesta. Nimittäjästä puhuttaessa hän huomauttaa:

”Mitä suurempi luku niin sitä pienempi tulos. Se kuulostaa oudolta.” (Oppilas 10)

Tämä havainto ennustaa syntyvää syvempää ymmärrystä murtoluvusta, vaikka oppilaan oma pohdinta tuntuukin vielä olevan kesken. Tunnilla hän tarkastelee havaintoaan Merkitysten kakut - materiaalin avulla, mutta toiminnan keskeyttää harmillisesti tunnin loppuminen.

Matemaattiset käytänteet

Matemaattisista käytänteistä korostuivat keskustelun ja perustelun, matemaattisen mallintamisen ja työkalujen käyttämisen taidot. Tämä on luonnollista, sillä tehtävissä tuli käyttää apuna Merkitysten kakut -materiaalia, jolloin työkalujen käyttö ja mallintamisen taidot olivat luonnollinen osa työskentelyä. Sen sijaan tarkkuus ja täsmällisyys sekä säännönmukaisuuksiin liittyvät taidot jäivät vähemmälle huomiolle. Murtoluvun nimeäminen oli aluksi oppilaille haastava tehtävä, mikä hankaloittaa oppilaiden vastauksien tulkintaa. Tämä kertoo siitä, että murtoluvun käsitettä tarkasteltaessa tehtävissä tulisi kiinnittää enemmän huomiota murtolukuun liittyviin matemaattisiin termeihin ja niiden symbolikielen merkintöihin.

Abstraktia ja kvantitatiivista päättelyä analyysissa ei nouse esiin murtoluvun käsitteestä puhuttaessa, sillä sitä on hankala saada näkyviin tutkimuksessa käytettyjen tehtävätyyppien avulla. Tehtäväpakettiin liittyvä tarina tuo oppilaiden ratkaistavaksi käytännöstä kumpuavia matemaattisia ongelmia, mutta siihen liittyvät tehtävät eivät kuitenkaan osoita, onko oppilas ymmärtänyt matemaattisen ilmiön ja käytännön välisen suhteen. Muutamissa tehtäväpaketin tehtävissä oppilaat osoittavat ymmärryksensä siitä, kuinka matematiikan avulla voidaan kuvata arkipäivän tilanteita. Esimerkiksi yhdessä tehtävässä oppilas on keksinyt oman esimerkin murtolukujen hyödyntämiseksi:

”Tarvitsen niitä [murtolukuja] jakaessani jotakin tasan ihmisten kesken. Esim. jakaessani 11 jäätelöpaketin ihmisten kesken.” (Oppilas 9)

Tällaisia tehtäviä, jotka varmistavat oppilaan osaamista ja ymmärrystä ja liittävät ilmiön oppilaan omaan kokemusmaailmaan, tulisi olla tehtäväpaketissa enemmän, sillä ne antavat myös vihjeitä siitä, kuinka oppilas asian käsittää.

Säännönmukaisuuksien ymmärrys nousee esiin muutamassa tehtävässä. Yhdessä tehtävässä oppilaan tulee aiemmin oppimansa perusteella nimetä kuviokielellä esitettyjä murtolukuja (tehtävässä oppilaalle annettu $\frac{1}{3}$ ja $\frac{1}{4}$). Mikäli osoittajan ja nimittäjän tehtävät eivät ole vielä oppilaille selkeitä, ei murtolukujen nimeäminen ole edes mahdollista. Tehtävän avulla oli helppo seurata sitä, onko oppilas ymmärtänyt, kuinka murtoluku muodostuu. Lisäksi toisessa tehtävässä täytyi piirtää murtolukuja symbolikielen perusteella. Näissä tilanteissa suurin osa oppilaista tosin käytti apuna

Merkitysten kakut -materiaalia, eikä päätellyt tehtävää pelkän symbolikielen perusteella. Tämä toiminta on perusteltavissa tehtävänannon kautta, sillä se ohjaa avun etsimiseen materiaalista tarpeen vaatiessa.

Oppilaat osoittivat ymmärrystä monella tasolla annettujen tehtävien ulkopuolella. Päätelyn ja säännönmukaisuuksien ymmärryksen taju osoittaa seuraava opettajan ja oppilaan välinen taktiilisen toiminnan ja luonnollisen kielen avulla käyty keskustelu osoittajan tehtävästä. Oppilaan on vaikea kuvailla osoittajan ja nimittäjän tehtäviä ja siksi myös kuvion piirtäminen antaa haastetta.

Ope2: No miten nimeäisit, odotas, tällaisen? (asettaa kaksi kolmosen osakiekkoa kolmossivun päälle)

Oppilas20: Öö, kaksi kolmasosaa? (asettaa sormensa osakiekkojen päälle)

Ope2: No mistä tiesit, että on kaksi kolmasosaa?

Oppilas17: Kun siinä on kaksi tuollasta. (osoittaa osakiekkoja)

Tämän jälkeen oppilaalla ei ole ongelmia rakentaa symbolikielen ilmausta tilanteesta, vaikka aiemmin hänellä ei mielestään ollut käsitystä siitä, mikä on osoittajan tehtävä.

Matemaattinen diskurssi

Murtoluvun käsitteen yhteydessä eri kieliä käytettiin monipuolisesti ja niiden keskinäisiä suhteita oli mielenkiintoista seurata, kuten olen jo aiemminkin muutaman esimerkin avulla osoittanut. Oppilaille on havaittavissa jo tietynlainen ennako-oletamus murtolukujen maailmasta, mutta se, kuinka hyvin oppilaat maailman ennestään tunsivat, on mahdotonta päätellä aineistostani. Esimerkiksi puolikas sanana oli oppilaille jo ennestään tuttu ja taktiilisella kielellä jakolaskua kolme jaettuna kahdella (3:2) tutkittaessa oppilaat osasivat nimetä tulokseksi 1 ja puoli.

Luonnollisen kielen ja symbolikielen vuorovaikutus kehitys on nähtävissä oppilaiden tekemistä tehtävistä (Kuva 5). Kuvassa viisi oppilas kuvaa käytännönläheisesti neljäsosaa luonnollisen kielen avulla. Ilmaisuu on ymmärrettävä, mutta ei vastaa virallista termiä. Hänellä on kuitenkin jonkinlainen alkava käsitys murtoluvusta, sillä hän nimeää osat yhdeksi osaksi jostain kokonaisuudesta. Myöhemmin sama oppilas käyttää oikeaa termiä murtoluvuista puhuessaan.

Kuinka nimeäisit seuraavat kuvat luonnollisella kielellä? Entä symbolikielellä?



Luonnollinen kieli:

Yksi osa neljästä.

Symbolikieli:

$\frac{1}{4}$



Luonnollinen kieli:

Yksi osa kolmesta.

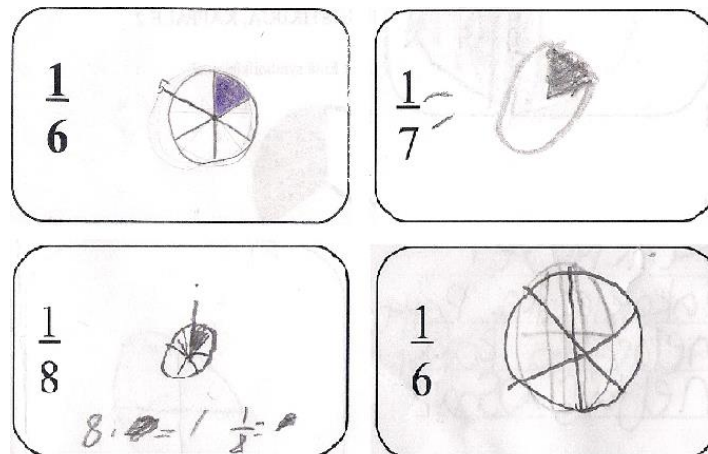
Symbolikieli:

$\frac{1}{3}$

Miksi?

Koska on valittu yksi osa neljästä ja kolmesta.

KUVA 5. Oppilaan 9 käsitys kappaleiden nimeämisestä.



KUVA 6. Neljän eri oppilaan (oppilaat 8, 20, 4 ja 22) kuviokielen ilmaus murtoluvuista.

Murtolukuja kuviokielellä ilmaistaessa oppilaiden ilmaisut ovat monipuolisia ja myös piirtämisen ja tarkkuuden taidot vaikuttavat lopputulokseen. Kuvien perusteella on vaikea sanoa, onko oppilas ymmärtänyt murtoluvun idean vai vain kopioinut Merkitysten kakut -materiaalin tarjoaman kuviokielen parhaalla katsomallaan tavalla. Kuvan tehdäkseen oppilaan on kuitenkin tarvinnut ymmärtää, miltä sivulta hän mallia katsoo. Kuvassa, jossa murtoluvun paloja ei ole eroteltu toisistaan, on hankala tehdä minkäänlaisia päätelmiä oppilaan taidoista.

Murtolukuihin siirtyminen aiheutti monelle ongelmia luonnollisen kielen ja symbolikielen yhdistämisen kanssa. Vaikka puolikas oli käytännön elämästä tuttu käsite, sen yhteys symbolikielen merkintään oli haastava ymmärtää. Oppilaat pääsivät käsitteitä käyttämällä melko lähelle totuutta ja monessa keskustelussa murtolukujen nimiä käytetään jotakuinkin oikein, kuten esimerkiksi seuraavasta keskustelusta voi havaita.

Ope1: Mitäs te pähkäilette?

Oppilas13: No että paljonko toi on. (osoittaa sivun yksi päälle asetettua kolmosen osakiekkoa)

Ope1: Nonni. No miltäs näyttää?

Oppilas12: Öö.. Mä en osaa selittää, mut mä ymmärrän.

Ope1: Hyvä. Koitas selittää.

Oppilas12: Niin, ee, silleen ykkösen kolmasosa.

Vaikka oppilas aluksi väittää, ettei tiedä, mikä asia on, hän pystyy luonnollisen kielen avulla kertomaan havainnoistaan. Symbolikielen ja luonnollisen kielen yhteys ei ole oppilaalle vielä selkeä, sillä hän ei pysty merkitsemään ilman apua tehtävään murtoluvun matemaattista merkkiä. Samaa ongelmaa ilmeni myös toisinpäin ja tehtävissä saatettiin puhua yhdestä palasta esimerkiksi pitsaa. Tällöin yhtä osaa käsiteltiin yhtenä erillisenä kokonaisuutena (kokonaislukuna) eikä yhtenä osana olemassa olevaa kokonaisuutta (murtolukuna). Symbolikielen merkintä on kuitenkin näissä tapauksissa oikein ja on hankala sanoa, millä tasolla oppilaan ymmärrys on tässä vaiheessa oikeasti ollut.

7.2 Kokonainen

Kokonaista käsittelevään aihealueeseen luokittelin kaiken materiaalin, jossa keskustellaan yhdestä kokonaisesta tai sen muodostumisesta murtoluvun käsitteen yhteydessä. Murtoluvun yhteydessä kokonaisuuden käsite eroaa siinä mielessä monesta muusta tilanteesta, että kokonaisen voi muodostaa yksi asia (esimerkiksi appelsiini) tai useammasta erillisestä osasta koostuva kokonaisuus (esimerkiksi korillinen appelsiineja). Kokonaista käsiteltäessä akateemisen lukutaidon eri osa-alueet olivat hyvin tasapainossa keskenään.

Matemaattinen osaaminen

Kokonaista käsiteltäessä mukautuvan päättelyn ja käsitteellisen ymmärryksen taidot korostuivat. Oppilaille, joille ei ollut vielä täysin selvillä, kuinka murtoluku muodostuu ja mitä sen merkintä oikeastaan tarkoittaa, kokonaisuuteen liittyvät tehtävät olivat haastavia. Yhdessä tehtävässä oppilaiden piti ymmärtää, kuinka esimerkiksi kakkosen osakiekko edustaa myös yhtä kahdesosaa. Tehtävässä tuli selvittää, muodostavatko tietyn kokoiset osat paperia yhden kokonaisen.

Aluksi osakiekkujen käyttäminen apuna tuotti monelle haasteita ja oppilaat istuivat hämmentyneinä lukien tehtävänantoa yhä uudelleen. Ongelma tuntui vaikeuttavan se, että tehtävänanto tapahtui lähinnä luonnollisen kielen kautta tarinan keinoin. Tehtäväpaperissa oppilaalla oli näkyvissä ainoastaan muistiinpanot ongelmaan liittyvistä piirteistä ja murtoluvuista. Osakiekkoja yritettiin tehtävässä käyttää aluksi vanhalla, jo aiemmin nähdyllä tavalla, asettamalla ne päällekkäin samoihin asentoihin. Tämä ei tuottanut toivottua tulosta ja oppilaiden täytyi miettiä jokin erilainen keino ongelman ratkaisemiseksi.

Yritteliäisyys näkyi vahvasti ja oppilaat olivat selkeästi motivoituneita tehtävän ratkaisuun. Moni oppilas saikin yrityksen ja erehdyksen kautta lopulta positiivisen oppikokemuksen itsestään ongelman ratkaisijana. Vaikka montaa matemaattisen osaamisen osa-aluetta kehitettiin kokonaisuutta käsittelevien tehtävien yhteydessä, strateginen kompetenssi ja proseduraalinen sujuvuus eivät näkyneet oppilaiden toiminnassa juurikaan.

Matemaattiset käytänteet

Tehtävät kehittivät oppilaiden keskustelun ja perustelun taitoja monella eri matematiikan kielellä, ja tämä näkyy myös tuloksissa. Keskusteluun ja perusteluun liittyvät taidot korostuvat matemaattisen mallintamisen, työkalujen käytön ja käsitteellisen ymmärtämisen taitojen lomassa, sillä monessa kohtaa oppilaiden piti selittää omaa ajatteluaan vierustoverilleen ja käyttää Merkitysten kakut -materiaalia avukseen. Merkitysten kakut -materiaalia käytettiin monipuolisesti, mutta siihen tarttumiseen täytyi lähes joka kerta ohjata.

Kokonaisuuteen liittyvissä tehtävissä osa oppilaista keksi sellaisia matemaattisia rakenteita, joihin tehtävä ei ohjannut. Muutama oppilas havaitsi taktiilisen toiminnan kielen kautta kahden kahdeksasosan ja yhden neljäsosan yhteyden ja siitä eteenpäin päätellessään myös neljäsosien yhteyden puolikkaaseen. Näillä oppilailla myös matemaattisten rakenteiden käytäntö pääsi kehittymään. Tätä tapausta ja matematiikan eri kielten keskustelua tarkastelen tarkemmin matemaattisen diskurssin osiossa.

Vaikka oppilaat pääsivätkin tehtävän yhteydessä kehittämään omaa pitkäjänteisyyttään, täsmällisyyden, abstraktin ja kvantitatiivisen päättelyn sekä säännönmukaisuuksien hyödyntämisen taitojen kehittyminen jäi oppilailla vähäiseksi. Kuvailin matemaattisesta osaamisesta puhuttaessa tilannetta, jossa oppilaat hämmentyivät uuden tyylisestä tehtävästä. Tässä tehtävässä elävän elämän ja matematiikan välisen yhteyden tajuaminen olisi ollut tärkeää, mutta monikaan oppilaista ei

ymmärtänyt tehtävää kuin vasta symbolikielen ja taktiilisen toiminnan kielen kautta. He eivät vastauksissaan osanneet yhdistää tarinassa annettua tehtävää ja saamaansa tulosta toisiinsa.

Matemaattinen diskurssi

Kielentämisen eri kielet olivat vahvasti esillä kokonaisuuteen liittyviä tehtäviä ratkottaessa. Tehtävissä käytettiin paljon Merkitysten kakut -materiaalia ryhmissä ja keskusteltiin parin kanssa. Tehtävän tuotoksena syntyi oivalluksia kokonaisesta matematiikan eri kieliä hyödyntäen ja jopa tehtävän tavoitteiden ulkopuolelta oppien. Erityisen paljon keskustelua syntyi niiden tehtävien parissa, joiden kanssa oppilailla oli ongelmia. Myös tehtävät, joita jouduttiin tarkastelemaan niin sanotusti paperin ulkopuolella, aiheuttivat enemmän pohdintaa ääneen luonnollisen kielen ja materiaalin tarjoaman taktiilisen toiminnan kielen avulla.

Yhden kokonaisuuteen liittyvän tehtävän tavoitteena oli selvittää, syntyykö annetuista palasista kokonainen. Eräs oppilaista ilmaisi ja perusteli ajatteluaan luonnollisella kielellä tehtävän yhteydessä näin:

*Kaksikahdeksasosa on yhtä suuri kuin yksineljäsosa. Siitä tulee puolet paperia ja yksikahdesosa on puolet paperia. Kun ne yhdistää niin saa koko paperin.
(Oppilas 8)*

Oppilaan ilmaisusta on havaittavissa, että hän on tehtävää tehdessään havainnut paloja vertaillen niiden välillä vallitsevat yhteydet. Saman asian toinen oppilas on saanut ilmaistua symbolikielen avulla:

$$\frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

KUVA 7. Oppilaan 6 symbolikielen ilmaus murtolukujen yhteenlaskusta.

Vaikka kuvasta (KUVA 7) näkee, ettei oppilaalla ole tietoa siitä, kuinka matemaattisia yhteyksiä yhteisen sopimuksen mukaan ilmaistaan, hän osaa viestittää omaa ajatteluaan selkeästi symbolikielen keinoin. Osalle oppilaista pelkkä taktiilisen toiminnan kielen ja kuviokielen perustelu oli riittävä ja vastauksen oikeutta perusteltiin sillä, että sen toimivuuden voi nähdä Merkitysten kakut -materiaalin avulla.

Kokonaisesta puhuttaessa Merkitysten kakut -materiaali on tärkeässä asemassa ja sitä tarvitsee käsitellä oppilaiden kanssa tarkemmin. Aikaisemmin oppilaille Merkitysten kakkujen sivut ovat

merkinneet kokonaislukuja ja murtolukuihin siirryttäessä samat sivut muuttuvatkin yhdeksi kokonaisuudeksi, joka on jaettu yhtä suuriin, sivunumeron osoittamaan määrään osia. Tätä ajattelua yksi oppilaista kielensi seuraavasti:

Oppilas3: Noo, että tää, öö, on niinku, tässä on nytte yks (osoittaa vihon kolmossivun kuviokieltä).. Ja tässä on, tässä.. Tää ympyrä on nyt se koko pitsa ja sitten, öö, niitä tyyppejä on kolme, niin, toi, jokainen saa sitten tän alueen minkä tää värjää (osoittaa kolmosen osakiekkoa, joka on asetettu kolmossivun päälle).

Oppilas on selkeästi ymmärtänyt vihkon sivujen merkityksen muutoksen ja pystyy käsittelemään murtolukuja myös jatkossa materiaalin avulla.

7.3 Suuruusvertailu

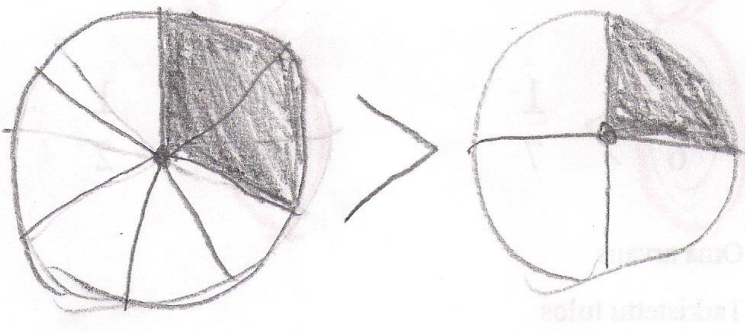
Suuruusvertailua käsiteltiin tunnilla tehtävissä, joissa murtoluku ajateltiin lukusuoralle asettuvana lukuna. Murtoluvun suhteellista suuruutta ei käsitelty oppituntien aikana. Tällaisen tehtävän lisääminen paketin lopulliseen versioon olisi tärkeää, sillä se laajentaa oppilaiden käsitystä murtoluvun käsitteestä.

Matemaattinen osaaminen

Kuten aiemmissakin aihealueissa, strateginen kompetenssi on taito, jota oppilas harjoittaa näiden tehtävien parissa vähiten. Tämä on selkeästi yksi osa-alue, joka materiaalipaketin korjatussa versiossa tulisi ottaa huomioon. Murtolukujen suuruusvertailu oli aihealue, jonka ohjaamasta toiminnasta pystyin nimeämään proseduraalisen sujuvuuden taitoja. Tämä johtui siitä, että samankaltaisten tehtävien toistoja tuli useampia.

Oppilaat harjoittivat tehtävien yhteydessä käsitteellistä sujuvuutta paljon, sillä tehtävät vaativat murtoluvun käsitteen ymmärtämistä ja usein myös omien ajatusten viestimistä parille. Muussa tapauksessa suuruusvertailun tekeminen ei olisi ollut mahdollista. Lisäksi luonnollisen kielen selittämistä vaativissa tehtävissä osoittajan ja nimittäjän olemassaolo ja tehtävä on tarpeen ymmärtää. Moni oppilaista pystyi kielentämään sen, kuinka nimittäjä vaikuttaa murtoluvun suuruuteen, mutta osoittajan tehtävää moni ei kyennyt luonnolliselle kielelle kääntämään. Osa oppilaista intoutui pohtimaan nimittäjän ja osoittajan suhdetta syvemmin ja erään oppilaan sanallisesta vastauksesta on nähtävissä syvällistä ymmärrystä murtoluvun toiminnasta. Oppilas on kielentänyt tehtävän sekä luonnollisen kielen että kuviokielen (KUVA 8) avulla:

Oppilas 16: Aina kun nimittäjä on suurempi ovat osat pienempiä kui laskussa jossa nimittäjä on pienempi. Mutta osoittajaa tarvitaan myös. Vaikka nimittäjä olisi suurempi voi kuitenkin luku olla suurempi jos osoittaja on suurempi.



KUVA 8. Oppilaan 16 kuviokielen perustelu murtolukujen suuruusjärjestykselle.

Tehtävässä, johon vastaus on annettu, pyydetään selittämään ja piirtämään, miksi suurempi luku nimittäjänä ei tarkoita suurempaa määrää. Oppilaalla on hyvä käsitys siitä, kuinka murtoluvut toimivat ja hän on tehnyt pitkälle meneviä päätelmiä osoittajan ja nimittäjän suhteesta. Oppilas vastaa tehtävässä kysymyksiin myös tehtävänannon ulkopuolelta, mikä kertoo mahdollisesti siitä, ettei tehtävästä ole itsessään tehty tarpeeksi haastavaa. Monelle tämä kyseinen tehtävä oli todella haastava ja sen vuoksi uudessa materiaalin versiossa kysymys on aseteltu uudella tavalla.

Matemaattisen osaamisen alueella suuruusvertailun yhteydessä yritteliäisyydellä oli suuri rooli. Oppilaille erityisesti salakirjoituksen ratkaiseminen oli tehtävänä mielekäs, sillä sitä ratkottiin innoissaan ja jopa heikommat oppilaat innostuivat ratkaisemisesta. Mielekkyys puolestaan vaikuttaa siihen, kuinka sinnikkäästi tehtävää ratkaistaan. Moni jaksoi yrittää ja tutkia, vaikka tehtävä aluksi vaikuttikin hankalalta ja lähes mahdottomalta. Oikeaan lopputulokseen pääseminen ja tehtävän ratkaisun löytäminen oli monelle miellyttävä kokemus, josta tultiin kertomaan opettajalle monisanaisesti.

Matemaattiset käytänteet

Abstraktin ja kvantitatiivisen päättelyn taitoja osoitetaan näissä tehtävissä eri tavoin, sillä oppilaat tekevät tehtäviä omista lähtökohdistaan. Osa käyttää Merkitysten kakut -materiaalia apuna ja osa päättelee tuloksen ilman materiaalia. Murtolukujen suuruusvertailu ilman apuvälineitä ei ollut oppilaille helppoa. Tehtävässä, jossa murtolukujen suuruusjärjestys piti ensin arvata ilman apuvälineitä ja vasta tämän jälkeen tarkistaa vastaukset Merkitysten kakut -materiaalin kanssa, moni oli arvannut lähes kaikki murtoluvut pieleen. Havaintoni tukevat ajatusta murtoluvun abstraktiudesta ja sen aiheuttamasta vaativuudesta (Murdock-stewart 2005, 4-5). Kuvailmassani tehtävässä oli

veikattu monta murtolukua virheellisesti samankokoisiksi. Näissä tilanteissa olisi mielenkiintoista tietää, millaista logiikkaa oppilas käytti, mutta materiaali ei anna tähän vastausta. Tämän vuoksi tehtäväpakettiin on lisätty luonnollisen kielen kysymys tehtävän sujumisesta ja oppilaan omista kokemuksista.

Usein suuruusvertailua sisältävän tehtävän yhteydessä Merkitysten kakut -materiaali otettiin avuksi vasta neuvottaessa tai tilanteessa, jossa oman päättelyn avulla ei päästy enää pidemmälle tai jos saatua vastausta epäiltiin. Myös erilaiset perustelun ja keskustelun keinot näkyivät oppilaiden toiminnassa tällaisissa tilanteissa, esimerkiksi seuraavassa keskustelussa:

Oppilas21: Se on aika iso. Se o isompi. Ku vaan yks. (Osoittaa osoittajaa.) Hei muuten... Nää on muuten suurempia nää misson kaks tällasta osaa! Tää on suurempi ku tää, eikö? (Osoittaa paperilta kahta seitsemäsosaa ja yhtä seitsemäsosaa.)

Oppilas22: (Nyökkää ja mutisee hiljaa jotain, mistä tutkija ei saa selvää.)

Oppilas21: Katotaas, hei katotaan täältä! (Ottaa merkitysten kakut -materiaalin) Nii kaks... Yks kuudesosa. Yks kuudesosa tai kaks seitsemäsosaa. (Kääntelevät yhdessä vihkon sivuja) Yks kuudesosa (avaavat aukeaman sivuilta 6 ja 7) ja kaks seitsemäsosaa (asettaa sormensa seiskasivun kahden osan päälle.) Kaks seitsemäsosaa on isompi. (Katselee tarkkaan molempia kuvia.) Elikkä meidän pitää muuttaa tämä, vai mitä? (Ryhtyy kumittamaan aiempaa vastausta.)

Oppilas22: Hmm, no joo sitten. (Kumittaa oman vastauksensa.)

Keskustelua materiaalin ja tehtävien ympärillä sekä työkalun käyttöä näkyy paljon suuruusvertailutehtävien yhteydessä. Sinnikäs yrittäminen on näkyvissä oman ratkaisun oikeuden epäilynä ja sitten ratkaisun tarkistamisena materiaalin avulla, kuten edellä olevasta esimerkistäkin on havaittavissa. Tällainen toimintatapa oli luokassa yleinen.

Tarkkuuteen ja täsmällisyyteen liittyen yksi tehtävistä antoi aivan erilaisen haasteen. Salakirjoitustehtävässä, jossa annetut murtoluvut ja niihin liitetyt kirjaimet tuli asettaa oikeaan järjestykseen, oli materiaalin suunnittelijan tekemä virhe. Tehtävä osoittautui kuitenkin siitä hyväksi, että virhe sattui oppilaillekin haastavalle alueelle ja moni arvasi kirjainten ja lukujen oikean järjestyksen äidinkielen kautta. Yksi ryhmä ratkaisi tehtävää kuitenkin puhtaasti matematiikan avulla ja huomasi olemassa olevan virheen. Vahingossa syntyneestä virheestä tuli opettajan apuväline, jonka avulla hän pystyi seuraamaan oppilaiden toimintaa ja kannustamaan heitä vielä tarkempaan lukujen tarkasteluun. Lisäksi virhe synnytti oppilaiden välillä matemaattista keskustelua ja jopa pientä

kisailua, joka kannusti tekemään tehtävää aiempaa tarkemmin. Osa oppilaista turhautui tehtävään kuultuaan siinä olevasta virheestä ja lakkasi yrittämästä.

Matemaattinen diskurssi

Kuten jo aiemmistakin osa-alueista on havaittavissa, matemaattista diskurssia käydään suuruusvertailutehtävien yhteydessä monipuolisesti. Kielentämisen kielet ovat tasapainossa keskenään. Luonnollisen kielen avulla viestittiin niin omia ajatuksia kuin autettiin kaveria. Taktiilinen toiminnan kieli ja kuviokieli otettiin selkeästi luonnollisen kielen avuksi omien ilmaisun keinojen vähetessä ja yritettäessä selittää ajatuksia myös luokkakaverille. Tällaista toimintaa näkyy esimerkiksi seuraavassa lainauksessa, jossa matematiikassa yleisesti paremmin pärjäävä neuvoo heikomppaa luokkatoveriaan.

Oppilas3: Yks kuudesosa. Yks kuudesosa on seuraava. Ku se on pienempi ku toi, öö, kolmaskymmenesosa. Neljäsosa on sitten aika iso. Tää tulee tänne päähän, koska kaks neljäsosaa on kaikista suurin. (Selittää parilleen tehtävää ääneen.)

Oppilas4: Mites tää kaks seittemäsosaa?

Oppilas3: (Neuvoo paria.) Niin, no kaks neljäsosaa on kuitenkin... kato mä näytän. (Ottaa merkitysten kakut -materiaalin käyttöön.) Kato kaks neljäsosaa on tämmönen puolikas (Osoittaa vihkon sivulta.) ja... kaks seittemäsosaa on niinku tän kokonen (Näyttää vihkosta.) Tajusikko?

Oppilas4: Joo.

Edellisessä antamassani lainauksessa taktiilisen toiminnan kielen, kuviokielen ja luonnollisen kielen yhteistoiminta näkyy selkeänä ja toimivana. Samoin alla olevassa esimerkissä oppilas vastaa opettajan kysymykseen taktiilisen toiminnan kielen ja luonnollisen kielen vuoropuhelun avulla.

Opettaja: Oottekos te löytäny vastausta?

Oppilas3: Joo, että toi, ku se, tota.. Toi viis. (Osoittaa vitossivua) Ni toi, ni siinä, on se, se jaetaan viiteen osaan ni siitä jää isompi pala. Ku tota jos se on tässä kassissa... (Kääntää sivuja.) Näin. (Löytää kasisivun.) Niin se on pienempi ku se jaetaan kaheksaan osaan. Ku siitä ei sitten riitä niin isoja paloja.

Suuruusvertailutehtävän yhteydessä puutteet luonnollisen kielen käytössä nousivat esiin. Monikaan oppilas ei kyennyt selittämään monisanaisesti, kuinka suuruusvertailutehtävän ratkaisi, vaan tyytyi vastaamaan yksiselitteisesti lausahduksilla ”merkitysten kakkujen avulla” tai kuvaamalla suurimman ja pienimmän murtoluvun löytämisen prosessia. Kaikille murtolukuihin liittyville matemaattisille tapahtumille oppilailla ei ollut vielä luonnollisen kielen nimeä.

7.4 Murtoluvun yhteenlasku

Murtoluvun yhteenlaskun osuus jäi tehtävissä pieneksi, eikä vähennyslaskua ehditty oppilaiden kanssa käsittelemään aikataulullisista syistä ollenkaan tutkimuksen keston aikana. Tämän vuoksi myös tulosten osuus tässä kohtaa jää suppeaksi.

Matemaattinen osaaminen

Tässä aihealueessa kehitettiin proseduraalisen sujuvuuden taitoja jo melko alkuvaiheessa, jotta oppilas saisi muodostettua käsityksen siitä, mitä murtoluvun yhteenlaskulla tarkoitetaan. Samanlaisia tehtävän toistoja tuli useampia, jolloin oppilaat oppivat uudenlaisen tehtävän mallin ja sen ratkaiseminen sujuvoitui.

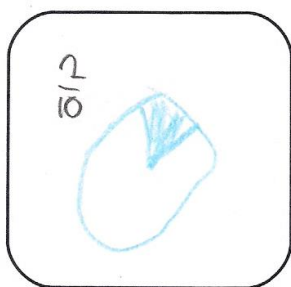
Yhteenlaskua tehtäessä oppilaiden virheelliset käsitykset ja ajatukset murtoluvuista näkyivät selkeästi, sillä pyydettyä selittämään, kuinka murtolukuja lasketaan yhteen, oppilailla oli monenlaisia virhekäsityksiä. Jopa yllättävän monessa vastauksessa oppilaat sanoivat yhteenlaskuja laskiessaan laskevansa nimittäjiä yhteen, mikä ei luonnollisestikaan ole oikein. Tämä voi johtua siitä, etteivät oppilaat muista, kumpi murtoluvun luvuista on nimittäjä ja kumpi osoittaja. Tämän selitystehtävän ohjeistus osoittautui huonoksi ja aion muuttaa sen uudessa tehtäväpaketin versiossa muotoon: Kirjoita ohjeet murtoluvun yhteenlaskulle. Tällöin tehtävä kehittää osittain myös oppilaan strategisen kompetenssin taitoja.

Tehtäväpaketin tehtävistä yhteenlaskuun liittyvät tehtävät eivät osoittautuneet parhaimmiksi, sillä ne eivät selvästikään kannustaneet oppilasta yrittämiseen. Aiemmissa tehtävissä oppilaiden into oli havaittavissa ja tehtävän kiinnostavuus kannusti myös sinnikkyyteen. Näin ei käynyt yhteenlaskutehtävien yhteydessä ja siksi tehtäväpaketti vaatii tältä osin suurta korjausta.

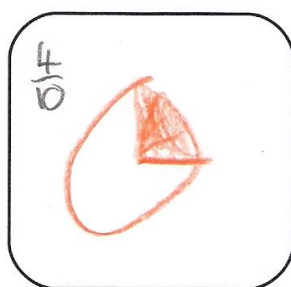
Matemaattiset käytänteet

Murtolukutehtävien yhteenlaskuosiossa tarvittiin niin abstraktin ja kvantitatiivisen päättelyn kuin säännönmukaisuuksiin liittyviä taitoja. Tehtävässä kaava murtolukujen yhteenlaskulle oli tarkoitus keksiä itse kuviokielen ja taulukon tulkinnan avulla. Tehtävissä moni oppilas oli huomannut, kuinka yhteenlasku suoritetaan murtolukujen yhteydessä, mutta lähes yhtä moni oli siirtynyt murtoluvuista takaisin kokonaislukujen maailmaan.

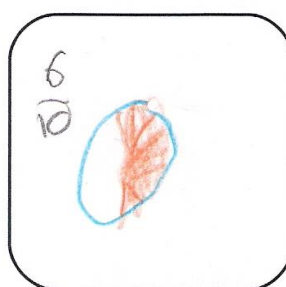
1. päivä:



2. päivä:



summa:



KUVA 9. Oppilaan 10 kuviokielen ilmaus yhteenlaskusta.

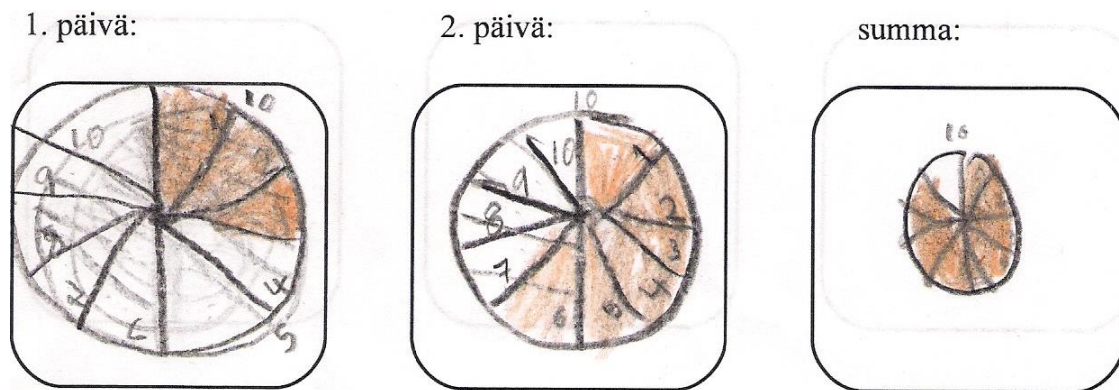
Tarkkuus ja täsmällisyys ei ollut kaikkien oppilaiden vahvuusaluetta kuviokielen ilmauksissa. Oppilaan piirtämästä kuviokielen ilmauksesta (kuva 9) ei käy ilmi, kuinka moneen osaan kokonainen on jaettu, joten pelkästään sen avulla oman ajattelun viestiminen olisi mahdotonta. Myöskään yhteenlaskua ei ole perusteltu värien avulla, vaikka tehtävänannossa annetaan tähän selkeät ohjeet. Symbolikielen merkinnät ovat tekijältä kuitenkin onnistuneet ja ovat matemaattisesti oikein, niin kuin suurimmalla osalla oppilaista muutenkin. Niinpä erilaiset perustelun taidot pääsevät kehittymään tehtävää tehdessä, sillä tietynlaiselle merkinnälle ja toiminnalle täytyy löytää perustelu matematiikan eri kielten kautta. Monet oppilaat perustelivat tehtäviä tehdessään myös suullisesti parilleen tai opettajalle, miksi ovat ratkaisseet tietyn ongelman tietyllä tavalla.

Työkalujen käyttö on tehtävässä vaihtelevaa. Osa katsoo tarkasti kuviokielen mallin Merkitysten kakut -materiaalista, osa päättelee itse, kuinka tehtävä tulisi tehdä. Ne, jotka pystyvät muodostamaan kuviokielen ilmaisun symbolikielen kautta, ovat selkeästi ymmärtäneet murtoluvun rakentumisen ja toiminnan. Toiseen suuntaan päättelyä ei voi toistaa, sillä oppilas voi katsoa mallin myös varmistuakseen tai tarkistaakseen oman ajatusprosessinsa. Matemaattisen mallinnuksen taitoja erilaiset tehtävän tekotavat eivät ennusta, sillä osalla oppilaista, jotka tarkistivat kuviokielen materiaalin avulla, kuviokielen ilmaus saattoi olla epäselvä, kun taas toisilla, ilman mallia tekevillä selkeä ja ymmärrettävä.

Matemaattinen diskurssi

Verrattuna aikaisempiin aihealueisiin, matematiikan kuviokieli korostui enemmän yhteenlaskutehtäviä tehtäessä. Kuten jo aiemmin mainitsin, kielten käyttö oli monipuolista ja etenkin kuviokielen käytössä oppilaiden taidoissa oli eroja. Muutamat oppilaat piirsivät hyvin tarkan kuvan tehtävän antamasta tilanteesta, kun taas toiset olivat suuripiirteisempiä (ks. esim. KUVA 9). Osa oppilaista käytti kuviokieltä myös heikon osaamisen tukena ja teki siihen merkintöjä

helpottaakseen omaa oppimistaan ja varmistaakseen, kuten esimerkissä, kokonaisen osien määrän (KUVA 10).



Kuva 10. Yksi kuviokielen toteutus murtolukujen yhteenlaskusta (oppilas 19).

Oppilaat keskustelivat tunnilla tehtävistä ahkerasti ja myös luonnollisen kielen ilmaukset olivat usein onnistuneita. Usein jopa tilanteissa, jossa symbolikielen ja kuviokielen ilmaus olivat virheellisiä tai epätarkkoja, luonnollisen kielen ilmauksessa oli onnistuttu. Tästä esimerkkinä toimii erään oppilaan vastaus, jossa kuviokielen ilmaus on hutiloiden tehty, symbolikielessä on käytetty kokonaislukuja murtolukujen sijaan, mutta luonnollisen kielen vastaus on rakennettu seuraavasti:

Oppilas 6: Lasken murtolukuja ihan samalla tavalla kuin normaaleja laskuja, mutta esim. yksi kahdeksasosa plus yksi kahdeksasosa merkitään ihan eri lailla. Ja sitten vielä, että esim. se yksi kahdeksasosa plus yksi kahdeksasosa niin nimittäjä pysyy samana mutta osoittaja vaihtuu.

Oppilas on huomannut murtolukujen ja kokonaislukujen välisen yhteyden, mutta myös erot tavoissa, joilla niitä matemaattisesti käsitellään. Kuviokielen ilmauksista ja symbolikielestä tätä ei olisi voinut päätellä.

7.5 Opettajan mahdollisuuksista

Merkitysten kakut -materiaali perustuu matematiikan neljän kielen malliin, joka puolestaan käsittää tässä tutkimuksessa akateemisen lukutaidon matemaattisen diskurssin osa-alueen. Nämä neljä matematiikan kieltä sisältävät erilaisia viestinnän keinoja, joilla omaa ajattelua voi viestiä muille tai kirjoittaa muistiin. Niinpä on luonnollista, että tarkastelen opettajan keinoja ymmärtää oppilasta materiaalin yhteydessä matemaattisen diskurssin, eli matematiikan neljän kielen avulla. Tähän tutkimuskysymykseen vastatessani analysoin ainoastaan hetkiä, jolloin opettaja ja oppilas ovat olleet

vuorovaikutuksessa tai tilanteita, joissa opettaja on ollut merkityksellinen tapahtuman seuraaja. Lisäksi analyysissäni huomioin oppilaiden tekemät tehtävät.

Materiaalipaketti ja Merkitysten kakut -materiaali tarjoaa opettajalle paljon mahdollisuuksia seurata oppilaiden toimintaa ja keskustella heidän kanssaan, sillä tehtävät ovat pitkälti pari- ryhmä- ja yksilötoita. Luonnollisen kielen avulla luokassa käytiin paljon keskustelua, mutta opettajalla on mahdollisuus seurata vain rajallisesti noita keskusteluja. Tutkimukseni aikana molemmat opettajat kävivät valikoiden kyselemässä oppilailta, kuinka heillä sujuu ja kuinka he kulloisenkin ilmiön ymmärtävät. Sekä asioiden ymmärtäminen että täysin kärryiltä putoaminen oli helposti havaittavissa näiden keskustelujen aikana. Lisäksi luonnollista kieltä käytettiin kirjallisissa tehtävissä oman ajattelun ilmaisuun, jota myös opettajalla oli mahdollisuus tarkastella. Usein oppilaiden ilmaisu luonnollisella kielellä jäi paperilla kuitenkin hyvin suppeaksi, eikä varsinaiseen ajatusmaailmaan ollut mahdollisuutta päästä käsiksi näiden vastauksien kautta.

Mikäli tehtävän tekoa kerkesi seuraamaan tunnilla, oli opettajan helppo pyytää oppilasta selittämään ja tarkentamaan, mitä vastauksellaan tarkoittaa tai kannustaa kuvailemaan hiukan lisää. Tällaisia tilanteita oppitunneilla oli paljon. Yksi luonnollisen kielen kannustamisen esimerkki on seuraava oppilaan ja opettajan välinen keskustelu:

Ope1: Sä luit? No, mikä tämä voisi olla, jos tämä on pizza joka on jaettu kolmeen yhtä suureen osaan, ni mikä tää silloin voisi olla? (Heiluttaa kolmosen osakiekkoa.)

Oppilas4: No se on yks poliisi.

Ope1: On, hyvä! No mitäs sit tapahtuu? Pistäs poliisi sinne ruokapöytään.

(Oppilas asettaa kolmosen osakiekon kolmossivulle)

Ope1: Paljon yks poliisi nyt saa?

Oppilas4: Yhden palasen.

Ope1: Aivan oikein! Mikä toi tota... Eli tää on se poliisien lukumäärä (osakiekon kolmonen). Mikä tää ylempi kolmonen nyt on? Onks se pitsojen lukumäärä? Vai miten se yks pizza oli jaettu?

Oppilas4: Kolmeen osaan.

Ope1: Eli mikä se ylempi kolmonen siis on.

Oppilas4: siis eiks se oo kolme osaa?

Ope1: Joo, on kolme pitsan palaa. Ja kuinka monta osaa yksi poliisi saa?

Oppilas4: Yhden.

Ope1: Aivan oikein, koska se on värjänny tuolta yhden palan. Näin ollen, kuinka monta kolmasosaa se poliisi saa?

Oppilas4: Yhden kolmasosan.

Ennen keskustelua opettaja oli käynyt oppilaan luona varmistamassa, että oppilas työskenteli. Oppilaalle oli kuitenkin hyvin epäselvää, kuinka murtoluvut muodostuvat ja millaisista asioista tehtävässä on kyse. Opettaja kannusti oppilasta lukemaan tehtävänannon vielä kertaalleen ja tarkistamaan tehtävän lähtötiedot. Keskustelun aikana epävarma oppilas saa varmistusta omalle osaamiselleen ja tukea opettajalta oman matemaattisen mallinsa rakentamiseen.

Kuviokielen ja symbolikielen käyttö opettajalle viestittäessä näkyy lähinnä tehdyistä tehtävistä. Tämä on luonnollista, sillä symbolikieli ja kuviokieli ovat paperille kirjoitettavia ja piirrettäviä viestinnän keinoja. Tietenkään tehtävät, joita oppilas ei palauta ja joita opettaja ei tarkemmin tarkastele, eivät hyödynnä opettajaa, mutta esimerkiksi omassa tutkimuksessani tehtäviä tarkasteltiin. Tällaisessa tilanteessa oppilaiden edistymistä oli helppo seurata. Symbolikielen ja kuviokielen merkinnät olivat kuitenkin usein tulkinnanvaraisia, eikä niiden perusteella ollut helppo tehdä päätelmiä oppilaan osaamisesta ilman taktiilisen toiminnan kielen tai luonnollisen kielen täsmennyksiä. Symbolikieli on myös siitä melko joustamaton, että usein symbolikielen vastaukset ovat yksiselitteisesti oikein tai väärin, eikä niiden avulla pääse käsiksi siihen, kuinka oppilas on vastaukseen päätenyt. Kuviokielessä variaatiota on usein enemmän, jolloin myös oppilaan ymmärryksen arvioiminen on helpompaa.

Taktiilisen kielen keinoja luokassa käytettiin paljon, mutta hektisessä luokkatilanteessa opettajalla oli vain harvoin aikaa jäädä seuraamaan tai keskustelemaan pidemmäksi aikaa oppilaan työskentelyä. Muutamia esimerkkejä taktiilisen kielen käytöstä viestinnässä kuitenkin on. Eräässä kohdassa opetuskokeiluani monella oppilaalla oli läksyt tekemättä ja asiaa käsiteltiin matematiikan taktiilisen toiminnan kielen keinoin. Ennen tätä opetustilannetta oli todettu, että oppilaista viisi oli tehnyt läksyt.

Ope1: Montas oppilasta yhteensä? 12? Ottakaas sellanen sivu esiin. (Oppilaat ottavat oikean sivun esiin Merkitysten kakut -materiaalista.) No niin, onko yli vai alle puolet tehny kotiläksyt?

Oppilas17: Alle.

Ope1: Laita sormesi siihen kohtaan, missä on tehtävän tehneiden osuus. Eli mikä on se osuus, joka on tehny tehtävän. (Oppilaat osoittavat kirjasta oikeaa kohtaa.)

Vaikka tilanne olikin sinänsä ikävä, se oli selkeästi sidottu oppilaiden omaan kokemusmaailmaan ja siihen liittyviin merkityksiin. Eletyn elämän tapahtuma käännettiin matematiikan kielelle ja opettaja pystyi seuraamaan oppilaiden ajattelua. Monelle viiden kahdestoistaosan löytäminen sormien avulla oli aluksi hankalaa ja opettaja joutui auttamaan jonkin verran. Osa oppilaista yritti ratkaista tehtävää myös osakiekkojen avulla jakaen, jolloin opettajan oli selkeä huomata, ettei oppilaalla ollut vielä käsitystä siitä, mistä tilanteesta ja murtoluvuissa on kysymys. Tällöin opettaja pääsi perille siitä, kuinka moni oppilaista tarvitsee vielä apua ja neuvoja murtoluvun käytössä. Luokassa tällaisia tilanteita oli useita.

Parhaiten oppilaan ajatteluun päästiin käsiksi tilanteissa, joissa sama asia täytyi sanoa usealla eri kielellä. Tällöin oppilas ei voinut kirjata näkyviin ainoastaan ulkoa oppimaansa mallia, vaan hänen täytyi myös selvittää, mitä malli tarkoittaa. Useista tehtävistä huomasi nopeasti, jos oppilas ei ollut ymmärtänyt millaisesta ilmiöstä on kyse. Tehtäviä korjattaessa tämä on otettu huomioon ja vastaus vaaditaan usein monen kielen avulla.

8 POHDINTA

Pohdintaosiossa käsittelen aluksi tutkimuksen toteutukseen liittyviä kysymyksiä ja mahdollisia ongelmakohtia. Pyrin mahdollisimman tarkasti erittelemään niitä piirteitä, jotka saattavat vaikuttaa tutkimuksen tuloksiin. Tämän jälkeen pohdin tutkimuksen luotettavuutta ja sen mahdollisia jatkokohteita.

8.1 Pohdintaa tutkimuksen toteutuksesta

Analyysini perusteella Merkitysten kakut -materiaali ja siihen liittyvät tehtävät kannustavat oppilasta käyttämään ja harjoittamaan matemaattisia taitojaan monipuolisesti. Akateemisen lukutaidon eri osa-alueet ovat selkeästi esillä, vaikka tuloksissa matemaattinen diskurssi painottuu erityisesti. On kuitenkin muutamia tekemiäni rajoituksia ja piirteitä, jotka vaikuttavat siihen, millaisia tuloksia tutkimukseni on tuottanut.

Matemaattiseen osaamiseen kuuluvat proseduraalinen sujuvuus ja strateginen kompetenssi olivat tutkimuksen analyysin kannalta haastavia käsitteitä. Koska rajasin strategisen kompetenssin siten, että taitoa kehittävä tehtävä tulisi aidosti muodostaa ja ratkaista itse, ei sellaista tehtävää omassa paketissani ollut. Tehtävät oli sidottu vahvasti oikeisiin, kokemusmaailman tapahtumiin, mutta niiden puitteet olivat poikkeuksetta tutkijan valmiiksi rakentamat. Proseduraalinen sujuvuus puolestaan pääsi monessa tehtävässä kehittymään jossain määrin, mutta en nimennyt sitä kehittyväksi taidoksi kokeiluun ja yrittämiseen perustuvissa tehtävissä. Proseduraalisen sujuvuuden katson kehittyneen jakson aikana kotiläksyjen muodossa, sillä niitä tehdessään oppilas pääsi toistamaan erilaisia matemaattisia prosesseja useammin.

Matemaattiseen diskurssiin liittyviä, analyysiin vaikuttavia tekijöitä on monia. Tekemiäni tehtävät vaativat monessa kohtaa keskustelemaan ja tekemään yhteistyötä parin kanssa. Sen vuoksi luonnollisen kielen asema analyysissäni korostuu. Monet tehtävistä olisi voinut tehdä myös hiljaa yksin, jolloin luonnollisen kielen käyttäminen olisi jäänyt tehtävissä vaadittavien sanallisten vastausten varaan ja tämän vuoksi vähemmälle. Taktiilisen toiminnan kielen ja kuviokielen erottelu

Merkitysten kakut -materiaalin yhteydessä on haastavaa, sillä toiminnallinen materiaali antaa myös kuviokielen vastauksen käsiteltävään asiaan liittyen. Samalla lailla useassa tilanteessa saadaan myös symbolikielen merkintä taktiilisen toiminnan kielen kautta. Tämän vuoksi eri kielet näkyvät tasaisesti myös tuloksissa eikä niiden erottelu aina ole yksinkertaista.

Luokassa, jossa kävin testaamassa tehtäviäni, Merkitysten kakut -materiaali oli ennestään tuttu. Mikäli näin ei olisi ollut, itse toimintamateriaaliin tutustumiseen olisi pitänyt kuluttaa huomattavasti enemmän aikaa. Lisäksi tulee huomata, että materiaaliin liittyvä sanasto ja muu vastaava on tällaisessa tilanteessa oppilaille ennestään tuttua, jolloin myös osassa vastauksia käytetään sellaisia termejä, joita muissa koululuokissa ei välttämättä olisi käytetty. Oppilaille matemaattiseen diskurssiin liittyvät termit luonnollinen kieli, symbolikieli ja kuviokieli olivat ennestään tuttuja, mikä helpotti opetuskokonaisuuden aloittamista huomattavasti. Jos tutkimus olisi toteutettu jossain toisessa luokassa, käsitteisiin olisi alussa pitänyt kuluttaa huomattavasti enemmän aikaa.

Oli positiivista huomata, että Merkitysten kakut -materiaali kannusti oppilaita useasti huomaamaan asioita, joihin tehtävät eivät ohjanneet. Esimerkiksi kahden yhden kahdeksasosan ($2 \times 1/8$) ja yhden neljäsosan ($1/4$) yhteys huomattiin ikään kuin vahingossa muun tekemisen lomassa. Myös oppilaat, jotka eivät normaalisti kiinnostuneet matematiikasta tai eivät olleet motivoituneita, innostuivat joistakin tehtävistä. Tekemässäni opetuskokonaisuudessa olisikin hyvä kiinnittää huomiota tällaisiin tehtäviin ja keskittyä siihen, miksi juuri tietyt tehtävät koetaan mielenkiintoisina ja innostavina.

Uusissa opetussuunnitelman perusteissa laaja-alaisten osaamisen tavoitteissa nostetaan yhtenä kohtana esiin monilukutaito, joka on uusi käsite suomalaisessa koulu- ja tutkimusmaailmassa (POPS 2014). Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteissa monilukutaitoa kuvataan seuraavasti:

”Monilukutaidolla tarkoitetaan erilaisten tekstien tulkitsemisen, tuottamisen ja arvottamistaitoja, jotka auttavat oppilaita ymmärtämään monimuotoisia kulttuurisia viestinnän muotoja sekä rakentamaan omaa identiteettiään.” (POPS 2014, 22.)

Aiemmin koulumaailmassa puhuttiin luku- ja kirjoitustaidosta, mutta nykypäivänä käsite tuntuu liian suppealta. Lukija kohtaa erilaisten tekstien lisäksi kuvia, mainoksia, uudenlaisia sosiaalisia medioita, ääniä ja videota. Luku- ja kirjoitustaidon rinnalle tuotiin käsitteet laaja tekstikäsitelmä ja tekstitaidot, mutta nekään eivät kuvanneet tarpeeksi laajasti nykyistä tarvetta. Tähän tarpeeseen kehitettiin kokonaan uusi käsite, monilukutaito (*multiliteracy*). Kupiainen, Kulju ja Mäkinen kuitenkin

huomaattavat, että suomenkielisessä termissä näkyvä lukutaito-sana on harhaanjohtava, sillä kyse on laajemmalle ulottuvasta termistä. (Kupiainen, Kulju & Mäkinen 2015.)

Monilukutaito yhdistyy luonnollisesti matematiikan kielentämiseen, sillä yhtä lailla matematiikalla on oma kieli, jota tulkitaan, tuotetaan ja hyödynnetään olemassa olevien taitojen pohjalta. Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteissa monilukutaitoa pidetään ympäröivän maailman tulkitsemisen ja siinä toimimisen kannalta tärkeänä taitona, joka auttaa oppilasta selviämään tulevaisuuden ja työelämän haasteista (POPS, 2014, 22). Myös matematiikkaa ja siihen liittyviä tekstejä voidaan tuottaa yhteisöllisesti kirjoittaen tai matematiikan eri kieliä apua käyttäen, jolloin oppilas kehittää sekä matemaattista ajatteluaan, vuorovaikutustaitojaan että kielentää omia ajatuksiaan. Opetussuunnitelman perusteissa monilukutaito yhdistetään matematiikkaan juuri matematiikan ainekohtaisen kielen ja sille ominaiseen ilmaisutapaan liittyen (POPS, 2014). Koulumaailmassa matematiikasta puhuminen usein unohdetaan ja keskitytään liiaksi numeroiden ja kirjainten avulla operointiin. Olisi kuitenkin tärkeää huomioida myös matematiikan asema yhtenä kommunikoinnin kielenä. Tämän huomasi tutkimuksen aikana esimerkiksi luonnolliseen kieleen liittyvien ongelmien kautta.

Luokassa oli kaksi oppilasta, joiden äidinkieli ei ollut suomi ja etenkin toisen kielitaito oli heikko. Matematiikan tunneilla tämä heikkous nousi esiin, sillä nimityksiä ja luonnollisen kielen tehtäviä oli paljon. Etenkin toiselle oppilaalle seuraaminen ja tehtävien tekeminen oli tehtävän ymmärtämisen vuoksi ylivoimaista, vaikka intoa oppimiseen ja tekemiseen olisikin ollut huomattavasti enemmän. Olisikin tärkeää tulevaisuudessa miettiä, kuinka tällaisissa tehtävissä kielellisesti heikompaa oppilasta voisi auttaa ja ohjata. Omassa jaksossani hyvänä puolena oli se, että luokkaan saatiin poikkeuksellisesti kaksi opettajaa (luokanopettaja ja tutkija), jolloin heikompaa oppilasta saatiin tuettua paremmin. On kuitenkin hankala sanoa, kuinka hyvin oppilas ymmärsi tunneilla opetetun asian, sillä hänen luonnollisen kielen ilmaisunsa monessa tehtävässä on heikkoa. Symbolikielellä ja kuviokielellä oppilas osasi usein ilmaista ajatteluaan, mikäli hänelle selitettiin tehtävän tarkoitus esimerkiksi englannin kielen avulla.

Tutkimuksen jälkeen luokassa tehtiin murtolukujen osaamista mittaava, käytössä olleen oppikirjan tehtävistä koostuva matematiikan koe. Koe sisälsi mm. murtolukujen tunnistamista, samannimisten murtolukujen yhteenlaskua, suuruusvertailua ja sanallisia tehtäviä murtolukuihin liittyen. Kokeessa ei saanut käyttää Merkitysten kakut -materiaalia avukseen muuten, kuin kokeen viimeisessä jokeritehtävässä, jossa muutamia murtolukuihin liittyviä ilmiöitä tuli perustella opettajalle suullisesti

materiaalin avulla. Kokeiden tuloksen keskiarvo oli 9,7. Keskiarvoa tosin nostaa jokeritehtävä, jonka osaaminen saattoi korottaa pisteet yli kokeen maksimin. Huonoin tulos, arvosana 8 (kokeen pisteistä 64%) oli oppilaalla, jolle sanalliset tehtävät aiheuttivat ongelmia. Paras tulos oli 10 (kokeen pisteistä 110%). Arvosanan 10 lähelle ylsi moni oppilaista. Vaikka kokeesta ei sellaisenaan voi vetää johtopäätöksiä, se antaa viitteitä siitä, että Merkitysten kakut -materiaalin avulla hankitut taidot on siirrettävissä myös käytäntöön ”tavallisten” tehtävien yhteyteen.

Oma tutkimukseni koostuu Merkitysten kakut -materiaalista ja siihen liittyvistä murtolukutehtävistä, mutta materiaalin mahdollisuudet ulottuvat laajemmalle. Mielestäni materiaalin tarjoamat keskustelun, päättelyn ja kokeilun mahdollisuudet tarjoavat hyvän lisän tai jopa pohjan matematiikan opiskeluun alakoulussa. Materiaaliin tutustuminen vie opettajalta oman aikansa, mutta sen monimuotoisuuden avautuessa, se tarjoaa monia uudenlaisia mahdollisuuksia matematiikan opetukseen. Vaikka toimintamateriaalien kehitys on mennyt eteenpäin, on tutkimuksessani huomattavissa samoja piirteitä kuin lähes kolmekymmentä vuotta sitten tehdyssä Lindgrenin (1990) toimintamateriaaleihin liittyvässä tutkimuksessa. Tutkimuksen aikana oli havaittavissa samanlaista keksimisen ja onnistumisen kokemuksen tunteita, kuin joita Lindgren löysi toimintamateriaalien yhteydessä. (Lindgren 1990.) Mielestäni onkin erikoista, että vaikka toimintamateriaalien hyödyt on havaittu jo aikaa sitten, on niiden käyttö kouluissamme edelleen vähäistä.

8.2 Tutkimuksen luotettavuus ja eettisyys

Kehittämistutkimuksen luotettavuuden arviointi on haastavaa. Objektiivisuus, reliabiliteetti ja validiteetti ovat ne mittarit, joilla tutkimuksen luotettavuus yleensä todennetaan. Kehittämistutkimuksessa keinot, joilla näitä piirteitä osoitetaan, ovat kuitenkin erilaiset. Usein kehittämistutkimusta kritisoidaan luotettavuuden arvioinnin ja todentamisen vuoksi ja moni tutkija huomaa itsekin epäilevänsä tutkimuksensa luotettavuutta. (The Design-Based Research Collective 2003, 7.) Käsittelen seuraavaksi oman tutkimukseni luotettavuutta näiden kolmen piirteen, objektiivisuuden, validiteetin ja reliabiliteetin kautta.

Reliabiliteetilla tarkoitetaan tutkimuksen toistettavuutta ja samojen tulosten toistuvaa saamista (Tuomi & Sarajarvi 2009, 136–137). Kehittämistutkimuksen ongelma on siinä, että usein tutkimuksen asetelma on monimutkainen ja jo lyhytkin tutkimus voi sisältää satoja tilanteita, joissa tutkija joutuu tekemään päätöksiä ja muutoksia tutkimuksen aikana. Tällä tavoin tutkimus ei ole toistettavissa sellaisenaan vaan se toistuu aina uudenlaisessa ympäristössä ja tilanteessa, mikä

aiheuttaa jo itsessään ongelmia tutkimuksen reliabiliteetin kattavalle perustelulle. Tutkimuksen reliabiliteetti on kuitenkin perusteltavissa monimuotoisten metodien, toistuvuuden, erilaisten aineistojen analyysin ja luotettavien mittareiden käytön avulla. (The Design-Based Research Collective 2003, 7.)

Omassa tutkimuksessani olen kerännyt aineistoa sekä videoinnin että kirjallisen materiaalin muodossa. Videolta löytyvät havainnot ja kirjallinen materiaali tukevat hyvin toisiaan. Lisäksi, jos tehtävän tai sen vastauksen tulkinnassa oli ongelmia, oppilaan toiminnan tarkastelu videolta antoi lisäinformaatiota tilanteesta. Esimerkiksi vastauksen kopioiminen tai tarkistaminen luokkakaverin paperista näkyi videolla selkeästi. Myös opettajan toiminta ja vaikutus oppilaan antamaan vastaukseen on nähtävissä videolta. Mikäli opettaja on vaikuttanut oppilaan antamaan vastaukseen merkittävästi, olen pyrkinyt ilmaisemaan sen selkeästi tutkielmani raportissa. Kehityksen kierteitä tutkimuksessa ei valitettavasti käytettävissä olevan ajan ja resurssien takia ole kuin yksi, mikä heikentää tutkimukseni luotettavuutta.

Validiteetilla tarkoitetaan tutkimuskysymyksen ja tutkimuksen tulosten vastaavuutta (Tuomi & Sarajarvi 2009, 136–137). Kehittämistutkimuksessa validiteetti syntyy tutkimusyhteisöstä, sillä kehittämistutkimusta tehdään usein yhteistyössä eri tahojen kanssa. Sitoutuminen työhön ja pitkäjänteinen työskentely vaikuttavat ilmiön tuntemiseen ja siten sen arviointiin. (The Design-Based Research Collective 2003, 7.) Opettajia ja tutkijoita tulisi olla työryhmässä enemmän kuin yksi. Tällöin ajatuksia pystyttäisiin vaihtamaan koko tutkimuksen ajan, eikä oppilaiden toiminnan tulkinta olisi ainoastaan yhden tutkijan vastuulla. (Anderson & Shattuck 2012, 17.)

Omassa tutkimuksessani toimin yhteistyössä materiaalin kehittäjän kanssa, jolloin tietoa materiaalista syntyi myös muuten, kuin oman oppimiseni ja päättelyni tuloksena. Tällöin materiaalia pystyttiin käyttämään mahdollisimman hyvin ja tehokkaasti mielekkäiden tehtävien kautta. Materiaalin kehittäjä oli myös opetustilanteessa läsnä ja pystyi auttamaan sekä oppilaita että antamaan palautetta ja vihjeitä materiaalin käytöstä ja toiminnasta tutkijalle välittömästi kokonaisuuden jälkeen tai joissain tilanteissa jopa sen aikana. Tutkimuksen validiteettia lisää sen vahva kytkös käytäntöön (Anderson & Shattuck 2012, 16-17). Oman tutkimukseni tuotos on ideoideni ja käytännön kokeilun yhdessä tuottama lopputulos, jonka ongelmat on korjattu välittömästi analyysin tulosten ja käytännössä syntyneiden ongelmakohtien ja niiden ratkaisujen avulla.

Kehittämistutkimuksessa haastavaa on olla objektiivinen, sillä tutkijan toimiessa tutkittavien keskellä, hän tekee kaiken aikaa nopeita päätöksiä myös harkitsemattomasti. Kaikki päätökset vaikuttavat omalla tavallaan tutkimuksen tuloksiin ja etenemiseen. Siksi tutkimuksen raportoiminen mahdollisimman avoimesti ja tarkasti on tärkeää. (Anderson & Shattuck 2012, 18.) Omassa tutkimuksessani niin haastetta kuin hyötyä toi toisen tutkijan läsnäolo. Kahden tutkijan toiminta yhdessä voi olla aluksi haastavaakin, etenkin silloin, jos heidän ajatusmaailmansa eivät kohtaa toivotulla tasolla. Tutkimuksessani yhteistyö sujui hyvin, eikä tutkimusta haittaavia ristiriitoja päässyt syntymään. Materiaaliin liittyvistä ajatuksista, sen tehtävistä ja vaatimista parannuksista keskusteltiin monipuolisesti tutkimuksen aikana. On kuitenkin tärkeää huomata, että tässä raportissa tehty lopullinen analyysi on tutkijan itsensä tekemä. Lisäksi olen pyrkinyt raportoimaan tutkimuksen aikaisista tapahtumista mahdollisimman tarkasti ja selkeästi antamatta oman mielipiteeni vaikuttaa tuloksiin.

Cooperin (2016) mukaan tutkimuksen jokaisessa vaiheessa tutkija kohtaa eettisiä valintoja aina aiheen valinnasta tutkimuksen valmiin version arviointiin. Jo tutkimuksen suunnittelu pitäisi aloittaa siten, että itse tutkimus on mahdollista viedä loppuun. Suunniteltaessa pitäisi varmistaa, että tutkijalla itsellään on tarvittava tieto ja taito sekä tuki tutkimuksen tekemiseen. (Cooper 2016, 13.) Omassa tutkimuksessani koin oman osaamiseni matematiikan alueelta tukevan tutkimuksen tekemistä, vaikka uuden luominen osana tutkimusta tuntuikin uudelta haasteelta. Olen myös pyrkinyt valitsemaan tutkimuksessa käytettävät metodit ja analyysimenetelmät parhaan tietoni mukaan.

Tutkimuksen edetessä erityisesti kehittämistutkimuksessa kohdataan monia eettisiä haasteita. Tutkimuksen tekijä joutuu tutkimuksen aikana tekemään monia päätöksiä tilanteeseen sidottuna, eikä aikaa päätösten tarkemmalle pohjimiselle ole. Tämä poikkeaa muista tutkimuksen tekemisen tavoista siinä mielessä, että usein tutkija ei ole yhtä tiukasti sidoksissa tutkimustapahtumaan. (The Design-Based Research Collective 2003, 7.) Tutkimusta tehdessäni olen pyrkinyt huomioimaan eri tilanteet ja toiminut niissä tutkimuksen kannalta eettisimmällä mahdollisella tavalla. Olen myös pyrkinyt tiedostamaan oman asemani ihmisenä ja vastuullisena aikuisena muiden ihmisten ja lasten seurassa. Koulun kontekstissa myös opettajan asemaan ja käytökseen liittyy tiettyjä odotuksia, jotka omalla tavalla ovat vaikuttaneet omaan toimintaani. Ihmisen toimiessa ihmisen kanssa on hyvä tiedostaa, että samoin, kuin oppilaisiin myös opettajan tai tutkijan toimintaan vaikuttavat kaikki yksityisen elämän tekijät ja esimerkiksi vuorokaudenaika tai vireystila.

Tutkimukseni edetessä olen pitänyt huolen tarpeellisten lupien hakemisesta ajoissa. Pirkanmaalla tutkimusta tehdessäni tarvitsin tutkimusluvan sekä kaupungilta että alaikäisten oppilaiden vanhemmilta. Kaikki luvat olivat kunnossa tutkimuksen tekohetkellä, mutta olin jo etukäteen tehnyt suunnitelman siitä, kuinka mahdolliset tutkimuksesta kieltäytyjät otetaan opetuksessa huomioon ilman, että heidän opetuksensa taso kärsii. Tutkimuksessani keräsin sekä videomateriaalia että kirjallista materiaalia, josta oppilaan nimi on nähtävissä. Raporttia kirjoittaessani olen kuitenkin huomionnut oppilaiden anonymiteetin ja pyrkinyt pitämään tunnistettavat tiedot raportin ulkopuolella, vaikka analyysia tehdessä tunnistetietojen säilyttäminen materiaaleissa oli tarpeen. Video- ja kirjalliset materiaalit on säilytetty ainoastaan yhdessä paikassa eikä niistä otettuja, tunnistettavia kopioita tutkimuksessa esitettyjen ulkopuolelta ole päästetty leviämään tutkimuksen ulkopuolisten henkilöiden käsiin.

Tieteellisen tutkimuksen raporttia kirjoitettaessa on tärkeää huolehtia siitä, että kirjoittaa näkyviin kaiken sellaisen tiedon, joka vaikuttaa lukijan ymmärrykseen tutkimuksesta ja sen kulusta (Cooper 2016, 111). Lisäksi avoimuuden vaatimus lisääntyy kehittämistutkimuksesta puhuttaessa, sillä tutkijan oman toiminnan merkityksen raportointi on tärkeää (Elo & Kyngäs 2008, 109-112). Olen pyrkinyt vastaamaan näihin vaatimuksiin parhaalla mahdollisella tavalla, vaikkakaan oman toimintani reflektointi ei aina ole ollut yksinkertaista.

Tutkimuksen tulokset eivät ole yleistettävissä pienen tutkittavan joukon ja yksityiskohtaisen aiheen valinnan vuoksi, mutta mielestäni kehittämistutkimuksen varsinaiset hyödyt näkyvätkin sen käytännöllisyydestä. Tekemäni opetuskokonaisuus on tulevaisuudessa kaikkien hyödynnettävissä ja vapaasti käytettävissä. Olen myös pyrkinyt kirjoittamaan kokonaisuuteen liittyvät opettajan ohjeet siten, että jokainen kokonaisuutta hyödyntävä opettaja pystyisi ymmärtämään sen sisällön. Matemaattiset rakenteet on pyritty tuomaan materiaalin ja tehtävien yhteydessä esiin siten, että opettajan on helppo opetella ja hallita kokonaisuutta omien lähtökohtiensa kautta.

8.3 Jatkotutkimuskohteet

Nälkä kasvaa syödessä, sanoo vanha sananlasku ja niin kävi tämänkin tutkimuksen yhteydessä. Vaikka tein mielestäni paljon tutustumistyötä Merkitysten kakut -materiaaliin liittyen, sen käytön monipuolisuus aukeni minulle vasta käytännön kokeilun yhteydessä. Oman tutkimukseni rajautuminen murtolukuun tapahtui ajankohdan perusteella, sillä jonkin opetussuunnitelmasta täysin poikkeavan suunnitelman toteuttaminen olisi alakoulun puolella tuntunut sekä opettajan työtä että

oppilaita haittaavalta ratkaisulta. Merkitysten kakut -materiaalia voisi tarkastella myös muiden matematiikan osa-alueiden näkökulmasta ja olisikin mielenkiintoista nähdä, kuinka materiaali taipuu esimerkiksi prosenttilaskujen laskemisen tueksi.

Tutkimukseeni osallistuneelle luokalle Merkitysten kakut -materiaali oli jo ennestään tuttu. Tämä vaikuttaa taatusti tutkimuksen tuloksiin ainakin siinä määrin, että aikaa materiaaliin tutustumiseen oppilaiden kanssa ei juurikaan kulunut. Olisi mielenkiintoista toistaa tutkimus luokassa, joka ei ole tottunut toimimaan toiminnallisen materiaalin parissa, sillä esimerkiksi matematiikan kielten käyttö saattaisi antaa erilaisia tuloksia. Luokan oppilaat olivat melko tottuneita ilmaisemaan ajatteluaan eri kielten avulla ja materiaalin pyörittely sujui heiltä luonnostaan. Yhden luokan tutkimisen lisäksi myös vertailevan tutkimuksen tekeminen Merkitysten kakut -materiaalin kanssa olisi mielenkiintoista. Materiaalia voisi tutkia sekä käytön että oppimistulosten näkökulmasta.

Tutkimukseni aikana lapset näyttivät innostuvan materiaalista ja siihen liittyvistä tehtävistä. Motivaation tutkiminen Merkitysten kakut -materiaalin yhteydessä voisikin olla yksi tulevan tutkimuksen kohde. Tutkimuksen aikana huomasin, että oppilaat motivoituivat eri tavalla eri tehtävistä. Välillä jopa ne oppilaat, jotka yleensä kokivat matematiikan epämieluisana tai vaikeana ratkaisivat hankaliakin tehtäviä sinnikkäästi. Motivaation tarkasteluun ei tässä tutkimuksessa jäänyt aikaa tai mahdollisuutta, mutta myös sen tutkiminen olisi merkityksellistä ja tärkeää. Olisi mielenkiintoista tietää, toimiiko oppilasta motivoivana tekijänä tarina ja sen eteneminen, materiaali itsessään vai tehtävän malli.

Asiaa omassa tutkimuksessani oli paljon. Tilaa ja aikaa tiedon syventämiselle ei juurikaan jäänyt ja siksi tutkimukseni tuntuukin pintaraapaisulta. Esimerkiksi matemaattiseen diskurssiin syventyminen tämän materiaalin yhteydessä antaisi tarpeeksi pohdittavaa yhden tutkimuksen verran. On kuitenkin positiivista, että kehittämistutkimuksen periaate onkin, ettei varsinaisesti valmista tuotetta ole olemassa. Tällöin oman tuotteeni kehittäminen sille tasolle, jolle se oli mahdollista saattaa yhden kehityksen syklin aikana, oli hyvä tavoite ainoastaan tässä tilanteessa. Tuotetta analyysin pohjalta parannellessani kuitenkin huomasin, että joitakin kohtia olisi mielenkiintoista kokeilla uudestaan nyt kun materiaali sitä varten olisi jo valmiina. Tuotteen ja tehtävien kehittämistä voisi jatkaa loputtomiin ja mielestäni uudenlaisten, erilaisten tehtävätyyppien kokeilu alakoulussa on suotavaa. Uudenlainen tehtävätyyppi haastaa uudenlaiseen ajatteluun ja toisenlaisten ratkaisujen kehittämiseen.

Oppilaiden lisäksi tutkimuskohteena tulevissa tutkimuksissa voisivat toimia opettajat. Merkitysten kakut -materiaali ei ole materiaali, jonka voi ottaa käyttöön lennosta, vaan sen toimintaan ja käyttöön täytyy tutustua etukäteen. Koska materiaali on uusi, opettajat eivät tunne sitä ennestään. Tämä piirre tarjoaisi oivan lähtökohdan monelle matematiikan ja matematiikkaa opettaviin opettajiin liittyvälle tutkimukselle. Materiaalin yhteydessä voisi tutkia niin opettajan käsityksiä materiaalista, käyttökokemuksia kuin käyttömallejakin. Materiaalin käyttökokemusten tutkiminen olisi sen kehittämiseksi suotavaa.

LÄHTEET

Anderson, T. & Shattuck, J. 2012. Design-Based Research: A Decade of Progress in Education Research? Teoksessa: Educational Researcher, 41(1), s 16–25.

Aronson, J. 1994. A Pragmatic View of Thematic Analysis. The Qualitative Report, 2:1, 1994.

Brizuela, B. M. 2005. Young Children's Notations for Fractions. Teoksessa: Educational Studies in Mathematics, 2005, 62, s 281–305.

Charles, K. & Nason, R. 2000. Young Children's Partitioning Strategies. Teoksessa: Educational Studies in Mathematics, 43(2), s 191–221.

Cooper, H. 2016. Ethical Choices in Research: Managing Data, Writing Reports, and Publishing Results in the Social Sciences. Washington, DC: American Psychological Association.

Common Core State Standards Initiative. 2018. <http://www.corestandards.org/Math/>. (Viitattu 13.1.2018.)

The Design-Based Research Collective. 2003. Design-Based Research: An Emerging Paradigm for Educational Inquiry. Teoksessa: Educational Researcher, 32(1), s 5–8.

Domino, J. 2010. The Effects of Physical Manipulatives on Achievement in Mathematics in Grades K-6: A Meta-Analysis. <https://search-proquest-com.helios.uta.fi/docview/758939356/previewPDF/8B82DD7779064B56PQ/1?accountid=14242> Viitattu 12.4.2018.

Edelson, D. 2002. Design Research: What We Learn When We Engage in Design. The Journal of the Learning Sciences, 11(1), s 105–121.

Elo, S. & Kyngäs, H. 2008. The qualitative content analysis process. Teoksessa: Journal of Advanced Nursing, 62(1), s. 107–115.

Eskola, J. ja Suoranta, J. 1998. Johdatus laadulliseen tutkimukseen. Tampere: Vastapaino.

Golafshani, N. 2013. Teachers' Beliefs and Teaching Mathematics with Manipulatives. Teoksessa: Canadian Journal of Education 36(3), s. 137-159.

Graneheim, U. H., Lindgren, B-M. & Lundman, B. 2017. Methodological challenges in qualitative content analysis: A discussion paper. Teoksessa: Nurse Education Today, 56, s. 29–34.

- Hallet, D., Nunes, T. & Bryant, P. 2010. Individual Differences in Conceptual and Procedural Knowledge When Learning Fractions. Teoksessa: *Journal of Educational Psychology*, 102(2), s. 395-406.
- Ikäheimo, H., Järvinen, R., Kairavuo, K., Lampinen, A. & Voutilainen, E. 2003. Matikkamaa – Mattelandet. Teoksessa: *Dimensio* 1/2003, s. 48-52.
- Juuti, K. & Lavonen, J. 2013. Design-tutkimukseen osallistuvien opettajien rooli tutkimuksen eri vaiheissa. Teoksessa: J. Perna (toim.) *Kehittämistutkimus opetuslalla*. Juva: PS-kustannus.
- Jorgensen, R. 2012. *Everything You Need to Know About Fractions and Rational Expressions*. Newmarket, Ontario: BrainMass Inc.
- Joutsenlahti, J. 2003. Matemaattinen ajattelu ja kieli – mielenkiintoinen ulottuvuus uudessa opetussuunnitelmassa. Teoksessa Joutsenlahti, J., & kumpp. *Projekteja ja prosesseja. Opetuksen käytäntöjä matematiikassa ja viestinnässä*. Hämeenlinnan normaalikoulun julkaisuja, nro 8. 2003. s.4-12. Tampere: Tampereen yliopisto.
- Joutsenlahti, J. & Kulju, P. 2010. Kieliteoreettinen lähestymistapa koulumatematiikan sanallisiin tehtäviin ja niiden kielennettyihin ratkaisuihin. Teoksessa Ropo, E., Silfverberg, H., & Soini, T., (toim.) *Toisensa kohtaavat ainedidaktikat*. Ainedidaktiikan symposiumi Tampereella 13.2.2009. Tampereen yliopiston opettajankoulutuslaitoksen julkaisuja. A 31. s. 77-89. Tampere: Tampereen yliopisto.
- Joutsenlahti, J. & Kulju, P. 2016. Luentotiivistelmä. Matematiikan opetussuunnitelman perusteet akateemisen lukutaidon näkökulmasta. 5.2.2016. Turku.
- Joutsenlahti, J. & Rättyä, K. 2014. Kielentämisen käsite ainedidaktisissa tutkimuksissa. Teoksessa Kauppinen, M., Rautiainen, M., & Tarnanen, M. 2015. *Rajaton tulevaisuus : Kohti kokonaisvaltaista oppimista : Ainedidaktiikan symposium Jyväskylässä 13.-14.2.2014*. s. 45-62. Helsinki: Suomen ainedidaktinen tutkimusseura.
- Kananen, J. 2012. *Kehittämistutkimus opinnäytetyönä*. Kehittämistutkimuksen kirjoittamisen käytännön opas. Jyväskylä: Jyväskylän ammattikorkeakoulu.
- Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B. (toim.) 2001. *Adding it up: Helping children learn mathematics*. Washington DC: National Academy Press.
- Korhonen, H. 2013. Kymmenjärjestelmä – matematiikan osaamisen kulmakivi. Teoksessa: *Dimensio* 2/2013, s. 38-40. http://www.opperi.fi/06_kirjallisuus_tutkimus/DM_kymppi.pdf Viitattu 12.4.2018
- Krippendorff, K. 2004. *Content Analysis: an Introduction to its Methodology*. United States of America: Sage Publications.
- Kupiainen, R., Kulju, P. & Mäkinen, M. 2015. Mikä monilukutaito? Teoksessa Kaartinen, Tapani (toim.). 2015. *Monilukutaito kaikki kaikessa*. s. 13-24. Tampereen yliopiston normaalikoulu. Tampere: Tampereen yliopistopaino Oy – Juvenes Print.

- Kuula, A. 2006. Toimintatutkimus. Kokonaisuudesta Saaranen-Kauppinen, A. & Puusniekka, A. 2006. KvaliMOTV - Menetelmäopetuksen tietovaranto (pdf). s. 40-42. Tampere: Yhteiskuntatieteellinen tietoaristo. <http://www.fsd.uta.fi/menetelmaopetus/>. (Viitattu 16.11.2017.)
- Lampinen, A. 2009. Varga–Neményi -menetelmän suomalaistetut materiaalit. Teoksessa: Tikkanen, P. (toim.) 2009. Oppikirja opetussuunnitelman todellistajana. Varga–Neményi -kesäseminaari 2008. Espoo, Varga–Neményi -yhdistys ry. 23–31.
- Liggett, R. 2017. The Impact of Use of Manipulative on the Math Scores of Grade 2 Students. Teoksessa: Brock Education Journal, 26(2), 2017, s. 87-101.
- Lindgren, S. 1990. Toimintamateriaalin käyttö matematiikan opiskelussa. Vammala: Vammalan Kirjapaino Oy.
- Malaty, G. 2003. Johdatus matematiikan rakenteeseen. Helsinki: Yliopistopaino.
- Mansikka-aho, J. & Sirén, S. 2012. "Päinvastaisesti ku supistaminen": Matematiikan suullinen kielentäminen peruskoulun alaluokilla. Tampere: Tampereen yliopisto.
- Moschkovich, J. N. 2015a. A sociocultural approach to academic literacy in mathematics for adolescent English learners: Integrating mathematical proficiency, practices, and discourse. Teoksessa: Molle, D. Sato, E, Boals, T & Hedgspeth, C. A. (Toim.), Multilingual learners and academic literacies: Sociocultural contexts of literacy development in adolescents. s 75–104. New York: Routledge.
- Moschkovich, J. N. 2015b. Academic literacy in mathematics for English Learners. Teoksessa: The Journal of Mathematical Behavior. 40, s. 43-62.
- Murdock-Stewart, V. 2005. Making Sense of Students' Understanding of Fractions: An Exploratory Study of Sixth Graders' Construction of Fraction Concepts Through the Use of Physical Referents and Real World Representations. Florida State Univeristy Libraries.
- Neuendorf, K. A. 2002. The Content Analysis Guidebook. United States of America: Sage Publications.
- Pernaa, J. 2013. Kehittämistutkimus tutkimusmenetelmänä. Teoksessa: J. Pernaa (toim.) Kehittämistutkimus opetuslalla. Juva: PS-kustannus.
- Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet, 2014. Helsinki: Opetushallitus.
- Riddle, M. & Rodzwell, B. 2000. Fractions: What happens between kidergarden and the army? Teoksessa: Teaching Children Mathematics, 7(4).
- Saaranen-Kauppinen, A. & Puusniekka, A. 2006. KvaliMOTV - Menetelmäopetuksen tietovaranto. Tampere: Yhteiskuntatieteellinen tietoaristo. <http://www.fsd.uta.fi/menetelmaopetus/>. (Viitattu 9.4.2018)
- Seyefia B-A. 2017. Effect of Physical and Virtual Manipulatives on the Mathematical Achievement of Junior High School Students in the Topic of Transformation in Ghana. Teoksessa: Asian Research Journal of Mathematics. 4(4), 2017, s. 1-14.

Tikkanen, P. 2008. ”Helpompaa ja hauskeempaa kuin luulin” - Matematiikka suomalaisten ja unkarilaisten perusopetuksen neljäsluokkalaisten kokemana. Jyväskylä: Jyväskylän University Printing House.

Tomperi, P. 2015. Kehittämistutkimus: Opettajan ammatillisen kehittymisen tutkimusperustainen tukeminen käyttäen SOLO-taksonomiaa – esimerkkinä tutkimuksellinen kokeellinen kemian opetus. Helsinki: Unigrafia.

Tuomi, J. & Sarajarvi, A. 2009. Laadullinen tutkimus ja sisällönanalyysi. Helsinki: Tammi.

Varga-Neményi ry. 2018. Varga-Neményi-menetelmä. <https://varganemenyi.fi/menetelma/tietoa-menetelmasta/varga-nemenyi-menetelma/30-varga-nem-nyi-menetelma> (Viitattu 13.4.2018)

Wang, F., & Hannafin, M.J. 2005. Design-based research and technology-enhanced learning environments. Teoksessa: Educational Technology Research & Development, 53(4), s. 5–23.

Willingham, D.T. 2017. Ask the Cognitive Scientist: Do Manipulatives Help Students Learn? Teoksessa: American Educator. Fall 2017. <https://www.aft.org/ae/fall2017/willingham> (Viitattu 11.4.2018).

LITTEET

VIDEOINTILUPA

Teen Tampereen yliopiston Kasvatustieteiden tiedekunnassa pro gradu -tutkielmaa, johon liittyy käytännön opetuskokeilu tammikuussa 2018. Tutkielmani ohjaa Dosentti Jorma Joutsenlahti ([sähköpostiosoite]).

Tutkimuksen tavoitteena on selvittää, onko uudenlainen matematiikan opetusmateriaali motivoiva ja toimiva murtolukujen opetuksen apuväline 3.-luokalla. Tutkimusmateriaalina haluaisin käyttää videotallennetta oppitunneistani sekä oppilaiden tuottamia vastauksia tekemiini tehtäviin. Tallennetta ja tehtyjä tehtäviä ei tulla käyttämään muuhun, kuin omaan tutkimukseeni. Sekä videotallenne että oppilaiden tekemät tehtävät sekä niistä mahdollisesti otettavat kopiot säilytän itselläni sähköisenä ja paperisena versiona. Oppilaiden nimiä tai kuvaa ei julkaista.

Jos haluat kysyä lisää videoinnista tai tutkimuksestani, voit ottaa minuun yhteyttä sähköpostitse!

Ystävällisin terveisin
Reetta Hälvä
[sähköpostiosoite]

(leikkaa tästä)

Oppilas: _____

Annan suostumukseni kuvaukseen.
 En anna suostumustani kuvaukseen.

Vanhemman nimi:

Päiväys: ____/____ 20____

Allekirjoitus_____

”Merkitysten kakut” ja Kissalan Poliisiasema

Tarinaa ja tehtäviä 3.-luokalle murtolukujen opiskeluun

SISÄLLYSLUETTELO

1. OPETTAJAN OHJEET TEHTÄVIIN.....	4
1.1 UNOHTUNEET EVÄÄT	5
1.2 OSIA.....	7
1.3 KOKONAINEN.....	8
1.4 KOKONAINEN KAUPUNKI	9
1.5 MUMMOLASSA.....	11
1.6 TEIPPIRULLA	12
2. TARINAT	13
2.1 KISSALAN POLIISIN ESITTELY.....	14
2.2 UNOHTUNEET EVÄÄT	16
2.3 OSIA.....	17
2.4 KOKONAINEN.....	19
2.5 KOKONAINEN KAUPUNKI	21
2.6 MUMMOLASSA.....	23
2.7 TEIPPIRULLA	25
3. TEHTÄVÄT	28
MONISTE 1.....	29
MONISTE 2A	31
MONISTE 2B.....	33
MONISTE 3.....	34
MONISTE 4A	36
MONISTE 4B.....	37
MONISTE 5.....	39
MONISTE 6.....	42
MONISTE 7.....	44
LISÄTEHTÄVIÄ.....	46



A small, stylized handwritten signature or set of initials in the bottom right corner of the page.

1. OPETTAJAN OHJEET TEHTÄVIIN

Paketin tehtävien avulla on tarkoitus opetella murtoluvun käsite ja siihen liittyviä ilmiöitä matematiikan eri kielten avulla (symboli, kuvio, luonnollinen ja toiminnan kieli). Jokaiseen tehtävään liittyy tarina, joka asettaa matemaattisen ongelman ja jonka juoni etenee tehtävien mukana. Tarina on tarkoitus lukea pohjustukseksi jokaiselle kokonaisuudelle, sillä se tarjoaa motiivin tehtävien ratkaisemiseen. Tarina on kirjoitettu siten, että luvun Kokonainen (luku 2.4) jälkeen on mahdollista hypätä kokonaisuuden päättävään, viimeiseen tarinaan Teippirulla (luku 2.7). Tarinan maailmaan voi tutustua jo ennen jakson aloitusta lukemalla Kissalan poliisien esittelytekstin ja näyttämällä materiaalin alussa olevat hahmot.

Jokaiseen kokonaisuuteen liittyy opettajan ohje sekä moniste tai monisteita, johon oppilaat voivat täydentää omia havaintojaan ja joissa on tehtäviä myös tarinan ulkopuolelta. Tehtävät on rakennettu Merkitysten kakut -materiaalin rinnalle ja sen käyttö on suotavaa. Jotkin tehtävät on mahdollista tehdä ilman Merkitysten kakut -materiaalia, vaikka sen käyttö toisikin tehtävään lisäarvoa. Tehtävien tarkoitus on mitata sitä, kuinka hyvin oppilas ymmärtää kulloinkin käsiteltävän asian. Materiaalin alussa olevat hahmot on tarkoitettu tarinan elävöittämiseen ja ovat vapaasti käytettävissä käyttäjän haluamalla tavalla.

Opettajan rooli on materiaalissa tietoisesti pyritty pitämään mahdollisimman vähäisenä, jotta tilaa oppilaan omille oivalluksille ja ideoille jäisi mahdollisimman paljon. Opetusta voi toteuttaa pareittain tai pienissä ryhmissä myös silloin, kun tehtävänanto ei siihen ohjeista. Oppilaiden tekemät tehtävät voi koota jokaisen oppilaan omaksi salapoliisin muistikirjaksi. Opetusta olisi hyvä täydentää laskurutiinia kehittäville tehtäville, esimerkiksi kirjan tai erillisten tehtävien avulla.

Seuraavaksi esiteltävät ohjeet sisältävät jokaisessa kokonaisuudessa tarvittavat materiaalit ja suuntaa antavat ohjeet tunnin kuluksi.

1.1 UNOHTUNEET EVÄÄT

Kesto: 2-3 oppituntia

Tarvikkeet:

- 3 appelsiinia
- moniste 1 ja 2a
- Merkitysten kakut -materiaali
- Kotitehtävänä/tunnilla moniste 2b

Tunnin kulku:

Lue tarina Unohtuneet eväät ja pyydä oppilaita kertomaan, millainen ongelma poliiseilla on. Matematiikan symbolikielen käyttäminen on perusteltua, sillä tarvitaan jokin merkintä puolikkaalle ja yhdelle kolmasosalle, jotta viesti saadaan perille. Tämä sisältö on tarkoitettu käsiteltäväksi kahden matematiikan tunnin aikana.

Kirjoita taululle jakolasku, joka lasketaan luokan kanssa yhdessä ($3/2 = 1,5$). Tarkastelkaa tilannetta tarinan kautta ja ottakaa esille kolme appelsiinia (konkreettinen esimerkki). Jakakaa appelsiinit kahdelle henkilölle. Viimeinen appelsiini jaetaan konkreettisesti puoliksi. Idea tähän olisi hyvä saada luokalta.

Anna oppilaiden tehdä monistetta ja tutkia murtolukujen maailmaa.

Muutamia huomioita:

Murtoluvun osien nimissä tarvitaan opettajan apua ja ne olisi hyvä opetella opettajan kanssa yhdessä. Myös niiden tehtävät olisi hyvä selvittää oppilaille. Nimittäjä antaa nimen murtoluvulle ja kertoo, kuinka moneen yhtä suureen osaan kokonainen on jaettu. Osoittaja kertoo, kuinka monta osaa kokonaisuudesta on valittu.

Appelsiinia ja pitsaa tarkasteltaessa olisi hyvä selvittää, mitä kirjan sivut ja käytettävät osakiekot edustavat. Esimerkiksi pitsan tapauksessa kirjan sivu 3 edustaa pitsaa, joka on jaettu kolmeen yhtä suureen osaan ja osakiekkokolme yhtä poliisia, joka saa palan pitsasta.

Nimittäjäkiekosta:

Nimittäjäkiekko on apuväline, jonka kanssa oppilaiden on helpompi tehdä tulevia tehtäviä. Kiekkon käyttöön tutustutaan jo nyt, vaikka supistamisen ja lauantamisen käsitteisiin ei ole vielä tarkoitus edetä. Oppilaalle tulee tehdä selväksi, että kiekossa neliö (x) ja pallo (y) ilmaisevat osoittajia. Kun kiekkoa käytetään siten, että oppilaan valitsema sivu on sama, kuin nimittäjäkiekko, ne ovat luonnollisesti sama luku. Myöhemmin x:n ja y:n erojen käsittely nimittäjäkiekkoa käytettäessä on tärkeämpää. Nimittäjäkiekkoon liittyvät tehtävät ja tutustumisen voi tehdä tunnilla yhdessä tai kotona itse pohtien. Mikäli tehtävä on kotiläksy, oppilailta ei tarvitse vaatia täydellisiä vastauksia vaan ainoastaan havaintoja kiekosta ja sen toiminnasta.

1.2 OSIA

Kesto: 1 oppitunti

Tarvikkeet:

- Moniste 3
- Merkitysten kakut -vihko

Tunnin kulku:

Lue tarina ”Osia”. Tehtävässä on tarkoitus selvittää, onko poliiseilla kokonainen paperi ja tarinan jälkeen tätä voi kysyä oppilailta. Opettaja voi näyttää palan paperista (moniste 4a) oppilaille, jotta tehtävästä tulee konkreettisempi suoritettava.

Oppilaat jaetaan neljän hengen ryhmiin tai pareihin. Jokaisella on oma Merkitysten kakut -vihkonsa, jolloin yhdessä voidaan päätellä tehtävän ratkaisu. Monisteeseen on tavoitteena saada piirrettyä ja kirjoitettua tehtävän ratkaisu. Tässä tehtävässä voi käyttää apuna myös nimittäjäkalvoja, mikäli opettaja niin haluaa ja niihin on jo ehditty tutustua (esimerkiksi 2/8).

1.3 KOKONAINEN

Kesto: 1 oppitunti

Tarvikkeet:

- Moniste 4a (mustavalkoisena, 1kpl/ryhmä)
- Moniste 4b kaikille oppilaille
- Merkitysten kakut -vihko

Tunnin kulku:

Lue aluksi tarina ”Kokonainen”. Tehtävässä on tarkoitus selvittää, mitä salakirjoituksessa sanotaan asettamalla murtoluvut suuruusjärjestykseen. Oppilaan on tarkoitus käyttää Merkitysten kakut -vihkoa eri murtolukujen suuruuksien vertailuun. Ennen tehtävän tekemistä oppilasta olisi hyvä muistuttaa osoittajan ja nimittäjän tehtävistä, sillä tässä harjoituksessa ne ovat isossa asemassa.

Tehtävän tavoitteena on rakentaa pohjaa murtolukujen suuruusvertailulle, sekä saada käsitys siitä, kuinka osoittaja ja nimittäjä toimivat yhdessä. Tehkää ensin Harjoitellaan! -tehtävä (moniste 4b ensimmäinen puoli) ja siirtykää sitten kartan kimppuun. Näin oppilaan on helpompi tarttua monimutkaiselta vaikuttavaan tehtävään. Monisteen toinen puoli on tarkoitus tehdä karttatehtävän jälkeen.

Huomioitavaa: Tehtävässä on virhe, jonka avulla opettaja pystyy seuraamaan sitä, kuka todella tekee tehtävän matematiikan näkökulmasta ja kuka tarkkailee ja ”arvaa” lopputuloksen. Tehtävän ratkaisussa lukee ”OLEN PUALSSA”. Moni oppilaista korjaa tämän muotoon ”OLEN PULASSA”.

1.4 KOKONAINEN KAUPUNKI

Kesto: 1 oppitunti

Tarvikkeet:

- Moniste 5
- Merkitysten kakut -vihko

Tunnin kulku:

Lue tarina ”Kokonainen kaupunki”. Käsitelkää Sokerin tutkimien talojen tilanne yhdessä Merkitysten kakut -vihkoa apuna käyttäen. Esimerkin voi antaa sekä toiminnallisessa muodossa että kuviokielellä, esimerkiksi taululle piirtäen. Tässä kohtaa on hyvä tähdentää sitä, kuinka kokonainen ei aina ole yksi suuri asia vaan voi muodostua myös useammasta osasta. Yhden Merkitysten kakut -materiaalin sivun merkitystä yhtenä kokonaisena tulee täsmentää. Tärkeää olisi synnyttää ymmärrys siitä, kuinka murtolukuja yhteen laskettaessa tarkasteltava joukko (nimittäjä) säilyy samana, mutta osuus kokonaisuudesta (osoittaja) muuttuu.

Sokerin tilanteen oppilaat raportoivat vihkoihinsa esimerkin mukaan ja muodostavat muut laskut itse kuviokielellä ja symbolikielellä.

Lisäideoita:

Tehtävän voi tehdä myös Merkitysten kakut -materiaalin ja puutikkujen avulla konkreettisesti tikkuja yhteenlaskien. Tällöin taktiilinen toiminnan kieli matematiikkaa pohdittaessa korostuu. Esimerkiksi Sokerin tilanteen voisi laskea seuraavasti:

1. Merkitse puutikuilla ne talot kymmenestä talosta, jotka Sokeri on tutkinut ensimmäisenä päivänä.
2. Siirrä tikut syrjään (sitte, että et sekoita niitä muihin tikkuihin) ja merkitse uusilla tikuilla toisena päivänä tutkittujen talojen määrä.
3. Lisää ensimmäisenä päivänä tutkittujen talojen tikut toisen päivän tikkujen perään.
4. Laske tulos tikuista.

Tämän jälkeen oppilas voi täydentää huomionsa omaan muistikirjaansa.

Huomioitavaa:

Yhteen- ja vähennyslaskutehtäviä tehdessä, oppilaat saattavat kysyä, miksi laskuja ei lasketa ainoastaan ”tavallisina” yhteen- ja vähennyslaskuina. Tämä on hyvä huomio ja todellisuudessa laskut voisi laskea myös siten. Kysymys on kuitenkin asetettu siten, että vastauksessa tulee tietää, kuinka suuri osa jotakin on jostakin. Tällöin luonnollinen luku ei käy vastaukseksi.

1.5 MUMMOLASSA

Kesto: 1 oppitunti

Tarvikkeet:

- Moniste 6
- Merkitysten kakut -vihko

Lue tarina ”Mummolassa”. Tarkoitus on harjoitella murtolukujen vähennyslaskua. Tehkää ensimmäinen tehtävä yhdessä. Asunnon tummat ikkunaruudut kertovat sen tyhjiydestä. Tässä kohtaa opettajan on hyvä käsitellä uudelleen yhden kokonaisen käsite, sillä siitä tilanteesta tehtävä lähtee liikkeelle. Kaikille tulee olla selvää, että mikäli osoittaja ja nimittäjä ovat sama luku, puhutaan yhdestä kokonaisesta, sillä kaikki kokonaisuuden osat ovat valittuina. Opetuksen jälkeen oppilaat voivat tehdä muut laskut itsenäisesti.

Myös vähennyslaskuja voi laskea tikkujen avulla (ks. edellisen kappaleen esimerkki).

Huomioitavaa:

Yhteen- ja vähennyslaskutehtäviä tehdessä, oppilaat saattavat kysyä, miksi laskuja ei lasketa ainoastaan ”tavallisina” yhteen- ja vähennyslaskuina. Tämä on hyvä huomio ja todellisuudessa laskut voisi laskea myös siten. Kysymys on kuitenkin asetettu siten, että vastauksessa tulee tietää, kuinka suuri osa jotakin on jostakin. Tällöin luonnollinen luku ei käy vastaukseksi.

1.6 TEIPPIRULLA

Tämä tarina on tarkoitettu kokonaisuuden päättäväksi tarinaksi, joka tiivistää juonen ja selittää salaperäisen viestin. Tarina on koottu siten, että tämä päätöstarina voidaan lukea jo kappaleen 1.3 jälkeen. Mikäli kaikki tehtävät ennen tätä tarinaa on tehty, voidaan ennen tarinan lukemista tehdä esimerkiksi Moniste 7 tai Moniste X, joka sisältää lisätehtäviä.

Monisteessa 7 on tarkoitus tarkistaa Sokerin tekemät muistiinpanot tutkinnasta. Sokerin lasku on tarkoitus tarkistaa Merkitysten kakut -vihkon avulla. Mahdolliset virheet tulee korjata Sokerin muistiinpanoihin.

2. TARINAT

2.1 KISSALAN POLIISIN ESITTELY

Kaduilla ei kuulu ääntäkään. Kaikki ovat nukkumassa aikaisen aamuauringon kutitellessa säteillään rakennusten seiniä ja kutsuessa kaupunkia heräämään. Ulkona on kevyesti pakkasta, mutta keväinen aurinko alkaa jo lämmittää yön pahinta kylmyyttä pois tieltään. Nousevan auringon kutsuun vastataan ja kaupunki alkaa hiljalleen heräillä. Verhoja vedetään pois ikkunoiden edestä, kahvinkeitin käynnistetään ja puurokattilat laitetaan kiehumaan.

Yhden talon ovi aukeaa ennen muita. Oven narahduksen säästämänä ulos astuu siniseen takkiin ja hattuun pukeutunut oranssiraidallinen kissa. Kissa vetää tassuillaan takin kauluksia ylemmäs, jotta pakkasen ei pääsisi puremaan liian lujaa, sulkee oven perässään ja alkaa vihellellä astella kohti työpaikkaansa. Kissan nimi on Sokeri ja hän työskentelee Kissalan poliisiasemalla pääetsivänä.

Kissalan kaupunki on pieni, eikä se sen vuoksi tarvitse suurta poliisiasemaa. Pieni talo, jonka kadunpuoleisella seinällä lukee suurilla kirjaimilla ”POLIISI”, sisältää vankilan, kaksi toimistohuonetta, vastaanottotiskin ja suuren autotallin. Autotallissa on tilaa useammalle autolle, mutta Kissalassa autoja on vain yksi, ja sekin käytössä ainoastaan hyvin harvoin.

Poliisiasemalle saapuessaan Sokeri puistelee tassuistaan ylimääräisen lumen ja laittaa hattunsa ja takkinsa naulakkoon. ”Hyvää huomenta!” hän toivottaa iloisesti kollegalleen, joka istuu vastaanoton pöydän takana unisen näköisenä. Hedelmä, Sokerin lähin ystävä ja apulainen, on mustaturkkinen kissa, jonka innokkuus menee joskus harintakyvyn edelle. Juuri tällä hetkellä tuota innokkuutta ei kuitenkaan juuri huomaa.

”Huomenta”, Hedelmä haukottelee ja lisää:

”Oli niin hiljaista, että olisin voinut yhtä hyvin nukkua!” Sokeri naurahtaa ystävälleen ja lupaa: ”No nyt saat lähteä kotiin nukkumaan!” Hedelmä nousee kiitollisena ylös paikaltaan, venyttelee, haukottelee ja vetää takin päälleen.

”Nähdään huomenna!” Hedelmä vielä huikkaa oven sulkiessaan ja lähtiessään.

Hedelmän ja Sokerin lisäksi Kissalan poliisiasemalla työskentelee kaksi vanhempaa konstaapelia, koirapoliisit Mango ja Päärynä. He ovat olleet Kissalassa töissä jo niin kauan, että tuntevat pienen kylän jokaisen asukkaan tarinan. Päärynä on poliiseista kaikkein vanhin ja hän auttaa mielellään nuorempia töissä. Päärynän alun perin tumman harmaan turkin sekaan on jo alkanut ilmaantua

vaaleampia sävyjä, eikä hän koe itseään enää yhtä nopeaksi kuin nuorempana. Mango sen sijaan, kultaisesta turkistaan tarkkaan huolta pitävä tarkkanenäinen poliisi, kokee olevansa edelleen nuorempien kollegoidensa tasolla ketteryudessa ja nopeudessa. Vaikka näin ei enää olekaan, ei muilla poliiseilla ole sydäntä asiasta Mangolle itselleen mainita. Hän kun pärjää vielä aivan hyvin rauhallisessa Kissalan poliisin arjessa!

2.2 UNOHTUNEET EVÄÄT

Eräänä aamuna Hedelmä saapui poliisiasemalle. Tänään hän olisi töissä Sokerin ja Mangon kanssa, joten päivästä tulisi takuulla loistava!

”Mikään ei voi mennä pieleen!” hän riemuitsi hiljaa mielessään ja istuutui pöytänsä ääreen työkavereitaan tervehdittyään. Koko aamupäivän Hedelmä kirjoitti raporttia viime viikolla tapahtuneesta tapauksesta, jossa hiukan jo iäkäs kaupunkilainen oli luullut, että hänen tekohampaansa oli varastettu. Tapaus oli kuitenkin selvitetty nopeasti, sillä kävi ilmi, että vanhus oli hukannut hampaansa edellisellä viikolla bingoiltaan. Hän oli ollut niin innoissaan voittamastaan kahvipaketista, ettei ollut huomannut, kuinka hampaat luiskahtivat riemuitessa suusta ja putosivat pöydän alle varjoihin. Onneksi bingosalin siivoaja oli löytänyt hampaat pöydän alta ja tuonut ne poliisiasemalle löytötavaroihin. Hedelmää hymyilytti vieläkin, kun hän ajatteli sitä, kuinka onnelliseksi vanhus oli tullut saatuaan kuulla, että hampaat olivat tallessa ja että hän saisi lopulta syödä muutakin, kuin soseutettua porkkanakeittoa!

Näistä aatoksista Hedelmälle tuli nälkä. Vesi herahti hänen kielelleen, kun hän ajatteli evääksi pakkaamaansa kalkkunasämpylää. Onneksi kellokin osoitti jo lounasaikaa. Mutta mitä kurjaa? Hedelmän katsoessa reppuunsa, ei leipä ollutkaan siellä! Hänen oli aivan varmasti täytynyt unohtaa se jääkaappiin ylähyllylle. Murtuneena Hedelmä hieroi vatsaansa ja lipoi huuliaan. Mitä hän oikein keksisi, kun aikaa kotiin asti juoksemiseen ei ollut?

Samassa hetkessä Sokeri käveli kollegansa työpöydän ohi ja vilkaisi tätä kummissaan.

”Miksi noin murheellinen naama?” hän kysäisi kollegaltaan. Hedelmä katsoi Sokeria suurin silmin ja kertoi surullisen tarinan. Sokeri hymyili ystävälleen lohduttavasti ja sanoi:

”Minulla on eväänä kolme appelsiinia, voimme jakaa ne keskenämme!” Myös Mango ilmestyi kulman takaa. Hän oli kuullut keskustelun ja sanoi hymyillen:

”Ajattelin ensin jakaa ostamani pitsan Sokerin kanssa, mutta voimmehan jakaa sen myös tasan kolmestaan!”

”Mutta paljonko minä sitten saan ruokaa?” Hedelmä kysyi ja katsoi kollegoitaan silmiin ymmällään.

2.3 OSIA

Sokeri käveli pakkasaamussa takki tiukasti ympärillään. Hän oli tehnyt aamulla paljon paperitöitä, istunut tietokoneen ääressä ja haukotellut makeasti. Lounaan jälkeen hän oli päättänyt, että sisällä istuskelu saisi riittää. Hän lähtisi ”kentälle”, eli tavallisten ihmisten sekaan tutkimaan, olivatko kaupungin asiat järjestyksessä.

Kaduilla oli hiljaista, eikä missään vaikuttanut olevan minkäänlaisia järjestyshäiriöitä. Tilanne oli hyvin rauhallinen, kuten niin monena muunakin iltapäivänä Kissalan kaduilla. Sokeri katseli iloisena lumihankien kimallusta auringon valossa ja seurasi, kuinka hänen hengityksensä muuttui vaaleaksi sumuksi lämpimän, kostean ilman kohdatessa pakkassään. Aurinko paistoi lämpimästi, sillä kevät oli jo pitkällä.

Sokeri meinasi liukastua jäisellä tiellä jonkin osuessa häntä reiteen. Hän kääntyi varautuneena ja näki suuren, rypistetyin paperinpalan jaloissaan. Hän nosti katseensa ja yritti löytää paperin heittäjää, mutta missään ei näkynyt ketään. Sokeri juoksi kulman taakse tarkistamaan, näkyikö maassa uusia tassunjälkiä, mutta lumen pinta oli niin kova, ettei uusia jälkiä, jos niitä oli edes syntynyt, erottanut vanhoista. Sokeri oli aivan ymmällään. Hän ei ollut kuullut eikä nähnyt mitään ja silti jonkun oli onnistunut tehdä ilkivaltaa ja heittää poliisia roskalla. Ja kuka kyläläisistä edes haluaisi tehdä mitään sellaista?

Sokeri kumartui mietteliäänä ottamaan paperia maasta viedäkseen sen roskakoriin. Yhtäkkiä hän kuitenkin huomasi paperissa jonkinlaisia merkkejä, kurtisti kulmiaan ja alkoi oikoa sitä kiinnostuneena. Paperi oli osa suurempaa kokonaisuutta ja se sisälsi numeroita ja merkkejä, joiden tarkoitusta Sokeri ei ymmärtänyt.

Vaativa pirinä kaikui tukahtuneen kuuluisena Sokerin paksun takin taskusta. Hän säpsähti hereille paperinpalan tutkimuksesta ja työnsi sen hätäisesti taskuunsa. Yksi uusi taite ei kärsinyttä paperia varmaankaan haittaisi, hän pohti mielessään, otti puhelimen taskustaan ja vastasi asiallisesti soittajalle. Hedelmän ääni kuulosti kiihtyneeltä puhelimen toisessa päässä.

”Et ikinä arvaa, mitä minulle tapahtui!” hän lähes huusi puhelimeen. Sokeri hämmentyi. Näin paljon yllättäviä tapahtumia yhden päivän aikana? Hän ei kuitenkaan sanonut Hedelmälle mitään omasta sattumastaan vaan vastasi kollegalleen:

”En todella arvaa!”

Hedelmä oli jäänyt yksin poliisiasemalle Sokerin lähtiessä kävelylle ja Mangon ja Päärynän lähtiessä autolla viereiseen kaupunkiin tapaamaan muita poliisikollegoita. Hän oli kaikessa rauhassa istunut koneensa ääressä keskittyneenä töihin, kun poliisilaitoksen oveen oli lentänyt lumipallo. Hedelmä hätkähti työtuolissaan ja nosti katseensa kiireesti ääneen suuntaan. Hän syöksähti ulos tarkistamaan, oliko heittäjä lähettyvillä. Ketään ei näkynyt missään. Juuri silloin hän huomasi sen: oveen teipatun pienen paperinpalan, jossa oli numeroita ja kirjaimia kummallisessa järjestyksessä.

Sokeri hengähti yllättyneenä, mutta ei ehtinyt kertoa kollegalle omasta tapauksestaan, kun kännykkä ilmoitti toisesta saapuvasta puhelusta. Sokeri vilkaisi näyttöä pikaisesti, havaitsi, että soittaja oli Mango ja lopetti nopeasti puhelun Hedelmän kanssa luvaten soittaa tälle uudestaan. Sokeri vastasi Mangon puheluun ja kuullessaan Mangon jännittyneen äänen, kysyi rauhallista teeskennellen:

”Oletko sinäkin saanut postia?” Mango oli löytänyt pienen kaistaleen paperia auton etupenkiltä ja koska paperissa olevat merkit näyttivät tärkeiltä, laittanut sen talteen takkinsa taskuun. Myöhemmin päivällä, Mangon ja Päärynän ollessa viereisessä kaupungissa, oli Päärynä puolestaan ostaessaan lounaaksi sämpylän, kiinnittänyt huomiota sen erikoiseen käärepaperiin. Tavallisen paperin seassa oli ollut samankokoinen paperi, kuin Mangon aiemmin löytämä.

”Olemme siis kaikki saaneet viestin”, Sokeri totesi tuumivaisena. Mango jatkoi innostuneena:

”Eikä siinä vielä kaikki! Minun ja Päärynän paperit sopivat yhteen!” Sokeri kurtisti kulmiaan ja kysyi:

”Kuinka suuria palasia sinä löysit?” Mango tuumi hetken ja arveli sitten molempien palasten olevan noin 1/8 kokonaisesta paperista. Sokeri kiitti Mangoa ja lopetti sitten puhelun soittaakseen Hedelmälle.

Hetken päästä Sokeri oli selvittänyt, että Mangolla oli yksi kahdeksasosa (1/8), Päärynällä yksi kahdeksasosa (1/8), Sokerilla yksi neljäsosa (1/4) ja hänellä itsellään puolikas (1/2) paperia. Kuka paperin oli oikein antanut heille ja miksi henkilö oli niin salaperäinen? Mitä paperissa luki? Ja olikohan heillä jo koko paperi hallussaan? Sokeri harmitteli hiljaa mielessään sitä, että koirat, Mango ja Päärynä saapuisivat vasta seuraavana päivänä takaisin Kissalaan. Siihen asti hän saisi vain odottaa.

2.4 KOKONAINEN

Poliisit seisoivat ringissä pienen pöydän ympärillä ja tuijottivat palasia ymmällään. Mistä ne olivat tulleet, kuka ne oli heidän käsiinsä saattanut ja miksi?

”Käyn hakemassa teippiä”, Hedelmä sanoi ja käveli vetolaatikoidensa luo. Hän oli onneksi tarkka tavaroistaan ja tiesi heti, että kirkas teippi löytyi nitojan ja rei'ittimen välistä kolmannesta laatikosta ylhäältä laskien. Hän kiskaisi laatikon auki, ojensi kypälänsä teippirullan kohdalle, ja huitaisi ilmaa. Hedelmä hämmästyí. Hän olisi voinut vanna jättäneensä rullan juuri siihen. Ehkä joku oli vain lainannut rullaa hänen tietämättään ja palauttanut sen väärään paikkaan, Hedelmä tuumi ja kohautti harteitaan. Hätää ei ollut, sillä hän tunnistaí kyllä oman teippirullansa. Kenelläkään muulla ei ollut samanlaista kukkakuvioista koristeteippiä kuin hänellä! Hedelmä aukoi varmuuden vuoksi vielä muutkin laatikot, mutta teippirullaa ei näkynyt missään

Onneksi tarvikekaapissa poliisiaseman nurkassa oli aina vararullia, eikä teippi päässyt loppumaan. Hedelmä haki uuden rullan kaapista ja viimein poliisit pääsivät askartelemaan paperin palasten kimppuun. Tehtävä ei tosin ollut helppo, sillä vaikka paloja oli vain neljä, ei repeämien kohdalla juuri ollut numeroita vihjeinä osien yhteenkuuluvuudesta. Kaikki neljä poliisia tekivät yhteistyötä, kiinnittivät kartanpaloja toisiinsa ja teippasivat.

Viimein kartta oli kasassa ja kaikki jäivät tuijottamaan kokonaiseksi kasattua paperia hölmistyneinä.

”Tuota”, Mango aloitti hämmentyneenä ja kallisti päätään:

”Mikä se oikein on?” Muut pyörittelivät päätään, yrittivät katsella paperia eri kulmista ja mutisivat puoliääneen.

”No, siinä on murtolukuja ja kirjaimia”, Päärnä totesi, naurahti ja raapi päätään ilman pienintäkään hajua paperin tarkoituksesta. Äkkiä Sokeri sai idean.

”Ehkä meille halutaan kertoa jotain!” hän naurahti, riensi työpöytänsä ääreen, nappasi palan paperia ja alkoi luonnostella. Muut hiipivät hiljaa Sokerin taakse ja alkoivat katsella hänen työskentelyään.

”Aivan, juuri noinhan se menee!” Hedelmä hihkaisi, otti hankin paperia, kopioi murtolukuja alkuperäiseltä paperilta ja ryhtyi hommiin.

”Minä en ymmärrä mitään!” huudahti Mango, katsoi hämmentyneenä nuorten toimintaa ja sitten kollegaansa. Päärynä kohautti olkiaan aivan yhtä hämillään ja istahti Sokerin viereen odottelemaan lopputulosta.

2.5 KOKONAINEN KAUPUNKI

Koko kaupunki pitäisi kahlata läpi. Jokaista asukasta pitäisi haastatella. ”Olen pulassa.” Sanat pyörivät Sokerin mielessä. Aluksi poliisit olivat hämmentyneet siitä, mitä viesti oikein tahtoi kertoa, mutta pian he huomasivat, että kirjoittaja oli varmaan tehnyt virheen.

”Se on ”Olen pulassa”, Hedelmä oli ehdottanut ja kaikki olivat katsoneet häntä järkyttyneinä.

He olivat ryhtyneet heti toimiin. Jokainen poliisi oli lähtenyt omalle alueelleen koputtelemaan ovia ja kyselemään salaperäisestä viestistä. Vielä tähän mennessä kukaan ei ollut löytänyt mitään poikkeavaa. Ei huolestuneita katseita, ei epäilyttävää katseen välttelyä, ei oikeastaan vielä ensimmäistäkään johtolankaa. Sokeri oli turhautunut haastateltuaan kolmen talon asukkaat saamatta mitään selville ja päättänyt lähteä pienelle kahvi- ja lämmittelytaulolle poliisiasemalle.

Sokeri oli ymmällään ja pyöritteli kaiken aloittanutta paperia käsissään. ”Olen pulassa.” Sokeri tuijotti itse kirjoittamiaan kirjaimia ja pohti, kuinka suuressa vaarassa viestin lähettäjä oikeastaan oli? Entä kuinka he onnistuisivat löytämään hänet ilman ensimmäistäkään vihjettä? Täytyi vain toivoa, että haastatteluissa ilmenisi edes jotain, mihin he voisivat tarttua. Sokeri huokasi ja laski paperin pöydälle samaan aikaan, kun Mango astui ovesta sisään.

”Löytyikö mitään?” Sokeri kysyi toiveikkaana. Mango pyöritti päätään ja asteli Sokerin luo pudistellen lunta tassuistaan.

”Ei niin mitään”, hän vielä varmensi ja sanoi:

”Jo neljä taloa tänään haastateltu, eikä vieläkään mitään kiintoisaa! Kuinka suuren osan me olemme jo tutkineet?” Sokeri säpsähti. Hän ei ollut ajatellut missään vaiheessa sitä, että heidän tulisi pitää kirjaa jo käydyistä taloista. Sokeri oli vain jakanut Kissalan talot tasan poliisien kesken. Pienessä Kissalan kaupungissa ei ollut kuin 40 taloa, joten jokainen heistä kävisi 10 taloa läpi, haastattelisi sen asukkaat ja raportoisi, jos jotain poikkeavaa tapahtuisi. Sokerin pitäisi piirtää pieni taulukko, jotta hän saisi selville, milloin kaikki talot oli tutkittu. Mutta entä jos mitään ei löytyisikään ennen kierroksen loppumista? Sitä Sokeri ei uskaltanut edes ajatella.

Seuraavana päivänä Sokeri jätti poliisiaseman pöydälle tekemänsä taulukon, johon oli lisännyt eilen tutkittujen talojen lukumäärän. Hän pyysi, että jokainen poliiseista merkitsisi päivän päätteeksi toisena päivänä läpikäytyjen talojen määrän. Sillä tavoin he pysyisivät mukana siinä, kuinka suuri

osa taloista oli tutkittu. Jokainen poliisi nyökkäsi osoittaakseen, että ymmärsi ohjeet ja veti sinisen takin niskaansa vakavana. Vaitonaisina kaikki neljä poistuivat poliisiasemalta, lukitsivat sen oven perässään ja lähtivät kukin omaan suuntaansa.

Sokeri saapui poliisiasemalle rätiväsyneenä. Hän oli tutkinut ja haastatellut päivän aikana kuusi taloa ja nyt hän oli aivan poikki. Muut olivat lopettaneet jo jonkin aikaa sitten, mutta hän oli jatkanut pidempään. Poliisiasemalle saapuessaan hän tarkisti ensimmäisenä taulukon ja huomasi ilokseen, että jokainen poliiseista oli muistanut merkitä tutkimiensa talojen määrän. Nyt pitäisi enää laskea, kuinka pitkälle he olivat päässeet. Sokeri tarttui paperiin ja istui oman työpöytänsä ääreen.

”Kuinka suuri osa taloista on jo tutkittu?” hän toisti Mangon kysymyksen ja alkoi selvittää vastausta.

2.6 MUMMOLASSA

Sokeri oli saanut laskettua, kuinka monta taloa heillä oli vielä tutkittavanaan ja poliisit olivat päättäneet jakaa loput taloista keskenään. Seuraavana Hedelmän listalla oli tuttu osoite: Miukukuja 2. Pienessä talossa, jonka pihalla kasvoi paljon kukkia ja syksyisin omenien painosta lähes ratkeava, suuri omenapuu, kuului hänen isovanhemmilleen. Mummo ja ukki olivat jo iäkkäitä, mutta tulivat hyvin toimeen keskenään ja toisiaan auttaen.

”No mutta rakas lapsi!” mummo huudahti Hedelmän astuessa sisään ovesta.

”Eikö sinulla ole lainkaan kaulahuivia?” Hedelmä hymyili. Olihan hänellä, montakin mummon tekemää, raidallista kaulahuivia, jotka nyt vain olivat jääneet kaapin ylähyllylle töihin lähtiessä. Hedelmä rauhoitteli mummoa, joka jo touhukkaana etsi vasta neulomaansa, punaista huivia.

”Mutta armaani”, ukki puuttui keskusteluun kiikkutuolistaan lehden takaa ja muistutti mummoa:

”Sinähän annoit sen punaisen huivin naapurin pojalle viikko sitten. Muistatkos?” Mummo katsoi ensin ukkia kysyvästi, naurahti sitten itselleen ja sanoi:

”No niinpäs annoinkin! Ei toimi muisti enää niin kuin ennen!” Hedelmä hymyili mummolleen ja pyysi tätä rauhoittumaan.

”Mitä sinä oikeastaan täällä teet?” ukki kysyi huomattessaan Hedelmän vakavoituneen ilmeen ja nousi ylös kiikkutuolista. Hedelmä kertoi isovanhemmilleen kaiken salaisesta viestistä ja sen saapumisesta osasina ja kertoi, että poliisien on tarkoitus haastatella koko kylä viestin takia. Ukki ja mummo katsoivat Hedelmää vakavoituneina ja pyysivät häntä istumaan tuvan sohvan ääreen.

Pian kaikki kolme istuivat ringissä pienen sohvapöydän ympärillä. Mummo otti neuleensa esiin ja alkoi hermostuneena neuloa, mutta ukki kumartui Hedelmää kohden ja kysyi:

”No, kuinka me voimme sinua auttaa?” Hedelmä kävi isovanhempiensa kanssa läpi hyvin perinteisen haastattelukaavan saamatta kuitenkaan mitään uutta selville. Tunnin päästä hän hyvästeli isovanhempansa ja astui ovesta ulos pakkaseen. Kuinka monta taloa hän olikaan jo tutkinut tuloksetta? Hedelmä huokaisi raskaasti, tarkasti paperista seuraavan osoitteen ja lähti uupuneena matkaan.

Hedelmän seuraavat kohteet olivat kolmessa rivitalossa, joissa kaikissa oli neljä asuntoa.

Ensimmäisessä talossa kaksi asuntoa oli kuitenkin tyhjillään, toisessa yksi ja kolmannessa kolme.

Tyhjiä asuntoja Hedelmän ei tarvitsisi lainkaan tarkistaa, mutta kuinka suuri osa rivitaloista täytyi?

Hedelmä katsoi papereitaan ja pohti, olikohan Sokeri laskenut asuntojen määrän oikein.

2.7 TEIPPIRULLA

Hedelmä saapui poliisiasemalle ensimmäisenä. Hän oli juuri avaamassa lukkoa, kun huomasi lasissa pienen palan teippiä. Teippi oli varmaan jäänyt lasiin silloin, kun Hedelmä oli irrottanut ovesta olevaa salakirjoituspaperin palaa. Hän oli juuri rapsuttamassa ohutta siivua irti, kun hän huomasi teippiä koristavat kukat. Samassa hänellä välähti. Teippi oli hänen omaa teippiään. Varkaan oli täytynyt käydä poliisiaseman sisällä saadakseen teipin! Hedelmä kaivoi puhelimensa esiin ja soitti nopeasti muut poliisit paikalle.

”Tylsää”, Päärynä valitti ja haukotteli nojaten tuolissaan taaksepäin. Muut katsoivat turvakameran tallennetta silmä kovana. Muutamaan tuntiin mitään ei ollut tapahtunut. Hedelmä tarkasteli itseään kirjoittamassa raporttia ja hakemassa välillä juomista pöytänsä ääreen. He olivat havainneet, että hän oli käyttänyt teippiä aiemmin päivällä ja palauttanut sen, aivan kuten arvelikin, kolmanteen laatikkoon nitojan ja rei'ittimen viereen. Kuinka joku oli voinut päästä poliisiaseman sisälle hänen huomaamattaan? Ja kuka se oikein oli? Mitä muuta varas oli mahdollisesti vienyt? Juuri nyt Hedelmä nousi ylös videon kuvassa ja poistui jonnekin kuvan ulkopuolelle.

”Lounastauko?” Sokeri kysyi rikkoen hiljaisuuden. Hedelmä nyökkäsi ja jäykistyi. Pian lounastauon jälkeen hän oli löytänyt paperin ikkunasta. Lounastauko oli myös päivän ainoa hetki, jolloin hän oli pidemmän aikaa poissa pöytänsä äärestä.

”Katsokaa! Tuossa!” Päärynä huusi ja osoitti pientä hahmoa, joka ilmestyi kameran kuvan nurkkaan. Mango terästäytyi ja kaatui melkein tuolillaan. Sokeri ja Hedelmä kumauttivat päänsä kipeästi yhteen nojautuessaan yhtä aikaa lähemmäs pientä näyttöä. Näytöllä liikkuva hahmo vaikutti varovaiselta ja katseli kaiken aikaa tarkasti ympärilleen. Kuvasta kasvoja ei kuitenkaan vielä nähnyt ja kaikki odottivat henkeään pidätellen.

”Se on lapsi”, Mango henkäisi hämmentyneenä nähdessään kuvan tarkemmin. Muut hyssyttelivät häntä kuin yhdestä suusta ja katselivat, kuinka lapsi käveli Hedelmän pöydän ääreen, availi laatikoita, löysi teippirullan, otti sen ja juoksi ulos. Muutaman minuutin päästä Hedelmä palasi kuvaan lounastauoltaan, istahti koneen ääreen, painoi lapselta auki jääneen laatikon kiinni ja jatkoi työskentelyään.

Sokeri pysäytti videon ja hetken kaikki poliisit seisoivat hämmentyneinä.

”Montako tuon ikäistä lasta tässä kylässä on?” Mango kysyi hetken hiljaisuuden jälkeen.

”Monta”, Päärynä vastasi epätoivoisena. Hedelmä kelasi videota taaksepäin kohtaan, jossa lapsi asteli sisään. Hän katseli kuvaa tarkemmin, hymyili ja sanoi voitonriemuisesti:

”Mutta ei kovin montaa sellaista, joilla on minun mummoni neuloma kaulahuivi! Tiedän, kuka kuvassa on! Lähdetään!” Hedelmä syöksähti takilleen ja ennen kuin muut olivat edes tajunneet liikahtaa, avasi oven kirpeään pakkasilmaan.

Lapsi istui itkuisena äitinsä sylissä. Sokeri, Hedelmä, Mango ja Päärynä tuijottivat tätä uskomatta korviaan. Tarina oli ollut, sanalla sanoen, erikoinen. Lapsen setä oli lähtenyt talveksi reissulle maapallon ympäri ja lähetti silloin tällöin kortteja arvoituksen muodossa erilaisista paikoista, joissa hän kävi. Kun lapsi oli saanut selville setänsä lähettämän viestin sanoman, hän oli hätäntynyt ja pyytänyt apua äidiltään. Äiti ei kuitenkaan ollut ollut huolissaan sedästä, vaan ohittanut lapsen kysymyksen naureskellen, joten lapsi oli päättänyt pyytää apua poliiseilta. Hän kuitenkin pelkäsi, että poliisien reaktio olisi sama kuin äidin ja yrittänyt siksi toimittaa viestin perille mahdollisimman salaperäisesti.

”Voi lapsiraukka!” Äiti sanoi ja halasi poikaansa yhä tiukemmin:

”Olisit vain kysynyt uudelleen, niin olisin aivan varmasti selittänyt!” Hän sanoi ja mojavahti suuren suukon poikansa pääläelle. Kissalan poliisit seisoivat rivissä, ja edelleen yhtä hämmentyneinä.

Lapsen äiti huomasi heidän hämmennyksensä ja selitti naureskellen:

”Setä on Euroopassa rannikolla. Pula on kaupunki Kroatiassa!”

Hedelmä oli ensimmäinen, joka nauroi. Hän kikatti vatsa kippurassa, eikä edes huomannut, kuinka hitaasti muut yhtyivät nauruun. Postikortin takia he olivat olleet monta päivää huolissaan ja peloissaan kaupunkinsa turvallisuuden puolesta. Poikakin naurahti lyhyesti ja katsoi sitten äitiinsä huojentuneena kysyen:

”Eikö sedällä olekaan mitään hätää?” Äiti pyöritti päätään ja rutisti poikaansa lujasti.

”Kenelläkään ei ole mitään hätää!” hän varmisti ja suukotti taas lastaan.

Poliisit saapuivat asemalle vaihtelevin mielialoin. Kuinka kukaan ei ollut huomannut, että repaleinen paperi oli oikeasti ollut vain harmiton kirje? Ennen lähtöään pojan luota, he olivat

neuvoneet, että seuraavan kerran, kun pojalla olisi ongelma, hänen pitäisi tulla reippaasti puhumaan suoraan poliiseille. Kyllä he aivan varmasti auttaisivat joka tapauksessa. Poika oli myös yrittänyt palauttaa Hedelmälle teippirullaa, mutta Hedelmä oli päättänyt, että se toisi paljon enemmän iloa pienelle pojalle.

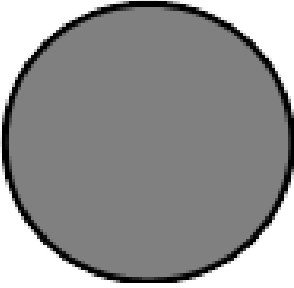
”Loppu hyvin, kaikki hyvin”, totesi Mango istuutuessaan kahvikupin ääreen ja naurahti. Muutkin poliisit saapuivat keittiöön, istuivat huokaisten kahvikuppien äärelle ja yhtyivät Mangon helpottuneeseen nauruun.

3. TEHTÄVÄT

MONISTE 1

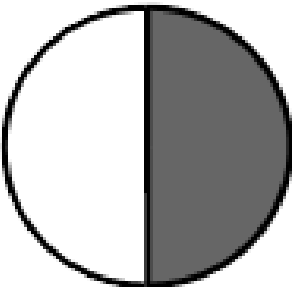
 MUISTIKIRJA, KAPPALE 1

Tarkastele eväänä jaettavaa appelsiinia. Kuinka nimeäisit kuvat luonnollisella kielellä? Entä symbolikielellä? Tutki Merkitysten kakut -vihkon avulla.



Luonnollisella kielellä: _____

Symbolikielellä: _____



Luonnollisella kielellä: _____

Symbolikielellä: _____

Tutki Merkitysten kakut -vihkoa ja yritä muodostaa sama kuva kuin yläpuolella. Vastaa kysymyksiin.

Mitä sivua käytit? _____

Mitä osakiekkoa käytit? _____

Löydätkö Merkitysten kakut -kirjasta symbolikielen merkinnän? Mistä?

Kumpi on suurempi? Kokeile Merkitysten kakut -vihkon avulla ja piirrä oikea merkki.

$$1 \text{ — } \frac{1}{2}$$

Nimeä murtoluvun osat.

1	
2	

Kolme poliisia jakaa yhden pitsan kolmeen yhtä suureen osaan. Kuinka paljon syötävää yhdelle poliisille jää? Käytä apunasi Merkitysten kakut -kirjaa.

Piirrä ja kirjoita, kuinka ratkaisit pitsatehtävän ystäväsi kanssa.

Kuinka suuri osa pitsasta jää Hedelmälle?

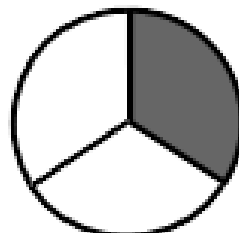
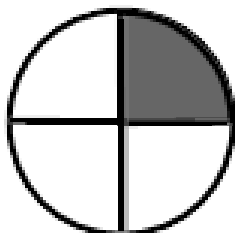
Symbolikielellä: _____

Kerro jokin mielenkiintoinen oma huomiosi murtoluvuista!

MONISTE 2A

 MUISTIKIRJA, KAPPALE 2

Kuinka nimeäisit seuraavat kuvat luonnollisella kielellä? Entä symbolikielellä?



Luonnollinen kieli:

Luonnollinen kieli:

Symbolikieli:

Symbolikieli:

Miksi?

Mikä on nimittäjän tehtävä murtoluvussa?

Mikä on osoittajan tehtävä murtoluvussa?

Poliisiasemalle saapuu lisää väkeä! Hedelmä tietää kuinka suuren osan saa missäkin tilanteessa, mutta kuinka suuri pala on? Piirrä symbolikielen mukaiset kuvat pitsaista.

1

6

1

8

1

5

1

7

Rakenna tilanteet Merkitysten kakut -materiaalin avulla ja vastaa kysymyksiin!

Mikä paloista on suurin? _____

Mikä paloista on pienin? _____

Montako pitsaa jokaisessa tilanteessa on? _____

Mitä osakiekkko sinulle kertoo? Mikä se on?

Mitä pitsan palan koolle tapahtuu, jos pitsa joudutaan jakamaan useamman henkilön kanssa? Miksi?

MONISTE 2B

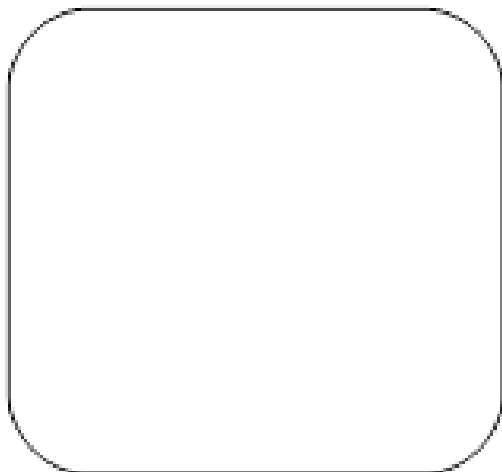
MUISTIKIRJA, KAPPALE 3

Tutki nimittäjäkiekkoa ja siihen kiinnitettyä osoitinta. Aseta kalvo nimittäjää vastaavan sivun päälle. Mitä huomaat?

Miksi kiekon nimi on nimittäjäkiekko?

Mitä voit tehdä osoittimella ja mitä se sinulle näyttää?

Käytä hyväksesi yllä olevaa tietoa ja mieti, kuinka muodostaisit kaksi neljäsosaa (2/4) nimittäjäkiekon avulla. Piirrä kuva ja kerro!



Ota Merkitysten kakut -vihkosta esiin osakiekkko 2 ja vertaa sitä nimittäjäkiekon neljäsosiin. Mitä huomaat?

MONISTE 3

MUISTIKIRJA, KAPPALE 3**Karttatehtävä**

Kartan palaset:

Sokeri:	Hedelmä:	Mango:	Päärynä:
<u>1</u>	<u>1</u>	<u>1</u>	<u>1</u>
2	4	8	8

Piirrä ratkaisu tehtävään ja perustele. Onko poliiseilla yhteensä hallussaan koko kartta?



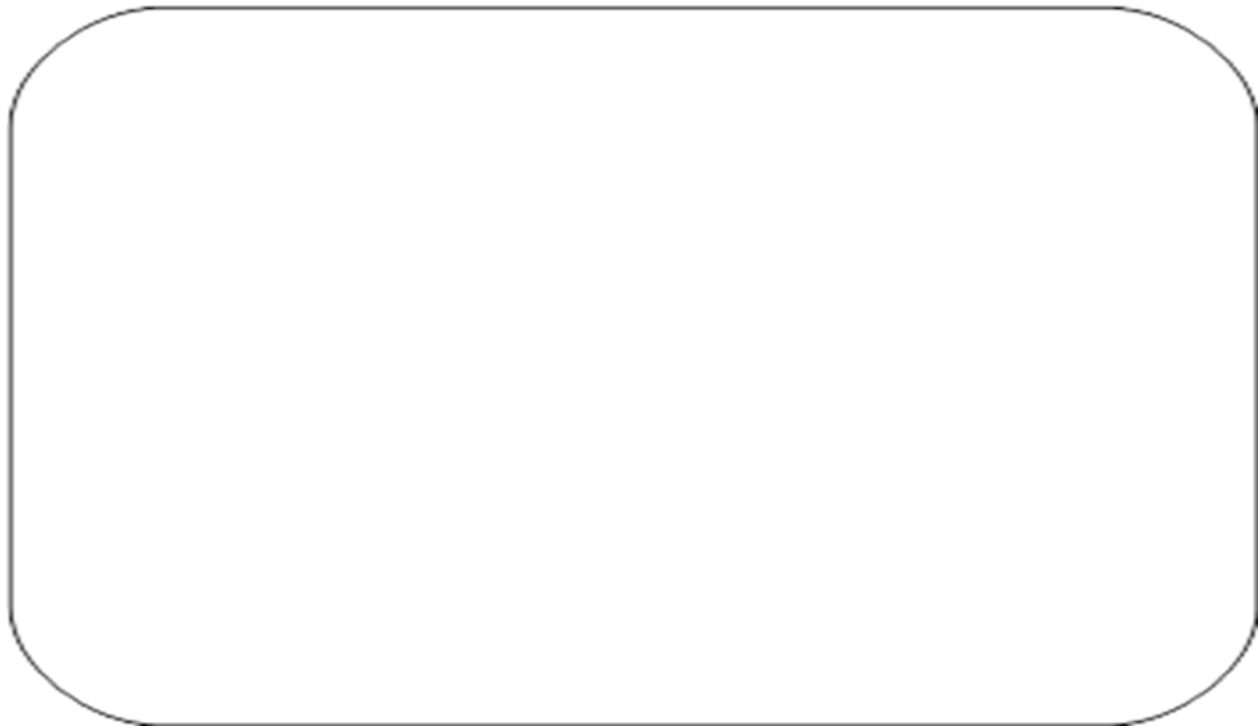
Millaisen laskun voisitte tehdä tilanteesta?

Kenellä on suurin pala paperia?

Entä kenellä pienin?

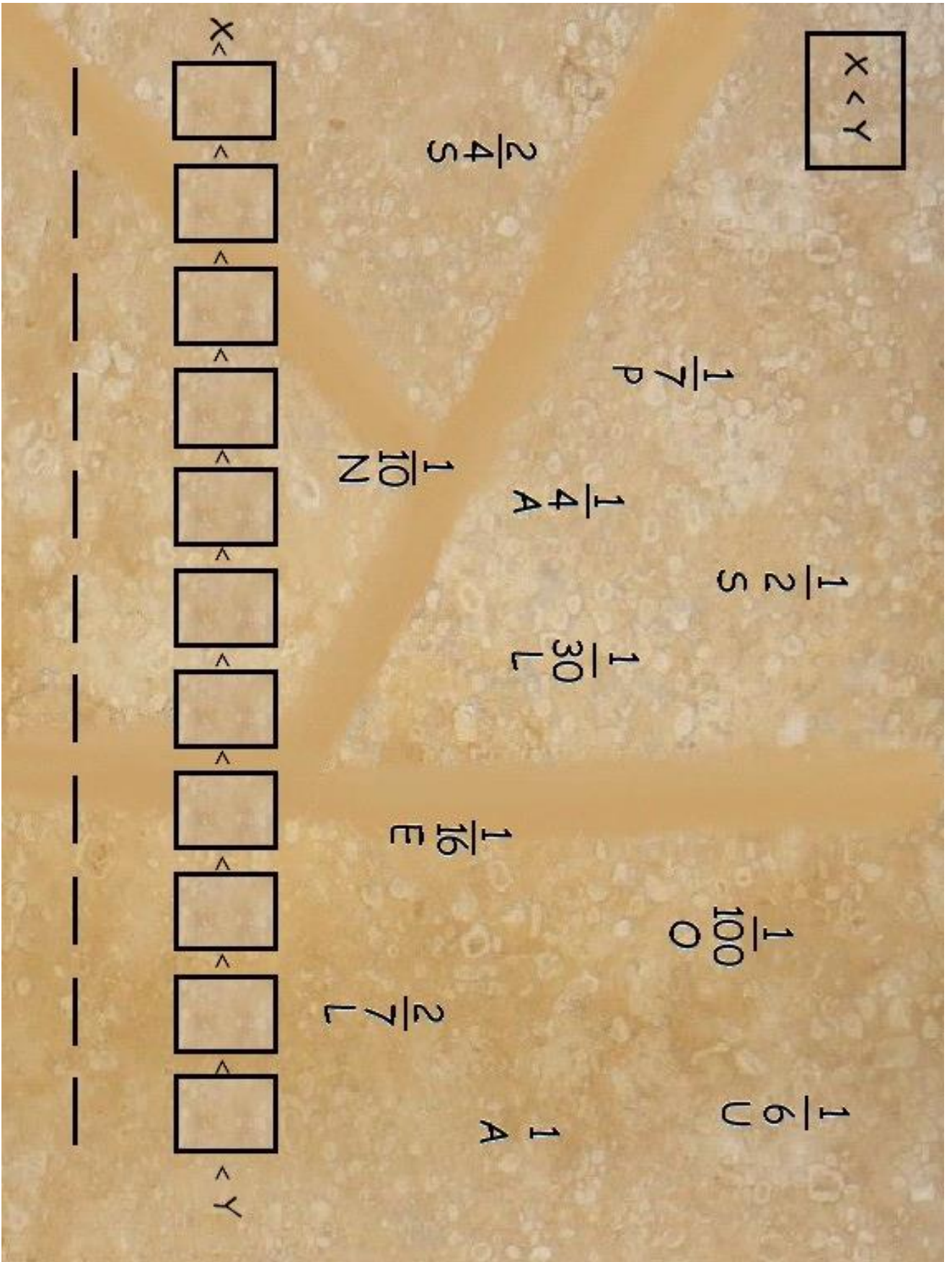
Kuinka voisit ilmaista ensin kuviokielellä ja sitten symbolikielellä, kuinka paljon Mangolla ja Päärynällä on paperia yhteensä?

Kuviokielellä:



Symbolikielellä (luvuin):

MONISTE 4A



MONISTE 4B

 MUISTIKIRJA, KAPPALE 4

1. Valitse jokin väri. Arvaa, kumpi murtoluvuista on suurempi ja ympyröi se.
2. Tarkista tehtävä Merkitysten kakut -vihkon avulla ja merkitse eri värillä suurempi luku.

Jätä molemmat vastaukset näkyviin!

$$\frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{2}$$

$$\frac{2}{5}$$

$$\frac{1}{4}$$

$$\frac{2}{4}$$

$$\frac{3}{4}$$

$$\frac{1}{4}$$

$$\frac{3}{5}$$

$$\frac{3}{4}$$

$$\frac{1}{2}$$

$$\frac{2}{5}$$

$$\frac{1}{6}$$

$$\frac{4}{8}$$

$$\frac{1}{10}$$

$$\frac{1}{6}$$

$$\frac{1}{7}$$

$$\frac{8}{9}$$

$$\frac{1}{2}$$

Oma arvaus

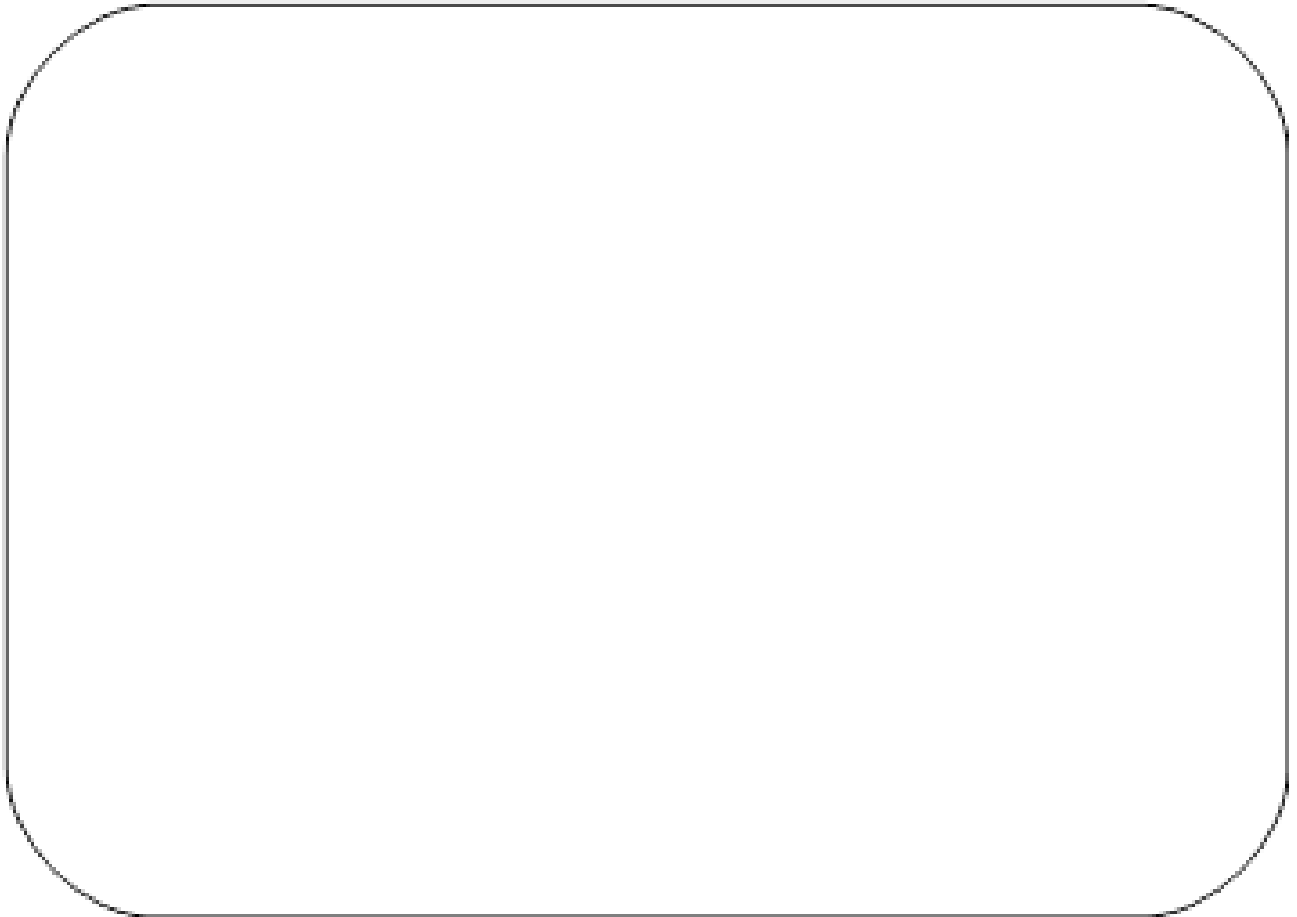
Tarkistettu tulos

Oliko vaikeaa? Miksi arvasit oikein/väärin?

Ratkaise salakirjoitus

Kuinka selvitit, mikä murtoluvuista on suurin? Entä pienin?

Selitä, kuinka osoittaja ja nimittäjä toimivat yhdessä. Kuinka ne määrittävät sen, mikä luvuista on suurin ja mikä pienin?



MONISTE 5

 MUISTIKIRJA, KAPPALE 5
Talojen tutkintaa

Taulukko:

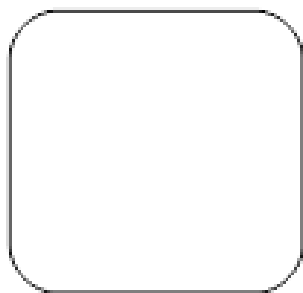
	Sokeri	Hedelmä	Mango	Päärynä
Päivä 1	$\frac{3}{10}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{5}{10}$
Päivä 2	$\frac{6}{10}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{3}{10}$

Sokeri:

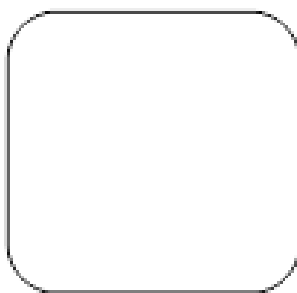
Valitse kaksi väriä ja piirrä Merkitysten kakut -vihkon avulla 1. ja 2. päivä murtolukuina. Piirrä sitten kolmanteen ruutuun ensimmäisenä ja toisena päivänä tutkittujen talojen summa samoja värejä käyttäen.

Kuviokielellä:

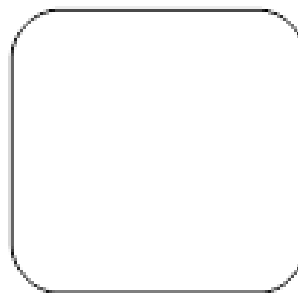
1. päivä:



2. päivä:



summa:



Symbolikielellä:

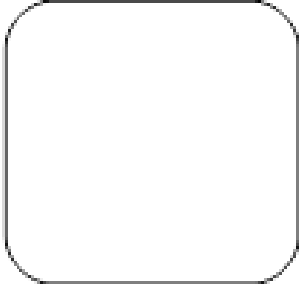
 $\underline{\quad} + \underline{\quad} = \underline{\quad}$

Selvitä esimerkin avulla, kuinka muut poliisit pärjäsivät.

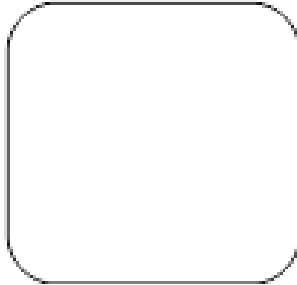
Hedelmä:

Kuviokielellä:

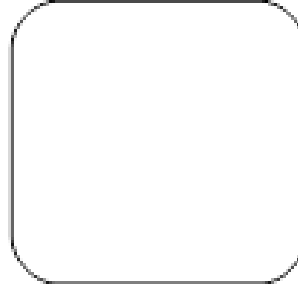
1. päivä:



2. päivä:



summa:



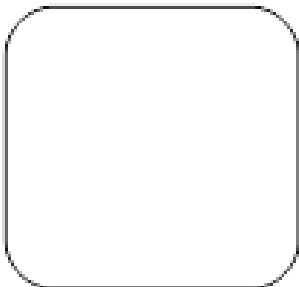
Symbolikielellä:

_____ + _____ = _____

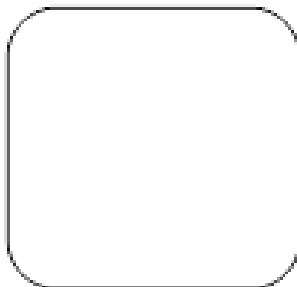
Päärynä:

Kuviokielellä:

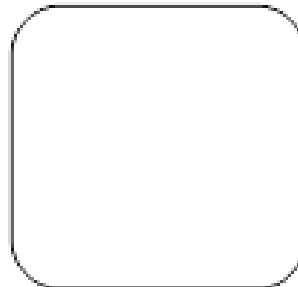
1. päivä:



2. päivä:



summa:



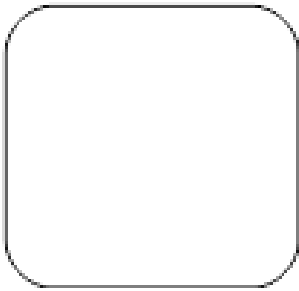
Symbolikielellä:

_____ + _____ = _____

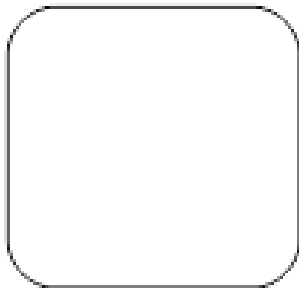
Mango:

Kuviokielellä:

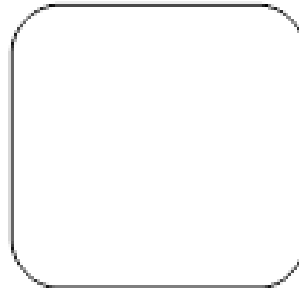
1. päivä:



2. päivä:



summa:



Symbolikielellä:

_____ + _____ = _____

Kirjoita Sokerille ohjeet siitä, kuinka murtolukuja lasketaan yhteen. Anna esimerkki.

MONISTE 6

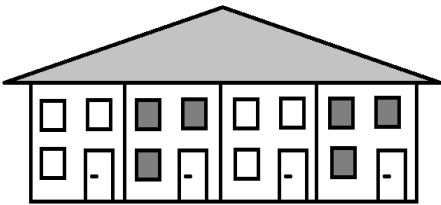
 MUISTIKIRJA, KAPPALE 6
Lisää taloja!

Kuinka voisit merkitä kokonaista symbolikielen ja murtolukujen avulla?

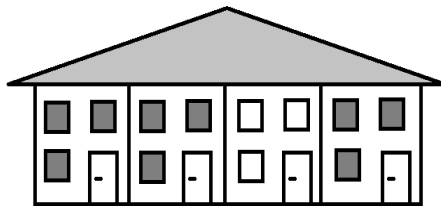
Miksi?

Auta Hedelmää selvittämään tutkittavien asuntojen määrää. Tummat ikkunat merkitsevät asumatonta asuntoa.

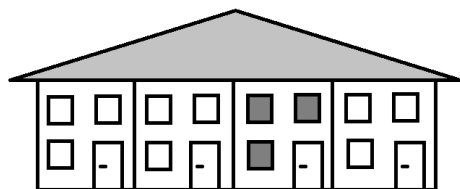
Käytä apunasi Merkitysten kakut -vihkoa ja laske vähennyslaskun avulla.



Lasku: _____



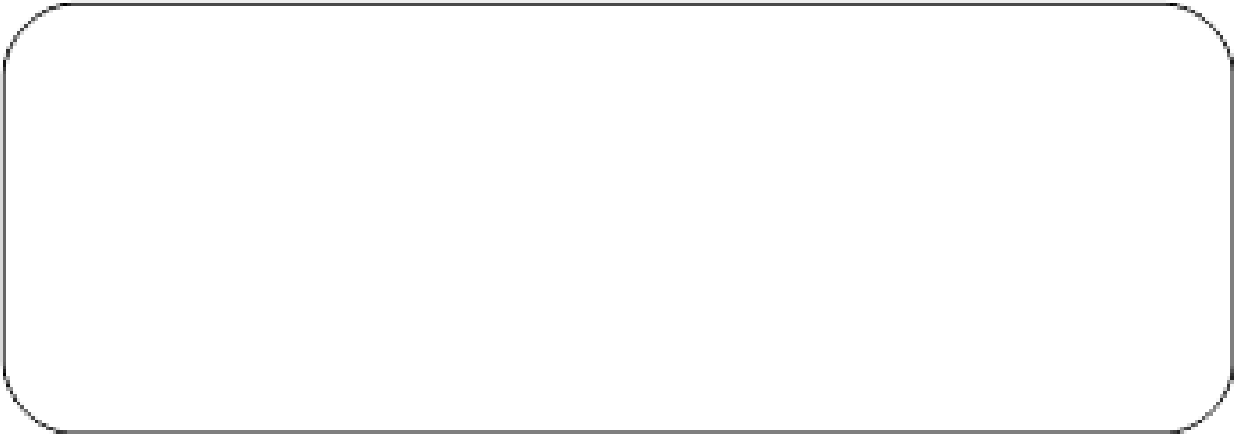
Lasku: _____



Lasku: _____

Kuinka suuri osa kaikista kahdestatoista asunnosta Hedelmän täytyy tutkia?

Muodosta haluamasi rivitalolasku Merkitysten kakut -vihkon ja puutikkujen avulla ja piirrä siitä kuva.



Kirjoita ohjeet murtolukujen vähennyslaskulle. Anna myös esimerkki.

MONISTE 7

 MUISTIKIRJA, KAPPALE X
Pähkinä purtavaksi!

Tarkastele Sokerin muistiinpanoja. Mitä hän on laskenut?

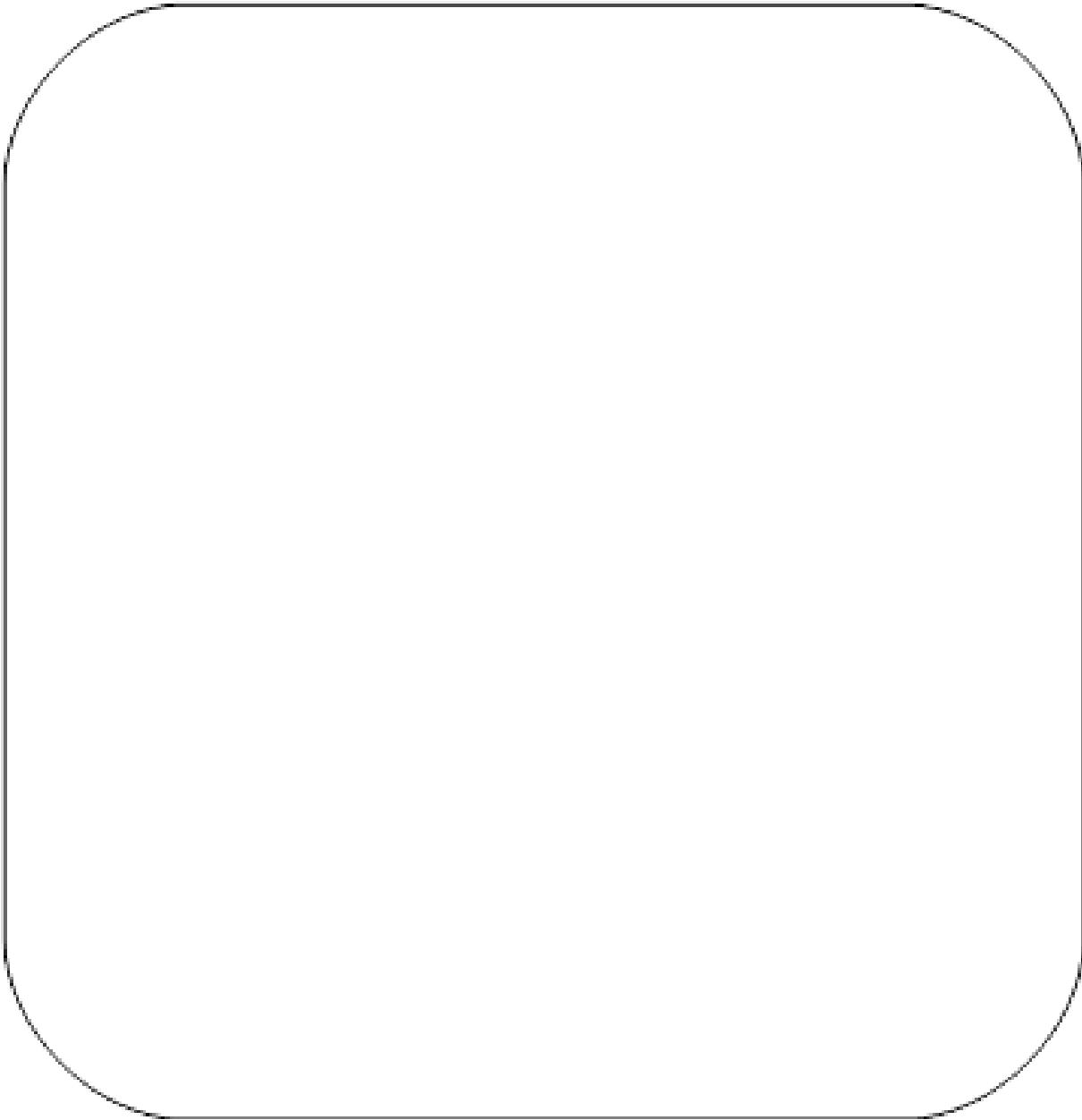
	Sokeri	Hedelmä	Mango	Päärynä
Tutkittu	9	10	6	8
Tutkimatta	1	0	4	2

Mitä Sokeri on laskenut?

$$\frac{9}{40} + \frac{10}{40} + \frac{6}{40} + \frac{8}{40} = \frac{31}{40}$$

$$\frac{40}{40} - \frac{31}{40} = \frac{9}{40}$$

Tarkista Sokerin laskut Merkitysten kakut -viikon avulla. Piirrä kuva.



Onko Sokeri laskenut oikein? Korjaa mahdolliset virheet.

LISÄTEHTÄVIÄ

MUISTIKIRJA, KAPPALE X

Keksi tilanne, jossa seitsemäsosat ovat suurempia kuin kuudesosat. Piirrä ja kirjoita.



Keksitkö tilanteen, jossa puolikas on pienempi kuin yksi kolmasosa? Pohdi parin kanssa! Piirrä ja kirjoita vastaus.

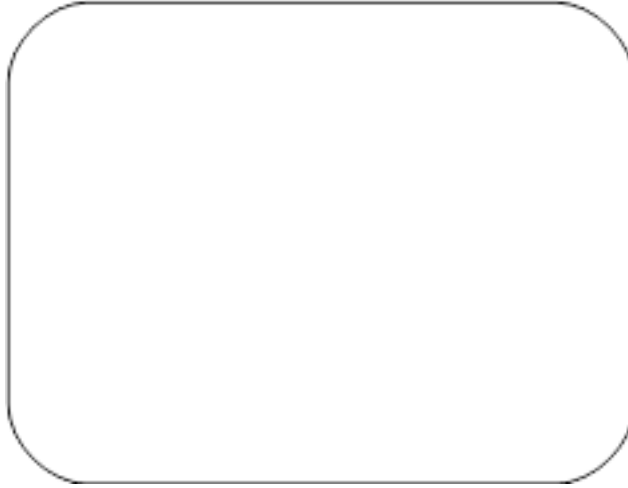


Kokonainen

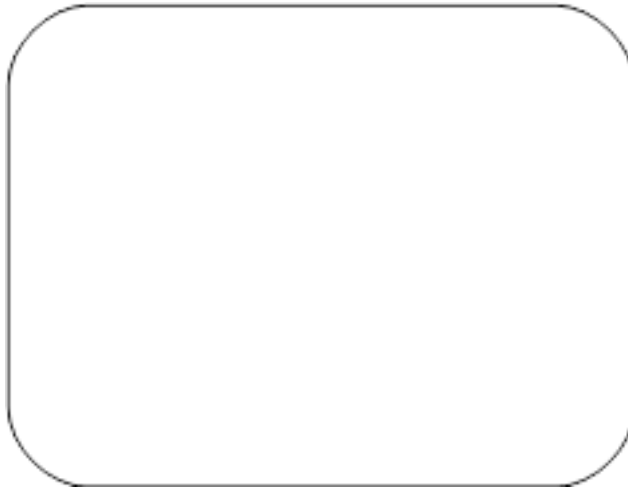
Tutki Merkitysten kakut -vihkon avulla murtolukujen välisiä yhteyksiä.

Piirrä ja kirjoita vastaus.

$$\frac{1}{4} = \frac{\quad}{8}$$



$$\frac{1}{2} = \frac{\quad}{8}$$

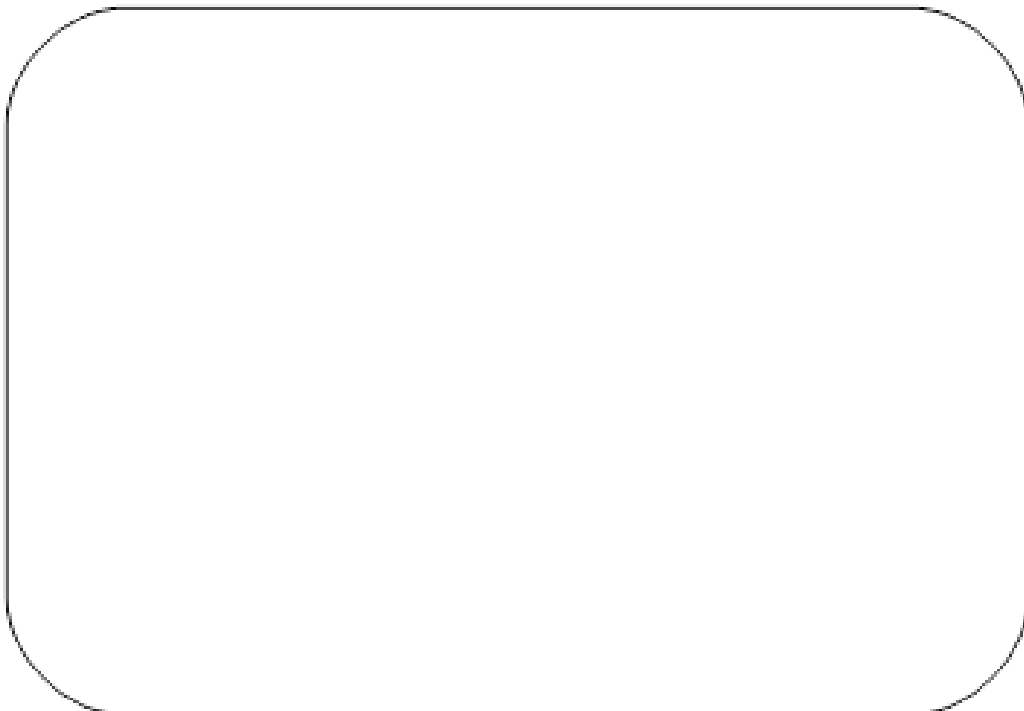


Täydennä aiemmin oppimasi perusteella.

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}$$

Laske kahdeksasosalasku.

Kuinka saisit merkittyä tuloksen mahdollisimman yksinkertaisesti? Miksi? Piirrä ja kirjoita.



Sarjoja

Täydennä sarja Merkitysten kakut -vihkon avulla. Piirrä murtoluvut.

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, ?, \frac{5}{10}, \dots$$



Mitä huomaat? Selitä, miksi.
