TAMPEREEN YLIOPISTO
Pro gradu -tutkielma

Kari Lammi

Opintomoniste logiikan ja joukko-opin perusteista

Luonnontieteiden tiedekunta
Matematiikka
Toukokuu 2018

Tampereen yliopisto
Luonnontieteiden tiedekunta
LAMMI, KARI: Opintomoniste logiikan ja joukko-opin perusteista
Pro Gradu -tutkielma, 62 s.
Matematiikka
Toukokuu 2018

Tiivistelmä

Tämä tutkielma on kirjoitettu opintomonisteeksi lukion valinnaiselle kurssille niille oppilaille, joita kiinnostavat matematiikan perusteet. Matemaattinen logiikka ja joukko-oppi on karsittu lähes kokonaan lukion matematiikasta joskin ne ovat niin perustavanlaatuisia matematiikan osa-alueita, että kaikilta logiikan ja joukko-opin merkinnöiltä ei voida koskaan välttyä. Logiikka ja joukko-oppi luovat yhdessä matematiikan perustan, joten niiden opiskelu ei periaatteessa vaadi pohjatietoja; vain hieman abstraktia ajattelutaitoa. Näin ollen kurssilla voi olla mukana oppilaita, jotka ovat muissa matematiikan opinnoissa keskenään eri vaiheissa.

Tässä (opinto)monisteessa tutustutaan ensin lause- ja predikaattilogiikan perusteisiin. Lauselogiikasta käydään läpi muunmuassa loogiset operaattorit eli konnektiivit ja tutkitaan niiden avulla muodostettujen lauselogiikan kaavojen totuusarvoja totuustaulujen avulla. Jokainen lauselogiikan kaava on aina joko tosi tai epätosi. Jos kaava on tosi jokaisessa mahdollisessa ”tapauksessa”, se on tautologia. Myös tätä voidaan tarkastella totuustaululla. Sekä lause- että predikaattilogiikan aksioomat esitellään, minkä jälkeen molemmista logiikan osa-alueista on erikseen tehtäviä.

Joukko-oppia tarkastellaan ensin naiivista näkökulmasta, jolloin joukko-opin peruskäsitteet on helpompi hahmottaa. Kun naiivin joukko-opin tehtävät on tehty, siirrytään aksiomaattisen joukko-opin puolelle, jossa kaikki tarkasteltavat oliot ovat joukkoja. Joukko-opin ZFC-aksioomajärjestelmä käydään suhteellisen perusteellisesti läpi. Tämän jälkeen tutustutaan joukkoalgebrallisia tilanteita havainnollistaviin Venn-diagrammeihin sekä muunmuassa funktion ja luonnollisten lukujen joukko-opillisiin määritelmiin. Pohditaan myös miten joukkojen kokoja voidaan verrata keskenään. Lopuksi myös aksiomaattisesta joukko-opista on kappaleen lopussa annettu tehtäviä.

Tärkeimpänä lähteenä logiikan osuudesssa on käytetty Mendelsonin kirjaa *Introduction to mathematical logic* [7] ja joukko-opin osuudessa Endertonin kirjaa *Elements of set theory* [2].

Sisältö

1 Johdanto

1960- ja 70-luvuilla Suomessakin opiskeltiin niin kutsuttua *Uutta matematiikkaa*, jossa jo peruskoulun alussa koululaisille opetettiin joukko-oppia [20]. Joukko-opin käsitteiden avulla opetettiin luvut ja niillä suoritettavat laskutoimitukset. Joukko-opista opetuksen alkuvaiheessa kuitenkin luovuttiin ympäri maailman runsaan kritiikin seurauksena.

Tänä päivänä lukion opetussuunnitelmassa ei ole mainittu sanallakaan joukko-oppia [8]. Lukuteoria ja todistaminen (MAA11) -kurssin keskeisiin sisältöihin on sentään mahdutettu lauselogiikan perusteista konnektiivit ja totuusarvot. Kyseisen kurssin tavoitteisiin onkin kirjattu, että ”opiskelija perehtyy logiikan alkeisiin ja tutustuu todistusperiaatteisiin sekä harjoittelee todistamista”. Alla on listattuna muita suoria lainauksia opetussuunnitelmasta liittyen matematiikan opiskelun yleisiin tavoitteisiin:

- tutustuttaa opiskelija matemaattisen ajattelun malleihin sekä matematiikan perusideoihin ja rakenteisiin

- tuetaan opiskelijan taitoa siirtyä toisesta matemaattisen tiedon esitysmuodosta toiseen

- oppia ymmärtämään matemaattisen tiedon luonnetta

- oppii näkemään matemaattisen tiedon loogisena rakenteena

Monia näistä tavoitteista tukisi logiikan ja joukko-opin perusteiden opettaminen. Tosin syvällisempi tarkastelu on toki syytä jättää yliopistokursseille. Lisäksi matematiikan lyhyen oppimäärän opetuksen tavoitteisiin on kirjattu, että ”opiskelija kehittää käsitystään matemaattisen tiedon luonteesta ja sen loogisesta rakenteesta”. Lyhyen oppimäärän kurssisisällöissä ei ole kuitenkaan ainuttakaan viittausta logiikan aihealueisiin, mikä tuntuu jopa hieman ristiriitaiselta.

Tämän opintomonisteeksi kirjoitetun tutkielman tarkoitus on yrittää vastata lukion opetussuunnitelman tavoitteisiin ja lisätä opiskelijan ymmärrystä matematiikan moninaisuudesta. Logiikan ja joukko-opin opiskelun aloittaminen ei käytännössä vaadi esitietoja. Näin ollen varsin nuorikin matematiikasta kiinnostunut voi lukea ja ymmärtää tämän opintomonisteen sisällön.

Koska joukko-opissa on vahvasti esillä predikaattilogiikan merkinnät, on logiikan osuus esitetty ennen joukko-oppia. Joskin myös logiikan tarkasteluissa on ollut kätevää olettaa tunnetuiksi joitain joukkoja ja joukko-opillisia merkintöjä. Sekä logiikka että joukko-oppi voidaan aksiomatisoida usealla eri tavalla. Aksioomista voidaan johtaa matemaattisia tuloksia. Useita eri lyhennysmerkintöjä otetaan käyttöön kirjoittamisen selkeyttämiseksi ja nopeuttamiseksi.

Opintomoniste on jaettu karkeasti neljään osaan: lauselogiikkaan, predikaattilogiikkaan, naiiviin joukko-oppiin ja aksiomaattiseen joukko-oppiin. Kunkin näistä lopussa on tehtäviä, joiden tekeminen on asian ymmärtämisen ja oppimisen kannalta erittäin tärkeää kuten matematiikassa muutoinkin. Logiikan osuus on ammennettu hyvin kattavasta Mendelsonin kirjasta [7], joka paikoitellen on turhankin perinpohjainen, joten joitain yksinkertaisempia merkintätapoja on lainattu Rantalan ja Virtasen monisteesta [9] sekä Rosenilta [11]. Joukko-opin osuus on kirjoitettu Endertonin niin ikään varsin kattavan kirjan *Elements of set theory* [2] pohjalta, joskin sieltä on poimittu vain oleellisimmat asiat, jotka nekin on parhaan mukaan tiivistetty.

2 Logiikka

"The more you know, the more you know you don't know."
- Aristoteles [1]

Siitä mitä logiikka on ja mitä kaikkea siihen kuuluu, ei ole olemassa tarkkaa sopimusta, mutta yleensä sen sanotaan olevan tiede, joka tutkii *päätelmiä* eli argumentteja. Päätelmässä on vähintään yksi *premissi* (lähtökohta, peruste, ehto) eli oletus, josta päätellään sovittujen *päättelysääntöjen* avulla *johtopäätös*. Logiikka tutkii mm. sitä, miten voidaan erottaa pätevät päätelmät epäpätevistä.

Intiassa, Kiinassa ja Kreikassa logiikkaa tutkittiin jo antiikin aikaan filosofiassa (filosofinen logiikka) sekä matematiikassa eritoten Aristoteleen toimesta (Aristotelinen logiikka) [14]. Hänen teoriallaan *syllogismista* oli merkittävä vaikutus länsimaiseen ajatteluun. Syllogismi on päätelmä, jossa premisseistä johdetaan *deduktiivisen päättelyn* avulla loogisesti seuraava johtopäätös [19]. Deduktiivinen päättely on puolestaan päättelytapa, jossa tosista premisseistä seuraa välttämättä tosi johtopäätös. Eräs klassinen esimerkki on ottaa premisseiksi ”Kaikki ihmiset ovat kuolevaisia” ja ”Sokrates on ihminen”, joista voidaan tehdä johtopäätös ”Sokrates on kuolevainen”. Deduktiivisen päättelyn sanotaankin olevan päättelyä yleisestä yksityiseen eikä se näin ollen lisää tietoa, koska johtopäätös sisältyy jo premisseihin, joskin piilotettuna. Aristoteleen vaikutuksesta logiikkaan kertoo esimerkiksi se, että hänen kokoelmansa Organon, joka sisältää kuusi teosta logiikan (ja metodiikan) kirjoituksia, oli käytössä kouluissa vielä 1800-luvulla [16].

Logiikan menetelmät ovat pääosin matemaattisia ja usein *formaalimpia* (muodollisempia, kaavamaisempia) kuin muussa matematiikassa. Matematiikan sanotaan olevan fysiikan työkalu tai kieli. Samassa mielessä logiikkaa käytetään matematiikan työkaluna tutkimaan ja analysoimaan matematiikan käsitteitä ja perusteita. Tällaista logiikkaa kutsutaan *matemaattiseksi logiikaksi* [9]. Menetelmien ollessa formaaleja logiikkaa kutsutaan *formaaliksi* tai *symboliseksi*. Matemaattisen logiikan menetelmät ovat usein formaaleja.

Muun muassa paradoksien löytäminen ja halu rakentaa matematiikalle vankka pohja vauhditti matemaattisen logiikan kehitystä 1800-luvun loppupuolella. Aristotelinen logiikka jäi evoluution jalkoihin. Matemaattisen logiikan katsotaan usein karkeasti koostuvan joukko-opista, laskettavuuden teoriasta sekä malli- ja todistusteoriasta [15], joskin näkemys on jo nykyään hieman vanhahtava. Laskettavuuden teoria on tietojenkäsittelytieteen logiikkaa, joka syntyi Alan Turingin töiden myötä 1900-luvun alkupuolella. Laskettavuuden teoriaan ei tutustuta tässä monisteessa.

Toisin kuin keinotekoinen ja ilmauksiltaan täsmällinen *formaali kieli* on *luonnollinen kieli* luonnollisesti opittu joustavampi kieli, jolla ihmiset kommunikoivat keskenään. Suomen ja englannin kieli ovat esimerkkejä luonnollisista kielistä. Luonnollisen kielen ilmaisut saattavat olla epätäsmällisiä tai monimerkityksellisiä kuten sana ”tai’. Lause ”saat palkinnoksi 10 euroa tai leffalipun” antaa ymmärtää että saat valita jommankumman, mutta et molempia, kun taas lauseeseen ”oletko nähnyt tai kuullut mitään" voi vastata myöntävästi vaikka olisi sekä nähnyt että kuullut. Täten logiikkaa tutkittaessa sen kieleksi täytyy määrittää jokin formaalinen kieli. Kieltä, jota tarkastellaan, kutsutaan *objektikieleksi* ja kieltä, jolla tarkastellaan objektikieltä, kutsutaan *metakieleksi*. Tilannetta voi verrata englannin kielen tuntiin, jossa tarkasteltava objektikieli on englannin kieli, mutta kieli, jolla sitä opiskellaan on suomen kieli.

Logiikassa tutkitaan usein erilaisten kielien *lauseita* eli väittämiä ja niiden totuutta eli paikkansapitävyyttä jossain *maailmassa* eli tilanteessa. Tällöin puhutaan logiikan *semanttisesta* puolesta (semantiikka eli merkitysoppi). Kielen *syntaktinen* puoli tulee vastaavasti esille tarkasteltaessa kielen merkkiyhdistelmiä eli yleensä lauseita. Esimerkiksi suomen kielen lause "Värittömän makuiset pannut ovat koiria" on syntaktisesti oikein kirjoitettu eli kieliopillisesti oikein, mutta lause on semanttisesti mieletön. Toisaalta formaalin kielen kaavoilla on aina myös jokin semanttinen merkitys.

Lause "Tarja Halonen on Suomen istuva presidentti" on epätosi maailmassa, jossa nyt elämme, mutta tosi maailmassa, jossa on vuosi 2010. Jos jokin lause B on tosi kaikissa mahdollisissa maailmoissa, sanotaan sen olevan modaalilogiikassa *välttämättä tosi*. Tätä merkitään $\Box B$ [10]. Jos lause on tosi jossain maailmassa, sanotaan sitä *mahdollisesti todeksi* ja merkitään $\Diamond B$. Modaalilogiikka tutkiikin välttämättömyyden ja mahdollisuuden loogisia ominaisuuksia. Sumeassa logiikassa lauseen ei tarvitse olla tarkasteltavassa maailmassa aina tosi (1) tai epätosi (0) vaan se voi saada minkä tahansa reaalilukuarvon välillä [0, 1] [13]. Modaalilogiikka ja sumea logiikka ovat esimerkkejä formaaleista logiikoista, joihin ei tosin tässä monisteessa paneuduta syvemmälle. Yleisimmät formaalit logiikat ovat lauselogiikka ja predikaattilogiikka, joihin tutustutaan seuraavaksi tarkemmin.

2.1 Lauselogiikka

Propositiologiikka eli *lauselogiikka* tutkii *loogisia konnektiiveja* ja niiden avulla muodostettujen lauseiden syntaktisia ja semanttisia ominaisuuksia kuten *totuusarvoja* sekä lauseiden formaalia päättelyä. Lauselogiikassa kaikilla lauseilla on totuusarvo 1 = "tosi" tai 0 = "epätosi". Jokaiseen konnektiiviin liittyy sitä vastaava *totuusfunktio*, joka liittää jokaiseen lauseeseen totuusarvon 1 tai 0. Jokaiseen tässä monisteessa esiteltävään konnektiiviin liittyy 2-paikkainen totuusfunktio yhtä 1-paikkaista totuusfunktiota lukuunottamatta. Jokaista konnektiivia vastaa yksikäsitteinen *totuustaulu(kko)*, joten jokainen konnektiivi voidaan määritellä totuustaulun avulla. Kun kahdelle lauselogiikan lauseelle A ja B merkitään totuustauluun kaikki neljä mahdollista totuusarvokombinaatiota, saadaan kaikkien mahdollisten kaksipaikkaisten totuusfunktioiden lukumääräksi $2^4 = 16$. Nämä totuusfunktiot $a, b \dots p$ ovat listattuna seuraavassa totuustaulussa [5].

Kaikki mahdolliset 2-paikkaiset totuusfunktiot

A	B	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o	p
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	**1**	0	0
0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0

Esimerkiksi n-sarakkeessa tummennettu totuusfunktion n arvo on $n(0, 1) = 1$. Näistä kuudestatoista 2-paikkaisesta konnektiivista yleisimmät 4 esitellään tässä monisteessa.

Loogiset konnektiivit määritellään yksikäsitteisesti joko totuustaulujen tai toisten konnektiivien avulla. Lauselogiikan semanttinen puoli tulee selkeimmin esiin siinä, että yleisimmät käytössä olevat konnektiivit on valittu siten, että ne vastaavat hyvin luonnollisen kielen ilmaisuja kuten ”ei (ole niin, että)”, ”tai”, ”ja” sekä ”jos...niin”.

Tämän luvun tarkasteltava lauselogiikka on *klassista*, koska kaikki tarkasteltavat lauseet eli kaavat ovat vain joko tosia tai epätosia. Konnektiiveille on siis mahdollista määritellä myös klassisesta lauselogiikasta eriäviä syntaktisia tai semanttisia merkityksiä, jolloin päädytään erilaisiin lauselogiikkoihin. Koska sekaantumisen vaaraa ei tule, käytetään muun muassa lyhennettyjä nimityksiä ”lauselogiikka” ja ”konnektiivi”. Lisäksi sanoja ”lause” ja ”kaava” käytetään samasta asiasta, mutta edellistä pyritään käyttämään syntaktisissa yhteyksissä ja jälkimmäistä semanttisissa tarkasteluissa. Esimerkiksi lause ”jos ulkona sataa, en mene ulos” voitaisiin formalisoida lauselogiikan kaavaksi $A \to \neg B$, jossa $A =$ ”ulkona sataa” ja $B =$ ”menen ulos”.

2.1.1 Lauselogiikan syntaksi

Jotta logiikka olisi täsmällistä tiedettä, kaikki siihen kuuluvat käsitteet täytyy määritellä alusta alkaen täsmällisesti ja yksikäsitteisesti. Formalisoidaan seuraavaksi lauselogiikan syntaksi.

Aakkostoon kuuluvat seuraavat *perussymbolit*:

Propositiosymbolit	$p_1, p_2, p_3 \ldots$
Peruskonnektiivit[1]	$\neg, \to$
Sulut	$($, $)$

Lauselogiikan kirjoittamiseen ei tarvita muita symboleita kuin perussymbolit. Toisin sanoen kaikki lauselogiikan *propositiolauseet* eli *kaavat* voidaan muodostaa käyttäen pelkästään objektikielen perussymboleita. Koska kaavoista tulisi kuitenkin pitkiä ja vaikeaselkoisia, on sovittu useista metakielen lyhennysmerkinnöistä. Propositiosymboleita on ääretön määrä. Koska tämän monisteen tarkasteluissa ei tarvita samanaikaisesti kovin montaa propositiosymbolia, voidaan sopia, että niihin viitataan pienillä kirjaimilla p, q, r ja niin edelleen. Viitataan isoilla kirjaimilla $A, B, C \ldots$

[1]Peruskonnektiiveiksi eli primitiivikonnektiiveiksi olisi voitu valita myös erilainen konnektiivien joukko; jopa yksittäinen konnektiivi. Katso harjoitustehtävät 3 ja 4.

kaavoihin. Peruskonnektiivit ja sulut viittaavat itseensä. Peruskonnektiivien avulla voidaan määritellä kaikki muut loogiset konnektiivit. Yleisimmät käytössä olevat konnektiivit ovat

$\neg$ negaatio,

$\wedge$ konjunktio,

$\vee$ disjunktio,

$\rightarrow$ implikaatio sekä

$\leftrightarrow$ ekvivalenssi,

joiden merkitys aukeaa paremmin seuraavassa luvussa, jossa ne määritellään totuustaulujen avulla.

Sanoja ”lause” ja ”kaava” on käytetty jo useasti ilman tarkkaa määritelmää. Nyt kun lauselogiikan aakkosto on esitelty, voidaan kaava määritellä rekursiivisesti.

Määritelmä 2.1. Kaikki lauselogiikan *kaavat* saadaan muodostettua seuraavien kaavanmuodostussääntöjen avulla:

1. Propositiosymbolit $p_1, p_2, p_3 \dots$ ovat kaavoja.
2. Jos A on kaava, niin $\neg A$ on kaava.
3. Jos A ja B ovat kaavoja, niin $(A \rightarrow B)$ on kaava.
4. Muita kaavoja ei ole.

Propositiosymboleja kutsutaan myös atomilauseiksi tai atomikaavoiksi, koska ne ovat lyhimpiä mahdollisia kaavoja.

Esimerkki 2.1.

(a) p_1 on propositiosymbolina kaava.

(b) $\neg p_2$ on kaava säännön 2 nojalla, sillä säännön 1 nojalla p_2 on kaava.

(c) $(p_1 \rightarrow \neg p_2)$ on edellisen kohdan päättelyn sekä säännön 3 nojalla kaava.

(d) $(p_1\neg \rightarrow \neg p_2)$ ei ole kaavanmuodostussääntöjen nojalla kaava. Säännöt eivät salli esimerkiksi konnektiivin $\rightarrow$ olevan välittömästi konnektiivin $\neg$ jälkeen.

Määritellään muut yleiset konnektiivit $\wedge$, $\vee$ ja $\leftrightarrow$ peruskonnektiivien avulla.

Määritelmä 2.2. Olkoot A ja B kaavoja. Tällöin

- $(A \wedge B)$ on lyhennysmerkintä kaavalle $\neg(A \rightarrow \neg B)$,
- $(A \vee B)$ on lyhennysmerkintä kaavalle $(\neg A \rightarrow B)$ ja

- $(A \leftrightarrow B)$ on lyhennysmerkintä kaavalle $((A \to B) \land (B \to A))$, joka on lyhennysmerkintä kaavalle $\neg((A \to B) \to (\neg(B \to A)))$.

Kaavan merkintöjä saadaan lyhennettyä myös ylimääräisiä sulkuja poistamalla. Tämä edellyttää kuitenkin tietyn laskujärjestyksen sopimista:

1. Negaatiolla on suppein *vaikutusala*.

2. Konjunktiolla ja disjunktiolla on molemmilla samansuuruinen ja negaatiota laajempi vaikutusala.

3. Implikaatiolla ja ekvivalenssilla on laajin ja keskenään samansuuruinen vaikutusala.

4. Kaavan suluista voidaan jättää pois uloimmat sekä ne, jotka eivät vaikuta edellä esiteltyihin konnektiivien keskinäisiin vaikutusaloihin.

Se konnektiivi, jolla on suppeampi vaikutusala, lasketaan ensin. Mikäli kahdella konnektiivilla on sama vaikutusala, määräävät sulut laskujärjestyksen. Kaavan konnektiivia, joka lasketaan viimeisenä, kutsutaan kaavan *pääkonnektiiviksi*. Esitetty laskujärjestys on analoginen aritmeettisen laskujärjestyksen kanssa, jossa ensin lasketaan potenssilaskut, sitten jako- ja kertolaskut sekä viimeisenä yhteen-ja vähennyslaskut ottaen huomioon myös sulkujen ryhmittelevä vaikutus.

Esimerkki 2.2. Sievennetään seuraavat kaavat.

(a)

$$\begin{aligned}
&(A \leftrightarrow ((\neg B \lor C) \to D)) && \\
A &\leftrightarrow ((\neg B \lor C) \to D) && \| \text{ Uloimpien sulkujen poisto.} \\
A &\leftrightarrow (\neg B \lor C \to D) && \| \text{ Disjunktio lasketaan ennen implikaatiota.} \\
&&& \text{Viimeisiä sulkuja ei voida poistaa, koska} \\
&&& \text{implikaatio ja ekvivalenssi ovat keskenään} \\
&&& \text{samanarvoiset.}
\end{aligned}$$

Kaavan pääkonnektiivi on $\leftrightarrow$.

(b)

$$\begin{aligned}
&(\neg(A \lor B) \to C) && \\
&\neg(A \lor B) \to C && \| \text{ Uloimpien sulkujen poisto. Viimeisiä sulkuja ei voida} \\
&&& \text{poistaa, koska negaatio lasketaan ennen disjunktiota.}
\end{aligned}$$

Kaavan pääkonnektiivi on $\to$.

(c)

$$
\begin{aligned}
(\neg(A \to \neg(\neg B \to C))) & \\
(\neg(A \to \neg(B \vee C))) & \quad \| \text{Disjunktion määritelmä} \\
(A \wedge (B \vee C)) & \quad \| \text{Konjunktion määritelmä} \\
A \wedge (B \vee C) & \quad \| \text{Uloimpien sulkujen poisto. Sisemmät sulut on} \\
& \quad \quad \text{jätettävä, koska konjunktio ja disjunktio ovat keskenään} \\
& \quad \quad \text{samanarvoiset.}
\end{aligned}
$$

Kaavan pääkonnektiivi on $\wedge$.

Vaikka teknisesti ottaen esimerkiksi $A \wedge B$ ei ole määritelmien 2.5 ja 2.2 nojalla kaava vaan metakielen ilmaisu objektikielen kaavalle, olisi $A \wedge B$ mahdollista palauttaa yksikäsitteisesti edellä käytyjen sopimusten avulla objektikielen kaavaksi. Täten metakielen ja objektikielen ilmaisut voidaan samaistaa ongelmitta ja voidaan puhua kaavasta $A \wedge B$.

2.1.2 Konnektiivien totuustaulut

Edellisessä luvussa esiteltiin lauselogiikan syntaksi ja määriteltiin kaavan käsite, mutta mikä on kaavojen ja konnektiivien todellinen merkitys? Lauselogiikassa propositiosymbolit ovat väitelauseita, joiden *totuusarvo* on 1 tai 0. Totuusarvoa 1 kutsutaan *todeksi* ja totuusarvoa 0 *epätodeksi*. Muita totuusarvoja ei (lauselogiikassa) ole. Konnektiivit määritellään totuustaulujen avulla totuusfunktioiksi, jotka liittävät jokaiseen määrittelyjoukkonsa alkioon täsmälleen yhden totuusarvon. Kunkin *yhdistetyn kaavan* totuusarvo määräytyy yksikäsitteisesti sen osakaavojen totuusarvoista siten, että yhdistetyn kaavan totuusarvo on osakaavojensa funktio. Täten jokainen lauselogiikan kaava on joko tosi tai epätosi.

Seuraavaksi käsiteltävistä konnektiiveista *negaatio* on yksinkertaisin. Se kääntää totuusarvon vastakkaiseksi: Jos kaavan A totuusarvo on 1, niin kaavan A negaation totuusarvo on 0 ja päinvastoin. Tämä voidaan visualisoida helposti seuraavalla totuustaululla.

Negaatio

A	$\neg A$
1	0
0	1

Luonnollisessa kielessä, tässä tapauksessa suomen kielessä, $\neg A$ luetaan ”ei A” tai ”ei päde, että A”. Täten, jos luonnollisen kielen väitelauseeseen A = ”ulkona sataa” haluttaisiin soveltaa lauselogiikkaa, $\neg A$ luettaisiin ”ei päde, että ulkona sataa”. Tästä voitaisiin luonnollisen kielen päättelyllä päätellä ”ulkona ei sada”. Huomaa, että puhuttaessa negaatiosta, saatetaan tarkoittaa joko negaatiosymbolia tai koko kaavaa, jonka pääkonnektiivi on negaatio. Asiayhteys ratkaisee kummasta on kyse. Sama pätee kaikille muillekin konnektiiveille.

Kahden kaavan *konjunktio* on tosi, jos ja vain jos molemmat kaavat ovat tosia.

Konjunktio

A	B	$A \wedge B$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Konjunktio luetaan ”ja”, koska se vastaa lähes poikkeuksetta luonnollisen kielen ”ja”-sanan merkitystä. Eräs poikkeus on luonnollisen kielen ”ja”-sanan järjestystä ilmaisevat merkitykset. Esimerkiksi kuulostaisi hassulta sanoa ”aakkosten kaksi ensimmäistä kirjainta ovat b ja a. Logiikan näkökulmasta konjunktiossa kaavojen järjestyksellä ei ole merkitystä.

Kaavojen A ja B *disjunktio* on tosi, jos ja vain jos A on tosi, B on tosi tai A ja B ovat molemmat tosia. Toisinsanoen kaavojen A ja B disjunktio ei pidä paikkaansa vain siinä tapauksessa, että sekä A että B ovat epätosia.

Disjunktio

A	B	$A \vee B$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Disjunktio vastaa luonnollisen kielen inklusiivista ”tai”-sanaa, joka nykyään toisinaan kirjoitetaan täsmällisemmin ”ja/tai”. Kaava $A \vee B$ luetaan kuitenkin ”A tai B”, jolloin lukijan oletetaan tietävän, että kyseessä on inklusiivinen ”tai”; ei eksklusiivinen eli *poissulkeva tai* $\underline{\vee}$, jolla pätee $\underline{\vee}(1, 1) = 0$.

Tarkastellaan kaavojen A ja B välistä *implikaatiota* $A \to B$. Tämä luetaan usein ”A implikoi B:n” tai ”jos A, niin B”, mutta useita muitakin tapoja implikaation lukemiseksi on [11]. Implikaationuolen vasemmalla puolella sijaitsevaa kaavaa kutsutaan yleensä joko implikaation vasemmaksi puoleksi tai etulauseeksi. Vastaavasti implikaationuolen oikealla puolella olevaa kaavaa kutsutaan implikaation oikeaksi puoleksi tai jälkilauseeksi. Implikaatio on epätosi vain silloin kun etulause on tosi ja jälkilause epätosi. Täten jos matematiikassa halutaan selvittää päteekö implikaatio kahden kaavan tai lauseen välillä eli seuraako etulauseesta jälkilause, riittää olettaa etulause (todeksi) ja tutkia seuraako siitä jälkilause.

Implikaatio

A	B	$A \to B$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Implikaation määritelmä saattaa vaikuttaa ensisilmäyksellä oudolta. Nimittäin esimerkiksi seuraavat lauseet ovat sen mukaan tosia.

1. Jos $1 + 1 = 3$, niin Oslo on Norjan pääkaupunki.

2. Jos kolmion kulmien summa on 360°, niin Lontoo on Suomen pääkaupunki.

Epätosista väitteistä voidaan siis johtaa muodollisesti pätevälläkin päättelyllä käytännössä mitä tahansa. Eräs tapa miettiä oikeutusta implikaation totuustaululle on pohtia poliittiseen virkaan ehdolla olevan väitettä ”jos minut valitaan virkaan, ajan heikossa asemasa olevien asioita”. Jos hänet valittiin virkaan, äänestäjät odottavat hänen ajavan heikossa asemassa olevien asioita. Jos häntä ei valittu virkaan, äänestäjillä ei ole mitään odotuksiakaan, joskin henkilö voi silti ajaa muita keinoja käyttäen heikossa asemassa olevien asioita. Vain siinä tapauksessa, että henkilö on valittu ja hän ei aja heikossa asemassa olevien asioita (etulause tosi ja seuraus epätosi), hänen voidaan katsoa rikkoneen vaalilupauksensa.

Lisäksi tuntuisi järjenvastaiselta todistaa lauseita vääräksi olettamalla etulause vääräksi. Esimerkikisi osoittamalla epätodeksi lause

1. ”jos x on pariton, niin x^2 on pariton” olettamalla, että x on parillinen tai

2. ”jos menet ulos, niin kastut” pysymällä sisällä.

Myös *ekvivalenssi* esiintyy esiintyy kahden kaavan välissä. Ekvivalenssi on ”molemminpuolinen implikaatio” eli se kertoo, että vasemmanpuoleisesta kaavasta voidaan päätellä oikeanpuoleinen ja päinvastoin. Siis ekvivalenssin molemmilla puolilla esiintyvät kaavat ovat yhtäpitäviä eli ekvivalentteja eli yhtä tosia (tai epätosia). Täten ekvivalenssi on tosi, jos ja vain jos sen molemmilla puolilla esiintyvät kaavat ovat molemmat joko tosia tai epätosia.

Ekvivalenssi

A	B	$A \leftrightarrow B$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Kaavojen A ja B välisen ekvivalenssin voi lukea muun muassa ”A (pätee), jos ja vain jos B (pätee)” tai ”A jos ja vain jos B” tai ”A ja B ovat ekvivalentit”.

Ilmaukset ”jos. . . , niin. . . ” ja ”. . . , jos ja vain jos. . . ” esiintyvät loogisten implikaatio- ja ekvivalenssikonnektiivien lisäksi hyvin usein matematiikassa metakielen ilmaisuissa. Onkin sovittu, että muissa kuin logiikan objektikielen yhteyksissä, implikaatiota merkitään $\Rightarrow$ ja ekvivalenssia $\Leftrightarrow$. Esimerkiksi jo opitun perusteella voitaisiin todeta ”jos A on epätosi, niin $A \to B$ on tosi”. Sama voitaisiin kirjoittaa hieman lyhyemmin ”A on epätosi $\Rightarrow A \to B$ on tosi”. Tulevassa joukko-opin osuudessa opitaan, että ”joukko A on tyhjä, jos ja vain jos joukossa A ei ole alkioita” eli ”joukko A on tyhjä $\Leftrightarrow$ joukossa A ei ole alkioita”. ”jos ja vain jos” lyhennetään toisinaan ”joss” (engl. ”iff”), jolloin edellinen lause voidaan kirjoittaa ”joukko A on tyhjä, joss joukossa A ei ole alkioita”.

Implikaatioon (”jos. . . , niin. . . ”) ja ekvivalenssiin (”. . . , jos ja vain jos. . . ”) liittyy luonnollisessa kielessä vahvasti syy-seuraussuhteet. Olkoon A = ”sataa” ja B = ”taivaalla on pilviä”. Jos väitetään $A \Rightarrow B$, tarkoitetaan, että ”**jos** sataa, niin taivaalla on pilviä”. Tällöin on täysin mahdollista, että taivaalla on pilviä muulloinkin kuin sateella, mutta ainakin sateella on pilviä. Väitteen $B \Rightarrow A$ voi lukea ”jos taivaalla on pilviä, niin sataa” tai yhtäpitävästi ”**vain jos** sataa, taivaalla on pilviä”. Palautetaan mieleen aikaisempi ekvivalenssin määritelmä, jonka mukaan $A \Leftrightarrow B$ voidaan merkitä $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$. Tällöin $A \Leftrightarrow B$ voidaan ilmaista ”**jos** sataa, taivaalla on pilviä ja **vain jos** sataa, taivaalla on pilviä” eli lyhyemmin ”**jos** ja **vain jos** sataa, taivaalla on pilviä.

2.1.3 Yhdistettyjen kaavojen totuustaulut

Konnektiivit ovat yksinkertaisimpia yhdistettyjä kaavoja, joille on edellisessä kappaleessa jo määritelty totuustaulut. Kun tarkastellaan monimutkaisempia yhdistettyjä kaavoja, käytössä on vaihtoehtoisia *totuustaulumenetelmiä* eli tapoja konstruoida halutun kaavan totuustaulu. Minkä tahansa kaavan A totuustaulu saadaan konstruoitua esimerkiksi seuraavalla tavalla:

1. Vasemmanpuoleisimpaan sarakkeeseen kirjoitetaan A:n atomikaavojen kaikki totuusarvokombinaatiot
2. Laskujärjestystä noudattaen jokaisen osakaavan totuusarvot listataan sarakkeisiin vasemmalta oikealle.

Esimerkki 2.3. Kaavan $(p \wedge \neg q) \to (\neg p \vee q)$ totuustaulu näyttää seuraavanlaiselta:

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \wedge \neg q$	$\neg p \vee q$	$(p \wedge \neg q) \to (\neg p \vee q)$
1	1	0	0	0	1	1
1	0	0	1	1	0	0
0	1	1	0	0	1	1
0	0	1	1	0	1	1

Toinen tapa on jättää osakaavat erikseen merkitsemättä ja merkitä näitä vastaavat totuusarvot suoraan tarkasteltavaan kaavaan aina vastaavan konnektiivin alle.

Esimerkki 2.4. Kaavan $\neg(p \vee q) \to r \wedge p$ totuustaulun voi kirjoittaa myös seuraavalla tavalla:

p	q	r	$\neg$	$(p$	$\vee$	$q)$	$\to$	r	$\wedge$	p
1	1	1	0		1		**1**		1	
1	1	0	0		1		**1**		0	
1	0	1	0		1		**1**		1	
1	0	0	0		1		**1**		0	
0	1	1	0		1		**1**		0	
0	1	0	0		1		**1**		0	
0	0	1	1		0		**0**		0	
0	0	0	1		0		**0**		0	
1	1	1	3		2		**4**		2	

Kaavassa $\neg(p \lor q) \to r \land p$ on kolme atomikaavaa, joten näiden muodostamat totuusarvokombinaatiot voidaan esittää $2^3 = 8$ rivillä. Lisäksi totuustauluun lisätyn alimman rivin numerot kertovat missä järjestyksessä kunkin sarakkeen totuusarvot on selvitetty ja merkitty. Viimeinen sarake on hyvä merkitä esimerkiksi ympyröimällä siten, että se erottuu muista. Viimeinen sarake kirjoitetaan aina kaavan pääkonnektiivin alle.

2.1.4 Tautologia

Jos yhdistetty kaava A on aina tosi riippumatta atomikaavojen $p, q, r \ldots$ totuusarvoista, kaavaa A kutsutaan *tautologiaksi*. Kaava A voidaan osoittaa tautologiaksi muun muassa tarkastelemalla sen totuustaulua.

Esimerkki 2.5. Tutki onko kaava (**a**) $p \lor (q \to p)$, (**b**) $p \lor \neg p$, (**c**) $p \land \neg p$, (**d**) $\neg(p \land \neg p)$ tautologia.

(a) Muodostetaan kaavalle $p \lor (q \to p)$ totuustaulu.

p	q	p	$\lor$	$(q$	$\to$	$p)$
1	1		**1**		1	
1	0		**1**		1	
0	1		**0**		0	
0	0		**1**		1	
1	1		**3**		2	

Totuustaulusta nähdään, että $p \lor (q \to p)$ on epätosi, kun p on epätosi ja q tosi, joten $p \lor (q \to p)$ ei ole tautologia.

(b) Totuustaulusta

p	p	$\lor$	$\neg$	p
1		**1**	0	
0		**1**	1	
1		**3**	2	

nähdään, että kaava $p \lor \neg p$ on tosi riippumatta atomikaavan totuusarvoista, joten se on tautologia. Tälle tautologialle on annettu nimi *poissuljetun kolmannen laki*.

(c) Totuustaulusta

p	p	$\land$	$\neg$	p
1		**0**	0	
0		**0**	1	
1		**3**	2	

nähdään, että kaava $p \wedge \neg p$ on aina epätosi, joten se ei ole tautologia vaan *ristiriita*.

(d) Totuustaulusta

p	$\neg($	p	$\wedge$	$\neg$	$p)$
1	**1**		0	0	
0	**1**		0	1	
1	**4**		3	2	

nähdään, että kaava $\neg(p \wedge \neg p)$ on tautologia. Tämä tautologia tunnetaan nimellä *poissuljetun ristiriidan laki*.

Kuten edellisen esimerkin c)- ja d)- kohdista huomataan, tautologia on ristiriidan negaatio (ja päinvastoin). Koska tautologia on tosi kaikissa mahdollisissa maailmoissa, se ei itseasiassa kerro "todellisuudesta" mitään. Jos p tarkoittaa lausetta "tuulee" ja q lausetta "salamoi", niin $p \wedge q$ kertoo, että tuulee ja salamoi. Sen sijaan tautologia $p \vee \neg p$ tarkoittaa lausetta "tuulee tai ei tuule", mutta se ei kerro mitään ainakaan säästä.

Kaava on *loogisesti tosi*, jos se on tosi kaikissa mahdollisissa tilanteissa eli maailmoissa ja *loogisesti epätosi*, jos se ei ole tosi missään maailmassa. Lauselogiikassa nämä maailmat ovat luettavissa totuustaulujen vaakariveistä, sillä jokainen atomikaavojen totuusarvokombinaatio vastaa yhtä mahdollista maailmaa. Täten lauselogiikassa kaava on loogisesti tosi, jos ja vain se on tautologia. Vastaavasti kaava on loogisesti epätosi, jos ja vain jos se on ristiriita. Mikäli kaava ei ole tautologia eikä ristiriita, se on *kontingentti*.

Kun kaavan A jokin atomikaava x korvataan jollain toisella kaavalla, tarkoittaa tämä sitä, että jokainen kaavassa A esiintyvä x korvataan. Jos tautologian jokin atomikaava korvataan mielivaltaisella kaavalla, saadaan aina loogisesti tosi kaava. Esimerkiksi jos poissuljetun kolmannen laissa p (kaikki p:t) korvataan lauseella "ulkona sataa", saadaan lause "ulkona sataa tai ei päde, että ulkona sataa" eli lause "ulkona sataa tai ulkona ei sada", mikä on selvästi loogisesti tosi olettaen että aina on mahdollista määrittää sataako ulkona vai ei.

Kaavan B sanotaan olevan kaavan A *looginen seuraus* eli $A \Rightarrow B$, jos ja vain jos kaikilla A:n ja B:n totuusarvokombinaatioilla, joilla A on tosi, myös B on tosi eli jos ja vain jos $A \to B$ on tautologia. Esimerkiksi A on kaavan $A \wedge B$ looginen seuraus tai toisin sanoen $A \wedge B$ implikoi A:n, koska ainoa tapaus jolloin $A \wedge B$ on tosi, on silloin, kun sekä A on tosi että B on tosi. Tällöin triviaalisti A on tosi. Samaan tapaan voidaan päätellä, että myös $A \Rightarrow A \vee B$ ja $(A \wedge (A \to B)) \Rightarrow B$.

Kaavojen A ja B sanotaan olevan *loogisesti ekvivalentit* eli $A \Leftrightarrow B$, jos ja vain jos kaikilla A:n ja B:n totuusarvokombinaatioilla A:lla ja B:llä on samat totuusarvot eli jos ja vain jos $A \leftrightarrow B$ on tautologia. Esimerkiksi $\neg\neg A \Leftrightarrow A$, mikä tunnetaan kaksoisnegaation lakina. Yleisimpiä tautologioita on koottu seuraavaan taulukkoon, jossa mielivaltaista tautologiaa on merkitty symbolilla **T** ja ristiriitaa symbolilla **R**.

Yleisimpiä tautologioita

#	Tautologia	Nimi
T_1	$A \leftrightarrow A$	Identiteetin laki
T_2	$A \vee \neg A$	Poissuljetun kolmannen laki
T_3	$\neg(A \wedge \neg A)$	Poissuljetun ristiriidan laki
T_4	$\neg\neg A \leftrightarrow A$	Kaksoisnegaation laki
T_5	$A \wedge \mathbf{T} \leftrightarrow A$	Identiteettilaki tautologialle
T_6	$A \vee \mathbf{R} \leftrightarrow A$	Identiteettilaki ristiriidalle
T_7	$A \vee \mathbf{T} \leftrightarrow \mathbf{T}$	Dominointilaki tautologialle
T_8	$A \wedge \mathbf{R} \leftrightarrow \mathbf{R}$	Dominointilaki ristiriidalle
T_9	$A \vee (A \wedge B) \leftrightarrow A$	Absorptiolaki konjunktiolle
T_{10}	$A \wedge (A \vee B) \leftrightarrow A$	Absorptiolaki disjunktiolle
T_{11}	$A \wedge A \leftrightarrow A$	Idempotenssilaki konjunktiolle
T_{12}	$A \vee A \leftrightarrow A$	Idempotenssilaki disjunktiolle
T_{13}	$\neg(A \wedge B) \leftrightarrow \neg A \vee \neg B$	de Morganin laki konjunktiolle
T_{14}	$\neg(A \vee B) \leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$	de Morganin laki disjunktiolle
T_{15}	$A \wedge B \leftrightarrow B \wedge A$	Vaihdantalaki konjunktiolle
T_{16}	$A \vee B \leftrightarrow B \vee A$	Vaihdantalaki disjunktiolle
T_{17}	$A \wedge (B \wedge C) \leftrightarrow (A \wedge B) \wedge C$	Liitäntälaki konjunktiolle
T_{18}	$A \vee (B \vee C) \leftrightarrow (A \vee B) \vee C$	Liitäntälaki disjunktiolle
T_{19}	$A \wedge (B \vee C) \leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$	Osittelulaki
T_{20}	$A \vee (B \wedge C) \leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$	Osittelulaki
T_{21}	$(A \rightarrow B) \leftrightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$	Kontrapositio

Taulukkoon viimeisimpänä listattua kontrapositiota hyödynnetään usein matemaattisissa ”jos p, niin q” -muotoisten väitteiden todistuksissa. Mikäli suora todistaminen (oletetaan p ja päätellään q) on jostain syystä ongelmallinen, saattaa käänteinen todistus eli kontrapositiotodistus olla helpompi. Tällöin oletetaan $\neg q$ ja päätellään $\neg p$.

Totuusarvotarkasteluissa mikä tahansa kaava tai sen osakaava voidaan korvata millä tahansa kyseisen kaavan kanssa loogisesti ekvivalentilla kaavalla. Näin voidaan menetellä, koska keskenään loogisesti ekvivalenteilla kaavoilla on samat totuusarvot jokaisella totuustaulun rivillä.

Esimerkki 2.6. Osoita ilman totuustauluja, että kaavat (**a**) $(p \vee \neg p) \vee (p \vee \neg p)$, (**b**) $\neg(\neg p \wedge \neg\neg p) \wedge (\neg(\neg p \wedge \neg\neg p) \vee p \rightarrow \neg q)$ ja (**c**) $\neg(p \vee (\neg p \wedge q)) \leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$, ovat tautologioita.

(a)

$$\begin{aligned} & (p \vee \neg p) \vee (p \vee \neg p) \\ \Leftrightarrow\quad & (p \vee \neg p) && \| T_{10} \text{ Idempotenssilaki} \end{aligned}$$

Tämä on tautologia T_2:n eli poissuljetun kolmannen lain nojalla. Täten myös ekvivalenssin toisella puolella olevan ”alkuperäisen” kaavan täytyy olla tautologia.

(b)

$$\begin{array}{lll} & \neg(\neg p \wedge \neg\neg p) \wedge (\neg(\neg p \wedge \neg\neg p) \vee p \to \neg q) & \\ \Leftrightarrow & \neg(\neg p \wedge \neg\neg p) & \| T_8 \text{ Absorptiolaki} \\ \Leftrightarrow & \neg(\neg p \wedge p) & \| T_4 \text{ Kaksoisnegaation laki} \\ \Leftrightarrow & \neg(p \wedge \neg p) & \| T_{13} \text{ Vaihdantalaki} \end{array}$$

Tämä on tautologia T_3:n eli poissuljetun ristiriidan lain nojalla. Täten myös ekvivalenssin toisella puolella olevan "alkuperäisen" kaavan täytyy olla tautologia.

(c)

$$\begin{array}{lll} & \neg(p \vee (\neg p \wedge q)) & \\ \Leftrightarrow & \neg p \wedge \neg(\neg p \wedge q) & \| T_{12} \text{ deMorganin laki} \\ \Leftrightarrow & \neg p \wedge (\neg\neg p \vee \neg q)) & \| T_{11} \text{ deMorganin laki} \\ \Leftrightarrow & \neg p \wedge (p \vee \neg q) & \| T_4 \text{ kaksoisnegaation laki} \\ \Leftrightarrow & (\neg p \wedge p) \vee (\neg p \wedge \neg q)) & \| T_{17} \text{ osittelulaki} \\ \Leftrightarrow & \mathbf{R} \vee (\neg p \wedge \neg q) & \| \neg p \wedge p \text{ on selvästi ristiriita} \\ \Leftrightarrow & (\neg p \wedge \neg q) \vee \mathbf{R} & \| T_{16} \text{ vaihdantalaki} \\ \Leftrightarrow & \neg p \wedge \neg q & \| T_6 \text{ Ristiriidan identiteettilaki} \end{array}$$

Koska $\neg(p \vee (\neg p \wedge q)) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$, niin $\neg(p \vee (\neg p \wedge q)) \leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$ on tautologia.

Lause 2.1 (Modus Ponens). *B on kaavojen A ja $A \to B$ looginen seuraus.*

Todistus. Oletetaan A ja $A \to B$ eli $A \wedge (A \to B)$. Kaava B on kaavan $A \wedge (A \to B)$ looginen seuraus, jos ja vain jos $A \wedge (A \to B) \to B$ on tautologia. Totuustaulun

A	B	A	$\wedge$	$(A$	$\to$	$B)$	$\to$	B
1	1		1		1		**1**	
1	0		0		0		**1**	
0	1		0		1		**1**	
0	0		0		1		**1**	
1	1		3		2		**4**	

mukaan $A \wedge (A \to B) \to B$ on tautologia, joten modus ponens on tässä mielessä pätevä päättelysääntö. □

Lause 2.2. *Jos A ja $A \to B$ ovat tautologioita, niin B on tautologia.*

Todistus. Oletetaan, että A ja $A \to B$ ovat tautologioita. Tehdään vastaoletus, että B ei ole tautologia. Tällöin on olemassa vähintään yksi sellainen B:n ja kaavan $A \to B$ atomikaavojen totuusarvokombinaatio, jolla B on epätosi. Koska A on tautologia, niin $A \to B$ olisi epätosi kyseisellä totuusarvokombinaatiolla. Siis $A \to B$ ei olisi tautologia, mikä on ristiriita alkuoletuksen kanssa. □

2.1.5 Lauselogiikan aksiomatisointi

Kappaleessa 2.1.1 läpikäydyn lauselogiikan syntaksin lisäksi seuraavat 3 aksioomaskeemaa[2] sekä modus ponens -päättelysääntö riittävät lauselogiikan formalisoimiseen [3]. Toisin sanoen kaikki lauselogiikan tautologiat ja loogiset seuraukset voidaan johtaa näistä.

(A1) $(A \to (B \to A))$

(A2) $((A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C)))$

(A3) $((\neg B \to \neg A) \to ((\neg B \to A) \to B))$

Modus ponens:

$$\begin{array}{l} A \\ A \to B \\ \hline B \end{array}$$

Modus (ponendo) ponens (MP) on tautologiaa $A \wedge (A \to B) \to B$ vastaava päättelysääntö. Päättelysäännössä vaakaviivan yläpuolella on lueteltuna premissit mielivaltaisessa järjestyksessä ja vaakaviivan alapuolella on näistä johdettu deduktiivisella päättelyllä johtopäätös. Johtopäätös on siis premissien looginen seuraus. Deduktiivinen päättely on aina pätevää ja sen sanotaan olevan totuuden säilyttävää. Tämä tarkoittaa sitä, että premissien ollessa tosia, pätevällä päättelyllä saadaan aina tosi johtopäätös. Siispä aksiomaattisesta näkökulmasta aksioomat ovat premissejä ja modus ponens ainoa pätevä päättely(sääntö).

Lause 2.3. *Kaava $A \to A$ voidaan johtaa aksioomista.*

Todistus. Todistetaan lause käyttäen aksioomia ja modus ponens -päättelysääntöä. Aloitetaan sijoittamalla aksioomaskeeman (A1) kaavoihin A ja C kaava A sekä kaavaan B kaava $A \to A$.

1.	$(A \to ((A \to A) \to A)) \to$ $((A \to (A \to A)) \to (A \to A))$	(A2)
2.	$A \to ((A \to A) \to A)$	(A1)
3.	$(A \to (A \to A)) \to (A \to A)$	1, 2 ja MP
4.	$A \to (A \to A)$	(A1)
5.	$A \to A$	3, 4 ja MP

[2]Aksioomaskeema sisältää yhden tai useamman metamuuttujan (merkitty kaavasymboleilla), johon sijoittamalla jokin kaava saadaan tätä vastaava aksiooma eli aksioomaskeeman eräs instanssi.

[3]Myös muita klassisen lauselogiikan aksiomatisointeja on olemassa. Eräs erikoisimmista (ja epäkäytännöllisimmistä) lienee Jean Nicodin (1917) keksimä aksiomatisointi, johon kuuluvat ainoastaan Shefferin viivalla määritelty päättelysääntö ”D on kaavojen $B|(C|D)$ ja B looginen seuraus” sekä yksi aksiooma: $(B|(C|D))|((E|(E|E))|((F|C)|((B|F)|(B|F))))$.

□

Aksioomien käyttäminen esimerkiksi eri kaavojen tautologiatodistuksissa on vaikeaa joskin aina teoriassa mahdollista. Käytännössä tautologiatodistuksissa käytetään hyväksi aikaisemmin todistettuja tautologioita ja totuustaulumenetelmää. Totuustaulu ja siihen liittyvä tautologian ja loogisen seurauksen käsitteet ovat semanttisia, kun taas pätevä päätelmä on syntaktinen käsite. Jotta totuustauluja voidaan käyttää, on ensin osoitettava, että looginen seuraus ja pätevä päätelmä vastaavat toisiaan.

Lause 2.4 (Täydellisyyslause)**.** *Premisseistä voidaan pätevästi päätellä jokin johtopäätös, jos ja vain jos tämä johtopäätös on näiden premissien looginen seuraus.*

Todistus. Todistus sivuutetaan. Katso [7, s. 32-33]. □

Toisin sanoen täydellisyyslause sanoo, että jokainen pätevällä päättelyllä johdettu lause eli *teoreema* on tautologia ja toisaalta jokainen tautologia on johdettavissa pätevällä päättelyllä.

2.1.6 Tehtäviä lauselogiikasta

1. Mitkä seuraavista ovat propositioita?

   (a) ”elämä on ihanaa”

   (b) $3 + x = 4$

   (c) ”Luvun π tuhannes desimaali on 4”

   (d) ”Tämä lause on epätosi””

2. Osoita totuustauluilla, että määritelmän 2.2 mukaiset konnektiivien määritelmät täsmäävät keskenään.

3. Osoita, että pelkästään negaatiota ja konjunktiota käyttämällä on mahdollista määritellä

   (a) Disjunktio

   (b) Implikaatio

   (c) Ekvivalenssi.

4. Shefferin viiva on konnektiivi, jonka totuustaulu on seuraavanlainen.

A	B	$A \vert B$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	1

Osoita, että pelkästään Shefferin viivaa käyttäen on mahdollista määritellä seuraavat konnektiivit.

(a) Negaatio
(b) Disjunktio
(c) Konjunktio
(d) Implikaatio
(e) Ekvivalenssi

5. Selvitä lauselogiikan keinoin pitääkö luonnollisen kielen lause ”jos sataa vettä, niin sataa vettä” paikkaansa, jos ei sada vettä.

6. Poista ylimääräiset sulut kaavasta

   (a) $(A \wedge ((B \vee C) \wedge D))$,
   (b) $((A \to B) \leftrightarrow ((\neg C \vee D) \wedge E))$.

7. Perustele miksi kaava $p \wedge q \wedge r$ voidaan kirjoittaa ilman sulkuja.

8. Olkoot p ja q tosia kaavoja. Onko kaava

$$\neg(\neg(q \to \neg p) \vee \neg(p \to \neg q))$$

   tosi vai epätosi? Ratkaise tehtävä

   (a) totuustaulumenetelmällä,
   (b) sieventämällä kaava ensin mahdollisimman yksinkertaiseen muotoon.

9. Osoita tautologiaksi

   (a) $(p \to \mathbf{T}) \leftrightarrow \mathbf{T}$,
   (b) $(\mathbf{R} \to p) \leftrightarrow \mathbf{T}$,
   (c) $A \vee (B \wedge C) \leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$ (Osittelulaki),
   (d) $(A \to B) \leftrightarrow (\neg B \to \neg A)$ (Kontrapositio).

10. Perustele voiko sulutonta merkintää

   (a) $p \vee q \vee r$,
   (b) $p \leftrightarrow q \leftrightarrow r$,
   (c) $p \to q \to r$

   käyttää yksiselitteisesti.

11. Tutki onko lause tautologia, ristiriita vai kontingentti.

   (a) $A \wedge \neg A \to A \vee B$

(b) $A \wedge (\neg(A \vee B))$

(c) $((B \to A) \wedge B) \to \neg A$

(d) $(A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to C))$

(e) $((A \leftrightarrow B) \leftrightarrow A) \leftrightarrow (B \leftrightarrow (A \leftrightarrow B))$

12. Osoita käyttämättä totuustauluja, että kaavat

    (a) $\neg(\neg A \vee \neg\neg B)$ ja $A \wedge \neg B$,

    (b) $\neg(p \to q)$ ja $p \wedge \neg q$

    ovat loogisesti ekvivalentit.

13. Osoita aksioomia ja modus ponens -päättelysääntöä käyttäen, että jos $A \to B$ ja $B \to C$, niin $A \to C$. Vinkki: Lähde liikkeelle aksioomasta (A2).

2.2 Predikaattilogiikka

Lauselogiikassa voidaan tutkia vain konnektiivien (ja sulkujen) avulla muodostettuja lauseita eli kaavoja. Luonnollisen kielen väitteissä esiintyy usein luonnollisen kielen *kvanttoreita* eli ilmaisuja sille kuinka monelle joukon alkiolle jokin ominaisuus pätee. Tällaisia lauseita ovat esimerkiksi seuraavat:

- *Kaikilla* ihmisillä on koti.
- *Joillakin* ihmisillä ei ole varaa ruokaan.
- *On olemassa* ihmisiä, joiden kodissa *jollakin* on nälkä.

”Joillakin”, ”on olemassa”, ”eräällä” ja niin edelleen ovat keskenään samaa merkitseviä ilmaisuja sille, että jokin ominaisuus on totta vähintään yhdelle joukon alkiolle. Tätä vastaava formaalin kielen kvanttori on *eksistenssikvanttori*, jota merkitään symbolilla $\exists$. ”Jokaisella”, ”kaikilla” ja niin edelleen ovat puolestaan ilmaisuja sille, että jokin ominaisuus on totta kaikille jonkin joukon alkioille. Tätä vastaava formaalin kielen kvanttori on *universaalikvanttori*, jota merkitään symbolilla $\forall$. Predikaattilogiikka on lauselogiikan laajennus, joka mahdollistaa edellä mainittujen lauseiden formaalin tarkastelun. Tässä monisteessa käsitellään ensimmäisen kertaluvun predikaattilogiikkaa, johon viitataan lyhyesti vain predikaattilogiikkana.[4]

Propositio- eli lauselogiikassa tutkittiin propositioita eli *suljettuja kaavoja*, jotka eivät sisällä vapaita muuttujia. Ne ovat siis tosia tai epätosia kaavasta riippuen. Esimerkiksi ”$1 + 1 = 3$” on suljettu kaava, mutta ”$1 + x = 3$” on *avoin kaava*, koska siinä on vapaa muuttuja x, jonka arvosta kaavan totuusarvo riippuu. Tällaisia avoimia kaavoja kutsutaan *predikaateiksi*.

[4]Toisen kertaluvun predikaattilogiikassa voidaan puhua olioiden ominaisuuksista, kolmannen kertaluvun predikaattilogiikassa voidaan puhua olioiden ominaisuuksien ominaisuuksista ja niin edelleen.

2.2.1 Predikaattilogiikan syntaksi

Predikaattilogiikan objektikielen perussymbolit ovat:

Predikaattisymbolit	$P_1^n, P_2^n, P_3^n \ldots$ kullakin $n = 1, 2, 3 \ldots$
Funktiosymbolit	$f_1^n, f_2^n, f_3^n \ldots$ kullakin $n = 1, 2, 3 \ldots$
Muuttujat	$x_1, x_2, x_3 \ldots$
Vakiot	$c_1, c_2, c_3 \ldots$
Konnektiivit	$\neg, \rightarrow$
Universaalikvanttori	$\forall$
Identiteettisymboli	$=$
Sulut	(,)
Pilkku	,

Useimmiten aakkosissa on riittävästi kirjaimia esittämään kaavoissa esiintyviä perussymboleita, jolloin alaindeksöintiä ei tarvita. Jätetään myös merkitsemättä predikaatti- ja funktiosymboleiden yläindeksi n, joka kertoo *paikkaluvun* eli sen kuinka moneen argumenttiin sitä sovelletaan. Käytetään täten metakielen symboleja $P, Q, R \ldots$ viittaamaan predikaattisymboleihin, symboleja $f, g, h \ldots$ viittaamaan funktiosymboleihin, symboleja $x, y, z \ldots$ viittaamaan muuttujiin sekä symboleja $a, b, c \ldots$ viittaamaan vakiohin. Lisäksi viitataan kohta määriteltäviin kaavoihin symboleilla $A, B, C \ldots$

Predikaattisymbolit vastaavat luonnollisen kielen predikaatteja eli ominaisuuksiin viittaavia ilmauksia. Merkitään $P(a)$, kun vakiolla a on ominaisuus P ja $P(x)$, kun muuttujalla x on ominaisuus P. Edellä olevissa predikaateissa P on yksipaikkainen, koska sillä on yksi argumentti a tai x. Esimerkiksi, kun yksipaikkainen predikaatti Q määritellään tarkoittamaan ominaisuutta ”kuolevainen” ja vakio s ”Sokratesta”, niin $Q(s)$ tarkoittaa ”Sokrates on kuolevainen”. Samaan tapaan voidaan määritellä kaksipaikkainen funktiosymboli f luonnollisten lukujen yhteenlaskuksi, jolloin jos a viittaa lukuun 1 ja b lukuun 2, niin $f(a, b)$ tarkoittaa samaa kuin merkintä $f(1, 2)$, joka yleensä kirjoitetaan $1 + 2$. Yleisesti laskutoimitukset ovatkin funktiosymboleja; useimmiten kaksipaikkaisia.

Termit vastaavat karkeasti ottaen luonnollisen kielen substantiiveja tai substantiivilausekkeita kuten ”ihminen”, ”1 + 1” ja ”1 + x”.

Määritelmä 2.3. Predikaattilogiikan termit saadaan muodostettua seuraavien terminmuodostussääntöjen avulla:

1. Muuttujat ja vakiot ovat termejä
2. Jos f_k^n on funktiosymboli ja $t_1, t_2 \ldots t_n$ termejä, niin $f_k^n(t_1, t_2 \ldots t_n)$ on termi.
3. Muita termejä ei ole.

Termeihin sovellettua predikaattisymbolia kutsutaan *atomikaavaksi*.

Määritelmä 2.4. Predikaattilogiikan atomikaavat saadaan muodostettua seuraavien atomikaavanmuodostussääntöjen avulla:

1. Jos P_k^n on predikaattisymboli ja $t_1, t_2 \dots t_n$ termejä, niin $P_k^n(t_1, t_2 \dots t_n)$ on atomikaava.
2. Jos t_1 ja t_2 ovat termejä, niin $(t_1 = t_2)$ on atomikaava.
3. Muita atomikaavoja ei ole.

Kuten lauselogiikan atomikaavaa, myöskään predikaattilogiikan atomikaavaa ei voi hajottaa pienemmiksi kaavoiksi.

Määritelmä 2.5. Predikaattilogiikan *kaavat* saadaan muodostettua seuraavien kaavanmuodostussääntöjen avulla:

1. Atomikaavat ovat kaavoja.
2. Jos A on kaava, niin $\neg A$ on kaava.
3. Jos A ja B ovat kaavoja, niin $(A \to B)$ on kaava.
4. Jos A on kaava ja x muuttuja, niin $\forall x A$ on kaava.
5. Muita kaavoja ei ole.

Kaavassa $\forall x A$ kaavaa A kutsutaan kvanttorin $\forall x$:n *alaksi*. Kaavan A ei itseasiassa tarvitse edes sisältää muuttujaa x. Tässä tapauksessa $\forall x A$ on ekvivalentti kaavan A kanssa. Muut konnektiivit määritellään peruskonnektiiveista kuten tehtiin lauselogiikan yhteydessä määritelmässä 2.2. Sovitaan lisäksi identiteetin negaatiolle eli kaavalle $\neg(t_1 = t_2)$ lyhennysmerkintä $t_1 \neq t_2$. Myöskään eksistenssikvanttoria $\exists$ ei tarvinnut esitellä perussymbolina, koska se voidaan määritellä universaalikvanttorin avulla seuraavasti:

$$\exists x A \text{ on lyhennysmerkintä kaavalle } \neg\forall x \neg A.$$

Määritelmä[5] vastaa hyvin kvanttoreiden semanttisia merkityksiä: $A(x)$ on tosi jollekin x, jos ja vain jos ei ole niin, että $A(x)$ on epätosi kaikille x. Kaava $\forall x P(x)$ luetaan ”jokaisella x on ominaisuus P”. Kaava $\exists x P(x)$ luetaan ”on olemassa x, jolla on ominaisuus P”. Jälkimmäinen tarkoittaa siis, että vähintään yhdellä oliolla on ominaisuus P.

Esimerkki 2.7. Tarkastellaan edellisten määritelmien valossa muutamaa merkki- eli symbolijonoa.

[5] Myös eksistenssikvanttori olisi voitu valita perussymboliksi, jolloin $\forall x A$ olisi voitu määritellä lyhennysmerkinnäksi kaavalle $\neg\exists x \neg A$. Nimittäin $A(x)$ on tosi kaikille x, jos ja vain jos ei ole niin, että $A(x)$ on epätosi jollekin x.

(a) Tarkastellaan merkkijonoa $\neg\forall x(2x+3=5)$. Tässä $\neg$ on konnektiivi, $\forall$ on universaalikvanttori, x on muuttuja, 2, 3 ja 5 ovat vakioita, "(" ja ")" ovat sulkuja ja = on identiteettisymboli. Lisäksi symboleiden 2 ja x välissä oleva kirjoittamaton kertomerkki $\cdot$ sekä symboleiden x ja 3 välissä oleva yhteenlaskumerkki + ovat kaksipaikkaisia funktiosymboleja.

Koska vakiot ja muuttujat ovat termejä ja $\cdot$ on funktiosymboli, niin $\cdot(2, x)$ on termi. Tämä on kirjoitettu lyhennysmerkintää $2x$ käyttäen kuten algebrassa on tapana. Koska $2x$ ja 3 ovat termejä, niin $+(2x, 3)$ eli $2x + 3$ on termi. Koska $2x + 3$ ja 5 ovat termejä, niin $2x + 3 = 5$ on atomikaava. Koska atomikaavat ovat kaavoja, niin $\forall x(2x + 3 = 5)$ on kaava, jolloin myös $\neg\forall x(2x + 3 = 5)$ on kaava.

(b) Tarkastellaan merkkijonoa $\forall x\exists y(x < y)$. Järjestysrelaatio $<$ on kaksipaikkainen predikaattisymboli[6]. Voidaan ajatella, että predikaatissa $<(x, y)$ eli $x < y$ muuttujilla x ja y on sellainen toisistaan riippuva ominaisuus, että x on "pienempi kuin" y. Relaatio ja funktio määritellään tarkasti joukko-opin yhteydessä myöhemmin. Määritelmän mukaan $x < y$ on atomikaava, jolloin se on myös kaava. $\exists y(x < y)$ on kaava, koska se voidaan kirjoittaa määritelmän mukaan yhtäpitävästi muotoon $\neg\forall y\neg(x < y)$, joka on kaava. Siis myös $\forall x\exists y(x < y)$ on kaava.

(c) Merkkijono $\exists x \vee y\neg(x = y)$ ei ole kaava, koska kvanttorin $\exists x$ jälkeen täytyisi esiintyä jokin kaava, mutta mikään kaava ei ala disjunktiolla.

Sulutuksen suhteen menetellään samoin kuin lauselogiikassa, mutta lisäksi täytyy huomioida kvanttoreiden ala, joka on yhtä suppea kuin negaation ala eli kvanttoria välittömästi seuraava kaava.

Esimerkki 2.8. Palautetaan sulut.

(a)

$$\begin{aligned}
& \forall x P(x) \rightarrow P(x, y) \vee \neg Q(y) \\
\Leftrightarrow\ & \forall x P(x) \rightarrow (P(x, y) \vee \neg Q(y)) \\
\Leftrightarrow\ & (\forall x P(x) \rightarrow (P(x, y) \vee \neg Q(y)))
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
& \forall x\exists y P(x, y) \wedge \neg P(x) \\
\Leftrightarrow\ & (\forall x\exists y P(x, y) \wedge \neg P(x))
\end{aligned}$$

2.2.2 Predikaattilogiikan semantiikkaa

Yleistetään tautologian käsite predikaattilogiikkaan: Olkoon A sellainen lauselogiikan tautologia, jossa esiintyvät atomilauseet $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Olkoot $B_1, B_2, \ldots, B_n$ predikaattilogiikan kaavoja. Korvataan jokainen kaavassa A esiintyvä atomilause p_m predikaattilogiikan kaavalla B_m ($m = 1, 2, 3, \ldots$). Näin saatu predikaattilogiikan kaava on *tautologia*.

[6] Predikaattisymboleja kutsutaan myös relaatiosymboleiksi.

Esimerkki 2.9. Kaavat $\forall x P(x, c) \vee \neg \forall x P(x, c)$ ja $P(x, y) \to \exists x \forall y P(x, y) \vee P(x, y)$ ovat tautologioita. Edellinen on tautologia poissuljetun kolmannen lain nojalla ja jälkimmäinen on muotoa $p \to q \vee p$, joka on myös tautologia, sillä p:n ollessa tosi myös $q \vee p$ on tosi, jolloin implikaatio on aina tosi. Toisaalta $\forall x P(x) \leftrightarrow \exists x P(x)$ ei selvästi ole tautologia, sillä jos ominaisuus P pätee jollekin muuttujan x arvolle, ei siitä seuraa, että se pätisi jokaiselle muuttujan x arvolle.

Kaikki loogisesti todet predikaattilogiikan kaavat eivät kuitenkaan ole tautologioita, sillä esimerkiksi kaava $\forall x(x = x) \to \exists x(x = x)$ on loogisesti tosi, mutta sitä vastaava lauselogiikan kaava $p \to q$ ei ole tautologia, joten $\forall x(x = x) \to \exists x(x = x)$ ei ole tautologia.

Määritelmä 2.6. Kaavassa A esiintyvä muuttuja x on *sidottu*, jos kaavassa A esiintyy muuttujaan x liittyvä kvanttori $\forall x$ tai jos x esiintyy kvanttorin vaikutusalassa. Muussa tapauksessa x on *vapaa*.

Esimerkki 2.10.

(a) $P(x, y)$

(b) $P(x, y) \to \forall x P(x)$

(c) $\forall x(P(x, y) \to \forall x P(x))$

(d) $\exists x P(x, y)$

Esimerkissä (a) x on vapaa. Esimerkissä (b) x on vapaa implikaation etulauseessa, mutta sidottu molemmissa tapauksissa implikaation jälkilauseessa. Esimerkeissä (c) ja (d) kaikki muuttujan x esiintymät ovat sidottuja. Kaikissa esimerkeissä muuttuja y on vapaa.

Esimerkki 2.11. Määritelmän mukaan kaikkialla määritelty reaalifunktio f on jatkuva pisteessä a, jos ja vain jos

$$\forall \epsilon(\epsilon > 0 \to \exists \delta(\delta > 0 \wedge \forall x(|x - a| < \delta \to |f(x) - f(a)| < \epsilon))).$$

Edellistä kaavaa saadaan hieman lyhennettyä, kun sovitaan, että $\forall \epsilon(\epsilon > 0 \to \dots)$ korvataan ilmaisulla $\forall \epsilon > 0 \dots$ ja $\exists \delta(\delta > 0 \wedge \dots)$ korvataan ilmaisulla $\exists \delta > 0 \dots$ Tällöin saadaan

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x(|x - a| < \delta \to |f(x) - f(a)| < \epsilon).$$

Samaan tapaan voidaan lyhentää muitakin kaavoja.

Jos ei ole niin, että jokaisella x on ominaisuus P, niin on olemassa vähintään yksi x, jolla ei ole ominaisuutta P. Sama pätee toisinpäin. Toisaalta, jos ei ole olemassa sellaista x, jolla on ominaisuus P, niin millään x ei ole ominaisuutta P. Sama pätee myös toiseen suuntaan. Nämä kaksi lausetta voidaan formalisoida seuraaviksi predikaattilogiikan kaavoiksi:

Lause 2.5 (Negaation siirto kvanttorin ohi)**.** *Kaavat*

(a) $\neg\forall x P(x) \leftrightarrow \exists x \neg P(x)$ *ja*

(b) $\neg\exists x P(x) \leftrightarrow \forall x \neg P(x)$

ovat loogisesti tosia eli tosia missä hyvänsä tulkinnassa.

2.2.3 Predikaattilogiikan tulkintoja

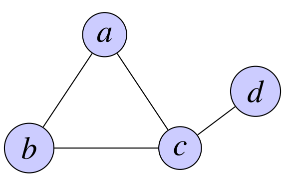
"Ei ole tosiasioita, on vain tulkintoja."
- Friedrich Nietzsche [4, s. 430]

Predikaattilogiikan kaavan totuusarvo riippuu *tulkinnasta* eli siitä, millaisessa struktuurissa kaavaa tarkastellaan. Tyypillisiä ja tunnetuimpia struktuureja ovat erilaiset lukujoukot kuten $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ ja $\mathbb{R}$. Oletetaan nämä tunnetuiksi. Otetaan lisäksi joukko-opista käyttöön alkiorelaatio $\in$ ja merkintä $x \in X$, joka tarkoittaa, että x kuuluu joukkoon X tai yhtäpitävästi, että x on joukon X alkio.

Esimerkki 2.12. Tarkastellaan kaavaa $\exists x \forall y(x < y)$, joka sanoo, että "on olemassa sellainen x, että jokaisella y on voimassa ehto $x < y$". Kaavan totuusarvo riippuu tulkinnasta. Jos kaavaa tulkitaan jossain lukujoukossa X, tulkinta usein kiinnitetään kaavaan, jolloin kirjoitetaan $\exists x \in X \forall y \in X(x < y)$. Siis jos kaava tulkitaan kokonaislukujen joukossa $\mathbb{Z}$, voidaan kirjoittaa $\exists x \in \mathbb{Z} \forall y \in \mathbb{Z}(x < y)$. Tämä luetaan "on olemassa sellainen kokonaisluku x, että jokaisella kokonaisluvulla y on voimassa ehto $x < y$". Tämä ei tietenkään pidä paikkaansa, sillä valittiin mikä tahansa kokonaisluku x, niin esimerkiksi $y = x$ rikkoo ehdon $x < y$. Kaava $\forall x \in \mathbb{Z} \exists y \in \mathbb{Z}(x < y)$ voidaan lukea "jokaista kokonaislukua x kohti on olemassa sellainen kokonaisluku y, että $x < y$. Tämä puolestaan pitää paikkansa, sillä aina voidaan valita esimerkiksi $y = x + 1$.

Esimerkki 2.13. Kaavan $\exists x(x + 2 = 1)$ totuus riippuu tulkinnasta eli tässä tapauksessa siitä joukosta, jossa sitä tarkastellaan. Termi $x + 2 = 1$ on epätosi luonnollisten lukujen joukossa jokaisella muuttujan x arvolla, mutta tosi kokonaislukujen joukossa muuttujan x arvolla -1. Tällöin merkitään yleensä lyhyesti $\neg\exists x \in \mathbb{N}(x + 2 = 1)$ ja $\exists x \in \mathbb{Z}(x + 2 = 1)$, jolloin tulkinta tulee selväksi jo kaavasta. Siis $\exists x(x + 2 = 1)$ on tosi kokonaislukujen joukossa, mutta epätosi luonnollisten lukujen joukossa.

Esimerkki 2.14. Suuntaamaton graafi koostuu solmuista sekä niitä mahdollisesti yhdistävistä särmistä. Alla on esimerkki graafista, jossa on neljä solmua a, b, c ja d sekä särmät solmujen a ja b, b ja c, a ja c sekä c ja d välillä.



Graafin solmut ovat predikaattilogiikan näkökulmasta vakioita ja särmät kaksipaikkaisen predikaatin $P(x, y)$ instansseja. Esimerkiksi solmujen a ja b välinen särmä on (a, b), jolloin predikaatti $P(a, b)$ on tosi esimerkkigraafissa. Graafeista voidaan muodostaa erilaisia predikaattilogiikan väittämiä. Esimerkiksi seuraavat väittämät pitävät paikkansa esimerkkigraafissa:

- $P(a, b) \wedge P(c, d)$
- $\forall x \forall y (P(x, y) \rightarrow P(y, x))$ (Symmetrisyys)
- $\neg \exists x P(x, x)$ (Irrefleksisyys)
- $\exists x \exists y \exists z (P(x, y) \wedge \neg P(x, z) \wedge \neg P(y, z))$
- $\forall x \forall y (P(x, a) \wedge P(y, a) \wedge \neg(x = y) \rightarrow P(x, y)$

Sitä vastoin transitiivisuuden ehto

$$\forall x \forall y \forall z (P(x, y) \wedge P(y, z) \rightarrow P(x, z))$$

ei pidä paikkaansa, mikä huomataan, kun valitaan esimerkiksi $x = a$, $y = c$ ja $z = d$.

2.2.4 Aksioomat

Kun lauselogiikan aksioomajärjestelmään lisätään seuraavat kaksi akioomaskeemaa ja yksi päättelysääntö, saadaan predikaattilogiikan eräs aksiomatisointi.

(A4) $\forall x_i A(x_i) \rightarrow A(t)$ kunhan kaavassa A ei ole sidottuja muuttujia, jotka esiintyvät termissä t.

(A5) $\forall x_i (A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow \forall x_i B)$ kunhan x_i ei esiinny vapaana kaavassa A.

Universaalikvanttorin tuontisääntö $\forall T$:

$$\frac{A}{\forall x_i A}$$

Kun aksioomaskeemassa (A4) valitaan termiksi t muuttuja x_i, saadaan akioomajoukko $\forall x_i A \rightarrow A$. Täten, jos tiedetään, että $\forall x_i A$, niin voidaan modus ponens -päättelysäännöllä (MP) päätellä A.

Lause 2.6. *Kaavasta $\forall x \forall y A$ voidaan päätellä kaava $\forall y \forall x A$.*

Todistus. Todistetaan lause käyttäen aksioomia ja päättelysääntöjä.

1. $\forall x \forall y A$ Premissi
2. $\forall x \forall y A \rightarrow \forall y A$ (A4)
3. $\forall y A$ 1, 2 ja MP

4. $\forall yA \to A$ (A4)
5. A 3, 4 ja MP
6. $\forall xA$ 5 ja $\forall T$
7. $\forall y\forall xA$ 6 ja $\forall T$

□

Tulos osoittaa, ettei vierekkäisten universaalikvanttoreiden järjestyksellä ole väliä. Myöskään peräkkäisten eksistenssikvanttoreiden järjestyksellä ei ole väliä. (Harjoitustehtävä)

2.2.5 Tehtäviä predikaattilogiikasta

1. Käännä seuraavat lauseet predikaattilogiikan kaavoiksi.
   (a) Yksikään poliitikko ei ole rehellinen.
   (b) Jos joku voi selvitä tilanteesta, niin MacGyver voi.
   (c) Jack rakastaa ihmisiä, jotka eivät rakasta itseään.
   (d) Ei ole kampaajaa, joka leikkaa hiukset niiltä ja vain niiltä, jotka eivät leikkaa omia hiuksiaan.
2. Mitkä ovat kaavassa $\forall x\forall y(\neg(x = y) \to x < y \vee y < x)$ esiintyviä
   (a) termejä,
   (b) atomikaavoja,
   (c) kaavoja?
3. Onko
   (a) $\exists x\forall yP(x, y) \wedge Q(x) \to Q(x, y)$,
   (b) $\forall(x \in \mathbb{N} \wedge x < x)$,
   (c) $a \vee b$,
   (d) $\exists x\exists x\exists x\neg\exists x(x)$

   kaava?
4. Poista turhat sulut seuraavista kaavoista.
   (a) $(\neg(\exists x(\forall y(P(x, y) \vee Q(y)))))$
   (b) $((\neg((\exists x)(P(x) \vee P(a)))) \leftrightarrow P(x))$
   (c) $(((\forall x)(\neg(\neg P(b)))) \to (P(x) \to P(y)))$
5. Ovatko muuttujat sidottuja vai vapaita seuraavissa kaavoissa? Erittele tapaukset.

(a) $f(x) \lor \exists x(f(y) \land P(x, y))$

(b) $\forall x \exists y P(x, y, f(x, y))$

6. Ovatko seuraavat kaavat tautologioita?

   (a) $\exists x(x > 5)$

   (b) $\exists x(x > 5 \lor \neg(x > 5) \lor x = 5)$

   (c) $\exists x(x > 5) \leftrightarrow \exists x(x > 5)$

7. Formalisoi trikotomia yhdeksi yhtenäiseksi kaavaksi: Jokaista x ja y kohti on voimassa täsmälleen yksi seuraavista kaavoista.

   - $x < y$
   - $x = y$
   - $y < x$

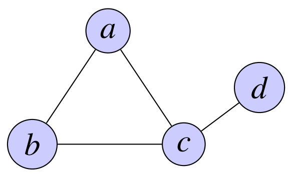
8. Anna esimerkki struktuurista, jossa seuraava kaava on tosi.

   (a) $\exists x(x^2 = 2)$

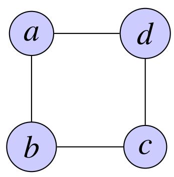
   (b) $\forall x \forall y \exists z(x < y \to x < z \land z < y)$

   (c) $x = x$

9. Mitkä särmät täytyy lisätä esimerkin 2.14 graafiin, jotta se olisi transitiivinen? Piirrä kuva. Esimerkin 2.14 graafi:



10. Keksi kolme kvanttoreita sisältävää predikaattilogiikan kaavaa, jotka ovat tosia alla olevassa graafissa.



11. Piirrä graafi, joka toteuttaa seuraavat predikaattilogiikan kaavat:

   - $\exists x \forall y \neg P(x, y)$
   - $\forall x \forall y(\neg(x = y) \land P(x, y) \to P(x, x)$
   - $P(a, b) \land P(b, c)$

12. Osoita, ettei peräkkäisten eksistenssikvanttoreiden järjestyksellä ole väliä. Voit olettaa tunnetuksi, että kaavasta $\neg\neg A$ voidaan päätellä A, missä A on predikaattilogiikan kaava.

3 Joukko-oppi

"Joukko on kokoelma mistä tahansa havaintomme tai ajatuksemme kohteina olevista täysin määrätyistä erillisistä olioista."
- Georg Cantor, joukko-opin perustaja [17]

Tutustutaan ensin hieman joukko-opin historiaan. Käsitellään tämän jälkeen naiivia joukko-oppia ja sen kuuluisaa ongelmaa, mikä johti joukko-opin aksiomatisointiin. Tutustutaan ZFC-aksioomiin pintapuolisesti sekä esitetään, miten mm. funktiot ja luonnolliset luvut voidaan esittää joukko-opillisesti.

3.1 Joukko-opin historiaa lyhyesti

Joukko-oppi on matematiikan (tarkemmin matemaattisen logiikan) osa-alue, joka tutkii joukkoja [18]. Toisin kuin monet muut matematiikan osa-alueet (algebra, geometria, analyysi ym.), joukko-oppi sai alkunsa yhdestä ainoasta Georg Cantorin (3.3.1845 – 6.1.1918) vuonna 1874 julkaisemasta tutkielmasta "Kaikkien reaalisten algebrallisten lukujen luonteenomaisista ominaisuuksista"(engl. On a property of the Collection of All Real Algebraic Numbers). Cantorin ajatteluun ja täten oletettavasti myös työhön vaikutti lisäksi aikaisempi vuoden 1872 tapaaminen matemaatikko Richard Dedekindin (6.10.1831 – 12.2.1916) kanssa. Heistä tulikin hyvät ystävät ja Dedekind mm. puolusti myöhemmin Cantorin joukko-oppia, joka jakoi voimakkaasti matemaatikkojen mielipiteitä. Pian Cantorin joukko-oppi saikin laajemman hyväksynnän, sillä esimerkiksi eri joukkojen välinen kääntäen yksikäsitteinen vastaavuus eli bijektio sekä todistus sille, että reaalilukuja on enemmän kuin rationaalilukuja osoittautuivat erittäin hyödyllisiksi käsitteiksi.

Joukko-opin toinen tärkeä kehitysvaihe sattui 1900-luvun alkuun, kun Bertrand Russell ja Ernst Zermelo löysivät toisistaan riippumatta yksinkertaisimman ja tunnetuimman paradoksin, jota nykyisin kutsutaan Russellin paradoksiksi. Se käsittelee kaikkien niiden joukkojen joukkoja, jotka eivät ole itsensä alkioita, mikä johtaa ristiriitaan, sillä tämän joukon olisi oltava itsensä alkio siinä ja vain siinä tapauksessa, ettei se sellainen ole. Russellin paradoksia tarkastellaan tarkemmin luvussa 3.2.6.

Väittely paradokseista ei johtanut joukko-opin hylkäämiseen, mutta paljasti kuitenkin Cantorin ns. naiivin joukko-opin puutteet. Joukko-oppi tarvitsi aksioomansa ja monia aksioomajärjestelmiä ehdotettiinkin [21]. Zermelon työ vuodelta 1908 ja Abraham Fraenkelin työ vuodelta 1922 johtivat aksioomajärjestelmään ZFC (C viittaa valinta-aksioomaan), josta tuli yleisimmin käytetty joukko-opin aksioomajärjestelmä. Kaikki matemaattiset käsitteet kuten luvut ja funktiot saadaan määriteltyä joukko-opillisesti. Aksiomaattinen joukko-oppi (ZFC) onkin osoittautunut niin käyttökelpoiseksi, että siitä on tullut modernin matematiikan perusta.

3.2 Naiivi joukko-oppi

Alkuperäisessä Georg Cantorin luomassa joukko-opissa, jota nykyään kutsutaan naiiviksi joukko-opiksi, ei ole varsinaista aksioomajärjestelmää[1], vaan lähtökohdaksi on otettu intuitiivisia eli välittömässä ymmärryksessä olevia perusperiaatteita. Täten riittää, että nämä mahdollisimman yksinkertaiset ja perustavaa laatua olevat periaatteet esitellään luonnollisen kielen (suomen kieli, englannin kieli jne) epämuodollisina ilmaisuina, ei matemaattisesti logiikan kaavoin ilmaistuina muodollisina aksioomina.

Joukko-opin peruskäsite joukko on juurikin edellämainitun kaltainen alkeellinen käsite, joka määritellään ainoastaan luonnollisen kielen avulla:

Joukko on järjestämätön kokoelma erillisiä hyvinmääriteltyjä olioita.

Naiivissa joukko-opissa oletetaan siis, että joukkoja ylipäänsä on olemassa. Joukon määritelmän käsitteitä ”kokoelma” ja ”olio” ei ole alkeellisuudessaan tarpeen määritellä enää tarkemmin. Hyvinmääritellyllä oliolla tarkoitetaan jotain tiettyä yksiselitteistä alkiota. Joukkoja merkitään yleensä isolla ja joukkojen *alkioita* pienellä kirjaimella.

Merkintä

$$a \in A$$

tarkoittaa, että joukko a on joukon A alkio tai toisin sanoen, että a kuuluu joukkoon A. Alkiorelaation symboli $\in$ on kreikkalainen kirjain epsilon. Käytetään vastaavasti lyhennysmerkintää $\notin$, kun alkio ei kuulu joukkoon. Esimerkiksi $a \notin A$. Sama olisi aukikirjoitettuna $\neg(a \in A)$. Mikäli a ja b ovat molemmat joukon A alkioita, voidaan merkinnän $a \in A \land b \in A$ sijasta merkitä lyhyemmin $a, b \in A$.

Joukkoja, joiden alkioilla on alkioita, kutsutaan *joukkoperheiksi* tai lyhyesti *perheiksi* ja näitä merkitään usein isolla kaunokirjaimella. Pyritään siis kirjoittamaan esimerkiksi $a \in A \in \mathcal{A}$, jotta lukijan olisi helpompi seurata, millä joukkojen tasolla liikutaan. Välttämätöntä tämä ei kuitenkaan ole. Joukkoja voidaan merkitä lähes millä symboleilla tahansa.

3.2.1 Erilaisia joukkoja ja niiden merkitseminen

Joukko voidaan ilmoittaa luettelemalla sen alkiot pilkulla erotettuna kaarisulkeiden sisällä.

Esimerkki 3.1. Esimerkkejä erilaisista joukoista.

$$A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$$

$$\mathcal{B} = \{\text{Linnunrata}, \{7\}\}$$

$$C = \{\text{Joukko-oppi}, 7, \text{Toyota}, \text{Linnunrata}, \text{Georg Cantor}\}$$

[1]Aksioomajärjestelmä on ristiriidaton lausejoukko, josta johdetaan kaikki muut lauseet käyttäen apuna loogista päättelyä.

$$\emptyset = \{\}$$

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

Kuten joukko C osoittaa, joukon alkioilla ei tarvitse olla keskenään mitään yhteistä. Riittää, että alkiot ovat yksikäsitteisiä eli ne viittaavat täsmälleen yhteen asiaan. Joukossa C alkion "Toyota" on siis tarkoitettava yleisesti Toyota-automerkkiä eikä tiettyä naapurin Eskon Corollaa, koska sitä ei ole joukon C alkiona näin tarkennettu. Sen sijaan kaikki luvut ovat luonnollisesti yksikäsitteisiä, mikä helpottaa suuresti, kun matematiikkaa lähdetään rakentamaan joukko-opillisesti.

Joukkoon voi kuulua joukkoja, kuten joukossa $\mathcal{B}$. Nyt Linnunrata, $\{7\} \in \mathcal{B}$, mutta $7 \notin \mathcal{B}$. Joukkoa, johon kuuluu vain yksi alkio, kutsutaan *yksiöksi*. Täten $\{7\}$ on yksiö.

Tyhjäksi joukoksi kutsutaan joukkoa, johon ei kuulu yhtään alkiota. Tyhjää joukkoa merkitään yleensä symbolilla $\emptyset$, mutta sille voidaan käyttää myös merkintää $\{\}$. Joukko $\{\emptyset\}$ ei kuitenkaan ole tyhjä, sillä siinä on yksi alkio, $\emptyset$.

Joukko voi olla myös äärettömän suuri eli siihen voi kuulua äärettömän monta alkiota kuten luonnollisten lukujen joukossa $\mathbb{N}$. Kun joukon alkiot voidaan järjestää siten, että ne noudattavat jotain selkeää säännönmukaisuutta, voidaan säännönmukaisuuden todentavien alkioiden jälkeiset tai edeltävät alkiot korvata kolmella pisteellä.

3.2.2 Mahtavuus

Joukon suuruuden eli koon sijasta puhutaan usein joukon *mahtavuudesta* eli *kardinaliteetista* (engl. cardinality) viitattaessa joukon alkioiden lukumäärään eli *kardinaalilukuun*. Täten kardinaaliluku on luonnollinen luku tai jokin ääretön kardinaaliluku. Äärettömyyksiäkin on erisuuruisia.

Joukon A mahtavuutta merkitään $|A|$. Kyseessä ei ole kuitenkaan itseisarvo, vaikka merkintä on sama, joten merkinnän tarkoitus pitäisi aina selvitä asiayhteydestä. Koska edellisen esimerkin joukkoihin A ja C kuuluu molempiin 5 alkiota, voidaan merkitä $|A| = |C| = 5$. Koska tässä tapauksessa molempia joukkoja yhdistää sama kardinaaliluku 5, sanotaan joukkojen A ja C olevan *yhtä mahtavat*. Tätä voidaan merkitä myös hieman lyhyemmin $A \approx C$.

Tarkennetaan vielä, että on väärin merkitä $A = C$, sillä selvästi joukkoihin kuuluu eri alkioita. On tärkeä huomata, että merkintä $A = C$ luetaan "joukot A ja C ovat samat" eikä "joukot A ja C ovat yhtäsuuret". Itseasiassa samat joukot ovat aina yhtäsuuret eli yhtä mahtavat, mutta yhtämahtavat joukot harvemmin ovat samat. Sekaannuksien välttämiseksi käytetään kuitenkin joukon suuruuden sijasta käsitettä joukon mahtavuus kuvaamaan joukon alkioiden lukumäärää. Mahtavuutta tarkastellaan lisää luvussa 3.3.5.

3.2.3 Ekstensionaalisuusperiaate

Eräs hyvin tärkeä joukkoja koskeva perusperiaate on *ekstensionaalisuusperiaate*, jonka mukaan joukot ovat samat, jos ja vain jos niillä on samat alkiot. Siis

$$A = B \Leftrightarrow \forall x (x \in A \Leftrightarrow x \in B).$$

Huomautus. Eräs huomattava ero aksiomaattisen ja naiivin joukko-opin välillä on se, että aksiomaattisessa joukko-opissa joukkojen alkiot ovat joukkoja, kun taas naiivissa joukko-opissa joukkojen alkiot eivät yleensä ole joukkoja vaan joitain muita tarkemmin määrittelemättömiä olioita kuten "a", "joukko-oppi" ja "sininen". Täten naiivissa tarkastelussa joukon $\{1, 2\}$ alkioilla ei ajatella olevan alkioita, mutta aksiomaattisessa joukko-opissa on määritelty ja $1 = \{\emptyset\}$ ja $2 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ (kts. 3.3.4).

Esimerkki 3.2. Tarkastellaan joukkoja

$$A = \{k, i, s, a\},$$

$$B = \{k, i, s, s, a\} \text{ ja}$$

$$C = \{k, a, s, s, i\}.$$

Joukkoon B on merkitty alkio s kahteen kertaan. Koska joukko määriteltiin kuitenkin kokoelmana erillisiä olioita, voidaan joukosta jättää kaikki alkioiden kopiot pois, tässä tapauksessa toinen s. Siis $B = \{k, i, s, s, a\} = \{k, i, s, a\}$. Vastaavasti $C = \{k, a, s, s, i\} = \{k, a, s, i\}$. Koska lisäksi joukko määriteltiin järjestämättömänä kokoelmana, ei alkioiden järjestyksellä ole väliä. Täten ekstensionaalisuusperiaatteen nojalla joukot A, B ja C ovat samat. Tämä merkitään $A = B = C$. Jos joukot eivät ole samat, käytetään merkintää $\neq$. Esimerkiksi $A \neq \mathbb{N}$, koska $1 \in \mathbb{N}$, mutta $1 \notin A$.

3.2.4 Osajoukko

Joukko A on joukon B *osajoukko*, jos jokainen joukon A alkio kuuluu joukkoon B. Tällöin joukon A sanotaan *sisältyvän* joukkoon B. Tätä merkitään

$$A \subseteq B.$$

Siis

$$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x (x \in A \Rightarrow x \in B).$$

Merkitään $A \nsubseteq B$, kun A ei ole B:n osajoukko. Jos $A \subseteq B$ ja $A \neq B$, niin A on B:n *aito osajoukko*, mitä merkitään $A \subset B$.

Ekstensionaalisuusperiaate on nyt mahdollista muokata toiseen muotoon:

$$\begin{aligned} A = B &\Leftrightarrow \forall x (x \in A \Leftrightarrow x \in B) \\ &\Leftrightarrow \forall x (x \in A \Rightarrow x \in B \wedge x \in B \Rightarrow x \in A) \\ &\Leftrightarrow \forall x (x \in A \Rightarrow x \in B) \wedge \forall x (x \in B \Rightarrow x \in A) \\ &\Leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A. \end{aligned}$$

Jos siis joukot sisältävät toisensa, ne ovat samat. Tätä hyödynnetään usein todistettaessa joukkojen samuutta.

3.2.5 Yleinen joukkoabstraktio

Edellä joukko ilmoitettiin luettelemalla sen alkiot. Toinen tapa merkitä joukkoa on ilmoittaa sen määrittelevä ominaisuus. Merkintä

$$\{x \mid P(x)\}$$

tarkoittaa niiden alkioiden joukkoa, joilla on ominaisuus P. Tässä niin sanotussa *yleisessä joukkoabstraktiossa* alkioiden on toteutettava pystyviivan | oikealla puolella ilmoitettu niitä koskeva ehto tai ehdot. Pystyviiva | luetaan ”siten, että’ tai "joille pätee, että”. Väittämää $P(x)$ kutsutaan *predikaatiksi* ja se sisältää muuttujaa x koskevan ominaisuuden P.

Esimerkki 3.3.

(a) Joukon

$$A = \{x \mid x \text{ on pääväri}\}$$

predikaatti $P(x) =$ ”x on pääväri”, joten $A = \{\text{punainen, sininen, keltainen}\}$.

(b) Joukossa

$$B = \{a \mid a^2 = 4 \wedge b \neq 2\}$$

on kaksi predikaattia, $P(a)$ ja $Q(b)$. Joukon B muodostavat ne alkiot a, jotka toteuttavat predikaatin $P(a)$. Vaikka joukon B muodostumisen kannalta ainoaa oleellista muuttujaa a ei esiinny predikaatissa $Q(b)$, on tämänkin predikaatin oltava tosi, koska predikaatteja erottaa konjunktio. Koska selvästi on olemassa sellainen b siten, että $b \neq 2$, saadaan joukoksi $B = \{-2, 2\}$. Jos $Q(b)$ olisi ollut jokin ristiriitainen predikaatti kuten "$b \neq b$", olisi joukon B looginen väittämä $P(a) \wedge Q(b)$ ollut epätosi, jolloin $B = \emptyset$.

3.2.6 Russellin paradoksi

Edellä esitetty yleinen joukkoabstraktio johtaa kuitenkin ongelmiin, joista Russellin paradoksi on kuuluisin: Tutkitaan onko olemassa joukkoa

$$R = \{x \mid x \notin x\}.$$

Selvitetään kuuluuko joukko R itseensä. Jos $R \in R$, niin joukon R määritelmän nojalla täytyy päteä $R \notin R$. Toisaalta, jos $R \notin R$, niin saman määritelmän nojalla $R \in R$. Siis $R \in R \Leftrightarrow R \notin R$, mikä on mahdotonta. Täten joukon R olemassaolo johtaa ristiriitaan, joten sitä ei voi olla olemassa.

Bertrand Russell (1872-1970) todisti paradoksillaan Naiivin joukko-opin sisäisesti ristiriitaiseksi. Joukko-oppi täytyi korjata...

3.2.7 Erotteluperiaate ja perusjoukko

Russellin paradoksi vältetään ottamalla käyttöön *erotteluperiaate*, joka sallii ainoastaan osajoukkojen muodostamisen:

$$\text{Jos } X \text{ on joukko ja } P(x) \text{ kaava, niin } \{x \in X \mid P(x)\} \text{ on joukko.}$$

Tässä X on jokin tilanteeseen sopiva tarkasteltavaa joukkoa laajempi joukko, jota nimitetään *perusjoukoksi*. Perusjoukkoa ei tarvitse määrittää, mutta usein se voidaan rajoittaa esimerkiksi reaalilukujen joukoksi, jos asioita käsitellään joukossa $\mathbb{R}$. Perusjoukko ei siis ole jokaisessa tilanteessa sama tietty joukko, vaan kuhunkin tilanteeseen voidaan valita sopiva perusjoukko.

Esimerkki 3.4. Tarkastellaan joukkoa

$$A = \{x \in X \mid x \text{ on yksinumeroinen alkuluku}\}.$$

Joukkoon A on eroteltu perusjoukosta X sellaiset alkiot x, jotka toteuttavat predikaatin $P(x) =$ "x on yksinumeroinen alkuluku". Ainoa asia, joka tunnetaan perusjoukosta X on, että sen on oltava tarkasteltavaa joukkoa A laajempi eli mahtavampi. Toisin sanoen $A \subset X$. Perusjoukkoa ei tarvitse määrittää tarkemmin, mutta koska alkulukujen joukon tiedetään olevan luonnollisten lukujen osajoukko, on joukon A tarkastelussa mielekkäämpää käyttää perusjoukkona joukkoa $\mathbb{N}$. Siis

$$A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ on yksinumeroinen alkuluku}\} = \{2, 3, 5, 7\}.$$

Tätä joukkoa voidaan merkitä yhtäpitävästi myös

$$A = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ ja } x \text{ on yksinumeroinen alkuluku}\},$$

mutta perusjoukko on yleensä tapana merkitä pystyviivan vasemmalle puolelle.

Esimerkki 3.5. Joukon

$$R^* = \{x \in X \mid x \notin x\}$$

alkioita ovat ne perusjoukkoon X kuuluvat alkiot, jotka eivät kuulu itseensä. Selvitetään kuuluuko joukko R^* itseensä.

Oletetaan ensin, että $R^* \in X$. Tällöin tilanne palautuu Russellin paradoksiin. Nimittäin joukon R^* määritelmän mukaan $R^* \in R^* \Leftrightarrow R^* \notin R^*$, mikä on ristiriita, joten oletus $R^* \in X$ on väärä.

Oletetaan sitten, että $R^* \notin X$. Tällöin joukon R^* määritelmän nojalla $R^* \notin R^*$.

Esimerkki 3.6. Joukkoon

$$A = \{x \in \mathbb{N} \mid \ x \text{ on pariton ja } x \leq 10\}$$

kuuluu kaikki sellaiset luonnolliset luvut, joilla on ominaisuus, että ne ovat parittomia ja pienempiä tai yhtäsuuria kuin luku 10. Tässä joukon siis määrittää kaksi predikaattia $P(x) =$ ”x on pariton” ja $Q(x) =$ ”$x \leq 10$”. Tämä joukko on sama kuin esimerkin 4.1 joukko $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$. Joissain tapauksissa joukko on siis mahdollista ilmaista sekä luettelemalla sen alkiot että ilmoittamalla joukkoa määrittelevä ominaisuus.

Mikäli ollaan kiinnostuneita vain positiivisista luvuista, perusjoukon valinta $\mathbb{N}$ on valittu luontevasti, sillä predikaatti hyväksyy vain parittomat alkiot. Perusjoukoksi olisi voitu valita myös esimerkiksi $\mathbb{Q}^+$ tai $\mathbb{R}^+$, jolloin joukko olisi pysynyt samana. Sitävastoin, jos perusjoukoksi olisi valittu vaikka $\mathbb{Z}$, niin joukkoon A kuuluisi myös kaikki negatiiviset parittomat luvut.

3.2.8 Potenssijoukko

Joukon A *potenssijoukko* $\mathcal{P}(A)$ on A:n kaikkien osajoukkojen joukko. Toisin sanoen

$$\mathcal{P}(A) = \{x \mid x \subseteq A\}.$$

Täten

$$\forall x \forall A(x \subseteq A \Leftrightarrow x \in \mathcal{P}(A)).$$

Kaikilla joukoilla A pätee $\emptyset \in \mathcal{P}(A)$ sekä $A \in \mathcal{P}(A)$. (Harjoitustehtävä)

Esimerkki 3.7. Olkoon $A = \{1, 2, 3\}$. Tällöin

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(A) &= \mathcal{P}\{1, 2, 3\} \\ &= \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}\}.\end{aligned}$$

Laskemalla nähdään, että $|\mathcal{P}(A)| = 8 = 2^3$. Itseasiassa jos joukossa A on n alkiota, niin joukossa $\mathcal{P}(A)$ on aina 2^n alkiota. Tämä seuraa siitä, että jokainen mielivaltaisen joukon A alkio joko kuuluu joukon A osajoukkoon tai ei. Täten jokaisella A:n alkiolla on kaksi mahdollisuutta, jolloin kombinatoriikasta tutun tuloperiaatteen nojalla erilaisia vaihtoehtoja, tässä tapauksessa osajoukkoja, on 2^n kpl.

3.2.9 Joukkoalgebraa

Esitellään seuraavaksi joukkoalgebrasta yleisimpiä joukkojen välisiä laskutoimituksia ja niihin liittyviä laskusääntöjä, jotka muistuttavat hieman aritmetiikasta tuttuja laskutoimituksia. Joukkoja voidaan esimerkiksi yhdistää tai vähentää toisistaan. Venn-diagrammilla voidaan havainnollistaa eri joukkojen välisiä suhteita.

Joukkojen A ja B *joukko-opillinen erotus* eli *joukkoerotus* $A \setminus B$ (Lue: ”A poistettuna B:n alkiot” tai ”A pois B”) on joukko, johon kuuluvat kaikki sellaiset A:n alkiot, jotka eivät kuulu joukkoon B. Muodollisesti ilmaistuna $A \setminus B = \{x \in A \mid x \notin B\}$.

Kun joukkoerotus otetaan perusjoukon suhteen, on kyseessä *komplementtijoukko* eli lyhyesti *komplementti*. Joukon A komplementtia merkitään $\overline{A}$ (Lue: ”A:n komplementti” tai ”komplementti A:sta”) ja siihen kuuluu kaikki perusjoukon alkiot, jotka eivät kuulu A:han. Siis $\overline{A} = \{x \in X \mid x \notin A\}$.

Joukkojen A ja B *yhdisteeseen* $A \cup B$ (Lue: ”A yhdiste B”) kuuluvat kaikki sellaiset alkiot, jotka kuuluvat jompaan kumpaan joukoista A tai B tai molempiin. Täten $A \cup B = \{x \in X \mid x \in A \vee x \in B\}$.

Vastaavasti *leikkaukseen* $A \cap B$ (Lue: "A leikkaus B) kuuluvat ainoastaan joukkojen A ja B yhteiset alkiot. Toisin sanoen $A \cap B = \{x \in X \mid x \in A \wedge x \in B\}$. Jos $A \cap B = \emptyset$, sanotaan joukkojen A ja B olevan *erilliset*.

Esimerkki 3.8. Palataan vielä esimerkkiin 4.1, jossa tarkasteltiin seuraavia joukkoja:

$$A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$$

$$\mathcal{B} = \{\text{Linnunrata}, \{7\}\}$$

$$C = \{\text{Joukko-oppi}, 7, \text{Toyota}, \text{Linnunrata}, \text{Georg Cantor}\}$$

$$\emptyset = \{\}$$

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

Tällöin seuraavat laskutoimitukset pitävät paikkansa:

1. $C \setminus \mathcal{B} = \{\text{Joukko-oppi}, 7, \text{Toyota}, \text{Georg Cantor}\}$
2. Olkoon perusjoukkona $X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Tällöin
   (a) $\overline{A} = \{0, 2, 4, 6, 8\}$
   (b) $\overline{\emptyset} = X$
3. (a) $C \cup \mathcal{B} = \{\text{Joukko-oppi}, 7, \{7\}, \text{Toyota}, \text{Linnunrata}, \text{Georg Cantor}\}$
   (b) $A \cup \emptyset = A$
   (c) $A \cup \mathbb{N} = \mathbb{N}$
4. (a) $C \cap \mathcal{B} = \{\text{Linnunrata}\}$
   (b) $\mathcal{B} \cap \mathbb{N} = \emptyset$. Täten $\mathcal{B}$ ja $\mathbb{N}$ ovat erilliset.
   (c) $A \cap \mathbb{N} = A$

Esimerkki 3.9. Yhdisteen ja komplementin määritelmistä seuraa suoraan $A \cup \overline{A} = X$, missä X on perusjoukko. Jos alkioita ei olisi rajoitettu perusjoukkoon, joukko ja sen komplementtijoukon yhdiste muodostaisi aina kaikkien joukkojen joukon. Tällaista joukkoa ei kuitenkaan ole olemassa ja se todistetaan myöhemmin.

3.2.10 Yleinen yhdiste ja leikkaus

Perheen $\mathcal{A}$ yhdisteeseen kuuluu kaikki $\mathcal{A}$:n alkioiden alkiot. Toisin sanoen perheen $\mathcal{A}$ yhdiste on

$$\bigcup \mathcal{A} = \{x \mid \exists A \in \mathcal{A}(x \in A)\}.$$

Epätyhjän perheen $\mathcal{A}$ leikkaukseen puolestaan kuuluvat vain kaikki sellaiset $\mathcal{A}$:n alkioiden alkiot, jotka kuuluvat jokaiseen $\mathcal{A}$:n alkioon. Toisin sanoen perheen $\mathcal{A}$ leikkaus on

$$\bigcap \mathcal{A} = \{x \mid \forall A \in \mathcal{A}(x \in A)\}, \quad \text{kun } \mathcal{A} \neq \emptyset.$$

Esimerkki 3.10. Olkoon $A = \{a, \{b\}, \{\{c\}\}\}$ ja $B = \{\{a, b, \emptyset\}, \{a, b\}, \{\emptyset, b\}\}$, missä olioiden a, b ja c ajatellaan olevan alkiottomia joukkoja kuten naiivissa joukko-opissa on tapana. Tällöin

- $\bigcup A = \{b, \{c\}\}$,
- $\bigcup \bigcup A = \{c\}$,
- $\bigcap B = \{b\}$ ja
- $\bigcap \bigcup A = \emptyset$.

3.2.11 Harjoitustehtäviä naiivista joukko-opista

1. Merkitse

   (a) yhtälön $2x^2 - 32 = 0$ ratkaisujen joukko,

   (b) yhtälön $\pi x^4 + 3x^2 + 1 = 0$ ratkaisujen joukko,

   (c) parittomien negatiivisten kokonaislukujen joukko.

2. Mitkä seuraavista väitteistä ovat tosia, kun $\bigstar$ -merkin tilalla on vuorollaan alkiorelaatio $\in$, sisältyvyysrelaatio $\subseteq$ ja yhtämahtavuusrelaatio $\approx$. Tarkastele kutakin tilannetta erikseen.

   (a) $\{\emptyset\} \bigstar \{\emptyset\}$

   (b) $\{\emptyset\} \bigstar \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

   (c) $\{\{\{\}\}\} \bigstar \{\{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$

   (d) $\emptyset \bigstar \{\{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$

3. Osoita, etteivät mitkään joukoista $\emptyset$, $\{\emptyset\}$, $\{\{\emptyset\}\}$ ja $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ ole keskenään samoja.

4. Luettele seuraavien joukkojen osajoukot.

   (a) $\{\{\emptyset\}\}$

   (b) $\{1, 2, 3\}$

   (c) $\emptyset$

   (d) $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

   (e) $\mathcal{P}(\emptyset)$

5. Anna esimerkit joukoista A ja B, joilla pätee

   (a) $A \in B \wedge A \subseteq B$,

   (b) $A \in B \wedge A \nsubseteq B$,

   (c) $A \notin B \wedge A \subseteq B$ ja

   (d) $A \subseteq B \subseteq A$.

6. Anna esimerkit joukoista x, A, B ja C, joilla pätee

   (a) $x \in A \wedge \mathcal{P}(x) \notin \mathcal{P}(A)$,

   (b) $\bigcup A = \bigcup B \wedge A \neq B$,

   (c) $A \setminus (B \setminus C) \neq (A \setminus B) \setminus C \quad$ ja

   (d) $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \setminus C, \quad$ kun $A \neq B \neq C$.

7. Osoita, että kaikilla joukoilla A pätee

   (a) $\emptyset \in \mathcal{P}(A)$,

   (b) $A \in \mathcal{P}(A)$.

8. Olkoon $A = \mathcal{P}(\emptyset)$. Määritä joukko $\mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$ ja anna lopullinen vastaus käyttäen tyhjälle joukolle merkintää $\{\}$.

9. Olkoon $A \subseteq B$. Osoita, että tällöin

   (a) $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$,

   (b) $\bigcup A \subseteq \bigcup B$.

10. Osoita, että $\forall x \in A(x \subseteq \bigcup A)$.

11. Todista, että $A = B \Leftrightarrow \mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(B)$.

12. Olkoot A, B ja C joukkoja. Tarkastellaan seuraavia tapauksia:

    1. $A \in B \in C$
    2. $A \in B \subseteq C$
    3. $A \subseteq B \in C$
    4. $A \subseteq B \subseteq C$

    (a) Missä tapauksissa väite $A \in C$ on mahdollinen? Anna näissä tapauksissa esimerkit joukoista A, B ja C.

    (b) Mistä tapauksesta voi johtaa väitteen $A \in C$? Perustele.

13. Todista seuraavat väittämät oikeaksi tai vääräksi.

    (a) $x \in \{x \mid \emptyset \subseteq x \wedge x \notin x\}$.

    (b) Joukosta $\{2n \mid n \in \mathbb{N}\}$ voidaan erotella joukko $\{n \in \mathbb{N} \mid n^3 - \sqrt{9}x^2 + 2x\}$.

    (c) Joukosta $\{3n \mid n \in \mathbb{N}\}$ voidaan erotella joukko $\{n \in \mathbb{N} \mid n^2 - 9n = -18\}$.

    (d) $(A \notin B \wedge B \notin C) \Rightarrow A \notin C$.

    (e) $\exists A \exists B(A \subseteq B \wedge B \in A)$.

14. Olkoon $A = \{\{a\}, b, c\}$, $B = \{a, \{b\}, c\}$ ja $C = \{a, b, \{c\}\}$. Olkoon lisäksi perusjoukko $X = A \cup B \cup C$. Määritä seuraavat joukot:

(a) X

(b) $A \cap C$

(c) $(A \cup B) \cap C$

(d) $\bigcap(\overline{A \cup C})$

(e) $\bigcup\big(X \setminus ((A \cap B) \cup (A \cap B) \cup (B \cap C))\big)$

(f) $\overline{B \cup C} \cap ((A \setminus B) \cup (C \setminus A))$

3.3 Aksiomaattinen joukko-oppi

Paradoksit olivat esimerkkejä naiiviin joukko-oppiin sisältyvistä neäennäisesti oikeista otaksumista, jotka lähemmässä tarkastelussa osoittautuivat sisäisesti ristiriitaisiksi mahdottomuuksiksi. Vaikka Russellin paradoksista selvittiin perusjoukon käyttöönotolla, paradoksien esitteleminen johti aksiomaattisen joukko-opin kehittämiseen, sillä aksioomat tarjosivat skeptikoille helpon keinon osoittaa vääräksi näennäisesti oikeita otaksumia. Joukko-opin rakentaminen tuli suoraviivaiseksi kun kaikki tulokset olivat loogisen päättelyn tulosta muutamista sovituista aksioomista. Tämä teki siitä myös johdonmukaisesti tarkastettavaa.

ZFC-aksioomajärjestelmään kuuluu 8 aksioomaa ja 2 aksioomaskeemaa, jotka formalisoidaan predikaattilogiikassa. Aksioomaskeema sisältää yhden tai useamman metamuuttujan, johon sijoittamalla jokin joukko-opin kaava saadaan tätä vastaava aksiooma. Koska kaavoja on ääretön määrä, aksioomaskeema vastaa ääretöntä aksioomajoukkoa. ZFC-aksioomajärjestelmään kuuluvat seuraavat aksioomat ja aksioomaskeemat, joissa osassa käytetään lyhennysmerkintöjä ja käsitteitä, jotka esitellään myöhemmin:

A1. **Ekstensionaalisuusaksiooma**
$\forall A \forall B(\forall x(x \in A \leftrightarrow x \in B) \rightarrow A = B)$
Jos kahdella joukolla on täsmälleen samat alkiot, ne ovat sama joukko.

A2. **Tyhjän joukon aksiooma**
$\exists B \forall x(x \notin B)$
On olemassa joukko, jossa ei ole yhtään alkiota. Tämä aksiooma takaa myös, että ylipäänsä on olemassa ainakin yksi joukko.

A3. **Pariaksiooma**
$\forall x \forall y \exists A \forall z(z \in A \leftrightarrow (z = x \vee z = y))$
Jokaista kahta joukkoa kohti on olemassa joukko (järjestämätön pari), johon kuuluvat täsmälleen nämä joukot.

A4. **Potenssijoukkoaksiooma**
$\forall A \exists S \forall x(x \in S \leftrightarrow x \subseteq A)$
Jokaista joukkoa A kohti on olemassa sellainen joukko (potenssijoukko), johon kuuluvat täsmälleen kaikki joukon A osajoukot.

A5. **Yhdisteaksiooma**
$\forall \mathcal{A} \exists U \forall x (x \in U \leftrightarrow \exists A \in \mathcal{A} (x \in A))$
Jokaista joukkoa $\mathcal{A}$ kohti on olemassa joukko U ($\mathcal{A}$:n yhdiste), johon kuuluvat täsmälleen joukon $\mathcal{A}$ alkioiden alkiot.

A6. **Äärettömyysaksiooma**
$\exists A (\emptyset \in A \land \forall a (a \in A \rightarrow a \cup \{a\} \in A))$
On olemassa induktiivinen joukko. Tämä aksiooma takaa äärettömän kokoisen joukon olemassaolon.

A7. **Erotteluskeema**
Jokaista joukko-opin kaavaa $\phi(x, t_1, \ldots, t_n)$, jossa ei esiinny muuttujasymbolia B, vastaa aksiooma
$\forall t_1, \ldots t_n \forall C \exists B \forall x (x \in B \leftrightarrow x \in C \land \phi(x, t_1, \ldots, t_n))$.
On olemassa joukko B, johon kuuluvat täsmälleen ne joukon C alkiot, jotka toteuttavat ehdon $\phi(x, t_1, \ldots, t_n)$.

A8. **Korvausskeema**
Jokaista kaavaa $\phi(x, y)$, jossa ei esiinny muuttujasymbolia B, vastaa aksiooma
$\forall A (\forall x \in A \forall y \forall z (\phi(x, y) \land \phi(x, z) \rightarrow y = z).$
$\rightarrow \exists B \forall y (y \in B \leftrightarrow \exists x \in A \phi(x, y)))$
Joukon kuvajoukko kuvauksessa on joukko. [12]

A9. **Säännöllisyysaksiooma**
$\forall A (A \neq \emptyset \rightarrow \exists m \in A (m \cap A = \emptyset))$
Jokaisella epätyhjällä joukolla A on sellainen alkio m, että A ja m ovat erilliset joukot.

A10. **Valinta-aksiooma**
Jokaista $F \colon I \rightarrow \mathcal{P}(A) \setminus \{\emptyset\}$ vastaa $f \colon I \rightarrow A$, jolle pätee $f(x) \in F(x)$, kun $x \in I$.

Huomautus. Erotteluskeeman pystyy itseasiassa johtamaan käyttäen tyhjän joukon aksioomaa ja korvausskeemaa. Se on kuitenkin jätetty listalle historiallisista ja käytännöllisistä syistä. Se on intuitiivisesti selvä ja helpottaa joukko-opin rakentamista.

Aksioomien järjestyksellä tai numeroinnilla ei sinällään ole merkitystä, mutta tässä ne on numeroitu, jotta niihin olisi myöhemmin helpompi viitata. Edellä olevista aksioomista käydään tässä kappaleessa tarkemmin läpi seitsemän ensimmäistä. Kolme viimeistä aksioomaa mainitaan pintapuolisesti ja perehtyminen jätetään kiinnostuneille itse tutkittavaksi. Joissain aksioomissa käytetään predikaattilogiikan ulkopuolisia lyhennysmerkintöjä selkeyden vuoksi, mutta nämä on mahdollista purkaa. Oleellista onkin aksioomien formalisoituvuus ja merkityssisällöt. Esimerkiksi valinta-aksioomalle on olemassa useita yhtäpitäviä muotoiluja, jotka voidaan johtaa toinen toisistaan käyttämällä hyväksi muita ZFC:n aksioomia. Aksioomat onkin valittu siten, että ne vastaavat epämuodollisia käsityksiämme joukoista ja ovat erotteluskeemaa lukuunottamatta toisistaan riippumattomia.

Kuten naiiviin joukko-oppiin, myös ZFC-aksioomajärjestelmään kuuluvat primitiiviset käsitteet joukko, alkiorelaatio $\in$ ja looginen yhtäsuuruus $=$. Kaikki joukko-opin kaavat saadaan muodostettua muotoa $A \in B$ ja $A = B$ olevista predikaattilogiikan atomikaavoista käyttämällä konnektiiveja $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ ja $\leftrightarrow$ sekä kvanttoreita $\forall$ ja $\exists$. Lisäksi ryhmittelyyn käytetään kaarisulkeita "(" ja ")".

Muistetaan myös, että joukko-opissa kaikki tarkasteltavat kohteet ovat joukkoja, joten myös kaikki joukkojen alkiot ovat joukkoja.

3.3.1 Aksioomia ja niiden takaamia joukkoja

Käydään seuraavaksi läpi äsken lueteltuja aksioomia ja tutustutaan niiden merkityksiin tarkemmin. Muotoillaan ensimmäiseksi aksioomaksi ekstensionaalisuusperiaate:

A1. **Ekstensionaalisuusaksiooma**:

$$\forall A \forall B(\forall x(x \in A \leftrightarrow x \in B) \rightarrow A = B)$$

Ekstensionaalisuusaksiooman mukaan mitkä tahansa kaksi joukkoa ovat samat, jos niillä on samat alkiot. Tämä vastaa hyvin intuitiivista käsitystä joukosta. Huomion arvoista aksioomassa on implikaatio, jonka tilalla ekstensionaalisuusperiaatteessa käytettiin ekvivalenssiä. Käänteinen implikaatio on kuitenkin aina loogisesti tosi ja voidaan todistaa käyttäen logiikan aksioomia. Siispä viitattaessa ekstensionaalisuuteen tarkoitetaan joukkojen olevan samat, jos ja vain jos niillä on samat alkiot. Aksioomat on muotoiltu siten, että niistä on karsittu kaikki ylimääräinen pois.

Ekstensionaalisuudesta seuraa myös, että äärellisen joukon voi määrätä luettelemalla sen alkiot. Sovitaan, että joukkoa A merkitään $A = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, missä $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ovat joukon A alkiot.

Toiseksi aksioomaksi otetaan tyhjän joukon aksiooma, joka takaa alkiottoman joukon olemassaolon. Tämä puolestaan tarkoittaa, että on olemassa ainakin yksi joukko, mikä osaltaan on myös hyvin oleellista.

A2. **Tyhjän joukon aksiooma**:

$$\exists B \forall x(x \notin B)$$

Määritelmä 3.1. $\emptyset$ on joukko, jossa ei ole alkioita.

Osoitetaan, että $\emptyset$ on *hyvinmääritelty*: Riittää osoittaa joukko $\emptyset$ yksikäsitteiseksi, mikä tarkoittaa, että merkintää $\emptyset$ on vastattava täsmälleen yksi joukko. Tyhjän joukon aksiooma takaa, että on olemassa joukko, jossa ei ole alkioita. Toisaalta ekstensionaalisuusaksiooman nojalla tällaisia joukkoja on vain yksi. Nimittäin olkoon x mielivaltaisesti valittu joukko ja olkoot $\emptyset$ ja $\emptyset^*$ alkiottomia joukkoja. Tällöin $x \notin \emptyset$ ja $x \notin \emptyset^*$, jolloin pätee $\forall x(x \in \emptyset \leftrightarrow x \in \emptyset^*)$. Siis ekstensionaalisuusaksiooman ja modus ponens -päättelysäännön nojalla $\emptyset = \emptyset^*$ Täten $\emptyset$ on hyvinmääritelty. Mille tahansa joukolle A siis pätee $A = \emptyset \leftrightarrow \forall x(x \notin A)$.

A3. **Pariaksiooma**:

$$\forall x \forall y \exists A \forall z (z \in A \leftrightarrow (z = x \lor z = y))$$

Määritelmä 3.2. *Järjestämätön pari* $\{x, y\}$ on joukko, jonka alkioina ovat täsmälleen joukot x ja y.

Pari voidaan osoittaa hyvinmääritellyksi ekstensionaalisuus- ja pariaksiooman nojalla vastaavaan tapaan kuin tyhjän joukon tapauksessa. Olkoon x joukko. Pariaksiooman nojalla myös $\{x, x\}$ on joukko ja ekstensionaalisuuden nojalla $\{x, x\} = \{x\}$. Joukkoa $\{x\}$ kutsutaan joukon x *yksiöksi*, koska siihen kuuluu täsmälleen yksi alkio.

Palautetaan mieleen, että joukko A on joukon B *osajoukko*, jos jokainen joukon A alkio kuuluu joukkoon B. Siis

$$A \subseteq B \leftrightarrow \forall x (x \in A \to x \in B).$$

Käyttäen osajoukko-merkintää, saadaan seuraavan aksiooman ulkoasu hieman lyhyemmäksi ja helppolukuisemmaksi.

A4. **Potenssijoukkoaksiooma**:

$$\forall A \exists S \forall x (x \in S \leftrightarrow x \subseteq A)$$

Määritelmä 3.3. *Potenssijoukko* $\mathcal{P}(A)$ on joukko, jonka alkioita ovat täsmälleen kaikki joukon A osajoukot.

Potenssijoukko on hyvin määritelty ekstensionaalisuus- ja potenssijoukkoaksiooman nojalla.

A5. **Yhdisteaksiooma**:

$$\forall \mathcal{A} \exists U \forall x (x \in U \leftrightarrow \exists A \in \mathcal{A} (x \in A))$$

Määritelmä 3.4. Joukon $\mathcal{A}$ *yhdiste* $\bigcup \mathcal{A}$ on joukko, jonka alkioita ovat kaikki joukon $\mathcal{A}$ alkioiden alkiot.

Yhdiste on hyvinmääritelty ekstensionaalisuus- ja yhdisteaksiooman nojalla.

Lause 3.1 ($A5^*$. Yhdisteaksiooman heikko versio)**.**

$$\forall C \forall D \exists S \forall x (x \in S \leftrightarrow (x \in C \lor x \in D))$$

Todistus. Olkoot C ja D joukkoja. Pariaksiooman nojalla on olemassa joukko $\{C, D\}$. Yhdisteaksiooman nojalla

$$\exists U \forall x (x \in U \leftrightarrow \exists A \in \{C, D\} (x \in A))$$

eli

$$\exists U \forall x (x \in U \leftrightarrow x \in C \lor x \in D).$$

Koska joukoista C ja D ei oletettu mitään erityistä, edellinen pätee kaikilla joukoilla C ja D. Siis

$$\forall C \forall D \exists S \forall x (x \in S \leftrightarrow (x \in C \lor x \in D)).$$

□

Määritelmä 3.5. *Yhdiste* $A \cup B$, on joukko, johon kuuluvat sellaiset joukot, jotka kuuluvat joukkoon A tai B.

Yhdiste on hyvinmääritelty aksioomien A1 ja A5* perusteella. Pariaksioomalla saatiin muodostettua kahden alkion joukkoja: Jos x on joukko, niin $\{x, x\} = \{x\}$ on joukko. Tällöin myös $\{x, \{x\}\}$ on joukko ja niin edelleen. Käyttämällä aksioomia A3 ja A5* saadaan muodostettua muita äärellisen kokoisia joukkoja. Esimerkiksi kolmen joukon x_1, x_2 ja x_3 muodostama joukko $\{x_1, x_2, x_3\} = \{x_1, x_2\} \cup \{x_3\}$.

Tyhjän joukon aksiooma, pariaksiooma, potenssijoukkoaksiooma ja yhdisteaksiooma takaavat jokainen omalla tietyllä ehdollaan määräytyvän joukon olemassaolon. Toisin sanoen ne määräävät joukon, johon kuuluvat sellaiset alkiot, jotka toteuttavat tietyn ehdon eli predikaattilogiikan kaavan $\phi(x, t_1, \ldots, t_n)$. Tässä x viittaa muodostetun joukon alkioon ja $t_1, \ldots, t_n$ aksioomassa mahdollisesti esiintyviin muihin joukkoihin.

Ekstensionaalisuusaksioomaa lukuunottamatta aksiooomat ovat olleet muotoa

$$\forall t_1, \ldots, \forall t_n \exists B \forall x (x \in B \leftrightarrow \phi(x, t_1, \ldots, t_n))$$

paitsi tyhjän joukon aksiooma, mutta sekin voitaisiin kirjoittaa muotoon

$$\exists B \forall x (x \in B \leftrightarrow x \neq x).$$

Joukkoabstraktiota käyttäen tyhjän joukon aksiooman määräämä joukko voitaisiin kirjoittaa $\{x \mid x \neq x\}$ ilman ongelmia, mutta yleisesti kaikki muotoa $A = \{x \mid P(x)\}$ olevat "joukot" eivät ole joukkoja, koska osa johtaa paradokseihin kuten kappaleessa 3.2.6 osoitettiin. Jos kuitenkin valitaan mikä tahansa joukko (perusjoukko) C siten, että $A \subseteq C$, ongelma vältetään. Tällöin $A = \{x \in C \mid P(x)\}$. Jotta tällainen joukko voitaisiin yleisessä tapauksessa muodostaa, muotoillaan aiempi erotteluperiaate aksioomaskeemaksi, jonka avulla mistä tahansa joukosta voidaan erotella sellaiset alkiot, joilla on jokin tietty ominaisuus.

A7. **Erotteluskeema**:
Jokaista joukko-opin kaavaa $\phi(x, t_1, \ldots, t_n)$, jossa ei ole muuttujasymbolia B, vastaa aksiooma

$$\forall t_1, \ldots t_n \forall C \exists B \forall x (x \in B \leftrightarrow x \in C \land \phi(x, t_1, \ldots, t_n)).$$

Erotteluaksiooma kertoo, että olemassaolevasta joukosta C voidaan erotella alkiot x, joilla on parametrien $t_1, \ldots, t_n$ avulla määriteltävä ominaisuus $\phi(x, t_1, \ldots, t_n)$. Toisin sanoen voidaan muodostaa joukko

$$B = \{x \in C \land \phi(x, t_1, \ldots, t_n)\} = \{x \in C \mid \phi(x, t_1, \ldots, t_n)\},$$

jossa sovitaan, että merkitään pystyviivalla | konjunktiota, sillä joukko on määritelty predikaatin avulla. Joukkojen määrittämistä ominaisuuksien avulla kutsutaan joukkoabstraktioksi ja se sisältää 3 osaa: muuttujan, tätä muuttujaa koskevan predikaatin sekä näitä erottavan pystyviivan.

Määritelmä 3.6. Joukkoon $B = \{x \in C \mid \phi(x, t_1, \ldots, t_n)\}$ kuuluvat täsmälleen ne joukon C alkiot, jotka toteuttavat kaavan $\phi(x, t_1, \ldots, t_n)$.

Joukko B on hyvinmääritelty, koska se on ekstensionaalisuuden ja erotteluaksiooman nojalla yksikäsitteinen jokaisella eri kaavalla $\phi(x, t_1, \ldots, t_n)$. Koska B on yksikäsitteinen, sitä voidaan merkitä jollain tietyllä tavalla, jossa on mahdollisesti mukana parametrejä $t_1, \ldots, t_n$.

Esimerkki 3.11. Kaavaan $\phi(x, A) = x \in A$ liittyvä erotteluaksiooma on

$$\forall A \forall S \exists B \forall x (x \in B \leftrightarrow x \in S \wedge x \in A),$$

jota vastaava joukko B määritellään olevan joukkojen S ja A leikkaus $S \cap A$. Määritelmän 3.6 nojalla

$$\begin{aligned} S \cap A &= \{x \in S \mid x \in A\} \\ &= \{x \mid x \in S \wedge x \in A\} \\ &= \{x \mid x \in A \wedge x \in S\} \\ &= \{x \in A \mid x \in S\} \\ &= A \cap S. \end{aligned}$$

Vastaavasti tyhjän joukon aksiooma, pariaksiooma, potenssijoukon aksiooma, yhdisteaksiooma ja yhdisteaksiooman heikko versio kukin takaavat niitä vastaavan joukon olemassaolon vaatimatta tämän joukon sisältyvän johonkin toiseen joukkoon. Täten näitä joukkoja määrittäviä predikaatteja vastaavien erotteluaksioomien nojalla nämä joukot voidaan kirjoittaa

$$\begin{aligned} \emptyset &= \{x \mid x \neq x\} \\ \{x, y\} &= \{z \mid z = x \vee z = y\} \\ \mathcal{P}(A) &= \{x \mid x \subseteq A\} \\ \bigcup \mathcal{A} &= \{a \mid \exists A \in \mathcal{A}(a \in A)\} \\ A \cup B &= \{x \mid x \in A \vee x \in B\}. \end{aligned}$$

Lause 3.2. *Epätyhjällä joukolla $\mathcal{A}$ on olemassa leikkaus*

$$\bigcap \mathcal{A} = \{x \mid \forall A \in \mathcal{A}(x \in A)\}.$$

Todistus. Koska $\mathcal{A}$ on epätyhjä, voidaan valita $A_0 \in A$. Erotteluaksiooman nojalla joukko $B = \{x \in A_0 \mid \forall A \in \mathcal{A}(x \in A)\}$ on olemassa. Koska ehto $x \in A_0$ sisältyy ehtoon $\forall A \in \mathcal{A}(x \in A)$, niin $B = \bigcap \mathcal{A}$. □

Esimerkki 3.12. Koska joukon $\mathcal{A}$ yleinen leikkaus sisältää kaikki sellaiset alkiot, jotka kuuluvat jokaiseen joukon $\mathcal{A}$ alkiohin, niin

$$\bigcap \{\{4, 2, 7\}, \{1, 7, 7, 3, 8, 2, 2, 9, 14, 17, 77, 1\}, \{1, 2\}\} = \{2\}.$$

Yleinen joukkoabstraktio sallisi esimerkiksi joukon $\{x \mid x = x\}$ olemassaolon. Tämä olisi selvästi kaikkien joukkojen joukko, mutta...

Lause 3.3. *Kaikkien joukkojen joukkoa ei ole olemassa.*

Todistus. Oletetaan vastoin väitettä, että A on kaikkien joukkojen joukko. Kaavaa $x \notin x$ vastaavan erotteluaksiooman nojalla on olemassa joukko

$$R = \{x \in A \mid x \notin x\}.$$

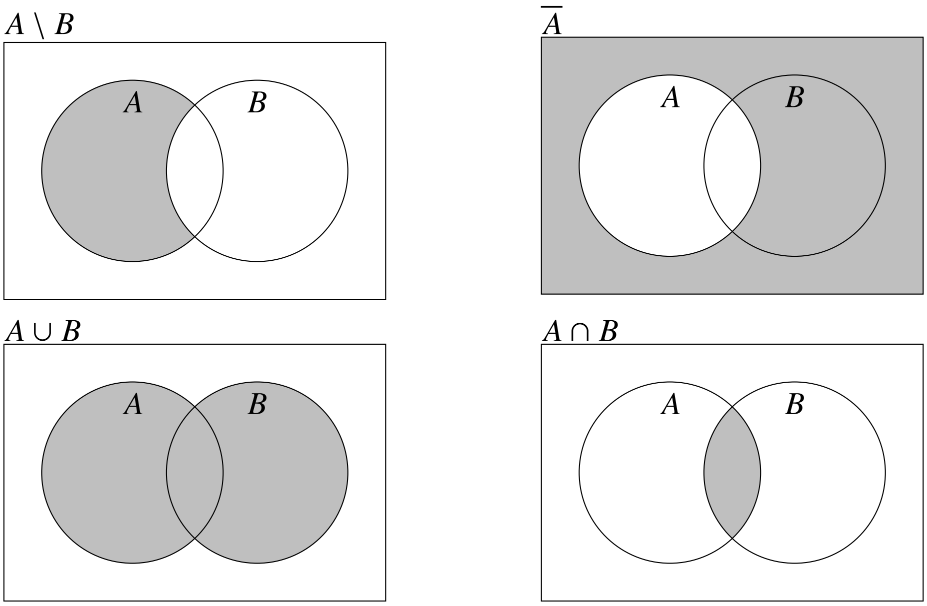
Koska A on kaikkien joukkojen joukko, niin myös $R \in A$. Tarkastellaan kahta eri tapausta:
1) Jos $R \in R$, niin joukon R määritelmän mukaan $R \notin R$
2) Siis $R \notin R$. Koska $R \in A$, täyttyvät joukon R ehdot, jolloin $R \in R$.
Siis $R \in R \leftrightarrow R \notin R$ eli päädyttiin Russellin paradoksiin. Tämä on selkeästi ristiriita, joten vastaoletus on väärä ja lause tosi. □

3.3.2 Joukkoalgebran sääntöjä

Palautetaan mieleen seuraavat joukko-operaatiot:

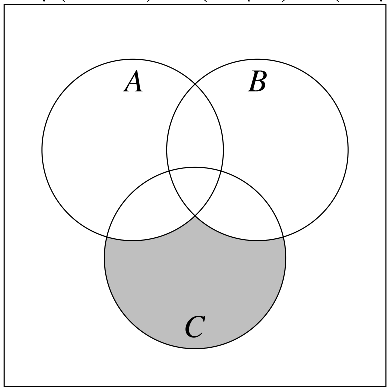
$$\text{Joukkoerotus } A \setminus B = \{x \in A \mid x \notin B\}$$
$$\text{Komplementti } \overline{A} = \{x \in X \mid x \notin A\}$$
$$\text{Yhdiste } A \cup B = \{x \in X \mid x \in A \lor x \in B\}$$
$$\text{Leikkaus } A \cap B = \{x \in X \mid x \in A \land x \in B\}$$

Näitä kuvaavat Venn-diagrammit ovat:

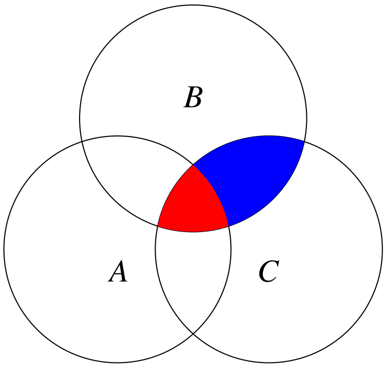


Venn-diagrammeilla on mahdollista esittää myös monimutkaisempia joukkoja. Seuraava Venn-diagrammi havainnollistaa toista De Morganin laeista:

$C \setminus (A \cup B) = (C \setminus A) \cap (C \setminus B)$



Esimerkiksi raitoja tai eri värejä käyttämällä on mahdollista esittää useampikin joukko yhdessä Venn-diagrammissa. Seuraavassa Venn-diagrammissa joukko $(B \cup C) \setminus A$ on kuvattu sinisellä värillä ja joukko $A \cap B \cap C$ punaisella värillä:



Esitellään sitten tärkeimmät joukkoalgebran lait, jotka pätevät kaikille joukoille.

Vaihdannaisuus:

$$A \cup B = B \cup A \quad \text{ja} \quad A \cap B = B \cap A$$

Liitännäisyys:

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C \quad \text{ja}$$
$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

Osittelulait:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \quad \text{ja}$$
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

De Morganin lait:

$$C \setminus (A \cup B) = (C \setminus A) \cap (C \setminus B) \quad \text{ja}$$
$$C \setminus (A \cap B) = (C \setminus A) \cup (C \setminus B)$$

Tyhjään joukkoon liittyviä lakeja:

$$
\begin{aligned}
A \cup \emptyset &= A, \\
A \cap \emptyset &= \emptyset \quad \text{ja} \\
A \cap (C \setminus A) &= \emptyset.
\end{aligned}
$$

Todistetaan näistä malliksi ensimmäinen osittelulaki käyttäen ekvivalenssiketjua. Jokaisella x pätee

$$
\begin{aligned}
& x \in A \cap (B \cup C) \\
\Leftrightarrow\ & x \in A \wedge x \in B \cup C \\
\Leftrightarrow\ & x \in A \wedge (x \in B \vee x \in C) \\
\Leftrightarrow\ & (x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in C) \\
\Leftrightarrow\ & x \in A \cap B \vee x \in A \cap C \\
\Leftrightarrow\ & x \in (A \cap B) \cup (A \cap C),
\end{aligned}
$$

joten ekstensionaalisuusaksiooman nojalla $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

3.3.3 Relaatio ja funktio

Jotta voitaisiin joukko-opillisesti lyhyesti määritellä funktio, tarvitaan ensin muutamia muita käsitteitä. Joukossa alkioiden järjestyksellä ei ole väliä, joten paria $\{x, y\} = \{y, x\}$ kutsutaan järjestämättömäksi pariksi. Olisi kuitenkin hyödyllistä, jos alkiot saataisiin järjestettyä jollain tavalla. Vuonna 1921 Kazimierz Kuratowski ehdotti seuraavaa määritelmää, joka on yhä yleisesti käytössä.

Määritelmä 3.7. Joukkojen x ja y *järjestetty pari* on $\langle x, y\rangle = \{\{x\}, \{x, y\}\}$.

Oleellista järjestetyssä parissa on seuraava ominaisuus:

Lause 3.4. $\langle x, y\rangle = \langle x', y'\rangle \Leftrightarrow x = x' \wedge y = y'$.

Todistus sivuutetaan (kts. [3]).

Määritelmä 3.8. *Relaatio* on joukko järjestettyjä pareja. Joukko A on siis relaatio, jos ja vain jos sille pätee

$$\forall a \in A \exists x \exists y (a = \langle x, y\rangle).$$

Matematiikassa lemma eli apulause esittelee yleensä pienen aputuloksen, jota käytetään hyväksi jonkun toisen lauseen osoittamiseen.

Lemma 3.1. *Jos $x, y \in C$, niin $\langle x, y\rangle \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(C))$.*

Todistus. Harjoitustehtävä. □

Lause 3.5. *Kaikkia joukkoja A ja B kohti on olemassa joukko $\{\langle x, y\rangle \mid x \in A, y \in B\}$.*

Todistus. Sovelletaan edellistä lemmaa valitsemalla $C = A \cup B$. Olkoon $x \in A$ ja $y \in B$, jolloin siis $x, y \in A \cup B = C$. Tällöin lemman nojalla pätee $\langle a, b\rangle \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B))$. Merkitään $D = \mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B))$. Erotteluaksiooman nojalla on olemassa joukko

$$\begin{aligned} &\{p \in D \mid \exists a \in A \exists b \in B(p = \langle a, b\rangle)\} \\ =&\{\langle a, b\rangle \in D \mid a \in A, b \in B\} \\ =&\{\langle a, b\rangle \mid a \in A, b \in B\}. \end{aligned}$$

□

Joukkoa $A \times B = \{\langle a, b\rangle \mid a \in A, b \in B\}$ kutsutaan *karteesiseksi tuloksi* (Lue: ”A risti B”).

Esimerkki 3.13. Olkoon $A = \{1, 2, 3\}$ ja $B = \{a, b\}$. Tällöin joukkojen A ja B karteesinen tulo

$$\begin{aligned} A \times B &= \{\langle x, y\rangle \mid x \in \{1, 2, 3\}, y \in \{a, b\}\} \\ &= \{\langle 1, a\rangle, \langle 2, a\rangle, \langle 3, a\rangle, \langle 1, b\rangle, \langle 2, b\rangle, \langle 3, b\rangle\} \\ &= \{\{\{1\}, \{1, a\}\}, \{\{2\}, \{2, a\}\}, \{\{3\}, \{3, a\}\}, \{\{1\}, \{1, b\}\}, \{\{2\}, \{2, b\}\}, \{\{3\}, \{3, b\}\}\}. \end{aligned}$$

Esimerkki 3.14. Algebrasta tutulla "pienempi kuin" -merkillä $<$ viitataan itseasiassa tiukkaan järjestysrelaatioon. Esimerkiksi joukon $\{2, 7, 4, 5\}$ tiukka järjestysrelaatio on

$$< \; = \{\langle 2, 4\rangle, \langle 2, 5\rangle, \langle 2, 7\rangle, \langle 4, 5\rangle, \langle 4, 7\rangle, \langle 5, 7\rangle\}$$

Lemma 3.2. *Jos $\langle x, y\rangle \in A$, niin $x, y \in \bigcup\bigcup A$.*

Todistus. Harjoitustehtävä. □

Määritelmä 3.9. Olkoon R relaatio. Tällöin sen

$$\text{\textit{määrittelyjoukko} on } \operatorname{dom}(R) = \{x \mid \exists y(\langle x, y\rangle \in R)\}, \tag{3.1}$$

$$\text{\textit{arvojoukko} on } \operatorname{ran}(R) = \{y \mid \exists x(\langle x, y\rangle \in R)\} \text{ ja} \tag{3.2}$$

$$\text{\textit{kenttä} on } \operatorname{fld}(R) = \operatorname{dom}(R) \cup \operatorname{ran}(R). \tag{3.3}$$

Joukot $\operatorname{dom}(R)$, $\operatorname{ran}(R)$ ja $\operatorname{fld}(R)$ ovat hyvin määriteltyjä. (Harjoitustehtävä. Tarvitaan lemmaa 3.2.)

Määritelmä 3.10. Relaation R *käänteisrelaatio* $R^{-1} = \{\langle y, x\rangle \mid \langle x, y\rangle \in R\}$.

Käänteisrelaatio on hyvin määritelty, koska sen saa erottelemalla eli erotteluaksiooman avulla joukosta $\operatorname{ran}(R) \times \operatorname{dom}(R)$. Siis

$$R^{-1} = \{\langle y, x\rangle \in \operatorname{ran}(R) \times \operatorname{dom}(R) \mid \langle x, y\rangle \in R\}$$

Määritelmä 3.11. Joukko f on *kuvaus* eli *funktio*, jos se on relaatio, joka toteuttaa seuraavan funktionaalisuusehdon:

$$\text{Jos } \langle x, y\rangle \in f \text{ ja } \langle x, y'\rangle \in f, \text{ niin } y = y'.$$

Toisin sanoen joukko f on funktio, jos se on relaatio ja jokaista $x \in \mathrm{dom}(f)$ kohti on olemassa vain yksi $y \in \mathrm{ran}(f)$ siten, että $\langle x, y\rangle \in f$. Tällöin voidaan merkitä $y = f(x)$. Huomaa, että jokaisella relaatiolla on käänteisrelaatio, mutta funktiolla f on käänteisfunktio f^{-1} vain, jos f^{-1} toteuttaa funktionaalisuusehdon. Funktio on aina kuvaus määrittelyjoukosta *maalijoukkoon*. Arvojoukko on maalijoukon osajoukko. Täten kuvausta merkitään $f\colon A \to B$, missä $A = \mathrm{dom}(f)$ ja $\mathrm{ran}(f) \subseteq B$.

Esimerkki 3.15. Olkoon $A = \{\langle 0,4\rangle, \langle 1,1\rangle, \langle 2,0\rangle, \langle 3,1\rangle, \langle 4,4\rangle\}$. Joukkoon A liittyen voidaan todeta seuraavat asiat:

(1) A on selvästi relaatio, sillä $\forall a \in A \exists x \exists y (a = \langle x, y\rangle)$.

(2) $\mathrm{dom}(A) = \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

(3) $\mathrm{ran}(A) = \{0, 1, 4\}$.

(4) $\mathrm{fld}(A) = \mathrm{dom}(A) \cup \mathrm{ran}(A) = \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

(5) Käänteisrelaatio $A^{-1} = \{\langle 4,0\rangle, \langle 1,1\rangle, \langle 0,2\rangle, \langle 1,3\rangle, \langle 4,4\rangle\}$.

(6) A on funktio, sillä $\forall x \forall y \forall y'(\langle x, y\rangle \in A \wedge \langle x, y'\rangle \in A \Rightarrow y = y')$.

(7) Käänteisrelaatio A^{-1} ei ole joukon A käänteisfunktio, koska esimerkiksi $\langle 1, 1\rangle \in A^{-1}$ ja $\langle 1, 3\rangle \in A^{-1}$, mutta $1 \neq 3$.

Määritelmä 3.12. Olkoon $f\colon A \to B$ funktio.

(a) Kuvaus f on *injektio*, jos se kuvaa eri alkiot eri alkioille eli jos

$$\forall x \in A \forall y \in A(x \neq y \to f(x) \neq f(y)).$$

(b) Kuvaus f on *surjektio*, jos sen arvojoukko on maalijoukko eli jos $\mathrm{ran}(f) = B$.

(c) Kuvaus f on *bijektio*, jos se on injektio ja surjektio.

3.3.4 Luonnolliset luvut

Myös luonnolliset luvut haluttiin esittää joukkoina. Ernst Zermelo ehdotti vuonna 1908 luonnollisiksi luvuiksi joukkoja

$$\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \ldots$$

Itseasiassa luonnolliset luvut on mahdollista konstruoida usealla eri tavalla, mutta John von Neumannin ehdottama vaihtoehto löi läpi useilla hyödyillään. Periaatteena oli, että jokainen luonnollinen luku on joukko, johon kuuluvat kaikki pienemmät luonnolliset luvut. Täten luonnollisia lukuja ovat

$$\begin{aligned}
0 &= \emptyset, \\
1 &= \{0\} = \{\emptyset\}, \\
2 &= \{0, 1\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \\
3 &= \{0, 1, 2\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \\
&\vdots \\
n + 1 &= \{0, \ldots, n\} = \{0, \ldots, n - 1\} \cup \{n\} = n \cup \{n\}.
\end{aligned}$$

Rakennelmassa on useita mielenkiintoisia ominaisuuksia, kuten

$$\begin{gathered}0 \in 1 \in 2 \in 3 \ldots, \\ 0 \subseteq 1 \subseteq 2 \subseteq 3 \ldots \quad \text{ja} \\ |0| = 0, |1| = 1, |2| = 2, |3| = 3 \ldots\end{gathered}$$

Jotta luonnollinen luku ja varsinkin koko luonnollisten lukujen joukko voitaisiin määritellä täsmällisesti, tarvitaan joitain esikäsitteitä.

Määritelmä 3.13. Joukon a *seuraaja* $a^+ = a \cup \{a\}$.

Tästä seuraa suoraan sekä $a \in a^+$ että $a \subseteq a^+$.

Määritelmä 3.14. Joukko A on *induktiivinen*, jos $\emptyset \in A$ ja $\forall a(a \in A \to a^+ \in A)$.

Mihinkään jo esiteltyihin aksioomiin nojautuen ei voida sanoa onko tällaista induktiivista joukkoa ylipäänsä olemassa. Tarvitaan siis uusi aksiooma.

A6. **Äärettömyysaksiooma**: On olemassa induktiivinen joukko:

$$\exists A(\emptyset \in A \wedge \forall a(a \in A \to a \cup \{a\} \in A))$$

Määritelmä 3.15. Joukko n on luonnollinen luku, jos se on alkiona jokaisessa induktiivisessa joukossa.

Lause 3.6. *On olemassa luonnollisten lukujen joukko* $\mathbb{N}$*.*

Todistus. Äärettömyysaksiooman nojalla on olemassa induktiivinen joukko. Olkoon A induktiivinen joukko. Jokaiselle luonnolliselle luvulle n pätee $n \in A$. Täten erotteluaksiooman nojalla on olemassa joukko

$$\mathbb{N} = \{n \in A \mid n \text{ on luonnollinen luku}\} = \{n \mid n \text{ on luonnollinen luku}\}.$$

□

Lause 3.7. $\mathbb{N}$ *on induktiivinen.*

Todistus. Harjoitustehtävä. □

Lause 3.8. *Olkoon* A *induktiivinen. Tällöin* $\mathbb{N} \subseteq A$*.*

Todistus. Harjoitustehtävä. □

Lauseista 3.7 ja 3.8 seuraa, että $\mathbb{N}$ on pienin induktiivinen joukko.

Esimerkki 3.16. Luonnollisten lukujen joukossa voidaan määritellä järjestysrelaatiot[2] $<$ ja $\leq$ seuraavasti: Joukosta $\mathbb{N} \times \mathbb{N} = \{\langle x, y\rangle \mid x, y \in \mathbb{N}\}$ saadaan erottelemalla

$$\begin{aligned}\leq &= \{\langle x, y\rangle \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x \subseteq y\} = \{\langle x, y\rangle \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x \subset y \vee x = y\} \quad \text{ja} \\ < &= \{\langle x, y\rangle \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x \in y\} = \{\langle x, y\rangle \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x \subset y\}.\end{aligned}$$

Täten esimerkiksi $\langle 1, 2\rangle \in <$. Tämä voidaan merkitä lyhyemmin $1 < 2$ ja yleisesti voidaan sopia, että $x < y \Leftrightarrow \langle x, y\rangle \in <$.

[2]Joukossa A määritelty järjestysrelaatio järjestää joukon A alkiot suuruusjärjestykseen. Järjestysrelaatioita on itseasiassa useita eri tyyppejä (esijärjestys, osittainen järjestys, lineaarijärjestys jne.), joilta jokaiselta vaaditaan tiettyjä kaksipaikkaisten relaatioiden perusominaisuuksia (refleksiivisyys, symmetrisyys, transitiivisuus jne.) [6].

3.3.5 Joukkojen mahtavuuksien vertailua

Vertailtaessa joukkojen kokoa eli mahtavuutta, tarkastellaan pohjimmiltaan ovatko joukot yhtä mahtavat vai onko toisessa joukossa enemmän alkioita kuin toisessa. Äärellisten joukkojen alkioiden lukumäärä on periaatteessa mahdollista, joskin usein epäkäytännöllistä, laskea ja näin verrata mahtavuuksia keskenään. Entä jos ei osattaisi laskea kuin kymmeneen, koska ihmisellä on kymmenen sormea? Miten silloin vertailtaisiin sitä suurempien äärellisten joukkojen mahtavuuksia? Äärettömyysaksiooma takaa äärettömän joukon olemassaolon, joten herää kysymys, miten vertaillaan äärettömien joukkojen mahtavuuksia.

Olkoot A ja B joukkoja. Näiden välinen kokoero voidaan ratkaista parittamalla jokaiseen joukon A alkioon täsmälleen yksi joukon B alkio kunnes vähintään toisesta joukosta loppuu alkiot kesken. Mikäli molemmista joukoista loppuvat alkiot samaan aikaan, on jokaiselle joukon A alkiolle löytynyt pari joukosta B ja jokaiselle joukon B alkiolle on löytynyt pari joukosta A. Nämä parit voidaan ilmaista järjestettyinä pareina $\langle x, y\rangle$, joissa $x \in A$ ja $y \in B$. Koska tällaisista järjestetyistä pareista koostuva joukko on bijektio, on seuraava määritelmä luonnollinen.

Määritelmä 3.16. Joukot A ja B ovat *yhtä mahtavat* eli $A \approx B$, jos on olemassa bijektio $f\colon A \to B$

Lause 3.9. *Kaikille joukoille A, B ja C pätee:*

(a) $A \approx A$.

(b) Jos $A \approx B$, niin $B \approx A$.

(c) Jos $A \approx B$ ja $B \approx C$, niin $A \approx C$.

Todistus. Funktio $f\colon A \to A, f(x) = x$ on identtisenä kuvauksena selvästi bijektio, joten $A \approx A$. Jätetään (b)-kohta harjoitustehtäväksi. Todistetaan kohta (c). Koska $A \approx B$ ja $B \approx C$, niin on olemassa bijektiot $f\colon A \to B$ ja $g\colon B \to C$. Erotteluaksiooman nojalla on olemassa yhdistetty funktio

$$g \circ f\colon A \to C = \{\langle x, z\rangle \in \mathrm{dom}(f) \times \mathrm{ran}(g) \mid \exists y(\langle x, y\rangle \in f, \langle y, z\rangle \in g)\}.$$

Osoitetaan, että $g \circ f\colon A \to C$ on injektio: Valitaan $x, x' \in A, x \neq x'$. Koska $f\colon A \to B$ on injektio, on olemassa sellaiset $y = f(x) \in B$ ja $y' = f(x') \in B$, että $y \neq y'$. Vastaavasti, koska $g\colon B \to C$ on injektio, niin on olemassa sellaiset $z = g(y) \in C$ ja $z' = g(y') \in C$, että $z \neq z'$. Siis $g \circ f$ on injektio.

Osoitetaan sitten, että $g \circ f\colon A \to C$ on surjektio eli jokaisella maalijoukon C alkiolla on olemassa jokin lähtöjoukon A alkio. Valitaan $z \in C$. Koska $g\colon B \to C$ on surjektio, on olemassa sellainen $y \in B$, jolla $g(y) = z$. Vastaavasti koska $f\colon A \to B$ on surjektio, niin on olemassa sellainen $x \in A$, jolla $f(x) = g(y) = z$. Siis $g \circ f$ on surjektio. Täten $g \circ f$ on bijektio, joten $A \approx C$. □

Määritelmä 3.17. Joukko A on *korkeintaan yhtä mahtava kuin* joukko B eli $A \preceq B$, jos on olemassa injektio $f\colon A \to B$.

Määritelmä 3.18. Joukko B on *mahtavampi* kuin joukko A eli $A \prec B$, jos $A \preceq B$ ja $A \not\approx B$.

Edellisten määritelmien avulla voidaan siis vertailla joukkojen mahtavuuksia. Sanoja ”äärellinen” ja ”ääretön” on käytetty jo useasti, mutta niitä ei ole tarkalleen ottaen vielä määritelty, joten tehdään se seuraavaksi.

Määritelmä 3.19. Joukko A on *äärellinen*, jos $\exists n \in \mathbb{N}(A \approx n)$. Joukko A on *ääretön*, jos ei ole äärellinen.

Yksittäisen joukon mahtavuutta käsiteltiin luvussa 3.2.2. Määritellään tämäkin vielä täsmällisesti:

Määritelmä 3.20. Äärellisen joukon A *mahtavuudeksi* kutsutaan sitä luonnollista lukua $n \in \mathbb{N}$, jolle $A \approx n$. Tätä merkitään $|A| = n$.

Esimerkki 3.17. Olkoot $A = \langle 1, 2\rangle$ ja $B = 2$.

(a) Osoitetaan, että $A \preceq B$.

Joukko $A = \langle 1, 2\rangle = \{1, \{1, 2\}\}$ ja $B = \{0, 1\}$. Tarkastellaan relaatiota $f\colon A \to B = \{\langle 1, 0\rangle, \langle\{1, 2\}, 1\rangle\}$. Tämä on selkeästi funktio, koska $\forall x \in \operatorname{dom}(f)\, \forall y \in \operatorname{dom}(f)(x \neq y)$, joten funktionaalisuusehto pätee. f on myös injektio, koska $f(x) \neq f(y)$ kaikilla $x, y \in A, x \neq y$. Itseasiassa injektiot ovat aina funktioita, joten funktionaalisuusehtoa ei olisi tarvinnut tarkastaa. Osoitettiin siis injektion $f\colon A \to B$ olemassaolo, joten $A \preceq B$.

(b) Osoitetaan, että $A \approx B$.

(a) -kohdan funktio $f\colon A \to B$ on surjektio, koska $B = \{0, 1\} = \operatorname{ran}(f)$. Siis f on sekä injektio että surjektio, joten se on bijektio. Täten $A \approx B$.

(c) Lauseen 3.9 kohdan (a) mukaan $B = 2 \approx 2 \in \mathbb{N}$, joten B on äärellinen. Koska $2 \approx B \approx A$, niin lauseen 3.9 kohdan $c)$ nojalla $2 \approx A$, joten myös A on äärellinen. Siis $|A| = |B| = 2$.

Myös äärettömät joukot voivat olla erikokoisia. Esimerkiksi ylinumeroituva reaalilukujen joukko $\mathbb{R}$ on mahtavampi kuin numeroituva luonnollisten lukujen joukko $\mathbb{N}$. Joukon sanotaankin olevan numeroituva, jos se on korkeintaan yhtä mahtava joukon $\mathbb{N}$ kanssa. Joukon $\mathbb{N}$ mahtavuutta merkitään $\aleph_0$.

Esimerkki 3.18. Oletetaan luonnollisten lukujen kertolasku tunnetuksi. Olkoon A parillisten luonnollisten lukujen joukko eli $A = \{2n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Osoitetaan, että $\mathbb{N} \approx \{2n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Voidaan muodostaa kuvaus $f\colon \mathbb{N} \to A$, missä $f = \{\langle 0, 0\rangle, \langle 1, 2\rangle, \langle 2, 4\rangle, \ldots, \langle n, 2n\rangle, \ldots\}$. Jokainen joukon A ja $\mathbb{N}$ alkio esiintyy kuvauksen f järjestettyjen parien alkiona täsmälleen kerran, joten f on bijektio.

3.3.6 Loput aksioomat lyhyesti

Esitellään lopuksi korvausskeema, säännöllisyysaksiooma sekä kaksi yhtäpitävää muotoilua valinta-aksioomalle. Näihin ei kuitenkaan paneuduta tässä sen tarkemmin.

A8. **Korvausskeema**
Jokaista kaavaa $\phi(x, y)$, jossa ei esiinny muuttujasymbolia B, vastaa aksiooma
$\forall A(\forall x \in A \forall y \forall z(\phi(x, y) \wedge \phi(x, z) \rightarrow y = z).$
$\rightarrow \exists B \forall y(y \in B \leftrightarrow \exists x \in A \phi(x, y)))$

Pelottavan monimutkaisen näköisen korvusskeeman merkityssisältö on lopulta se, että joukon kuvajoukko kuvauksessa on joukko. [12]

A9. **Säännöllisyysaksiooma**
$\forall A(A \neq \emptyset \rightarrow \exists m \in A(m \cap A = \emptyset))$

Säännöllisyysaksiooma sanoo, että jokaisella epätyhjällä joukolla A on sellainen alkio m, että A ja m ovat erilliset joukot. Siis jokaiselle joukolle A löytyy säännöllisyysaksiooman mukainen m ja tälle joukolle m löytyy vastaavasti joukko m' ja tälle m'' ja niin edelleen kunnes lopulta päädytään tyhjään joukkoon. Säännöllisyysaksiooman eräs seuraus on etteivät mitkään joukot voi kuulua toisiinsa eli $\forall x \forall y \neg(x \in y \wedge y \in x)$. Toinen seuraus on $\forall x(x \notin x)$. (Harjoitustehtävä)

A10. **Valinta-aksiooma** (Ensimmäinen muotoilu):
Jokaista $F\colon I \rightarrow \mathcal{P}(A) \setminus \{\emptyset\}$ vastaa $f\colon I \rightarrow A$, jolle pätee $f(x) \in F(x)$, kun $x \in I$.

A10. **Valinta-aksiooma** (Toinen muotoilu):
Jokaista relaatiota R vastaa kuvaus f siten, että $f \subseteq R$ ja dom(R)=dom(R).

Intuitiivisesti valinta-aksiooma kertoo, että mistä tahansa epätyhjien joukkojen kokoelmasta voidaan valita täsmälleen yksi alkio kustakin joukosta.

3.3.7 Harjoitustehtäviä aksiomaattisesta joukko-opista

1. Määritä $A \times A$, kun
   (a) $A = \{\emptyset, 1\}$
   (b) $A = \{\emptyset\}$
2. Määritellään joukossa $X = \{a, b, c, d\}$ relaatiot $A = \{\langle a, a\rangle, \langle b, c\rangle, \langle c, d\rangle, \langle d, b\rangle\}$ ja $B = \{\langle a, a\rangle, \langle b, a\rangle, \langle c, d\rangle, \langle d, b\rangle\}$.
   (a) Määritä käänteisrelaatiot A^{-1} ja B^{-1}.
   (b) Määritä $\mathrm{dom}(A), \mathrm{ran}(A)$ ja $\mathrm{fld}(A)$.
   (c) Määritä $\mathrm{dom}(B^{-1}), \mathrm{ran}(B^{-1})$ ja $\mathrm{fld}(B^{-1})$.

(d) Mitkä relaatioista A, B, A^{-1} ja B^{-1} ovat funktioita?

(e) Mitkä relaatioista A, B, A^{-1} ja B^{-1} ovat injektioita?

(f) Mitkä relaatioista A, B, A^{-1} ja B^{-1} ovat surjektioita?

(g) Mitkä relaatioista A, B, A^{-1} ja B^{-1} ovat bijektioita?

(h) Määritä $A \circ B$. (kts. lauseen 3.9 todistus)

3. Onko joukko

   (a) $\{1, \{0, 2\}\}$

   (b) $\{\{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset\}\}$

   (c) $\{1, 2\} \times \{3, 4\}$

   (d) $\{1, 2\} \times \{3\}$

   (e) $\{1\} \times \{1\}$

   (f) 1×1

   (g) $\langle\langle 1, 2\rangle, 3\rangle$

   (h) $\{\langle n, m\rangle \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid m = n \vee m = n + 1\}$

   järjestetty pari, relaatio tai funktio?

4. Osoita, että järjestetty pari voi olla relaatio.

5. Todista, että jos $x, y \in C$, niin $\langle x, y\rangle \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(C))$.

6. (a) Todista, että jos $\langle x, y\rangle \in A$, niin $x, y \in \bigcup \bigcup A$.

   (b) Todista (a)-kohdan tulosta käyttäen, että joukot $\mathrm{dom}(R)$, $\mathrm{ran}(R)$ ja $\mathrm{fld}(R)$ ovat hyvin määriteltyjä.

7. Ratkaise joukko-opillinen yhtälö:

   (a) $\{x, \{y, \emptyset\}\} = \{\{\emptyset, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset\}\}$

   (b) $\mathcal{P}(x) = \{\{\emptyset\} \cup x, \emptyset\}$

   (c) $\{\{\{x\}\}, \emptyset, \{y, \emptyset\}\} = \{z, \{z, \{x\}\}, \{\{\emptyset\}\}\}$

   (d) $\mathcal{P}(x) \times x = x$

8. (a) Todista, että $\mathbb{N}$ on on induktiivinen.

   (b) Todista, että jos A on induktiivinen joukko, niin $\mathbb{N} \subseteq A$.

9. Osoita, että luonnollisten lukujen järjestysrelaatio $\leq$ ei ole funktio.

10. Olkoot A ja B joukkoja. Todista, että jos $A \approx B$, niin $B \approx A$.

11. Piirrä mahdollisimman havainnollistava Venn-diagrammi De Morganin molemmista laeista ja todista ne:

(a) $C \setminus (A \cup B) = (C \setminus A) \cap (C \setminus B)$

(b) $C \setminus (A \cap B) = (C \setminus A) \cup (C \setminus B)$

12. Osoita yhdiste- ja pariaksioomaa käyttäen, ettei ole olemassa joukkoa, jonka alkioina ovat kaikki yhden alkion joukot.

13. Osoita, että

    (a) $2 < 3$

    (b) $3 \leq 3$.

14. Sievennä:

    (a) $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) \cup (A \cap B)$

    (b) $\bigcup\{\{1, 2\}, \{\{1\}, 2\}, \{2, \{1\}\}\}$

    (c) $\bigcap\{\mathcal{P}(\emptyset), \mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)), \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)))\}$

15. Todista säännöllisyysaksiooman avulla väite

    (a) $\forall x \forall y \neg(x \in y \wedge y \in x)$. Vinkki: Tarkastele joukkoa $A = \{x, y\}$

    (b) $\forall x (x \notin x)$

16. Määritellään *järjestetty kolmikko* $\langle x, y, z \rangle = \langle \langle x, y \rangle, z \rangle$. Palautetaan mieleen, että klassisen lauselogiikan konnektiivit voidaan määritellä totuustaulujen avulla totuusfunktioiksi, jotka liittävät jokaiseen kaavaan täsmälleen yhden totuusarvon 1 tai 0. Kirjoita joukko-opillisesti seuraavat totuusfunktiot.

    (a) $\neg p$

    (b) $p \wedge q$

    (c) $p \vee q$

    (d) $p \rightarrow q$

    (e) $p \leftrightarrow q$

17. Kirjoita kaava $q \vee \neg(q \rightarrow \neg p)$ joukko-opillisesti.

Lähteet

[1] Aristoteles. [Viitattu 08.05.2018]. URL https://www.goodreads.com/author/quotes/2192.Aristotle?page=2

[2] Herbert B. Enderton. *Elements of set theory*. Academic Press, New York, 1977. ISBN 0-12-238440-7

[3] L. Hella. *Joukko-oppi*, luentomoniste. Tampere, 2011. [Viitattu 08.05.2018]. Saatavissa internetistä: http://www.sis.uta.fi/~klkelu/kurssit/joukko-oppi/JO2011.pdf

[4] J. Laine *Suuri sitaattisanakirja*. Otava, 1989. ISBN 9511109618.

[5] E. J. Lemmon. *Beginning Logic*. Thomas Nelson, London, 1965. ISBN 0-17-712040-1

[6] K. Luosto. *Äärellisten mallien teoria*, kurssimoniste. Helsinki, 1999–2010. [Viitattu 08.05.2018]. Saatavissa internetistä: http://www.helsinki.fi/~kluosto/kurssit/Aemt/aemt.pdf

[7] Elliot Mendelson. *Introduction to mathematical logic*, 5th ed. CRC Press, Boca Raton, 2010. ISBN-13: 978-1-58488-876-5.

[8] Opetushallitus. *Lukion opetussuunnitelman perusteet*. Next Print Oy, Helsinki, 2015. [Viitattu 08.05.2018]. Saatavissa internetistä: http://www.oph.fi/download/172124_lukion_opetussuunnitelman_perusteet_2015.pdf

[9] V. Rantala, A. Virtanen. *Logiikan peruskurssi*. Tampere, 2003. [Viitattu 08.05.2018]. Saatavissa internetistä: http://www.sis.uta.fi/matematiikka/modaalilogiikka/logpk2003.pdf

[10] V. Rantala, A. Virtanen. *Johdatus modaalilogiikkaan*. Gaudeamus, Helsinki, 2004. ISBN 951-662-907-5

[11] Kenneth H. Rosen. *Discrete Mathematics and Its Applications*, 7th ed. McGraw-Hill, New York, 2012. ISBN 978-0-07-338309-5
Saatavissa internetistä: http://www2.fiit.stuba.sk/~kvasnicka/Mathematics%20for%20Informatics/Rosen_Discrete_Mathematics_and_Its_Applications_7th_Edition.pdf

[12] Wikipedia. Axiom schema of replacement. [Viitattu 08.05.2018]. URL en.wikipedia.org/wiki/Axiom_schema_of_replacement

[13] Wikipedia. Fuzzy logic. [Viitattu 08.05.2018]. URL https://en.wikipedia.org/wiki/Fuzzy_logic

[14] Wikipedia. History of Logic. [Viitattu 08.05.2018]. URL https://en.wikipedia.org/wiki/History_of_logic

[15] Wikipedia. Mathematical logic. [Viitattu 08.05.2018]. URL https://en.wikipedia.org/wiki/Mathematical_logic

[16] Wikipedia. Organon. [Viitattu 08.05.2018]. URL https://en.wikipedia.org/wiki/Organon

[17] Wikipedia. Set (mathematics). [Viitattu 08.05.2018]. URL https://en.wikipedia.org/wiki/Set_(mathematics)

[18] Wikipedia. Set theory. [Viitattu 08.05.2018]. URL https://en.wikipedia.org/wiki/Set_theory

[19] Wikipedia. Syllogism. [Viitattu 08.05.2018]. URL https://en.wikipedia.org/wiki/Syllogism

[20] Wikipedia. Uusi matematiikka. [Viitattu 08.05.2018]. URL https://fi.wikipedia.org/wiki/Uusi_matematiikka

[21] Wikipedia. Zermelo–Fraenkel set theory. [Viitattu 08.05.2018]. URL https://en.wikipedia.org/wiki/Zermelo%E2%80%93Fraenkel_set_theory