TAMPEREEN YLIOPISTO
Pro gradu -tutkielma

Santeri Lähteenkorva

Neurorenkaat ja neuroideaalit

Luonnontieteiden tiedekunta
Matematiikka
Marraskuu 2017

Tampereen yliopisto
Luonnontieteiden tiedekunta
LÄHTEENKORVA, SANTERI: Neurorenkaat ja neuroideaalit
Pro gradu -tutkielma, 60 s.
Matematiikka
Marraskuu 2017

Tiivistelmä

Tämän tutkielman aiheena ovat kombinatoriset neurokoodit ja etenkin niistä muodostettavat neurorenkaat ja neuroideaalit. Aluksi määritellään kombinatoriset neurokoodit ja esitetään niille erilaisia luokituksia ja perusominaisuuksia. Lisäksi esitetään RF-koodin ja toteutuman käsitteet. Päätavoitteena on neurokoodia koskevan toteutuman rakenteen selvittäminen neurokoodin itsensä avulla.

Tämän jälkeen määritellään neurokoodin ideaali ja siihen liittyen neurorenkaan ja neuroideaalin käsitteet. Esitellään pseudomonomit, indikaattorit ja neurokoodin ideaalin suhde vastaavaan neuroideaaliin. Etenkin osoitetaan neuroideaalin alkioiden vastaavan suoraan toteutuman rakenteessa vallitsevia relaatioita.

Sen jälkeen käsitellään neuroideaalin kanonista muotoa, jonka avulla sen esitystä voidaan tiivistää. Osoitetaan kaikkien pseudomonomien virittämien ideaalien olevan neuroideaaleja. Lisäksi esitetään myös menetelmiä kanonisen muodon johtamiseksi. Erityisesti käsitellään iteratiivista algoritmia, jonka osoitetaan tuottavan neuroideaalin kanoninen muoto. Osoitetaan myös neuroideaalin liittyvän läheisesti Stanley-Reisnerin ideaaliin. Havainnollistetaan päätavoitteen toteutumista käyttämällä kehitettyjä työkaluja neurokoodiin sen toteutuman rakenteen selvittämiseksi.

Lopuksi tarkastellaan neurokoodien ja neurorenkaiden välisiä kuvauksia. Määritellään neurokoodien välistä kuvausta vastaava neurorenkaiden välinen taakseveto ja osoitetaan kaikkien neurorenkaiden välisten rengashomomorfismien vastaavan näitä taaksevetoja.

Sisältö

1. Johdanto

Tämä tutkielma käsittelee hermoston toimintaa matemaattisesti mallintavaa viimeaikaista matematiikan suuntausta. Luonnollisesti aihe täten liittyy kiinteästi sen sovelluksiin neurotieteiden alalla. Lähtökohtana ovat kombinatoriset neurokoodit, joiden avulla voidaan kuvata neuronien toimintaa. Neuronit vastaanottaessaan ärsykkeitä, joko aktivoituvat tai eivät. Näitä tiloja voimme neurokoodeissa mallintaa liittämällä kuhunkin neuroniin arvon 0 tai 1. Neuronien toimintaa laukaisevia ärsykkeitä voidaan puolestaan mallintaa ärsyke-avaruuden avulla. Jokaisella neuronilla on oma reseptiivinen kenttänsä, joka vastaa sitä ärsyke-avaruuden osaa, jossa tapahtuvat ärsykkeet aktivoivat kyseisen neuronin.

Mielenkiinnon kohteena on erityisesti ollut aivojen tapa tulkita neuronien toimintaa suhteessa vallitsevaan ärsyke-avaruuteen vailla tietoa neuroneja vastaavista reseptiivisistä kentistä. Vuonna 2013 Curto, Itskov, Veliz-Cuba ja Youngs esittelivät tämän tutkielman päälähteenä toimivassa artikkelissaan [2] neurorenkaisiin ja neuroideaaleihin perustuvia algebralliseen geometriaan nojaavia menetelmiä tämän selvittämiseksi. Erityisesti neuroideaalin käsitteen avulla voidaan hermostollista toimintaa kuvaavasta neurokoodista itsestään johtaa tietoa vallitsevasta neuronien reseptiivisten kenttien rakenteesta.

Tämän tutkielman rakenne on seuraavanlainen. Ensin luvussa 2 määrittelemme käyttämäämme peruskäsitteistöä. Yhdistelemme tämän osan esityksessämme etenkin lähteiden [2], [4] ja [6] näkökulmia tähän aiheeseen.

Esitämme ensin kombinatorisen neurokoodin käsitteen ja tarkastelemme sitten erilaisia joukko-opillisia ja topologisia menetelmiä niiden tutkimiseksi ja luokittelemiseksi. Nostamme esiin abstraktin simpleksisen kompleksin käsitteen, jonka avulla voimme luokitella neurokoodeja simpleksisiksi komplekseiksi koodeiksi. Tarkastelemme sitten neurokoodeja suhteessa neuroneja aktivoiviin ärsykkeisiin muodostaen myöhemmän tutkielman kannalta keskeiset RF-koodin ja toteutuman käsitteet. Tästä siirrymme RF-koodin käsitteen avulla tarkastelemaan konvekseja neurokoodeja ja RF-koodeihin läheisellä tavalla liittyviä avoimen peitteen hermoja.

Luvun lopuksi muotoilemme tarkemmin esittelemämme käsitteistön avulla loppua tutkielmaa koskevan päätavoitteemme, joka on neurokoodin mahdollisten toteutumien rakenteelta edellytettyjen piirteiden selvittäminen vailla muuta tietoa kuin tarkasteltu neurokoodi itsessään.

Luku 3 sisältää tämän tutkielman keskeisimmän sisällön. Seuraamme tässä luvussa etenkin päälähteenämme toimivaa artikkelia [2].

Aloitamme luvun ryhtymällä kehittämään tavoitteemme toteuttamiseen tarvitsemaamme käsitteistöä. Tuomme neurokoodien tarkasteluun mukaan algebrallisen näkökulman liittäen neurokoodiin sitä vastaavan ideaalin ja sen avulla määrittelemme neurorenkaan. Siirrymme tämän jälkeen määrittelemään pseudomonomin ja indikaattorin käsitteet. joiden avulla puolestaan saamme aikaan tämän tutkielman kannalta keskeisen neuroideaalin käsitteen.

Jäljellä jäävässä osassa lukua 3 osoitamme neuroideaalia koskevia yleisiä tuloksia, esitämme tavan mieltää neurorenkaan alkiot kuvauksiksi ja tarkastelemme lopuksi tapoja johtaa neurokoodin toteutumaa koskevaa tietoa sen neuroideaalin avulla. Erityisesti luvun lopuksi todistamme tämän tutkielman keskeisimmän tuloksen, joka luo vastaavuuden neurokoodia koskevan ideaalin polynomien ja toteutuman relaatioiden välille. Tämän pohjalta luokittelemme neurokoodin ideaalin alkiot niitä vastaavien toteutuman relaatioiden suhteen neljään erilaiseen relaatiotyyppiin ja muodostamme näistä virittäjistöt neuroideaalille ja neurokoodin ideaalille.

Luvussa 4 pyrimme muodostamaan neuroideaalille tiiviin esitystavan ja sen avulla saattamaan päätökseen tavoitteemme toteutumaa koskevan tiedon johtamiseen neurokoodista. Aloitamme ensin tarkastelemalla pseudomonomien virittämiä ideaaleja yleisesti seuraten Jeffsin väitöskirjaa [6]. Osoitamme erityisesti, että kaikki pseudomonomien virittämät ideaalit ovat neuroideaaleja. Määrittelemme sitten minimaalisen pseudomonomin käsitteen ja sen avulla neuroideaalin kanonisen muodon. Osoitamme myös, että neuroideaalin kanoninen muoto voidaan johtaa luvussa 3 esittelemiemme relaatiotyyppien avulla. Tämä tarjoaa meille keinon muodostaa kanoninen muoto tilanteessa, jossa tarkasteltu toteutuma tunnetaan jo ennalta. Vertaamme vielä neuroideaalia suhteessa Stanley-Reisnerin ideaaliin, jonka samalla esittelemme lyhyesti Millerin ja Sturmfelsin kirjan pohjalta [7].

Luvun 4 lopussa tarkastelemme artikkeleissa [3] ja [9] esitettyä iteratiivista algoritmia neuroideaalin kanonisen muodon selvittämiseksi. Osoitamme tämän algoritmin toimivuuden ja saamme täten keinon selvittää neuroideaalin kanoninen muoto vailla tietoa tarkastellusta toteutumasta. Tämän tuloksen myötä pääsemme lopuksi havainnollistamaan lukujen 3 ja 4 myötä muodostuneiden työkalujemme toimivuutta toteutumaa koskevan tiedon selvittämisessä.

Viimeisenä luku 5 koskee neurokoodien ja neurorenkaiden välisiä kuvauksia. Siellä esitämme lopuksi lyhyen katsauksen tähän aiheeseen, jota Curto ja Youngs käsittelivät kattavammin artikkelissaan [3] ja Jeffs väitöskirjassaan [6]. Määrittelemme koodikuvauksen ja sitä koskevan neurorenkaiden välisen taaksevedon. Tämän jälkeen osoitamme, että neurorenkaiden välisten rengashomomorfismien ja taaksevetojen välillä vallitsee yksikäsitteinen vastaavuus.

Lukijan odotetaan tuntevan etenkin algebrallisen geometrian ja topologian peruskäsitteistöä. Kuntien, renkaiden ja ideaalien yleinen tuntemus on myös oleellista käsiteltävän aiheen ymmärtämiseksi.

2. Kombinatoriset neurokoodit

Tässä luvussa käsiteltävät käsitteet ja tulokset esitetään suhteessa johonkin neuronien joukkoon. Kiinnitetään siis tarkasteltavaksi neuronien joukoksi $\{1, \ldots, n\}$, missä $n \in \mathbb{Z}_+$. Lisäksi otetaan käyttöön merkintä

$$[n] := \{1, \ldots, n\}.$$

2.1 Kombinatoriset neurokoodit

Määritelmä 2.1 (vrt. [2, 2.1])**.** Vektoria $c = (c_1, \ldots, c_n) \in \{0, 1\}^n$ kutsutaan *koodisanaksi*. Koodisanoista koostuvaa epätyhjää joukkoa $\mathcal{C} \subset \{0, 1\}^n$ sanotaan *kobinatoriseksi neurokoodiksi* tai lyhyesti *neurokoodiksi*.

Koodisanat vastaavat suoraan neuronien joukkoa. Arvo koodisanan indeksissä i voidaan nimittäin tulkita merkitsemään neuronin $i \in [n]$ tilaa. Tällöin arvo 1 voidaan liittää neuronin aktivoitumiseen ja vastaavasti arvo 0 aktivoitumattomuuteen.

Tämä tulkinta tekee mahdolliseksi vaihtoehtoisen tavan käsitellä koodisanoja ja siten myös neurokoodeja. Sen sijaan, että listaisimme neuronien tilat binäärinä, voimme esittää koodisanan luettelemalla aktivoituneet neuronit.

Määritelmä 2.2 (vrt. [2, 2.1])**.** Olkoon c koodisana. Tällöin sen *kantaja* on joukko

$$\operatorname{supp}(c) := \{i \mid v_i \neq 0\}.$$

Vastaavasti *neurokoodin $\mathcal{C}$ kantaja* on

$$\operatorname{supp}(\mathcal{C}) := \{\operatorname{supp}(c) \mid c \in \mathcal{C}\}.$$

Huomautus. Kantaja määrittelee bijektion koodisanojen joukolta neuronien osajoukoille. Täten koodisanat voidaan samastaa kantajiensa kanssa ja samalla myös neurokoodit voidaan samastaa kantajiensa kanssa. Jatkossa voimme siis tämän luonnehdinnan ansiosta puhua neurokoodeista myös perheenä neuronien osajoukkoja.

Huomautus. Helpottaaksemme merkintöjä jätämme jatkossa pois sulut ja pilkut kirjoittaessamme koodisanoja vektorimuodossa. Lisäksi ilmaistaessa koodisanaa sen kantajan avulla kun $n < 10$, jätämme siitä pois joukkosulut ja pilkut alkioiden väliltä.

Esimerkki 2.3. Tapauksessa $n = 5$ on 01011 koodisana, jonka kantaja on 245. Vastaavasti 123 on kantaja koodisanalle 11100. Näistä koodisanoista koostuva neurokoodi olisi siis joukko $\{01011, 11100\}$, joka voitaisiin myös ilmaista kantajansa avulla muodossa $\{245, 123\}$.

Määritelmä 2.4 (vrt. [4, s. 1])**.** Olkoon $\mathcal{C}$ neurokoodi ja $c \in \mathcal{C}$ koodisana. Jos ei ole olemassa sellaista koodisanaa $c' \in \mathcal{C}$, että $c \subsetneq c'$, niin koodisanan c sanotaan olevan *maksimaalinen koodisana*.

2.2 Abstraktit simpleksiset kompleksit

Tässä alaluvussa määrittelemme neurokoodien tarkastelemisen tueksi abstraktin simpleksisen kompleksin käsitteen. Abstrakteja simpleksisiä komplekseja on tutkittu paljon [4, s. 1] ja siten ottamalla ne käyttöön saamme uusia keinoja neurokoodien tarkasteluun.

Määritelmä 2.5 (vrt. [6, Definition 1.11])**.** Olkoon A joukko. Tällöin äärellisen joukon A äärellisten osajoukkojen kokoelmaa $\Delta \subset \mathcal{P}(A)$ sanotaan *abstraktiksi simpleksiseksi kompleksiksi*, mikäli aina kun $\sigma \in \Delta$ ja $\tau \subset \sigma$, niin $\tau \in \Delta$.

Huomautus. Jatkossa simpleksisellä kompleksilla tarkoitamme abstraktia simpleksistä kompleksia.

Määritelmä 2.6 (vrt. [6, Definition 1.11])**.** Simpleksisen kompleksin Δ alkioita sanotaan *sivuiksi*. Simpleksisen kompleksin Δ *tahko* on sivu $\sigma \in \Delta$, jolle ei ole olemassa sivua $\tau \in \Delta$ siten, että pätisi $\sigma \subsetneq \tau$. Jos simpleksisellä kompleksilla on yksikäsitteinen tahko, sanotaan sitä *simpleksiksi*.

Käyttääksemme tätä käsitettä neurokoodien tarkastelussa haluamme soveltaa sitä neuronien joukon osajoukoista koostuviin perheisiin. Siispä seuraavaksi liitämme simpleksisen kompleksin käsitteen neurokoodeihin käyttämällä apuna niiden kantajia.

Määritelmä 2.7 (vrt. [6, Definition 1.19])**.** Neurokoodi C on *simpleksinen kompleksi koodi*, jos sen kantaja $\text{supp}(C)$ on simpleksinen kompleksi.

Simpleksiselle kompleksille koodille sivut ovat siis koodisanoja ja tahkot maksimaalisia koodisanoja.

Esimerkki 2.8. Tarkastellaan tapausta $n = 4$. Tällöin neurokoodi

$$C = \{1100, 0101, 1101\}$$

ei ole simpleksinen kompleksi koodi, koska sen kantajalle

$$\text{supp}(C) = \{12, 24, 124\}$$

ei päde $1 \in \text{supp}(C)$, vaikka $1 \subset 12 \in \text{supp}(C)$.

Kuten esimerkistä 2.8 nähtiin, eivät kaikki neurokoodit ole simpleksisiä komplekseja koodeja. Seuraavaksi otamme esille tavan, jolla neurokoodi voidaan kuitenkin aina laajentaa simpleksiseksi kompleksiksi koodiksi.

Määritelmä 2.9 (vrt. [2, 2.1])**.** Olkoon C neurokoodi. Tällöin joukkoa

$$\Delta(C) := \{\sigma \subset [n] \mid \sigma \subset \text{supp}(c),\ \text{jollain } c \in C\}$$

sanotaan *koodin C simpleksiseksi kompleksiksi*.

Huomautus. Määritelmän 2.9 joukko $\Delta(C)$ todella on simpleksinen kompleksi. Jos nimittäin $\sigma \in \Delta(C)$ ja $\tau \subset \sigma$, niin määritelmästä seuraa, että on olemassa $c \in C$, jolle pätee $\sigma \subset \text{supp}(c)$. Mutta tällöinhän $\tau \subset \sigma \subset \text{supp}(c)$, joten joukon $\Delta(C)$ määrittelyn nojalla myös $\tau \in \Delta(C)$. Täten määritelmän 2.5 perusteella $\Delta(C)$ on simpleksinen kompleksi.

Lause 2.10 (vrt. [6, s. 7])**.** *Olkoon C neurokoodi. Tällöin $\Delta(C)$ on suppein simpleksinen kompleksi, joka sisältää neurokoodin C kantajan.*

Todistus. Tiedetään jo, että $\Delta(C)$ on simpleksinen kompleksi.

Osoitetaan ensin, että $\Delta(C)$ sisältää neurokoodin C kantajan. Olkoon $\sigma \in \text{supp}(C)$. Tällöin on olemassa $c \in C$ siten, että $\sigma = \text{supp}(c)$. Erityisesti $\sigma \subset \text{supp}(c)$, joten joukon $\Delta(C)$ määrittelyn nojalla $\sigma \in \Delta(C)$.

Olkoon sitten Δ' simpleksinen kompleksi siten, että $\text{supp}(C) \subset \Delta'$. Riittää siis enää osoittaa, että tällöin $\Delta(C) \subset \Delta'$. Olkoon $\sigma \in \Delta(C)$. Tällöin joukon $\Delta(C)$ määrittelyn nojalla on olemassa $c \in C$ siten, että $\sigma \subset \text{supp}(c)$. Nythän $\sigma \subset \text{supp}(c) \in \text{supp}(C) \subset \Delta'$, joten koska Δ' on simpleksinen kompleksi on oltava $\sigma \in \Delta'$. Siispä $\Delta(C) \subset \Delta'$. □

Huomautus. Lauseesta 2.10 seuraa luonnollisesti, että kun C on simpleksinen kompleksi koodi, niin

$$\Delta(C) = \text{supp}(C).$$

Esimerkki 2.11. Esimerkissä 2.8 todettiin, ettei tarkasteltu neurokoodi

$$C = \{1100, 0101, 1101\}$$

ole simpleksinen kompleksi koodi. Voimme kuitenkin nyt laajentaa sen sellaiseksi. Neurokoodin C kantaja on

$$\text{supp}(C) = \{12, 24, 124\}\}$$

ja tällöin sen simpleksinen kompleksi on

$$\Delta(C) = \{1, 2, 4, 12, 24, 14, 124\},$$

jonka simpleksi on 124. Täten simplesiseksi kompleksiksi koodiksi laajennettu neurokoodi on siis

$$\{1000, 0100, 0001, 1100, 0101, 1001, 1101\}.$$

2.3 RF-koodit

Tässä alaluvussa määrittelemme käsitteitä, joilla mallinnamme neuroneja aktivoivia ulkoisia ärsykkeitä.

Ensin otamme käyttöön käsitteen, jolla mallinnamme neuronien vastaanottamien ärsykkeiden alkuperää euklidisten avaruuksien avulla.

Määritelmä 2.12 (vrt. [4, s. 2])**.** *Ärsyke-avaruus* on topologinen avaruus X, jolle pätee $X \subset \mathbb{R}^d$ jollain $d \in \mathbb{Z}_+$.

Huomautus. Kun tarkastelemme avaruuksia $\mathbb{R}^d$, missä $d \in \mathbb{Z}_+$ topologisina avaruuksina, niin oletamme jatkossa niiden olevan varustettuja standarditopologialla.

Jokaisella yksittäisellä neuronilla on oma osansa ärsyke-avaruutta, jonka alueella tapahtuva toiminta aktivoi kyseisen neuronin [4, s. 2]. Seuraavassa määritelmässä esitämme tavan mallintaa tätä osaa matemaattisesti.

Määritelmä 2.13 (vrt. [2, 2.2])**.** Olkoon X ärsyke-avaruus. Neuronia i vastaava *reseptiivisen kentän kuvaus*, on kuvaus $f_i \colon X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$. Neuronia i vastaava *reseptiivinen kenttä* on joukko

$$U_i := \{x \in X \mid f_i(x) > 0\}.$$

Reseptiivisen kentän kuvauksen arvojen miellämme vastaavan lähetettävien hermoimpulssien keskimääräistä taajuutta syötteenä saadun ärsykkeen seurauksena [2, 2.2]. Sikäli reseptiivinen kenttä joukkona vastaa aluetta, jolla tapahtuviin ärsykkeisiin sitä vastaava neuroni reagoi.

Huomautus. Jatkossa esitetyissä määritelmissä ja tuloksissa emme edellytä joukkojen olevan reseptiivisiä kenttiä. Kuitenkin hermoston toiminnan mallintamisen kannalta, kun valitsemme kokoelman jonkin ärsyke-avaruuden X joukkoja

$$\mathcal{U} = \{U_1, \ldots, U_n\},$$

olemme usein implisiittisesti kiinnostuneita erityisesti tapauksesta, missä joukko $U_i \subset X$ on neuronia $i \in [n]$ vastaava reseptiivinen kenttä ärsyke-avaruudessa X.

Seuraavan käsitteen avulla yhdistämme koodisanat ärsyke-avaruuden osiin.

Määritelmä 2.14 (vrt. [6, Definition 1.3])**.** Olkoon X ärsyke-avaruus, $\mathcal{U} = \{U_1, \ldots, U_n\}$ kokoelma sen joukkoja ja $c \in \{0,1\}^n$ koodisana. Tällöin koodisanan *c koodisana-alue joukossa $\mathcal{U}$* on joukko

$$\mathcal{U}(c) := \bigcap_{i \in \operatorname{supp}(c)} U_i \setminus \bigcup_{j \in [n] \setminus \operatorname{supp}(c)} U_j.$$

Huomautus. Sovimme tässä, että kun X on joukko ja $A_i \subset X$ kaikilla jonkin indeksijoukon alkioilla $i \in I$, niin

$$\bigcap_{i \in \emptyset} A_i = X$$

ja vastaavasti

$$\bigcup_{i \in \emptyset} A_i = \emptyset.$$

Seuraavaksi esitämme keskeisen määritelmän, joka perustuu joukkojen keskinäisten suhteiden kuvaamiseen niillä koodisanoilla, joita vastaavat koodisana-alueet ovat epätyhjiä.

Määritelmä 2.15 (vrt. [6, Definition 1.2])**.** Olkoon X ärsyke-avaruus ja $\mathcal{U} = \{U_1, \ldots, U_n\}$ kokoelma sen joukkoja. Tällöin joukkoa $\mathcal{U}$ vastaava *RF-koodi* on joukko

$$\begin{aligned} C(\mathcal{U}) &:= \{c \in \{0,1\}^n \mid \mathcal{U}(c) \neq \emptyset\} \\ &= \left\{ c \in \{0,1\}^n \;\middle|\; \left(\bigcap_{i \in \operatorname{supp}(c)} U_i \right) \setminus \left(\bigcup_{j \in [n] \setminus \operatorname{supp}(c)} U_j \right) \neq \emptyset \right\}. \end{aligned}$$

Myöhemmin siirrymme tarkastelemaan tilanteita, joissa määritelmän 2.15 joukoilta U_i, missä $i \in [n]$ edellytetään lisäominaisuuksia. Esimerkiksi monesti kyseisten joukkojen oletetaan olevan avoimia [6, s. 2].

Huomautus (vrt. [6, s. 2]). Jos määritelmän 2.15 tapauksessa $\mathcal{U}$ ei muodosta avaruuden X peitettä, eli

$$\bigcup_{j \in [n]} U_j \neq X,$$

niin tällöin $00 \cdots 0 \in C(\mathcal{U})$, koska silloinhan

$$\begin{aligned} &\left(\bigcap_{i \in \operatorname{supp}(00\cdots0)} U_i \right) \setminus \left(\bigcup_{j \in [n] \setminus \operatorname{supp}(00\cdots0)} U_j \right) \\ &= \left(\bigcap_{i \in \emptyset} U_i \right) \setminus \left(\bigcup_{j \in [n] \setminus \emptyset} U_j \right) \\ &= X \setminus \bigcup_{j \in [n]} U_j \neq \emptyset. \end{aligned}$$

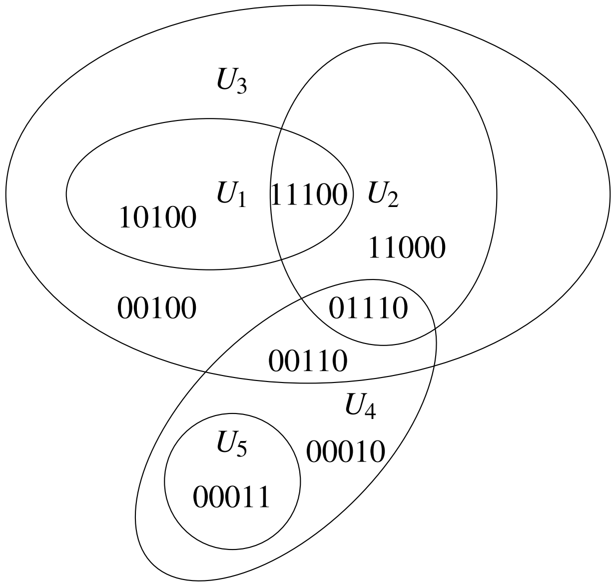
Vastaavasti jos

$$\bigcap_{i \in [n]} U_i \neq \emptyset,$$

niin samaan tapaan voidaan osoittaa, että tällöin $11 \cdots 1 \in C(\mathcal{U})$.

Määritelmä 2.16 (vrt. [6, Definition 1.4])**.** Olkoon X ärsyke-avaruus, $\mathcal{U} = \{U_1, \ldots, U_n\}$ kokoelma sen joukkoja ja C neurokoodi. Jos $C(\mathcal{U}) = C$, niin joukkoa $\mathcal{U}$ sanotaan *neurokoodin C toteutumaksi avaruudessa X.*

Seuraavaksi siirrymme tarkastelemaan toteutumien, neurokoodien ja ärsyke-avaruuden rakenteen välisiä yhteyksiä. Erityisesti pohdimme mitä tietoa saamme ärsyke-avaruudesta tarkastelemalla neurokoodia, jolla on jokin toteutuma kyseisessä avaruudessa [2, 2.2].



Kuva 2.1: Esimerkki joukosta $\mathcal{U} = \{U_1, U_2, U_3, U_4, U_5\}$ ärsyke-avaruudessa $X = U_3 \cup U_4$. Kuvassa koodisana-alueita on havainnollistettu kirjoittamalla kunkin alueen kohdalle vastaava koodisana. Kuvaa vastaavassa tilanteessa pätee siis $\mathcal{C}(\mathcal{U}) = \{10100, 11100, 11000, 00100, 01110, 00110, 00010, 00011\}$.

Lause 2.17. *Olkoon $\mathcal{C}$ neurokoodi. Tällöin kaikilla $d \in \mathbb{Z}_+$ on olemassa ärsyke-avaruus $X \subset \mathbb{R}^d$, jossa neurokoodilla $\mathcal{C}$ on toteutuma.*

Todistus (vrt. [2, Lemma 2.1]). Olkoon $d \in \mathbb{Z}_+$. Valitaan jokaiselle koodisanalle $c \in \mathcal{C}$ piste $x_c \in \mathbb{R}^d$ ja avoin joukko N_c siten, että $x_c \in N_c$ ja $N_c \cap N_{c'} = \emptyset$ kaikilla $c' \in \mathcal{C}$.

Merkitään

$$C_j = \{c \in \mathcal{C} \mid j \in \operatorname{supp}(c)\}$$

kaikilla $j \in [n]$ ja määritellään sitten

$$U_j := \bigcup_{c \in C_j} N_c$$

kaikilla $j \in [n]$.

Olkoon $\mathcal{U} = \{U_1, \ldots, U_n\}$ ja olkoon

$$X := \bigcup_{c \in \mathcal{C}} N_c.$$

Osoitetaan sitten, että $\mathcal{C}(\mathcal{U}) = \mathcal{C}$. Olkoon ensin $c \in \mathcal{C}$. Nyt

$$x_c \in \bigcap_{i \in \operatorname{supp}(c)} U_i,$$

sillä kaikilla $i \in \operatorname{supp}(c)$ pätee $c \in C_i$ ja siten myös $x_c \in N_c \subset U_i$. Toisaalta

$$x_c \notin \bigcup_{j \in [n] \setminus \operatorname{supp}(c)} U_j,$$

koska vastaavasti millään $j \notin \mathrm{supp}(c)$ ei päde $c \in C_j$, jolloin ei myöskään voi olla $x_c \in U_j$ joukkojen N_c erillisyyden nojalla. Siispä

$$x_c \in \left(\bigcap_{i \in \mathrm{supp}(c)} U_i \right) \setminus \left(\bigcup_{j \in [n] \setminus \mathrm{supp}(c)} U_j \right) \neq \emptyset$$

ja täten $c \in C(\mathcal{U})$.

Olkoon sitten $c \in C(\mathcal{U})$. Tällöin on määritelmän 2.15 perusteella oltava

$$\left(\bigcap_{i \in \mathrm{supp}(c)} U_i \right) \setminus \left(\bigcup_{j \in [n] \setminus \mathrm{supp}(c)} U_j \right) \neq \emptyset.$$

Koska joukot $N_{c'}$, missä $c' \in C$ ovat erillisiä on siis oltava olemassa koodisana $c_0 \in C$ siten, että seuraavat ehdot pätevät

$$N_{c_0} \subset \bigcap_{i \in \mathrm{supp}(c)} U_i \tag{1}$$

$$N_{c_0} \not\subset \bigcup_{j \in [n] \setminus \mathrm{supp}(c)} U_j. \tag{2}$$

Ehdon 1 perusteella kaikilla $i \in \mathrm{supp}(c)$ pätee $N_{c_0} \subset U_i$, jolloin on siis oltava $i \in \mathrm{supp}(c_0)$. Toisaalta samaan tapaan ehdon 2 nojalla kaikille $j \notin \mathrm{supp}(c)$ tulee päteä $j \notin \mathrm{supp}(c_0)$. Täten $\mathrm{supp}(c) = \mathrm{supp}(c_0)$, jolloin $c = c_0 \in C$ ja sen myötä on siis saatu $C(\mathcal{U}) = C$.

Täten X on ärsyke-avaruus, jolle pätee $X \subset \mathbb{R}^d$ ja lisäksi $\mathcal{U}$ on neurokoodin C toteutuma ärsyke-avaruudessa X, sillä $C(\mathcal{U}) = C$. □

2.4 Konveksit koodit

Kaikki neurokoodien toteutumat eivät ole biologisen datan perusteella realistisia mallinnuksia. Lähemmäs todellisuutta päästään keskittymällä tarkastelemaan tilannetta, jossa reseptiivisille kentille asetetaan lisäehtoja [6, s. 4-5]. Yksi tällainen ehto on konveksisuus.

Määritelmä 2.18 (vrt. [6, Definition 1.6])**.** Olkoon $d \in Z_+$. Joukko $A \subset \mathbb{R}^d$ on *konveksi* mikäli kaikkien joukon A pisteiden $p, q \in A$ välinen jana sisältyy joukkoon A. Toisin sanottuna, jos kaikilla $p, q \in A$ pätee

$$\left\{ tq + (1-t)p \mid t \in [0,1] \right\} \subset A.$$

Määritelmä 2.19 (vrt. [6, Definition 1.7])**.** Olkoon X konveksi ärsyke-avaruus. Jos neurokoodilla C on toteutuma $\mathcal{U} = \{U_1, \ldots, U_n\}$, missä $U_i \subset X$ on avoin ja konveksi joukko kaikilla $i \in \{1, \ldots, n\}$, niin sitä sanotaan *konveksiksi neurokoodiksi* tai lyhyesti *konveksiksi koodiksi*. Kyseistä toteutumaa kutsutaan *konveksiksi toteutumaksi*.

Lauseessa 2.17 osoitettiin, että jokaisella neurokoodilla on olemassa toteutuma jossain ärsykeavaruudessa. Seuraavassa tuloksessa osoitamme kuitenkin, että sama ei päde mikäli toteutumalta edellytetään määritelmässä 2.19 esitettyjä lisäehtoja. Kaikki neurokoodit eivät siis ole konvekseja koodeja.

Lause 2.20. *Kaikki neurokoodit eivät ole konvekseja. Erityisesti tapauksessa* $n = 3$ *neurokoodi* $C = \{0, 1\}^3 \setminus \{111, 100\}$ *ei ole konveksi.*

Todistus (vrt. [6, Proposition 1.8]). Oletetaan vastoin väitettä, että neurokoodilla C on olemassa konveksi toteutuma jossain konveksissa ärsyke-avaruudessa $X \subset \mathbb{R}^d$, jollain $d \in \mathbb{Z}_+$.

Koska $110 \in C = C(\mathcal{U})$, niin joukon $C(\mathcal{U})$ määrittelyn nojalla on olemassa piste $p \in (U_1 \cap U_2) \setminus U_3$. Vastaavasti koska $101 \in C = C(\mathcal{U})$, niin on myös olemassa $q \in (U_1 \cap U_3) \setminus U_2$. Koska joukko U_1 on konveksi ja $p, q \in U_1$, myös pisteiden p ja q välinen jana

$$L = \{tq + (1 - t)p \mid t \in [0, 1]\}$$

sisältyy joukkoon U_1.

Oletetaan sitten, että $L \not\subset U_2 \cup U_3$. Tällöin olisi siis olemassa piste

$$r \in L \setminus (U_2 \cup U_3).$$

Koska $L \subset U_1$ saadaan, että

$$r \in U_1 \setminus (U_2 \cup U_3) \neq \emptyset.$$

Siispä joukon $C(\mathcal{U})$ määrittelyn nojalla $100 \in C(\mathcal{U}) = C$, mikä on ristiriita.

Täytyy siis olla $L \subset U_2 \cup U_3$. Tiedetään, että jana L on yhtenäinen ja lisäksi, että joukot $L \cap U_2$, $L \cap U_3$ ovat avoimia joukossa L. Myöskin $p \in L \cap U_2 \neq \emptyset$ ja $q \in L \cap U_3 \neq \emptyset$. Koska $L \subset U_2 \cup U_3$, niin toisaalta

$$L = (L \cap U_2) \cup (L \cap U_3),$$

ja tällöin yhtenäisyyden nojalla täytyy päteä

$$(L \cap U_2) \cap (L \cap U_3) = L \cap U_2 \cap U_3 \neq \emptyset.$$

On siis oltava olemassa piste

$$r \in L \cap U_2 \cap U_3$$

ja edelleen koska $L \subset U_1$, niin

$$r \in U_1 \cap U_2 \cap U_3 \neq \emptyset.$$

Tällöinhän joukon $C(\mathcal{U})$ määrittelyn nojalla $111 \in C(\mathcal{U}) = C$, mikä on myös ristiriita. Siispä neurokoodilla C ei voi olla konveksia toteutumaa missään konveksissa ärsyke-avaruudessa ja täten se ei myöskään ole konveksi koodi. □

Huomautus. Neuronien lukumäärä vaikuttaa konveksien koodien osuuteen. Kun $n \leq 2$ ovat kaikki neurokoodit konvekseja. Sen sijaan tapauksessa $n = 3$ on yhteensä kuusi erilaista ei-konveksia neurokoodia [4, s. 6]. Ne ovat

$$\begin{aligned}
&\{000, 010, 001, 110, 101\},\\
&\{000, 010, 110, 101\},\\
&\{000, 110, 101\},\\
&\{000, 100, 010, 110, 101, 011\},\\
&\{000, 100, 110, 101, 011\},\\
&\{000, 110, 101, 011\}.
\end{aligned}$$

Keskeinen neurokoodien konveksisuutta koskeva ongelma on neurokoodin tunnistaminen konveksiksi [6, s. 10]. Alaluvun lopuksi esitämme lyhyesti yhden tähän liittyvän tuloksen.

Määritelmä 2.21 (vrt. [6, Definition 1.20])**.** Olkoon $\mathcal{C}$ neurokoodi. Jos kaikilla $\sigma, \tau \in \operatorname{supp}(\mathcal{C})$ pätee

$$\sigma \cap \tau \in \operatorname{supp}(\mathcal{C}),$$

niin neurokoodin $\mathcal{C}$ sanotaan olevan *leikkausten suhteen suljettu.*

Lause 2.22 (vrt. [6, s. 10])**.** *Leikkausten suhteen suljetut neurokoodit ovat konvekseja. Erityisesti tällöin simpleksiset kompleksit koodit ovat konvekseja.*

Todistus. ks. [5]. □

2.5 Avoimen peitteen hermo

Tässä alaluvussa tuomme vielä mukaan avoimen peitteen hermon käsitteen ja tarkastelemme sen suhdetta vastaavaan RF-koodiin. Lopuksi esitämme lyhyesti kaksi merkittävää tulosta.

Määritelmä 2.23 (vrt. [4, s. 3])**.** Olkoon X topologinen avaruus ja $\mathcal{U} = \{U_1, \ldots, U_n\}$ sen avoin peite. Tällöin *avoimen peitteen $\mathcal{U}$ hermo* on joukko

$$\mathcal{N}(\mathcal{U}) := \left\{ c \in \{0,1\}^n \;\middle|\; \bigcap_{i \in \operatorname{supp}(c)} U_i \neq \emptyset \right\}.$$

Huomautus. Aiemmin koodisanoille ja neurokoodeille esittämäämme samastusta voidaan luontevasti soveltaa myös avoimen peitteen hermoon. Tällöin alkioina olevat koodisanat tulkitaan taas vektorien sijaan joukoiksi neuroneja. Tällä tulkinnalla äskeisen määritelmän tilanteessa voitaisiin siis asettaa

$$\mathcal{N}(\mathcal{U}) := \left\{ \sigma \subset [n] \;\middle|\; \bigcap_{i \in \sigma} U_i \neq \emptyset \right\}.$$

Jatkossa siirrymme näiden tulkintatapojen välillä tarpeen mukaan.

Kun neuronien joukkoa vastaavat reseptiiviset kentät muodostavat ärsyke-avaruuden avoimen peitteen $\mathcal{U}$, ovat joukkoa $\mathcal{U}$ vastaava RF-koodi ja hermo läheisessä suhteessa keskenään.

Lause 2.24. *Olkoon X ärsyke-avaruus ja $\mathcal{U} = \{U_1, \dots, U_n\}$ sen avoin peite. Tällöin*

$$\mathcal{C}(\mathcal{U}) \subset \mathcal{N}(\mathcal{U})$$

ja erityisesti

$$\Delta(\mathcal{C}(\mathcal{U})) = \mathcal{N}(\mathcal{U}).$$

Todistus (vrt. [4, s. 3]). Osoitetaan ensin, että $\mathcal{C}(\mathcal{U}) \subset \mathcal{N}(\mathcal{U})$. Olkoon $c \in \mathcal{C}(\mathcal{U})$. Tällöin määritelmän 2.15 perusteella

$$\left(\bigcap_{i \in \operatorname{supp}(c)} U_i \right) \setminus \left(\bigcup_{j \in [n] \setminus \operatorname{supp}(c)} U_j \right) \neq \emptyset.$$

Erityisestihän tällöin on oltava

$$\bigcap_{i \in \operatorname{supp}(c)} U_i \neq \emptyset,$$

jolloin puolestaan määritelmän 2.23 nojalla $c \in \mathcal{N}(\mathcal{U})$. Ollaan siis saatu $\mathcal{C}(\mathcal{U}) \subset \mathcal{N}(\mathcal{U})$.

Todistetaan sitten, että $\Delta(\mathcal{C}(\mathcal{U})) = \mathcal{N}(\mathcal{U})$. Tässä tulkitsemme aiemmin esitetyn samastuksen mukaisesti koodisanat neuronien joukoiksi. Olkoon $\sigma \in \mathcal{N}(\mathcal{U})$ ja $\tau \subset \sigma$. Tällöin

$$\bigcap_{i \in \sigma} U_i \neq \emptyset,$$

joten on olemassa $x \in X$ siten, että $x \in U_i$ kaikilla $i \in \sigma$. Täten

$$x \in \bigcap_{i \in \tau} U_i \neq \emptyset,$$

josta seuraa, että $\tau \in \mathcal{N}(\mathcal{U})$. Siis $\mathcal{N}(\mathcal{U})$ on määritelmän 2.5 nojalla abstrakti simpleksinen kompleksi. Koska lisäksi aiemman perusteella $\mathcal{C}(\mathcal{U}) \subset \mathcal{N}(\mathcal{U})$, niin lauseen 2.10 perusteella $\Delta(\mathcal{C}(\mathcal{U})) \subset \mathcal{N}(\mathcal{U})$.

Toisaalta jos $\sigma \in \mathcal{N}(\mathcal{U})$, niin

$$\bigcap_{i \in \sigma} U_i \neq \emptyset.$$

Tällöin on siis olemassa

$$x \in \bigcap_{i \in \sigma} U_i \neq \emptyset.$$

Olkoon

$$\tau := \{i \in [n] | x \in U_i\}.$$

Nythän

$$x \in \left(\bigcap_{i \in \tau} U_i \right) \setminus \left(\bigcup_{j \in [n] \setminus \tau} U_j \right) \neq \emptyset.$$

Siispä $\tau \in \mathcal{C}(\mathcal{U})$ ja koska toisaalta $\sigma \subset \tau$, niin määritelmän 2.9 perusteella $\sigma \in \Delta(\mathcal{C}(\mathcal{U}))$. Täten on saatu

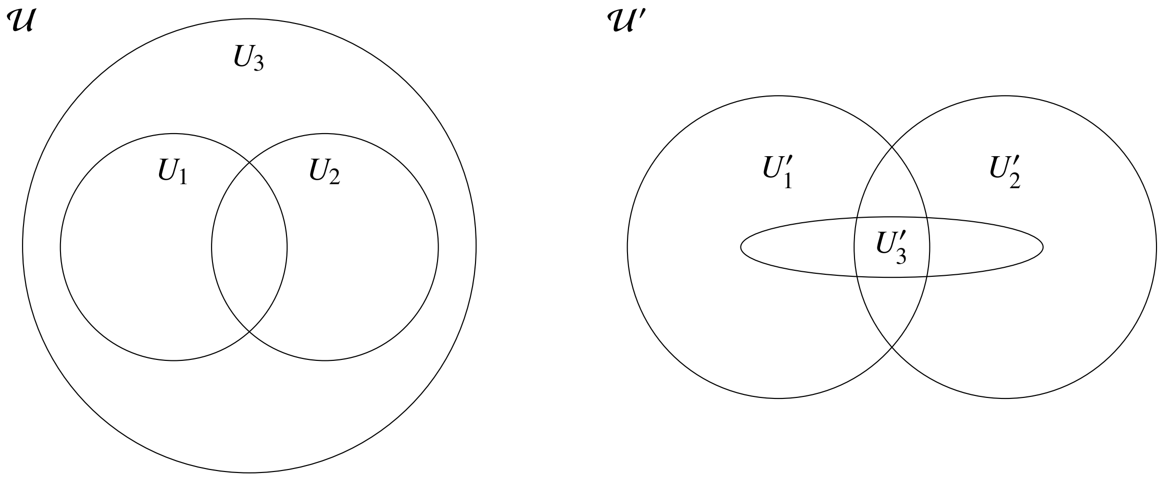
$$\mathcal{N}(\mathcal{U}) \subset \Delta(\mathcal{C}(\mathcal{U})),$$

joten todellakin

$$\Delta(\mathcal{C}(\mathcal{U})) = \mathcal{N}(\mathcal{U}).$$

□

Avoimen peitteen hermo voidaan täten palauttaa kyseistä avointa peitettä vastaavasta neurokoodista täydentämällä se simpleksiseksi kompleksiksi. Esimerkissä 2.25 näemme lisäksi, että avointa peitettä vastaava neurokoodi sisältää tietoa peitteestä, jota ei nähdä pelkästä hermosta [4, s. 3].



Kuva 2.2: Esimerkin 2.25 tapaukset $\mathcal{U} = \{U_1, U_2, U_3\}$ ja $\mathcal{U}' = \{U'_1, U'_2, U'_3\}$.

Esimerkki 2.25 (vrt. [2, Fig. 3])**.** Olkoot $\mathcal{U} = \{U_1, U_2, U_3\}$ ja $\mathcal{U}' = \{U'_1, U'_2, U'_3\}$ kuten kuvassa 2.2. Tarkastellaan ensin joukkoa $\mathcal{U}$ ja asetetaan ärsyke-avaruudeksi $X = U_3$, jolloin $\mathcal{U}$ on sen avoin peite. Tällöin kuvaa vastaa tilanne, jossa

$$\mathcal{C}(\mathcal{U}) = \{111, 101, 011, 001\}.$$

Lisäksi koska

$$111 \in \mathcal{C}(\mathcal{U}) \subset \mathcal{N}(\mathcal{U}),$$

niin simpleksinä kompleksina vastaavalle avoimen peitteen hermolle pätee

$$\mathcal{N}(\mathcal{U}) = \Delta(\mathcal{C}(\mathcal{U})) = \{0, 1\}^3.$$

Vastaavasti joukon $\mathcal{U}'$ tapauksessa voimme asettaa ärsyke-avaruudeksi $X = U_1' \cup U_2'$, jolloin $\mathcal{U}'$ on sen avoin peite. Nyt samaan tapaan kuin edellä saamme, että

$$C(\mathcal{U}') = \{111, 101, 011, 110, 100, 010\}$$

ja siten myös

$$\mathcal{N}(\mathcal{U}') = \Delta(C(\mathcal{U}')) = \{0, 1\}^3.$$

Omien ärsyke-avaruuksiensa avoimilla peitteillä $\mathcal{U}$ ja $\mathcal{U}'$ on siis sama hermo niiden alkioiden erilaisista keskinäisistä suhteista huolimatta. Sen sijaan niitä vastaavat RF-koodit eroavat toisistaan.

Esittelemme nyt seuraavat kaksi merkittävää avoimen peitteen hermoon liittyvää tulosta. Sivuutamme tässä todistukset (vrt. [2, 2.3.1]).

Lause 2.26 (Hellyn lause)**.** *Olkoot $d, k \in \mathbb{Z}_+$ ja $d < k$. Olkoot lisäksi $U_1, \ldots, U_k \subset \mathbb{R}^d$ konvekseja joukkoja. Jos kaikki näistä joukoista muodostettavat leikkaukset, joissa leikattavien joukkojen lukumäärä on $d + 1$ ovat epätyhjiä, niin koko leikkaus $\bigcap_{i=1}^k U_i$ on myös epätyhjä.*

Todistus. Sivuutetaan. □

Hellyn lause paljastaa muun muassa ärsyke-avaruuden vähimmäisdimensioon kohdistuvia rajoitteita tapauksessa, jossa RF-koodin $C = C(\mathcal{U})$ tiedetään olevan konveksi [2, 2.3.1].

Lause 2.27 (Neurolemma)**.** *Olkoon X topologinen avaruus ja $\mathcal{U} = \{U_1, \ldots, U_n\}$ sen konvekseista joukoista koostuva avoin peite. Tällöin $\bigcup_{i=1}^n U_i$ ja $\mathcal{N}(\mathcal{U})$ ovat homotopia ekvivalentit. Erityisesti niillä on tismalleen samat homologia ryhmät.*

Todistus. Sivuutetaan. □

Luvun lopuksi nostamme esiin yhden keskeisimmän tavoitteemme [2, 2.3.3]. Määritellään sitä varten seuraava jatkossa tarvitsemamme käsite.

Määritelmä 2.28 (vrt. [2, 2.3.3])**.** Olkoot C neurokoodi ja $\mathcal{U} = \{U_1, \ldots, U_n\}$ sen toteutuma ärsyke-avaruudessa X. Määritellään neuronien osajoukkojen välille joukko-opillinen relaatio R asettamalla

$$\sigma R \tau \Leftrightarrow \bigcap_{i \in \sigma} U_i \subset \bigcup_{j \in \tau} U_j,$$

missä $\sigma, \tau \subset [n]$. Tällöin relaation R alkioita vastaavia suhteita sanotaan *toteutuman $\mathcal{U}$ relaatioiksi*. *RF-struktuurilla* tai *toteutuman rakenteella* tarkoitamme itse relaatiota R, eli kyseessä olevaa toteutuman relaatioiden joukkoa.

Huomautus. Huomataan edellisen määritelmän tapauksessa myös erikoistapaukset $\sigma = \emptyset$ ja $\tau = \emptyset$. Jos $\sigma = \emptyset$, niin vastaava ehto on aiemman sopimuksemme perusteella

$$X \subset \bigcup_{j \in \tau} U_j.$$

Jos taas $\tau = \emptyset$, niin
$$\bigcap_{i \in \sigma} U_i \subset \emptyset,$$
mistä seuraa, että tällöin
$$\bigcap_{i \in \sigma} U_i = \emptyset.$$

Keskeisin tavoitteemme tässä tutkielmassa on esittää menetelmä, jonka avulla kykenemme selvittämään toteutuman rakennetta koskevaa tietoa tarkastelemalla neurokoodia C ilman tarkkaa tietoa joukoista U_i, missä $i \in [n]$. Aloitamme matkamme kohti tätä tavoitetta siirtymällä seuraavaksi tutkimaan tilannetta algebrallisesta näkökulmasta, käyttäen apuna algebrallisen geometrian menetelmiä.

3. Neurorenkaat ja neuroideaalit

Tässä luvussa jatkamme kiinnittämämme neuronien joukon $[n]$ tarkastelua. Siirtyessämme tutkimaan neurokoodeja algebrallisesta näkökulmasta miellämme jatkossa koodisanat jonoiksi kahden alkion kunnan $\mathbb{F}_2$ alkioita. Tällöin koodisanalle c pätee, $c \in \mathbb{F}_2^n$ ja neurokoodille C vastaavasti $C \subset \mathbb{F}_2^n$. Tämä tulkintatavan muutos ei vaikuta edellisen luvun tuloksiin.

Lisäksi otamme nyt käyttöön merkinnän

$$\mathbb{F}_2[n] := \mathbb{F}_2[X_1, \ldots, X_n].$$

3.1 Neurorengas

Aloitamme liittämällä neurokoodiin ideaalin algebralliselle geometrialle ominaisella tavalla.

Määritelmä 3.1 (vrt. [2, 3.2])**.** Olkoon $C \subset \mathbb{F}_2^n$ neurokoodi. Tällöin *neurokoodin C ideaali* on joukko

$$I_C := I(C) = \{F \in \mathbb{F}_2[n] \mid F(c) = 0 \text{ kaikilla } c \in C\}.$$

Huomautus. Oletamme tässä algebrallisesta geometriasta tunnetuksi, että joukko I_C todella on ideaali.

Määritelmä 3.2 (vrt. [6, Definition 2.3])**.** Olkoon $I \subset \mathbb{F}_2[n]$ ideaali. Tällöin *ideaalin I varisto* on joukko

$$V(I) := \{v \in \mathbb{F}_2^n \mid F(v) = 0 \text{ kaikilla } F \in \mathbb{F}_2[n]\}.$$

Tämän algebrallisen geometrian peruskäsitteen erikoispiirre neurokoodien yhteydessä on se, että polynomirenkaan $\mathbb{F}_2[n]$ ideaalien varistot ovat neurokoodeja.

Binäärikertoimisilla polynomirenkailla on kerroinkunnan erityisluonteesta johtuen monia epätavallisia ominaisuuksia. Nimeämme seuraavaksi joukon polynomeja, jotka vaikuttavat merkittävällä tavalla neurorenkaan ja neuroideaalin käsitteiden muodostamiseen.

Määritelmä 3.3 (vrt. [6, Definition 2.8])**.** *Boolen ideaali* on ideaali

$$\mathcal{B} := \langle X_1^2 - X_1, \ldots, X_n^2 - X_n \rangle.$$

Sen virittäjiä kutsutaan *Boolen polynomeiksi*.

Huomautus. Todetaan aluksi oleellinen merkintöjä jatkossa selittävä huomio. Havaitaan nimittäin, että tarkastelemamme polynomirenkaan kerroinkunnan erikoispiirteistä johtuen kaikilla $i \in [n]$ pätee

$$1 - X_i = -1 \cdot (X_i - 1) = 1 \cdot (X_i - 1) = X_i - 1$$

ja toisaalta myös

$$X_i - 1 = X_i + 1,$$

koska kunnassa $\mathbb{F}_2$ pätee $-1 = 1$.

Huomautus. Olkoon $i \in [n]$ neuroni. Tarkastellaan sitä vastaavaa Boolen polynomia $B_i = X_i^2 - X_i = X_i(X_i - 1)$. Huomataan sitten, että kun $c \in \mathbb{F}_2^n$ on koodisana, niin saadaan

$$B_i(c) = c_i^2 - c_i = c_i - c_i = 0,$$

koska $v^2 = v$ kaikilla $v \in \mathbb{F}_2$. Siis Boolen polynomeja vastaavat polynomifunktiot $\phi \colon \mathbb{F}_2^n \to \mathbb{F}_2$ ovat nollakuvauksia. Lisäksi tästä seuraa, että sama ominaisuus on myös muilla Boolen ideaalin alkioilla.

Oleellinen Boolen ideaalia koskeva havainto on, että edellisen huomautuksen nojalla pätee siis $\mathcal{B} \subset I_C$ kaikilla neurokoodeilla $C \subset \mathbb{F}_2^n$. Koska nämä polynomit ovat osa kaikkien neurokoodien ideaaleja, eivät ne välitä tietoa ideaaliin liittyvästä neurokoodista. Tämän vuoksi myöhemmin siirrymmekin tarkastelemaan toisenlaista neurokoodia kuvaavaa ideaalia, josta tämä tarpeeton sisältö on poistettu.

Neurokoodien ideaalien avulla voimme nyt määritellä tämän tutkielman kannalta oleellisen käsitteen.

Määritelmä 3.4 (vrt. [2, 3.2])**.** Olkoon $C \subset \mathbb{F}_2^n$ neurokoodi. Tällöin neurokoodia C vastaava *neurorengas* on tekijärengas

$$\mathcal{R}_C := \mathbb{F}_2[n] / I_C .$$

Perehdymme tarkemmin neurorenkaisiin ja etenkin niiden alkioihin alaluvussa 3.3.

3.2 Neuroideaali

Neurokoodiin $C \subset \mathbb{F}_2^n$ aiemmin liittämässämme ideaalissa I_C on puutteensa. Jo aiemmin havaittiin, että sen sisältämä Boolen ideaali $\mathcal{B}$ ei sisällä lainkaan lainkaan neurokoodiin C liittyvää tietoa. Lisäksi määritelmästä ei ole suoraan nähtävissä kyseisen ideaalin virittäjiä, mutta selvitämme ne myöhemmin tässä alaluvussa [2, 3.4].

Seuraava määritelmäpari johdattelee meitä kohti paremmin neurokoodia kuvaavaa ideaalia. Ensin määrittelemme tärkeän polynomeja koskevan ominaisuuden renkaassa $\mathbb{F}_2[n]$.

Määritelmä 3.5 (vrt. [6, Definition 2.5])**.** Polynomia $F \in \mathbb{F}_2[n]$ sanotaan *pseudomonomiksi*, mikäli se on muotoa

$$F = \prod_{i \in \sigma} X_i \prod_{j \in \tau} (1 - X_j),$$

joillain $\sigma, \tau \subset [n]$, joille pätee $\sigma \cap \tau = \emptyset$.

Huomautus. Sovimme tässä, että

$$\prod_{i\in\emptyset} X_i = 1.$$

Huomautus. Määritelmän tapauksessa ehdosta $\sigma \cap \tau = \emptyset$ seuraa, että

$$0 \leq \deg(F) \leq n.$$

Huomautus. Boolen polynomit eivät ole pseudomonomeja. Jos nimittäin $i \in [n]$, on neuroni niin sitä vastaavalle Boolen polynomille pätee

$$X_i^2 - X_i = X_i(X_i - 1) = \prod_{j\in\sigma} X_j \prod_{k\in\tau}(1 - X_k),$$

missä $\sigma = \tau = \{i\}$, jolloin $\sigma \cap \tau \neq \emptyset$.

Polynomirenkaan $\mathbb{F}_2[n]$ kerroinkunnan erikoisluonteesta johtuen meidän on nyt pseudomonomien avulla mahdollista määritellä seuraava hyvin erityinen käsite, jonka avulla kuhunkin koodisanaan voidaan yhdistää siihen kiinteästi liittyvä polynomi.

Määritelmä 3.6 (vrt. [6, Definition 2.6])**.** Olkoon $c \in \mathbb{F}_2^n$. Tällöin koodisanan c *indikaattori* on pseudomonomi

$$\rho_c := \prod_{i\in\operatorname{supp}(c)} X_i \prod_{j\in[n]\setminus\operatorname{supp}(c)} (1 - X_j) \in \mathbb{F}_2[n]$$

Huomautus. Jatkossa käytämme monesti apuna seuraavaa havaintoa. Olkoon

$$F = \prod_{i\in\sigma} X_i \prod_{j\in\tau}(1 - X_j) \in \mathbb{F}_2[n]$$

pseudomonomi. Jos pätee $\deg(F) < n$, niin F voidaan täydentää jotain koodisanaa vastaavaksi indikaattoriksi laajentamalla joukkoja σ, τ siten, että ne muodostavat neuronien joukon $[n]$ osituksen.

Toisaalta tapauksessa $\deg(F) = n$, on F jo itsessään indikaattori. Nimittäin tällöinhän $F = \rho_c$, missä $c \in \mathbb{F}_2^n$ on koodisana, jolle pätee $\operatorname{supp}(c) = \sigma$.

Esimerkki 3.7. Tapauksessa $n = 5$

$$X_1X_3(1 - X_2)(1 - X_4) \in \mathbb{F}_2[n]$$

on pseudomonomi, joka voidaan laajentaa koodisanan 10101 indikaattoriksi

$$\rho_{10101} = X_1X_3X_5(1 - X_2)(1 - X_4) \in \mathbb{F}_2[n],$$

tai koodisanan 10100 indikaattoriksi

$$\rho_{10100} = X_1X_3(1 - X_2)(1 - X_4)(1 - X_5) \in \mathbb{F}_2[n],$$

joiden kummankin tekijä se on. Se ei kuitenkaan ole itsessään minkään koodisanan indikaattori.

Indikaattoreiden oleellinen ominaisuus on niiden kyky tunnistaa täysin niitä vastaava koodisana, kuten käy ilmi seuraavasta suoraviivaisesta tuloksesta.

Lause 3.8 (vrt. [6, s. 13])**.** *Olkoon $c \in \mathbb{F}_2^n$ koodisana. Tällöin*

$$\rho_c(v) = \begin{cases} 1 \text{ ,kun } v = c \\ 0 \text{ ,kun } v \neq c \end{cases}$$

kaikilla $v \in \mathbb{F}_2^n$.

Todistus. Kantajan määritelmästä seuraa, että

$$\begin{aligned}
\rho_c(c) &= \left(\prod_{i \in \mathrm{supp}(c)} X_i \prod_{j \in [n] \setminus \mathrm{supp}(c)} (1 - X_j) \right)(c) \\
&= \prod_{i \in \mathrm{supp}(c)} c_i \prod_{j \in [n] \setminus \mathrm{supp}(c)} (1 - c_j) \\
&= \prod_{i \in \mathrm{supp}(c)} 1 \prod_{j \in [n] \setminus \mathrm{supp}(c)} (1 - 0) = 1.
\end{aligned}$$

Vastaavasti jos $v \neq c$, niin on olemassa neuroni $k \in [n]$, jolle pätee $v_k \neq c_k$. Jos $k \in \mathrm{supp}(c)$, niin $v_k = 0$ ja

$$\begin{aligned}
\rho_c(v) &= \left(\prod_{i \in \mathrm{supp}(c)} X_i \prod_{j \in [n] \setminus \mathrm{supp}(c)} (1 - X_j) \right)(v) \\
&= v_k \cdot \prod_{i \in \mathrm{supp}(c) \setminus \{k\}} v_i \prod_{j \in [n] \setminus \mathrm{supp}(c)} (1 - v_j) \\
&= 0 \cdot \prod_{i \in \mathrm{supp}(c) \setminus \{k\}} v_i \prod_{j \in [n] \setminus \mathrm{supp}(c)} (1 - v_j) = 0.
\end{aligned}$$

Jos taas $k \notin \mathrm{supp}(c)$, niin vastaavasti $v_k = 1$ ja

$$\begin{aligned}
\rho_c(v) &= \left(\prod_{i \in \mathrm{supp}(c)} X_i \prod_{j \in [n] \setminus \mathrm{supp}(c)} (1 - X_j) \right)(v) \\
&= (1 - v_k) \cdot \prod_{i \in \mathrm{supp}(c)} v_i \prod_{j \in [n] \setminus (\mathrm{supp}(c) \cup \{k\})} (1 - v_j) \\
&= 0 \cdot \prod_{i \in \mathrm{supp}(c)} v_i \prod_{j \in [n] \setminus (\mathrm{supp}(c) \cup \{k\})} (1 - v_j) = 0.
\end{aligned}$$

□

Indikaattoreiden avulla olemme nyt valmiita määrittelemään tämän tutkielman keskeisimmän käsitteen.

Määritelmä 3.9 (vrt. [2, 3.4])**.** Olkoon $C \subset \mathbb{F}_2^n$ neurokoodi. Tällöin neurokoodin C *neuroideaali* on

$$J_C := \langle \rho_c \mid c \notin C \rangle.$$

Huomautus. Sovimme, että $\langle \emptyset \rangle = \{0\}$.

Neuroideaalin määritelmästä seuraa suoraan seuraava yksinkertainen mutta tärkeä tulos.

Lause 3.10 (vrt. [6, s. 14])**.** *Olkoon $C \subset \mathbb{F}_2^n$ neurokoodi. Tällöin*

$$V(J_C) = C.$$

Todistus. Jaetaaan tarkastelu kahteen tapaukseen. Olkoon ensin $c \notin C$. Tällöin $\rho_c \in J_C$ ja koska $\rho_c(c) = 1 \neq 0$, niin $c \notin V(J_C)$.

Olkoon sitten $c \in C$. Tällöin $\rho_v(c) = 0$ kaikilla $v \notin C$. Siis kaikki neuroideaalin J_C virittäjät häviävät pisteessä $c \in C$, jolloin sama pätee myös muille neuroideaalin J_C alkioille ja täten $c \in V(J_C)$.

Siis $V(J_C) = C$. □

Seuraavaksi lähdemme tarkastelemaan neurokoodiin C liittyvien ideaalien I_C ja J_C välistä suhdetta. Äskeisestä lauseesta 3.10 seuraa heti, että $J_C \subset I_C$ kaikilla neurokoodeilla $C \subset \mathbb{F}_2^n$. Osoitamme lauseessa 3.12, niiden liittyvän kiinteästi toisiinsa, mutta todistaaksemme sen tarvitsemme avuksi seuraavaa vahvaa tulosta.

Apulause 3.11 (Vahva Nullstellensatz äärellisille kunnille)**.** *Olkoot $\mathbb{F}_k$ äärellinen kunta, jossa on k alkiota ja $m \in \mathbb{Z}_+$. Olkoon lisäksi $J \subset \mathbb{F}_k[X_1, \ldots, X_m]$ ideaali. Tällöin*

$$I(V(J)) = J + \langle X_1^k - X_1, \ldots, X_m^k - X_m \rangle.$$

Todistus. Sivuutetaan. Ks. [1, Corollary 2.5] □

Lause 3.12 (vrt. [2, Lemma 3.2])**.** *Olkoon $C \subset \mathbb{F}_2^n$ neurokoodi. Tällöin*

$$I_C = J_C + \mathcal{B}.$$

Todistus (vrt. [2, 6.1.2]). Koska lauseen 3.10 nojalla $V(J_C) = C$, niin

$$I_C = I(C) = I(V(J_C)).$$

Toisaalta käyttämällä apulausetta 3.11 saadaan, että

$$I(V(J_C)) = J_C + \langle X_1^2 - X_1, \ldots, X_n^2 - X_n \rangle = J_C + \mathcal{B}.$$

Yhdistämällä nämä kaksi havaintoa saadaan siis todellakin, että

$$I_C = J_C + \mathcal{B}.$$

□

Tämän huomattavan tuloksen myötä osoittautuu siis, että neurokoodiin $C \subset \mathbb{F}_2^n$ liittyvien ideaalien I_C ja J_C ero koskee ideaalia $\mathcal{B}$. Neuroideaali voidaan siis mieltää sitä vastaavan neurokoodin ideaaliksi, josta on karsittu Boolen ideaali ja sen myötä myös merkittävä määrä kyseisen neurokoodin kannalta tarpeetonta informaatiota.

Lisäksi voimme nyt esittää ideaalin I_C sen virittäjien avulla [2, Lemma 3.2]

$$I_C = J_C + \mathcal{B} = \langle \{\rho_c \mid c \notin C\} \cup \{X_i^2 - X_1 \mid i \in [n]\} \rangle.$$

3.3 Neurorenkaan alkiot kuvauksina

Tässä alaluvussa palaamme tarkastelemaan neurorenkaita ja niiden alkioita. Erityisesti toteamme, että kun C on neurokoodi, niin neurorenkaan $\mathcal{R}_C$ alkiot vastaavat kuvauksia $f\colon C \to \mathbb{F}_2$. Tämä tulkinta osoittautuu hyödylliseksi myöhemmin luvussa 4 ja etenkin luvussa 5.

Lause 3.13 (vrt. [8, 6.2])**.** *Olkoon $f\colon \mathbb{F}_2^n \to \mathbb{F}_2$. Tällöin on olemassa $F \in \mathbb{F}_2[n]$ siten, että $f(c) = F(c)$ kaikilla $c \in \mathbb{F}_2^n$.*

Todistus. Asetetaan

$$F = \sum_{c \in \mathbb{F}_2^n} f(c) \cdot \rho_c.$$

Kaikilla $c' \in \mathbb{F}_2^n$ pätee nyt

$$\begin{aligned} F(c') &= \left(\sum_{c \in \mathbb{F}_2^n} f(c) \cdot \rho_c \right)(c') \\ &= \sum_{c \in \mathbb{F}_2^n} f(c) \cdot \underbrace{\rho_c(c')}_{= 0 \text{ kun } c \neq c'} \\ &= f(c') \cdot \rho_{c'}(c') \\ &= f(c') \cdot 1 \\ &= f(c'). \end{aligned}$$

□

Huomautus. Lauseen 3.13 tulosta voidaan soveltaa myös kuvauksiin, jotka ovat muotoa $f\colon A \to \mathbb{F}_2$, missä $A \subset \mathbb{F}_2^n$. Tällöin vastaavan polynomin voidaan samaan tapaan osoittaa olevan

$$F = \sum_{c \in A} f(c) \cdot \rho_c,$$

ja sille pätee $f(c) = F(c)$ kaikilla $c \in A$.

Esitellään sitten toinen tarvitsemamme tulos, jonka perusteella neurorenkaan sivuluokat koostuvat niistä polynomeista, jotka määrittelevät saman polynomifunktion tarkasteltavan neurokoodin suhteen.

Lause 3.14. *Olkoon $C \subset \mathbb{F}_2^n$ neurokoodi. Tällöin polynomien $F, G \in \mathbb{F}_2[n]$ sivuluokat neurorenkaassa $\mathcal{R}_C$ ovat samat, jos ja vain jos*

$$F(c) = G(c) \textit{ kaikilla } c \in C.$$

Todistus (vrt. [10, 3.3]). Tulos saadaan johdettua suoraviivaisesti havaitsemalla, että

$$\begin{aligned} F + I_C = G + I_C &\Leftrightarrow F - G \in I_C \\ &\Leftrightarrow (F - G)(c) = 0 \text{ kaikilla } c \in C \\ &\Leftrightarrow F(c) - G(c) = 0 \text{ kaikilla } c \in C \\ &\Leftrightarrow F(c) = G(c) \text{ kaikilla } c \in C. \end{aligned}$$

□

Lauseiden 3.13 ja 3.14 avulla voimme nyt nähdä neurorenkaan $\mathcal{R}_C$ alkioiden ja kuvausten $f\colon C \to \mathbb{F}_2$ vastaavuuden. Jos nimittäin $f\colon C \to \mathbb{F}_2$, niin nyt lauseen 3.13 perusteella on olemassa $F \in \mathbb{F}_2[n]$ siten, että $f(c) = F(c)$ kaikilla $c \in C$. Tällöin lauseen 3.14 perusteella polynomia F vastaava sivuluokka neurorenkaassa $\mathcal{R}_C$ vastaa tismalleen niitä polynomeja $G \in \mathbb{F}_2[n]$, joille pätee $G(c) = f(c)$ kaikilla $c \in C$. Täten kutakin kuvausta $f\colon C \to \mathbb{F}_2$ vastaa oma sivuluokkansa neurorenkaassa $\mathcal{R}_C$, joka koostuu niistä polynomeista, joiden polynomifunktioiden rajoittuma neurokoodiin C on f.

Osoitetaan tämä vastaavuus vielä täsmällisesti seuraavassa lauseessa.

Lause 3.15. *Olkoon* $\mathbb{F}_2^C = \{f \mid f\colon C \to \mathbb{F}_2\}$. *Muodostetaan joukosta* $\mathbb{F}_2^C$ *rengas varustamalla se pisteittäisillä laskutoimituksilla*

$$(f+g)(c) = f(c) + g(c)$$

ja

$$(fg)(c) = f(c) \cdot g(c).$$

Tällöin

$$\mathcal{R}_C \cong \mathbb{F}_2^C.$$

Todistus. Määritellään kuvaus $\phi\colon \mathcal{R}_C \to \mathbb{F}_2^C$ asettamalla $\phi(F + I_C) = f$, missä $f(c) = F(c)$ kaikilla $c \in C$. Lauseesta 3.14 seuraa, että ϕ todella on kuvaus ja sen lisäksi myös injektio. Toisaalta lauseesta 3.13 seuraa, että ϕ on lisäksi myös surjektio. Jos nimittäin $f \in \mathbb{F}_2^C$, niin tällöin lauseen 3.13 perusteella on olemassa $F \in \mathbb{F}_2[n]$, jolle $F(c) = f(c)$ kaikilla $c \in C$ ja tällöin $\phi(F + I_C) = f$. Siis ϕ on injektiona ja surjektiona bijektio.

Osoitetaan sitten, että ϕ on rengashomomorfismi. Kun $F + I_C, G + I_C \in \mathcal{R}_C$, niin kaikilla $c \in C$

$$\begin{aligned}
\phi((F + I_C) + (G + I_C))(c) &= \phi((F + G) + I_C)(c) \\
&= (F + G)(c) \\
&= F(c) + G(c) \\
&= \phi(F + I_C)(c) + \phi(G + I_C)(c) \\
&= (\phi(F + I_C) + \phi(G + I_C))(c),
\end{aligned}$$

joten $\phi((F + I_C) + (G + I_C)) = \phi(F + I_C) + \phi(G + I_C)$.

Lisäksi saadaan myös vastaavasti, että

$$\begin{aligned}
\phi((F + I_C) \cdot (G + I_C))(c) &= \phi(FG + I_C)(c) \\
&= (FG)(c) \\
&= F(c) \cdot G(c) \\
&= \phi(F + I_C)(c) \cdot \phi(G + I_C)(c) \\
&= (\phi(F + I_C) \cdot \phi(G + I_C))(c),
\end{aligned}$$

joten $\phi((F + I_C) \cdot (G + I_C)) = \phi(F + I_C) \cdot \phi(G + I_C)$.

Lopuksi todetaan vielä, että kaikilla $c \in C$

$$\phi(1 + I_C)(c) = 1(c) = 1 = 1_{\mathbb{F}_2^C}(c),$$

joten $\phi(1 + I_C) = 1_{\mathbb{F}_2^C}$.

Tämän myötä olemme osoittaneet, että ϕ on rengashomomorfismi. Koska osoitimme sen olevan myös bijektio, niin täten se on rengasisomorfismi ja $\mathcal{R}_C \cong \mathbb{F}_2^C$.

□

Huomautus. Lause 3.15 vastaa algebrallisesta geometriasta tunnettua tulosta, jonka mukaan kun k on kunta ja $V \subset \mathbb{A}^m$ on algebrallinen joukko, niin

$$k[X_1, \ldots, X_m] / I(V) \cong k[V],$$

missä $k[V]$ on algebrallisen joukon V koordinaattirengas, joka koostuu polynomifunktioista $f : V \to k$.

Lauseen 3.15 tapauksessa erikoista tähän tulokseen nähden on lähinnä se, että lauseen 3.13 perusteella koordinaattirengasta vastaakin kaikkien kuvausten $C \to \mathbb{F}_2$ joukko, sillä ne kaikki yhtyvät jonkin polynomifunktion kanssa.

Aiemmin osoitimme, että kaikilla $F \in \mathcal{B}$ ja $c \in \mathbb{F}_2^n$ pätee $F(c) = 0$. Nyt osoitamme, että tämä ominaisuus on vain Boolen ideaalin polynomeilla.

Lause 3.16. *Kaikilla polynomeilla $F \in \mathbb{F}_2[n]$ pätee, että $F(c) = 0$ kaikilla $c \in \mathbb{F}_2^n$, jos ja vain jos $F \in \mathcal{B}$. Toisin sanottuna $I_{\mathbb{F}_2^n} = \mathcal{B}$.*

Todistus. Tulos saadaan seurauksena lauseesta 3.12, sillä nyt

$$I_{\mathbb{F}_2^n} = J_{\mathbb{F}_2^n} + \mathcal{B} = \langle \rho_c \mid c \notin \mathbb{F}_2^n \rangle + \mathcal{B} = \langle \emptyset \rangle + \mathcal{B} = \{0\} + \mathcal{B} = \mathcal{B}.$$

□

Lauseen 3.16 pohjalta voimme johtaa seuraavan esimerkin, josta on hyötyä myöhemmin luvussa 4.

Esimerkki 3.17. Tarkastellaan neurorengasta $\mathcal{R}_{\mathbb{F}_2^n}$. Koska lauseen 3.16 perusteella $I_{\mathbb{F}_2^n} = \mathcal{B}$, niin $\mathcal{R}_{\mathbb{F}_2^n} = \mathbb{F}_2[n]/\mathcal{B}$. Tällöin neurorenkaan $\mathcal{R}_{\mathbb{F}_2^n}$ alkiot vastaavat kuvauksia $f\colon \mathbb{F}_2^n \to \mathbb{F}_2$.

3.4 Toteutuman rakenteen päätteleminen neuroideaalista

Luvun 2 lopussa nostimme tavoitteeksemme kerätä tietoa toteutuman rakenteesta pelkkään neurokoodiin perustuen. Tässä alaluvussa esitämme neuroideaaleja hyödyntäviä tuloksia, joiden avulla tämä on mahdollista.

Esitämme ensin esimerkin, joka havainnollistaa neuroideaalin käsitteen suhdetta toteutuman rakenteeseen.

Esimerkki 3.18 (vrt. [6, Example 2.10])**.** Tarkastellaan tapausta $n = 3$. Olkoon

$$C = \{000, 100, 001, 101, 010, 011\}.$$

Tällöin tätä vastaava neuroideaali on

$$J_C = \langle \rho_c \mid c \notin C \rangle = \langle \rho_{111}, \rho_{110} \rangle = \langle X_1X_2X_3, X_1X_2(1 - X_3) \rangle.$$

Virittäjien lisäksi neuroideaaliin kuuluu myös muita polynomeja. Erityisesti nähdään, että

$$\rho_{111} + \rho_{010} = X_1X_2X_3 + X_1X_2(1 - X_3) = X_1X_2 \cdot (X_3 + (1 - X_3)) = X_1X_2 \in J_C.$$

Koska $X_1X_2 \in J_C \subset I_C$, niin $X_1X_2(c) = 0$, kaikilla $c \in C$. Täten, jos $c \in \mathbb{F}_2^3$ on koodisana, jolle pätee $c_1 = c_2 = 1$, niin ei voi olla $c \in C$, koska tällöinhän pätisi $X_1X_2(c) = 1 \neq 0$. Tämän havainnon avulla saamme nyt tietoa neurokoodin C toteutumista. Jos nimittäin $\mathcal{U} = \{U_1, U_2, U_3\}$ on neurokoodin C toteutuma, niin tällöin on oltava $U_1 \cap U_2 = \emptyset$.

Toisaalta myös $X_1X_2(1 - X_3) \in J_C$. Koska nyt myös tälle pätee

$$X_1X_2(1 - X_3)(c) = 0,$$

kaikilla $c \in C$, niin missään toteutumassa $\mathcal{U} = \{U_1, U_2, U_3\}$ ei voi joukon $C(\mathcal{U})$ määrittelyn perusteella olla pistettä $p \in (U_1 \cap U_2) \setminus U_3$. Siispä saadaan, että kaikkiin neurokoodin C toteutumiin on liitettävä toteutuman relaatio $U_1 \cap U_2 \subset U_3$.

Luvun edetessä kehitämme yleisempiä menetelmiä esimerkissä 3.18 tehtyjen päätelmien muodostamiseksi. Seuraavaksi alammekin lähestyä tämän alaluvun keskeisintä tulosta tuottamalla ensin sen todistamista helpottavia aputuloksia, jotka koskevat käsittelemämme tilanteen havainnointia uudesta näkökulmasta. Jos X on ärsykeavaruus ja $C \subset \mathbb{F}_2^n$ neurokoodi, niin tällöin lauseen 2.17 perusteella neurokoodilla C on olemassa toteutuma $\mathcal{U} = \{U_1, \ldots, U_n\}$ ärsyke-avaruudessa X. Voimme jo liittää tähän tilanteeseen neurokoodin pohjalta muodostetun ideaalin $I_{C(\mathcal{U})}$. Aloitamme nyt tarkastelun vaihtoehtoisesta näkökulmasta liittämällä tähän tilanteeseen ideaalin, jonka muodostammekin sen sijaan toteutuman rakenteen pohjalta. Viritämme kyseisen ideaalin toteutuman relaatioita vastaavilla polynomeilla seuraavan määritelmän näyttämällä tavalla.

Määritelmä 3.19 (vrt. [2, 4.1])**.** Olkoon $C \subset \mathbb{F}_2^n$ neurokoodi ja olkoon $\mathcal{U} = \{U_1, \ldots, U_n\}$ sen avoimista joukoista koostuva toteutuma ärsyke-avaruudessa X. Tällöin *toteutuman $\mathcal{U}$ ideaali* on joukko

$$I_{\mathcal{U}} := \left\langle \left\{ \prod_{i \in \sigma} X_i \prod_{j \in \tau} (1 - X_j) \;\middle|\; \sigma, \tau \subset [n], \quad \bigcap_{i \in \sigma} U_i \subset \bigcup_{j \in \tau} U_j \right\} \right\rangle$$

Tämä määritelmä hyödyntää tapaa rinnastaa pisteiden sijoittuminen koodisana-alueille ja kyseistä aluetta vastaavan koodisanan tuottama arvo polynomiin sijoittaessa. Voimme nimittäin luvun 2 tapaan muodostaa pistettä $p \in X$ vastaavan koodisanan $c \in \mathbb{F}_2^n$ asettamalla

$$c_i = \begin{cases} 1, \text{kun } p \in U_i \\ 0, \text{kun } p \notin U_i \end{cases}$$

kaikilla $i \in [n]$. Tällöin piste p todella sijaitsee koodisanan c koodisana-alueella $\mathcal{U}(c)$. Tällä tulkinnalla toteutuman $\mathcal{U}$ ideaali $I_{\mathcal{U}}$ muodostuu polynomeista, jotka vastaavat toteutuman $\mathcal{U}$ relaatioita (ks. [2, 4.1]).

Huomionarvoista on, etteivät ideaalin $I_{\mathcal{U}}$ polynomit välttämättä ole pseudomonomeja, sillä emme tässä edellytä ehtoa $\sigma \cap \tau = \emptyset$ (vrt. [2, 6.2]).

Erilaisista lähestymistavoista huolimatta toteutuman ideaalilla ja toteutuman neurokoodin ideaalilla on huomattavia yhtäläisyyksiä. Osittain tämä käy ilmi seuraavasta aputuloksesta.

Apulause 3.20. *Olkoon $C \subset \mathbb{F}_2^n$ neurokoodi ja olkoon $\mathcal{U} = \{U_1, \dots, U_n\}$ sen avoimista joukoista koostuva toteutuma ärsyke-avaruudessa X. Tällöin*

$$I_{\mathcal{U}} = J_{\mathcal{U}} + \mathcal{B},$$

missä

$$J_{\mathcal{U}} := \left\langle \left\{ \prod_{i \in \sigma} X_i \prod_{j \in \tau} (1 - X_j) \;\middle|\; \sigma, \tau \subset [n],\;\; \sigma \cap \tau = \emptyset,\;\; \bigcap_{i \in \sigma} U_i \subset \bigcup_{j \in \tau} U_j \right\} \right\rangle.$$

Todistus (vrt. [2, Lemma 6.4]). Havaitaan ensin, että $\mathcal{B} \subset I_{\mathcal{U}}$. Nimittäin kun $i \in [n]$, niin $U_i \subset U_i$, jolloin ideaalin $I_{\mathcal{U}}$ määritelmän nojalla $X_i^2 - X_i = X_i(1 - X_i) \in I_{\mathcal{U}}$.

Olkoon sitten $F \in I_{\mathcal{U}}$ ideaalin $I_{\mathcal{U}}$ virittäjä. Tällöin se on muotoa

$$F = \prod_{i \in \sigma} X_i \prod_{j \in \tau} (1 - X_j), \quad \text{joillain } \sigma, \tau \subset [n].$$

Jos $\sigma \cap \tau \neq \emptyset$, niin tällöin on olemassa $i \in \sigma \cap \tau$. Nythän erityisesti on olemassa $H \in \mathbb{F}_2[n]$ siten, että

$$F = X_i(1 - X_i)H = (X_i^2 - X_i)H \in \mathcal{B}.$$

Siispä, jotta voisi olla $F \in I_{\mathcal{U}} \setminus \mathcal{B}$ niin pitäisikin päteä $\sigma \cap \tau = \emptyset$. Toisaalta, jos $\sigma \cap \tau = \emptyset$, niin näin todellakin käy. Siispä ehdoista $F \in I_{\mathcal{U}}$ ja $\sigma \cap \tau = \emptyset$ seuraa, että $F \in J_{\mathcal{U}}$. Täten

$$I_{\mathcal{U}} = J_{\mathcal{U}} + \mathcal{B}.$$

□

Osoittaaksemme merkittävän toteutuman ideaalia ja toteutuman neurokoodin ideaalia koskevan tuloksen tarvitsemme vielä seuraavan pienen aputuloksen.

Apulause 3.21. *Olkoot K on kunta, $F \in K[X_1, \dots, X_n]$ ja $\tau \subset [n]$. Tällöin*

$$\left\langle \left\{ F \prod_{i \in \tau} G_i \;\middle|\; G_i \in \{X_i, 1 - X_i\} \text{ kaikilla } i \in [n] \right\} \right\rangle = \langle F \rangle.$$

Todistus (vrt. [2, Lemma 6.5]). Merkitään

$$I_F(\tau) = \left\langle \left\{ F \prod_{i \in \tau} G_i \;\middle|\; G_i \in \{X_i, 1 - X_i\} \text{ kaikilla } i \in [n] \right\} \right\rangle.$$

Joukon $I_F(\tau)$ määrittelystä nähdään, että $F \mid H$ kaikilla ideaalin $I_F(\tau)$ virittäjillä H, joten $I_F(\tau) \subset \langle F \rangle$.

Osoitetaan sitten induktiolla luvun $|\tau|$ suhteen, että myös $\langle F \rangle \subset I_F(\tau)$. Havaitaan ensin, että kun $|\tau| = 0$, niin $\tau = \emptyset$, jolloin $I_F(\tau) = \langle F \rangle$. Siis tapaus $|\tau| = 0$ on selvä.

Muotoillaan sitten induktio-oletus. Olkoon $k \in \mathbb{N}$. Oletetaan, että $\langle F \rangle \subset I_F(\sigma)$ kaikilla $\sigma \subset [n]$, joille pätee $|\sigma| < k$. Jos $k > n$, niin asia on selvä. Riittää siis osoittaa, että $\langle F \rangle \subset I_F(\tau)$, kun $|\tau| = k$. Koska lisäksi olemme jo todenneet väitteen pätevän tapauksessa $|\tau| = 0$, niin voidaan täten olettaa, että $1 \leq k \leq n$.

Koska $k > 0$, niin $\tau \neq \emptyset$ ja täten on olemassa $i \in \tau$. Olkoon $\tau' = \tau \setminus \{i\}$. Nyt $|\tau'| < k$, joten induktio-oletuksen perusteella $\langle F \rangle \subset I_F(\tau')$. Riittää siis enää osoittaa, että $I_F(\tau') \subset I_F(\tau)$. Olkoon $G = F \prod_{j \in \tau'} G_j$ ideaalin $I_F(\tau')$ virittäjä. Nythän $X_i G, (1 - X_i)G \in I_F(\tau)$, jolloin

$$G = 1 \cdot G = (1 + X_i - X_i)G = (X_i + (1 - X_i))G = X_i G + (1 - X_i)G \in I_F(\tau).$$

On siis täten saatu $\langle F \rangle \subset I_F(\tau') \subset I_F(\tau)$, mistä induktioperiaatteen nojalla seuraa, että väite pätee kaikilla $\tau \subset [n]$. □

Näiden kahden aputuloksen avulla pääsemme seuraavaksi osoittamaan huomattavan tuloksen. Lähestymistapojen erosta huolimatta totetuman rakenteen kautta muodostettu toteutuman ideaali ja toteutuman RF-koodin ideaali osoittautuvat samaksi ideaaliksi.

Lause 3.22 (vrt. [2, Theorem 4.1]). *Olkoon $C \subset \mathbb{F}_2^n$ neurokoodi ja olkoon $\mathcal{U} = \{U_1, \ldots, U_n\}$ sen avoimista joukoista koostuva toteutuma ärsyke-avaruudessa X. Tällöin*

$$I_{\mathcal{U}} = I_{C(\mathcal{U})}.$$

Todistus (vrt. [2, 6.2]). Osoitamme ensin, että $J_{\mathcal{U}} = J_{C(\mathcal{U})}$.

Olkoon $c \notin C(\mathcal{U})$ koodisana. Tällöin joukon $C(\mathcal{U})$ määrittelyn nojalla on oltava

$$\bigcap_{i \in \operatorname{supp}(c)} U_i \quad \subset \bigcup_{j \in [n] \setminus \operatorname{supp}(c)} U_j.$$

Asetetaan $\sigma = \operatorname{supp}(c)$ ja $\tau = [n] \setminus \operatorname{supp}(c)$. Nythän $\sigma \cap \tau = \emptyset$ ja

$$\bigcap_{i \in \sigma} U_i \subset \bigcup_{j \in \tau} U_j.$$

Apulauseen 3.20 perusteella siis yksi ideaalin $J_{\mathcal{U}}$ virittäjistä on

$$\prod_{i \in \sigma} X_i \prod_{j \in \tau} (1 - X_j) = \rho_c.$$

Siis $\rho_c \in J_{\mathcal{U}}$. Koska ideaalin $J_{C(\mathcal{U})}$ virittäjät ovat tismalleen muotoa ρ_v, missä $v \notin C$, niin olemme täten saaneet, että $J_{C(\mathcal{U})} \subset J_{\mathcal{U}}$.

Olkoon sitten $F \in J_{\mathcal{U}}$ ideaalin $J_{\mathcal{U}}$ virittäjä. Tällöin on siis olemassa joukot $\sigma, \tau \subset [n]$ siten, että

$$\sigma \cap \tau = \emptyset, \quad \bigcap_{i \in \sigma} U_i \subset \bigcup_{j \in \tau} U_j$$

ja F on tällöin muotoa

$$F = \prod_{i\in\sigma} X_i \prod_{j\in\tau}(1 - X_j).$$

Toimimme sitten aiemman määritelmän 3.6 jälkeisen huomautuksen viitoittamina. Kyseisen huomautuksen mukaan, pseudomonomi F voidaan täydentää jonkin koodisanan indikaattoriksi, kun $\deg(F) < n$. Teemme tämän seuraavaksi. Nythän

$$\bigcap_{i\in\sigma} U_i \setminus \bigcup_{j\in\tau} U_j = \emptyset,$$

joten joukon $\mathcal{C}(\mathcal{U})$ määrittelyn nojalla kun $c \in \mathbb{F}_2^n$ on koodisana, jolle pätee $\sigma \subset \operatorname{supp}(c)$ ja $\operatorname{supp}(c) \cap \tau = \emptyset$, niin $c \notin \mathcal{C}(\mathcal{U})$. Tällöinhän kaikkia sellaisia koodisanoja $c \in \mathbb{F}_2^n$ vastaaville indikaattorifunktioille pätee

$$\rho_c = \prod_{i\in\operatorname{supp}(c)} X_i \prod_{j\notin\operatorname{supp}(v)} (1 - X_j) \in J_{\mathcal{C}(\mathcal{U})}.$$

Erityisesti $F \cdot \prod_{k\in[n]\setminus(\sigma\cup\tau)} G_k \in J_{\mathcal{C}(\mathcal{U})}$, kun $G_k \in \{X_k, 1 - X_k\}$ kaikilla $k \in [n]$. Tästä seuraa apulauseen 3.21 nojalla, että $F \in J_{\mathcal{C}(\mathcal{U})}$. Täten on saatu myös $J_{\mathcal{U}} \subset J_{\mathcal{C}(\mathcal{U})}$.

Olemme siis osoittaneet, että $J_{\mathcal{U}} = J_{\mathcal{C}(\mathcal{U})}$, joten nyt käyttämällä apuna lausetta 3.12 ja apulausetta 3.20 nähdään, että

$$I_{\mathcal{C}(\mathcal{U})} = J_{\mathcal{C}(\mathcal{U})} + \mathcal{B} = J_{\mathcal{U}} + \mathcal{B} = I_{\mathcal{U}}.$$

□

Lauseen 3.22 perusteella neurokoodin ideaalin alkiot vastaavat siis toteutuman ideaalin alkioita, jotka jo lähtökohtaisesti muodostettiin vastaamaan toteutuman rakennetta. Tämän havainnon viitoittamana siirrymme todistamaan tämän luvun päätulosta, joka on keskeinen työkalu toteutuman rakenteen päättelemisessä. Lisäksi seuraava tulos paljastaa toteutumien relaatioiden ja polynomien kiinteän yhteyden.

Lause 3.23. *Olkoon $\mathcal{C} \subset \mathbb{F}_2^n$ neurokoodi. Olkoot lisäksi X ärsyke-avaruus ja $\mathcal{U} = \{U_1, \ldots, U_n\}$ kokoelma sen avoimia joukkoja siten, että $\mathcal{C} = \mathcal{C}(\mathcal{U})$. Tällöin kaikille neuronien joukoille $\sigma, \tau \subset [n]$ pätee*

$$\prod_{i\in\sigma} X_i \prod_{j\in\tau}(1 - X_j) \in I_{\mathcal{C}} \quad \Leftrightarrow \quad \bigcap_{i\in\sigma} U_i \subset \bigcup_{j\in\tau} U_j.$$

Todistus (vrt. [2, Lemma 4.2]). Olkoot $\sigma, \tau \subset [n]$. Merkitään

$$F = \prod_{i\in\sigma} X_i \prod_{j\in\tau}(1 - X_j).$$

Oletetaan ensin, että

$$\bigcap_{i\in\sigma} U_i \subset \bigcup_{j\in\tau} U_j.$$

Tällöinhän määritelmän 3.19 ja lauseen 3.22 perusteella saamme suoraan, että

$$F = \prod_{i \in \sigma} X_i \prod_{j \in \tau} (1 - X_j) \in I_{\mathcal{U}} = I_{C(\mathcal{U})} = I_C.$$

Oletetaan sitten kääntäen, että $F \in I_C$. Jaamme sitten tarkastelun kahteen tapaukseen. Jos $\sigma \cap \tau \neq \emptyset$, niin silloin on siis olemassa $i \in \sigma \cap \tau$. Nythän

$$\bigcap_{j \in \sigma} U_j \subset U_i \subset \bigcup_{k \in \tau} U_k.$$

Siispä tapaus $\sigma \cap \tau \neq \emptyset$ on selvä.

Käsitellään sitten tapaus, jossa $\sigma \cap \tau = \emptyset$. Koska $F \in I_C$ ja I_C on ideaali, niin $FH \in I_C$ kaikilla $H \in \mathbb{F}_2[n]$. Erityisesti tämän vuoksi $\rho_c \in I_C$ kaikilla koodisanoilla c, joille pätee $\sigma \subset \operatorname{supp}(c)$ ja $\tau \cap \operatorname{supp}(c) = \emptyset$. Toisaalta, jos $\rho_c \in I_C$, niin tällöinhän $\rho_c(v) = 0$ kaikilla $v \in C$ ja koska $\rho_c(c) = 1$, saadaan täten $c \notin C$.

Olemme siis saaneet, että kaikilla koodisanoilla $c \in \mathbb{F}_2^n$, joille pätee $\sigma \subset \operatorname{supp}(c)$ ja $\tau \cap \operatorname{supp}(c) = \emptyset$, pätee myös $c \notin C$. Toisaalta $C = C(\mathcal{U})$, joten määritelmän 2.15 perusteella on oltava

$$\bigcap_{i \in \sigma} U_i \setminus \bigcup_{j \in \tau} U_j = \emptyset.$$

ja täten saamme, että

$$\bigcap_{i \in \sigma} U_i \subset \bigcup_{j \in \tau} U_j.$$

□

Huomautus (vrt. [2, 4.2]). Lauseen 3.23 tilanteessa voimme sen avulla eritellä ideaalin I_C alkioita sen mukaan minkälaisia toteutuman relaatioita niiden pohjalta on mahdollista päätellä toteutuman rakenteeseen kuuluvan.

1. Boolen relaatiot. Tapauksessa $\sigma = \tau = \{i\}$, jollain $i \in [n]$ kyseessä ovat Boolen polynomit $X_i^2 - X_i = X_i \cdot (1 - X_i)$. Ne vastaavat relaatioita $U_i \subset U_i$, jotka eivät luonnollisesti kerro mitään neurokoodista C. Merkitään niitä

$$\mathcal{R}_{\mathcal{B}}(\mathcal{U}) := \left\{ X_i^2 - X_i \;\middle|\; i \in [n] \right\}.$$

2. Tyypin 1 relaatiot. Tapauksessa $\tau = \emptyset$ polynomit ovat muotoa

$$\prod_{i \in \sigma} X_i$$

ja ne vastaavat relaatioita

$$\bigcap_{i \in \sigma} U_i = \emptyset.$$

Otetaan käyttöön merkintä

$$\mathcal{R}_1(\mathcal{U}) := \left\{ \prod_{i \in \sigma} X_i \;\middle|\; \sigma \subset [n],\ \bigcap_{i \in \sigma} U_i = \emptyset \right\}.$$

3. Tyypin 2 relaatiot. Tapauksessa, jossa

$$\sigma, \tau \neq \emptyset, \quad \sigma \cap \tau = \emptyset,$$
$$\bigcap_{i\in\sigma} U_i \neq \emptyset, \quad \bigcup_{j\in\tau} U_i \neq X$$

ovat polynomit muotoa

$$\prod_{i\in\sigma} X_i \prod_{j\in\tau}(1 - X_j)$$

ja ne vastaavat relaatioita

$$\bigcap_{i\in\sigma} U_i \subset \bigcup_{j\in\tau} U_j.$$

Merkitään

$$\mathcal{R}_2(\mathcal{U}) := \left\{ \prod_{i\in\sigma} X_i \prod_{j\in\tau}(1-X_j) \;\middle|\; \emptyset \neq \sigma, \tau \subset [n],\ \sigma\cap\tau = \emptyset,\ \emptyset \neq \bigcap_{i\in\sigma} U_i \subset \bigcup_{j\in\tau} U_j \neq X \right\}.$$

4. Tyypin 3 relaatiot. Kun $\sigma = \emptyset$. ovat polynomit muotoa

$$\prod_{i\in\tau}(1 - X_i)$$

ja ne vastaavat relaatioita

$$X \subset \bigcup_{i\in\tau} U_i.$$

Merkitään näitä

$$\mathcal{R}_3(\mathcal{U}) := \left\{ \prod_{i\in\tau}(1 - X_i) \;\middle|\; \tau \subset [n],\ X \subset \bigcup_{i\in\tau} U_i \right\}.$$

Joukon $\mathcal{R}_2(\mathcal{U})$ määrittelyssä käytetyt lisäehdot takaavat, ettei siihen kuulu muiden tässä mainittujen joukkojen alkioita. On mahdollista, että $1 \in \mathcal{R}_1(\mathcal{U}) \cap \mathcal{R}_3(\mathcal{U})$, mutta vain tapauksessa $X = \emptyset$. Muutoin joukot $\mathcal{R}_{\mathcal{B}}(\mathcal{U})$, $\mathcal{R}_1(\mathcal{U})$, $\mathcal{R}_2(\mathcal{U})$ ja $\mathcal{R}_3(\mathcal{U})$ ovat erilliset [2, 4.2].

Huomautus. Jatkossa voimme merkintöjen lyhentämiseksi merkitä näitä joukkoja $\mathcal{R}_*$, missä $* \in \{1, 2, 3, \mathcal{B}\}$, mikäli joukko $\mathcal{U}$ on asiayhteydestä selvä. Lisäksi jatkossa lauseen 3.23 luoman rinnastuksen perusteella voimme kutsua myös toteutuman relaatioita vastaavia ideaalin I_C polynomeja relaatioiksi.

On myös tärkeää huomata, etteivät nämä joukot peitä koko ideaalia I_C, mutta seuraavaksi osoitamme kuitenkin, että nämä joukot riittävät kyllä virittämään sen.

Lause 3.24 (vrt. [2, Theorem 4.3])**.** *Olkoon $\mathcal{U} = \{U_1, \ldots, U_n\}$ kokoelma ärsykeavaruuden X joukkoja. Tällöin*

$$J_{C(\mathcal{U})} = \langle \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_3 \rangle.$$

Todistus (vrt. [2, 6.3]). Lauseessa 3.22 osoitimme, että

$$J_{C(\mathcal{U})} = J_{\mathcal{U}} = \left\langle \left\{ \prod_{i\in\sigma} X_i \prod_{j\in\tau}(1 - X_j) \;\middle|\; \sigma, \tau \subset [n],\;\; \sigma \cap \tau = \emptyset,\;\; \bigcap_{i\in\sigma} U_i \subset \bigcup_{j\in\tau} U_j \right\} \right\rangle.$$

Erottamalla tästä tapaus

$$\tau = \emptyset, \quad \bigcap_{i\in\sigma} U_i = \emptyset$$

saadaan, että

$$\begin{aligned}
J_{C(\mathcal{U})} &= \left\langle \left\{ \prod_{i\in\sigma} X_i \;\middle|\; \sigma \subset [n],\;\; \bigcap_{i\in\sigma} U_i = \emptyset \right\}, \right. \\
&\quad \left. \left\{ \prod_{i\in\sigma} X_i \prod_{j\in\tau}(1 - X_j) \;\middle|\; \sigma, \tau \subset [n],\; \tau \neq \emptyset,\;\; \sigma \cap \tau = \emptyset,\;\; \emptyset \neq \bigcap_{i\in\sigma} U_i \subset \bigcup_{j\in\tau} U_j \right\} \right\rangle \\
&= \left\langle \mathcal{R}_1, \left\{ \prod_{i\in\sigma} X_i \prod_{j\in\tau}(1 - X_j) \;\middle|\; \sigma, \tau \subset [n],\; \tau \neq \emptyset,\;\; \sigma \cap \tau = \emptyset,\;\; \emptyset \neq \bigcap_{i\in\sigma} U_i \subset \bigcup_{j\in\tau} U_j \right\} \right\rangle.
\end{aligned}$$

Nimittäin joukko $\mathcal{R}_1$ virittää myös tapaukset, joissa pätee

$$\bigcap_{i\in\sigma} U_i = \emptyset, \qquad \tau \neq \emptyset.$$

Jälkimmäisessä virittäjäjoukossa, jos $\sigma = \emptyset$, niin siitä seuraa, että

$$\prod_{i\in\sigma} X_i \prod_{j\in\tau}(1 - X_j) = \prod_{j\in\tau}(1 - X_j)$$

ja

$$\bigcap_{i\in\sigma} U_i = X \subset \bigcup_{j\in\tau} U_j.$$

Erottelemalla tämäkin tapaus omaan joukkoonsa saadaan samaan tapaan kuten edellä, että

$$\begin{aligned}
J_{C(\mathcal{U})} &= \left\langle \mathcal{R}_1, \left\{ \prod_{i\in\sigma} X_i \prod_{j\in\tau}(1 - X_j) \;\middle|\; \sigma, \tau \subset [n],\; \tau \neq \emptyset,\;\; \sigma \cap \tau = \emptyset,\;\; \emptyset \neq \bigcap_{i\in\sigma} U_i \subset \bigcup_{j\in\tau} U_j \right\} \right\rangle \\
&= \left\langle \mathcal{R}_1, \left\{ \prod_{i\in\sigma} X_i \prod_{j\in\tau}(1 - X_j) \;\middle|\; \emptyset \neq \sigma, \tau \subset [n],\;\; \sigma \cap \tau = \emptyset,\;\; \emptyset \neq \bigcap_{i\in\sigma} U_i \subset \bigcup_{j\in\tau} U_j \neq X \right\}, \right. \\
&\quad \left. \left\{ \prod_{i\in\tau}(1 - X_i) \;\middle|\; \tau \subset [n],\;\; X \subset \bigcup_{i\in\tau} U_i \right\} \right\rangle \\
&= \langle \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_3 \rangle.
\end{aligned}$$

□

Huomautus. Kun $\mathcal{U} = \{U_1, \ldots, U_n\}$ on kokoelma ärsyke-avaruuden X joukkoja, niin lauseen 3.24 perusteella

$$J_{C(\mathcal{U})} = \langle \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_3 \rangle.$$

Toisaalta koska lauseen 3.12 nojalla $I_{C(\mathcal{U})} = J_{C(\mathcal{U})} + \mathcal{B}$, niin tällöinhän

$$I_{C(\mathcal{U})} = \langle \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_3, \mathcal{R}_{\mathcal{B}} \rangle.$$

Näiden tulosten myötä olemme saavuttaneet keskeisen osan tavoitettamme. Havainnollistamme tämän lauseen käyttöä ja hyödyllisyyttä esimerkeissä luvussa 4. Ensin siirrymme kuitenkin kehittämään neuroideaalille havainnollisempaa esitysmuotoa tämän lauseen tulos mielessämme.

4. Neuroideaalin kanoninen muoto

Tässä luvussa jatkamme edelleen kiinnittämämme neuronien joukon $[n]$ tarkastelua. Luvussa 3 muodostimme neurokoodia vastaavan neuroideaalin ja osoitimme, että sen avulla voidaan koota tietoa neurokoodin toteutumien rakenteista. Tässä luvussa tavoitteemme on perehtyä neuroideaaleihin syvemmin ja kehittää tapoja esittää niiden sisältämä oleellinen informaatio entistä tiiviimmin.

4.1 Pseudomonomiaaliset ideaalit

Kiinnostuksen kohteemme neuroideaalit ovat pseudomonomien virittämiä. Siispä ymmärtääksemme neuroideaaleja paremmin ryhdymme tässä alaluvussa tarkastelemaan pseudomonomien virittämien ideaalien ominaisuuksia.

Määritelmä 4.1 (vrt. [6, Definition 2.11])**.** Olkoon $I \subset \mathbb{F}_2[n]$ ideaali. Jos on olemassa pseudomonomit $F_1, \dots, F_m \in \mathbb{F}_2[n]$, jollain $m \in \mathbb{Z}_+$ siten, että $I = \langle F_1, \dots, F_m \rangle$, niin ideaalia I sanotaan *pseudomonomiaaliseksi ideaaliksi*.

Esimerkki 4.2. Neuroideaalit ovat pseudomonomiaalisia ideaaleja. Nimittäin määritelmän 3.9 perusteella ne ovat indikaattoreiden virittämiä ja indikaattorit puolestaan ovat pseudomonomeja.

Seuraavaksi aloitamme lähestymisen kohti tämän alaluvun päätulosta. Käsittelemme ensin muutamia pseudomonomiaalisia ideaaleja koskevia yksinkertaisia tuloksia ja esittelemme todistuksia helpottavia käsitteitä.

Apulause 4.3. *Olkoon F pseudomonomi. Tällöin kaikilla $c \in \mathbb{F}_2^n$ pätee,*

$$F(c) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad F \mid \rho_c.$$

Todistus (vrt. [6, Lemma 2.12]). Olkoon $c \in \mathbb{F}_2^n$ koodisana. Pseudomonomina F on muotoa

$$F = \prod_{i \in \sigma} X_i \prod_{j \in \tau} (1 - X_j),$$

missä $\sigma, \tau \subset [n], \quad \sigma \cap \tau = \emptyset$. Lisäksi

$$\rho_c = \prod_{i \in \mathrm{supp}(c)} X_i \prod_{j \in [n] \setminus \mathrm{supp}(c)} (1 - X_j).$$

Oletetaan ensin, että $F(c) = 1$. Pseudomonomien F ja ρ_c esityksistä nähdään, että osoittaaksemme $F \mid \rho_c$ riittää meidän todeta $\sigma \subset \mathrm{supp}(c)$ ja $\tau \subset [n] \setminus \mathrm{supp}(c)$.

Havaitaan ensin, että koska $F(c) = 1$ on oltava $\sigma \subset \mathrm{supp}(c)$, sillä muutoinhan tulossa $F(c)$ olisi tekijänä $0 \in \mathbb{F}_2$. Vastaavasti saadaan, että täytyy siis myöskin päteä $\tau \cap \mathrm{supp}(c) = \emptyset$, jolloin $\tau \subset [n] \setminus \mathrm{supp}(c)$. Siispä $F \mid \rho_c$.

Oletetaan sitten kääntäen, että $F \mid \rho_c$. Tällöin on olemassa $G \in \mathbb{F}_2[n]$ siten, että $\rho_c = F \cdot G$. Jos siis olisikin $F(c) \neq 1$, niin tällöinhän tulisi olla $F(c) = 0$ ja saataisiin

$$1 = \rho_c(c) = F(c) \cdot G(c) = 0 \cdot G(c) = 0,$$

mikä on ristiriita. Siis $F(c) = 1$. □

Tämän tuloksen viitoittamana liitämme seuraavaksi uudella käsitteellä pseudomonomin niihin indikaattoreihin, joiden tekijä se on.

Määritelmä 4.4 (vrt. [6, Definition 2.13])**.** Olkoon F pseudomonomi. Tällöin joukkoa

$$\mathrm{can}(F) := \left\{ \rho_c \;\middle|\; c \in \mathbb{F}_2^n, \;\; F \mid \rho_c \right\}$$

sanotaan pseudomonomin F *katokseksi*.

Tämä uusi käsite johdattaa meidät seuraavan indikaattoreiden erityispiirteitä havainnollistavan tuloksen äärelle.

Lause 4.5. *Olkoon F pseudomonomi. Tällöin*

$$F = \sum_{\rho_c \in \mathrm{can}(F)} \rho_c.$$

Todistus (vrt. [6, Lemma 2.14]). Todistetaan väite induktiolla luvun $n - \deg(F)$ suhteen. Pseudomonomin määritelmän 3.5 jälkeisessä huomautuksessa toteamamme perusteella

$$0 \leq \deg(F) \leq n,$$

mistä seuraa, että perusaskeleemme on tapaus $\deg(F) = n$. Tällöinhän $F = \rho_c$, jollain $c \in \mathbb{F}_2^n$, joten $\mathrm{can}(F) = \{F\}$. Siispä väite pätee tapauksessa $n - \deg(F) = 0$.

Tehdään sitten induktio-oletus, että väite pätee kaikille pseudomonomeille, jotka ovat astetta $n - k$, jollain $k \in \{1, \ldots, n-1\}$. Olkoon F pseudomonomi, jolle pätee $\deg(F) = n - k - 1$. Koska $\deg(F) < n$ on nyt olemassa $i \in [n]$ siten, että $X_i \nmid F$ ja $(1 - X_i) \nmid F$. Tällöinhän polynomit $X_i F$ ja $(1 - X_i)F$ ovat astetta $n - k$ olevia pseudomonomeja. Lisäksi huomataan, että

$$\mathrm{can}(F) = \mathrm{can}(X_i F) \cup \mathrm{can}((1 - X_i)F)$$

ja

$$\mathrm{can}(X_i F) \cap \mathrm{can}((1 - X_i)F) = \emptyset,$$

sillä kaikissa indikaattoreissa on tekijänä tismalleen toinen termeistä X_i ja $1 - X_i$.

Nyt käyttämällä induktio-oletusta saadaan, että

$$\begin{aligned}
F &= X_i F + (1 - X_i)F \\
&= \left(\sum_{\rho_c \in \mathrm{can}(X_i F)} \rho_c \right) + \left(\sum_{\rho_c \in \mathrm{can}((1-X_i)F)} \rho_c \right) \\
&= \sum_{\rho_c \in \mathrm{can}(F)} \rho_c.
\end{aligned}$$

Täten väite pätee induktioperiaatteen nojalla. □

Tällä lauseella on seuraava mielenkiintoinen ja välitön seuraus.

Seuraus 4.6. *Lauseesta 4.5 seuraa, että*

$$\sum_{c\in\mathbb{F}_2^n} \rho_c = 1,$$

sillä 1 *on pseudomonomi ja kaikkien indikaattorien tekijä.*

Seuraavaksi liitämme katoksen käsitteen myös pseudomonomiaalisiin ideaaleihin. Tämä osoittautuukin myöhemmin hyödylliseksi alaluvun päätuloksen todistamisessa.

Määritelmä 4.7 (vrt. [6, Definition 2.17])**.** Olkoon $I \subset \mathbb{F}_2[n]$ pseudomonomiaalinen ideaali. Tällöin ideaalin I *katos* on joukko

$$\mathrm{can}(I) = \{\rho_c \mid c \in \mathbb{F}_2^n, \ \ \rho_c \in I\}.$$

Seuraava lause paljastaa pseudomonomiaalisen ideaalin katoksen ja sen virittämien pseudomonomien katoksien välisen yhteyden.

Lause 4.8. *Olkoon I pseudomonomiaalinen ideaali ja olkoot $F_1, \ldots, F_m$ sen pseudomonomivirittäjät. Tällöin*

$$\mathrm{can}(I) = \bigcup_{i\in\{1,\ldots,m\}} \mathrm{can}(F_i)$$

ja

$$I = \langle \mathrm{can}(I) \rangle.$$

Todistus (vrt. [6, Lemma 2.18]). Olkoon $\rho_c \in \mathrm{can}(I)$, jollain koodisanalla $c \in \mathbb{F}_2^n$. Jos tällöin pätisi $F_i(c) = 0$ kaikilla $i \in \{1, \ldots, m\}$, niin samoin pätisi $F(c) = 0$ kaikilla $F \in I = \langle F_1, \ldots, F_m\rangle$. Tämä on kuitenkin mahdotonta, koska $\rho_c \in \mathrm{can}(I) \subset I$ ja tiedetään, että $\rho_c(c) = 1$. Siispä on oltava olemassa $j \in \{1, \ldots, m\}$ siten, että $F_j(c) = 1$. Tästä puolestaan seuraa apulauseen 4.3 perusteella, että $F_j \mid \rho_c$. Siispä määritelmän 4.4 nojalla

$$\rho_c \in \mathrm{can}(F_j) \subset \bigcup_{i\in\{1,\ldots,m\}} \mathrm{can}(F_i).$$

Oletetaan sitten kääntäen, että

$$\rho_c \in \bigcup_{i\in\{1,\ldots,m\}} \mathrm{can}(F_i),$$

missä $c \in \mathbb{F}_2^n$ on jokin koodisana. Tällöin $\rho_c \in \mathrm{can}(F_j)$, jollain $j \in \{1, \ldots, m\}$. Nythän $F_j \mid \rho_c$ ja virittäjänä pseudomonomille F_j pätee tietysti $F_j \in I$, joten koska I on ideaali, niin $\rho_c \in I$.

Täten olemme osoittaneet, että

$$\operatorname{can}(I) = \bigcup_{i \in \{1,\ldots,m\}} \operatorname{can}(F_i).$$

Osoitetaan siis vielä lopuksi, että

$$I = \langle \operatorname{can}(I) \rangle.$$

Koska $\operatorname{can}(I) \subset I$, niin saadaan heti $\langle \operatorname{can}(I) \rangle \subset I$.

Oletuksen nojalla tiedetään jo, että $I = \langle F_1, \ldots, F_m \rangle$. Olkoon sitten $i \in \{1, \ldots, m\}$. Tällöin lauseen 4.5 perusteella pätee, että

$$F_i = \sum_{\rho_c \in \operatorname{can}(F_i)} \rho_c.$$

Toisaalta aiemmin osoitetun perusteella $\operatorname{can}(F_i) \subset \operatorname{can}(I)$, joten $F_i \in \langle \operatorname{can}(I) \rangle$. Koska tämä pätee nyt kaikilla $i \in \{1, \ldots, m\}$, niin $I \subset \langle \operatorname{can}(I) \rangle$. Täten $I = \langle \operatorname{can}(I) \rangle$. □

Apulause 4.9. *Olkoot I ja J pseudomonomiaalisia ideaaleja. Tällöin*

$$I \subset J \Leftrightarrow \operatorname{can}(I) \subset \operatorname{can}(J).$$

Todistus (vrt. [6, Lemma 2.19]). Oletetaan ensin, että $\operatorname{can}(I) \subset \operatorname{can}(J)$. Tällöin saamme lauseen 4.8 avulla suoraan, että

$$I = \langle \operatorname{can}(I) \rangle \subset \langle \operatorname{can}(J) \rangle = J.$$

Oletetaan sitten kääntäen, että $I \subset J$. Nythän $\operatorname{can}(I) \subset I \subset J$, joten kaikilla indikaattoreilla $\rho_c \in \operatorname{can}(I)$ pätee myös, että $\rho_c \in J$, jolloin $\rho_c \in \operatorname{can}(J)$. Siispä $\operatorname{can}(I) \subset \operatorname{can}(J)$. □

Tällä tuloksella on yksinkertainen, mutta hyödyllinen seuraus.

Seuraus 4.10. *Olkoot I ja J pseudomonomiaalisia ideaaleja. Tällöin*

$$I = J \Leftrightarrow \operatorname{can}(I) = \operatorname{can}(J).$$

Todistus. Jos $I = J$, niin tietysti $\operatorname{can}(I) = \operatorname{can}(J)$. Olkoon sitten $\operatorname{can}(I) = \operatorname{can}(J)$. Koska $\operatorname{can}(I) \subset \operatorname{can}(J)$, niin apulauseen 4.9 nojalla myös $I \subset J$ ja koska toisaalta $\operatorname{can}(J) \subset \operatorname{can}(I)$, niin myös $J \subset I$. Saadaan siis $I = J$. □

Tämän seurauksen perusteella vertailtaessa pseudomonomiaalisia ideaaleja, riittääkin rajoittautua tutkimaan niiden katoksia.

Nyt olemme valmiit osoittamaan tämän alaluvun päätuloksen. Tutkittuamme pseudomonomiaalisia ideaaleja ainoana esimerkkinämme neuroideaalit, osoitammekin seuraavaksi, ettei muunlaisia pseudomonomiaalisia ideaaleja ole.

Lause 4.11 (vrt. [6, Theorem 2.1]). *Olkoon $I \subset \mathbb{F}_2[n]$ ideaali. Tällöin*

$$I \text{ on neuroideaali } \Leftrightarrow I \text{ on pseudomonomiaalinen ideaali.}$$

Erityisesti, jos I on pseudomonomiaalinen ideaali, niin $I = J_{V(I)}$

Todistus (vrt. [6, s. 17]). Jos I on neuroideaali, niin se on esimerkin 4.2 havaintojen perusteella myös pseudomonomiaalinen ideaali.

Oletetaan siis kääntäen, että I on pseudomonomiaalinen ideaali. Tällöin on olemassa pseudomonomit $F_1, \ldots, F_m \in \mathbb{F}_2[n]$, jollain $m \in \mathbb{Z}_+$, siten, että $I = \langle F_1, \ldots, F_m \rangle$. Asetetaan $C = V(I)$ ja tarkastellaan neuroideaalia J_C.

Olkoon $\rho_c \in \operatorname{can}(I)$. Tällöin $\rho_c(v) = 0$ kaikilla $v \in C = V(I)$, joten erityisesti on oltava $c \notin C$. Mutta nythän $\rho_c \in J_C$, jolloin indikaattorina sille pätee erityisesti, että $\rho_c \in \operatorname{can}(J_C)$.

Olkoon sitten $\rho_c \in \operatorname{can}(J_C)$. Nythän $\rho_c \in \operatorname{can}(J_C) \subset J_C \subset I_C$, mistä seuraa $\rho_c(v) = 0$ kaikilla $v \in C$. Koska $\rho_c(c) = 1$, täytyy siis päteä $c \notin C$.

Jos pätisi $F_i(c) = 0$ kaikilla $i \in \{1, \ldots, m\}$, niin silloinhan saataisiin myös, että $c \in V(I) = C$. Koska tämä on mahdotonta on siis oltava olemassa $j \in \{1, \ldots, m\}$ siten, että $F_j(c) = 1$. Nyt apulauseen 4.3 nojalla $F_j \mid \rho_c$. Koska lisäksi $F_j \in I$ ja I on ideaali, niin tästä seuraa, että $\rho_c \in I$. Nythän indikaattorina pseudomonomille ρ_c pätee, että $\rho_c \in \operatorname{can}(I)$.

Olemme saaneet siis osoitettua, että $\operatorname{can}(I) = \operatorname{can}(J_C)$. Lisäksi I on oletuksen nojalla pseudomonomiaalinen ideaali ja J_C puolestaan on neuroideaalina pseudomonomiaalinen ideaali. Siispä seurauksen 4.10 perusteella $I = J_C$ ja täten olemme siis osoittaneet, että ideaali I on neuroideaali $J_C = J_{V(I)}$. □

Olemme siis täten lopulta päätyneet siihen, että kaikki pseudomonomiaaliset ideaalit ovatkin neuroideaaleja. Tästä johtuen, vaikka keskitymmekin tarkastelemaan jatkossa näitä ideaaleja neuroideaaleina, pätevät tulokset soveltuvilta osin myös yleisesti pseudomonomien virittämille ideaaleille.

4.2 Neuroideaalin kanoninen muoto

Tämän alaluvun tavoitteena on kehittää uusi tiiviimpi esitystapa neuroideaaleille. Aloitamme tutkimalla miten voisimme tiivistää neuroideaalin esitystä muuntamalla sen pseudomonomivirittäjistöä.

Määritelmä 4.12 (vrt. [2, 4.3]). Olkoon $I \subset \mathbb{F}_2[n]$ ideaali ja $F \in I$ pseudomonomi. Tällöin F on *minimaalinen pseudomonomi*, mikäli ei ole olemassa pseudomonomia $G \in I$ jolle pätisi sekä $\deg(G) < \deg(F)$, että $G \mid F$.

Huomautus. Minimaalisen pseudomonomin määritelmästä seuraa suoraan, että kun $I \subset \mathbb{F}_2[n]$ on ideaali ja $F \in I$ pseudomonomi, niin joko F on minimaalinen tai sillä on alempiasteinen pseudomonomitekijä, joka on minimaalinen.

Ideaalin minimaaliset pseudomonomit välittävät ideaalin sisältöä koskevaa tietoa muita pseudomonomeja tehokkaammin. Minimaalisen pseudomonomin kuuluessa ideaaliin samoin kuuluvat myös kaikki pseudomonomit, joiden tekijä se on.

Määritelmä 4.13 (vrt. [6, Definition 2.21])**.** Olkoon $C \subset \mathbb{F}_2^n$ neurokoodi. Tällöin *neuroideaalin J_C kanoninen muoto* on joukko

$$\mathrm{CF}(J_C) := \left\{ F \in J_C \;\middle|\; F \text{on minimaalinen pseudomonomi} \right\}.$$

Aloitamme tämän käsitteen tarkastelun seuraavalla yksinkertaisella, mutta tärkeällä neuroideaalin kanonisen muodon ominaisuudella.

Lause 4.14. *Olkoon $C \subset \mathbb{F}_2^n$ neurokoodi. Tällöin*

$$J_C = \langle\, \mathrm{CF}(J_C)\, \rangle.$$

Todistus. Koska $\mathrm{CF}(J_C) \subset J_C$, niin myöskin $\langle\, \mathrm{CF}(J_C)\, \rangle \subset J_C$.

Toisaalta määritelmän 3.9 nojalla ideaalin J_C virittävät indikaattorit ρ_c, joille pätee $c \notin C$. Olkoon siis $c \notin C$, jolloin riittää enää todeta, että $\rho_c \in \langle\, \mathrm{CF}(J_C)\, \rangle$.

Jos ρ_c on minimaalinen pseudomonomi, niin kanonisen muodon määritelmästä seuraa suoraan, että $\rho_c \in \mathrm{CF}(J_C)$.

Jos sen sijaan ρ_c ei ole minimaalinen pseudomonomi, niin määritelmän 4.12 nojalla sillä on alempiasteinen pseudomonomitekijä ideaalissa J_C. Olkoon $G \in J_C$ asteeltaan pienin indikaattorin ρ_c pseudomonomitekijä ideaalissa J_C. Jos G ei olisi minimaalinen pseudomonomi, tulisi sillä olla asteeltaan pienempi pseudomonomitekijä ideaalissa J_C, mikä on pseudomonomin G valinnan vuoksi mahdotonta, sillä sen tekijät ovat edelleen indikaattorin ρ_c tekijöitä. Siispä G on minimaalinen pseudomonomi ja täten $G \in \mathrm{CF}(J_C)$. Tästä puolestaan seuraa, että $\rho_c \in \langle\, \mathrm{CF}(J_C)\, \rangle$. □

Huomautus (vrt. [2, 4.3]). Toisinaan neuroideaalin J_C kanonisella muodolla voidaan viitata myös sen esitykseen $J_C = \langle\, \mathrm{CF}(J_C)\, \rangle$.

Seuraavasta esimerkistä nähdään, että kanoninen muoto ei aina ole alkioiden lukumäärältään minimaalinen virittäjistö sitä vastaavalle neuroideaalille.

Esimerkki 4.15 (vrt. [2, 4.3], [4, s. 5])**.** Tarkastellaan tapausta $n = 3$. Olkoon $J = \langle X_1(1-X_2), X_2(1-X_3)\rangle$. Ensiksi nähdään, että J on pseudomonomien virittämä, joten se on lauseen 4.11 perusteella neuroideaali. Erityisesti $J = J_C$, missä $C = V(J)$. Jos $c = (c_1, c_2, c_3) \in V(J)$, niin on oltava

$$0 = X_1(1 - X_2)(c) = c_1(1 - c_2)$$

ja

$$0 = X_2(1 - X_3)(c) = c_2(1 - c_3).$$

Tästä saadaan, että $C = V(I) = \{111, 011, 001, 000\}$.

Vaihtoehtoisesti ideaalia J vastaava neurokoodi oltaisiin voitu löytää havaitsemalla apulauseen 3.21 avulla, että

$$\begin{aligned} J &= \langle X_1(1 - X_2), X_2(1 - X_3)\rangle \\ &= \langle X_1(1 - X_2)X_3,\ \ X_1(1 - X_2)(1 - X_3),\ \ X_1X_2(1 - X_3),\ \ (1 - X_1)X_2(1 - X_3)\rangle \\ &= \langle \rho_{101}, \rho_{100}, \rho_{110}, \rho_{010}\rangle = J_{C'}, \end{aligned}$$

missä

$$C' = [n] \setminus \{101,\ 100,\ 110,\ 010\} = \mathcal{C}.$$

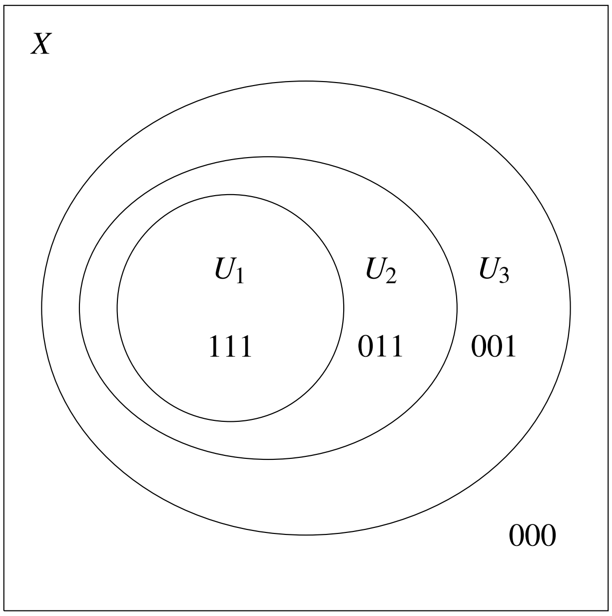
Tämän luvun lopussa esitämme menetelmiä neuroideaalin kanonisen muodon selvittämiseen. Myöhemmässä esimerkissä 4.25 osoitammekin iteratiivisen algoritmin avulla, että tässä

$$\mathrm{CF}(J_{\mathcal{C}}) = \{X_1(1-X_2),\quad X_1(1-X_3),\quad X_2(1-X_3)\}.$$

Tästä todellakin nähdään, että kanoninen muoto ei ole aina virittäjien lukumäärän suhteen minimaalinen, sillä ideaalin J alkuperäisessä esityksessä on vain kaksi virittäjää.

Kun neurokoodia vastaavan neuroideaalin kanoninen muoto on selvillä voidaan lauseen 3.23 avulla siitä lukea helposti neurokoodin toteutumiltaan edellyttämiä toteutuman relaatioita.

Havainnollistetaan tätä jatkamalla neurokoodin $\mathcal{C}$ tarkastelua. Olkoon $\mathcal{U} = \{U_1, U_2, U_3\}$, jokin neurokoodin $\mathcal{C}$ toteutuma ärsyke-avaruudessa X. Nyt neurokoodia $\mathcal{C}$ vastaavan neuroideaalin $J_{\mathcal{C}}$ kanonisen muodon sisällöstä seuraa lauseen 3.23 perusteella, että $U_1 \subset U_2$, $U_1 \subset U_3$ ja $U_2 \subset U_3$.



Kuva 4.1: Esimerkin 4.15 tilanne.

Seuraavaksi otamme luvun 3 lopussa määritellyt relaatiotyypit uudelleen esille, sillä niiden ja neuroideaalin kanonisen muodon välille muodostuu läheinen yhteys.

Määritelmä 4.16. Olkoon $\mathcal{C} \subset \mathbb{F}_2^n$ neurokoodi. Olkoot lisäksi X ärsyke-avaruus ja $\mathcal{U} = \{U_1, \ldots, U_n\}$ kokoelma sen avoimia joukkoja siten, että $\mathcal{C} = \mathcal{C}(\mathcal{U})$. Tällöin *minimaalisten tyypin 1 relaatioiden joukko on*

$$\mathcal{R}_1'(\mathcal{U}) := \left\{ \prod_{i\in\sigma} X_i \;\middle|\; \sigma \subset [n] \text{ on minimaalinen siten, että } \bigcap_{i\in\sigma} U_i = \emptyset \right\} \subset \mathcal{R}_1.$$

Minimaalisten tyypin 2 relaatioiden joukko puolestaan on

$$\mathcal{R}_2'(\mathcal{U}) := \Bigg\{ \prod_{i\in\sigma} X_i \prod_{j\in\tau}(1 - X_j) \;\Bigg|\; \sigma, \tau \subset [n], \;\; \sigma, \tau \neq \emptyset, \;\; \sigma \cap \tau = \emptyset$$

$$\text{ja } \sigma, \tau \text{ ovat minimaalisia siten, että } \emptyset \neq \bigcap_{i\in\sigma} U_i \subset \bigcup_{j\in\tau} U_j \neq X \Bigg\} \subset \mathcal{R}_2.$$

Lisäksi *minimaalisten tyypin 3 relaatioiden joukko on*

$$\mathcal{R}_3'(\mathcal{U}) := \Bigg\{ \prod_{i\in\tau}(1 - X_i) \;\Bigg|\; \tau \subset [n] \text{ on minimaalinen siten, että } X \subset \bigcup_{i\in\tau} U_i \Bigg\} \subset \mathcal{R}_3.$$

Huomautus. Lyhennämme jatkossa merkintöjä myös minimaalisten relaatiotyyppien osalta jättämällä jälleen toteutuman mainitsematta merkinnässä sen ollessa asiayhteydestä selvä.

Huomautus. Tarkoitamme tässä minimaalisuudella erityisesti minimaalisuutta sisältyvyyden suhteen. Tässä merkityksessä joukko on jonkin ominaisuuden suhteen minimaalinen, mikäli millään sen aidolla osajoukolla ei ole kyseistä ominaisuutta.

Huomautus (vrt. [2, 6.3]). Nämä uudet minimaaliset relaatiotyyppien joukot edelleen virittävät vastaavan neuroideaalin. Siis määritelmän 4.16 tapauksessa pätee

$$J_{C(\mathcal{U})} = \langle \mathcal{R}_1', \mathcal{R}_2', \mathcal{R}_3' \rangle$$

Tämä on varsin yksinkertaista todeta. Nimittäin lauseen 3.24 nojalla tiedetään jo, että

$$J_{C(\mathcal{U})} = \langle \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_3 \rangle.$$

Siksi riittääkin osoittaa, että

$$\langle \mathcal{R}_i' \rangle = \langle \mathcal{R}_i \rangle$$

kaikilla $i \in \{1, 2, 3\}$.

Joukkojen $\mathcal{R}_i$ ja $\mathcal{R}_i'$ määrittelyistä seuraa heti, että $\mathcal{R}_i' \subset \mathcal{R}_i$, jolloin myös $\langle \mathcal{R}_i' \rangle \subset \langle \mathcal{R}_i \rangle$ kaikilla $i \in \{1, 2, 3\}$.

Olkoot $\sigma, \tau \subset [n]$ sellaiset, että

$$F = \prod_{i\in\sigma} X_i \prod_{j\in\tau}(1 - X_j) \in \mathcal{R}_2.$$

Tällöinhän on olemassa

$$\prod_{i\in\sigma'} X_i \prod_{j\in\tau'}(1 - X_j) \in \mathcal{R}_2',$$

missä $\sigma' \subset \sigma$ ja $\tau' \subset \tau$. Koska $\langle \mathcal{R}_2' \rangle$ on ideaali, niin tästä seuraa, että $F \in \langle \mathcal{R}_2' \rangle$. Siis $\mathcal{R}_2 \subset \langle \mathcal{R}_2' \rangle$, joten myös $\langle \mathcal{R}_2 \rangle \subset \langle \mathcal{R}_2' \rangle$ ja täten $\langle \mathcal{R}_2' \rangle = \langle \mathcal{R}_2 \rangle$.

Vastaavasti saadaan, että $\langle \mathcal{R}_1' \rangle = \langle \mathcal{R}_1 \rangle$ ja $\langle \mathcal{R}_3' \rangle = \langle \mathcal{R}_3 \rangle$.

Mikäli tarkastelemamme neurokoodin toteuma tunnetaan entuudestaan, tarjoaa seuraava lause helpon keinon kyseistä neurokoodia vastaavan neuroideaalin kanonisen muodon selvittämiseen.

Lause 4.17 (vrt. [2, Theorem 4.3]). *Olkoon $C \subset \mathbb{F}_2^n$ neurokoodi ja $\mathcal{U} = \{U_1, \dots, U_n\}$ sen avoimista joukoista koostuva toteutuma ärsyke-avaruudessa X. Tällöin*

$$\mathrm{CF}(J_C) = \mathcal{R}_1' \cup \mathcal{R}_2' \cup \mathcal{R}_3'.$$

Todistus (vrt. [2, Theorem 6.3]). Nähdään heti, että joukko $\mathcal{R}_1' \cup \mathcal{R}_2' \cup \mathcal{R}_3'$ koostuu pseudomonomeista. Riittää siis osoittaa, että sen alkiot ovat pseudomonomeina minimaalisia ja että kaikki neuroideaalin J_C minimaaliset pseudomonomit todella kuuluvat tähän joukkoon.

Olkoon $F = \prod_{i \in \sigma} X_i \in \mathcal{R}_1'$, jollain $\sigma \subset [n]$. Jos $G \in \mathbb{F}_2[n]$ siten, että $G \mid F$ ja $\deg(G) < \deg(F)$, niin tällöin polynomin G on oltava muotoa $G = \prod_{i \in \tau} X_i$, missä $\tau \subsetneq \sigma$. Kuitenkin $F \in \mathcal{R}_1'$, joten σ on minimaalinen siten, että

$$\bigcap_{i \in \sigma} U_i = \emptyset.$$

Siis koska $\tau \subsetneq \sigma$, niin tällöin on oltava

$$\bigcap_{i \in \tau} U_i \neq \emptyset.$$

Tästähän seuraa lauseen 3.23 perusteella, että $G \notin J_C$. Täten F on minimaalinen pseudomonomi. Täysin samaan tapaan saadaan, että myös joukkojen $\mathcal{R}_2'$ ja $\mathcal{R}_3'$ alkiot ovat minimaalisia pseudomonomeja. Siis $\mathcal{R}_1' \cup \mathcal{R}_2' \cup \mathcal{R}_3' \subset \mathrm{CF}(J_C)$.

Olkoon sitten

$$F = \prod_{i \in \sigma} X_i \prod_{j \in \tau} (1 - X_j) \in J_C$$

minimaalinen pseudomonomi, missä $\sigma, \tau \subset [n]$, $\sigma \cap \tau = \emptyset$. Nyt lauseesta 3.23 seuraa, että

$$\bigcap_{i \in \sigma} U_i \subset \bigcup_{j \in \tau} U_j.$$

Koska F on neuroideaalin J_C minimaalinen pseudomonomi, täytyy joukkojen σ ja τ olla minimaalisia siten, että

$$\bigcap_{i \in \sigma} U_i \subset \bigcup_{j \in \tau} U_j.$$

Jos nimittäin olisikin joukot $\sigma' \subset \sigma$ ja $\tau' \subset \tau$, joille $\sigma' \neq \sigma$ tai $\tau' \neq \tau$ ja

$$\bigcap_{i \in \sigma'} U_i \subset \bigcup_{j \in \tau'} U_j,$$

niin tällöin pätisi lisäksi edelleen $\sigma' \cap \tau' = \emptyset$, jolloin joukon $J_{\mathcal{U}}$ määritelmän nojalla

$$G = \prod_{i \in \sigma'} X_i \prod_{j \in \tau'} (1 - X_j) \in J_{\mathcal{U}}.$$

Toisaalta lauseessa 3.22 todistimme, että $J_{\mathcal{U}} = J_{C(\mathcal{U})}$, joten $G \in J_{C(\mathcal{U})} = J_C$. Tämä on kuitenkin ristiriita pseudomonomin F minimaalisuuden kanssa, koska sillä on nyt olemassa alempiasteinen pseudomonomitekijä G ideaalissa J_C. Siispä joukkojen σ ja τ on todella oltava minimaaliset siten, että

$$\bigcap_{i\in\sigma} U_i \subset \bigcup_{j\in\tau} U_j.$$

Jos $\tau = \emptyset$, niin tällöin $F \in \mathcal{R}_1'$. Jos taas $\sigma = \emptyset$, niin $F \in \mathcal{R}_3'$. Toisaalta, jos $\sigma, \tau \neq \emptyset$, niin nähdään, että $F \in \mathcal{R}_2'$. Täten olemme saaneet siis osoitettua, että myös $\mathrm{CF}(J_C) \subset \mathcal{R}_1' \cup \mathcal{R}_2' \cup \mathcal{R}_3'$, joten $\mathrm{CF}(J_C) = \mathcal{R}_1' \cup \mathcal{R}_2' \cup \mathcal{R}_3'$. □

Monesti neuroideaalin kanoninen muoto haluttaisiin selvittää myös tilanteessa, jossa ei ole tietoa toteutumasta. Tällöin tarvitaan toisenlaisia menetelmiä, joihin palaamme tämän luvun lopussa.

4.3 Stanley-Reisnerin ideaali

Luvussa 2 tarkastelimme neurokoodien yhteyttä simpleksisiin komplekseihin. Nyt palaamme aiheen pariin vertaamalla aikaansaannoksiamme simpleksisistä komplekseista juontuvaan Stanley-Reisnerin ideaalin käsitteeseen.

Määritelmä 4.18 (vrt. [7, Definition 1.6])**.** Olkoot K kunta, $m \in \mathbb{Z}_+$ ja Δ joukon $\{1, \ldots, m\}$ osajoukoista koostuva simpleksinen kompleksi. Tällöin simpleksisen kompleksin Δ *Stanley-Reisnerin ideaali on*

$$I_\Delta :== \left\langle \prod_{i\in\tau} X_i \;\middle|\; \tau \subset \{1, \ldots, m\},\;\; \tau \notin \Delta \right\rangle \subset K[X_1, \ldots, X_m]$$

ja sen *Stanley-Reisnerin rengas* on tekijärengas

$$K[X_1, \ldots, X_m]\,/I_\Delta .$$

Neuroideaalin ja sen kanonisen muodon vahva yhteys tähän käsitteeseen ilmenee seuraavasta lauseesta.

Lause 4.19. *Olkoot $C \subset \mathbb{F}_2^n$ neurokoodi ja $\mathcal{U} = \{U_1, \ldots, U_n\}$ sen toteutuma ärsykeavaruudessa X. Tällöin $\langle \mathcal{R}_1 \rangle$ on neurokoodin C simpleksisen kompleksin $\Delta(C)$ Stanley-Reisnerin ideaali.*

Jos C on simpleksinen kompleksi koodi, niin $\mathrm{CF}(J_C) = \mathcal{R}_1'$ *ja tällöin neuroideaali J_C on simpleksisen kompleksin* $\Delta(C) = \mathrm{supp}(C)$ *Stanley-Reisnerin ideaali.*

Todistus (vrt. [2, Lemma 4.4]). Olkoon $\sigma \subset [n]$. Osoitetaan sitten, että tällöin pätee

$$\sigma \in \Delta(C) \quad\Leftrightarrow\quad \bigcap_{i\in\sigma} U_i \neq \emptyset.$$

Oletetaan ensin, että $\sigma \in \Delta(C)$. Koska määritelmän 2.9 perusteella

$$\Delta(C) = \{\sigma \subset [n] \mid \sigma \subset \mathrm{supp}(c),\; \text{jollain } c \in C\},$$

niin on siis olemassa $c \in C$ siten, että $\sigma \subset \operatorname{supp}(c)$. Toisaalta toteutumana joukolle $\mathcal{U}$ pätee, että $C = C(\mathcal{U})$. Siis

$$\emptyset \neq \bigcap_{i \in \operatorname{supp}(c)} U_i \subset \bigcap_{i \in \sigma} U_i.$$

Oletetaan sitten, että

$$\bigcap_{i \in \sigma} U_i \neq \emptyset.$$

Tällöin on siis olemassa

$$x \in \bigcap_{i \in \sigma} U_i.$$

Valitaan sitten koodisana $c \in \mathbb{F}_2^n$ asettamalla kaikilla $i \in [n]$,

$$c_i = \begin{cases} 1 \text{ ,kun } x \in U_i \\ 0 \text{ ,kun } x \neq U_i. \end{cases}$$

Nythän $\sigma \subset \operatorname{supp}(c)$ ja toisaalta $c \in C = C(\mathcal{U})$, sillä

$$x \in \bigcap_{i \in \operatorname{supp}(c)} U_i \setminus \bigcup_{j \in [n] \setminus \operatorname{supp}(c)} U_j \neq \emptyset.$$

Täten $\sigma \in \Delta(C)$.

Olemme siis osoittaneet, että

$$\sigma \in \Delta(C) \Leftrightarrow \bigcap_{i \in \sigma} U_i \neq \emptyset.$$

Tällöin erityisesti pätee, että

$$\sigma \notin \Delta(C) \Leftrightarrow \bigcap_{i \in \sigma} U_i = \emptyset.$$

Nythän käyttämällä tätä havaintoa ja määritelmää 4.18 saadaan, että Stanley-Reisnerin ideaali simpleksiselle kompleksille $\Delta(C)$ on

$$\left\langle \prod_{i \in \tau} X_i \;\middle|\; \tau \subset [n], \;\; \tau \notin \Delta(C) \right\rangle = \left\langle \prod_{i \in \tau} X_i \;\middle|\; \tau \subset [n], \;\; \bigcap_{i \in \tau} U_i = \emptyset \right\rangle = \langle \mathcal{R}_1 \rangle.$$

Oletetaan sitten, että C on simpleksinen kompleksi koodi ja todistetaan lauseen jälkimmäinen osa. Osoitetaan ensin, ettei neuroideaalin J_C kanonisessa muodossa $\mathrm{CF}(J_C)$ ole lainkaan tyypin 3 relaatioita. Koska C on simpleksinen kompleksi koodi, niin lauseen 2.10 nojalla $\Delta(C) = \operatorname{supp}(C)$. Erityisesti $\operatorname{supp}(C)$ on simpleksinen kompleksi ja täten $\emptyset \in \operatorname{supp}(C)$. Tällöinhän $00\ldots00 \in C$. Toisaalta $C = C(\mathcal{U})$, joten

$$\emptyset \neq \bigcap_{i \in \operatorname{supp}(00...00)} U_i \setminus \bigcup_{j \in [n] \setminus \operatorname{supp}(00...00)} U_j = \bigcap_{i \in \emptyset} U_i \setminus \bigcup_{j \in [n] \setminus \emptyset} U_j = X \setminus \bigcup_{i \in [n]} U_i.$$

Siis

$$X \not\subset \bigcup_{i\in[n]} U_i,$$

jolloin tyypin 3 relaatioita ei voi olla.

Osoitetaan sitten vielä, ettei myöskään tyypin 2 relaatioita ole kanonisessa muodossa $\mathrm{CF}(J_C)$. Tehdään vastaoletus, että on olemassa

$$F = \prod_{i\in\sigma} X_i \prod_{j\in\tau}(1 - X_j) \in \mathrm{CF}(J_C),$$

$$\text{missä } \emptyset \neq \sigma, \tau \subset [n], \quad \sigma \cap \tau = \emptyset \text{ ja } \emptyset \neq \bigcap_{i\in\sigma} U_i \subset \bigcup_{j\in\tau} U_j \neq X.$$

Koska

$$\bigcap_{i\in\sigma} U_i \neq \emptyset,$$

niin aiemman havainnon nojalla $\sigma \in \Delta(C) = \mathrm{supp}(C)$. Toisaalta

$$\bigcap_{i\in\sigma} U_i \subset \bigcup_{j\in\tau} U_j,$$

jolloin erityisesti pätee, että

$$\bigcap_{i\in\sigma} U_i \setminus \bigcup_{j\in\tau} U_j = \emptyset.$$

Siis ei voi olla koodisanaa $c \in C = C(\mathcal{U})$, jolle pätisi $\sigma = \mathrm{supp}(c)$. Siis $\sigma \notin \mathrm{supp}(C)$, mikä on ristiriita aiemmin todetun kanssa.

On siis saatu, että tässä $\mathcal{R}_2' = \mathcal{R}_3' = \emptyset$. Täten lauseen 4.17 nojalla

$$\mathrm{CF}(J_C) = \mathcal{R}_1' \cup \mathcal{R}_2' \cup \mathcal{R}_3' = \mathcal{R}_1'$$

ja

$$J_C = \langle \mathcal{R}_1', \mathcal{R}_2', \mathcal{R}_3' \rangle = \langle \mathcal{R}_1' \rangle.$$

Toisaalta aiemmin totesimme ideaalin $\langle \mathcal{R}_1' \rangle = \langle \mathcal{R}_1 \rangle$ olevan simpleksisen kompleksin $\Delta(C)$ Stanley-Reisnerin ideaali. □

4.4 Iteratiivinen algoritmi

Lauseessa 4.17 onnistuttiin muodostamaan neuroideaalin kanoninen muoto siinä tapauksessa, että vastaava toteutuma tunnettiin. Olemme kuitenkin erityisen kiinnostuneita tapauksesta, jossa tunnemme vain neurokoodin itsensä. Tällaisia tilanteita varten on kehitetty erilaisia algoritmeja, jotka selvittävät neurokoodille sitä vastaavan neuroideaalin kanonisen muodon [2, 4.5]. Tässä alaluvussa esitämme yhden tällaisen algoritmin ja osoitamme sen toimivuuden (vrt. [9, s. 3-7]).

Tarkastelemamme algoritmi on luonteeltaan iteratiivinen. Ensin esitämmekin erillisenä algoritmina yhden iteratiivisen askeleen suorittavan prosessin. Tässä algoritmissa laajennetaan neurokoodia vastaavan neuroideaalin jo tunnettua kanonista muotoa vastaamaan tilannetta, jossa kyseiseen neurokoodiin on lisätty yksi koodisana.

Algoritmi 1: Iteratiivinen askel kanonisen muodon laajentamiseksi.

```
IAskel(C, CF(J_C), c):
Syöte: Neurokoodi C ⊂ F_2^n, sitä vastaavan neuroideaalin kanoninen muoto
       CF(J_C) = {F_1, ..., F_k} ⊂ F_2[n] ja koodisana c ∈ F_2^n.
Tulos: CF(J_{C∪{c}})
begin
    L ← {},  M ← {},  N ← {}
    for i ← 1 to k do
        if F_i(c) = 0 then
            L ← L ∪ {F_i}
        else
            M ← M ∪ {F_i}
        end
    end
    for F ∈ M do
        for j ← 1 to n do
            if F(X_j − c_j) ei ole minkään G ∈ L monikerta and
              (X_j − c_j − 1) ∤ F then
                N ← N ∪ {F(X_j − c_j)}
            end
        end
    end
    return L ∪ N
end
```

Käyttämällä toistuvasti algoritmia 1 on suoraviivaista muodostaa neurokoodia vastaavan neuroideaalin kanoninen muoto. Teemme tämän algoritmissa 2, jossa iteratiivista askelta toistamalla laajennetaan tyhjä joukko alkio kerrallaan halutuksi neurokoodiksi, päivittäen sen neuroideaalin kanonista muotoa samaan tahtiin. Tässä ensimmäisen alkion lisääminen on käsitelty omana erikoistapauksenaan, sillä iteratiivinen askel edellyttää joukon C olevan neurokoodina epätyhjä.

Algoritmi 2: Iteratiivinen algoritmi neuroideaalin kanonisen muodon selvittämiseen.

```
KanoninenMuoto(C):
Syöte: Neurokoodi C ⊂ F_2^n.
Tulos: CF(J_C)
begin
  CF ← {},  C' ← {}
  for c ∈ C do
    if C' = ∅ then
      CF ← {X_i − c_i | i ∈ [n]}
      C' ← {c}
    else
      CF ← IAskel(C', CF, c)
      C' ← C' ∪ {c}
    end
  end
  return CF
end
```

Todistaaksemme algoritmin toimivuuden esitämme seuraavaksi muutamia aputuloksia ja merkintöjä.

Apulause 4.20. *Olkoon $F \in \mathbb{F}_2[n]$. Tällöin on olemassa yksikäsitteinen neliötön polynomi $G \in \mathbb{F}_2[n]$, jolle pätee $F(c) = G(c)$ kaikilla $c \in \mathbb{F}_2^n$.*

Todistus (vrt. [3, s. 26]). Tarkastellaan esimerkin 3.17 neurorengasta $\mathbb{F}_2[n]/\mathcal{B}$. Kuten aiemmin totesimme, vastaavat tämän tekijärenkaan alkiot kuvauksia $\mathbb{F}_2^n \to \mathbb{F}_2$. Tällaisia kuvauksia on 2^{2^n}. Jokaisesta tämän tekijärenkaan alkiona olevasta sivuluokasta löydetään neliötön edustaja. Nimittäin kun tekijärengas on muodostettu Boolen ideaalin suhteen voidaan sivuluokan sisällä löytää neliötön edustaja sijoittamalla toistuvasti $X_i^2 = X_i$. Lause 3.14 takaa, että sivuluokka pysyy sijoituksista huolimatta samana, sillä $v = v^2$ kaikilla $v \in \mathbb{F}_2$. Lisäksi tämä edustaja on kullekin sivuluokalle yksikäsitteinen, sillä renkaassa $\mathbb{F}_2[n]$ on tismalleen 2^{2^n} neliötöntä polynomia.

Täten kun G on polynomin F ekvivalenssiluokkaa tekijärenkaassa $\mathbb{F}_2[n]/\mathcal{B}$ vastaava yksikäsitteinen neliötön polynomi, pätee sille myös, että $F(c) = G(c)$ kaikilla $c \in \mathbb{F}_2^n$, sillä kunkin sivuluokan jäsenet määrittelevät saman kuvauksen $\mathbb{F}_2^n \to \mathbb{F}_2$ lauseen 3.14 perusteella. □

Merkintä. Olkoon $F \in \mathbb{F}_2[n]$. Merkitään tällöin apulauseen 4.20 polynomia G

$$F_R := G.$$

Apulause 4.21. *Olkoot C neurokoodi ja $F \in \mathbb{F}_2[n]$ pseudomonomi, jolle pätee $F \in I_C$. Tällöin $F \in J_C$.*

Todistus. Pseudomonomina F on muotoa

$$F = \prod_{i \in \sigma} X_i \prod_{j \in \tau} (1 - X_j),$$

joillain $\sigma, \tau \subset [n]$, joille pätee $\sigma \cap \tau = \emptyset$. Olkoon $c \in \mathbb{F}_2^n$ on koodisana siten, että $\mathrm{supp}(c) = [n] \setminus \tau$. Tällöin $F(c) = 1$, joten apulauseen 4.3 perusteella $\rho_c \in \mathrm{can}(F)$. Siis $\mathrm{can}(F) \neq \emptyset$.

Toisaalta jos $c \in \mathcal{C}$, niin $F(c) = 0$ koska $F \in I_{\mathcal{C}}$. Tällöin apulauseen 4.3 nojalla $\rho_c \notin \mathrm{can}(F)$. Tästä johtuen aina, kun $\rho_c \in \mathrm{can}(F)$ täytyy päteä $c \notin \mathcal{C}$. Täten $\mathrm{can}(F) \subset J_{\mathcal{C}} = \langle \rho_c \mid c \notin \mathcal{C} \rangle$.

Toisaalta lauseen 4.5 avulla F voidaan nyt esittää ideaalin $J_{\mathcal{C}}$ alkioiden summana

$$F = \sum_{\rho_c \in \mathrm{can}(F)} \rho_c \in J_{\mathcal{C}}.$$

□

Määritelmä 4.22 (vrt. [3, Lemma 4.2])**.** Olkoot $\mathcal{C}$, $\mathcal{D} \subset \mathbb{F}_2^n$ neurokoodeja,

$$\mathrm{CF}(J_{\mathcal{C}}) = \{F_1, \dots, F_r\} \text{ ja } \mathrm{CF}(J_{\mathcal{D}}) = \{G_1, \dots, G_s\},$$

missä $r, s \in \mathbb{Z}_+$. Määritellään tällöin seuraavat joukot asettamalla

$$P(\mathcal{C}, \mathcal{D}) := \left\{(F_i G_j)_R \;\middle|\; i \in \{1, \dots, r\}, j \in \{1, \dots, s\}\right\}$$

ja

$$MP(\mathcal{C}, \mathcal{D}) := \left\{H \in P(\mathcal{C}, \mathcal{D}) \;\middle|\; H \neq 0 \text{ ja } H \neq FG \text{ aina, kun } F \in P(\mathcal{C}, \mathcal{D}), G \neq 1\right\}.$$

Huomautus. Kaikki $F \in MP(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ ja $G \in P(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ ovat pseudomonomien neliöttöminä tuloina itsekin pseudomonomeja.

Apulause 4.23. *Olkoot $\mathcal{C}, \mathcal{D} \subset \mathbb{F}_2^n$ neurokoodeja,*

$$\mathrm{CF}(J_{\mathcal{C}}) = \{F_1, \dots, F_r\} \textit{ ja } \mathrm{CF}(J_{\mathcal{D}}) = \{G_1, \dots, G_s\},$$

missä $r, s \in \mathbb{Z}_+$. Tällöin

$$MP(\mathcal{C}, \mathcal{D}) = \mathrm{CF}(J_{\mathcal{C} \cup \mathcal{D}}).$$

Todistus (vrt. [3, s. 27]). Osoitetaan ensin, että $MP(\mathcal{C}, \mathcal{D}) \subset J_{\mathcal{C} \cup \mathcal{D}}$. Olkoon

$$H = (F_i G_j)_R \in MP(\mathcal{C}, \mathcal{D}),$$

missä $i \in \{1, \dots, r\}$, $j \in \{1, \dots, s\}$. Nythän $F_i \in J_{\mathcal{C}}$ ja $G_j \in J_{\mathcal{D}}$, joten $H \in J_{\mathcal{C}}$ ja $H \in J_{\mathcal{D}}$, koska $J_{\mathcal{C}}$ ja $J_{\mathcal{D}}$ ovat ideaaleja. Tällöinhän $H(c) = 0$ kaikilla $c \in \mathcal{C} \cup \mathcal{D}$, koska $J_{\mathcal{C}} \subset I_{\mathcal{C}}$ ja $J_{\mathcal{D}} \subset I_{\mathcal{D}}$. Nythän H on pseudomonomi ja $H \in I_{\mathcal{C} \cup \mathcal{D}}$, joten apulauseen 4.21 perusteella tällöin pätee $H \in J_{\mathcal{C} \cup \mathcal{D}}$. Siis on saatu, että $MP(\mathcal{C}, \mathcal{D}) \subset J_{\mathcal{C} \cup \mathcal{D}}$.

Osoitetaan sitten, että $\mathrm{CF}(J_{\mathcal{C} \cup \mathcal{D}}) \subset MP(\mathcal{C}, \mathcal{D})$. Olkoon $H \in \mathrm{CF}(J_{\mathcal{C} \cup \mathcal{D}})$. Koska $J_{\mathcal{C} \cup \mathcal{D}} \subset J_{\mathcal{C}}$ ja $J_{\mathcal{C} \cup \mathcal{D}} \subset J_{\mathcal{D}}$, niin on olemassa $i \in \{1, \dots, r\}$ ja $j \in \{1, \dots, s\}$ siten, että $F_i \mid H$ ja $G_j \mid H$. Tämä seuraa määritelmän 4.12 jälkeisestä huomautuksesta. Nyt saadaan edelleen, että $(F_i G_j)_R \mid H$. Tällöin H on jonkin $P \in MP(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ monikerta. Tästä seuraa aiemmin todetun perusteella, että $P \in J_{\mathcal{C} \cup \mathcal{D}}$, sillä $MP(\mathcal{C}, \mathcal{D}) \subset J_{\mathcal{C} \cup \mathcal{D}}$.

Koska toisaalta $H \in \mathrm{CF}(J_{C \cup \mathcal{D}})$, niin on oltava $H = P \in MP(C, \mathcal{D})$. Täten $\mathrm{CF}(J_{C \cup \mathcal{D}}) \subset MP(C, \mathcal{D})$.

Osoitetaan lopuksi, että $MP(C, \mathcal{D}) \subset \mathrm{CF}(J_{C \cup \mathcal{D}})$. Olkoon $H \in MP(C, \mathcal{D})$. Aiemmin osoittamamme perusteella tällöin $H \in J_{C \cup \mathcal{D}}$. Tällöin määritelmän 4.12 jälkeisestä huomautuksesta seuraa jälleen, että $F \mid H$, jollain

$$F \in \mathrm{CF}(J_{C \cup \mathcal{D}}) \subset MP(C, \mathcal{D}).$$

Tällöin joukon $MP(C, \mathcal{D})$ määrittelyn nojalla täytyy päteä $H = F \in \mathrm{CF}(J_{C \cup \mathcal{D}})$. □

Tämän apulauseen myötä olemme valmiit todistamaan algoritmin toimivuuden.

Lause 4.24. *Olkoon $C \subset \mathbb{F}_2^n$ neurokoodi. Tällöin edellä esitetty algoritmi 2 tuottaa sitä vastaavan neuroideaalin kanonisen muodon.*

Todistus (vrt. [9, s. 7]). Algoritmista 2 nähdään, että sen toimimisen osoittamiseksi riittää todeta algoritmin 1 tapauksessa todella pätevän $L \cup N = \mathrm{CF}(C \cup \{c\})$. Jos $c \in C$, niin algoritmi välittömästi tuottaa joukon $\mathrm{CF}(C)$. Voidaan siis olettaa, että $c \notin C$.

Apulauseen 4.23 perusteella on enää tarpeen osoittaa, että $L \cup N = MP(C, \{c\})$. Todistaaksemme tämän meidän täytyy varmistaa, että algoritmi käy läpi kaikki tarvittavat tulot ja karsii niistä ne, jotka lisäisivät joukkoon monikertoja tai nollan.

Huomataan ensin, että $\mathrm{CF}(J_{\{c\}}) = \{X_i - c_i \mid i \in [n]\}$. Tarkistetaan sitten, että kaikki tulot käydään läpi. Olkoon $G \in L$. Tällöin ainakin yhdellä $i \in [n]$ pätee, että $(G(X_i - c_i))_R = G$, sillä $G(c) = 0$. Koska $G \in L \subset \mathrm{CF}(J_C)$ ja $(X_i - c_i) \in \mathrm{CF}(J_{\{c\}})$, niin tällöin joukon $MP(C, \{c\})$ määrittelyn perusteella

$$G = (G(X_i - c_i))_R \in MP(C, \{c\}).$$

Muut vastaavat tulot tuottavat nollan tai polynomin G monikerran, joten ne eivät päädy joukkoon $MP(C, \{c\})$. Myöskään joukon L alkiot eivät voi olla toistensa monikertoja, sillä $L \subset \mathrm{CF}(J_C)$. Täten ainoat joukon $\mathrm{CF}(J_{\{c\}})$ lineaaristen termien ja joukon L alkioiden tulot, jotka täyttävät joukon $MP(C, \{c\})$ ehdot ovat joukon L alkiot itse. Lisäksi näistä nollat ja monikerrat poistetaan.

Tarkistetaan sitten joukon M alkioiden tulot joukon $\mathrm{CF}(J_{\{c\}})$ lineaaristen termien kanssa. Ne käydään algoritmissa eksplisiittisesti läpi, joten riittää enää todeta, että joukkoon N lisätyt alkiot myös toteuttavat vaaditut ehdot. Joukkoon N lisättäville alkioille ei algoritmissa esiintyvän tarkistuksen nojalla päädy nollaa tai joukon L alkioiden monikertoja. Riittää siis enää tarkistaa mahdollisuus, että joukossa N olisi jonkin toisen joukon N alkion monikerta. Tehdään vastaoletus, että on olemassa $i, j \in [n]$, $F, G \in \mathrm{CF}(J_C)$ ja pseudomonomi $H \in \mathbb{F}_2[n]$ siten, että

$$F(X_i - c_i) = HG(X_j - c_j),$$

ja

$$F(X_i - c_i), G(X_j - c_j) \in N.$$

Nyt koska $F, G \in \mathrm{CF}(J_C)$, niin $F \nmid G$ ja $G \nmid F$. Siispä $i \neq j$, jolloin on oltava $(X_j - c_j) \mid F$. Mutta tällöinhän $F(c) = 0$, joten $F \in L$, mikä on ristiriita, sillä tällöin on mahdotonta, että $F \in N$. □

Tässä esittelemällemme algoritmille on tehty toteutuksia eri alustoille. Alkuperäisen artikkelin [3] yhteydessä mainittu Matlab-toteutus on saatavilla osoitteesta https://github.com/nebneuron/neural-ideal (8.11.2017).

Lisäksi artikkelissa [9] on esitelty saman algoritmin SageMath toteutusta ja vertailtu sen tehokkuutta muihin algoritmeihin ja toteutuksiin. Tähän toteutukseen liittyvä lähdekoodi on saatavilla osoitteesta https://github.com/e6-1/NeuralIdeals (8.11.2017).

Esimerkki 4.25. Tarkastellaan esimerkin 4.15 neurokoodia $C = \{111, 011, 001, 000\}$ ja sen neuroideaalia J_C. Selvitetään nyt tämän kanoninen muoto käyttäen käsittelemäämme iteratiivista algoritmia.

Algoritmin käynnistyessä annamme sille syötteenä neurokoodin C. Ensin algoritmi alustaa joukot CF ja C' tyhjiksi ja siirtyy sitten iteroimaan käyden joukon C alkiot läpi.

Kierros 1 Ensimmäisellä iterointikierroksella $c = 111$. Nyt algoritmi toteaa heti joukon C' olevan tyhjä, jolloin tavanomaisen iteratiivisen askeleen sijaan alustetaankin CF $= \{X_1 - 1,\ \ X_2 - 1,\ \ X_3 - 1\}$. Tämän jälkeen päivitetään joukoksi $C' = \{111\}$.

Kierros 2 Toisella kierroksella $c = 011$. Nyt $C' \neq \emptyset$, joten suoritamme tavallisen iteratiivisen askeleen IAskel$(\{111\}, \{X_1 - 1,\ X_2 - 1,\ X_3 - 1\}, 011)$.

Tällöin käymme ensin joukon CF läpi ja jaamme sen alkiot joukkoihin L ja M sen mukaan, häviävätkö ne pisteessä $c = 011$. Pseudomonomit $X_2 - 1$ ja $X_3 - 1$ häviävät, mutta $X_1 - 1$ ei, joten tässä $L = \{X_2 - 1,\ X_3 - 1\}$ ja $M = \{X_1 - 1\}$.

Seuraavaksi käymme läpi joukon M alkioiden tulot pseudomonomien $X_j - c_j$ kanssa kaikilla $j \in [n]$. Näistä ehdot täyttävät tulot lisätään joukkoon N. Pseudomonomit $(X_1 - 1)(X_2 - 1)$ ja $(X_1 - 1)(X_3 - 1)$ hylätään heti, sillä ne ovat joukon L alkioiden monikertoja. Myöskin $(X_1 - 1)(X_1 - 0)$ hylätään sillä

$$X_1 - c_1 - 1 = X_1 - 0 - 1 = X_1 - 1 \mid X_1 - 1.$$

Olemme nyt arvioineet kaikki tulot ja täten joukko N jää tyhjäksi. Lopuksi iteratiivinen askel palauttaa joukon $L \cup N = \{X_2 - 1,\ X_3 - 1\}$.

Algoritmi päivittää seuraavaksi joukon CF iteratiivisen askeleen tuloksella ja lisää alkion $c = 011$ joukkoon C'. Kierroksen lopussa siis CF $= \{X_2 - 1,\ X_3 - 1\}$ ja $C' = \{111, 011\}$.

Kierros 3 Kolmannella kierroksella $c = 001$. Joukko C' on edelleen epätyhjä, joten suoritamme iteratiivisen askeleen IAskel$(\{111, 011\}, \{X_2 - 1,\ X_3 - 1\}, 001)$.

Lajittelun jäljiltä olemme tilanteessa $L = \{X_3 - 1\}$, $M = \{X_2 - 1\}$. Käydään jälleen läpi joukko M. Pseudomonomi $(X_2 - 1)(X_1 - 0) = X_1(X_2 - 1)$ täyttää kaikki tarvittavat ehdot, joten lisäämme sen joukkoon N. Sen sijaan $(X_2 - 1)(X_2 - 0)$ hylätään, sillä

$$X_2 - c_2 - 1 = X_2 - 0 - 1 = X_2 - 1 | X_2 - 1.$$

Viimeinen tarkasteltava tulo $(X_2 - 1)(X_3 - 1)$ puolestaan on joukon L alkion monikerta, joten hylkäämme sen. Lopputuloksena $N = \{X_1(X_2 - 1)\}$. Siispä tällä kertaa iteratiivinen askel palauttaa $L \cup N = \{X_3 - 1,\ X_1(X_2 - 1)\}$.

Algoritmi päivittää tämän jälkeen joukot CF ja C' kierroksen lopputuloksena $\mathrm{CF} = \{X_3 - 1,\ X_1(X_2 - 1)\}$ ja $C' = \{111, 011, 001\}$.

Kierros 4 Viimeisellä kierroksella $c = 000$. Jälleen $C' \neq \emptyset$, joten suoritamme vielä viimeisen iteratiivisen askeleen

$$\mathrm{IAskel}(\{111, 011, 001\}, \{X_1(X_2 - 1),\ X_3 - 1\}, 000).$$

Nyt lajittelun tuoksena $L = \{X_1(X_2 - 1)\}$ ja $M = \{X_3 - 1\}$. Käydessämme joukkoa M läpi hylkäämme tulon $(X_3 - 1)(X_3 - 0)$, sillä

$$X_3 - c_3 - 1 = X_3 - 1 \mid X_3 - 1.$$

Sen sijaan tulot $(X_3 - 1)(X_1 - 0) = X_1(X_3 - 1)$ ja $(X_3 - 1)(X_2 - 0) = X_2(X_3 - 1)$ kumpikin täyttävät ehdot ja päätyvät joukkoon N. Iteratiivinen askel palauttaa siis $L \cup N = \{X_1(X_2 - 1),\ X_1(X_3 - 1),\ X_2(X_3 - 1)\}$.

Tämän myötä päivitämme joukot CF ja C', jonka jälkeen algoritmi poistuu pääsilmukastaan lisättyään kaikki joukon C alkiot joukkoon C'. Lopuksi algoritmi palauttaa tuloksena joukon $\{X_1(X_2 - 1),\ X_1(X_3 - 1),\ X_2(X_3 - 1)\}$.

Tämän algoritmin myötä olemme saaneet aikaan tavan johtaa neurokoodista sen toteutumaltaan edellyttämä rakenne. Voimme nimittäin toimia oheisen kaavion mukaisesti ja muodostaa ensin kyseistä neurokoodia vastaavan neuroideaalin. Tämän jälkeen käyttäen esittämäämme iteratiivista algoritmia, voimme johtaa kyseisen neuroideaalin kanonisen muodon, josta puolestaan näemme lauseen 3.23 viitoittamana neurokoodin asettamat edellytykset sen toteutumalle.

$$\begin{array}{c} \text{Neurokoodi} \\ C \subset \mathbb{F}_2^n \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} \text{Neuroideaali} \\ J_C = \langle \rho_c \mid c \notin C \rangle \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} \text{Kanoninen muoto} \\ \mathrm{CF}(J_C) \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} \text{Neurokoodin } C \\ \text{edellyttämä RF-struktuuri} \end{array}$$

Käymme seuraavassa esimerkissä läpi tämän kyseisen prosessin.

Esimerkki 4.26 (vrt. [2, 4.6])**.** Tarkastellaan tapausta $n = 5$. Olkoon

$$\begin{aligned} C = \{&00000, 10000, 01000, 00100, 00001, 11000, 10001, \\ &01100, 00110, 00101, 00011, 11100, 00111\} \end{aligned}$$

Tällöinhän

$$\begin{aligned} \mathbb{F}_2^5 \setminus C = \{&00010, 10100, 10010, 01010, 01001, 11010, 11001, 10110, 10101, 10011, \\ &01110, 01101, 01011, 11110, 11101, 11011, 10111, 01111, 11111\}. \end{aligned}$$

Tällöin määritelmän 3.9 perusteella neurokoodin C neuroideaali on

$$\begin{aligned}
J_C = \Big\langle X_4(1-X_1)(1-X_2)(1-X_3)(1-X_5),\quad & X_1X_3(1-X_2)(1-X_4)(1-X_5),\\
X_1X_4(1-X_2)(1-X_3)(1-X_5),\quad & X_2X_4(1-X_1)(1-X_3)(1-X_5),\\
X_2X_5(1-X_1)(1-X_3)(1-X_4),\quad & X_1X_2X_4(1-X_3)(1-X_5),\\
X_1X_2X_5(1-X_3)(1-X_4),\quad & X_1X_3X_4(1-X_2)(1-X_5),\\
X_1X_3X_5(1-X_2)(1-X_4),\quad & X_1X_4X_5(1-X_2)(1-X_3),\\
X_2X_3X_4(1-X_1)(1-X_5),\quad & X_2X_3X_5(1-X_1)(1-X_4),\\
X_2X_4X_5(1-X_1)(1-X_3),\quad & X_1X_2X_3X_4(1-X_5),\\
X_1X_2X_3X_5(1-X_4),\quad & X_1X_2X_4X_5(1-X_3),\\
X_1X_3X_4X_5(1-X_2),\quad & X_2X_3X_4X_5(1-X_1),\\
& X_1X_2X_3X_4X_5\Big\rangle.
\end{aligned}$$

Vaikka olemmekin rajoittautuneet tutkimaan yksinkertaista tapausta $n = 5$, nähdään tästä kuinka monimutkainen neuroideaalin esitys voi olla määritelmän antamassa muodossa. Pyrkimys esityksen tiivistämiseen kanonisen muodon avulla on siis hyvin perusteltua.

Voimmekin nyt muodostaa tämän neuroideaalin kanonisen muodon esimerkiksi käyttämällä esittämäämme iteratiivista algoritmia. Tällöin saadaan, että

$$\mathrm{CF}(J_C) = \Big\{X_1X_3X_5,\ \ X_2X_5,\ \ X_1X_4,\ \ X_2X_4,\ \ X_1X_3(1-X_2),\ \ X_4(1-X_3)(1-X_5)\Big\}.$$

Tällöin lauseen 4.17 perusteella

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}'_1 &= \Big\{X_1X_3X_5,\ \ X_2X_5,\ \ X_1X_4,\ \ X_2X_4\Big\}\\
\mathcal{R}'_2 &= \Big\{X_1X_3(1-X_2),\ \ X_4(1-X_3)(1-X_5)\Big\}\\
\mathcal{R}'_3 &= \emptyset.
\end{aligned}$$

Olkoon sitten $\mathcal{U} = \{U_1, U_2, U_3, U_4, U_5\}$ neurokoodin C toteutuma, ärsyke-avaruudessa X. Selvitetään nyt, mitä voimme päätellä toteumasta $\mathcal{U}$ neuroideaalin J_C kanonista muotoa tarkastelemalla. Tehdään se käyttämällä lausetta 3.23.

- Koska $X_1X_3X_5 \in \mathrm{CF}(J_C)$, niin $U_1 \cap U_3 \cap U_5 = \emptyset$. Toisaalta kanonisen muodon alkiona $X_1X_3X_5$ on minimaalinen pseudomonomi, eikä mikään sen aito pseudomonomitekijä voi siksi olla neuroideaalin J_C alkio. Tämän vuoksi on oltava myös $U_1 \cap U_3 \neq \emptyset$, koska ei voi olla $X_1X_3 \in J_C$. Vastaavasti $U_1 \cap U_5 \neq \emptyset$ ja $U_3 \cap U_5 \neq \emptyset$, sekä tietenkin $U_1, U_3, U_5 \neq \emptyset$.

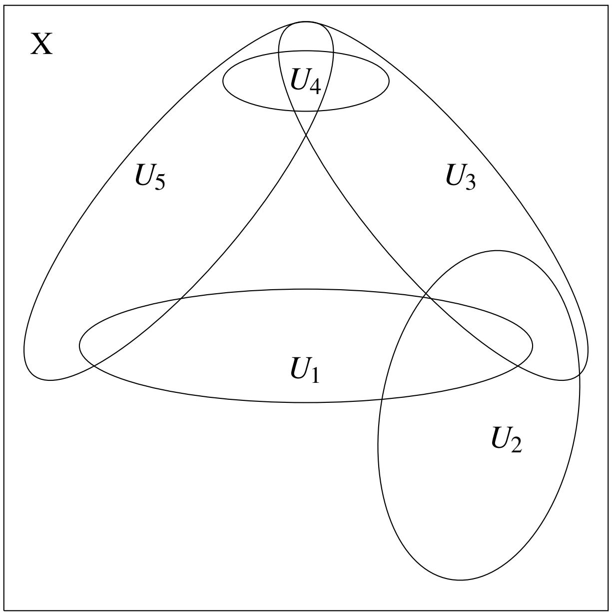
- Koska $X_2X_5 \in \mathrm{CF}(J_C)$, niin $U_2 \cap U_5 = \emptyset$. Toisaalta vastaavasti kuten edellä voimme päätellä, että $X_2, X_5 \notin J_C$, mistä seuraa $U_2, U_5 \neq \emptyset$.

- Edelleen koska $X_1X_4 \in \mathrm{CF}(J_C)$, niin $U_1 \cap U_4 = \emptyset$, mutta $U_1, U_4 \neq \emptyset$.

- Samaan tapaan koska $X_2X_4 \in \mathrm{CF}(J_C)$, niin $U_2 \cap U_4 = \emptyset$, mutta $U_2, U_4 \neq \emptyset$.

- Myös $X_1X_3(1 - X_2) \in \mathrm{CF}(J_C)$, joten $U_1 \cap U_3 \subset U_2$. Lisäksi on oltava $U_1 \cap U_3 \neq \emptyset$, $U_1 \not\subset U_2$ ja $U_3 \not\subset U_2$.
- Lisäksi $X_4(1 - X_3)(1 - X_5) \in \mathrm{CF}(J_C)$, joten $U_4 \subset U_3 \cup U_5$. Tällöin $U_4 \neq \emptyset$, $U_4 \not\subset U_3$ ja $U_4 \not\subset U_5$.

Voimme tämän pohjalta havainnollistaa tilannetta kuvalla.



Lopuksi kuvan tilanteesta voidaan tarkistaa, että todellakin $\mathcal{C}(\mathcal{U}) = \mathcal{C}$.

5. Neurokoodien ja neurorenkaiden väliset kuvaukset

Tässä luvussa luomme nopean katsauksen neurokoodien ja niitä vastaavien neurorenkaiden välisiin kuvauksiin. Aihetta on käsitelty laajemmin lähteissä [3] ja [6].

Toisinaan tarkastellessamme neurokoodeja saatamme haluta muokata niitä. Saatamme esimerkiksi haluta rajoittua tutkimaan koodisanoista vain tiettyjä neuroneja koskevia osia tai ehkäpä haluammekin uudelleenjärjestää koodisanojen indeksöinnin. Tällöin luonteva tapa lähetyä tilannetta on määrittää kuvaus, joka muuntaa annetun neurokoodin halutunlaiseksi [6, s. 19].

Mielenkiintoista onkin, voidaanko alkuperäisen neurokoodin ominaisuuksista johtaa tehokkaasti tietoa muunnoksen lopputuloksena syntyvästä neurokoodista. Erityisesti, jos muunnamme neurokoodin $\mathcal{C}$ neurokoodiksi $\mathcal{D}$ tuntiessamme neuroideaalin kanonisen muodon $\mathrm{CF}(J_{\mathcal{C}})$, niin voimmeko tällöin tehokkaasti tätä hyödyntäen muodostaa kanonisen muodon myös neuroideaalille $J_{\mathcal{D}}$?

Toinen selkeä kiinnostuksen kohde neurkoodien välisiä kuvauksia koskien ovat kuvaukset, jotka säilyttävät tiettyjä neurokoodien ominaisuuksia. Esimerkiksi kuvaukset, jotka kuvaavat konveksit koodit konvekseiksi koodeiksi [6, s. 56-63].

Aloitetaan neurokoodien välisten kuvausten tarkastelu kiinnittämällä neuronien joukot $[n] = \{1, \dots, n\}$ ja $[m] = \{1, \dots, m\}$, missä $n, m \in \mathbb{Z}_+$. Nyt voimme erityisesti tutkia kuvauksia sellaisten neurokoodien välillä, jotka liittyvät eri neuronien joukkoihin. Kiinnitetäänkin siis näitä neuronien joukkoja vastaavat neurokoodit $\mathcal{C} \subset \mathbb{F}_2^n$ ja $\mathcal{D} \subset \mathbb{F}_2^m$.

Määritelmä 5.1 (vrt. [3, s. 3])**.** Kuvausta $q\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ sanotaan *koodikuvaukseksi*.

Huomattavia koodikuvauksia ovat esimerkiksi inkluusio ja rajoittuma, sekä kuvaukset, jotka permutoivat, lisäävät tai poistavat neuroneja [3, s. 2].

Luvussa 3 liitimme neurokoodiin $\mathcal{C}$ sitä vastaavan neurorenkaan $\mathcal{R}_{\mathcal{C}}$, jonka alkiot voidaan tulkita kuvauksiksi $f\colon \mathcal{C} \to \mathbb{F}_2$. Käyttämällä apuna koodikuvauksia, voimme seuraavaksi muodostaa neurokoodeja vastaavien neurorenkaiden välisiä kuvauksia.

Määritelmä 5.2 (vrt. [3, s. 3])**.** Olkoon $q\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ koodikuvaus. Tällöin sitä vastaava *taakseveto* on kuvaus

$$q^*\colon \mathcal{R}_{\mathcal{D}} \to \mathcal{R}_{\mathcal{C}}, \quad q^*(f) = f \circ q.$$

Nähdään, että kun $f \in \mathcal{R}_{\mathcal{D}}$, niin todellakin $q^*(f) \in \mathcal{R}_{\mathcal{C}}$, kuten nähdään kuvasta 5.1.

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[r, "q"] \arrow[dr, "q^*(f) = f \circ q"'] & \mathcal{D} \arrow[d, "f"] \\
& \mathbb{F}_2
\end{tikzcd}
$$

Kuva 5.1: Koodikuvausta vastaava taakseveto.

Lause 5.3. *Olkoon $q\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ koodikuvaus. Tällöin q^* on rengashomomorfismi.*

Todistus (vrt. [3, Lemma 2.1]). Olkoot $c \in \mathcal{C}$ ja $f, g \in \mathcal{R}_{\mathcal{D}}$. Tällöin

$$
\begin{aligned}
q^*(f+g)(c) &= ((f+g) \circ q)(c) \\
&= (f+g)(q(c)) \\
&= f(q(c)) + g(q(c)) \\
&= (f \circ q)(c) + (g \circ q)(c) \\
&= (q^*(f))(c) + (q^*(g))(c) \\
&= (q^*(f) + q^*(g))(c)
\end{aligned}
$$

ja

$$
\begin{aligned}
q^*(fg)(c) &= (fg \circ q)(c) \\
&= (fg)(q(c)) \\
&= f(q(c)) \cdot g(q(c)) \\
&= (f \circ q)(c) \cdot (g \circ q)(c) \\
&= (q^*(f))(c) \cdot (q^*(g))(c) \\
&= (q^*(f) \cdot q^*(g))(c),
\end{aligned}
$$

joten

$$
q^*(f+g) = q^*(f) + q^*(g), \quad q^*(fg) = q^*(f) \cdot q^*(g).
$$

Toisaalta myös

$$
q^*(1_{\mathcal{R}_{\mathcal{D}}}) = 1_{\mathcal{R}_{\mathcal{D}}} \circ q = 1_{\mathcal{R}_{\mathcal{C}}}.
$$

Siis q^* on rengashomomorfismi. □

Nyt kun olemme osoittaneet kaikkien taaksevetojen olevan rengashomomorfismeja, tutkimme seuraavaksi kääntäen, mitkä rengashomomorfismeista ovat taaksevetoja.

Apulause 5.4 (vrt. [3, s. 10])**.** *Olkoon $\mathcal{C}' \subset \mathbb{F}_2^n$ neurokoodi. Tällöin renkaassa $\mathcal{R}_{\mathcal{C}'}$ pätee, että*

$$
\sum_{c \in \mathcal{C}'} \rho_c = 1_{\mathcal{R}_{\mathcal{C}'}}.
$$

Todistus. Tarkastelemme tässä indikaattoreiden summaa kuvauksena $C \to \mathbb{F}_2$. Olkoon $v \in C'$. Tällöin

$$\sum_{c \in C'} \rho_c(v) = \rho_v(v) + \sum_{c \in C' \setminus \{v\}} \underbrace{\rho_c(v)}_{=0} = 1.$$

Koska tämä pätee kaikilla $v \in C'$, niin todellakin

$$\sum_{c \in C'} \rho_c = 1_{\mathcal{R}_{C'}}.$$

□

Apulause 5.5. *Olkoon $\phi \colon \mathcal{R}_\mathcal{D} \to \mathcal{R}_C$ rengashomomorfismi ja $c \in C$. On olemassa yksikäsitteinen $d \in \mathcal{D}$ siten, että $\phi(\rho_d)(c) = 1$.*

Todistus (vrt. [3, Lemma 2.2]). Olkoon $c \in C$. Osoitetaan ensin yksikäsitteisyys. Jos olisi $d, d' \in \mathcal{D}$ siten, että

$$\phi(\rho_d)(c) = \phi(\rho_{d'})(c) = 1, \quad d \neq d',$$

niin tällöinhän pätisi

$$1 = 1 \cdot 1 = \phi(\rho_d)(c) \cdot \phi(\rho_{d'})(c) = \phi(\rho_d \cdot \rho_{d'})(c) = \phi(0_{\mathcal{R}_\mathcal{D}})(c) = 0_{\mathcal{R}_C}(c) = 0.$$

Siispä jos tällainen $d \in \mathcal{D}$ on olemassa, niin se on yksikäsitteinen.

Osoitetaan sitten olemassaolo. Tehdään ensin vastaoletus, että kaikilla $d \in \mathcal{D}$ pätee, että $\phi(\rho_d)(c) \neq 1$. Tällöinhän $\phi(\rho_d)(c) = 0$ aina, kun $d \in \mathcal{D}$, koska $\phi(\rho_d)(c) \in \mathbb{F}_2$. Nyt käyttämällä apulausetta 5.4 saadaan, että

$$\sum_{c' \in C} \rho_{c'} = 1_{\mathcal{R}_C} = \phi(1_{\mathcal{R}_\mathcal{D}}) = \phi(\sum_{d \in \mathcal{D}} \rho_d) = \sum_{d \in \mathcal{D}} \phi(\rho_d).$$

Tämän avulla saadaan johdettua, että

$$1 = \rho_c(c) = \left(\sum_{c' \in C} \rho_{c'}\right)(c) = \left(\sum_{d \in \mathcal{D}} \phi(\rho_d)\right)(c) = \left(\sum_{d \in \mathcal{D}} \underbrace{\phi(\rho_d)(c)}_{=0}\right) = 0,$$

mikä on ristiriita. Siis $\phi(\rho_d)(c) = 1$ ainakin yhdellä $d \in \mathcal{D}$. □

Määritelmä 5.6 (vrt. [3, s. 11])**.** Olkoon $\phi \colon \mathcal{R}_\mathcal{D} \to \mathcal{R}_C$ rengashomomorfismi. Tällöin määrittelemme sitä vastaavan koodikuvauksen $q_\phi \colon C \to \mathcal{D}$ asettamalla

$$q_\phi(c) = d_c,$$

missä $d_c \in \mathcal{D}$ on se yksikäsitteinen alkio, jolle pätee $\phi(\rho_{d_c})(c) = 1$.

Osoitetaan seuraavaksi vielä yksi tarvitsemamme aputulos.

Apulause 5.7. *Olkoot C' neurokoodi ja $f \in \mathcal{R}_{C'}$. Tällöin kuvauksina*

$$f = \sum_{\substack{c \in C' \\ f(c)=1}} \rho_c.$$

Todistus. Olkoon $c' \in C'$. Jos $f(c') = 1$, niin

$$\left(\sum_{\substack{c \in C' \\ f(c)=1}} \rho_c \right)(c') = \rho_{c'}(c') + \underbrace{\sum_{\substack{c \in C' \setminus \{c'\} \\ f(c)=1}} \rho_c(c')}_{=0} = 1.$$

Jos taas $f(c') = 0$, niin $c \neq c'$ kaikilla $c \in C'$, joille pätee $f(c) = 1$. Siispä

$$\left(\sum_{\substack{c \in C' \\ f(c)=1}} \rho_c \right)(c') = \sum_{\substack{c \in C' \\ f(c)=1}} \rho_c(c') = 0.$$

□

Lause 5.8 (vrt. [3, Theorem 1.1])**.** *Olkoon $\phi : \mathcal{R}_{\mathcal{D}} \to \mathcal{R}_{C}$ kuvaus. Tällöin ϕ on rengashomomorfismi, jos ja vain jos on olemassa yksikäsitteinen koodikuvaus $q \colon C \to \mathcal{D}$ siten, että $q^* = \phi$.*

Todistus (vrt. [3, s. 11]). Jos ϕ on jotain koodikuvausta vastaava taakseveto, on se lauseen 5.3 nojalla rengashomomorfismi. Riittää siis todistaa käänteinen suunta.

Olkoon ϕ rengashomomorfismi ja olkoot $f \in \mathcal{R}_{\mathcal{D}}$ ja $c \in C$. Ensin huomataan, että

$$q_\phi^*(f)(c) = f(q_\phi(c)) = f(d_c).$$

Toisaalta koska $f \in \mathcal{R}_{\mathcal{D}}$ on neurorenkaan alkio, niin apulauseen 5.7 avulla saadaan, että

$$\phi(f)(c) = \phi(\sum_{\substack{d \in \mathcal{D}, \\ f(d)=1}} \rho_d)(c) = \sum_{\substack{d \in \mathcal{D}, \\ f(d)=1}} \phi(\rho_d)(c).$$

Tässä lausekkeessa apulauseen 5.5 perusteella $\phi(\rho_d)(c) = 1$ vain kun $d = d_c$. Toisaalta $\phi(\rho_{d_c})(c)$ on yksi summattavista termeistä tismalleen silloin, kun $f(d_c) = 1$. Näiden havaintojen perusteella

$$\phi(f)(c) = \sum_{\substack{d \in \mathcal{D}, \\ f(d)=1}} \phi(\rho_d)(c) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad q_\phi^*(f)(c) = f(d_c) = 1.$$

Koska $\phi(f)(c)$, $q_\phi^*(f)(c) \in \mathbb{F}_2$, niin edellisestä seuraa, että $\phi(f)(c) = q_\phi^*(f)(c)$. Siispä $q_\phi \colon C \to \mathcal{D}$ on koodikuvaus, jolle pätee $q_\phi^* = \phi$.

Osoitetaan sitten yksikäsitteisyys. Oletetaan, että q on koodikuvaus, jolle pätee $q^* = q_\phi^* = \phi$. Olkoon $c \in C$. Tällöin käyttämällä määritelmää 5.6 saadaan, että

$$1 = \phi(\rho_{d_c})(c) = q^*(\rho_{d_c})(c) = \rho_{d_c}(q(c)).$$

Tällöin täytyy olla $q(c) = d_c = q_\phi(c)$, sillä $\rho_{d_c}(d) = 0$ aina, kun $d \neq d_c$. Koska tämä pätee kaikilla $c \in C$, niin $q = q_\phi$. □

Tästä tuloksesta nähdään, että neurorenkaiden välisten rengashomomorfismien suhteen taakseveto ei ole rajoittava ominaisuus. Mikäli neurorenkaiden välisistä kuvauksista halutaan erottaa kuvauksia jonkin erityisen ominaisuuden mukaan, täytyy rajaamista yhä tiukentaa.

Artikkelissa [3] siirrytäänkin tästä tutkimaan neurorenkaita moduleina, joiden kerroinrenkaaksi asetetaan $\mathcal{R}_{\mathbb{F}_2^n}$. Tällöin kyseisten modulien homomorfismeja neurorenkaiden välisiin rengashomomorfismeihin vertaamalla voidaan määritellä neurorengashomomorfismin käsite. Erityisesti luvun 4 iteratiivinen algoritmi neuroideaalin kanonisen muodon etsimiseksi on lähtöisin havainnoista, jotka koskevat neurorengashomomorfismien vaikutusta kanoniseen muotoon [3, s. 23].

Lähteet

[1] P. Clark, *The Combinatorial Nullstellensätze revisited*. Electronic Journal of Combinatorics. Volume 21, Issue 4 (2014).
Saatavilla http://alpha.math.uga.edu/~pete/finitesatz_final.pdf (8.11.2017).

[2] C. Curto, V. Itskov, A. Veliz-Cuba, N. Youngs. *The neural ring: an algebraic tool for analyzing the intrinsic structure of neural codes*. Bulletin of Mathematical Biology, Volume 75, Issue 9, pp. 1571-1611, 2013.

[3] C. Curto, N. Youngs, *Neural ring homomorphisms and maps between neural codes*, 2015.
Saatavilla https://arxiv.org/abs/1511.00255 (14.8.2017).

[4] C. Curto, V. Itskov, *Combinatorial neural codes*, 2016.
Saatavilla http://personal.psu.edu/cpc16/papers/NeuralCodes-final.pdf (14.8.2017).

[5] C. Curto, E. Gross, J. Jeffries, K. Morrison, M. Omar, Z. Rosen, A. Shiu, N. Youngs. *What makes a neural code convex?* SIAM J. Appl. Algebra Geometry, vol. 1, pp. 222-238, 2017.

[6] R. Jeffs, *Convexity of Neural Codes*, 2016. HMC Senior Theses. 87.
Saatavilla https://www.math.hmc.edu/~rjeffs/rjeffs-2016-thesis.pdf (14.8.2017).

[7] E. Miller, B. Sturmfels *Graduate texts in mathematics: Combinatorial commutative algebra*. Berlin: Springer, 2005.

[8] R. O'Donnell. *Analysis of Boolean Functions*. Cambridge University Press, 2014. Saatavilla http://www.cs.tau.ac.il/~amnon/Classes/2016-PRG/Analysis-Of-Boolean-Functions.pdf (24.11.2017).

[9] E. Petersen, N. Youngs, R. Kruse, D. Miyata, R. Garcia, L. D. Garcia Puente, *Neural Ideals In Sagemath*, 2016.
Saatavilla https://arxiv.org/abs/1609.09602 (14.8.2017).

[10] N. Youngs. *The Neural Ring: Using Algebraic Geometry to Analyze Neural Codes*. University of Nebraska - Lincoln, 2014.
Saatavilla http://digitalcommons.unl.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=1057&context=mathstudent (25.11.2017).