TAMPEREEN YLIOPISTO
Pro gradu -tutkielma

Heini Lehtipuu

Lokaalisuus ja määriteltävyys

Luonnontieteiden tiedekunta
Matematiikka
Toukokuu 2017

Tampereen yliopisto
Luonnontieteiden tiedekunta
LEHTIPUU, HEINI: Lokaalisuus ja määriteltävyys
Pro gradu -tutkielma, 47 s.
Matematiikka
Toukokuu 2017

Tiivistelmä

Tässä tutkielmassa esitellään lokaalisuuden käsite ja sen soveltaminen tietokantakyselyiden määriteltävyyteen. Intuitiivisesti, kysely on lokaali, jos sen tulos riippuu koko tarkasteltavan mallin tai tarkasteltavien mallien sijaan ainoastaan tietyistä jonojen ympäristöistä ja niiden isomorfisuudesta. Predikaattilogiikassa Ehrenfeucht-Fraïssé pelit ovat olleet äärellisten mallien teoriassa käytetyimpiä menetelmiä osoittaa ominaisuuksien määrittelemättömyystuloksia, mutta Ehrenfeucht-Fraïssé pelejä soveltamalla voidaan tutkia kerrallaan vain yksittäisen ominaisuuden määriteltävyyttä. Lokaalisuuden avulla voidaan yleistää predikaattilogiikan ilmaisuvoiman rajoja, kun rekursiivisten mekanismien puuttumisen takia predikaattilogiikassa voidaan ilmaista vain lokaaleja kyselyitä ja näin ollen predikaattilogiikka on lokaali. Predikattilogiikan lokaalisuuden todistaminen perustuu Ehrenfeucht-Fraïssé peleille.

Rekursiivisten mekanismien lisäksi predikaattilogiikasta puuttuu tunnetusti myös laskentaominaisuus. Tutkielmassa muodostetaan laskurikvanttorin sekä äärettömien konnektiivien avulla ääretön laskurilogiikka; predikaattilogiikan laajennos, jonka ilmaisuvoima on predikaattilogiikkaa tehokkaampi juuri laskennan osalta. Ehrenfeucht-Fraïssé peleistä johdettavien bijektiivisten pelien avulla saadaan kuitenkin todistettua myös äärettömän laskurilogiikan lokaalisuus. Näin ollen myös äärettömän laskurilogiikan kaavoilla voidaan ilmaista vain lokaaleja kyselyitä eikä äärettömän laskurilogiikan ilmaisuvoima ole predikaattilogiikan ilmaisuvoimaa tehokkaampi rekursiivisia mekanismeja vaativien kyselyiden osalta.

Sisältö

1 Johdanto

Äärellisten mallien teorian tutkimus on lisääntynyt viimeisimpien vuosikymmenten aikana erityisesti sen tietoteknisistä sovelluksista johtuen. Tietokantojen kehitys on lisännyt tarvetta tutkia erityisesti eri logiikoiden ilmaisuvoimaa, sillä perinteinen kyselykieli perustuu relaatiokalkyyliin, jolla on täsmälleen predikaattilogiikan ilmaisuvoima. Tässä työssä tarkastellaan, millaiset tietokantakyselyt ovat määriteltäviä predikaattilogiikassa.

Ehrenfeucht-Fraïssé pelit ovat tunnetusti tehokas tapa tutkia määriteltävyyttä äärellisten mallien teoriassa. Tekniikkana se on kuitenkin tietyllä tapaa melko työläs eikä toisaalta sen avulla voida erityisemmin yleistää predikaattilogiikan ilmaisuvoiman rajoja. Ehrenfeucht-Fraïssé pelien avulla voidaan kuitenkin todistaa *lokaalisuus*, joka puolestaan on hyvin suoraviivainen tapa tutkia predikaattilogiikan ilmaisuvoimaa.

Määrittelemättömyyden osoittaminen lokaalisuutta soveltaen tapahtuu seuraavasti; osoitetaan, että predikaattilogiikassa voidaan ilmaista vain lokaaleja kyselyitä ja tällöin kyselyn määrittelemättömyys osoitetaan näyttämällä, ettei kyseinen kysely ole lokaali. Lokaalisuuden nojalla predikaattilogiikassa ei voida ilmaista kyselyitä, jotka vaativat rekursiivisia mekanismeja. Lokaalisuudesta on johdettavissa myös pieniasteisilla malleilla pätevä astelukujen joukon rajoittuneisuus, joka on myös yksinkertainen tapa osoittaa kyselyn määrittelemättömyys.

Predikaattilogiikan lisäksi tarkastellaan ilmaisuvoimaltaan tehokkaampaa ääretöntä laskurilogiikkaa. Äärettömän laskurilogiikan laskuriominaisuuden takia sen ilmaisuvoima on predikaattilogiikan ilmaisuvoimaa tehokkaampi juuri laskemisen osalta. Näytetään kuitenkin, että myös äärettömän laskurilogiikan kaavoilla voidaan ilmaista vain lokaaleja kyselyitä. Ehrenfeucht-Fraïssé pelit ovat keskeisessä osassa myös äärettömän laskurilogiikan lokaalisuuden todistamisessa, sillä todistus perustuu Ehrenfeucht-Fraïssé peleistä johdetuille bijektiivisille peleille.

Luvussa 2 määritellään predikaattilogiikan syntaksi ja semantiikka sekä kerrataan isomorfisuuden käsite. Määritellään myös m-paikkaiset tietokantakyselyt sekä määritellään niiden avulla määriteltävyyden käsite. Lisäksi esitetään joitakin esimerkkejä määrittelemättömyystulosten osoittamisesta ja tarkastellaan, miltä osin kyseisten esimerkkien tekniikat eivät sovellu äärellisten mallien teoriaan.

Luvussa 3 esitellään Ehrenfeucht-Fraïssé pelit. Luvun alussa määritellään pelien esittelyyn tarvittavat osittaisisomorfismin sekä kvanttoriasteen käsitteet sekä esitellään Ehrenfeuchtin ja Fraïssén lauseen todistuksessa tarvittavat k-tyypit. Tämän jälkeen esitellään Ehrenfeucht-Fraïssé pelit sekä annetaan peleistä ja niiden voittostrategioista joitakin esimerkkejä. Kappaleen lopuksi esitellään Ehrenfeucht-Fraïssé pelien yhteys määriteltävyyteen predikaattilogiikassa ja osoitetaan joitakin määrittelemättömyystuloksia Ehrenfeucht-Fraïssé pelejä soveltaen.

Luvussa 4 käsitellään predikaattilogiikan lokaalisuutta. Alaluvussa 4.1 määritellään ympäristöt sekä d-ekvivalenssi ja osoitetaan näiden teknisiä ominaisuuksia. Alaluvussa 4.2 määritellään Gaifman-lokaalisuus sekä Hanf-lokaalisuus ja osoitetaan näillä predikaattilogiikan lokaalisuus. Alaluvussa 4.3 määritellään vielä pieniasteiset mallit ja osoitetaan, että kyselyn astelukujen joukon rajoittuneisuus on ominaisuus, jonka avulla voidaan myös todeta kyselyn määrittelemättömyys predikaattilogiikassa.

Luvussa 5 muodostetaan predikaattilogiikan laajennos, ääretön laskurilogiikka. Luvussa todetaan, että äärettömän laskurilogiikan ilmaisuvoima on predikaattilogiikan ilmaisuvoimaa tehokkaampi, mutta ainoastaan laskemisen osalta. Alaluvussa 5.2 esitetään äärettömälle laskurilogiikan lokaalisuuden todistamiseen tarvittavat bijektiiviset pelit ja alaluvussa 5.3 osoitetaan, että myös ääretön laskurilogiikka on lokaali eikä näin ollen lisää predikaattilogiikan ilmaisuvoimaa rekursiivisia mekanismeja vaativien kyselyiden osalta.

Työn päälähdeteoksena toimii Libkinin kirja *Elements of Finite Model Theory* [1]. Lisäksi luvussa 2 on ollut tärkeässä roolissa Ebbinghausin, Flumin ja Thomasin kirja *Mathematical Logic* [2]. Myös Dongin, Libkinin ja Wongin artikkeli *Local Properties of Query Languages* [4] sekä Hellan, Libkinin ja Nurmosen artikkeli *Notions of Locality and Their Logical Characterizations Over Finite Models* [5] ovat olleet tukena erityisesti luvussa 4.

2 Predikaattilogiikan esitietoja

Esitetään aluksi predikaattilogiikan syntaksi ja semantiikka. Osoitetaan myös joitakin määrittelemättömyystuloksia kompaktisuuslauseen avulla sekä tarkastellaan, miksi se ei sovellu äärellisten mallien teoriaan.

2.1 Predikaattilogiikan syntaksi ja semantiikka

Määritelmä 2.1. *Aakkosto* σ on joukko vakiosymboleita, relaatiosymboleita sekä funktiosymboleita. Vakiosymboleita merkitään tavallisesti kirjaimella c, relaatiosymboleita kirjaimella R ja funktiosymboleita kirjaimella f.

Jokaiseen relaatio- ja funktiosymboliin liitetään niiden paikkaluku $k \in \mathbb{N}$. Jos R on k-paikkainen relaatiosymboli, niin merkitään $\mathrm{ar}(R) = k$. Vastaavasti, jos f on l-paikkainen funktiosymboli, niin merkitään $\mathrm{ar}(f) = l$.

Aakkoston σ *malli*

$$\mathfrak{A} = \langle A, \{c_i^{\mathfrak{A}} \mid i \in I\}, \{R_j^{\mathfrak{A}} \mid j \in J\}, \{f_k^{\mathfrak{A}} \mid k \in K\}\rangle$$

koostuu mallin universumista A, sekä seuraavista tulkinnoista:

- Jokaiselle vakiosymbolille $c_i \in \sigma$ on sitä vastaava alkio $c_i^{\mathfrak{A}} \in A$.
- Jokaiselle k-paikkaiselle relaatiosymbolille $R_i \in \sigma$ on vastaava k-paikkainen relaatio $R_i^{\mathfrak{A}} \subseteq A^k$.
- Jokaiselle k-paikkaiselle funktiosymbolille $f_i \in \sigma$ on tulkinta $f_i^{\mathfrak{A}} : A^k \to A$.

Malli $\mathfrak{A}$ on äärellinen, jos sen universumi A on äärellinen. Käytetään kaikkien äärellisten σ-mallien joukolle merkintää $\mathrm{STR}[\sigma]$.

Aakkosto σ on *relationaalinen*, jos se sisältää vain vakio- ja relaatiosymboleita. Aakkosto on *aidosti relationaalinen*, jos se sisältää vain relaatiosymboleita.

Määritelmä 2.2. Aakkoston σ *termit* muodostetaan seuraavilla säännöillä:

- Jokainen muuttuja x on termi.
- Jokainen vakiosymboli c on termi.
- Jos $t_1, \ldots, t_k$ ovat termejä ja $f \in \sigma$ on k-paikkainen funktiosymboli, niin $f(t_1, \ldots, t_k)$ on termi.

Määritelmä 2.3. Aakkoston σ *kaavat* muodostetaan käyttäen seuraavia sääntöjä äärellisen monta kertaa:

- Jos t_1 ja t_2 ovat termejä, niin $t_1 \approx t_2$ on kaava.

- Jos $t_1, \ldots, t_k$ ovat termejä ja $R \in \sigma$ on k-paikkainen relaatiosymboli, niin $R(t_1, \ldots, t_k)$ on kaava.

- Jos φ, φ_1 ja φ_2 ovat kaavoja, niin $\neg\varphi$, $\varphi_1 \vee \varphi_2$ ja $\varphi_1 \wedge \varphi_2$ ovat kaavoja.

- Jos φ on kaava, niin $\exists x \varphi$ ja $\forall x \varphi$ ovat kaavoja.

Jos φ on predikaattilogiikan kaava, niin merkitään $\varphi \in \mathrm{FO}$. Muotoa $t_1 \approx t_2$ ja $R(t_1, \ldots, t_k)$ olevat kaavat ovat *atomikaavoja*. Kaavoja, jotka on muodostettu kaavajoukon S kaavoista käyttämällä *Boolen konnektiiveja* $\neg, \vee$ ja $\wedge$, kutsutaan joukon S *Boolen kombinaatioiksi*. Käytetään tavanomaista lyhennysmerkintää $\varphi \to \psi$ kaavalle $\neg\varphi \vee \psi$ ja merkintää $\varphi \leftrightarrow \psi$ kaavalle $(\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)$. Kaavoja, joissa ei esiinny kvanttoreita $\exists$ ja $\forall$ sanotaan *kvanttorittomiksi* kaavoiksi.

Määritelmä 2.4. Termissä t esiintyvien *muuttujien joukko* $\mathrm{var}(t)$ määritellään seuraavasti:

- $\mathrm{var}(x) = \{x\}$

- $\mathrm{var}(c) = \emptyset$

- $\mathrm{var}(f(t_1, \ldots, t_k)) = \mathrm{var}(t_1) \cup \cdots \cup \mathrm{var}(t_k)$

Määritelmä 2.5. Kaavassa φ esiintyvien *vapaiden muuttujien joukko* $\mathrm{free}(\varphi)$ määritellään seuraavasti:

- $\mathrm{free}(t_1 \approx t_2) = \mathrm{var}(t_1) \cup \mathrm{var}(t_2)$

- $\mathrm{free}(R(t_1, \ldots, t_k)) = \mathrm{var}(t_1) \cup \cdots \cup \mathrm{var}(t_k)$

- $\mathrm{free}(\neg\varphi) = \mathrm{free}(\varphi)$

- $\mathrm{free}(\varphi_1 \vee \varphi_2) = \mathrm{free}(\varphi_1 \wedge \varphi_2) = \mathrm{free}(\varphi_1) \cup \mathrm{free}(\varphi_2)$

- $\mathrm{free}(\exists x \varphi) = \mathrm{free}(\forall x \varphi) = \mathrm{free}(\varphi) \setminus \{x\}$.

Jos muuttujan esiintymä kaavassa ei ole vapaa, niin se on *sidottu*. Kaavaa, jonka kaikki muuttujien esiintymät ovat sidottuja, sanotaan *lauseeksi*. Jatkossa lauseita merkitään isoin kreikkalaisin kirjaimin. Kaavasta φ voidaan käyttää myös merkintää $\varphi(\vec{x})$, kun $\vec{x} = (x_1, \ldots x_n)$ ja $\mathrm{free}(\varphi) \subseteq \{x_1, \ldots x_n\}$.

Määritelmä 2.6. Olkoot $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ ja $\vec{a} \in A^n$ ja oletetaan, että $\mathrm{var}(t) \subseteq \{x_1, \ldots, x_n\}$. *Termin t arvo mallissa $\mathfrak{A}$ tulkinnalla $\vec{a}$*, $t^{\mathfrak{A}}[\vec{a}/\vec{x}]$, määritellään seuraavasti:

- Jos t on vakiosyboli c, niin $t^{\mathfrak{A}}[\vec{a}/\vec{x}] = c^{\mathfrak{A}}$.

- Jos t on muuttuja x_i, niin $t^{\mathfrak{A}}[\vec{a}/\vec{x}] = a_i$.

- Jos t on muotoa $f(t_1, \ldots, t_k)$, niin $t^{\mathfrak{A}}[\vec{a}/\vec{x}] = f^{\mathfrak{A}}(t_1^{\mathfrak{A}}[\vec{a}/\vec{x}], \ldots, t_k^{\mathfrak{A}}[\vec{a}/\vec{x}])$.

Määritelmä 2.7 (Tarskin totuusmääritelmä)**.** Olkoot $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$ ja $\vec{a} \in A^n$ ja oletetaan, että $\mathrm{free}(\varphi)$, $\mathrm{free}(\varphi_1), \mathrm{free}(\varphi_2) \subseteq \{x_1, \dots, x_n\}$. Merkitään $\mathfrak{A} \models \varphi[\vec{a}/\vec{x}]$, kun kaava φ on tosi mallissa $\mathfrak{A}$ tulkinnalla $\vec{a}$. Totuusrelaatio $\models$ määritellään seuraavasti:

- $\mathfrak{A} \models (t_1 \approx t_2)[\vec{a}/\vec{x}]$ jos ja vain jos $t_1^{\mathfrak{A}}[\vec{a}/\vec{x}] = t_2^{\mathfrak{A}}[\vec{a}/\vec{x}]$.
- $\mathfrak{A} \models R(t_1, \dots, t_k)[\vec{a}/\vec{x}]$ jos ja vain jos $(t_1^{\mathfrak{A}}[\vec{a}/\vec{x}], \dots, t_k^{\mathfrak{A}}[\vec{a}/\vec{x}]) \in R^{\mathfrak{A}}$.
- $\mathfrak{A} \models \neg\varphi[\vec{a}/\vec{x}]$ jos ja vain jos $\mathfrak{A} \models \varphi[\vec{a}/\vec{x}]$ ei ole tosi.
- $\mathfrak{A} \models (\varphi_1 \vee \varphi_2)[\vec{a}/\vec{x}]$ jos ja vain jos $\mathfrak{A} \models \varphi_1[\vec{a}/\vec{x}]$ tai $\mathfrak{A} \models \varphi_2[\vec{a}/\vec{x}]$.
- $\mathfrak{A} \models (\varphi_1 \wedge \varphi_2)[\vec{a}/\vec{x}]$ jos ja vain jos $\mathfrak{A} \models \varphi_1[\vec{a}/\vec{x}]$ ja $\mathfrak{A} \models \varphi_2[\vec{a}/\vec{x}]$.
- Jos $\psi(\vec{x}) = \exists y \varphi(y, \vec{x})$, niin $\mathfrak{A} \models \psi[\vec{a}/\vec{x}]$ jos ja vain jos $\mathfrak{A} \models \varphi[a'/y, \vec{a}/\vec{x}]$ jollakin $a' \in A$.
- Jos $\psi(\vec{x}) = \forall y \varphi(y, \vec{x})$, niin $\mathfrak{A} \models \psi[\vec{a}/\vec{x}]$ jos ja vain jos $\mathfrak{A} \models \varphi[a'/y, \vec{a}/\vec{x}]$ kaikilla $a' \in A$.

Lauseen tapauksessa $\mathrm{free}(\Phi) = \emptyset$, joten tällöin voidaan merkitän vain $\mathfrak{A} \models \Phi$, kun lause Φ on tosi mallissa $\mathfrak{A}$.

Kaava $\varphi(\vec{x})$ on *toteutuva*, jos on olemassa sellainen malli $\mathfrak{A}$ ja jono $\vec{a} \in A^n$, että $\mathfrak{A} \models \varphi[\vec{a}/\vec{x}]$. Kaava $\varphi(\vec{x})$ on *validi*, jos jokaisen mallin $\mathfrak{A}$ jokaisella jonolla $\vec{a} \in A^n$ pätee $\mathfrak{A} \models \varphi[\vec{a}/\vec{x}]$. Jos $\mathfrak{A} \models \varphi(\vec{x})$ jokaisella $\varphi(\vec{x}) \in T$, niin merkitään $\mathfrak{A} \models T$.

Lause Φ on toteutuva, jos on olemassa malli $\mathfrak{A}$, jolla $\mathfrak{A} \models \Phi$ ja validi, jos $\mathfrak{A} \models \Phi$ jokaisessa mallissa $\mathfrak{A}$. Lausejoukko T on toteutuva, jos on olemassa malli $\mathfrak{A}$, jolla $\mathfrak{A} \models \Phi$ jokaisella $\Phi \in T$.

Määritelmä 2.8. Kaava $\varphi(\vec{x})$ on kaavajoukon T *looginen seuraus*, jos kaikilla malleilla $\mathfrak{A}$, joilla $\mathfrak{A} \models T$, pätee myös $\mathfrak{A} \models \varphi[\vec{a}/\vec{x}]$. Tällöin merkitään $T \models \varphi(\vec{x})$. Jos $T = \{\psi(\vec{y})\}$, niin merkitään lyhyesti $\psi(\vec{y}) \models \varphi(\vec{x})$. Jos $\psi(\vec{y}) \models \varphi(\vec{x})$ ja $\varphi(\vec{x}) \models \psi(\vec{y})$, niin kaavat $\varphi(\vec{x})$ ja $\psi(\vec{y})$ ovat *loogisesti ekvivalentit* ja merkitään $\psi(\vec{y}) \Leftrightarrow \varphi(\vec{x})$.

Jatkossa oletetaan, että aakkostot σ ovat relationaalisia. Lisäksi tarkasteltaessa äärellisiä malleja oletetaan, että aakkostot σ ovat äärellisiä.

Määritelmä 2.9. Olkoon $\mathfrak{A} \in \mathrm{STR}[\sigma]$ ja $A_0 \subseteq A$. Joukon A_0 *virittämä alimalli* on σ-malli $\mathfrak{B}$, missä:

- mallin $\mathfrak{B}$ universumi $B = A_0 \cup \{c^{\mathfrak{A}} \mid c$ on vakiosymboli aakkostossa $\sigma\}$,
- jokaisella vakiosymbolilla $c \in \sigma$ pätee $c^{\mathfrak{B}} = c^{\mathfrak{A}}$,
- jokaisella k-paikkaisella $R \in \sigma$ pätee $R^{\mathfrak{B}} = R^{\mathfrak{A}} \cap B^k$.

Määritelmä 2.10. Olkoot σ ja σ' erilliset aakkostot, $\mathfrak{A}$ σ-malli ja $\mathfrak{A}'$ σ'-malli, joiden molempien universumi on A. Tällöin $(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}')$ on $\sigma \cup \sigma'$-malli, jonka universumi on A, ja missä

$$c^{(\mathfrak{A},\mathfrak{A}')} = \begin{cases} c^{\mathfrak{A}}, & \text{jos } c \in \sigma \\ c^{\mathfrak{A}'}, & \text{jos } c \in \sigma' \end{cases}$$

$$R^{(\mathfrak{A},\mathfrak{A}')} = \begin{cases} R^{\mathfrak{A}}, & \text{jos } R \in \sigma \\ R^{\mathfrak{A}'}, & \text{jos } R \in \sigma' \end{cases}$$

Kun σ' on aakkosto, joka sisältää vain vakiosymboleita, saadaan muodostettua vastaavuus aakkoston σ kaavojen ja aakkoston σ' lauseiden välille. Jatkossa merkintä σ_n tarkoittaa aakkoston σ sellaista laajennosta, johon on lisätty vakiosymbolit $c_1, \ldots, c_n$. Tällöin mallia $(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}')$ merkitään $(\mathfrak{A}, a_1, \ldots, a_n)$, missä a_i on aakkostoon lisätyn vakiosymbolin $c_i \in \sigma_n$ tulkinta jokaisella $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Olkoon $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ ja $\mathrm{var}(t) \subseteq \{x_1, \ldots, x_n\}$. Tällöin merkitään lisäksi $t(\vec{c}/\vec{x})^{\mathfrak{A}}$, kun termissä t sijoitetaan vakiosymbolit c_i muuttujien x_i esiintymien paikalle kaikilla $i \in \{1, \ldots, n\}$. Käytetään kaavoille vastaavaa merkintää $\varphi(\vec{c}/\vec{x})$, kun kaavassa $\varphi(\vec{x})$ sijoitetaan vakiosymbolit c_i muuttujien x_i esiintymien paikalle kaikilla $i \in \{1, \ldots, n\}$. Tulkinta $[\vec{a}/\vec{x}]$ voidaan kummassakin tapauksessa jättää merkitsemättä, kun termissä tai kaavassa ei ole enää muuttujia.

Apulause 2.1. *Olkoot $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, $\mathfrak{A}$ σ-malli ja $\vec{a} \in A^n$.*

a) Oletetaan, että $\mathrm{var}(t) \subseteq \{x_1, \ldots, x_n\}$ ja laajennetaan aakkosto σ aakkostoksi σ_n. Tällöin jokaisella termillä $t \in \sigma$ pätee

$$t^{\mathfrak{A}}[\vec{a}/\vec{x}] = t(\vec{c}/\vec{x})^{(\mathfrak{A},\vec{a})}.$$

b) Olkoon $\varphi(\vec{x}) \in \mathrm{FO}$ ja laajennetaan aakkosto σ aakkostoksi σ_n. Tällöin

$$\mathfrak{A} \models \varphi[\vec{a}/\vec{x}] \text{ jos ja vain jos } (\mathfrak{A}, a_1, \ldots, a_n) \models \varphi(\vec{c}/\vec{x}).$$

Todistus. Todistetaan väite induktiolla termin t ja kaavan $\varphi(\vec{x})$ suhteen.

a) – Olkoon $t = x_i$ jollakin $i \in \{1, \ldots, n\}$. Nyt

$$t^{\mathfrak{A}}[\vec{a}/\vec{x}] = a_i = t(\vec{c}/\vec{x})^{(\mathfrak{A},\vec{a})}.$$

– Olkoon $t = d$, missä $d \in \sigma$. Nyt

$$t^{\mathfrak{A}}[\vec{a}/\vec{x}] = d^{\mathfrak{A}} = t(\vec{c}/\vec{x})^{(\mathfrak{A},\vec{a})}.$$

b) Käsitellään vain osa tapauksista, muut tapaukset todistetaan vastaavasti.

- Olkoon $\varphi(\vec{x}) = R(t_1, \ldots, t_m)$. Nyt

$$\begin{aligned}
\mathfrak{A} \models \varphi[\vec{a}/\vec{x}] &\Leftrightarrow \mathfrak{A} \models R(t_1, \ldots, t_m)[\vec{a}/\vec{x}] \\
&\Leftrightarrow (t_1^{\mathfrak{A}}[\vec{a}/\vec{x}], \ldots, t_m^{\mathfrak{A}}[\vec{a}/\vec{x}]) \in R^{\mathfrak{A}} \\
&\Leftrightarrow (t_1^{\mathfrak{A}}[\vec{a}/\vec{x}], \ldots, t_m^{\mathfrak{A}}[\vec{a}/\vec{x}]) \in R^{(\mathfrak{A}, a_1, \ldots, a_n)} \\
&\Leftrightarrow (t_1(\vec{c}/\vec{x})^{(\mathfrak{A}, \vec{a})}, \ldots, t_m(\vec{c}/\vec{x})^{(\mathfrak{A}, \vec{a})}) \in R^{(\mathfrak{A}, a_1, \ldots, a_n)} \\
&\Leftrightarrow (\mathfrak{A}, a_1, \ldots, a_n) \models R(t_1(\vec{c}/\vec{x}), \ldots, t_m(\vec{c}/\vec{x})) \\
&\Leftrightarrow (\mathfrak{A}, a_1, \ldots, a_n) \models \varphi(\vec{c}/\vec{x}).
\end{aligned}$$

- Olkoon $\varphi(\vec{x}) = (\varphi_1 \vee \varphi_2)$. Oletetaan, että väite pätee kaavoille φ_1 ja φ_2. Nyt

$$\begin{aligned}
\mathfrak{A} \models \varphi[\vec{a}/\vec{x}] &\Leftrightarrow \mathfrak{A} \models (\varphi_1 \vee \varphi_2)[\vec{a}/\vec{x}] \\
&\Leftrightarrow \mathfrak{A} \models \varphi_1[\vec{a}/\vec{x}] \text{ tai } \mathfrak{A} \models \varphi_2[\vec{a}/\vec{x}] \\
&\Leftrightarrow (\mathfrak{A}, a_1, \ldots, a_n) \models \varphi_1(\vec{c}/\vec{x}) \text{ tai } (\mathfrak{A}, a_1, \ldots, a_n) \models \varphi_2(\vec{c}/\vec{x}) \\
&\Leftrightarrow (\mathfrak{A}, a_1, \ldots, a_n) \models (\varphi_1 \vee \varphi_2)(\vec{c}/\vec{x}) \\
&\Leftrightarrow (\mathfrak{A}, a_1, \ldots, a_n) \models \varphi(\vec{c}/\vec{x})
\end{aligned}$$

- Olkoon $\varphi(\vec{x}) = \exists y \psi(y, \vec{x})$. Oletetaan, että väite pätee kaavalle $\psi(y, \vec{x})$. Nyt

$$\begin{aligned}
\mathfrak{A} \models \varphi[\vec{a}/\vec{x}] &\Leftrightarrow \mathfrak{A} \models \psi[a'/y, \vec{a}/\vec{x}] \text{ jollakin } a' \in A \\
&\Leftrightarrow (\mathfrak{A}, a', a_1, \ldots, a_n) \models \psi(c'/y, \vec{c}/\vec{x}) \\
&\Leftrightarrow (\mathfrak{A}, a_1, \ldots, a_n) \models \psi(\vec{c}/\vec{x})[a'/y] \text{ jollakin } a' \in A \\
&\Leftrightarrow (\mathfrak{A}, a_1, \ldots, a_n) \models \exists y \psi(\vec{c}/\vec{x}) \\
&\Leftrightarrow (\mathfrak{A}, a_1, \ldots, a_n) \models \varphi(\vec{c}/\vec{x})
\end{aligned}$$

  Huomaa, että yllä käytetään induktio-oletusta kahdesti; ensin laajennetaan aakkosto σ aakkostoksi σ_{n+1} ja vasta sen jälkeen siirrytään tarkastelemaan aakkostoa σ_n sekä mallia $(\mathfrak{A}, a_1, \ldots, a_n)$.

$\square$

Edellisen tuloksen nojalla useissa todistuksissa riittää tarkastella vain merkintöjen puolesta helpommin käsiteltävien lauseiden $\Phi = \varphi(\vec{c}/\vec{x}) \in \mathrm{FO}$ tapaukset ja tulokset voidaan yleistää myös kaavoille $\varphi(\vec{x}) \in \mathrm{FO}$.

Määritelmä 2.11. Olkoot A ja B joukkoja, joilla $R \subseteq A^m$ ja $R' \subseteq B^m$ ja olkoon $h : A \to B$ kuvaus. Tällöin merkitään $h(R) = R'$, jos kaikilla $(a_1, \ldots, a_m) \in A^m$ pätee:

$$(a_1, \ldots, a_m) \in R \text{ jos ja vain jos } (h(a_1), \ldots, h(a_m)) \in R'.$$

Määritelmä 2.12. Olkoot $\mathfrak{A}$ ja $\mathfrak{B}$ σ-malleja. Niiden välinen kuvaus $h : A \to B$ on *homomorfismi*, jos $h(c^{\mathfrak{A}}) = c^{\mathfrak{B}}$ jokaisella vakiosymbolilla $c \in \sigma$ ja $h(R^{\mathfrak{A}}) = R^{\mathfrak{B}}$ jokaisella relaatiosymbolilla $R \in \sigma$.

Isomorfismi on bijektiivinen homomorfismi, jonka käänteiskuvaus on myös homomorfismi. Mallit $\mathfrak{A}$ ja $\mathfrak{B}$ ovat *isomorfiset*, jos niiden välillä on isomorfismi. Tällöin merkitään $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$. Lisäksi, jos $h : A \to B$ on mallien $\mathfrak{A}$ ja $\mathfrak{B}$ välinen ismorfismi, niin käytetään merkintää $h : \mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$.

Lause 2.1 (Isomorfialause)**.** *Olkoot $\mathfrak{A}$ ja $\mathfrak{B}$ isomorfiset σ-mallit ja olkoon $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_m)$. Olkoon $h : \mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$, $\vec{a} \in A^m$ ja $h(\vec{a}) = \vec{b}$. Tällöin jokaisella kaavalla $\varphi(\vec{x}) \in \mathrm{FO}$ pätee:*

$$\mathfrak{A} \models \varphi[\vec{a}/\vec{x}] \text{ jos ja vain jos } \mathfrak{B} \models \varphi[\vec{b}/\vec{x}].$$

Todistus. Ks. [2, s. 38-39]. □

2.2 Määriteltävyys

Määritellään ensin kyselyt Q, joiden avulla tutkitaan ominaisuuksien määriteltävyyttä. Kyselyitä käytetään myöhemmin myös predikaattilogiikan laajennosten yhteydessä, joten määritellään kyselyt yleisemmin kaikille logiikoille $\mathcal{L}$.

Määritelmä 2.13. Olkoon $m \geq 0$. Tällöin aakkoston σ m-paikkainen *kysely* on kuvaus

$$Q : \mathrm{STR}[\sigma] \to \{R \mid R \text{ on } m\text{-paikkainen relaatio}\},$$

jolla $Q(\mathfrak{A}) \subseteq A^m$ jokaisella mallilla $\mathfrak{A}$ ja joka on suljettu isomorfismin suhteen; jos $h : \mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$, niin $h(Q(\mathfrak{A})) = Q(\mathfrak{B})$.

Kysely Q on *määriteltävä* logiikassa $\mathcal{L}$, jos on olemassa sellainen aakkoston σ kaava $\varphi(\vec{x}) \in \mathcal{L}$, että jokaisella mallilla $\mathfrak{A}$ pätee:

$$Q(\mathfrak{A}) = \{\vec{a} \in A^m \mid \mathfrak{A} \models \varphi[\vec{a}/\vec{x}]\}$$

Jos φ on tällainen kaava, niin kysely Q voidaan *ilmaista* kaavalla φ.

Tarkastellaan vielä tapausta $m = 0$. Joukon A^0 ainoa alkio on tyhjä jono ϵ, joten joukon A^0 ainoat osajoukot ovat $\emptyset$ ja $\{\epsilon\}$. Näin ollen kyselyllä Q on vain kaksi mahdollista arvoa, joiden voidaan ajatella olevan $\top$ = *tosi* ja $\bot$ = *epätosi*. Tällaisia kyselyitä kutsutaan *Boolen kyselyiksi* ja niihin voidaan liittää isomorfismin suhteen suljettu osajoukko $C \subseteq \mathrm{STR}[\sigma]$:

$$\mathfrak{A} \in C \text{ jos ja vain jos } Q(\mathfrak{A}) = \top.$$

0-paikkainen kysely Q on määriteltävä logiikassa $\mathcal{L}$, jos on olemassa sellainen lause $\Phi \in \mathcal{L}$, että $Q(\mathfrak{A}) = \top$ jos ja vain jos $\mathfrak{A} \models \Phi$. Tällöin lauseella Φ voidaan *ilmaista* kysely Q.

Yleisemmin ominaisuus $\mathcal{P}$ on *määriteltävä* logiikassa $\mathcal{L}$, jos on olemassa logiikan $\mathcal{L}$ kaava φ, jolla ominaisuus $\mathcal{P}$ voidaan *ilmaista*.

Esimerkki 2.1. Vrt. [3, s.7]. Annetaan esimerkkinä 2-paikkaisesta kyselystä *graafin transitiivisen sulkeuman kysely* Q_{tc}. Olkoon $\mathfrak{G}$ graafi, jonka solmujen joukko on G. Tällöin, jos $\mathfrak{G}$ on suunnattu graafi, niin

$$Q_{tc}(\mathfrak{G}) = \{(e_1, e_2) \in G^2 \mid \text{graafissa } \mathfrak{G} \text{ on polku solmusta } e_1 \text{ solmuun } e_2\}$$

ja, jos $\mathfrak{G}$ on suuntaamaton graafi, niin

$$Q_{tc}(\mathfrak{G}) = \{(e_1, e_2) \in G^2 \mid \text{graafissa } \mathfrak{G} \text{ on polku solmujen } e_1 \text{ ja } e_2 \text{ välillä}\}.$$

$Q_{tc}(\mathfrak{G})$ on siis pienin transitiivinen graafi, joka sisältää graafin $\mathfrak{G}$.

Sekventtikalkyyli [2, s. 57-69] on muodollinen tapa johtaa kaavoja kaavajoukoista. Jos kaava φ voidaan johtaa kaavajoukosta T, niin merkitään $T \vdash \varphi$. *Korrektisuuslauseen* [2, s. 70] nojalla jokaisella kaavajoukolla T ja kaavalla φ pätee: jos $T \vdash \varphi$, niin $T \models \varphi$. *Henkin-konstruktion* [2, s. 76-80] avulla puolestaan saadaan osoitettua *täydellisyyslause* [2, s. 87]: jos $T \models \varphi$, niin $T \vdash \varphi$. Näiden seurauksena saadaan adekvaattisuuslause:

Lause 2.2 (Adekvaattisuuslause)**.** *Jokaisella kaavajoukolla T ja kaavalla φ pätee*

$$T \models \varphi \textit{ jos ja vain jos } T \vdash \varphi.$$

Määritelmä 2.14. Lausejoukko T on *ristiriidaton*, jos ei ole olemassa sellaista lausetta Φ, että $T \vdash \Phi$ ja $T \vdash \neg\Phi$. Adekvaattisuuslauseen nojalla siis yhtäpitävästi lausejoukko T on ristiriidaton, jos ei ole olemassa lausetta Φ, jolla $T \models \Phi$ ja $T \models \neg\Phi$.

Lause 2.3. *Lausejoukko T on ristiriidaton jos ja vain jos sen jokainen äärellinen osajoukko on ristiriidaton.*

Todistus. Toistetaan lause näyttämällä, että lausejoukko T on ristiriitainen jos ja vain jos jokin sen äärellinen osajoukko on ristiriitainen. Jos lausejoukko T on ristiriitainen, niin on olemassa lause Φ, jolla $T \models \Phi$ ja $T \models \neg\Phi$, joten myös $T \vdash \Phi$ ja $T \vdash \neg\Phi$. Sekventtien äärellisyyden nojalla tällöin on olemassa äärelliset $T_1, T_2 \subseteq T$, joilla $T_1 \vdash \Phi$ ja $T_2 \vdash \neg\Phi$ eli $T_1 \models \Phi$ ja $T_2 \models \neg\Phi$. Siis on olemassa äärellinen $T_0 = T_1 \cup T_2$, jolla $T_0 \models \Phi$ ja $T_0 \models \neg\Phi$. Jos taas jokin äärellinen $T' \subseteq T$ on ristiriitainen, niin on olemassa lause Φ, jolla $T' \models \Phi$ ja $T' \models \neg\Phi$, jolloin myös $T \models \Phi$ ja $T \models \neg\Phi$. □

Lause 2.4. *Lausejoukko T on toteutuva jos ja vain jos se on ristiriidaton.*

Todistus. Oletetaan ensin, että lausejoukko T on toteutuva ja oletetaan, että T ei ole ristiriidaton. Siis on olemassa lause Φ, jolla $T \vdash \Phi$ ja $T \vdash \neg\Phi$ eli yhtäpitävästi $T \models \Phi$ ja $T \models \neg\Phi$. Koska T on toteutuva, niin on olemassa malli $\mathfrak{A}$, jolla $\mathfrak{A} \models T$. Tällöin $\mathfrak{A} \models \Phi$ ja $\mathfrak{A} \models \neg\Phi$, mikä on ristiriita. Siis lausejoukko T on ristiriidaton.

Oletetaan sitten, että T on ristiriidaton ja oletetaan, että T ei ole toteutuva. Koska T ei ole toteutuva, niin missään mallissa $\mathfrak{A}$ ei päde $\mathfrak{A} \models T$. Näin ollen jokaisessa mallissa $\mathfrak{A}$ ja jokaisella lauseella Ψ pätee:

$$\begin{cases} \text{Jos } \mathfrak{A} \models T, \text{ niin } \mathfrak{A} \models \Psi \\ \text{Jos } \mathfrak{A} \models T, \text{ niin } \mathfrak{A} \models \neg\Psi. \end{cases}$$

Siis kaikilla lauseilla Ψ pätee $T \models \Psi$ ja $T \models \neg\Psi$, joten lausejoukko T on ristiriitainen. □

Kahdesta edellä esitetystä lauseesta seuraa suoraan Kompaktisuuslause, joka on tyypillinen tapa tutkia määriteltävyyttä predikaattilogiikassa.

Seuraus 2.1 (Kompaktisuuslause)**.** *Lausejoukko T on toteutuva jos ja vain jos sen jokainen äärellinen osajoukko on toteutuva.*

Lause 2.5 (Löwenheim-Skolem)**.** *Jos numeroituva lausejoukko T on toteutuva jossakin äärettömässä mallissa, niin se on toteutuva myös jossakin numeroituvassa mallissa.*

Todistus. Ks. [2, s. 88-89]. □

Määritelmä 2.15. Lausejoukko T on *teoria*, jos se on suljettu loogisen seurauksen suhteen. Toisin sanoen, lausejoukko T on teoria, jos jokaisella lauseella Φ pätee:

$$\text{Jos } T \models \Phi, \text{niin } \Phi \in T.$$

Esitetään vielä esimerkkien avulla, miten Kompaktisuuslausetta sovelletaan määriteltävyyden tutkimiseen ja miltä osin sen soveltaminen ei onnistu äärellisten mallien teoriassa.

Esimerkki 2.2. Graafin yhtenäisyys ei ole määriteltävä predikaattilogiikassa.

Todistus. Oletetaan, että graafin yhtenäisyys voidaan ilmaista aakkoston $\sigma = \{E\}$ lauseella Φ. Laajennetaan aakkosto σ aakkostoksi $\sigma_2 = \{E, c_1, c_2\}$. Olkoon

$$\Psi_n = \neg\exists x_1 \dots \exists x_n (E(c_1, x_1) \wedge E(x_1, x_2) \wedge \cdots \wedge E(x_{n-1}, x_n) \wedge E(x_n, c_2)).$$

Siis Ψ_n on lause, jonka mukaan solmusta c_1 solmuun c_2 ei ole polkua, joka on pituudeltaan $n + 1$. Olkoon T teoria

$$\{\Psi_n \mid n > 0\} \cup \{\neg(c_1 \approx c_2), \neg E(c_1, c_2)\} \cup \{\Phi\}.$$

Jokaiselle äärelliselle $T' \subseteq T$ löytyy sellainen $N \in \mathbb{N}$, että $\Psi_n \notin T'$, kun $n > N$. Nyt yhtenäinen graafi, jonka lyhyin polku solmusta c_1 somuun c_2 on pituudeltaan $N + 1$, toteuttaa lausejoukon T', joten T' on toteutuva.

Tällöin kompaktisuuslauseen nojalla teoria T on toteutuva, joten on olemassa graafi $\mathfrak{G}$, jolla $\mathfrak{G} \models T$, joten $\mathfrak{G}$ on yhtenäinen graafi. Kuitenkaan millään luvulla n ei ole solmusta $c_1^{\mathfrak{G}}$ solmuun $c_2^{\mathfrak{G}}$ polkua, joka on pituudeltaan n. Tästä ristiriidasta seuraa, että graafin yhtenäisyyttä ei voida määritellä predikaattilogiikassa. □

Edellisen esimerkin nojalla mielivaltaisen graafin yhtenäisyys ei ole määriteltävä predikaattilogiikassa, mutta tästä ei kuitenkaan voida päätellä, onko äärellisen graafin yhtenäisyys määriteltävä predikaattilogiikassa. Seuraavan tuloksen nojalla kompaktisuuslause ei aina sovellu äärellisten mallien tarkasteluun.

Lause 2.6. *On olemassa sellainen teoria T, että se ei ole toteutuva missään äärellisessä mallissa, mutta jokainen sen äärellinen osajoukko on toteutuva jossakin äärellisessä mallissa.*

Todistus. Olkoon $\sigma = \emptyset$ ja

$$\lambda_n = \exists x_1 \ldots \exists x_n \bigwedge_{i \neq j} \neg(x_i \approx x_j).$$

Siis lause λ_n ilmaisee, että mallin universumissa on vähintään n eri alkiota. Olkoon $T = \{\lambda_n \mid n \geq 0\}$. Selvästi teoria T ei ole toteutuva missään äärellisessä mallissa, mutta jokainen äärellinen osajoukko $\{\lambda_{n_1}, \ldots, \lambda_{n_k}\} \subseteq T$ on toteutuva, kun malliksi valitaan joukko, jonka mahtavuus on suurempi kuin jokainen n_i, missä $i \leq k$. □

Vaikka kompaktisuuslauseen käyttö ei aina sovellu äärellisten mallien teoriaan, voi se kuitenkin joskus soveltua myös siihen. Esimerkiksi parillisuus on ominaisuus, jonka tarkastelu on mielekästä vain äärellisissä malleissa ja tietyissä tapauksissa sen määrittelemättömyys predikaattilogiikassa voidaan todistaa myös kompaktisuuslauseen avulla.

Esimerkki 2.3. Määritellään mallin $\mathfrak{A}$ universumin A parillisuutta testaava kysely

$$Q_{\text{EVEN}}(\mathfrak{A}) = \top \text{ jos ja vain jos } |A| \equiv 0 \pmod 2.$$

Olkoon $\sigma = \emptyset$. Tällöin kyselyä Q_{EVEN} ei voida ilmaista predikaattilogiikan lauseella.

Todistus. Oletetaan, että universumin parillisuus voidaan ilmaista lauseella Φ. Tarkastellaan edellisen lauseen todistuksen lauseita λ_n sekä teorioita

$$T_1 = \{\Phi\} \cup \{\lambda_k \mid k > 0\} \text{ ja } T_2 = \{\neg\Phi\} \cup \{\lambda_k \mid k > 0\}.$$

Selvästi kumpikin teoria on toteutuva, sillä niiden äärelliset osajoukot ovat toteutuvia. Teoriat T_1 ja T_2 ovat toteutuvia ainoastaan äärettömissä malleissa. Tällöin Löwenheim-Skolem lauseen nojalla on olemassa sellaiset numeroituvasti äärettömät mallit $\mathfrak{A}_1$ ja $\mathfrak{A}_2$, että $\mathfrak{A}_1 \models T_1$ ja $\mathfrak{A}_2 \models T_2$. Koska aakkosto $\sigma = \emptyset$, niin nämä mallit ovat vain numeroituvia joukkoja ja täten isomorfisia. Kuitenkin $\mathfrak{A}_1 \models \Phi$ ja $\mathfrak{A}_2 \models \neg\Phi$. Väite seuraa tästä ristiriidasta. □

Edellisessä esimerkissä oletettiin, että $\sigma = \emptyset$. Todistuksessa voisi kuitenkin tulla ongelmia, jos aakkosto sisältäisi relaatiosymboleita. Esimerkiksi, jos $\sigma = \{<\}$, niin kyselyn Q_{EVEN} määrittelemättömyyttä ei voitaisi todistaa kuten edellä, sillä kaksi mielivaltaista numeroituvaa lineaarijärjestystä eivät välttämättä ole isomorfiset.

Seuraavan tuloksen nojalla esimerkin 2.3 todistustekniikkaa ei myöskään voida yleistää sellaisenaan äärelliselle malleille.

Lause 2.7. *Jokaisella äärellisellä σ-mallilla $\mathfrak{A}$ on sellainen lause $\Phi_{\mathfrak{A}} \in$ FO, että kaikilla σ-malleilla $\mathfrak{B}$ pätee:*

$$\mathfrak{B} \models \Phi_{\mathfrak{A}} \text{ jos ja vain jos } \mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}.$$

Todistus. Todistetaan tapaus, jossa $\sigma = \{E\}$ ja mallin $\mathfrak{A}$ universumi $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$. Olkoon

$$\Phi_{\mathfrak{A}} = \exists x_1 \ldots \exists x_n (\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \varphi_3 \wedge \varphi_4),$$

missä

- $\varphi_1 = \bigwedge_{i \neq j} \neg(x_i \approx x_j)$
- $\varphi_2 = \forall y \bigvee_i y \approx x_i$
- $\varphi_3 = \bigwedge_{(a_i, a_j) \in E^{\mathfrak{A}}} E(x_i, x_j)$
- $\varphi_4 = \bigwedge_{(a_i, a_j) \notin E^{\mathfrak{A}}} \neg E(x_i, x_j)$

Nyt, jos $\mathfrak{B} \models \Phi_{\mathfrak{A}}$, niin $\mathfrak{B} \models \exists x_1 \ldots \exists x_n(\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \varphi_3 \wedge \varphi_4)$. Olkoon $\vec{b} \in B^n$ jono, jolla $\mathfrak{B} \models (\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \varphi_3 \wedge \varphi_4)[\vec{b}/\vec{x}]$.

Koska $\mathfrak{B} \models \varphi_1[\vec{b}/\vec{x}]$, niin $b_i \neq b_j$ jokaisella $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. Toisaalta taas $\mathfrak{B} \models \varphi_2[\vec{b}/\vec{x}]$, joten jokaisella $b \in B$ pätee $b = b_i$ jollakin $i \in \{1, \ldots, n\}$. Siis $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$.

$\mathfrak{B} \models \varphi_3[\vec{b}/\vec{x}]$, joten $(b_i, b_j) \in E^{\mathfrak{B}}$ jokaisella $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, jolla $(a_i, a_j) \in E^{\mathfrak{A}}$. Koska $\mathfrak{B} \models \varphi_4[\vec{b}/\vec{x}]$, niin $(b_i, b_j) \notin E^{\mathfrak{B}}$ jokaisella $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, jolla $(a_i, a_j) \notin E^{\mathfrak{A}}$. Täten $(b_i, b_j) \in E^{\mathfrak{B}}$ jos ja vain jos $(a_i, a_j) \in E^{\mathfrak{A}}$.

Olkoon $h : A \to B$ kuvaus, jolla $h(a_i) = b_i$ kaikilla $i \in \{1, \ldots, n\}$. Selvästi h on bijektio ja koska $h(E^{\mathfrak{A}}) = E^{\mathfrak{B}}$, niin h sekä sen käänteiskuvaus $h^{-1} : B \to A$ ovat homomorfismeja ja näin ollen kuvaus h on isomorfismi. Siis $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$.

Jos taas $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$, niin isomorfialauseen 2.1 nojalla $\mathfrak{B} \models \Phi_{\mathfrak{A}}$, sillä selvästi $\mathfrak{A} \models \Phi_{\mathfrak{A}}$. Täten

$$\mathfrak{B} \models \Phi_{\mathfrak{A}} \text{ jos ja vain jos } \mathfrak{B} \cong \mathfrak{A}.$$

Yleinen tapaus todistetaan vastaavasti. $\square$

3 Ehrenfeucht-Fraïssé pelit

Ehrenfeucht-Fraïssé pelit ovat tyypillinen tapa osoittaa predikaattlogiikan määrittelemättömyystuloksia äärellisten mallien teoriassa. Edellisen kappaleen esimerkissä 2.3 etsittiin keskenään isomorfiset mallit, joista ainoastaan toinen toteutti lauseen Φ ja tästä pääteltiin, ettei lauseella Φ ilmaistava kysely Q ole määriteltävä predikaattilogiikassa. Pelien avulla määriteltävyyttä tutkitaan noudattaen samankaltaista ideaa, mutta mallien isomorfisuuden sijaan riittää todeta tätä löyhemmän ehdon toteutuminen.

3.1 Osittaisisomorfismit, kvanttoriaste ja k-tyypit

Ennen Ehrenfeucht-Fraïssé pelien esittelyä, määritellään vielä joitakin käsitteitä, joita tarvitaan pelien yhteydessä. Oletetaan edelleen, että aakkostot σ ovat relationaalisia ja, että äärellisiä malleja tarkasteltaessa myös aakkostot ovat äärellisiä.

Määritelmä 3.1. Olkoon σ aakkosto ja olkoot $\mathfrak{A}$ ja $\mathfrak{B}$ σ-malleja, $A' \subseteq A$ ja $B' \subseteq B$. Tällöin kuvaus $p : A' \to B'$ on mallien $\mathfrak{A}$ ja $\mathfrak{B}$ välinen *osittaisisomorfismi*, jos se on injektio ja jos seuraavat ehdot ovat voimassa kaikilla $a, a_1, \ldots, a_n \in A'$:

- Jokaisella vakiosymbolilla $c \in \sigma$ pätee $c^{\mathfrak{A}} = a$ jos ja vain jos $c^{\mathfrak{B}} = p(a)$.
- Jokaisella relaatiosymbolilla $R \in \sigma$ pätee $(a_1, \ldots, a_n) \in R^{\mathfrak{A}}$ jos ja vain jos $(p(a_1), \ldots, p(a_n)) \in R^{\mathfrak{B}}$.

Määritelmä 3.2. Kaavan φ *kvanttoriaste* $\mathrm{qr}(\varphi)$ määritellään seuraavasti:

- $\mathrm{qr}(\varphi) = 0$, kun φ on atomikaava
- $\mathrm{qr}(\neg\varphi) = \mathrm{qr}(\varphi)$
- $\mathrm{qr}(\varphi_1 \vee \varphi_2) = \mathrm{qr}(\varphi_1 \wedge \varphi_2) = \max\{\mathrm{qr}(\varphi_1), \mathrm{qr}(\varphi_2)\}$
- $\mathrm{qr}(\exists\varphi) = \mathrm{qr}(\forall\varphi) = \mathrm{qr}(\varphi) + 1$

Käytetään merkintää $\mathrm{FO}[k]$ predikaattilogiikan kaavojen joukosta, joiden kvanttoriaste on korkeintaan k. Siis $\mathrm{FO}[k] = \{\varphi \in \mathrm{FO} \mid \mathrm{qr}(\varphi) \leq k\}$.

Olkoot $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, $\vec{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ ja $\vec{b} = (b_1, \ldots, b_n)$. Jos jokaisella kaavalla $\varphi(\vec{x}) \in \mathrm{FO}[k]$ pätee $\mathfrak{A} \models \varphi[\vec{a}/\vec{x}]$ jos ja vain jos $\mathfrak{B} \models \varphi[\vec{b}/\vec{x}]$, niin käytetään merkintää $(\mathfrak{A}, \vec{a}) \sim_k (\mathfrak{B}, \vec{b})$. Apulauseen 2.1 nojalla tämä on yhtäpitävää sen kanssa, että $(\mathfrak{A}, \vec{a}) \models \Phi$ jos ja vain jos $(\mathfrak{B}, \vec{b}) \models \Phi$, missä $(\mathfrak{A}, \vec{a})$ ja $(\mathfrak{B}, \vec{b})$ ovat σ_n-malleja ja $\Phi = \varphi(\vec{c}/\vec{x}) \in \mathrm{FO}[k]$.

Tarkastellaan joukkoa $\mathrm{FO}[0]$. Joukkoon $\mathrm{FO}[0]$ kuuluvat kvanttorittomat kaavat eli atomikaavojen Boolen kombinaatiot. Joukon $\mathrm{FO}[0]$ lauseissa ei voi esiintyä muuttujia, sillä kaavoissa ei ole kvanttoreita, jotka voisivat sitoa muuttujia. Näin ollen joukon FO[0] lauseet ovat muotoa $c_i \approx c_j$ ja $R(c_1, \ldots, c_n)$ olevien kaavojen Boolen kombinaatioita, kun $c_1, \ldots c_n \in \sigma$ ja $i, j \leq n$.

Oletetaan, että $\varphi \in \mathrm{FO}[k+1]$. Jos φ muotoa $\neg\varphi'$, $\varphi_1 \vee \varphi_2$ tai $\varphi_1 \wedge \varphi_2$, niin $\varphi' \in \mathrm{FO}[k+1]$ ja $\varphi_1 \in \mathrm{FO}[k+1]$ tai $\varphi_2 \in \mathrm{FO}[k+1]$. Jos φ on muotoa $\exists x\psi$ tai $\forall x\psi$, niin $\psi \in \mathrm{FO}[k]$. Täten jokainen $\varphi \in \mathrm{FO}[k+1]$ on Boolen kombinaatio muotoa $\exists x\psi$ tai $\forall x\psi$ olevista kaavoista, missä $\psi \in \mathrm{FO}[k]$.

Apulause 3.1. *Äärellisen lausejoukon lauseista voidaan muodostaa vain äärellinen määrä Boolen kombinaatioita, jotka eivät ole loogisesti ekvivalentteja keskenään.*

Todistus. Ks. [3, s. 51]. □

Apulause 3.2. *Olkoon σ äärellinen aakkosto ja $k, m \in \mathbb{N}$. Tällöin on vain äärellinen määrä aakkoston σ kaavoja $\varphi(x_1, \ldots, x_m) \in \mathrm{FO}[k]$, jotka eivät ole loogisesti ekvivalentteja keskenään.*

Todistus. Todistetaan väite induktiolla kvanttoriasteen k suhteen.

Aiemmin todettiin, että joukko FO[0] koostuu aakkoston σ atomikaavojen Boolen kombinaatioista. Äärellisestä aakkostosta saadaan muodostettua vain äärellinen määrä atomikaavoja $\varphi(x_1, \ldots, x_m)$ ja näillä taas voi olla vain äärellinen määrä Boolen kombinaatioita, jotka eivät ole loogisesti ekvivalentteja keskenään.

Oletetaan sitten, että jokaiselle $n \in \mathbb{N}$ on olemassa vain äärellinen määrä kaavoja $\psi(x_1, \ldots, x_n) \in \mathrm{FO}[k]$, jotka eivät ole loogisesti ekvivalentteja keskenään. Edellä todettiin, että jokainen $\varphi \in \mathrm{FO}[k+1]$ on Boolen kombinaatio muotoa $\exists x\psi$ tai $\forall x\psi$ olevista kaavoista, missä $\psi \in \mathrm{FO}[k]$. Jokainen $\varphi(x_1, \ldots, x_m) \in \mathrm{FO}[k+1]$ on siis Boolen kombinaatio muotoa $\exists x_{m+1}\psi(x_1, \ldots, x_m)$ tai $\forall x_{m+1}\psi(x_1, \ldots, x_m)$ olevista kaavoista, missä $\psi(x_1, \ldots, x_m, x_{m+1}) \in \mathrm{FO}[k]$.

Induktio-oletuksen nojalla on olemassa vain äärellinen määrä sellaisia kaavoja $\psi(x_1, \ldots, x_{m+1}) \in \mathrm{FO}[k]$, jotka eivät ole loogisesti ekvivalentteja keskenään. Siis vastaavanlaisia kaavoja $\exists x_{m+1}\psi(x_1, \ldots, x_m) \in \mathrm{FO}[k+1]$ ja $\forall x_{m+1}\psi(x_1, \ldots, x_m) \in \mathrm{FO}[k+1]$ on myös vain äärellinen määrä, jolloin niiden Boolen kombinaatioita $\varphi(x_1, \ldots, x_m) \in \mathrm{FO}[k+1]$ on vain äärellinen määrä. □

Määritelmä 3.3. Olkoon σ aakkosto, $\mathfrak{A}$ σ-malli ja $\vec{a} \in A^m$. *Jonon $\vec{a}$ k-asteen m-tyyppi mallissa $\mathfrak{A}$*

$$\mathrm{tp}_k(\mathfrak{A}, \vec{a}) = \{\varphi(x_1, \ldots, x_m) \in \mathrm{FO}[k] \mid \mathfrak{A} \models \varphi[\vec{a}/\vec{x}]\}$$

Yleisesti *k-asteen m-tyyppi* on mikä tahansa muotoa $\mathrm{tp}_k(\mathfrak{A}, \vec{a})$ oleva kaavajoukko, missä $|\vec{a}| = m$. Usein puhutaan vain *k-tyypistä*. Kun $m = 0$, niin k-tyyppi $\mathrm{tp}_k(\mathfrak{A})$ koostuu niistä lausesita $\Phi \in \mathrm{FO}[k]$, joilla $\mathfrak{A} \models \Phi$.

Jokainen kaavajoukko $\mathrm{tp}_k(\mathfrak{A}, \vec{a})$ on toteutuva, sillä jokaisella $\varphi(\vec{x}) \in \mathrm{tp}_k(\mathfrak{A}, \vec{a})$ pätee $\mathfrak{A} \models \varphi[\vec{a}/\vec{x}]$. Näin ollen kaavajoukko $\mathrm{tp}_k(\mathfrak{A}, \vec{a})$ on myös ristiriidaton.

Lause 3.1. *Olkoon σ äärellinen aakkosto.*

a) Aakkostolla σ on äärellinen määrä eri k-asteen m-tyyppejä.

b) Olkoot $T_1, \ldots, T_r$ nämä eri k-asteen m-tyypit ja $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_m)$. Tällöin on olemassa kaavat $\alpha_1(\vec{x}), \ldots, \alpha_r(\vec{x}) \in \mathrm{FO}[k]$, joilla:

- *Jokaisella $\mathfrak{A}$ ja $\vec{a} \in A^m$ pätee $\mathfrak{A} \models \alpha_l[\vec{a}/\vec{x}]$ jos ja vain jos $\mathrm{tp}_k(\mathfrak{A}, \vec{a}) = T_l$.*
- *Jokaiselle kaavalle $\psi(\vec{x}) \in \mathrm{FO}[k]$ on olemassa sellainen joukko $L \subseteq \{1, \ldots, r\}$, että $\psi(\vec{x})$ on loogisesti ekvivalentti kaavan $\bigvee_{l \in L} \alpha_l(\vec{x})$ kanssa.*

Todistus. Olkoon $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_m)$ ja olkoot $\varphi_1(\vec{x}), \ldots, \varphi_M(\vec{x})$ sellaiset joukon $\mathrm{FO}[k]$ kaavat, jotka eivät ole loogisesti ekvivalentteja keskenään, mutta jokaisella $\psi(\vec{x}) \notin \{\varphi_1(\vec{x}), \ldots, \varphi_M(\vec{x})\}$ pätee $\psi(\vec{x}) \Leftrightarrow \varphi_i(\vec{x})$ jollakin $i \in \{1, \ldots, M\}$. Olkoon $T = \mathrm{tp}_k(\mathfrak{A}, \vec{a})$ k-tyyppi. Määritellään joukko $K_T \subseteq \{1, \ldots, M\}$ seuraavasti:

$$i \in K_T \text{ jos ja vain jos } \mathfrak{A} \models \varphi_i[\vec{a}/\vec{x}].$$

a) Tällöin K_T määrää joukon $T = \{\varphi_i(\vec{x}) \in \mathrm{FO}[k] \mid i \in K_T\}$ yksikäsitteisesti. Koska äärellisellä joukolla $\{1, \ldots, M\}$ on vain äärellinen määrä osajoukkoja, niin myös k-tyyppejä voi olla vain äärellinen määrä.

b) Olkoon $\mathfrak{A}$ σ-malli, jono $\vec{a} \in A^m$ ja olkoot aakkoston σ k-tyypit $T_1, \ldots, T_r$. Oletetaan, että $l \in \{1, \ldots, r\}$. Tällöin merkitään $K_l = K_{T_l}$ ja määritellään kaavat

$$\alpha_l(\vec{x}) = \bigwedge_{i \in K_l} \varphi_i(\vec{x}) \wedge \bigwedge_{j \notin K_l} \neg\varphi_j(\vec{x}).$$

Selvästi jokainen $\alpha_l(\vec{x}) \in \mathrm{FO}[k]$, sillä kaavat $\varphi_i, \varphi_j \in \mathrm{FO}[k]$. Nyt $\mathfrak{A} \models \alpha_l[\vec{a}/\vec{x}]$ jos ja vain jos $\mathfrak{A} \models \varphi_i[\vec{a}/\vec{x}]$ jokaisella $i \in K_l$ ja $\mathfrak{A} \models \neg\varphi_j[\vec{a}/\vec{x}]$ jokaisella $j \notin K_l$. Siis $\mathfrak{A} \models \alpha_l[\vec{a}/\vec{x}]$ jos ja vain jos $\mathrm{tp}_k(\mathfrak{A}, \vec{a}) = T_l$.

Olkoon $\mathfrak{A}_l$ sellainen σ-malli ja $\vec{a}_l \in A^m$ sellainen jono, että $T_l = \mathrm{tp}_k(\mathfrak{A}_l, \vec{a}_l)$. Määritellään jokaiselle kaavalle $\psi(\vec{x})$ joukko

$$L_\psi = \{l \mid \mathfrak{A}_l \models \psi[\vec{a}_l/\vec{x}]\}.$$

Olkoon $\mathfrak{A}$ σ-malli ja $\vec{a} \in A^m$. Nyt $\mathfrak{A} \models \bigvee_{l \in L_\psi} \alpha_l[\vec{a}/\vec{x}]$ jos ja vain jos $\mathfrak{A} \models \alpha_l[\vec{a}/\vec{x}]$ jollakin $l \in L_\psi$. Tällöin $\mathrm{tp}_k(\mathfrak{A}, \vec{a}) = T_l$ jollakin $l \in L_\psi$. Joukon L_ψ määritelmän nojalla $\mathfrak{A}_l \models \psi[\vec{a}_l/\vec{x}]$, joten myös $\mathfrak{A} \models \psi[\vec{a}/\vec{x}]$.

Jos taas $\mathfrak{A} \models \psi[\vec{a}/\vec{x}]$, niin on olemassa $n \in L_\psi$, jolla $\mathrm{tp}_k(\mathfrak{A}, \vec{a}) = T_n$. Siis $\mathfrak{A} \models \alpha_n[\vec{a}/\vec{x}]$, missä $n \in L_\psi$, joten $\mathfrak{A} \models \bigvee_{l \in L_\psi} \alpha_l[\vec{a}/\vec{x}]$.

Täten $\psi(\vec{x}) \Leftrightarrow \bigvee_{l \in L_\psi} \alpha_l(\vec{x})$.

□

3.2 Ehrenfeucht-Fraïssé pelit

Määritelmä 3.4. Olkoot $\mathfrak{A}$ ja $\mathfrak{B}$ σ-malleja. *Ehrenfeucht-Fraïssé peliä* $\mathrm{EFG}_k(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ pelataan $k \in \mathbb{N}$ kierrosta pelaajien S (spoiler) ja D (duplicator) välillä. Jokainen kierros $i \in \{1, \ldots, k\}$ etenee seuraavasti:

1. Pelaaja S valitsee toisen malleista $\mathfrak{A}$ tai $\mathfrak{B}$.

2. Jos S valitsi mallin $\mathfrak{A}$, niin S tekee siirtonsa valitsemalla jonkin alkion $a_i \in A$. Jos taas S valitsi mallin $\mathfrak{B}$, niin S tekee siirtonsa valitsemalla jonkin alkion $b_i \in B$.

3. Jos pelaaja S valitsi mallin $\mathfrak{A}$, niin pelaaja D tekee siirtonsa valitsemalla jonkin alkion $b_i \in B$. Jos taas S valitsi mallin $\mathfrak{B}$, niin pelaaja D tekee siirtonsa valitsemalla jonkin alkion $a_i \in A$.

Pelaajan S tavoite on osoittaa, että mallit eivät ole samanlaiset, kun taas D pyrkii osoittamaan ne samanlaisiksi. Kun peliä on pelattu $n \leq k$ kierrosta, niin pelissä on tehty siirrot $\vec{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ ja $\vec{b} = (b_1, \ldots, b_n)$. Tällöin pelin *tilanne* on $(\vec{a}, \vec{b})$.

Määritelmä 3.5. Olkoon $c_1, \ldots, c_l$ aakkoston σ vakiosymbolit. Pelaajalla D on *voittostrategia* pelissä $\mathrm{EFG}_k(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$, jos pelaaja D pystyy tekemään siirtonsa niin, että riippumatta pelaajan S siirroista, kuvaus

$$p : \{a_1, \ldots, a_k\} \cup \{c_1^{\mathfrak{A}}, \ldots, c_l^{\mathfrak{A}}\} \to \{b_1, \ldots, b_k\} \cup \{c_1^{\mathfrak{B}}, \ldots, c_l^{\mathfrak{B}}\},$$

jolla $p(a_i) = b_i$ jokaisella $i \leq k$ sekä $p(c_j^{\mathfrak{A}}) = c_j^{\mathfrak{B}}$ jokaisella $j \leq l$, on osittaisisomorfismi mallilta $\mathfrak{A}$ mallille $\mathfrak{B}$. Tällöin merkitään $\mathfrak{A} \equiv_k \mathfrak{B}$. Jos pelaajalla D ei ole voittostrategiaa pelissä $\mathrm{EFG}_k(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$, niin pelaajalla S on voittostrategia. Selvästi jos $\mathfrak{A} \equiv_k \mathfrak{B}$ ja $n \leq k$, niin $\mathfrak{A} \equiv_n \mathfrak{B}$.

Tarkastellaan vielä voittostrategioita pelissä, jonka pelattavien kierrosten lukumäärä on 0. Pelaajalla D on voittostrategia pelissä $\mathrm{EFG}_0(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ jos ja vain jos $p : \{c_1^{\mathfrak{A}}, \ldots, c_l^{\mathfrak{A}}\} \to \{c_1^{\mathfrak{B}}, \ldots, c_l^{\mathfrak{B}}\}$ on osittaisisomorfismi mallien $\mathfrak{A}$ ja $\mathfrak{B}$ välillä. Siis, kun jokaisella k-paikkaisella relaatiosymboleilla $R \in \sigma$ ja kaikilla $i, j, i_1, \ldots, i_k \leq l$ pätee:

- $c_i^{\mathfrak{A}} = c_j^{\mathfrak{A}}$ jos ja vain jos $c_i^{\mathfrak{B}} = c_j^{\mathfrak{B}}$,
- $(c_{i_1}^{\mathfrak{A}}, \ldots, c_{i_k}^{\mathfrak{A}}) \in R^{\mathfrak{A}}$ jos ja vain jos $(c_{i_1}^{\mathfrak{B}}, \ldots, c_{i_k}^{\mathfrak{B}}) \in R^{\mathfrak{B}}$

Näin ollen $\mathfrak{A} \equiv_0 \mathfrak{B}$ jos ja vain jos mallit $\mathfrak{A}$ ja $\mathfrak{B}$ toteuttavat samat atomilauseet.

Ennen kuin tarkastellaan Ehrenfeucht-Fraïssé pelien yhteyttä määriteltävyyteen, esitetään vielä joitakin esimerkkejä Ehrenfeucht-Fraïssé peleistä sekä niiden voittostrategioista.

Esimerkki 3.1. Olkoon $\sigma = \emptyset$, jolloin mallit $\mathfrak{A}$ ja $\mathfrak{B}$ ovat pelkkiä joukkoja. Oletetaan, että $|A|, |B| \geq n$. Tällöin pelaajalla D on voittostrategia pelissä $\mathrm{EFG}_n(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$.

Todistus. Pelaajan D voittostrategia toimii seuraavasti.

Olkoon pelin tilanne $((a_1, \ldots, a_i), (b_1, \ldots, b_i))$, kun peliä on pelattu $i < n$ kierrosta. Oletetaan, että kierroksella $i + 1$ pelaaja S valitsee alkion $a_{i+1} \in A$. Jos $a_{i+1} = a_j$ jollakin $j \leq i$, niin pelaaja D valitsee alkion $b_{i+1} = b_j \in B$. Jos taas $a_{i+1} \in A \backslash \{a_1, \ldots, a_i\}$, niin pelaaja D voi myös valita alkion $b_{i+1} \in B \backslash \{b_1, \ldots, b_i\}$. Tällainen alkio on varmasti olemassa, sillä $|B| \geq n$.

Vastaavasti, jos pelaaja S valitseekin alkion $b_{i+1} \in B$ kierroksella $i + 1$, niin pelaaja D valitsee alkion $a_{i+1} \in A$ vastaavalla strategialla. □

Seuraavissa esimerkeissä $\sigma = \{<\}$, jolloin σ-mallit $\mathfrak{L}_1$ ja $\mathfrak{L}_2$ ovat lineaarijärjestyksiä, joiden universumit ovat L_1 ja L_2. Esimerkeissä käytetty kahden alkion etäisyys toisistaan määritellään tavanomaisesti $d(x, y) = |x - y|$.

Esimerkki 3.2. Olkoon $L_1 = \{1, \ldots, 15\}$ ja $L_2 = \{1, \ldots, 14\}$. Tällöin pelaajalla S on voittostrategia pelissä $\mathrm{EFG}_4(\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_2)$.

Todistus. Pelaajan S tulee tehdä valintansa aina siitä mallista, jonka universumi on suurempi, tässä tapauksessa siis mallista $\mathfrak{L}_1$. Ensimmäisellä kierroksella pelaaja S valitsee alkion $a_1 = 8 \in L_1$, sillä tällöin $d(a_1, 1) = d(a_1, 15)$. Nyt pelaajan D paras mahdollinen siirto on valita alkio b_1 mahdollisimman keskeltä joukkoa L_2. Oletetaan, että valinta on $b_1 = 8 \in L_2$, jolloin $d(a_1, 15) > d(b_1, 14)$. Tällöin pelaaja S valitsee seuraavan alkionsa väliltä $[a_1, 15]$. Vastaavasti, jos pelaaja D valitsisi alkion $7 \in L_2$, niin $d(a_1, 1) > d(b_1, 1)$ ja pelaajan S seuraava siirto olisi väliltä $[1, a_1]$.

Toisella kierroksella pelaajan S tulee valita alkio välin $[a_1, 15]$ puolivälistä, joten valinta on $a_2 = 12 \in L_1$. Tällöin $d(a_1, a_2) = 4$ ja $d(a_1, 15) = 3$ ja pelaaja D joutuu tekemään siirtonsa $b_2 \in L_2$ niin, että $d(a_1, a_2) > d(b_1, b_2)$ tai $d(a_2, 15) > d(b_2, 14)$. Oletetaan, että pelaajan D valinta on $b_2 = 12 \in L_2$, jolloin $d(b_1, b_2) = 4 = d(a_1, a_2)$ ja $d(b_2, 14) = 2 < d(a_2, 15)$. Tämä ohjaa pelaajaa S valitsemaan seuraavan alkion $a_3 \in L_1$ välin $[a_2, 15]$ puolivälistä, joten valinta on $a_3 = 14 \in L_1$.

Jos pelaaja D vastaa pelaajan S kolmannen kierroksen siirtoon valitsemalla alkion $b_3 = 14 \in L_2$, niin neljännellä kierroksella pelaaja S voittaa valitsemalla alkion $a_4 = 15 \in L_1$, sillä pelaaja D ei voi enää valita alkiota $b_4 \in L_2$, jolla $b_4 > b_3$. Jos taas pelaajan D kolmannen kierroksen valinta on $b_3 = 13 \in L_2$, niin seuraavalla kierroksella pelaaja S voittaa valitsemalla alkion $a_4 = 13 \in L_1$, sillä pelaaja D ei voi enää valita alkiota $b_4 \in L_2$, jolla $b_2 < b_4 < b_3$. □

Vastaava strategia voitaisiin vielä yleistää pelaajan S voittostrategiaksi pelissä $\mathrm{EFG}_k(\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_2)$, kun $|L_1|, |L_2| < 2^k$ ja $|L_1| \neq |L_2|$, missä $k \geq 2$. Esimerkissä olisi siis voinut olla myös pienemmät joukot L_1 ja L_2 ja silloin pelaaja S olisi voinut voittaa myös pienemmällä kierrosmäärällä.

Oleellista on, että pelaaja S valitsee jokaisella kierroksella alkion mallista, jonka universumi on suurempi ja valittavan alkion tulee olla sellainen, että sitä ei ole valittu millään aikaisemmalla kierroksella. Jos mallin $\mathfrak{L}_1$ universumi on suurempi, niin ensimmäisellä kierroksella pelaajan S tulee valita universumin parillisuudesta riippuen alkio $a_1 \in L_1$, jolla $d(1, a_1) = d(a_1, m)$ tai, jolla $d(1, a_1) + 1 = d(a_1, m)$ tai $d(1, a_1) = d(a_1, m) + 1$, missä m on universumin L_1 suurin alkio. Universumin L_2 suurin alkio $m' < m$.

Tämän jälkeen jokaisella kierroksella $i \leq k$ pelaaja S valitsee välin $[x_1, x_2] \subset L_1$ puolivälistä alkion a_i. Välin $[x_1, x_2]$ tulee olla sellainen, että sen päätepisteistä toinen on a_{i-1} ja toinen kuuluu joukkoon $\{1, m, a_1, \ldots, a_{i-2}\}$ eikä väliltä saa olla valittu päätypisteitä lukuun ottamatta muita alkioita. Lisäksi tulee olla $d(x_1, x_2) > d(y_1, y_2)$, missä $y_1, y_2 \in \{1, m', b_1, \ldots, b_{i-1}\}$, ovat sellaisia alkioita, että jos $x_j = 1$, niin $y_j = 1$; jos $x_j = m$, niin $y_j = m'$ ja jos $x_j = a_n$, niin $y_j = b_n$, missä $n \in \{1, \ldots, i - 1\}$ ja $j \in \{1, 2\}$.

Kierrosten lukumäärä k on riittävä pelaajalle S, sillä valitsemalla alkion aina edellä kuvatulla tavalla, pelaaja S voi pelata niin, että jokaisen kierroksen $i \leq k$ jälkeen on olemassa välit $[x_1, x_2] \subset L_1$ ja $[y_1, y_2] \subset L_2$, joilla $d(x_1, x_2) > d(y_1, y_2)$ ja $d(y_1, y_2) < 2^{k-i}$. Näin ollen viimeistään kierroksen $k-1$ jälkeen $d(y_1, y_2) < 2$ eli $d(y_1, y_2) = 1$ ja $d(x_1, x_2) > 1$. Näin ollen kierroksella k pelaaja S voi valita alkion sellaiselta väliltä $[x_1, x_2]$, että pelaaja D ei voi valita enää alkiota vastaavalta väliltä $[y_1, y_2]$.

Edellisessä esimerkissä oli asetettu rajotukset lineaarijärjestysten universumien pituudelle. Kun järjestysten universumeiksi valitaankin tarpeeksi suuret joukot, niin pelin voittostrategia onkin pelaajalla D.

Esimerkki 3.3. Oletetaan, että $|L_1|, |L_2| > 2^k$, missä $k > 0$. Tällöin pelaajalla D on voittostrategia pelissä $\text{EFG}_k(\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_2)$.

Todistus. Olkoon $L_1 = \{1, \ldots, n\}$ ja $L_2 = \{1, \ldots, m\}$, missä $n, m \geq 2^k + 1$ ja laajennetaan aakkostoa σ kahdella vakiolla $\underline{\text{min}}$ ja $\underline{\text{max}}$. Kummassakin mallissa vakio $\underline{\text{min}}$ tulkitaan järjestyksen pienimmäksi alkioksi ja $\underline{\text{max}}$ tulkitaan järjestyksen suurimmaksi alkioksi. Tällöin tarkastellaan σ-mallien $\mathfrak{L}_1$ ja $\mathfrak{L}_2$ sijaan σ_2-malleja $(\mathfrak{L}_1, \underline{\text{min}}, \underline{\text{max}})$ ja $(\mathfrak{L}_2, \underline{\text{min}}, \underline{\text{max}})$ ja osoitetaan, että $(\mathfrak{L}_1, \underline{\text{min}}, \underline{\text{max}}) \equiv_k (\mathfrak{L}_2, \underline{\text{min}}, \underline{\text{max}})$, jolloin myös $\mathfrak{L}_1 \equiv_k \mathfrak{L}_2$.

Oletetaan, että l kierroksen jälkeen pelin tilanne on $((a_1, \ldots, a_l), (b_1, \ldots, b_l))$. Olkoot $a_{-1}^{\mathfrak{L}_1} = \underline{\text{min}}^{L_1}$, $a_0^{\mathfrak{L}_1} = \underline{\text{max}}^{L_1}$ ja vastaavasti $b_{-1}^{\mathfrak{L}_2} = \underline{\text{min}}^{L_2}$, $b_0^{\mathfrak{L}_2} = \underline{\text{max}}^{L_2}$ ja olkoon nyt $\vec{a} = (a_{-1}, a_0, a_1, \ldots, a_l)$ ja $\vec{b} = (b_{-1}, b_0, b_1, \ldots, b_l)$.

Osoitetaan induktiolla, että nyt pelaaja D voi pelata sellaisella tavalla, että jokaisella $-1 \leq i, j \leq l$ pätee seuraavat ehdot:

1. Jos $d(a_i, a_j) < 2^{k-l}$, niin $d(b_i, b_j) = d(a_i, a_j)$.

2. Jos $d(a_i, a_j) \geq 2^{k-l}$, niin $d(b_i, b_j) \geq 2^{k-l}$.

3. $a_i \leq a_j$ jos ja vain jos $b_i \leq b_j$.

Ehdoista kolmas riittäisi yksinään osoittamaan osittaisisomorfisuuden. Kuitenkin, jos induktio-oletukseksi asettaisi pelkän oletuksen osittaisisomorfismista, ei tulosta saataisi osoitettua. Tämän takia on tehty myös ylläolevat lisäoletukset 1 ja 2. Lisäoletuksia voidaan käyttää, sillä induktiotodistuksessa osoitetaan myös niiden pitävän paikkaansa.

Oletuksen nojalla $d(a_{-1}, a_0) \geq 2^k$ ja $d(b_{-1}, b_0) \geq 2^k$ sekä $b_{-1} \leq b_0$ jos ja vain jos $a_{-1} \leq a_0$, joten ehdot $1-3$ toteutuvat, kun $l = 0$. Oletetaan sitten, että ehdot $1-3$ ovat voimassa, kun pelissä ollaan pelattu l kierrosta.

Voidaan olettaa, että kierroksella $l+1$ pelaaja S valitsee alkion $a_{l+1} \in L_1$. Jos $a_{l+1} = a_i$, missä $i \leq l$, niin pelaaja D valitsee alkion $b_i \in L_2$ ja ehdot $1-3$ täyttyvät. Muussa tapauksessa pelaajan S siirto osuu jollekin välille $[a_i, a_j]$, josta ei ole vielä valittu yhtäkään alkiota. Tällöin ehdon 3 nojalla myöskään väliltä $[b_i, b_j]$ ei ole vielä valittu alkioita. Tällöin pelaaja D tekee siirtonsa alkioiden a_i ja a_j välisen etäisyyden perusteella:

- Jos $d(a_i, a_j) < 2^{k-l}$, niin $d(b_i, b_j) = d(a_i, a_j)$ ja välit $[a_i, a_j]$ sekä $[b_i, b_j]$ ovat isomorfiset. Nyt pelaaja D voi valita alkion $b_{l+1} \in L_2$, jolla

$$\begin{cases} d(a_i, a_{l+1}) = d(b_i, b_{l+1}) \\ d(a_{l+1}, a_j) = d(b_{l+1}, b_j). \end{cases}$$

  Tällöin ehdot $1-3$ ovat voimassa.

- Jos taas $d(a_i, a_j) \geq 2^{k-l}$, niin $d(b_i, b_j) \geq 2^{k-l}$ ja pelaajan D siirto riippuu vielä etäisyyksistä $d(a_i, a_{l+1})$ sekä $d(a_{l+1}, a_j)$.

  Oletetaan ensin, että $d(a_i, a_{l+1}) < 2^{k-(l+1)}$. Tällöin $d(a_{l+1}, a_j) \geq 2^{k-(l+1)}$ ja pelaaja D voi valita alkion $b_{l+1} \in L_2$, jolla

$$\begin{cases} d(b_i, b_{l+1}) = d(a_i, a_{l+1}) \\ d(b_{l+1}, b_j) \geq 2^{k-(l+1)}. \end{cases}$$

  Vastaavasti, jos $d(a_{l+1}, a_j) < 2^{k-(l+1)}$, niin D voi valita alkion $b_{l+1} \in L_2$, jolla

$$\begin{cases} d(b_{l+1}, b_j) = d(a_{l+1}, a_j) \\ d(b_i b_{l+1}) \geq 2^{k-(l+1)}. \end{cases}$$

  Oletetaan vielä, että $d(a_i, a_{l+1}) \geq 2^{k-(l+1)}$ ja $d(a_{l+1}, a_j) \geq 2^{k-(l+1)}$. Koska $d(b_i, b_j) \geq 2^{k-l}$, niin pelaaja D voi valita sellaisen alkion $b_{l+1} \in L_2$ väliltä $[b_i, b_j]$, että

$$\begin{cases} d(b_i, b_{l+1}) \geq 2^{k-(l+1)} \\ d(b_{l+1}, b_j) \geq 2^{k-(l+1)}. \end{cases}$$

$\square$

3.3 Pelit ja predikaattilogiikan määrittelemättömyystulokset

Esitetään vielä pelien yhteys määriteltävyyteen sekä näytetään esimerkein, miten määrittelemättömyystuloksia todistetaan Ehrenfeucht-Fraïssé pelejä soveltaen.

Olkoon $\vec{a} \in A^n, \vec{b} \in A^m$ ja $c \in A$. Tällöin merkitään $\vec{a}c = (a_1, \ldots, a_n, c)$ ja $\vec{a}\vec{b} = (a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m)$. Aikaisemmin määriteltiin σ_n-mallit $(\mathfrak{A}, a_1, \ldots, a_n)$, kun $\mathfrak{A}$ on σ-malli ja $n \in \mathbb{N}$. Lisäksi, kun $\vec{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ ja $(\mathfrak{A}, \vec{a})$ on σ_n-malli, niin $(\mathfrak{A}, \vec{a}a)$ on σ_{n+1}-malli, missä a on vielä lisätyn vakiosymbolin $c_{n+1} \in \sigma_{n+1}$ tulkinta.

Määritelmä 3.6. Olkoon $\vec{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ ja $\vec{b} = (b_1, \ldots, b_n)$. Määritellään σ_n-mallien $(\mathfrak{A}, \vec{a})$ ja $(\mathfrak{B}, \vec{b})$ välinen *back-and-forth relaatio* $\simeq_k$, $k \in \mathbb{N}$, seuraavasti:

- $(\mathfrak{A}, \vec{a}) \simeq_0 (\mathfrak{B}, \vec{b})$ jos ja vain jos $(\mathfrak{A}, \vec{a}) \equiv_0 (\mathfrak{B}, \vec{b})$,

- $(\mathfrak{A}, \vec{a}) \simeq_{k+1} (\mathfrak{B}, \vec{b})$ jos ja vain jos seuraavat ehdot ovat voimassa:

  Forth: Jokaiselle $a \in A$ on olemassa $b \in B$, jolla $(\mathfrak{A}, \vec{a}a) \simeq_k (\mathfrak{B}, \vec{b}b)$.

Back: Jokaiselle $b \in B$ on olemassa $a \in A$, jolla $(\mathfrak{A}, \vec{a}a) \simeq_k (\mathfrak{B}, \vec{b}b)$.

Lause 3.2. *Olkoon $\mathfrak{A}$ ja $\mathfrak{B}$ σ-malleja ja $\vec{a} \in A^n$ sekä $\vec{b} \in B^n$. Tällöin jokaisella $k \in \mathbb{N}$ pätee:*

$$(\mathfrak{A}, \vec{a}) \equiv_k (\mathfrak{B}, \vec{b}) \text{ jos ja vain jos } (\mathfrak{A}, \vec{a}) \simeq_k (\mathfrak{B}, \vec{b}).$$

Todistus. Todistetaan induktiolla kierrosten lukumäärän k suhteen, että väite pätee jokaisella luvulla $n \in \mathbb{N}$. Relaation $\simeq_k$ määritelmän nojalla jokaisella $n \in \mathbb{N}$ pätee $(\mathfrak{A}, \vec{a}) \equiv_0 (\mathfrak{B}, \vec{b})$ jos ja vain jos $(\mathfrak{A}, \vec{a}) \simeq_0 (\mathfrak{B}, \vec{b})$. Tehdään induktio-oletus, että jokaisella $n \in \mathbb{N}$ pätee $(\mathfrak{A}, \vec{a}) \equiv_k (\mathfrak{B}, \vec{b})$ jos ja vain jos $(\mathfrak{A}, \vec{a}) \simeq_k (\mathfrak{B}, \vec{b})$.

Oletetaan ensin, että $(\mathfrak{A}, \vec{a}) \simeq_{k+1} (\mathfrak{B}, \vec{b})$. Jos pelaaja S valitsee ensimmäisellä kierroksella alkion $a \in A$, niin ehdon *Forth* nojalla pelaaja D voi valita sellaisen alkion $b \in B$, että $(\mathfrak{A}, \vec{a}a) \simeq_k (\mathfrak{B}, \vec{b}b)$. Vastaavasti, jos pelaaja S valitsee ensimmäisellä kierroksella alkion $b \in B$, niin ehdon *Back* nojalla pelaaja D voi valita sellaisen alkion $a \in A$, että $(\mathfrak{A}, \vec{a}a) \simeq_k (\mathfrak{B}, \vec{b}b)$. Siis kummassakin tapauksessa induktio-oletuksen nojalla $(\mathfrak{A}, \vec{a}a) \equiv_k (\mathfrak{B}, \vec{b}b)$. Pelaaja D pystyy siis tekemään ensimmäisen kierroksen siirtonsa niin, että hänellä on voittostrategia, kun peliä pelataan vielä k kierrosta. Näin ollen $(\mathfrak{A}, \vec{a}) \equiv_{k+1} (\mathfrak{B}, \vec{b})$.

Oletetaan sitten, että $(\mathfrak{A}, \vec{a}) \equiv_{k+1} (\mathfrak{B}, \vec{b})$ ja osoitetaan $(\mathfrak{A}, \vec{a}) \simeq_{k+1} (\mathfrak{B}, \vec{b})$ näyttämällä, että ehto *Forth* toteutuu. Oletetaan, että ensimmäisellä kierroksella pelaaja S valitsee alkion $a \in A$. Koska $(\mathfrak{A}, \vec{a}) \equiv_{k+1} (\mathfrak{B}, \vec{b})$, niin pelaaja D voi valita sellaisen alkion $b \in B$, että $(\mathfrak{A}, \vec{a}a) \equiv_k (\mathfrak{B}, \vec{b}b)$, jolloin induktio-oletuksen nojalla $(\mathfrak{A}, \vec{a}a) \simeq_k (\mathfrak{B}, \vec{b}b)$. Ehto *Back* osoitetaan vastaavasti. □

Lause 3.3. *Olkoon $\mathfrak{A}$ ja $\mathfrak{B}$ σ-malleja ja $\vec{a} \in A^n$ sekä $\vec{b} \in B^n$. Tällöin jokaisella $k \in \mathbb{N}$ pätee:*

$$(\mathfrak{A}, \vec{a}) \sim_k (\mathfrak{B}, \vec{b}) \text{ jos ja vain jos } (\mathfrak{A}, \vec{a}) \simeq_k (\mathfrak{B}, \vec{b}).$$

Todistus. Todistetaan induktiolla kvanttoriasteen k suhteen, että väite pätee jokaisella luvulla $n \in \mathbb{N}$. Relaation $\simeq_k$ määritelmän nojalla jokaisella luvulla $n \in \mathbb{N}$ pätee $(\mathfrak{A}, \vec{a}) \simeq_0 (\mathfrak{B}, \vec{b})$ jos ja vain jos $(\mathfrak{A}, \vec{a}) \equiv_0 (\mathfrak{B}, \vec{b})$. Aiemmin taas ollaan todettu, että $(\mathfrak{A}, \vec{a}) \equiv_0 (\mathfrak{B}, \vec{b})$ jos ja vain jos mallit $(\mathfrak{A}, \vec{a})$ ja $(\mathfrak{B}, \vec{b})$ toteuttavat samat atomilauseet.

Olkoon $\varphi(x) \in \mathrm{FO}[0]$ Boolen kombinaatio atomikaavoista $\varphi_1(\vec{x}_1), \ldots, \varphi_l(\vec{x}_l)$, missä $|\vec{x}_i| = n$, jokaisella $i \leq l$. Nyt, koska jokaisella atomilauseella Φ pätee $(\mathfrak{A}, \vec{a}) \models \Phi$ jos ja vain jos $(\mathfrak{B}, \vec{b}) \models \Phi$, niin erityisesti kaikilla $i \leq l$ pätee $(\mathfrak{A}, \vec{a}) \models \varphi_i(\vec{c}_i/\vec{x}_i)$ jos ja vain jos $(\mathfrak{B}, \vec{b}) \models \varphi_i(\vec{c}_i/\vec{x}_i)$. Siis $(\mathfrak{A}, \vec{a}) \models \varphi(\vec{c}/\vec{x})$ jos ja vain jos $(\mathfrak{B}, \vec{b}) \models \varphi(\vec{c}/\vec{x})$ eli $\mathfrak{A} \models \varphi[\vec{a}/\vec{x}]$ jos ja vain jos $\mathfrak{B} \models \varphi[\vec{b}/\vec{x}]$. Näin ollen $(\mathfrak{A}, \vec{a}) \sim_0 (\mathfrak{B}, \vec{b})$.

Tehdään sitten induktio-oletus, että jokaisella $n \in \mathbb{N}$ pätee $(\mathfrak{A}, \vec{a}) \sim_k (\mathfrak{B}, \vec{b})$ jos ja vain jos $(\mathfrak{A}, \vec{a}) \simeq_k (\mathfrak{B}, \vec{b})$. Oletetaan ensin, että $(\mathfrak{A}, \vec{a}) \sim_{k+1} (\mathfrak{B}, \vec{b})$ ja osoitetaan $(\mathfrak{A}, \vec{a}) \simeq_{k+1} (\mathfrak{B}, \vec{b})$ valitsemalla ensin $a \in A$ ja käymällä läpi ehto *Forth*; ehto *Back* osoitettaisiin vastaavasti.

Olkoon $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$. Lauseen 3.1 nojalla on olemassa kaava $\alpha_i(\vec{x}x)$, joka määrittää tyypin $\mathrm{tp}_k(\mathfrak{A}, \vec{a}a)$. Siis $\mathfrak{A} \models \alpha_i[\vec{a}a/\vec{x}x]$, joten Apulauseen 2.1 nojalla $(\mathfrak{A}, \vec{a}) \models \gamma_i[a/x]$, kun $\gamma_i = \alpha_i(\vec{c}/\vec{x})$. Edelleen $(\mathfrak{A}, \vec{a}) \models \exists x \gamma_i(x)$.

Koska $\mathrm{qr}(\gamma_i(x)) = k$, niin $\mathrm{qr}(\exists x\gamma_i(x)) = k+1$, jolloin oletuksen nojalla myös $(\mathfrak{B}, \vec{b}) \models \exists x\gamma_i(x)$. Olkoon $b \in B$ sellainen alkio, että $(\mathfrak{B}, \vec{b}) \models \gamma_i[b/x]$. Tällöin $\mathrm{tp}_k(\mathfrak{A}, \vec{a}a) = \mathrm{tp}_k(\mathfrak{B}, \vec{b}b)$, joten aakkoston σ_1 jokaisella lauseella $\Psi \in \mathrm{FO}[k]$ pätee:

$$(\mathfrak{A}, \vec{a}a) \models \Psi \text{ jos ja vain jos } (\mathfrak{B}, \vec{b}b) \models \Psi.$$

Siis induktio-oletuksen nojalla $(\mathfrak{A}, \vec{a}a) \simeq_k (\mathfrak{B}, \vec{b}b)$. Näin ollen ehto *Forth* toteutuu, joten $(\mathfrak{A}, \vec{a}) \simeq_{k+1} (\mathfrak{B}, \vec{b})$.

Oletetaan sitten, että $(\mathfrak{A}, \vec{a}) \simeq_{k+1} (\mathfrak{B}, \vec{b})$. Aikaisemmin on osoitettu, että jokainen $\Phi \in \mathrm{FO}[k+1]$ on Boolen kombinaatio muotoa $\exists x\varphi(x)$ tai $\forall x\varphi(x)$ olevista lauseista, missä $\varphi(x) \in \mathrm{FO}[k]$ ja riittää, kun väite osoitetaan lauseille $\exists x\varphi(x)$. Oletetaan, että $(\mathfrak{A}, \vec{a}) \models \exists x\varphi(x)$, jolloin $(\mathfrak{A}, \vec{a}) \models \varphi[a/x]$ jollakin $a \in A$. Tällöin ehdon *Forth* nojalla on olemassa $b \in B$, jolla $(\mathfrak{A}, \vec{a}a) \simeq_k (\mathfrak{B}, \vec{b}b)$, joten induktio-oletuksen nojalla jokaisella $\Psi \in \mathrm{FO}[k]$ pätee $(\mathfrak{A}, \vec{a}a) \models \Psi$ jos ja vain jos $(\mathfrak{B}, \vec{b}b) \models \Psi$. Täten $(\mathfrak{B}, \vec{b}) \models \varphi[b/x]$ eli $(\mathfrak{B}, \vec{b}) \models \exists x\varphi(x)$. Toinen suunta osoitetaan vastaavasti. □

Kahdesta edellisestä lauseesta seuraa varsinainen Ehrenfeuchtin ja Fraïssén lause:

Seuraus 3.1 (Ehrenfeucht-Fraïssé)**.** *Olkoon $\mathfrak{A}$ ja $\mathfrak{B}$ σ-malleja ja $\vec{a} \in A^n$ sekä $\vec{b} \in B^n$. Tällöin jokaisella $k \in \mathbb{N}$ pätee:*

$$(\mathfrak{A}, \vec{a}) \equiv_k (\mathfrak{B}, \vec{b}) \textit{ jos ja vain jos } (\mathfrak{A}, \vec{a}) \sim_k (\mathfrak{B}, \vec{b}).$$

Lause 3.4. *Relaation $\equiv_k$ ekvivalenssiluokkia on vain äärellinen määrä.*

Todistus. Olkoon $\varphi(\vec{x}) \in \mathrm{FO}[k]$. Nyt Ehrenfeuchtin ja Fraïssén lauseen 3.1 nojalla $\mathfrak{A} \equiv_k \mathfrak{B}$ on yhtäpitävää sen kanssa, että $\mathfrak{A} \models \Phi$ jos ja vain jos $\mathfrak{B} \models \Phi$. Siis $\mathfrak{A} \equiv_k \mathfrak{B}$ jos ja vain jos $\mathrm{tp}_k(\mathfrak{A}) = \mathrm{tp}_k(\mathfrak{B})$. Lauseen 3.1 nojalla taas eri k-tyyppejä on vain äärellinen määrä, joten relaation $\equiv_k$ ekvivalenssiluokkiakin voi olla vain äärellinen määrä. □

Lause 3.5. *Äärellisten σ-mallien ominaisuus $\mathcal{P}$ on määriteltävä predikaattilogiikassa jos ja vain jos on olemassa sellainen $k \in \mathbb{N}$, että kaikilla malleilla $\mathfrak{A}$ ja $\mathfrak{B}$ pätee:*

Jos $\mathfrak{A} \equiv_k \mathfrak{B}$ ja mallilla $\mathfrak{A}$ on ominaisuus $\mathcal{P}$, niin mallilla $\mathfrak{B}$ on ominaisuus $\mathcal{P}$.

Todistus. Oletetaan ensin, että ominaisuus $\mathcal{P}$ voidaan ilmaista lauseella Φ, jolla $\mathrm{qr}(\Phi) = k$. Oletetaan lisäksi, että $\mathfrak{A} \equiv_k \mathfrak{B}$ ja, että mallilla $\mathfrak{A}$ on ominaisuus $\mathcal{P}$. Siis $\mathfrak{A} \models \Phi$, jolloin Ehrenfeucht-Fraïssén lauseen 3.1 nojalla myös $\mathfrak{B} \models \Phi$. Siis myös mallilla $\mathfrak{B}$ on ominaisuus $\mathcal{P}$.

Oletetaan sitten, että on olemassa sellainen $k \in \mathbb{N}$, että esitetty ehto pätee. Nyt, jos $\mathfrak{A} \equiv_k \mathfrak{B}$, niin joko molemmilla malleilla on ominaisuus $\mathcal{P}$ tai kummallakaan mallilla ei ole ominaisuutta $\mathcal{P}$. Siis malleilla, joilla $\mathrm{tp}_k(\mathfrak{A}) = \mathrm{tp}_k(\mathfrak{B})$ on samanaikaisesti ominaisuus $\mathcal{P}$. Olkoon $T_1, \ldots, T_r$ aakkoston σ eri k-asteen 0-tyypit ja olkoon $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in \mathrm{FO}[k]$ ne lauseet, jotka määrittelevät nämä tyypit kuten lauseessa 3.1.

Määritellään joukko $L \subseteq \{1, \ldots, r\}$ seuraavasti:

$$L = \{l \in \{1, \ldots, r\} \mid \text{on olemassa malli } \mathfrak{B}, \text{ jolla on ominaisuus } \mathcal{P} \text{ ja jolla } \mathfrak{B} \models \alpha_l\}.$$

Olkoon $\Phi = \bigvee_{l \in L} \alpha_l$ ja $\mathfrak{A}$ σ-malli. Osoitetaan nyt, että mallilla $\mathfrak{A}$ on ominaisuus $\mathcal{P}$ jos ja vain jos $\mathfrak{A} \models \Phi$, jolloin lause Φ ilmaisee ominaisuuden $\mathcal{P}$.

Oletetaan ensin, että $\mathfrak{A} \models \Phi$, jolloin $\mathfrak{A} \models \alpha_l$ jollakin $l \in L$. Tällöin joukon L määritelmän nojalla on olemassa sellainen malli $\mathfrak{B}$, että $\mathfrak{B} \models \alpha_l$ ja mallilla $\mathfrak{B}$ on ominaisuus $\mathcal{P}$. Nyt koska $\mathfrak{A} \models \alpha_l$ ja $\mathfrak{B} \models \alpha_l$, niin $\mathrm{tp}_k(\mathfrak{A}) = \mathrm{tp}_k(\mathfrak{B})$, joten $\mathfrak{A} \equiv_k \mathfrak{B}$. Lisäksi, koska mallilla $\mathfrak{B}$ on ominaisuus $\mathcal{P}$, niin myös mallilla $\mathfrak{A}$ on ominaisuus $\mathcal{P}$.

Oletetaan sitten, että mallilla $\mathfrak{A}$ on ominaisuus $\mathcal{P}$ ja olkoon $\mathrm{tp}_k(\mathfrak{A}) = T_l$, jolloin $\mathfrak{A} \models \alpha_l$. Tällöin $l \in L$, joten $\mathfrak{A} \models \Phi$. □

Useimmiten todistuksissa pyritään osoittamaan, että jokin ominaisuus ei ole määriteltävä, joten muotoillaan edellinen tulos vielä tämän kannalta selkeämpään muotoon.

Seuraus 3.2. *Äärellisten σ-mallien ominaisuus $\mathcal{P}$ ei ole määriteltävä predikaattilogiikassa jos ja vain jos jokaisella $k \in \mathbb{N}$ on olemassa sellaiset mallit $\mathfrak{A}$ ja $\mathfrak{B}$, joilla*

- $\mathfrak{A} \equiv_k \mathfrak{B}$ *ja*
- *mallilla $\mathfrak{A}$ on ominaisuus $\mathcal{P}$ ja mallilla $\mathfrak{B}$ ei ole ominaisuutta $\mathcal{P}$.*

Esimerkissä 2.3 saatiin osoitettua, että kysely Q_{EVEN} ei ole määriteltävä predikaattilogikassa, kun $\sigma = \emptyset$. Nyt Ehrenfeucht-Fraïssé pelien avulla voidaa osoittaa sama tulos ilman oletusta $\sigma = \emptyset$.

Esimerkki 3.4. Kysely Q_{EVEN} ei ole määriteltävä lineaarijärjestyksille predikaattilogiikassa.

Todistus. Valitaan malliksi $\mathfrak{A}$ lineaarijärjestys, jonka pituus on 2^k ja malliksi $\mathfrak{B}$ lineearijärjestys, jonka pituus on $2^k + 1$. Tällöin esimerkin 3.3 nojalla $\mathfrak{A} \equiv_k \mathfrak{B}$, ja väite pätee seurauksen 3.2 nojalla. □

Aiemmin esimerkissä 2.2 todettiin, ettei mielivaltaisen graafin yhtenäisyyttä voida ilmaista predikaattilogiikan lauseella, mutta samaa tulosta ei voitu osoittaa äärellisille graafeille. Nyt myös tämä saadaan osoitettua Ehrenfeucht-Fraïssé peliä soveltamalla.

Esimerkki 3.5. Äärellisten graafien yhtenäisyys ei ole määriteltävä predikaattilogiikassa.

Todistus. Olkoon $\sigma = \{E\}$ ja oletetaan, että lause Φ ilmaisee graafin yhtenäisyyden. Määritellään *seuraajarelaatio* $\mathrm{succ}(x, y) = (x < y) \wedge \forall z(z \leq x \vee z \geq y)$ sekä kaava $\gamma(x, y) = \gamma_1 \vee \gamma_2 \vee \gamma_3$, missä

- $\gamma_1 = \exists z(\mathrm{succ}(x, z) \wedge \mathrm{succ}(z, y))$, y on alkion x seuraajan seuraaja,
- $\gamma_2 = \exists z(\mathrm{succ}(x, z) \wedge \forall u(u \leq z)) \wedge \forall u(y \leq u)$, x on suurimman alkion edeltäjä ja y on pienin alkio,

- $\gamma_3 = \forall u(u \leq x) \wedge \exists z(\mathrm{succ}(z, y) \wedge \forall u(z \leq u))$, x on suurin alkio ja y on pienimmän alkion seuraaja.

Kaavalla $\gamma(x, y)$ saadaan siis muodostettua suunnattu graafi $\mathfrak{G}_{\mathfrak{L}}$ lineaarijärjestyksen $\mathfrak{L}$ universumin L alkioista.

Tarkastellaan ensin lineaarijärjestystä $\mathfrak{L}_1$, jonka universumi on $L_1 = \{1, 2, \ldots, n\}$, missä luku n on parillinen. Tällöin $\mathfrak{G}_{\mathfrak{L}_1} \models \gamma[a/x, b/y]$ jos ja vain jos $(a, b) \in \{(1, 3), (3, 5), \ldots, (n-1, 1), (2, 4), (4, 6), \ldots, (n, 2)\}$. Siis graafi $\mathfrak{G}_{\mathfrak{L}_1}$ koostuu kahdesta syklistä ja on näin ollen epäyhtenäinen.

Tarkastellaan sitten lineaarijärjestystä $\mathfrak{L}_2$, jonka universumi on $L_2 = \{1, 2, \ldots, m\}$, missä luku m on pariton. Tällöin $\mathfrak{G}_{\mathfrak{L}_2} \models \gamma[a/x, b/y]$ jos ja vain jos $(a, b) \in \{(1, 3), (3, 5), \ldots, (m-2, m), (m, 2), (2, 4), \ldots, (m-1, 1)\}$, joten graafi $\mathfrak{G}_{\mathfrak{L}_2}$ on yhtenäinen.

Näin ollen äärellinen graafi $\mathfrak{G}_{\mathfrak{L}}$ on yhtenäinen jos ja vain jos lineaarijärjesyksen $\mathfrak{L}$ universumin mahtavuus on pariton. Näin ollen, korvaamalla lauseesta $\neg\Phi$ kaikki relaatiot E kaavalla γ, saadaan lause, joka ilmaisee lineaarijärjestyksen universumin parillisuuden. Edellisen esimerkin nojalla tämä on ristiriita, joten äärellisen graafin yhtenäisyys ei ole määriteltävä predikaattilogiikassa. $\square$

4 Lokaalisuus

Lokaalisuus on Ehrenfeucht-Fraïssé pelejä suoraviivaisempi tapa osoittaa määrittelemättömyystuloksia. Lokaalisuuden suoraviivaisuus perustuu siihen, että kokonaisten mallien tarkastelun sijaan riittää tarkastella vain jonkin jonon *ympäristöä*.

4.1 Ympäristöt

Määritelmä 4.1. Olkoon $\mathfrak{A}$ σ-malli. Mallin $\mathfrak{A}$ *Gaifman-graafi* $\mathcal{G}(\mathfrak{A})$ määritellään seuraavasti:

- Graafin $\mathcal{G}(\mathfrak{A})$ solmujen joukko on mallin $\mathfrak{A}$ universumi A.
- Graafissa $\mathcal{G}(\mathfrak{A})$ on särmä (a, a'), jos $a = a'$ tai jos on olemassa sellainen $R \in \sigma$, että $(a_1, \dots, a_n) \in R^{\mathfrak{A}}$ ja $a = a_i$ sekä $a' = a_j$ joillakin $i, j \in \{1, \dots, n\}$, missä $n \in \mathbb{N}$ on relaation R paikkaluku.

Gaifman-graafin $\mathcal{G}(\mathfrak{A})$ solmujen x ja y etäisyys toisistaan, $d_{\mathfrak{A}}(x, y)$, on niiden välillä olevan lyhimmän polun pituus. Jos solmujen x ja y välillä ei ole polkua, niin $d_{\mathfrak{A}}(x, y) = \infty$. Lisäksi, kun $\vec{a} \in A^n$, $\vec{b} \in A^m$ ja $e \in A$, niin

$$\begin{cases} d_{\mathfrak{A}}(\vec{a}, e) = \min_{1 \le i \le n} d_{\mathfrak{A}}(a_i, e) \\ d_{\mathfrak{A}}(\vec{a}, \vec{b}) = \min_{1 \le i \le n, 1 \le j \le m} d_{\mathfrak{A}}(a_i, b_j). \end{cases}$$

Etäisyys $d_{\mathfrak{A}}(x, y)$ toteuttaa selvästi metriikan ehdot; jokaisella $x, y, z \in A$ pätee:

1. $d_{\mathfrak{A}}(x, y) = 0$ jos ja vain jos $x = y$
2. $d_{\mathfrak{A}}(x, y) = d_{\mathfrak{A}}(y, x)$
3. $d_{\mathfrak{A}}(x, y) + d_{\mathfrak{A}}(y, z) \ge d_{\mathfrak{A}}(x, z)$.

Määritelmä 4.2. Olkoon $\mathfrak{A}$ σ-malli ja $\vec{a} = (a_1, \dots, a_n)$. *Jonon $\vec{a}$ r-säteinen kuula* on joukko

$$B_r^{\mathfrak{A}}(\vec{a}) = \{b \in A \mid d_{\mathfrak{A}}(\vec{a}, b) \le r \text{ tai } d_{\mathfrak{A}}(\vec{c}, b) \le r\},$$

missä jokainen vakiosymboli $c \in \sigma$ esiintyy jonossa $\vec{c}$. *Jonon $\vec{a}$ r-ympäristö mallissa* $\mathfrak{A}$ on σ_n-malli $N_r^{\mathfrak{A}}(\vec{a})$, missä

- mallin universumi on $B_r^{\mathfrak{A}}(\vec{a})$,
- jokaisen k-paikkaisen relaatiosymbolin $R \in \sigma$ tulkinta on $R^{N_r^{\mathfrak{A}}(\vec{a})} = R^{\mathfrak{A}} \cap (B_r^{\mathfrak{A}}(\vec{a}))^k$,
- jokaisen vakiosymbolin $c \in \sigma$ tulkinta on $c^{N_r^{\mathfrak{A}}(\vec{a})} = c^{\mathfrak{A}}$,
- aakkostoon lisättyjen vakioiden $c_1, \dots, c_n$ tulkinnat ovat $c_i^{N_r^{\mathfrak{A}}(\vec{a})} = a_i$ jokaisella $i \in \{1, \dots, n\}$.

Kun malli $\mathfrak{A}$ on asiayhteydessä selvä, niin voidaan merkitä vain $B_r(\vec{a}) = B_r^{\mathfrak{A}}(\vec{a})$ ja $N_r(\vec{a}) = N_r^{\mathfrak{A}}(\vec{a})$.

Jokaisen jonon $\vec{a} \in A^n$ ympäristö määritellään siis σ_n-malliksi. Tällöin, jos $h : N_r^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_n) \cong N_r^{\mathfrak{B}}(b_1, \dots, b_n)$, niin jokaisella $i \in \{1, \dots, n\}$ tulee päteä $h(a_i) = b_i$, sillä lisättyjen vakiosymboleiden tulkinnat ovat $c_i{}^{\mathfrak{A}} = a_i$ ja $c_i{}^{\mathfrak{B}} = b_i$.

Merkintöjen helpottamiseksi, jatkossa oletetaan, että aakkosto σ on aidosti relationaalinen. On mahdollista osoittaa, että kaikki tulokset pätevät myös relationaalisille aakkostoille.

Määritelmä 4.3. Olkoot $\mathfrak{A}$ ja $\mathfrak{B}$ σ-malleja ja olkoon $\vec{a} \in A^n$ sekä $\vec{b} \in B^n$. Tällöin mallit $(\mathfrak{A}, \vec{a})$ ja $(\mathfrak{B}, \vec{b})$ ovat *d-ekvivalentit*, $(\mathfrak{A}, \vec{a}) \leftrightarrows_d (\mathfrak{B}, \vec{b})$, jos on olemassa sellainen bijektio $f : A \to B$, että jokaisella $c \in A$ pätee $N_d(\vec{a}c) \cong N_d(\vec{b}f(c))$.

Tapauksessa $n = 0$ merkitään vain $\mathfrak{A} \leftrightarrows_d \mathfrak{B}$, jos on olemassa sellainen bijektio $f : A \to B$, että $N_d(c) \cong N_d(f(c))$ jokaisella $c \in A$.

Jos $(\mathfrak{A}, \vec{a}) \leftrightarrows_d (\mathfrak{B}, \vec{b})$, niin $|A| = |B|$, sillä on olemassa bijektio $f : A \to B$. Jos mallit $N_d(\vec{a})$ ja $N_d(\vec{b})$ ovat isomorfiset, niin ne ovat samaa *isomorfismityyppiä* τ. Jos malli $N_d^{\mathfrak{A}}(\vec{a})$ on isomorfismityyppiä τ, niin jono $\vec{a}$ *d-toteuttaa tyypin τ mallissa* $\mathfrak{A}$. Merkitään $\sharp_d[\mathfrak{A}, \tau] = |\{\vec{a} \in A^m \mid \vec{a}\ d\text{-toteuttaa tyypin } \tau \text{ mallissa } \mathfrak{A}\}|$. [5, s.5]

Apulause 4.1. *Olkoon $\mathfrak{A}$ ja $\mathfrak{B}$ σ-malleja. Tällöin $\mathfrak{A} \leftrightarrows_d \mathfrak{B}$ jos ja vain jos jokaisella σ_1-mallien isomorfismityypillä τ pätee $\sharp_d[\mathfrak{A}, \tau] = \sharp_d[\mathfrak{B}, \tau]$.*

Todistus. Oletetaan ensin, että $\mathfrak{A} \leftrightarrows_d \mathfrak{B}$. Tällöin d-ekvivalenssin määritelmän nojalla on olemassa sellainen bijektio $f : A \to B$, että $N_d^{\mathfrak{A}}(a) \cong N_d^{\mathfrak{B}}(f(a))$ jokaisella $a \in A$. Näin ollen jokainen $a \in A$ d-toteuttaa tyypin τ jos ja vain jos $f(a) \in B$ d-toteuttaa tyypin τ, kun τ on mielivaltainen σ_1-mallien isomorfismityyppi. Näin ollen $\sharp_d[\mathfrak{A}, \tau] = \sharp_d[\mathfrak{B}, \tau]$.

Oletetaan sitten, että jokaisella σ_1-mallien isomorfismityypillä τ pätee $\sharp_d[\mathfrak{A}, \tau] = \sharp_d[\mathfrak{B}, \tau]$ ja tarkastellaan mielivaltaista isomorfismityyppiä τ. Olkoot $a_1, \dots, a_l$ ne joukon A alkiot, jotka d-toteuttavat tyypin τ mallissa $\mathfrak{A}$. Tällöin on olemassa tasan alkiot $b_1, \dots, b_l \in B$, jotka d-toteuttaa tyypin τ mallissa $\mathfrak{B}$. Näin ollen on olemassa sellainen bijektio $f_\tau : \{a_1, \dots, a_l\} \to \{b_1, \dots, b_l\}$, että jokaisella $a \in \{a_1, \dots, a_l\}$ pätee $N_d(a) \cong N_d(f_\tau(a))$. Nyt kaikkien kuvausten f_τ yhdiste $f : A \to B$ on sellainen bijektio, että jokaisella $a \in A$ pätee $N_d(a) \cong N_d(f(a))$. Siis $\mathfrak{A} \leftrightarrows_d \mathfrak{B}$. □

Apulause 4.2. *Olkoot $\mathfrak{A}$ ja $\mathfrak{B}$ σ-malleja sekä $\vec{a} \in A^n$ ja $\vec{b} \in B^n$ ja oletetaan, että $h : N_r(\vec{a}) \cong N_r(\vec{b})$.*

a) Olkoon $d \leq r$. Tällöin kuvauksen h rajoittuma joukkoon $B_d(\vec{a})$ on isomorfismi mallien $N_d(\vec{a})$ ja $N_d(\vec{b})$ välillä.

b) Olkoon $d + l \leq r$ ja oletetaan, että $\vec{c} \in B_l(\vec{a})$. Tällöin $h(B_d(\vec{c})) = B_d(h(\vec{c}))$ ja $N_d(\vec{c}) \cong N_d(h(\vec{c}))$.

c) Olkoot $\vec{a}_1 \in A^n$, $\vec{a}_2 \in A^m$, $\vec{b}_1 \in B^n$ ja $\vec{b}_2 \in B^m$, missä $n, m \geq 1$. Oletetaan, että $N_r(\vec{a}_1) \cong N_r(\vec{b}_1)$, $N_r(\vec{a}_2) \cong N_r(\vec{b}_2)$ ja $d_{\mathfrak{A}}(\vec{a}_1, \vec{a}_2), d_{\mathfrak{B}}(\vec{b}_1, \vec{b}_2) > 2r + 1$. Tällöin $N_r(\vec{a}_1\vec{a}_2) \cong N_r(\vec{b}_1\vec{b}_2)$.

Todistus. Vrt. [4, s. 284-286].

a) Oletetaan, että $\vec{a} \in A^n$, $\vec{b} \in B^n$ ja $h : N_r(\vec{a}) \cong N_r(\vec{b})$. Olkoon lisäksi $d \leq r$. Osoitetaan, että $h' : N_d(\vec{a}) \cong N_d(\vec{b})$, kun h' on kuvauksen h rajoittuma joukkoon $B_d(\vec{a})$.

   Osoitetaan ensin, että $h' : B_d(\vec{a}) \to B_d(\vec{b})$ on bijektio. Oletetaan, että $a \in B_d(\vec{a})$, jolloin $\min_{1 \leq i \leq n} d_{\mathfrak{A}}(a_i, a) \leq d$. Olkoon a_i, $i \leq n$ sellainen alkio, että $d_{\mathfrak{A}}(a_i, a) \leq d$. Tällöin on olemassa sellaiset alkiot $e_1, \ldots, e_k \in A$ ja sellaiset jonot $\vec{t}_1, \ldots, \vec{t}_{k+1}$, että alkiot a_i ja e_1 esiintyvät jonossa $\vec{t}_1$, alkiot e_1 ja e_2 esiintyvät jonossa $\vec{t}_2$ ja edelleen e_k ja a esiintyvät jonossa $\vec{t}_{k+1}$, kun $k \leq d$ ja jokainen $\vec{t}_l$ on relaatiossa $R^{\mathfrak{A}}$ jollakin $R \in \sigma$, missä $\mathrm{ar}(R) \geq 2$.

   Koska h on isomorfismi, niin jokainen $h(\vec{t}_l) \in R_j^{\mathfrak{B}}$ jollakin $j \in I$ ja lisäksi alkiot $h(a_i)$ ja $h(e_1)$ esiintyvät jonossa $h(\vec{t}_1)$, alkiot $h(e_1)$ ja $h(e_2)$ esiintyvät jonossa $h(\vec{t}_2)$ ja edelleen alkiot $h(e_k)$ ja $h(a)$ esiintyvät jonossa $h(\vec{t}_{k+1})$. Näin ollen $d_{\mathfrak{B}}(h(a_i), h(a)) \leq d$, joten $h(a) \in B_d(h(\vec{a})) = B_d(\vec{b})$.

   Vastaavasti, jos $b \in B_d(\vec{b})$, niin $h^{-1}(b) \in B_d(\vec{a})$. Siis $h' : B_d(\vec{a}) \to B_d(\vec{b})$ on bijektio, kun $h'(a) = h(a)$ jokaisella $a \in B_d(\vec{a})$.

   Koska aakkosto σ on aidosti relationaalinen, niin aakkoston σ_n ainoat vakiosymbolit ovat sinne lisätyt vakiot $c_1, \ldots, c_n$. Ympäristön määritelmän nojalla ${c_i}^{N_d(\vec{a})} = a_i$ jokaisella $i \leq n$, joten myös $h'({c_i}^{N_d(\vec{a})}) = h'(a_i)$ jokaisella $i \leq n$. Tietysti $a_i \in B_d(\vec{a})$ jokaisella $i \leq n$, joten $h'(a_i) = h(a_i)$ jokaisella $i \leq n$. Koska h on isomorfismi, niin $h(a_i) = b_i$ jokaisella $i \leq n$ ja edelleen ympäristön määritelmän nojalla $b_i = {c_i}^{N_d(\vec{b})}$ jokaisella $i \leq n$. Näin ollen jokaisella $i \leq n$ pätee $h'({c_i}^{N_d(\vec{a})}) = {c_i}^{N_d(\vec{b})}$.

   Oletetaan, että $(s_1, \ldots, s_m) \in R^{N_d(\vec{a})}$, kun $R \in \sigma_n$ on m-paikkainen relaatio. Koska $R^{N_d(\vec{a})} = R^{\mathfrak{A}} \cap (B_d(\vec{a}))^m$, niin $s_1, \ldots, s_m \in B_d(\vec{a})$. Siis $h'(s_i) = h(s_i)$ jokaisella $i \leq m$. Nyt koska $h : N_r(\vec{a}) \cong N_r(\vec{b})$, niin $(h(s_1), \ldots, h(s_m)) \in R^{N_r(\vec{b})} = R^{\mathfrak{B}} \cap (B_r(\vec{b}))^k$. Siis erityisesti $(h(s_1), \ldots, h(s_m)) \in R^{\mathfrak{B}}$. Toisaalta, koska $h' : B_d(\vec{a}) \to B_d(\vec{b})$ on bijektio, niin $h(s_i) = h'(s_i) \in B_d(\vec{b})$ jokaisella $i \leq m$. Näin ollen $(h'(s_1), \ldots, h'(s_m)) \in R^{\mathfrak{B}} \cap (B_d(\vec{b}))^m = R^{N_d(\vec{b})}$.

b) Oletetaan, että $\vec{a} \in A^n$, $\vec{b} \in B^n$ ja $h : N_r(\vec{a}) \cong N_r(\vec{b})$. Olkoon $d + l \leq r$, jolloin $d \leq r - l$. Oletetaan, että $\vec{c} \in (B_l(\vec{a}))^k$, jolloin $d_{\mathfrak{A}}(\vec{a}, c_i) \leq d$ jokaisella $i \in \{1, \ldots, k\}$. Tällöin jokaista $i \in \{1, \ldots, k\}$ kohti on olemassa sellainen $j \in \{1, \ldots, n\}$, että $d_{\mathfrak{A}}(c_i, a_j) \leq l$.

   Nyt koska $d \leq r - l$, niin $h(B_d(c_i)) = B_d(h(c_i))$ jokaisella $i \in \{1, \ldots, k\}$. Siis $h(B_d(\vec{c})) = B_d(h(\vec{c}))$. Lisäksi koska h on isomorfismi ja $B_d(\vec{a}) \subseteq B_r(\vec{a})$ sekä $B_d(h(\vec{a})) \subseteq B_r(\vec{b})$, niin $N_d(\vec{c}) \cong N_d(h(\vec{c}))$.

c) Olkoot $h_1 : N_r(\vec{a}_1) \cong N_r(\vec{b}_1)$ ja $h_2 : N_r(\vec{a}_2) \cong N_r(\vec{b}_2)$. Koska $d_{\mathfrak{A}}(\vec{a}_1, \vec{a}_2) > 2r + 1$ ja $d_{\mathfrak{B}}(\vec{b}_1, \vec{b}_2) > 2r + 1$, niin jokaisella $a \in B_r(\vec{a}_1\vec{a}_2)$ pätee joko $a \in B_r(\vec{a}_1) \setminus B_r(\vec{a}_2)$ tai $a \in B_r(\vec{a}_2) \setminus B_r(\vec{a}_1)$ ja jokaisella $b \in B_r(\vec{b}_1\vec{b}_2)$ pätee joko $b \in B_r(\vec{b}_1) \setminus B_r(\vec{b}_2)$ tai $b \in B_r(\vec{b}_2) \setminus B_r(\vec{b}_1)$.

Tarkastellaan nyt kuvausta $h : B_r(\vec{a}_1\vec{a}_2) \to B_r(\vec{b}_1\vec{b}_2)$, jolla

$$h(a) = \begin{cases} h_1(a), & \text{jos } a \in B_r(\vec{a}_1) \\ h_2(a), & \text{jos } a \in B_r(\vec{a}_2). \end{cases}$$

Selvästi kuvaus h on bijektio, sillä kuvaukset h_1 ja h_2 ovat bijektioita.

Olkoon $c \in \sigma_{n+m}$ ja olkoot $c_1, \ldots, c_n$ aakkostoon σ_n lisätyt vakiosymbolit ja $c'_1, \ldots, c'_m$ aakkostoon σ_m lisätyt vakiosymbolit. Määritellään nyt

$$c^{N_r(\vec{a}_1\vec{a}_2)} = \begin{cases} c^{N_r(\vec{a}_1)}, & \text{jos } c \in \{c_1, \ldots, c_n\} \\ c^{N_r(\vec{a}_2)}, & \text{jos } c \in \{c'_1, \ldots, c'_m\} \backslash \{c_1, \ldots, c_n\} \end{cases}$$

ja

$$c^{N_r(\vec{b}_1\vec{b}_2)} = \begin{cases} c^{N_r(\vec{b}_1)}, & \text{jos } c \in \{c_1, \ldots, c_n\} \\ c^{N_r(\vec{b}_2)}, & \text{jos } c \in \{c'_1, \ldots, c'_m\} \backslash \{c_1, \ldots, c_n\}. \end{cases}$$

Nyt jos $c \in \{c_1, \ldots, c_n\}$, niin

$$\begin{aligned} h(c^{N_r(\vec{a}_1\vec{a}_2)}) &= h(c^{N_r(\vec{a}_1)}) \\ &= h_1(c^{N_r(\vec{a}_1)}) \\ &= c^{N_r(\vec{b}_1)} \\ &= c^{N_r(\vec{b}_1\vec{b}_2)}. \end{aligned}$$

Vastaavasti, jos $c \in \{c'_1, \ldots, c'_m\} \backslash \{c_1, \ldots, c_n\}$, niin

$$\begin{aligned} h(c^{N_r(\vec{a}_1\vec{a}_2)}) &= h(c^{N_r(\vec{a}_2)}) \\ &= h_2(c^{N_r(\vec{a}_2)}) \\ &= c^{N_r(\vec{b}_2)} \\ &= c^{N_r(\vec{b}_1\vec{b}_2)}. \end{aligned}$$

Siis jokaisella $c \in \sigma_{n+m}$ pätee $h(c^{N_r(\vec{a}_1\vec{a}_2)}) = c^{N_r(\vec{b}_1\vec{b}_2)}$.

Olkoon $R \in \sigma_{n+m}$ k-paikkainen relaatio ja oletetaan, että $(a_1, \ldots, a_k) \in R^{N_r(\vec{a}_1\vec{a}_2)}$. Koska $R^{N_r(\vec{a}_1\vec{a}_2)} = R^{\mathfrak{A}} \cap (B_r(\vec{a}_1) \cup B_r(\vec{a}_1))^k$, niin jokainen a_i, $i \leq k$, esiintyy jossakin $(d_1, \ldots, d_k) \in R^{\mathfrak{A}}$ ja joko $a_i \in B_r(\vec{a}_1)$ tai $a_i \in B_r(\vec{a}_2)$.

Jos $a_i \in B_r(\vec{a}_1)$, niin a_i esiintyy jossakin $(e_1, \ldots, e_k) \in R^{N_r(\vec{a}_1)}$ ja $h(a_i) \in B_r(\vec{b}_1)$ esiintyy jossakin $(h(e_1), \ldots, h(e_k)) \in R^{N_r(\vec{b}_1)}$. Jos taas $a_i \in B_r(\vec{a}_2)$, niin a_i esiintyy jossakin $(e_1, \ldots, e_k) \in R^{N_r(\vec{a}_2)}$ ja $h(a_i) \in B_r(\vec{b}_2)$ esiintyy jossakin $(h(e_1), \ldots, h(e_k)) \in R^{N_r(\vec{b}_2)}$.

Koska $R^{N_r(\vec{b}_1)} = R^{\mathfrak{B}} \cap (B_r(\vec{b}_1))^k$ ja $R^{N_r(\vec{b}_2)} = R^{\mathfrak{B}} \cap (B_r(\vec{b}_2))^k$, niin jokainen $h(a_i)$ esiintyy siis jossakin $(b_1, \ldots, b_k) \in R^{\mathfrak{B}}$. Näin ollen $(h(a_1), \ldots, h(a_k)) \in R^{\mathfrak{B}} \cap (B_r(\vec{b}_1) \cup B_r(\vec{b}_2))^k = R^{N_r(\vec{b}_1\vec{b}_2)}$. Siis jos $R \in \sigma_{n+m}$ on k-paikkainen relaatio, jolla $(a_1, \ldots, a_k) \in R^{N_r(\vec{a}_1\vec{a}_2)}$, niin $(h(a_1), \ldots, h(a_k)) \in R^{N_r(\vec{b}_1\vec{b}_2)}$.

$\square$

Kohdasta a) seuraa suoraan, että jos $(\mathfrak{A}, \vec{a}) \leftrightarrows_d (\mathfrak{B}, \vec{b})$, niin $(\mathfrak{A}, \vec{a}) \leftrightarrows_{d'} (\mathfrak{B}, \vec{b})$, kun $\mathfrak{A}$ ja $\mathfrak{B}$ σ-malleja, $\vec{a} \in A^n$, $\vec{b} \in B^n$ $d' \leq d$. Lisäksi, jos $(\mathfrak{A}, \vec{a}) \leftrightarrows_d (\mathfrak{B}, \vec{b})$, niin vastaavasti tutkimalla kuvauksen h rajoittumia joukkoihin $B_d(c)$ ja $B_d(\vec{a})$ voidaan osoittaa että $\mathfrak{A} \leftrightarrows_d \mathfrak{B}$ ja $N_d(\vec{a}) \cong N_d(\vec{b})$.

Jatkossa merkitään $\vec{a} \approx_r^{\mathfrak{A},\mathfrak{B}} \vec{b}$, kun $N_r^{\mathfrak{A}}(\vec{a}) \cong N_r^{\mathfrak{B}}(\vec{b})$. Jos mallit $\mathfrak{A}$ ja $\mathfrak{B}$ ovat asiayhteydessä selvät, niin voidaan merkitä vain $\vec{a} \approx_r \vec{b}$.

Lause 4.1. *Jos $\mathfrak{A} \leftrightarrows_d \mathfrak{B}$ ja $\vec{a} \approx_{3d+1} \vec{b}$, niin $(\mathfrak{A}, \vec{a}) \leftrightarrows_d (\mathfrak{B}, \vec{b})$.*

Todistus. Koska $\vec{a} \approx_{3d+1} \vec{b}$, niin on olemassa kuvaus $h : N_{3d+1}(\vec{a}) \cong N_{3d+1}(\vec{b})$. Apulauseen 4.2 nojalla sen rajoittuma joukkoon $B_{2d+1}(\vec{a})$ on isomorfismi mallien $N_{2d+1}(\vec{a})$ ja $N_{2d+1}(\vec{b})$ välillä.

Nyt, koska on olemassa bijektio $A \to B$ ja $N_{2d+1}(\vec{a}) \cong N_{2d+1}(\vec{b})$, niin $|A| = |B|$ ja $|B_{2d+1}(\vec{a})| = |B_{2d+1}(\vec{b})|$, jolloin $|A \setminus B_{2d+1}(\vec{a})| = |B \setminus B_{2d+1}(\vec{b})|$.

Olkoon τ jokin yksittäisen pisteen d-ympäristön isomorfismityyppi. Oletetaan, että $c \in B_{2d+1}(\vec{a})$ d-toteuttaa tyypin τ mallissa $\mathfrak{A}$. Koska h on $3d + 1$-ympäristöjen välinen isomorfismi ja $d + (2d + 1) \leq 3d + 1$, niin apulauseen 4.2 nojalla pätee $N_d(c) \cong N_d(h(c))$, jolloin myös $h(c) \in B_{2d+1}(\vec{b})$ d-toteuttaa tyypin τ. Vastaavasti, jos $c \in B_{2d+1}(\vec{b})$ d-toteuttaa tyypin τ, niin myös $h^{-1}(c) \in B_{2d+1}(\vec{a})$ d-toteuttaa tyypin τ. Siis joukoissa $B_{2d+1}(\vec{a})$ ja $B_{2d+1}(\vec{b})$ on keskenään sama määrä alkioita, jotka d-toteuttavat tyypin τ.

Toisaalta, koska $\mathfrak{A} \leftrightarrows_d \mathfrak{B}$, niin myös joukoissa A ja B on keskenään sama määrä alkioita, jotka d-toteuttavat tyypin τ. Näin ollen jokaisella tyypillä τ pätee:

$$\begin{aligned} & |\{a \in A \setminus B_{2d+1}(\vec{a}) \mid a \ d\text{-toteuttaa tyypin } \tau\}| \\ = \ & |\{b \in B \setminus B_{2d+1}(\vec{b}) \mid b \ d\text{-toteuttaa tyypin } \tau\}|. \end{aligned}$$

Nyt on olemassa sellainen bijektio $g : A \setminus B_{2d+1}(\vec{a}) \to B \setminus B_{2d+1}(\vec{b})$, että $c \approx_d g(c)$ jokaisella $c \in A \setminus B_{2d+1}(\vec{a})$. Määritellään kuvaus $f : A \to B$ seuravasti:

$$f(c) = \begin{cases} h(c), & \text{jos } c \in B_{2d+1}(\vec{a}) \\ g(c), & \text{jos } c \notin B_{2d+1}(\vec{a}). \end{cases}$$

Selvästi kuvaus f on bijektio, sillä kuvaukset h ja g ovat bijektioita. Lisäksi täytyy osoittaa, että $\vec{a}c \approx_d \vec{b}f(c)$ jokaisella $c \in A$. Jos $c \in B_{2d+1}(\vec{a})$, niin $B_d(c) \subseteq B_{3d+1}(\vec{a})$ ja $\vec{a}c \approx_d \vec{b}h(c)$, koska h on isomorfismi. Jos taas $c \notin B_{2d+1}(\vec{a})$, niin $f(c) = g(c) \notin B_{2d+1}(\vec{b})$ ja $c \approx_d g(c)$. Koska $d_{\mathfrak{A}}(c, \vec{a})$, $d_{\mathfrak{B}}(g(c), \vec{b}) > 2d + 1$, niin apulauseen 4.2 nojalla $\vec{a}c \approx_d \vec{b}g(c)$. Siis kummassakin tapauksessa pätee $\vec{a}c \approx_d \vec{b}f(c)$, joten $(\mathfrak{A}, \vec{a}) \leftrightarrows_d (\mathfrak{B}, \vec{b})$. □

Seuraus 4.1. *Jos $(\mathfrak{A}, \vec{a}) \leftrightarrows_{3d+1} (\mathfrak{B}, \vec{b})$, niin on olemassa sellainen bijektio $f : A \to B$, että jokaisella $c \in A$ pätee $(\mathfrak{A}, \vec{a}c) \leftrightarrows_d (\mathfrak{B}, \vec{b}f(c))$.*

Todistus. Koska $(\mathfrak{A}, \vec{a}) \leftrightarrows_{3d+1} (\mathfrak{B}, \vec{b})$, niin on olemassa sellainen bijektio $f : A \to B$, että jokaisella $c \in A$ pätee $\vec{a}c \approx_{3d+1} \vec{b}f(c)$. Lisäksi koska $\mathfrak{A} \leftrightarrows_{3d+1} \mathfrak{B}$, niin $\mathfrak{A} \leftrightarrows_d \mathfrak{B}$. Näin ollen lauseen 4.1 nojalla $(\mathfrak{A}, \vec{a}c) \leftrightarrows_d (\mathfrak{B}, \vec{b}f(c))$. □

4.2 Predikaattilogiikan lokaalisuus

Määritelmä 4.4. Olkoon $m \geq 0$. Tällöin σ-mallien m-paikkainen kysely Q on *Hanf-lokaali*, jos on olemassa sellainen $d \geq 0$, että kaikilla σ-malleilla $\mathfrak{A}$ ja $\mathfrak{B}$ sekä kaikilla jonoilla $\vec{a} \in A^m$, $\vec{b} \in B^m$ pätee:

$$\text{Jos } (\mathfrak{A}, \vec{a}) \leftrightarrows_d (\mathfrak{B}, \vec{b}), \text{ niin } \vec{a} \in Q(\mathfrak{A}) \text{ täsmälleen, kun } \vec{b} \in Q(\mathfrak{B}).$$

Pienin luku d, jolla edellä esitetty ehto toteutuu, on *kyselyn Q Hanf-lokaalisuusaste* $\mathrm{hlr}(Q)$.

Kun halutaan osoittaa, ettei kysely Q ole määriteltävä predikaattilogiikassa, niin voidaan osoittaa, että kysely Q ei ole Hanf-lokaali ja vedotaan kohta esitettävään tulokseen, jonka nojalla jokainen predikaattilogiikassa määriteltävä kysely on Hanf-lokaali (Lause 4.2).

Määritelmä 4.5. Olkoon $m > 0$. Tällöin σ-mallien m-paikkainen kysely on *Gaifman-lokaali*, jos on olemassa sellainen $d \geq 0$, että kaikilla malleilla $\mathfrak{A}$ ja kaikilla jonoilla $\vec{a}_1, \vec{a}_2 \in A^m$ pätee:

$$\text{Jos } \vec{a}_1 \approx_d \vec{a}_2, \text{ niin } \vec{a}_1 \in Q(\mathfrak{A}) \text{ täsmälleen, kun } \vec{a}_2 \in Q(\mathfrak{A}).$$

Pienin luku d, jolla edellä esitetty ehto toteutuu, on *kyselyn Q lokaalisuusaste* $\mathrm{lr}(Q)$.

Toisin kuin Hanf-lokaalisuudella, Gaifman-lokaalisuudella tarkastellaan määriteltävyyttä vain yhden mallin, mutta sen kahden eri jonon suhteen. Kyselyn Q määrittelemättömyys osoitetaan kuitenkin vastaavasti kuin Hanf-lokaalisuudella; osoitetaan että kysely Q ei ole Gaifman-lokaali ja vedotaan kohta esitettävään tulokseen, jonka nojalla jokainen predikaattilogiikassa määriteltävä m-paikkainen kysely on Gaifman-lokaali (Seuraus 4.2). Huomaa, että Gaifman-lokaalisuuden määritelmässä oletetaan, että $m > 0$, joten Gaifman-lokaalisuuden avulla ei voida tarkastella Boolen kyselyitä.

Lause 4.2. *Jokainen predikaattilogiikassa määriteltävä kysely Q on Hanf-lokaali. Lisäksi jos Q voidaan ilmaista kaavalla $\varphi(\vec{x}) \in \mathrm{FO}[k]$, niin*

$$\mathrm{hlr}(Q) \leq \frac{3^k - 1}{2}.$$

Todistus. Olkoon Q m-paikkainen kysely, $\vec{x} = (x_1, \dots, x_m)$, $\vec{a} \in A^m$ ja $\vec{b} \in B^m$. Todistetaan väite induktiolla kvanttoriasteen k suhteen.

Oletetaan ensin, että kysely Q voidaan ilmaista kaavalla $\varphi(\vec{x}) \in \mathrm{FO}[0]$. Nyt jos $(\mathfrak{A}, \vec{a}) \leftrightarrows_0 (\mathfrak{B}, \vec{b})$, niin $N_0(\vec{a}) \cong N_0(\vec{b})$. Tällöin $h : \{a_1, \dots, a_m\} \to \{b_1, \dots, b_m\}$ on osittaisisomorfismi mallilta $\mathfrak{A}$ mallille $\mathfrak{B}$ eli $(\mathfrak{A}, \vec{a}) \equiv_0 (\mathfrak{B}, \vec{b})$. Nyt Ehrenfeuchtin ja Fraïssén lauseen 3.1 nojalla $(\mathfrak{A}, \vec{a}) \sim_0 (\mathfrak{B}, \vec{b})$, joten jokaisella $\varphi(\vec{x}) \in \mathrm{FO}[0]$ pätee $\mathfrak{A} \models \varphi[\vec{a}/\vec{x}]$ jos ja vain jos $\mathfrak{B} \models \varphi[\vec{b}/\vec{x}]$. Siis Q on Hanf-lokaali ja

$$\mathrm{hlr}(Q) = 0 = \frac{3^0 - 1}{2},$$

kun Q on kysely, joka voidaan ilmaista kaavalla $\varphi(\vec{x}) \in \mathrm{FO}[0]$.

Tehdään sitten induktio-oletus, että jokaisella $m \in \mathbb{N}$ pätee: jos m-paikkainen kysely Q voidaan ilmaista kaavalla $\varphi(\vec{x}) \in \mathrm{FO}[k]$, niin Q on Hanf-lokaali ja

$$\mathrm{hlr}(Q) \leq \frac{3^k - 1}{2}.$$

Oletetaan sitten, että Q voidaan ilmaista kaavalla $\psi(\vec{c}) \in \mathrm{FO}[k+1]$. Tällöin $\psi(\vec{x})$ on Boolen kombinaatio kaavoista $\exists z\varphi_1(\vec{x}, z), \ldots, \exists z\varphi_l(\vec{x}, z)$, missä $\varphi_i(\vec{x}, z) \in \mathrm{FO}[k]$ jokaisella $i \in \{1, \ldots, l\}$. Olkoon nyt $Q_1, \ldots, Q_l$ sellaiset $m+1$-paikkaiset kyselyt, että jokainen Q_i voidaan ilmaista kaavalla $\varphi_i(\vec{x}, z) \in \mathrm{FO}[k]$, missä $i \in \{1, \ldots, l\}$. Tällöin induktio-oletuksen nojalla jokainen Q_i on Hanf-lokaali ja

$$\mathrm{hlr}(Q_i) \leq \frac{3^k - 1}{2} = d.$$

Nyt jos $(\mathfrak{A}, \vec{a}) \leftrightarrows_{3d+1} (\mathfrak{B}, \vec{b})$, niin seurauksen 4.1 nojalla on olemassa sellainen bijektio $f : A \to B$, että jokaisella $c \in A$ pätee $(\mathfrak{A}, \vec{a}c) \leftrightarrows_d (\mathfrak{B}, \vec{b}f(c))$. Siis induktio-oletuksen nojalla $\mathfrak{A} \models \varphi[\vec{a}/\vec{x}, c/z]$ jos ja vain jos $\mathfrak{B} \models \varphi[\vec{b}/\vec{x}, f(c)/z]$. Tällöin

$$\begin{aligned}
\mathfrak{A} \models \exists z\varphi[\vec{a}/\vec{x}] \quad &\Rightarrow \quad \mathfrak{A} \models \varphi[\vec{a}/\vec{x}, c/z] \text{ jollakin } c \in A \\
&\Rightarrow \quad \mathfrak{B} \models \varphi[\vec{b}/\vec{x}, f(c)/z] \\
&\Rightarrow \quad \mathfrak{B} \models \exists z\varphi[\vec{b}/\vec{x}].
\end{aligned}$$

Vastaavasti, jos $\mathfrak{B} \models \exists z\varphi[\vec{b}/\vec{x}]$, niin $\mathfrak{A} \models \exists z\varphi[\vec{a}/\vec{x}]$. Siis, jos kysely Q voidaan ilmaista kaavalla $\psi(\vec{x}) \in \mathrm{FO}[k]$, niin Q on Hanf-lokaali ja

$$\mathrm{hlr}(Q) \leq 3d + 1 = \frac{3^{k+1} - 1}{2}.$$

□

Lause 4.3. *Olkoon $m > 0$ ja Q m-paikkainen kysely. Tällöin, jos Q on Hanf-lokaali, niin Q on myös Gaifman-lokaali ja*

$$\mathrm{lr}(Q) \leq 3 \cdot \mathrm{hlr}(Q) + 1.$$

Todistus. Olkoon $m > 0$ ja olkoon Q sellainen σ-mallien m-paikkainen kysely, että $\mathrm{hlr}(Q) = d$. Olkoon $\mathfrak{A}$ σ-malli ja oletetaan, että $\vec{a}_1 \approx_{3d+1} \vec{a}_2$. Koska $\mathfrak{A} \leftrightarrows_d \mathfrak{A}$, niin lauseen 4.1 nojalla $(\mathfrak{A}, \vec{a}_1) \leftrightarrows_d (\mathfrak{A}, \vec{a}_2)$. Koska Q on Hanf-lokaali, niin $\vec{a}_1 \in Q(\mathfrak{A})$ jos ja vain jos $\vec{a}_2 \in Q(\mathfrak{A})$, joten Q on Gaifman-lokaali ja $\mathrm{lr}(Q) \leq 3d + 1$. □

Seuraus 4.2. *Olkoon $m > 0$. Jokainen predikaattilogiikassa määriteltävä m-paikkainen kysely Q on Gaifman-lokaali. Lisäksi, jos Q voidaan ilmaista kaavalla $\varphi(\vec{x}) \in \mathrm{FO}[k]$, niin*

$$\mathrm{lr}(Q) \leq \frac{3^{k+1} - 1}{2}.$$

Todistus. Olkoon $m > 0$ ja Q m-paikkainen kysely. Lauseen 4.2 nojalla Q on Hanf-lokaali, jolloin edelleen lauseen 4.3 nojalla Q on Gaifman-lokaali.

Lisäksi

$$\begin{aligned} \mathrm{lr}(Q) &\leq 3 \cdot \mathrm{hlr}(Q) + 1 \\ &\leq 3 \cdot \frac{3^k - 1}{2} + 1 \\ &= \frac{3^{k+1} - 1}{2}. \end{aligned}$$

□

Näin ollen jokainen predikaattilogiikassa määriteltävä kysely Q on lokaali ja täten predikaattilogiikka on *lokaali*. Annetaan vielä esimerkit sekä Hanf-lokaalisuuden että Gaifman-lokaalisuuden soveltamisesta määrittelemättömyyden osoittamiseen.

Esimerkki 4.1. Graafin yhtenäisyys ei ole määriteltävä predikaattilogiikassa.

Todistus. Olkoon Q_{gc} graafin yhtenäisyyttä testaava Boolen kysely. Siis jokaisella graafilla $\mathfrak{G}$ pätee $Q_{gc}(\mathfrak{G}) = \top$ jos ja vain jos graafi $\mathfrak{G}$ on yhtenäinen. Osoitetaan, ettei kysely Q_{gc} ole Hanf-lokali, jolloin väite seuraa lauseesta 4.2. Tehdään vastaoletus, että kysely Q_{gc} on Hanf-lokaali ja olkoon $\mathrm{hlr}(Q_{gc}) = d$. Olkoon $m > 2d + 1$ ja tarkastellaan graafeja $\mathfrak{G}_1$ ja $\mathfrak{G}_2$, joista graafi $\mathfrak{G}_1$ koostuu kahdesta syklistä, joista kummankin pituus on m ja graafi $\mathfrak{G}_2$ koostuu yhdestä syklistä, jonka pituus on $2m$. Siis graafin $\mathfrak{G}_1$ solmujen joukon mahtavuus $G_1 = |2m|$ on sama kuin graafin $\mathfrak{G}_2$ solmujen joukon $G_2 = |2m|$ mahtavuus.

Olkoon $f : G_1 \to G_2$ mielivaltainen bijektio. Koska sekä molemmat graafin $\mathfrak{G}_1$ syklit että graafin $\mathfrak{G}_2$ ainoa sykli ovat pituudeltaan $> 2d + 1$, niin jokaisen solmun $a \in G_1$ ja $b \in G_2$ d-ympäristö on isomorfinen muiden solmujen d-ympäristöjen kanssa; jokaisen solmun c d-ympäristö on ketju, jonka pituus on $2d$ ja ketjun keskellä on solmu c. Näin ollen $\mathfrak{G}_1 \leftrightarrows_d \mathfrak{G}_2$, joten $Q_{gc}(\mathfrak{G}_1) = Q_{gc}(\mathfrak{G}_2)$. Tämä on ristiriita, sillä selvästi $Q_{gc}(\mathfrak{G}_1) = \top$ ja $Q_{gc}(\mathfrak{G}_2) = \bot$. Siis kysely Q_{gc} ei ole Hanf-lokaali. □

Esimerkki 4.2. Esimerkissä 2.1 määritelty graafin transitiivisen sulkeuman kysely ei ole määriteltävä predikaattilogiikassa.

Todistus. Tehdään vastaoletus, että kysely Q_{tc} on määriteltävä predikaattilogiikassa, jolloin seurauksen 4.2 nojalla kysely Q_{tc} on Gaifman-lokaali. Määritellään seuraaja-relaatio kuten esimerkissä 3.5 ja tarkastellaan seuraajarelaation määrittämää graafia $\mathfrak{G}_n$, jonka solmujen joukko on $G = \{0, \ldots, n-1\}$, missä $n \in \mathbb{N}$.

Olkoon $\mathrm{lr}(Q_{tc}) = r$ ja oletetaan, että $a, b \in G$ ovat sellaiset alkiot, että niiden etäisyys toisistaan sekä niiden etäisyydet päätepisteistä ovat enemmän kuin $2r+1$. Siis $d_{\mathfrak{G}_n}(a, b), d_{\mathfrak{G}_n}(a, 0), d_{\mathfrak{G}_n}(b, 0), d_{\mathfrak{G}_n}(a, n-1), d_{\mathfrak{G}_n}(b, n-1) > 2r+1$. Nyt, jos $\vec{a}_1 = (a, b)$ ja $\vec{a}_2 = (b, a)$, niin $N_r(\vec{a}_1) \cong N_r(\vec{a}_2)$. Koska Q_{tc} on Gaifman-lokaali ja $\vec{a}_1 \in Q_{tc}(\mathfrak{G}_n)$, niin tällöin myös $\vec{a}_2 \in Q_{tc}(\mathfrak{G}_n)$. Tämä on ristiriita, joten transitiivisen sulkeuman kysely ei ole Gaifman-lokaali eikä näin ollen määriteltävä predikaattilogiikassa. □

4.3 Pieniasteiset mallit

Määritellään vielä *pieniasteiset mallit* ja *kyselyn Q astelukujen joukon rajoittuneisuus*. Osoitetaan Gaifman-lokaalisuuden avulla, että myös astelukujen joukon rajoittuneisuus on ominaisuus, jonka avulla voidaan tarkastella kyselyn Q määriteltävyyttä predikaattilogiikassa.

Määritelmä 4.6. Olkoon σ aakkosto, $\mathfrak{A}$ σ-malli ja $R \in \sigma$ m-paikkainen relaatiosymboli. Määritellään jokaiselle $a \in A$ ja $i \leq m$ *asteluku*

$$\deg_i^{\mathfrak{A}}(R, a) = \left|\{(a_1, \ldots, a_{i-1}, a, a_{i+1}, \ldots, a_m) \in R^{\mathfrak{A}} \mid a_1, \ldots, a_m \in A\}\right|.$$

Asteluku $\deg_i^{\mathfrak{A}}(R, a)$ kertoo siis, kuinka monessa jonossa $\vec{t} \in R^{\mathfrak{A}}$ alkio a esiintyy paikalla i. Kun malli $\mathfrak{A}$ on asiayhteydessä selvä, voidaan kirjoittaa vain $\deg_i(R, a)$. Joukkoon $\mathrm{degset}(\mathfrak{A})$ puolestaan kuuluu jokaisen $a \in A$ asteluvut:

$$\mathrm{degset}(\mathfrak{A}) = \{\deg_i^{\mathfrak{A}}(R, a) \mid a \in A,\ i \leq \mathrm{ar}(R)\}$$

Jos tarkastellaan jonkin tietyn paikan $i \leq m$ eri astelukuja, niin merkitään

$$\mathrm{degset}_i(\mathfrak{A}) = \{\deg_i^{\mathfrak{A}}(R, a) \mid a \in A, i \leq \mathrm{ar}(R) \text{ on kiinnitetty}\}.$$

Pieniasteisilla malleilla tarkoitetaan joukkoa

$$\mathrm{STR}_l[\sigma] = \{\mathfrak{A} \in \mathrm{STR}[\sigma] \mid \mathrm{degset}(\mathfrak{A}) \subseteq \{0, \ldots, l\}\}$$

jollakin kiinnitetyllä $l \in \mathbb{N}$.

Lisäksi merkitään $\mathrm{degset}(Q(\mathfrak{A})) = \mathrm{degset}(\langle A, Q(\mathfrak{A})\rangle)$, missä Q on m-paikkainen kysely.

Määritelmä 4.7. Olkoon σ aakkosto, $m > 0$ ja Q m-paikkainen kysely. *Kyselyn Q astelukujen joukko on rajoitettu*, jos on olemassa sellainen kuvaus $f_Q : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, että kaikilla $l \geq 0$ ja kaikilla $\mathfrak{A} \in \mathrm{STR}_l[\sigma]$ pätee

$$\left|\mathrm{degset}(Q(\mathfrak{A}))\right| \leq f_Q(l).$$

Määritellään seuraavaa tulosta varten luku $n_d(k)$ seuraavasti:

- $n_d(0) = d$
- $n_d(k + 1) = 3 \cdot n_d(k) + 1$

Siis $n_d(k) = 3^k \cdot d + (3^k - 1)/2$ jokaisella $k \geq 0$.

Apulause 4.3. *Olkoon $\vec{a}, \vec{b} \in A^m$ ja oletetaan, että $\vec{a} \approx_{n_d(k)} \vec{b}$. Tällöin on olemassa sellainen bijektio $f : A^k \to A^k$, että $\vec{a}\vec{c} \approx_d \vec{b}f(\vec{c})$ jokaisella $\vec{c} \in A^k$.*

Todistus. Todistetaan väite induktiolla luvun k suhteen. Selvästi väite pätee, kun $k = 0$, joten tehdään induktio-oletus, että kun $\vec{a} \approx_{n_d(k)} \vec{b}$, niin on olemassa sellainen bijektio $f : A^k \to A^k$, että $\vec{a}\vec{c} \approx_d \vec{b}f(\vec{c})$ jokaisella $\vec{c} \in A^k$.

Merkitään $r = n_d(k)$, jolloin $n_d(k+1) = 3r + 1$. Oletetaan nyt, että $\vec{a} \approx_{3r+1} \vec{b}$, jolloin lauseen 4.1 nojalla $(\mathfrak{A}, \vec{a}) \leftrightarrows_d (\mathfrak{A}, \vec{b})$. Siis on olemassa sellainen bijektio $g : A \to A$, että jokaisella $c \in A$ pätee $\vec{a}c \approx_r \vec{b}g(c)$. Tällöin induktio-oletuksen nojalla jokaiselle $c \in A$ on olemassa sellainen bijektio $g_c : A^k \to A^k$, että jokaisella $\vec{e} \in A^k$ pätee

$$\vec{a}c\vec{e} \approx_d \vec{b}g(c)g_c(\vec{e}).$$

Määritellään nyt bijektio $f : A^{k+1} \to A^{k+1}$ seuraavasti: jos $\vec{c} = c\vec{e}$, missä $\vec{e} \in A^k$, niin $f(\vec{c}) = g(c)g_c(\vec{e})$. Tällöin selvästi jokaisella $\vec{c} \in A^{k+1}$ pätee $\vec{a}\vec{c} \approx_d \vec{b}f(\vec{c})$. □

Lause 4.4. *Olkoon $m > 0$ ja Q m-paikkainen Gaifman-lokaali kysely. Tällöin kyselyn Q astelukujen joukko on rajoitettu.*

Todistus. Olkoon Q Gaifman-lokaali kysely ja oletetaan, että $\mathrm{lr}(Q) = d$. Selvästi yksipaikkaisten kyselyiden astelukujen joukko on rajoitettu, joten voidaan olettaa, että $m \geq 2$.

Jokaista aakkostoa σ kohti on olemassa sellainen kuvaus $G_\sigma : \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, että jokaisella mallilla $\mathfrak{A} \in \mathrm{STR}_l[\sigma]$ ja jokaisella alkiolla $a \in A$ pätee $|B_d^{\mathfrak{A}}(a)| \leq G_\sigma(l, d)$. Täten on olemassa sellainen funktio $F_\sigma : \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, että jokaisella mallilla $\mathfrak{A} \in \mathrm{STR}_l[\sigma]$ pätee $\sharp_d[\mathfrak{A}, \tau] \leq F_\sigma(l, d)$, kun tarkastellaan yksittäisten pisteiden d-ympäristöjä.

Tarkastellaan nyt joukkoa $Q(\mathfrak{A})$ jollakin $\mathfrak{A} \in \mathrm{STR}_l[\sigma]$. Huomataan, että apulauseen 4.3 nojalla jokaisella $a, b \in A$, jolla $a \approx_{n_d(m-1)} b$, pätee:

$$\left|\{\vec{c} \in A^{m-1} \mid a\vec{c} \in Q(\mathfrak{A})\}\right| = \left|\{\vec{c} \in A^{m-1} \mid b\vec{c} \in Q(\mathfrak{A})\}\right|.$$

Tästä seuraa erityisesti, että

$$\deg_1^{\mathfrak{A}}(Q(\mathfrak{A}), a) = \deg_1^{\mathfrak{A}}(Q(\mathfrak{A}), b).$$

Tällöin $|\deg_1(Q(\mathfrak{A}))| \leq F_\sigma(l, n_d(m-1))$ ja täten

$$|\mathrm{degset}(Q(\mathfrak{A}))| \leq m \cdot F_\sigma(l, n_d(m-1)).$$

Siis kyselyn Q astelukujen joukko on rajoitettu. □

Seuraus 4.3. *Jokaisen predikaattilogiikassa määriteltävän kyselyn Q astelukujen joukko on rajoitettu.*

Todistus. Seurauksen 4.2 nojalla jokainen predikaattilogiikassa määriteltävä kysely Q on Gaifman-lokaali ja tällöin lauseen 4.4 nojalla kyselyn Q astelukujen joukko on rajoitettu. □

Annetaan soveltamisesta esimerkkinä vielä graafin transitiivisen sulkeuman määrittelemättömyys, joka osoitettiin myös Gaifman-lokaalisuutta soveltaen esimerkissä 4.2.

Esimerkki 4.3. Graafin transitiivisen sulkeuman kysely ei ole määriteltävä predikaattilogiikassa.

Todistus. Olkoon Q graafin transitiivisen sulkeuman kysely ja määritellään seuraajarelaatio kuten esimerkissä 3.5. Olkoon $\mathfrak{G}_n$ seuraajarelaation määrittämä graafi, jonka solmujen lukumäärä on $n \in \mathbb{N}$. Siis $(j, j+1) \in E^{\mathfrak{G}_n}$ jokaisella $j \in \{0, \ldots, n-2\}$ ja selvästi $\deg_i(E, j) = 0$ tai $\deg_i(E, j) = 1$ jokaisella $j \in \{0, \ldots, n-1\}$ ja $i \in \{1, 2\}$. Siis $\mathrm{degset}(\mathfrak{G}_n) = \{0, 1\}$ ja $\mathfrak{G}_n \in \mathrm{STR}_1[\sigma]$ jokaisella $n \in \mathbb{N}$.

Graafin $\mathfrak{G}_n$ transitiivinen sulkeuma $Q(\mathfrak{G}_n)$ on lineearijärjestys $\mathfrak{L}_n$, jonka universumi on $\{0, \ldots, n-1\}$. Tällöin

$$\deg_1(<, j) = \{n - 1 - j\} \text{ ja } \deg_2(<, j) = \{n - 1 - (n - 1 - j)\}$$

jokaisella $j \in \{1, \ldots, n-1\}$. Siis $\mathrm{degset}(\mathfrak{L}_n) = \{0, \ldots, n-1\}$.

Nyt $\mathfrak{G}_n \in \mathrm{STR}_1[\sigma]$ ja $|\mathrm{degset}(Q(\mathfrak{G}_n))| = |\mathrm{degset}(\mathfrak{L}_n)| = n$. Selvästi ei voi olla olemassa sellaista kuvausta $f_Q : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, että jokaisella $n \in \mathbb{N}$ pätisi $n \leq f_Q(1)$, joten kyselyn Q asteluku ei ole rajoitettu ja näin ollen graafin transitiivinen sulkeuma ei ole määriteltävä predikaattilogiikassa. $\square$

5 Ääretön laskurilogiikka ja määriteltävyys

Predikaattilogiikan ilmaisuvoima on rajoittunut sekä rekursiivisten mekanismien että laskentaominaisuuden puuttumisen takia. Tässä luvussa esitetään predikaattilogiikan laajennos, *ääretön laskurilogiikka*, jonka avulla saadaan lisättyä predikaattilogiikkaan näistä laskennallista ilmaisuvoimaa.

5.1 Ääretön laskurilogiikka

Muodostetaan ääretön laskurilogiikka $\mathcal{L}^r_{\infty\omega}(\mathbf{Cnt})$ vaiheittain. Määritellään ensin *laskuripredikaattilogiikka* ja *laskurikvanttori* $\exists i$, jonka avulla voidaan ilmaista joukkojen $\varphi(\mathfrak{A}) = \{a \in A \mid \mathfrak{A} \models \varphi[a/x]\}$ mahtavuuksia. Intuitiivisesti kaava $\exists ix\varphi(x)$ on tosi jos ja vain jos on olemassa vähintään i kappaletta sellaisia alkioita $a \in A$, että $\mathfrak{A} \models \varphi[a/x]$.

Määritelmä 5.1 (Laskuripredikaattilogiikka)**.** Määritellään ensin *aakkoston σ malli laskuripredikaattilogiikalle*:

(5.1) $$\mathfrak{A}' = \langle\{a_1, \ldots, a_n\}, \{1, \ldots, n\}, \{R_i^{\mathfrak{A}} \mid i \in I\}, +, \times, \underline{\min}, \underline{\max}\rangle$$

missä

- $\mathfrak{A} = \langle\{a_1, \ldots, a_n\}, \{R_i^{\mathfrak{A}} \mid i \in I\}\rangle \in \mathrm{STR}[\sigma]$ ja $\{a_1, \ldots, a_n\}$ on mallin $\mathfrak{A}'$ *ei-numeerinen universumi*.
- $\{1, \ldots, n\}$ on mallin $\mathfrak{A}'$ *numeerinen universumi*.
- $+$ ja $\times \subseteq (\{1, \ldots, n\})^3$ ovat *numeerisia relaatioita*.
- $\underline{\min}$ ja $\underline{\max}$ ovat vakiosymboleita, joiden tulkinnat $\underline{\min}^{\mathfrak{A}'} = 1$ ja $\underline{\max}^{\mathfrak{A}'} = n$, missä 1 on numeerisen universumin pienin alkio ja n on numeerisen universumin suurin alkio.

Merkitään edelleen ei-numeerisen universumin muuttujia x, y, z sekä muuttujajonoja $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ ja merkitään numeerisen universumin muuttujia i, j, k sekä muuttujajonoja $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$. Jos $(i, j, k) \in +$, niin käytetään tavanomaista merkintää $i + j = k$ sekä vastaavasti, jos $(i, j, k) \in \times$, niin merkitään $i \cdot j = k$.

Laskuripredikaattilogiikka, FO(**Cnt**), muodostetaan tekemällä seuraavat laajennokset predikaattilogiikkaan:

- Vakiot $\underline{\min}$ ja $\underline{\max}$ sekä jokainen numeerinen muuttuja i ovat *numeerisia termejä*.
- Jos t_1, t_2, t_3 ovat numeerisia termejä, niin $+(t_1, t_2, t_3)$ ja $\times(t_1, t_2, t_3)$ ovat *numeerisia kaavoja*.

- Jos $\varphi(\vec{x}, \vec{\imath})$ on kaava, niin $\exists i \varphi(\vec{x}, \vec{\imath})$ on kaava, missä kvanttori $\exists i$ sitoo numeerisen muuttujan i.
- Jos $\varphi(y, \vec{x}, \vec{\jmath})$ on kaava, niin $\psi(\vec{x}, i, \vec{\jmath}) = \exists i y \varphi(y, \vec{x}, \vec{\imath})$ on kaava, missä kvanttori $\exists i y$ sitoo ei-numeerisen muuttujan y, mutta ei sido numeerista muuttujaa i.

Laskuripredikaattilogiikan semantiikka muodostetaan tekemällä seuraavat lisäykset predikaattilogiikan semantiikkaan:

- $\mathfrak{A}' \models +(i, j, k)[p/i, r/j, s/k]$ jos ja vain jos $p + r = s$
- $\mathfrak{A}' \models \times(i, j, k)[p/i, r/j, s/k]$ jos ja vain jos $p \cdot r = s$
- Olkoon $\psi(\vec{x}, \vec{\jmath}) = \exists i \varphi(\vec{x}, i, \vec{\jmath})$. Nyt $\mathfrak{A}' \models \psi[\vec{a}/\vec{x}, \vec{m}/\vec{\jmath}]$ jos ja vain jos
$$\mathfrak{A}' \models \varphi[\vec{a}/\vec{x}, l/i, \vec{m}/\vec{\jmath}] \text{ jollakin } l \in \{1, \ldots, n\}.$$
- Olkoon $\psi(\vec{x}, i, \vec{\jmath}) = \exists i y \varphi(y, \vec{x}, \vec{\jmath})$. Nyt $\mathfrak{A}' \models \psi[\vec{a}/\vec{x}, p/i, \vec{r}/\vec{\jmath}]$ jos ja vain jos
$$|\{b \in \{a_1, \ldots, a_1\} \mid \mathfrak{A} \models \varphi[b/y, \vec{a}/\vec{x}, \vec{r}/\vec{\jmath}]\}| \geq p.$$

Esitetään vielä muutaman esimerkin avulla, miten laskurikvanttorin avulla voidaan ilmaista joukkojen $\varphi(\mathfrak{A})$ mahtavuuksia.

Esimerkki 5.1. Tutkitaan joukon $\varphi(\mathfrak{A})$ mahtavuutta tarkastelemalla seuraavaa lausetta $\Phi \in \mathrm{FO}(\mathbf{Cnt})$

$$\Phi = \exists i \exists j \big((j + j = i) \wedge \exists i x \varphi(x) \wedge (\forall k(k > i) \neg \exists k x \varphi(x))\big).$$

Nyt $\mathfrak{A}' \models \Phi$ jos ja vain jos on olemassa sellaiset luvut $p, r \in \{1, \ldots, n\}$, että

- $p = 2r$ eli p on parillinen,
- $|\varphi(\mathfrak{A})| \geq p$,
- jokaisella $s > p$ pätee $|\varphi(\mathfrak{A})| < s$.

Näin ollen $\mathfrak{A}' \models \Phi$ jos ja vain jos $|\varphi(\mathfrak{A})|$ on parillinen.

Esimerkki 5.2. Tarkastellaan lausetta $\Phi = \exists i\big(\exists i x \varphi(x) \wedge \neg \exists i x \psi(x)\big) \in \mathrm{FO}(\mathbf{Cnt})$, missä $\varphi(x), \psi(x) \in \mathrm{FO}$. Nyt $\mathfrak{A}' \models \Phi$ jos ja vain jos on olemassa sellainen luku $p \in \{1, \ldots, n\}$, että $|\varphi(\mathfrak{A})| \geq p$ ja $|\psi(\mathfrak{A})| < p$. Näin ollen $\mathfrak{A}' \models \Phi$ jos ja vain jos $|\varphi(\mathfrak{A})| > |\psi(\mathfrak{A})|$.

Esimerkki 5.3. Määritellään kaava $\exists! i x(x, \vec{y}, \vec{\imath}) \in \mathrm{FO}(\mathbf{Cnt})$ seuraavasti

$$\exists! i x(x, \vec{y}, \vec{\imath}) = \exists i x \varphi(x, \vec{y}, \vec{\imath}) \wedge \forall k\big((k > i) \to \neg \exists k x \varphi(\vec{x}, \vec{y}, \vec{\imath})\big).$$

Nyt $\mathfrak{A}' \models \exists! i x \varphi(x, \vec{y}, \vec{\imath})$ jos ja vain jos on olemassa sellainen $p \in \{1, \ldots, n\}$, että

- $|\varphi(\mathfrak{A})| \geq p$ ja

- jos $r > p$, niin $|\varphi(\mathfrak{A})| < p$.

Siis $\mathfrak{A}' \models \exists! i x \varphi(x, \vec{y}, \vec{\imath})$ jos ja vain jos on olemassa tasan p kappaletta sellaisia alkiota $a \in A$, joilla $\mathfrak{A} \models \varphi[a/x, \vec{b}/\vec{y}, \vec{r}/\vec{\imath}]$.

Määritellään seuraavaksi äärettömien konnektiivien logiikka $\mathcal{L}_{\infty\omega}$.

Määritelmä 5.2 (Äärettömät konnektiivit ja $\mathcal{L}_{\infty\omega}$)**.** *Äärettömien konnektiivien logiikka* $\mathcal{L}_{\infty\omega}$ on predikaattilogiikan laajennos, johon on lisätty *äärettömät konnektiivit* $\bigvee$ ja $\bigwedge$. Jos kaavat φ_i, $i \in I$, ovat predikaattilogiikan kaavoja, niin

$$\bigvee_{i \in I} \varphi_i \quad \text{ja} \quad \bigwedge_{i \in I} \varphi_i$$

ovat kaavoja, joilla

- $\mathfrak{A} \models \big(\bigvee_{i \in I} \varphi_i\big)[\vec{a}/\vec{x}]$ jos ja vain jos $\mathfrak{A} \models \varphi_i[\vec{a}/\vec{x}]$ jollakin $i \in I$,
- $\mathfrak{A} \models \big(\bigwedge_{i \in I} \varphi_i\big)[\vec{a}/\vec{x}]$ jos ja vain jos $\mathfrak{A} \models \varphi_i[\vec{a}/\vec{x}]$ kaikilla $i \in I$.

Tässä joukko I saa olla myös ääretön. Lisäksi oletetaan, että $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_m)$ ja $\mathrm{free}(\varphi_i) \subseteq \{x_1, \ldots, x_m\}$ jokaisella $i \in I$.

Lause 5.1. *Olkoon C isomorfismin suhteen suljettu luokka äärellisiä malleja. Tällöin on olemassa sellainen lause $\Phi_C \in \mathcal{L}_{\infty\omega}$, että jokaisella mallilla $\mathfrak{A}$ pätee*

$$\mathfrak{A} \in C \text{ jos ja vain jos } \mathfrak{A} \models \Phi_C.$$

Todistus. Lauseen 2.7 jokaisella äärellisellä mallilla $\mathfrak{B}$ on olemassa sellainen lause $\Phi_{\mathfrak{B}}$, että jokaisella äärellisellä mallilla $\mathfrak{A}$ pätee: $\mathfrak{A} \models \Phi_{\mathfrak{B}}$ jos ja vain jos $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$. Olkoon $\Phi_C = \bigvee_{\mathfrak{B} \in C} \Phi_{\mathfrak{B}}$. Nyt selvästi $\mathfrak{A} \models \Phi_C$ jos ja vain jos $\mathfrak{A} \in C$. □

Edellisen tuloksen nojalla äärettömien konnektiivien logiikalla $\mathcal{L}_{\infty\omega}$ voidaan ilmaista mielivaltaisia äärellisten mallien ominaisuuksia, mikä tekee siitä liian tehokkaan, jos määriteltävyyden tarkastelu halutaan pitää kiinnostavana. Määritellään vielä termien ja kaavojen *asteet*, jonka jälkeen voidaan määritellä *ääretön laskurilogiikka*.

Määritelmä 5.3. Termien t sekä kaavojen φ *asteet* $\mathrm{rk}(t)$ ja $\mathrm{rk}(\varphi)$ määritellään seuraavasti:

- $\mathrm{rk}(t) = 0$, jos t on muuttuja tai muotoa $k \in \mathbb{N}$ oleva numeerinen termi
- $\mathrm{rk}(t_1 \approx t_2) = \max\{\mathrm{rk}(t_1), \mathrm{rk}(t_2)\}$, missä t_1 ja t_2 ovat termejä
- $\mathrm{rk}(\varphi) = 0$, jos $\varphi \in \mathrm{FO}$ on atomikaava
- $\mathrm{rk}(\neg\varphi) = \mathrm{rk}(\varphi)$
- $\mathrm{rk}\big(\bigvee_{j \in J} \varphi_j\big) = \mathrm{rk}\big(\bigwedge_{j \in J} \varphi_j\big) = \max\{\mathrm{rk}(\varphi_j) \mid j \in J\}$

- $\mathrm{rk}(\forall x\varphi) = \mathrm{rk}(\exists x\varphi) = \mathrm{rk}(\exists i x\varphi) = \mathrm{rk}(\varphi) + 1$
- $\mathrm{rk}(\forall i\varphi) = \mathrm{rk}(\exists i\varphi) = \mathrm{rk}(\varphi)$

Jos siis $\varphi \in \mathrm{FO}$, niin $\mathrm{rk}(\varphi) = \mathrm{qr}(\varphi)$.

Määritelmä 5.4. *Ääretön laskurilogiikka* $\mathcal{L}^r_{\infty\omega}(\mathbf{Cnt})$ muodostetaan yhdistämällä Äärettömien konnektiivien logiikka (määritelmä 5.2) sekä Laskuripredikaattilogiikka (määritelmä 5.1) ja tekemällä niiden yhdistelmään seuraavat lisäykset:

- Mallit ovat muotoa

  (5.2) $$\mathfrak{A}' = \langle\{a_1, \dots, a_n\}, \{1, \dots, n\}, \{R_i^{\mathfrak{A}} \mid i \in I\}, +, \times, \{l \mid l \le n\}\rangle,$$

  missä $\mathfrak{A} = \langle\{a_1, \dots, a_n\}, \{R_i^{\mathfrak{A}} \mid i \in I\}\rangle \in \mathrm{STR}[\sigma]$, $\{1, \dots, n\}$ on mallin numeerinen universumi ja $\{l \mid l \le n\}$ ovat numeerisia vakioita.

- Jokainen numeerinen muuttuja sekä numeerinen vakio on numeerinen termi.
- Jokaisella termillä $t \in \mathcal{L}^r_{\infty\omega}(\mathbf{Cnt})$ ja kaavalla $\varphi \in \mathcal{L}^r_{\infty\omega}(\mathbf{Cnt})$ pätee $\mathrm{rk}(t) \le r$ ja $\mathrm{rk}(\varphi) \le r$.

Olkoon $k \le r$. Merkitään $\mathfrak{A}' \sim_k \mathfrak{B}'$, kun jokaisella lauseella $\Phi \in \mathcal{L}^r_{\infty\omega}(\mathbf{Cnt})$, jolla $\mathrm{rk}(\Phi) = k$, pätee $\mathfrak{A}' \models \Phi$ jos ja vain jos $\mathfrak{B}' \models \Phi$.

Selvästi, jos $\psi \in \mathrm{FO}$ tai $\psi \in \mathrm{FO}(\mathbf{Cnt})$ tai, niin on olemassa sellainen kaava $\varphi \in \mathcal{L}^r_{\infty\omega}(\mathbf{Cnt})$, että

$$\psi \Leftrightarrow \varphi \quad \text{ja} \quad \mathrm{rk}(\psi) = \mathrm{rk}(\varphi).$$

Olkoon Q m-paikkainen kysely ja $\vec{x} = (x_1, \dots, x_m)$. Määritelmän 2.13 mukaisesti, kysely Q on määriteltävä äärettömässä laskurilogiikassa, jos on olemassa sellainen kaava $\varphi(\vec{x}) \in \mathcal{L}^r_{\infty\omega}(\mathbf{Cnt})$, että jokaisella mallilla $\mathfrak{A}$ pätee

$$Q(\mathfrak{A}') = \{\vec{a} \in A^m \mid \mathfrak{A}' \models \varphi[\vec{a}/\vec{x}]\}$$

ja tällöin kaava $\varphi(\vec{x})$ ilmaisee kyselyn Q.

On myös mahdollista, että kysely Q voidaan ilmaista sellaisella kaavalla, jonka vapaiden muuttujien joukko sisältää myös numeerisia muuttujia. Tällöin kysely Q on määriteltävä, jos on olemassa sellainen kaava $\varphi(\vec{x}, \vec{\imath}) \in \mathcal{L}^r_{\infty\omega}(\mathbf{Cnt})$, että

$$Q(\mathfrak{A}', \vec{p}) = \{\vec{a} \in A^m \mid \mathfrak{A}' \models \varphi[\vec{a}/\vec{x}, \vec{p}/\vec{\imath}]\},$$

ja tällöin kaava $\varphi(\vec{x}, \vec{\imath}) \in \mathcal{L}^r_{\infty\omega}(\mathbf{Cnt})$ ilmaisee kyselyn Q. Määritelmä on vastaava myös kyselyille Q, jotka voidaan ilmaistaa kaavalla $\varphi(\vec{x}, \vec{\imath}) \in \mathrm{FO}(\mathbf{Cnt})$.

Jos $< \in \sigma$, niin σ-malli $\mathfrak{A}$ on *järjestetty*. Äärettömän laskurilogiikan ilmaisuvoima on huomattavasti predikaattilogiikan ilmaisuvoimaa tehokkaampi järjestettyjen mallien tapauksessa.

Lause 5.2. *Jokainen äärellisten järjestettyjen mallien ominaisuus on määriteltävä äärettömässä laskurilogiikassa* $\mathcal{L}^r_{\infty\omega}(\mathbf{Cnt})$.

Todistus. Ks. [1, s.148-150]. □

5.2 Bijektiivinen Ehrenfeucht-Fraïssé peli

Aiemmin luvussa 3 esitettiin, miten määriteltävyys predikaattilogiikassa on yhteydessä Ehrenfeucht-Fraïssé pelien voittostrategioihin sekä luvussa 4 todistettiin predikaattilogiikan lokaalisuus Ehrenfeucht-Fraïssé pelien avulla. Tässä osiossa esitellään *bijektiivinen Ehrenfeucht-Fraïssé peli*, jonka avulla osoitetaan äärettömän laskurilogiikan lokaalisuus.

Määritelmä 5.5. Olkoot $\mathfrak{A}$ ja $\mathfrak{B}$ σ-malleja. *Bijektiivistä Ehrenfeucht-Fraïssé peliä* (tai vain *bijektiivistä peliä*) $\mathrm{EFG}_k^{bij}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ pelataan $k \in \mathbb{N}$ kierrosta pelaajien S ja D välillä. Jokainen kierros $i \in \{1, \ldots, k\}$ etenee seuraavasti:

1. Pelaaja D valitsee jonkin bijektion $f_i : A \to B$.

2. Pelaaja S valitsee alkion $a_i \in A$.

3. Pelaajan D valinta on $b_i = f(a_i) \in B$.

Kuten Ehrenfeuch-Fraïssé peleissäkin, pelaajalla D on voittostrategia pelissä $\mathrm{EFG}_k^{bij}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$, jos pelaaja D pystyy tekemään siirtonsa niin, että riippumatta pelaajan S siirroista, kuvaus

$$p : \{a_1, \ldots, a_k\} \cup \{c_1^{\mathfrak{A}}, \ldots, c_l^{\mathfrak{A}}\} \to \{b_1, \ldots, b_k\} \cup \{c_1^{\mathfrak{B}}, \ldots, c_l^{\mathfrak{B}}\}$$

jolla $p(a_i) = b_i$ jokaisella $i \leq k$ sekä $p(c_j^{\mathfrak{A}}) = c_j^{\mathfrak{B}}$ jokaisella $j \leq l$, missä $c_1, \ldots, c_l$ ovat kaikki aakkoston σ vakiosymbolit, on osittaisisomorfismi mallilta $\mathfrak{A}$ mallille $\mathfrak{B}$. Tällöin merkitään $\mathfrak{A} \equiv_k^{bij} \mathfrak{B}$. Jos pelissä $\mathrm{EFG}_k(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ pelaajalla D ei ole voittostrategiaa, niin pelaajalla S on voittostrategia.

Jos $|A| \neq |B|$, niin pelaaja S voittaa pelin jo ensimmäisellä siirrolla. Selvästi, jos $\mathfrak{A} \equiv_k^{bij} \mathfrak{B}$, niin $\mathfrak{A} \equiv_k \mathfrak{B}$.

Määritelmä 5.6. Olkoon $\vec{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ ja $\vec{b} = (b_1, \ldots, b_n)$. Määritellään σ_n-mallien välinen *bijektiivinen back-and-forth relaatio* $\simeq_k^{bij}$, $k \in \mathbb{N}$, seuraavasti:

- $(\mathfrak{A}, \vec{a}) \simeq_0^{bij} (\mathfrak{B}, \vec{b})$ jos ja vain jos $(\mathfrak{A}, \vec{a}) \equiv_0 (\mathfrak{B}, \vec{b})$

- $(\mathfrak{A}, \vec{a}) \simeq_{k+1}^{bij} (\mathfrak{B}, \vec{b})$ jos ja vain jos on olemassa sellainen bijektio $f : A \to B$, että seuraavat ehdot ovat voimassa:

  Forth: Jokaisella $a \in A$ pätee $(\mathfrak{A}, \vec{a}a) \simeq_k^{bij} (\mathfrak{B}, \vec{b}f(a))$.

  Back: Jokaisella $b \in B$ pätee $(\mathfrak{A}, \vec{a}f^{-1}(b)) \simeq_k^{bij} (\mathfrak{B}, \vec{b}b)$.

Koska kuvaus f on bijektio, riittää aina tarkastaa, että toinen ehdoista *Forth* tai *Back* toteutuu.

Lause 5.3. *Olkoon* $\mathfrak{A}$ *ja* $\mathfrak{B}$ σ*-malleja ja* $\vec{a} \in A^n$ *sekä* $\vec{b} \in B^n$*. Tällöin jokaisella* $k \in \mathbb{N}$ *pätee:*

$$(\mathfrak{A}, \vec{a}) \simeq_k^{bij} (\mathfrak{B}, \vec{b}) \text{ jos ja vain jos } (\mathfrak{A}, \vec{a}) \equiv_k^{bij} (\mathfrak{B}, \vec{b}).$$

Todistus. Todistetaan oleellisesti samoin kuin lause 3.2. □

Seuraus 5.1. *Jos* $(\mathfrak{A}, \vec{a}) \leftrightarrows_{(3^k-1)/2} (\mathfrak{B}, \vec{b})$*, niin* $(\mathfrak{A}, \vec{a}) \equiv_k^{bij} (\mathfrak{B}, \vec{b})$.

Todistus. Todistetaan väite induktiolla kierrosten lukumäärän k suhteen. Jos $k = 0$, niin $(3^0-1)/2 = 0$ ja jos $(\mathfrak{A}, \vec{a}) \leftrightarrows_0 (\mathfrak{B}, \vec{b})$, niin selvästi pelaajalla D on voittostrategia pelissä $\mathrm{EFG}_0^{bij}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$. Merkitään $(3^k - 1)/2 = d$, jolloin $(3^{k+1} - 1)/2 = 3d + 1$ ja tehdään induktio-oletus, että jos $(\mathfrak{A}, \vec{a}) \leftrightarrows_d (\mathfrak{B}, \vec{b})$, niin $(\mathfrak{A}, \vec{a}) \equiv_k^{bij} (\mathfrak{B}, \vec{b})$.

Oletetaan sitten, että $(\mathfrak{A}, \vec{a}) \leftrightarrows_{3d+1} (\mathfrak{B}, \vec{b})$, jolloin seurauksen 4.1 nojalla on olemassa sellainen bijektio $f : A \to B$, että $(\mathfrak{A}, \vec{a}c) \leftrightarrows_d (\mathfrak{B}, \vec{b}f(c))$ jokaisella $c \in A$. Tällöin induktio-oletuksen nojalla $(\mathfrak{A}, \vec{a}c) \equiv_k^{bij} (\mathfrak{B}, \vec{b}f(c))$ ja edelleen lauseen 5.3 nojalla $(\mathfrak{A}, \vec{a}c) \simeq_k^{bij} (\mathfrak{B}, \vec{b}f(c))$. Relaation $\simeq_k^{bij}$ määritelmän nojalla taas tällöin $(\mathfrak{A}, \vec{a}) \simeq_{k+1}^{bij} (\mathfrak{B}, \vec{b})$ ja edelleen lauseen 5.3 nojalla $(\mathfrak{A}, \vec{a}) \equiv_{k+1}^{bij} (\mathfrak{B}, \vec{b})$. □

Lause 5.4. *Olkoon* $\mathfrak{A}$ *ja* $\mathfrak{B}$ σ*-malleja,* $\mathfrak{A}'$ *ja* $\mathfrak{B}'$ *muotoa* (5.2) *olevia malleja sekä* $k \leq n$*. Tällöin, jos* $\mathfrak{A} \equiv_k^{bij} \mathfrak{B}$*, niin* $\mathfrak{A}' \sim_k \mathfrak{B}'$.

Todistus. Oletetaan, että $\mathfrak{A} \equiv_k^{bij} \mathfrak{B}$ ja osoitetaan väite induktiolla lauseiden Φ asteen k suhteen. Jos $\mathrm{rk}(\Phi) = 0$, niin todistus vastaa Ehrenfeuctin ja Fraïssén lauseeseen 3.1 johtaneiden lauseiden 3.2 ja 3.3 todistusten tapauksia $\mathrm{qr}(\Phi) = 0$.

Tehdään sitten induktio-oletus: jos $\mathfrak{A} \equiv_k^{bij} \mathfrak{B}$, niin $\mathfrak{A}' \sim_k \mathfrak{B}'$ ja oletetaan, että $\mathfrak{A} \equiv_{k+1}^{bij} \mathfrak{B}$. Jokainen lause Ψ, jolla $\mathrm{rk}(\Psi) = k + 1$ voidaan muodostaa Boolen tai äärettömillä konnektiiveilla muotoa $\exists x\varphi(x)$ ja $\exists mx\varphi(x)$ olevista lauseista, missä $\mathrm{rk}(\varphi) = k$ ja m on numeerinen vakiotermi. Muotoa $\exists x\varphi(x)$ olevien lauseiden tapauksessa todistus vastaa oleellisesti Ehrenfeuchtin ja Fraïssén lauseeseen 3.1 johtaneiden tulosten todistuksia, joten riittää osoittaa väite muotoa $\exists mx\varphi(x)$ oleville lauseille.

Olkoon nyt $\Phi = \exists mx\varphi(x)$ ja oletetaan, että $\mathfrak{A}' \models \Phi$. Tällöin on olemassa sellaiset alkiot $c_1, \ldots, c_m \in A$, että $\mathfrak{A} \models \varphi[c_i/x]$ ja $c_i \neq c_j$ jokaisella $i, j \in \{1, \ldots, m\}$. Koska $\mathfrak{A} \equiv_k^{bij} \mathfrak{B}$, niin on olemassa sellainen bijektio $f : A \to B$, että jokaisella $a \in A$ pätee $(\mathfrak{A}, a) \equiv_k^{bij} (\mathfrak{B}, f(a))$. Erityisesti siis $(\mathfrak{A}, c_i) \equiv_k^{bij} (\mathfrak{B}, f(c_i))$ jokaisella $i \in \{1, \ldots, m\}$ ja tällöin induktio-oletuksen nojalla $(\mathfrak{A}', c_i) \sim_k (\mathfrak{B}', f(c_i))$ jokaisella $i \in \{1, \ldots, m\}$.

Näin ollen koska $\mathfrak{A} \models \varphi[c_i/x]$ jokaisella $i \in \{1, \ldots, m\}$, niin $\mathfrak{B} \models \varphi[f(c_i)/x]$ jokaisella $i \in \{1, \ldots, m\}$. Lisäksi koska f in bijektio, niin $f(c_i) \neq f(c_j)$ jokaisella $i, j \in \{1, \ldots, m\}$. Siis $\mathfrak{B}' \models \exists mx\varphi(x)$. Vastaavasti, jos $\mathfrak{B}' \models \Phi$, niin $\mathfrak{A}' \models \Phi$. Siis $\mathfrak{A}' \sim_{k+1} \mathfrak{B}'$. □

Myös toinen suunta, jos $\mathfrak{A}' \sim_k \mathfrak{B}'$, niin $\mathfrak{A} \equiv_k^{bij} \mathfrak{B}$ pätee ja se voidaan osoittaa *Hintikka-kaavojen* avulla [1, s.152-153]. Tämän osoittaminen vaatisi kuitenkin teknisesti haastavan määritelmän sekä todistuksen, joten sivuutetaan tämä, sillä äärettömän laskurilogiikan lokaalisuuden osoittamiseen riittää jo lause 5.4.

5.3 Äärettömän laskurilogiikan lokaalisuus

Osoitetaan vielä lopuksi, että myös ääretön laskurilogiikka on lokaali. Tarkastellaan aluksi sellaisia kaavoja $\varphi(\vec{x}) \in \mathcal{L}^r_{\infty\omega}(\mathbf{Cnt})$, joissa ei esiinny vapaana numeerisia muuttujia. Seurauksen 5.1 nojalla, jos $(\mathfrak{A}, \vec{a}) \leftrightarrows_{(3^k-1)/2} (\mathfrak{B}, \vec{b})$, niin $(\mathfrak{A}, \vec{a}) \equiv^{bij}_k (\mathfrak{B}, \vec{b})$ ja edelleen lauseen 5.4 nojalla pätee seuraava:

Lause 5.5. *Jos m-paikkainen kysely Q voidaan ilmaista äärettömän laskurilogiikan $\mathcal{L}^r_{\infty\omega}(\mathbf{Cnt})$ kaavalla $\varphi(\vec{x})$, niin Q on Hanf-lokaali.*

Tästä seuraa, että tällöin Q on myös Gaifman-lokaali ja kyselyn Q astelukujen joukko on rajoitettu. Vastaavat tulokset pätevät selvästi myös m-paikkaisille kyselyille Q, jotka voidaan ilmaista kaavoilla $\varphi(\vec{x}) \in \mathrm{FO}(\mathbf{Cnt})$.

Edellisissä tuloksissa oletettiin, että kaikki kaavan φ vapaat muuttujat ovat ei-numeerisia muuttujia. Määritellään vielä lokaalisuus kaavoille $\varphi(\vec{x}, \vec{\imath}) \in \mathcal{L}^r_{\infty\omega}(\mathbf{Cnt})$.

Määritelmä 5.7. Olkoon $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_m)$ ja $\varphi(\vec{x}, \vec{\imath}) \in \mathcal{L}^r_{\infty\omega}(\mathbf{Cnt})$ kaava, joka ilmaisee m-paikkaisen kyselyn Q. Tällöin kysely Q on Hanf-lokaali, jos on olemassa sellainen luku $d \geq 0$, että jokaisella jonolla $\vec{p}$ ja kaikilla malleilla $\mathfrak{A}$ ja $\mathfrak{B}$ sekä kaikilla $\vec{a} \in A^m$ ja $\vec{b} \in B^m$ pätee:

$$\text{Jos } (\mathfrak{A}, \vec{a}) \leftrightarrows_d (\mathfrak{B}, \vec{b}), \text{ niin } \vec{a} \in Q(\mathfrak{A}', \vec{p}) \text{ täsmälleen, kun } \vec{b} \in Q(\mathfrak{B}', \vec{p}).$$

Lisäksi Q on Gaifman-lokaali, jos on olemassa sellainen $d \geq 0$, että jokaisella jonolla $\vec{p}$ ja kaikilla malleilla $\mathfrak{A}$ sekä jonoilla $\vec{a}_1, \vec{a}_2 \in A^m$ pätee:

$$\text{Jos } \vec{a}_1 \approx_d \vec{a}_2, \text{ niin } \vec{a}_1 \in Q(\mathfrak{A}', \vec{p}) \text{ täsmälleen, kun } \vec{a}_2 \in Q(\mathfrak{A}', \vec{p}).$$

Hanf-lokaalisuusaste $\mathrm{hlr}(Q)$ sekä lokaalisuusaste $\mathrm{lr}(Q)$ määritellään kuten aiemmin.

Lause 5.6. *Olkoon Q m-paikkainen kysely, joka voidaan ilmaista äärettömän laskurilogiikan $\mathcal{L}^r_{\infty\omega}(\mathbf{Cnt})$ kaavalla $\varphi(\vec{x}, \vec{\imath})$. Tällöin Q on Hanf-lokaali ja* $\mathrm{hlr}(Q) \leq (3^k - 1)/2$.

Todistus. Todistetaan väite induktiolla kaavan asteen k suhteen. Tapaus $\mathrm{rk}(\varphi) = 0$ käsitellään kuten lauseen 4.2 todistuksessa. Tehdään induktio-oletus, että väite pätee, kun kysely Q voidaan ilmaista kaavalla φ, jonka $\mathrm{rk}(\varphi) = k$ ja osoitetaan, että väite pätee, kun kysely Q voidaan ilmaista kaavalla φ, jonka $\mathrm{rk}(\varphi) = k + 1$.

Koska kaavan $\varphi(\vec{x}) = \exists y \psi(y, \vec{x})$ tapaus on käsitelty jo lauseen 4.2 todistuksessa, riittää osoittaa tulos vain kaavalle $\varphi(\vec{x}, \vec{\imath}) = \exists j y \psi(y, \vec{x}, \vec{\imath})$. Olkoon $\mathrm{rk}(\psi) = k$ ja $\mathrm{hlr}(\psi) = d$, jolloin $\mathrm{rk}(\varphi) = k + 1$ ja pitää osoittaa, että $\mathrm{hlr}(\psi) \leq 3d + 1$. Oletetaan, että $(\mathfrak{A}, \vec{a}) \leftrightarrows_{3d+1} (\mathfrak{B}, \vec{b})$, jolloin seurauksen 4.1 nojalla on olemassa sellainen bijektio $f : A \to B$, että jokaisella $c \in A$ pätee $(\mathfrak{A}, \vec{a}c) \leftrightarrows_d (\mathfrak{B}, \vec{b}f(c))$.

Olkoon $\vec{p} = (p_1, \ldots, p_N)$, missä $p_1, \ldots p_N \in \{1, \ldots, n\}$. Oletetaan ensin, että $\vec{a} \in Q(\mathfrak{A}', \vec{p})$, jolloin $\mathfrak{A}' \models \varphi[\vec{a}/\vec{x}, \vec{p}/\vec{\imath}]$. On siis olemassa sellaiset $c_1, \ldots, c_l$, että $\mathfrak{A}' \models \psi[c_k/j, \vec{a}/\vec{x}, \vec{p}/\vec{\imath}]$ jokaisella $k \in \{1, \ldots, l\}$. Nyt koska $\mathrm{hlr}(\psi) = d$ ja jokaisella $k \in \{1, \ldots, l\}$ pätee $(\mathfrak{A}, \vec{a}c_k) \leftrightarrows_{3d+1} (\mathfrak{B}, \vec{b}f(c_k))$, niin $\mathfrak{B}' \models \psi[f(c_k)/j, \vec{a}/\vec{x}, \vec{p}/\vec{\imath}]$ jokaisella $k \in \{1, \ldots, l\}$. Näin ollen, koska f on bijektio, niin $\mathfrak{B}' \models \varphi[\vec{b}/\vec{x}, \vec{p}/\vec{\imath}]$, joten $\vec{b} \in Q(\mathfrak{B}', \vec{p})$. Vastaavasti, jos $\vec{b} \in Q(\mathfrak{B}', \vec{p})$, niin $\vec{a} \in Q(\mathfrak{A}', \vec{p})$. $\square$

Lause 5.7. *Olkoon Q m-paikkainen kysely, joka voidaan ilmaista äärettömän laskurilogiikan $\mathcal{L}^r_{\infty\omega}(\mathbf{Cnt})$ kaavalla $\varphi(\vec{x}, \vec{\imath})$. Tällöin, jos Q on Hanf-lokaali, niin Q on myös Gaifman-lokaali ja* $\mathrm{lr}(Q) \leq 3 \cdot \mathrm{hlr}(Q) + 1$.

Todistus. Olkoon Q m-paikkainen kysely, jolla $\mathrm{hlr}(Q) = d$. Olkoon $\mathfrak{A}'$ muotoa 5.2 oleva malli ja olkoot $\vec{a}_1, \vec{a}_2 \in A^m$. Nyt, jos $\vec{a}_1 \approx_{3d+1} \vec{a}_2$, niin lauseen 4.1 nojalla $(\mathfrak{A}, \vec{a}_1) \leftrightarrows_d (\mathfrak{A}, \vec{a}_2)$, koska tietenkin $\mathfrak{A} \leftrightarrows_d \mathfrak{A}$. Nyt, koska kysely Q on Hanf-lokaali, niin $\vec{a}_1 \in Q(\mathfrak{A}', \vec{p})$ jos ja vain jos $\vec{a}_2 \in Q(\mathfrak{A}', \vec{p})$. Näin ollen Q on Gaifman-lokaali ja $\mathrm{lr}(Q) \leq 3d + 1$. □

Seuraus 5.2. *Olkoon Q m-paikkainen kysely, joka voidaan ilmaista äärettömän laskurilogiikan $\mathcal{L}^r_{\infty\omega}(\mathbf{Cnt})$ kaavalla $\varphi(\vec{x}, \vec{\imath})$. Tällöin Q on Gaifman-lokaali.*

Todistus. Olkoon Q m-paikkainen kysely, joka voidaan ilmaista kaavalla $\varphi(\vec{x}, \vec{\imath})$. Tällöin lauseen 5.6 nojalla Q on Hanf-lokaali ja edelleen lauseen 5.7 nojalla Q on Gaifman-lokaali. □

Näin ollen myös ääretön laskurilogiikka on lokaali ja täten myöskään sen kaavoilla ei voida ilmaista sellaisia ominaisuuksia, jotka eivät ole lokaaleja. Siis vaikka äärettömän laskurilogiikan ilmaisuvoima onkin laskemisen osalta huomattavasti tehokkaampi kuin predikaattilogiikan, ei senkään kaavoilla voida ilmaista rekursiivisia mekanismeja vaativia kyselyitä kuten graafin transitiivisen sulkeuman kyselyä tai graafin yhtenäisyyden kyselyä.

Kirjallisuutta

[1] Libkin, Leonid. *Elements of Finite Model Theory*, Berlin: Springer-Verlag, 2004.

[2] Ebbinghaus, Heinz-Dieter; Flum, Jörg; Thomas, Wolfgang. *Mathematical Logic*, New York: Springer-Verlag, 1984.

[3] Luosto, Kerkko. *Äärellisten mallien teoria* [Verkkodokumentti], Helsingin yliopiston matematiikan ja tilastotieteen laitos, 1999-2010 [Viitattu 16.5.2017] URL http://www.helsinki.fi/~kluosto/kurssit/Aemt/aemt.pdf

[4] Dong, Guozhu; Libkin, Leonid; Wong, Limsoon. *Local Properties of Query Languages*, Theoretical Computer Science Vol.239, 2000, s.277-308.

[5] Hella, Lauri; Libkin, Leonid; Nurmonen, Juha. *Notions of Locality and Their Logical Characterizations Over Finite Models*, The Journal of Symbolic Logic Vol.64, 1999, s.1751-1773.

[6] Libkin, Leonid. *Logics with Counting and Local Properties*, ACM Transactions on Computational Logic Vol.1, 2000, s.33-59.