TAMPEREEN YLIOPISTO
Pro gradu -tutkielma

Joel Syvänen

Berge-perfektit graafit ja Shannonin kapasiteetti

Luonnontieteiden tiedekunta
Matematiikka

Toukokuu 2017

Tampereen yliopisto

Luonnontieteiden tiedekunta

SYVÄNEN, JOEL: Täydelliset graafit ja Shannonin kapasiteetti

Pro gradu -tutkielma, 53 s.

Matematiikka

Toukokuu 2017

Tiivistelmä

Graafin G Shannonin kapasiteetti on tunnusluku, joka kuvaa graafia G vastaavan kommunikaatiokanavan maksimaalista virheetöntä tiedonsiirtokykyä. Shannonin kapasiteetin määrittäminen hyvin yksinkertaisillekin graafeille on osoittautunut erittäin vaikeaksi. Poikkeuksen muodostavat graafit, joiden riippumattomuusluku ja pienimmän mahdollisen klikkiosituksen koko ovat yhtä suuret. Perfektin graafin jokaisella aligraafilla on edellä mainittu ominaisuus.

Tässä tutkielmassa osoitetaan, että seitsemän pituinen sykli on yksinkertaisin graafi, jonka Shannonin kapasiteetin tarkka arvo on vielä tuntematon. Tämä osoitetaan todeksi näyttämällä, että tätä yksinkertaisempien graafien arvot tunnetaan seuraavien kolmen faktan ansiosta. 1) Perfektin graafin kapasiteetti on sama kuin sen riippumattomuusluku. 2) Graafi on perfekti, jos ja vain jos se on berge (vahva perfektien graafien teoreema). 3) Viiden pituisen syklin kapasiteetti on $\sqrt{5}$.

Tutkielmassa käydään läpi perfektien graafien perusteet ja todistetaan heikko perfektien graafien teoreema Lovászin tapaan normaalien hypergraafien avulla. Vahvan perfektien graafien teoreeman osalta määritellään keskeiset käsitteet. Lisäksi tutkitaan riippumattomuusluvun ja graafien tulon suhdetta. Näitä hyödynnetään Shannonin kapasiteetin määrittelyssä, sen ominaisuuksien tutkimisessa ja erityisesti heikosti α-perfektien graafien kapasiteetin määrittämisessä. Syklin C_5 Shannonin kapasiteetin todistamisessa hyödynnetään Lovászin sateenvarjotekniikkaa. Näin on osoitettu, että seitsemän pituista sykliä yksinkertaisempien graafien kapasiteettien tarkat arvot on laskettavissa. Tutkielman viimeisessä kappaleessa esitetään Shannon kapasiteetin laskemiseen menetelmiä, joilla entuudesta tunnettujen kapasiteetin arvojen perusteella voidaan joissakin tilanteissa määrittää kapasiteetti tutkittavalle graafille.

Sisältö

1 Johdanto

Claude Shannon määritteli artikkellissaan The Zero Error Capacity of Noisy Channel [16] kommunikaatiokanavan maksimaalista virheetöntä tiedonsiirtokapasiteettia kuvaavan luvun. Tämä luku on myöhemmin nimetty Shannonin kapasiteetiksi. Kommunikaatiokanava voidaan esittää yksinkertaisena graafina. Shannonin kapasiteetin $c(G)$ määrittäminen on yksinkertaista sellaiselle graafille G, jonka riippumattomuusluku $\alpha(G)$ on sama kuin sen klikkien lukumäärä $\theta(G)$ sen pienimässä mahdollisessa osituksessa klikkeihin. Osittain tästä Shannonin havainnosta motivoituneena Claude Berge määritteli perfektin graafin käsitteen. Perfektin graafin jokaisella aligraafilla on edellä mainittu ominaisuus.

Shannonin kapasiteetin määrittäminen muille kuin heikosti α-perfekteille graafeille on osoittautunut erittäin vaikeaksi. Yksinkertaisin graafi, jonka Shannonin kapasiteetti on tuntematon, on sykli C_7. Bohmanin artikkelissa [8, s. 537–538] esitetään kolmikohtainen perustelu tälle väitteelle:

1. Jos graafi G on perfekti, niin $c(G) = \alpha(G)$;

2. Vahva perfektien graafien teoreema, jonka mukaan epäperfektissä graafissa G on aligraafina vähintään viisipisteinen pariton sykli tai tällaisen komplementti; ja

3. $c(C_5) = \sqrt{5}$.

Tässä tutkielmassa osoitan, että väite todella seuraa näistä kolmesta faktasta. Perusteluista osoitan tosiksi ensimmäisen ja viimeisen. Vahvan perfektien graafien teoreeman todistaminen tämän työn laajuudessa on epärealistista. Niinpä tyydyn suppeasti kuvaamaan todistuksen idean ja keskeiset käsitteet.

Tutkielman aihe kiinnittyi monen umpikujan jälkeen. Ensimmäinen aihio oli Shannonin kapasiteetti Alonin artikkelin [2] laajuudessa. Halusin pysyä mahdollisimman paljon puhtaan graafiteorian ja kombinatoriikan alueella, ja lähes kaikki artikkelin tarjoamat suunnat ja aiheet tuntuivat vievän kauaksi edellä mainituista alueista. Aloitin kuitenkin kartoittamaan graafien tuloja ja riippumattomuuslukuja käsittelevää kirjallisuutta. Näistä jälkimmäisen tutkiminen johdatti Bergen [6] pariin ja huomasin, että teoksen perfektejä graafeja käsittelivässä osassa oli myös sivuttu Shannonin kapasiteettia. Syklin C_5 kapasiteetti oli kyseisessä teoksessa sen julkaisun aikoihin edelleen avoin ongelma. Alonin artikkelin [2] lähteissä oli mainittuna myös Lovászin artikkeli [12], jossa tämä ongelma oli ratkaistu ja artikkeli kokonaisuudessaan tuntui mielekkäältä tutkielman kannalta. Niinpä ajattelin, että tutkielma voisi käsitellä pääosin Shannonin kapasiteetin ylärajaa – Lovászin lukua – sekä jossain määrin perfektejä graafeja. Googlaamalla löysin kuitenkin opinnäytetyön [5], joka käsitteli aihetta juuri tästä näkökulmasta.

Olin jälleen lähtöruudussa ja palasin tutkimaan Noga Alonin kirjoituksia Shannonin kapasiteetista. Ne sisälsivät avoimia ongelmia tai ei-toivotuille ja tuntemattomille osa-alueille siirtymistä. Laajensin tutkimista Alonin julkaisujen ulkopuolelle ja selasin lukuisia artikkeleita, jotka käsittelivät Shannonin kapasiteettia, graafien tuloja tai riippumattomuuslukuja. Lopulta osuin Bohmanin artikkeliin [8], jossa esitettiin edellä mainitut kolme perustelua. Näistä ajattelin keskittyä vahvaan perfektien graafien teoreemaan, sillä Berge oli vienyt minua perfektien graafien maailmaan ja Bergen teoksen [6] julkaisun aikaan teoreema oli vielä otaksuma. Lähtisin siis kulkemaan Bergen jalanjälkiä ja päätyisin graafiteorian suuren lauseen todistukseen. Pettymykseni havaitsin nopeasti, että vahvan perfektien graafien teoreeman todistus on pitkä (kts. [9]) – lähes 180 sivua – ja lisäksi erittäin tekninen. Toisin sanoen mahdoton sisällytettäväksi tähän tutkielmaan.

Palasin jälleen lähtöruutuun. Päätin kuitenkin lähteä tutkimaan perfektejä graafeja Bergen opastamana ja huomasin, että Lovászilla oli rooli myös tässä tarinassa. Hän oli todistanut heikon perfektien graafien teoreeman [11], jonka todistamissa käytettiin ensimmäisen kerran merkittävällä tavalla hypergraafeja. Lovász löysi myös syklin C_5 Shannonin kapasiteetin [12] tavalla, joka hakee vertaistaan. Näin päädyin lopulta osoittamaan, että sykli C_7 on yksinkertaisin graafi, jonka Shannonin kapasiteetti on tuntematon, ja että tulos todella seuraa Bohmanin esittämistä faktoista. Näin lähden matkalle Shannonin innostamanan Bergen opastamana ja tutkin miten Lovász vastaa Claudeille Shannon ja Berge.

Luvussa 2 käyn läpi tutkielman kannalta olennaiset graafiteorian peruskäsitteet. Tämän teen lähinnä siksi, että kaikilta osin merkintätavat tai puhetavat eivät ole vakiintuneet. Myös oletukset ja sopimukset ovat tällöin täsmällisempiä. Kappaleessa 2.2 määrittelen syklin ja sykligraafin. Kappaleessa 2.3 määrittelen graafien tunnuslukuja ja näiden pohjalta määritellen kappaleessa 2.4 perfektit graafit.

Hypergraafien perusteet, normaalit hypergraafit ja hypergraafien kytkentöjä graafeihin tarkastellaan luvussa 3. Alaluvussa 3.3 todistan täydellisten graafien teoreeman hypergraafien avulla. Vahvaa täydellisten graafien teoreema esitellään luvussa 4. Luvussa 5 määrittelen Shannonin kapasiteetin kannalta keskeiset käsitteet ja tulokset: graafien vahvan tulo määrittelen kappaleessa 5.1 ja Shannonin kapasiteetti sekä heikosti α-perfektin graafin Shannonin kapasiteetti kappaleessa 5.2. Viimeiseksi osoitan, että sykli C_7 on yksinkertaisin graafi, jonka Shannonin kapasiteetti on tuntematon. Tämä tehdään soveltamalla tutkielmassa aikaisemmin osoitettuja tuloksia kappaleessa 5.4 ja erikoistapauksena määritetään syklin C_5 kapasiteetti kappaleessa 5.3.

Lukijan odotetaan hallitsevan graafiteorian perusteet, kombinatoriikan perusteet, geometrian alkeet, lineaarialgebran perusteet, raja-arvon käsite, lukujonojen perusteet sekä joukko-opin alkeet. Graafiteoreettisten ongelmien käsittelyssä käytetään usein laajasti monien matematiikan osa-alueiden tuloksia. Näin ollen tässä kirjoituksessa esiintyy joitakin kertoja todistuksen tilalla ainoastaan todistuksen päättymisestä kertova neliö. Tällaisissa tapauksissa todistus on pitkä ja mahdollisesti vaikea. Monesti näiden lauseiden todistaminen vaatisi niihin liittyvän taustateorian laajempaa käsittelyä. Työn pituuden hallitsemisen ja käsittelyn johdonmukaisuuden kannalta näille sivupoluille astuminen on tarpeetonta.

2 Graafit

2.1 Graafien peruskäsitteitä

Intuitiivisesti graafi on verkosto. Graafi on joukko pisteitä ja joukko niitä yhdistäviä viivoja siten, että jokainen viiva yhdistää yhden pisten toiseen pisteeseen. Esimerkiksi maailman lentokentät ja niiltä lähtevät tai niille saapuvat lennot voitaisiin kuvata graafina, jossa jokaista lentokenttää vastaisi piste ja jokaista lentoa vastaisi viiva. Tämän tutkielman kannalta mielenkiintoinen sovellus on kommunikaatiokanavan kuvaaminen graafina. Seuraavaksi määrittelemme graafit ja niihin liittyvät peruskäsitteet täsmällisemmin. (vrt. [6, s. 3, 5, 7]).

Määritelmä 2.1. Olkoon X äärellinen joukko ja U perhe karteesisen tulon $X \times X$ alkiota. Silloin paria $G = (X, U)$ sanotaan *graafiksi*. Joukon X alkioita kutsutaan *pisteiksi* ja perheen U alkioita *särmiksi*. Perheeseen $U = (u_1 \ldots, u_m)$ viitataan usein indeksijoukolla $U = \{1, \ldots, m\}$.

Huomautus 2.2. Tässä tutkielmassa *perheellä* tarkoitamme indeksöityä joukkoa. Tällaisessa joukossa sama alkio voi esiintyä useita kertoja, mutta sen esiintymillä on eri indeksit.

Olkoon särmä $u = (x, y)$. Pisteet x ja y ovat särmän u *päätepisteet*. Jos $x = y$, niin särmää u sanotaan *silmukaksi*. Särmän päätepisteitä sanotaan *vieruspisteiksi*.

Sama karteesisen tulon $X \times X$ alkio voi siis esiintyä perheessä U enemmän kuin kerran. Graafissa särmän multiplisiteettiin lasketaan kaikki särmät, joiden päätepisteet ovat samat. Näin ollen särmät (x, y) ja (y, x) ovat samat. Erityisesti graafia sanotaan *yksinkertaiseksi*, jos sen jokaisen särmän multiplisiteetti on yksi ja siinä ei ole silmukoita. Jatkossa käsittelemämme graafit ovat yksinkertaisia. Yksinkertaisessa graafissa merkitsemme särmää (x, y) joukkomerkinnällä $\{x, y\}$.

Graafi voidaan esittää graafisesti tasossa luonnollisella tavalla: pisteet piirretään pisteinä, vieruspisteiden välille piirretään viiva ja silmukka piirretään silmukkana alkaen päätepisteestään ja päättyen siihen.

Määritelmä 2.3. Olkoon graafi $G = (X, U)$. Määritetään pisteiden joukko $V = \{\{x, y\} \mid \{x, y\} \notin U \text{ ja } x, y \in X\}$. Tällöin graafin G *komplementtigraafiksi* sanotaan yksinkertaista graafia $\overline{G} := (X, V)$. Usein sanotaan ainoastaan *komplementti*, kun tarkoitetaan komplementtigraafia.

Määritelmä 2.4. Olkoon $G = (X, U)$ graafi ja $A \subseteq X$. Olkoon $E \subseteq U$ niiden särmien joukko, joiden molemmat päätepisteet ovat joukossa A. Tällöin graafia $F = (A, E)$ sanotaan *pistejoukon A generoimaksi graafin G aligraafiksi.* Pistejoukon A generoimaa aligraafia merkitään myös G_A:lla pistejoukon mukaisesti.

Tästä eteenpäin, kun puhumme aligraafeista, tarkoitamme edellisen määritelmän mukaista tietyn pistejoukon generoimaa aligraafia.

Useimmiten olemme kiinnostuneita graafeista, joissa jokaisesta pisteestä pystyy kulkemaan jokaiseen pisteeseen. Tällaiset graafit ovat yhtenäisiä graafeja. Seuraavaksi määritellemme ketjun käsitteen avulla yhtenäiset graafit (vrt. [6, s. 7–8]).

Määritelmä 2.5. Olkoon $G = (X, U)$ graafi. Olkoon $\mu = (u_1, u_2, \ldots, u_q)$ jono, missä $u_i \in U$ jokaisella $i = 1, \ldots, q$. Jonoa μ sanotaan *ketjuksi*, jos jokaisella i särmän u_i toinen päätepiste on yhteinen sitä edeltävän särmän kanssa ja sen toinen päätepiste on yhteinen sitä seuraavan särmän kanssa.

Ketjun pituus on sen särmien lukumäärä. Ketjua μ, joka kulkee graafin pisteestä x pisteeseen y, merkitään $\mu[x, y]$. Lisäksi sanotaan, että piste esiintyy ketjussa μ, jos se on alkiona ketjua vastaavassa jonossa.

Määritelmä 2.6. Olkoon $G = (X, U)$ graafi. Graafia G sanotaan *yhtenäiseksi*, kun seuraava ehto on voimassa: Jos $x, y \in X$ ja $x \neq y$, niin on olemassa ketju $\mu[x, y]$.

Graafia, joka ei ole yhtenäinen, sanotaan *epäyhtenäiseksi.*

Määritelmä 2.7. Olkoon $G = (X, U)$ graafi ja $x, y \in X$. Määritellään relaatio $x \equiv y$ seuraavasti: $x = y$ tai $x \neq y$ ja on olemassa ketju $\mu[x, y]$.

Apulause 2.8. *Relaatio $\equiv$ on ekvivalenssirelaatio.*

Todistus. Refleksiivisyys seuraa suoraan relaation $\equiv$ määritelmästä. Jos on olemassa ketju $\mu[x, y]$, niin olkoon $(u_1, u_2, \ldots, u_q)$ siihen liittyvä jono. Olkoon jono $\mu' = (u_q, \ldots, u_2, u_1)$. Selvästi $\mu' = \mu[y, x]$ ja täten relaatio $\equiv$ on symmetrinen. Transitiivisuuden todistaminen jätetään lukijalle. $\square$

Määritelmä 2.9. Olkoon $G = (X, U)$ graafi. Ekvivalenssirelaation $\equiv$ ekvivalenssiluokkia sanotaan graafin G *yhtenäisiksi komponenteiksi.*

Yhtenäisessä graafissa $G = (X, U)$ on siten tarkalleen yksi yhtenäinen komponentti ja epäyhtenäisessä graafissa vähintään kaksi yhtenäistä komponenttia. Epäyhtenäinen graafi rakentuu komponenttiensa alkioiden generoimista erillisistä aligraafeista. Graafeja G_1 ja G_2 sanotaan erillisiksi, jos niiden pistejoukot eivät leikkaa toisiaan.

Määritelmä 2.10. Olkoot graafit G_1 ja G_2 erillisiä. (Jos graafit G_1 ja G_2 alun perin eivät ole erillisiä, niin ne erillistetään.) Graafien G_1 ja G_2 *erillinen yhdiste* on graafi, jonka pistejoukko on graafien G_1 ja G_2 pistejoukkojen ja (erillisten) särmäjoukkojen yhdiste. Tätä yhdistettä merkitään $G_1 + G_2$.

Usein graafiteoreettiset tulokset pätevät myös epäyhtenäisille graafeille. Monesti tällaiset tulokset pitäisi todistaa epäyhtenäisen graafin jokaiselle komponentille erikseen. Esityksen selkeyden takia ja turhaa toistoa välttääksemme, oletamme jatkossa, että käsittelemämme graafit ovat yhtenäisiä.

2.2 Syklit

Sykli on ketju, jossa mikään särmä ei esiinny kahdesti ja jonka alku- ja loppupiste ovat samat. Aligraafit, jotka ovat perussyklejä, ovat olennaisia perfektien graafien kannalta, joten määritellemme nämä seuraavaksi täsmällisesti pääosin Bergea seuraten (kts. [6, s. 12–13]).

Määritelmä 2.11. Olkoon $G = (X, U)$ graafi. Jonoa $\mu = (u_1, \ldots, u_q)$, missä $q \in N$ ja $u_i \in U$, kutsutaan *sykliksi*, jos se täyttää seuraavat ehdot:

1. jokaisella särmällä u_k, missä $1 < k < q$, on olemassa päätepisteet, joista toinen on yhteinen särmän u_{k-1} päätepisteen kanssa ja toinen yhteinen särmän u_{k+1} päätepisteen kanssa,
2. jos u_i on jonossa μ ja $u_j = u_i$, niin $j = i$
3. $\mu = \mu[x, x]$

Pistettä x kutsutaan syklin *alku- ja loppupisteeksi*.

Määritelmä 2.12. Olkoon $G = (X, U)$ graafi ja jono μ sen sykli. Sanotaan, että μ on *perussykli*, jos yksikään piste $x \in X$ ei esiinny syklissä kuin korkeintaan kerran ja alkupiste esiintyy täsmälleen kaksi kertaa.

Määritelmä 2.13. Olkoon $G = (X, U)$ graafi ja jono μ sen sykli. Olkoon graafin G särmät on numeroitu $1, \ldots, m$. Tällöin sykli μ määräytyy vektorista $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \ldots, \mu_m)$, missä:

$$\mu_i = \begin{cases} 0, & \text{kun } i \notin \mu \\ 1, & \text{kun } i \in \mu \end{cases} \tag{2.1}$$

Näin saatua vektoria $\boldsymbol{\mu}$ sanotaan syklin μ *vektoriesitykseksi.*

Näin määritelty syklin vektoriesitys vastaa syklin jonoesitystä. Kun sanomme, että sykli μ on syklien μ_1 ja μ_2 summa, tarkoitamme näihin liittyvien vektorien vektorisummaa. Tätä merkitään $\mu = \mu_1 + \mu_2$ ja se siis vastaa vektorisummaa $\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}_1 + \boldsymbol{\mu}_2$.

Lause 2.14. *Olkoon $G = (X, U)$ graafi. Tällöin jokainen graafin G sykli on pareittain särmäerillisten perussyklien summa.*

Todistus. (vrt. [6, s. 12]) Induktiolla: Oletetaan, että μ on graafin G sykli. Jos $\mu = (\mu_1, \mu_2, \mu_3)$, niin väite pätee, sillä kyseessä on perussykli.

Oletetaan sitten, että väite pätee kun syklissä μ on n tai vähemmän särmiä, kun $n > 3$. Olkoon $k = n+1$ ja μ^k sykli, jossa on k särmää. Jos jokainen syklin μ^k piste esiintyy vain kerran (poislukien alku- ja loppupiste), niin kyseessä on perussykli ja väite pätee. Oletetaan sitten, että μ^k ei ole perussykli. Tällöin on ainakin yksi piste p esiintyy kahdesti syklissä μ ja piste p ei ole syklin alkupiste tai piste p on syklin alkupiste ja esiintyy vähintään kolmesti syklissä μ.

Olkoon piste p särmien μ_i, μ_{i+1}, μ_j ja μ_{j+1} päätepiste, missä $1 < i < j < k$ ja olkoon piste p valittu siten, että se ei ole päätepisteenä särmälle μ_m, missä $1 < m < i$ tai $j+1 < m < k$. Nyt $\mu^k = (u_1, \ldots, u_i, u_{i+1}, \ldots, u_j, u_{j+1}, \ldots, u_k) = (u_1, \ldots, u_i, u_{j+1}, \ldots, u_k) + (u_{i+1}, \ldots, u_j)$. (Tässä on kyseessä jonoihin liittyvien vektorien summa). Edellisen summan molemmat jonot ovat syklejä, joissa on vähemmän kuin k särmää. Edelleen näissä on selvästi eri särmät, sillä muussa tapauksessa jokin särmä esiintyisi ainakin kahdesti syklissä μ^k, mikä olisi ristiriita. Sovelletaan nyt induktio-oletusta näihin sykleihin ja väite seuraa. □

Määritelmä 2.15. Olkoon $G = (X, U)$ graafi ja μ sen sykli. Sanotaan, että sykli μ' *sisältyy* sykliin μ, jos $\mu' = (u_1, u_2, \ldots, u_k)$ ja jokaisella $i = 1, \ldots, k$ särmä u_i sisältyy sykliin μ.

Sanotaan, että sykli μ on *minimaalinen*, jos mikään sykli ei sisälly aidosti siihen. Toisinsanoen, minimaaliseen sykliin μ sisältyy vain sykli μ itse.

Lause 2.16. *Sykli μ on perussykli, jos ja vain jos se on minimaalinen.*

Todistus. (vrt. [6, s. 13]) Oletetaan aluksi, että perussykliin μ sisältyy sykli μ'. Tällöin syklin μ' alku- ja loppupiste esiintyvät myös syklissä μ. Mutta ainoat pisteet, jotka esiintyvät kahdesti syklissä μ ovat sen alku- ja loppupiste. Siis $\mu' = \mu$ ja täten μ on minimaalinen.

Oletetaan sitten, että sykli μ on minimaalinen. Lauseen (2.14) perusteella μ on perussyklien summa. Koska μ on minimaalinen on summassa summattavia vain yksi alkio ja tämä on μ itse. Täten μ on perussykli. □

Toisinaan sanomme, että graafi $G = (X, U)$ on sykli. Tällöin graafissa G on perussykli $\mu = (u_1, \ldots, u_{n+1})$ ja siinä esiintyvät särmät ovat tarkalleen kaikki graafin särmät. Siis $U = \{u_1, \ldots, u_n\}$. Tällaista graafia merkitsemme kirjamilla C_n. Syklin C_n pituudella tarkoitamme lukua n. Kun sanomme, että graafissa H on aligraafina sykli C_n tarkoitamme, että graafin H jonkin pistejoukon indusoima aligraafi on sykli C_n.

2.3 Graafien tunnuslukuja

Tässä kappaleessa määrittelemme erilaisia graafin rakenteen perusteella määräytyviä tunnuslukuja. Tämän teemme pääosin Bergea (vrt. [6, s. 7, 129, 274, 276, 325, 360]) mukaillen.

Määritelmä 2.17. Olkoon $G = (X, U)$ graafi. Olkoon luku $n \in \mathbb{Z}_+$ ja joukko $P = \{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$, missä $X_i \subseteq X$. Merkitään indeksejä joukolla $I = \{1, 2, \ldots, n\}$. Olkoon p jokin graafin ominaisuus. Joukkoa P sanotaan graafin G *p-osituksi*, kun seuraavat ehdot täyttyvät:

1. $\bigcup_{i \in I} X_i = X$
2. $X_i \cap X_j = \emptyset$, kun $i \neq j$ ja $i, j \in I$
3. aligraafilla G_{X_i} on ominaisuus p, kun $i \in I$

Määritelmä 2.18. Olkoon $G = (X, U)$ graafi. Jos $x \in X$ ja $y \in X$ ovat vieruspisteitä, aina kun $x \neq y$, niin graafia G sanotaan *täydelliseksi*.

Täydellistä graafia merkitään kirjaimilla K_n, missä luku n on graafin pisteiden lukumäärä.

Määritelmä 2.19. Olkoon $G = (X, U)$ graafi. Olkoon $C \subseteq X$. Jos pistejoukon C pisteet ovat parettain vieruspisteitä, niin sanotaan, että pistejoukko C on *klikki*. Klikkiä C sanotaan maksimaaliseksi, jos graafissa G ei ole klikkiä D siten, että $C \subset D$.

Klikkiä C sanotaan *n-klikiksi*, jos se pisteiden lukumäärä on n. Selvästi n-klikin indusoima aligraafi on täydellinen graafi K_n.

Määritelmä 2.20. Olkoon G graafi. Graafin G suurimman klikin pisteiden lukumäärää n sanotaan graafin G *klikkiluvuksi* ja merkitään $\omega(G)$:llä.

Määritelmä 2.21. Olkoon $G = (X, U)$ graafi. Olkoon $P = \{U_1, U_2, ..., U_n\}$ graafin G ositus, missä jokaisella $i \in \{1, 2, ..., n\}$ pistejoukon U_i indusoima aligraafi on klikki. Jos joukko P on graafin G minimaalinen ositus klikkeihin, niin merkitään näiden klikkien lukumäärää $\theta(G)$:llä.

Esimerkki 2.22. Olkoon graafi $G = (X, U)$. Olkoon $P = \{\{v\} \mid v \in X\}$. Tällöin P on ositus, joukon P alkioiden indusoimat aligraafit ovat 1-klikkejä ja klikkiluku on $|X|$. Edelleen voidaan helposti osoittaa: jos $\theta(G) = 1$, niin G on $|X|$-klikki.

Esimerkki 2.23. Olkoon graafi $G = (X, U)$. Perhettä $F \subseteq U$ sanotaan *peitteeksi*, jos jokainen piste $x \in X$ on vähintään yhden särmän $u \in F$ päätepiste. Lukijan todettavaksi jätetään, että jokaisella peitteellä F pätee $|F| \geq \theta(G)$.

Määritelmä 2.24. Olkoon $G = (X, U)$ graafi. Joukkoa $S \subseteq X$ sanotaan *riippumattomaksi*, jos x ja y eivät ole vieruspisteitä, kun $x, y \in S$.

Graafin G kaikkien riippumattomien joukkojen perhettä merkitään kirjaimella $\mathscr{S}$.

Määritelmä 2.25. Olkoon G graafi. Tällöin lukua $\alpha(G) := \max\limits_{S \in \mathscr{S}} |S|$ sanotaan graafin G *riippumattomuusluvuksi.*

Lause 2.26. *(vrt. [6, s. 274, Theorem 1]) Olkoon graafi G yksinkertainen. Tällöin $\alpha(G) \leq \theta(G)$.*

Todistus. Olkoon graafi G yksinkertainen ja olkoon joukko S jokin riippumaton joukko ja olkoon $\mathscr{C} = (C_1, C_2, \ldots, C_k)$ jokin ositus klikkeihin. Koska jokainen klikin piste on yhdistetty jokaiseen klikin pisteeseen, niin klikissä voi esiintyä enintään yksi riippumattoman joukon piste. Täten $|S \cap C_i| \leq 1$, kun $i = 1, 2, \ldots, k$. Jokainen riippumattoman joukon alkio sisältyy tietenkin ositukseen ja siten täsmälleen yhteen klikkiin. Siis $|S| = \sum_1^k |S \cap C_i| \leq k = |\mathscr{C}|$. Olkoon joukko S' kooltaan suurin mahdollinen riippumaton joukko ja $\mathscr{C}'$ kooltaan pienin mahdollinen ositus klikkeihin. Koska edellä joukko S ja ositus $\mathscr{C}$ olivat mielivaltaisia, saadaan helposti: $\alpha(G) = S' \leq \mathscr{C}' = \theta(G)$. $\square$

Määritelmä 2.27. (vrt. [10, s. 70]) Olkoon $G = (X, U)$ graafi ja joukko C epätyhjä. Funktion $\sigma : X \to C$ sanotaan olevan graafin *väritys* joukon C alkiolla. Joukon C alkioita sanotaan *väreiksi.*

Olkoon funktio σ graafin $G = (X, U)$ pisteiden väritys joukon C väreillä. Olkoon $x \in X$. Sanotaan, että piste x on *väritetty* värillä $\sigma(x)$. Lisäksi sanotaan, että pisteen x *väri* on $\sigma(x)$ ja että funktio σ *värittää* graafin G.

Määritelmä 2.28. Olkoon G graafi. Graafin G *väriluvuksi* sanotaan pienintä mahdollista värien määrää, joka tarvitaan värittämään graafin särmät siten, että vierekkäiset särmät ovat ovat erivärilset. Graafin G värilukua merkitään $\gamma(G)$:llä.

Huomautus 2.29. Matemaattisissa teksteissä värilukua merkitään toisinaan kirjoittamalla $\chi(G)$. Bergen tapaan päädyimme kuitenkin käyttämään merkintää $\gamma(G)$.

2.4 Perfektit graafit

Claude Berge määritteli perfektit graafit osittain Claude Shannonin esittelemän ongelman ansiosta. Aloitamme siten tarkastelun ensiksi heikosti perfektistä graafista. Jos graafi on heikosti α-perfekti, niin Shannonin kapasiteetin määrittäminen redusoituu yksinkertaisemmaksi ongelmaksi - graafin riippumattomuusluvun löytämiseksi.

Määritelmä 2.30. Olkoon G graafi. Jos $\alpha(G) = \theta(G)$ tai $\omega(G) = \gamma(G)$, niin sanotaan, että graafi G on *heikosti perfekti*. Jos $\alpha(G) = \theta(G)$, niin erityisesti sanotaan, että graafi G on *heikosti α-perfekti*.

Heikosti perfekti graafi on kuitenkin luonteeltaan jokseenkin triviaali. Mihin tahansa graafiin G voidaan lisätä erillinen täydellinen graafi K_n siten, että $n \geq |V(G)|$. Tällöin graafissa $G + K_n$ suurimman klikin koko on n ja minimaaliseen väritykseen tarvitaan n väriä. Siis $\omega(G) = \gamma(G)$ ja näin ollen graafi G on heikosti perfekti. Triviaalisuus vältetään tekemällä ominaisuudesta periytyvä. (vrt. [15, s. 2–3])

Määritelmä 2.31. (kts. [6, s. 360]) Olkoon G graafi. Jos $\alpha(G_A) = \theta(G_A)$, aina kun $A \subseteq X$, niin sanotaan, että graafi G on *α-perfekti*.

Määritelmä 2.32. (kts. [6, s. 360]) Olkoon G graafi. Jos $\omega(G_A) = \gamma(G_A)$, aina kun $A \subseteq X$, niin sanotaan, että graafi G on *γ-perfekti*.

Suoraan määritelmistä seuraa, että jokainen α-perfekti graafi ja jokainen γ-perfekti graafi on myös heikosti perfekti.

Määritelmä 2.33. Graafi G on *perfekti*, jos se on α-perfekti ja γ-perfekti.

Esimerkki 2.34. Olkoon $G = (X, U)$ graafi. Jos on olemassa ositus $P = (A, B)$ graafissa G, missä joukon A millä tahansa pisteellä x ei ole vieruspistettä joukossa A ja joukon B millä tahansa pisteellä y ei ole vieruspistettä joukossa B, niin graafia G sanotaan *kaksijakoiseksi*. Kaksijakoista graafia voidaan merkitä $G = (A, B, U)$. Todetaan seuraavaksi, että jokainen kaksijakoinen graafi on perfekti.

Olkoon graafi $G = (A, B, U)$ kaksijakoinen ja olkoon $|U| \geq 1$. Tällöin suurin klikki $C = 2$. Voidaan todistaa, että kaksijakoisessa graafissa ei ole parittoman pituista perussykliä tai paritonta pituista sykliä (kts. [6, s. 131]). Erityisesti graafissa G ei ole kolmen pituista sykliä. Joukkojen A ja B pisteet voidaan siis värittää kahdella värillä eli $\gamma(G) = \omega(G)$. Selvästi kaksijakoisen graafin jokainen aligraafi on myös kaksijakoinen. Graafi G on siis γ-perfekti.

Tunnetusti Königin teoreeman seurauslauseen mukaan (kts. [6, s. 133]) kaksijakoisen graafin suurimman riippumattoman joukon koko $\alpha(G)$ on sama kuin pienimmän mahdollisen peitteen $F \subseteq U$ koko $|F|$. Kaksijakoisessa graafissa jokainen särmä on maksimaalinen klikki ja näin ollen $\alpha(G) = |F| = \theta(G)$. Graafi G on siis α-perfekti. Jokainen kaksijakoinen graafi on näin ollen perfekti.

Esimerkki 2.35. On helppo todeta, että jokainen parillisen pituinen sykli on kaksijakoinen ja siten γ-perfekti. Toisaalta edellisen esimerkin perusteella parittoman pituinen sykli ei ole kaksijakoinen. Osoitamme myöhemmin, että parittoman pituinen vähintään viiden pituinen sykli ei ole perfekti.

Lause 2.36. *(kts. [6, s. 361, Theorem 1]) Olkoon G graafi. Tällöin seuraava pätee: Graafi G on α-perfekti, jos ja vain jos sen komplementtigraafi $\overline{G}$ on γ-perfekti.*

Todistus. (vrt. [6, s. 361]) 1) Olkoon $G = (X, E)$ graafi ja olkoon graafi $G_1 \subseteq G$ mielivaltainen. Oletetaan lisäksi, että graafit G ja G_1 ovat yhtenäisiä. Olkoon $S \subseteq V(G_1)$ on kooltaan suurin mahdollinen riippumaton joukko. Tällöin $\alpha(G_1) = |S| = m$ ja K_m on klikki graafissa $\overline{G}_1$. Oletetaan sitten, että K_n on maksimaalinen klikki graafissa $\overline{G}_1$ jollakin $n \geq m$. Tällöin $V(\overline{K}_n)$ on stabiili joukko graafissa G_1. Jos $n > m$ seuraa välittömästi ristiriita. Oltava siis $n = m$. Täten $n = \omega(\overline{G}_1) = \alpha(G_1) = m$.

2) Olkoon $\mathscr{K} = \{K_1, K_2, \ldots, K_i\}$ graafin G_1 kooltaan pienin mahdollinen ositus klikkeihin. Väritetään jokainen $K \in \mathscr{K}$ erivärisiksi. Värien lukumäärä $c = |\mathscr{K}| = i$. Tämä on väritys graafissa $\overline{G}_1$ sillä aina kun $v_1, v_2 \in K$, niin v_1 ja v_2 eivät ole vieruspisteitä graafissa $\overline{G}_1$. Oletetaan, että tämä väritys on pienin mahdollinen. Tehdään vastaoletus, että graafissa $\overline{G}_1$ pienimmässä värityksessä on $c' < c$ väriä. Tällöin graafilla $\overline{\overline{G}}_1 = G_1$ ositus, jossa on täsmälleen c' eriväristä klikkiä. Oletuksen nojalla $\theta(G) = c$ ja jokaisen osituksen klikkeihin pitää olla vähintään saman kokoinen. Näin on saatu ristiriita. Siis $\gamma(G_1) = c = \theta(\overline{G}_1)$.

Muodostetaan seuraavaksi ekvivalenssiketju, joka lopettaa todistuksen:

$$\begin{array}{ll}
\text{Graafi } G \text{ on } \alpha\text{-perfekti.} & \Longleftrightarrow \\
\alpha(G_A) = \theta(G_A), \text{ aina kun } A \subseteq X & \Longleftrightarrow \\
\omega(\overline{G_A}) \overset{1)}{=} \alpha(G_A) = \theta(G_A) \overset{2)}{=} \gamma(\overline{G_A}), \text{ aina kun } A \subseteq X & \Longleftrightarrow \\
\omega(\overline{G_A}) = \gamma(\overline{G_A}), \text{ aina kun } A \subseteq X & \Longleftrightarrow \\
\text{Graafi } \overline{G} \text{ on } \gamma\text{-perfekti.} &
\end{array}$$

□

Esimerkki 2.37. Lausetta 2.36 esimerkin 2.34 soveltamalla voimme todeta, että jokainen kaksijakoisen graafin komplementti on myös perfekti. Tarkastellaan kuitenkin tarkemmin sitä, miten kaksijakoisen graafin komplementti muodostuu ja tutkitaan sitä määritelmää 2.31 vasten. Olkoon graafi $H = (A, B, U)$ kaksijakoinen ja olkoon $|U| \geq 1$. Komplementissa $\overline{H}$ joukot A ja B ovat klikkejä. Pienimmässä mahdollisessa osituksessa klikkeihin on näin ollen kaksi klikkiä. Valitaan molemmista klikeistä A ja B, jonkin särmän $e \in U$ päätepisteet. Nämä pisteet muodostavat kooltaan suurimman mahdollisen riippumattoman joukon, sillä ne eivät ole vieruspisteitä komplementissa $\overline{H}$ ja mikä tahansa näistä erillinen piste on näistä jomman kumman vieruspiste. Siis $\alpha(\overline{H}) = \theta(\overline{H})$ ja näin ollen graafi $\overline{H}$ on α-perfekti. Lauseen 2.36 perusteella se on myös γ-perfekti.

Muun muassa edellisten esimerkkien sekä lauseen 2.36 nojalla seuraavaksi esiteltävä lause vaikuttaa luontevalta. Berge esitti vuonna 1960 alkuperäisen otaksuman [18] ja käytämme hänen myöhemmin ilmestyneessä teoksessa olevaa muotoilua.

Lause 2.38 (Vahva perfektien graafien teoreema). *(vrt. [6, s. 361, The strong perfect graph conjencture])*
Graafille G seuraavat ehdot ovat ekvivalentit:

1. *graafi G on α-perfekti*
2. *graafi G on γ-perfekti*
3. *graafin yksikään aligraafi tai aligraafin komplementti ei ole yli kolmen pituinen pariton sykli*

Todistus. Osoitetaan todeksi edempänä todistettavien lauseiden avulla seuraavasti: Lause 2.39: (1) $\Rightarrow$ (3) ja (2) $\Rightarrow$ (3), lause 3.41: (1) $\Leftrightarrow$ (2) ja lause 4.5: (3) $\Rightarrow$ (1) ja (3) $\Rightarrow$ (2). □

Lauseen 2.38 kohtien 1 ja 2 ekvivalenssia kutsutaan *perfektien graafien teoreemaksi* (myös nimitystä *heikko perfektien graafien teoreema* käytetään). Perfektien graafien teoreema voidaan muotoilla myös seuraavalla tavalla: Graafi G on α-perfekti, jos ja vain jos graafi $\overline{G}$ on α-perfekti. Näiden muotoiluiden yhtäpitävyyden voi todeta helposti lauseen 2.36 avulla.

Lause 2.39. *(kts. [6, s. 361, Corollary]) Jos graafi G tai sen komplementtigraafi $\overline{G}$ sisältää aligraafina parittoman pituisen ja pituudeltaan kolmea pitemmän syklin, niin silloin graafi G ei ole α-perfekti eikä γ-perfekti.*

Todistus. Todistetaan aluksi hyödyllinen aputulos: jokainen parittoman pituinen sykligraafi C_n on epäperfekti.

Olkoon graafi $G' = C_n$, missä $n = 2k+1 > 3$ ja luku $k \in \mathbb{Z}_+$. Tällöin $\alpha(G') = k$ ja $\theta(G') = k+1$, joten graafi G' ei ole α-perfekti. Koska $\theta(G') = 3$ ja $\omega(G') = 2$, niin G' ei ole γ-perfekti.

Jokainen sykli C_i on määritelmän mukaan jänteetön. Olkoon $A = C_n$ graafin G aligraafi, missä n on pariton. Edellä todistetun aputuloksen nojalla saamme $\alpha(G_A) \neq \theta(G_A)$ ja $\gamma(G_A) \neq \omega(G_A)$, joten graafi G ei ole α-perfekti eikä γ-perfekti.

Vastaavasti jos $A \subseteq \overline{G}$ niin graafi $\overline{G}$ ei ole α-perfekti eikä γ-perfekti. Lauseen 2.1 nojalla graafi G ei ole siis α-perfekti eikä γ-perfekti. □

Perfektien graafien teoreeman todistamiseksi tarvitsemme uuden työkalun - hypergraafin. Tätä tarkastelemme seuraavassa luvussa.

3 Hypergraafit

Hypergraafi on graafin yleistys. Hypergraafien avulla saavutetut tulokset voidaan usein yleistää koskemaan myös graafeja.

3.1 Hypergraafien peruskäsitteitä ja -tuloksia

Seuraavaksi tarkastelemme hypergraafien peruskäsitteitä ja perusominaisuuksia. Tässä alaluvussa päälähteenä käytämme [6, s. 389–391, 396–397, 400, 420, 423, 428, 448]. Aivan aluksi määrittelemme mitä tarkoitamme hypergraafilla.

Määritelmä 3.1. Olkoon joukko $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ äärellinen ja olkoon perhe $\mathscr{E} = (E_i \mid i \in I)$ joukon X osajoukkoja. Paria $H = (X, \mathscr{E})$ sanotaan *hypergraafiksi.*

Hypergraafin $H = (X, \mathscr{E})$ joukkoa X sanotaan *pistejoukoksi*, sen alkioita pisteiksi ja vastaavasti perhettä $\mathscr{E}$ sanotaan *särmäperheeksi* ja sen alkioita särmiksi. Toisinaan merkitsemme hypergraafin H pistejoukkoa $V(H)$ ja särmäperhettä $E(H)$. Jos $E_i \subseteq E_j$, niin sanotaan, että särmä E_i *sisältyy* särmään E_j ja jos $E_i = E_j$, niin sanotaan, että särmät ovat *moninkertaiset.*

Hypergraafin kahta pistettä sanotaan *vierekkäisiksi* tai *vieruspisteiksi*, jos hypergraafissa on särmä, johon molemmat pisteet sisältyvät. Pisteitä, jotka eivät ole vierekkäisiä, sanotaan *erillisiksi.* Kahta särmää sanotaan *vierekkäisiksi*, jos niiden leikkaus on epätyhjä.

Määritelmä 3.2. (vrt. [6, s. 458]) Olkoon $H = (X, \mathscr{E})$. Merkitään särmäperhettä $\mathscr{E}_x := (E' \in \mathscr{E} \mid x \in E')$ ja lukua $\delta_x(H) = |\mathscr{E}_x|$. Lukua $\delta_x(H)$ sanotaan *pisteen x asteeksi* ja lukua $\delta(H) := \max_{x \in X} \delta_x(H)$ sanotaan hypergraafin H *särmien maksimiasteeksi.*

Pistettä x sanotaan *irtopisteeksi*, kun sen aste on 0. Jos $\delta(x) = 1$ pistettä x sanotaan *riippuvaksi.* Lukua $|E|$ sanotaan *särmän E asteeksi.* Särmää E sanotaan *tyhjäksi*, kun sen aste on 0. Tällöin $E = \emptyset$. Jos $|E| = 1$ särmää E sanotaan *silmukaksi.*

Hypergraafia sanotaan *yksinkertaiseksi,* jos siinä ei ole sisältyvää särmää. Yksinkertaisessa hypergraafissa särmäperhe on siis joukko, jonka jokainen särmä on epätyhjä. Selvästi yksinkertainen graafi on yksinkertainen hypergraafi.

Hypergraafia, jossa jokaisen pisteen aste on $k \geq 0$, sanotaan k-säännöllinen. Hypergraafia, jossa jokaisen särmän aste on $r \geq 0$, sanotaan r-tasaiseksi. [17, s. 136]

Esimerkki 3.3. Yksinkertainen 2-tasainen hypergraafi $H = (X, \mathscr{E})$ on yksinkertainen graafi $G = (U, V)$, missä $X = U$ ja $V = \mathscr{E}$. Graafissa G ei ole siis silmukoita tai irtopisteitä, mutta siinä voi olla useita komponentteja. Graafi C_n on yksinkertainen 2-säännöllinen hypergraafi, kun $n \geq 3$.

Määritelmä 3.4. Olkoot $H = (X, \mathscr{E})$ ja $H_A = (A, \mathscr{E}_A)$ hypergraafeja, joille $A \subseteq X$ ja $\mathscr{E}_A = \{E_i \cap A \mid E_i \in \mathscr{E}$ ja $E_i \cap A \neq \emptyset\}$. Tällöin hypergraafia H_A sanotaan *pistejoukon A generoimaksi hypergraafin H alihypergraafiksi.*

Määritelmä 3.5. Olkoon $H = (X, \mathscr{E})$ hypergraafi. Tällöin *perheen* $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{E}$ *generoimaksi hypergraafin* H *osittaishypergraafiksi* sanotaan paria $(X_{\mathscr{F}}, \mathscr{F})$, missä $X_{\mathscr{F}} = \cup_{E \in \mathscr{F}} E$.

Olkoon $H = (X, \mathscr{E})$ hypergraafi ja olkoon $\mathscr{E}_0 \subseteq \mathscr{E}$. Merkinnällä $H - \mathscr{E}_0$ tarkoitamme särmäperheen $\mathscr{E} \setminus \mathscr{E}_0$ generoimaa hypergraafin H osittaishypergraafia.

Määritelmä 3.6. Hypergraafin $H = (X, \mathscr{E})$ *insidenssimatriisi* on matriisi (a^i_j), jonka m riviä vastaavat hypergraafin H särmiä ja jonka n saraketta vastaavat hypergraafin H pisteitä seuraavasti:

$$a^i_j = \begin{cases} 1, & \text{jos } x_j \in E_i \\ 0, & \text{jos } x_j \notin E_i \end{cases} \tag{3.1}$$

Mikä tahansa matriisi, jossa alkiot ovat ykkösiä tai nollia, on siis jonkin hypergraafin insidenssimatriisi. Jos hypergraafin H insidenssimatriisissa on sarake, jossa on pelkkiä nollia, niin hypergraafissa H on irtopiste. Jos siinä on rivi, joka sisältää pelkkiä nollia, niin hypergraafissa H on tyhjä särmä. (vrt. [6, s. 389]) Jatkossa kutsumme hypergraafin H insidenssimatriisia hypergraafin H *matriisiesitykseksi*.

Määritelmä 3.7. (vrt. [6, s. 390]) Olkoon $H = (X, \mathscr{E})$ hypergraafi, jossa pistejoukko $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ ja särmäperhe $\mathscr{E} = \{E_1, E_2, \ldots, E_m\}$. Asetetaan joukko $E := \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$ ja perhe $\mathscr{X} := \{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$, missä

$$X_j = \{e_i \mid i \leq m,\ E_i \ni x_j,\ x_j \in X\}.$$

Tällöin paria $H^* = (E, \mathscr{X})$ sanotaan hypergraafin H *duaaliksi*.

Hypergraafin duaali on selvästi itsessään hypergraafi. Hypergraafin matriisiesityksen transpoosi $(a^i_j)^\mathsf{T}$ on saman hypergraafin duaalin matriisiesitys. Tämän ja edellisen toteaminen jätetään lukijalle. Hypergraafin H duaalin duaali on hypergraafi H itse. Nimittäin, jos (a^i_j) on hypergraafin H matriisiesitys, niin matriisilaskennan perusteista tiedämme, että $(a^i_j)^{\mathsf{T}\mathsf{T}} = (a^i_j)$.

Määritelmä 3.8. Olkoon $H = (X, \mathscr{E})$ hypergraafi ja olkoon $S \subseteq X$ epätyhjä. Asetetaan luku

$$r(S) := \max_{E \in \mathscr{E}} |S \cap E|.$$

Tällöin lukua $r(S)$ kutsutaan *joukon* S *asteeksi* ja lukua $r(X)$ *hypergraafin* H *asteeksi*.

Määritelmä 3.9. Olkoon hypergraafi $H = (X, \mathscr{E})$ ja kokonaisluku $k > 0$. Hypergraafin H *k-sektioksi* sanotaan paria $H_{(k)} = (X, \mathscr{E}_{(k)})$, kun joukko

$$\mathscr{E}_{(k)} = \{F \mid F \subseteq X, 1 \leq |F| \leq k \text{ ja } F \subseteq E_i,\ \text{jollakin } E_i \in \mathscr{E}\}.$$

Lause 3.10. *(vrt. [6, s. 390, Proposition 2]) Olkoon $H = (X, \mathscr{E})$ hypergraafi ja joukko $S \subseteq X$. Tällöin hypergraafin H k-sektio $H_{(k)}$ on yksinkertainen hypergraafi, jonka astefunktio $r_{(k)}(S) = \min\{k, r(S)\}$.*

Todistus. Todistus on helppo ja jätetään lukijalle. □

Täten hypergraafin H 2-sektio $H_{(2)}$ on graafi, jonka pistejoukko on sama kuin hypergraafin H ja jonka jokainen piste kuuluu silmukkaan. Olkoon hypergraafi $(H)_2$ hypergraafin H 2-sektio, josta silmukat on poistettu. Selvästi graafi $(H)_2$ on yksinkertainen.

Määritelmä 3.11. Olkoon $H = (E, (X_1, X_2, \ldots, X_n))$ hypergraafi. Tällöin hypergraafin H *representatiiviseksi graafiksi* sanotaan yksinkertaista graafia $L(H) = (X, U)$, missä $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ ja

$$U = \{\{x_i, x_j\} \in U \mid 0 < i < j \leq n \text{ ja } X_i \cap X_j \neq \emptyset\}.$$

Lause 3.12. *Olkoon $H = (E, \mathscr{X})$ hypergraafi ja perhe $\mathscr{X}' \subseteq \mathscr{X}$. Merkitään särmäperhettä $\mathscr{X}' = (X_1, X_2, \ldots, X_m)$. Tällöin särmäperheen $\mathscr{X}'$ generoiman osittaishypergraafin H' representatiivinen graafi $L(H')$ on pistejoukon $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ generoiman graafin $L(H)$ aligraafi.* □

Olkoon H hypergraafi ja graafi $L(H)$ sen representatiivinen graafi. Merkitään hypergraafin H osittaishypergraafia H'. Tällöin kuvaus $H' \mapsto L(H')$ on bijektio hypergraafin H osittaishypergraafien joukolta representatiivisen graafin $L(H)$ aligraafien joukolle. Tämä on helppo todeta lauseen 3.12 avulla.

Lause 3.13. *[17, s. 154, Theorem 7.6.1] Olkoon H hypergraafi. Tällöin:*

$$(H)_2 = L(H^*).$$

Todistus. Olkoon $H = (X, \mathscr{E})$ hypergraafi, missä pisteiden joukko $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ ja särmäperhe $\mathscr{E} = (E_1, E_2, \ldots, E_m)$. Hypergraafin H ja graafin $(H)_2$ pistejoukot ovat samat. Hypergraafin H duaalin H^* särmäjoukko vastaa pistejoukkoa X ja representatiivisessa graafissa $L(H^*)$ pistejoukko vastaa duaalin H^* särmäjoukkoa. Näin ollen graafien $(H)_2$ ja $L(H^*)$ pistejoukot ovat samat.

Olkoon lisäksi hypergraafi $H^* = (E, \mathscr{X})$ hypergraafin H duaali, missä $E := \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$ ja perhe $\mathscr{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$. Olkoon $\{x_i, x_j\} \in E(L(H^*))$. Tällöin $X_i \cap X_j \neq \emptyset$ representatiivisen graafin määritelmän 3.11 mukaan. Edelleen duaalin määritelmän 3.7 mukaan $x_i, x_j \in E_i$ ja $x_i, x_j \in E_j$ ja siis $x_i, x_j \in E_i \cap E_j$. Hypergraafin k-sektion määritelmän 3.9 mukaisesti $\{x_i, x_j\} \in E((H)_2)$ ja siis $E(L(H^*)) \subseteq E((H)_2)$.

Oletetaan, että $\{x_i, x_j\} \in E(H_2)$. Tällöin on olemassa $E_k \in E(H)$, missä $x_i, x_j \in E_k$. Olkoon duaali H^* kuten edellä. Tällöin $e_k \in X_i$ ja $e_k \in X_j$. Siis $e_k \in X_i \cap X_j$. Näin ollen $\{x_i, x_j\} \in E(L(H^*))$. Siis $E((H)_2) \subseteq E(L(H^*))$. □

Lause 3.14. *[17, s. 154, Corollary 7.6.2] Olkoon H hypergraafi. Tällöin:*

$$(H^*)_2 = L(H).$$

Todistus. Olkoon H hypergraafi. Sijoittamalla lauseen 3.13 kaavaan duaalin H^* saadaan $(H^*)_2 = L(H^{**}) = L(H)$, sillä $H^{**} = H$. □

Lause 3.15. *(kts. [6, s. 400, Proposition 1]) Olkoon graafi $G = (X, E)$ yksinkertainen. Olkoon $I = \{1, 2, \ldots, m\}$ ja olkoon perhe $(E_i \mid i \in I)$ joukon X osajoukkoja seuraavien ehtojen täyttyessä:*

1. *joukko E_i on klikki graafissa G jokaisella $i \in I$.*
2. *jokainen graafin G piste ja särmä sisältyy vähintään yhteen joukkoon E_i jollakin $i \in I$.*

Tällöin graafi G on hypergraafin $H^* = (X, (E_1, E_2, \ldots, E_m))$ duaalin H representatiivinen graafi.

Kääntäen, jos graafi G on hypergraafin $H = (E, (X_1, X_2, \ldots, X_m))$ representatiivinen graafi, niin duaali $H^* = (X, (E_1, E_2, \ldots, E_m))$ toteuttaa ehdot 1 ja 2.

Todistus. Olkoon G graafi. Jos graafi G toteuttaa ehdot yksi ja kaksi, niin graafi $G = (H^*)_2$. Lauseen 3.14 perusteella $G = L(H) = (H^*)_2$. Vastaavasti kääntäen, jos graafi $G = L(H)$, niin k-sektion määritelmästä seuraa suoraan molemmat ehdot. □

Määritelmä 3.16. Olkoon $H = (X, \mathscr{E})$ hypergraafi. Jos graafin $(H)_2$ maksimaalisten klikkien joukko on sama kuin hypergraafin H maksimaalisten särmien joukko $\mathscr{E}_{max}$, niin sanotaan, että hypergraafi H on *konformaalinen.*

Apulause 3.17. *(kts.[6, s. 396, Lemma]) Olkoon H hypergraafi. Hypergraafi H on konformaalinen, jos ja vain jos graafin $(H)_2$ jokainen klikki sisältyy johonkin hypergraafin H särmään.*

Todistus. Oletetaan aluksi, että hypergraafi $H = (X, \mathscr{E})$ on konformaalinen. Olkoon C jokin graafin $(H)_2$ klikki. Jos klikki C on maksimaalinen, niin määritelmän 3.16 mukaan on olemassa särmä $E \in \mathscr{E}$ siten, että $C = E$. Jos klikki C ei ole maksimaalinen, niin on määritelmän 2.19 nojalla on olemassa klikki C' siten, että $C' \subset C$. Kuten edellä, on siis olemasssa $E \in \mathscr{E}$ ja $C \subset C' = E$.

Oletetaan sitten, että $H = (X, \mathscr{E})$ on hypergraafi ja jokainen graafin $(H)_2$ klikki sisältyy johonkin särmään $E \in \mathscr{E}$. Olkoon $\mathscr{C}_{max}$ graafin $(H)_2$ maksimaalisten klikkien perhe ja $\mathscr{C}$ graafin $(H)_2$ kaikkien klikkien perhe. Vastaavasti olkoon $\mathscr{E}_{max}$ hypergraafin H maksimaalisten särmien perhe. Jos $C \in \mathscr{C}_{max}$, niin oletuksen mukaan on olemassa $E \in \mathscr{E}_{max}$ siten, että $C \subseteq E$. Särmän E pisteet ovat yhdistetyt graafissa $(H)_2$, joten ne muodostavat siinä myös klikin. Siis on olemassa klikki $C' \supseteq E$ ja siis $C \subseteq E \subseteq C'$. Koska klikki C on maksimaalinen, on oltava $C = C'$. Täten $\mathscr{C}_{max} \subseteq \mathscr{E}_{max}$.

Jos puolestaan $E \in \mathscr{E}_{max}$, niin on olemassa klikit $C' \in \mathscr{C}$ ja $C \in \mathscr{C}_{max}$, joilla $E \subseteq C' \subseteq C$. Oletuksen nojalla on olemassa $E' \in \mathscr{E}$ siten, että $C \subseteq E'$. Näin ollen $E \subseteq C \subseteq E'$. Koska särmä E on maksimaalinen, on oltava $E = E'$. Siis $\mathscr{E}_{max} \subseteq \mathscr{C}_{max}$.

Täten $\mathscr{E}_{max} = \mathscr{C}_{max}$ ja hypergraafi H on siis konformaalinen. □

Määritelmä 3.18. Olkoon $H = (X, \mathscr{E})$ hypergraafi, missä $\mathscr{E} = (E_i \mid i \in I)$. Sanotaan, että hypergraafilla H on *Hellyn ominaisuus*, kun seuraava implikaatio on tosi:

$$\text{jos } J \subseteq I \text{ ja } E_i \cap E_j \neq \emptyset \text{ jokaisella } i, j \in J, \text{ niin } \bigcap_{k \in J} E_k \neq \emptyset$$

Jos hypergraafilla on Hellyn ominaisuus, niin toisinaan sanomme lyhyemmin, että hypergraafi on *helly*.

Lause 3.19. *[6, s. 397, Theorem 3] Olkoon H hypergraafi. Hypergraafi H on konformaalinen, jos ja vain jos sen duaalilla H^* on Hellyn ominaisuus.*

Todistus. Olkoon hypergraafi $H = (X, \mathscr{E})$. Oletetaan aluksi, että duaali H^* on helly. Oletetaan, että joukko $C = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ on klikki graafissa $(H)_2$. Olkoon pisteet $x_r, x_t \in C$. Pisteet x_t, x_r sisältyvät johonkin $E_p \in \mathscr{E}$, sillä klikin pisteet x_t, x_r ovat yhdistetyt graafissa $(H)_2$. Merkitään duaalin H särmää $X_i = \{e_j \mid j \leq m, E_j \ni x_i\}$. Koska pisteet x_t ja x_r kuuluvat johonkin särmään E_p, niin $e_p \in X_r \cap X_t$. Koska valitut pisteet olivat mielivaltaisia, niin tämä pätee kaikilla klikin C pisteillä. Näin ollen särmien $X_1, X_2, \ldots, X_k$ parittaiset leikkaukset ovat epätyhjiä ja edelleen Hellyn ominaisuuden perusteella $\bigcap_{i=1}^{k} X_i \neq \emptyset$. Olkoon $e_p \in \bigcap_{i=1}^{k} X_i$. Duaalin määritelmästä seuraa suoraviivaisesti $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\} \subseteq E_p$ ja siis jokainen graafin $(H)_2$ klikki sisältyy johonkin särmään E. Apulauseen 3.17 perusteella hypergraafi H on siis konformaalinen.

Oletaan seuraavaksi, että hypergraafi H on konformaalinen. Olkoon perhe $\mathscr{E}_c = (X_1, X_2, \ldots, X_k)$ duaalin H^* särmiä siten, että $X_i \cap X_j \neq \emptyset$, kun $i, j \in \{1, 2, \ldots, k\}$. Perhettä $\mathscr{E}_c$ vastaa graafin $(H)_2$ pistejoukko $X_c = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ ja edellisestä seuraa, että nämä pisteet ovat yhdistettyjä. Näin ollen joukko X_c on klikki graafissa $(H)_2$ ja lauseen 3.17 nojalla hypergraafissa H on särmä E_c, johon klikki X_c sisältyy. Edelleen duaalin määritelmästä seuraa $e_c \in X_i$, kun $i, j \in \{1, 2, \ldots, k\}$. Täten $\cap_{i=1}^{k} X_i \neq \emptyset$. Siis duaali H^* on helly. □

Hypergraafissa $H = (X, \mathscr{E})$ särmäperhettä $\mathscr{E}' \subseteq \mathscr{E}$ sanotaan *leikkaavaksi perheeksi*, jos perheen $\mathscr{E}'$ särmien leikkaukset pareittain ovat epätyhjiä (kts. [7, s. 10]).

Olkoon $H = (X, \mathscr{E})$ hypergraafi ja olkoon $x \in X$. Särmäperhe $\mathscr{E}_x = (E' \in \mathscr{E} \mid x \in E')$ on selvästi leikkaava perhe. Perhettä $\mathscr{E}_x$ sanotaan *tähdeksi*. [7,

s. 10]) Hypergraafin H särmien maksimiaste $\delta(H)$ vastaa siis hypergraafin H kooltaan suurimman mahdollisen tähden särmien lukumäärää.

Lause 3.20. *(vrt. [17, s. 155]) Olkoon $H = (X, \mathscr{E})$ hypergraafi ja $\mathscr{E}' \subseteq \mathscr{E}$ sen maksimaalinen leikkaava perhe. Maksimaalisen leikkaavan perheen särmien lukumäärä $|\mathscr{E}'|$ on sama kuin graafin $L(H)$ klikkiluku $\omega(L(H))$.*

Todistus. Olkoon $H = (X, \mathscr{E})$ hypergraafi ja $\mathscr{E}' \in \mathscr{E}$ maksimaalinen leikkaava perhe. Särmäjoukon $\mathscr{E}'$ särmät leikkaavat siis pareittain toisensa ja näin ollen niitä vastaavat pisteet graafissa $L(H)$ ovat pareittain vierekkäisiä. Siis särmäjoukkoa $\mathscr{E}'$ vastaava pistejoukko C on klikki graafissa $L(H)$. Soveltamalla tätä päättelyä käänteisesti on helppo todeta, että tämä klikki C on maksimaalinen.

Olkoon joukko C maksimaalinen klikki graafissa $L(H)$. Tällöin hypergraafissa H klikin C pisteitä x_i ja x_j vastaavat särmät X_i ja X_j leikkaavat toisiaan. Klikin C pisteitä hypergraafissa H vastaavan särmäjoukon särmät leikkaavat siis pareittain toisiaan ja tämä särmäjoukko on siis leikkaava perhe. On helppo todeta, että tämä perhe on maksimaalinen. Merkitään tätä perhettä $\mathscr{E}'$. Siis $\omega(L(H)) = |C| = |\mathscr{E}'|$. □

Kun jätämme huomioimatta edellisen lauseen todistuksesta maksimaalisuusoletuksen, niin havaitsemme, että jokainen klikki graafissa $L(H)$ vastaa leikkaavaa perhettä hypergraafissa H ja kääntäen.

Lause 3.21. *(vrt. [17, s. 155]) Olkoon H hypergraafi. Jos hypergraafilla H on Hellyn ominaisuus, niin jokainen leikkaava perhe on tähti.*

Todistus. Olkoon $H = (X, \mathscr{E})$ hypergraafi, jolla on Hellyn ominaisuus. Olkoon $\mathscr{E}' \subseteq \mathscr{E}$ maksimaalinen leikkaava perhe. Särmäperheen $\mathscr{E}'$ särmät leikkaavat siis parettain ja koska hypergraafi H on helly, niin $\cap\mathscr{E}' \neq \emptyset$. Siten on olemassa $x \in E$ jokaisella $E \in \mathscr{E}'$ ja särmäperhe $\mathscr{E}'$ on näin ollen tähti. □

Määritelmä 3.22. Olkoon $H = (X, \mathscr{E})$ hypergraafi ja joukko $T \subseteq X$. Joukkoa T sanotaan *transversaaliksi* hypergraafissa H, jos $|T \cap E| \geq 1$ jokaisella särmällä $E \in \mathscr{E}$. Kooltaan pienintä mahdollista transversaalia T hypergraafissa H merkitään $\tau(H)$:lla.

Lause 3.23. *[17, s. 156] Olkoon H hypergraafi. Jos hypergraafilla H on Hellyn ominaisuus, niin seuraava yhtälö on voimassa:*

$$\tau(H) = \theta(L(H).$$

Todistus. Olkoon $H = (E, \mathscr{X})$ hypergraafi, jolla on Hellyn ominaisuus. Olkoon särmäperhe $\mathscr{X} = (X_i \mid i \in I)$. Olkoon lisäksi joukko $\mathscr{C}$ graafin $L(H)$ pienin ositus klikkeihin. Olkoon $\mathscr{X}_C \subseteq \mathscr{X}$ klikkijoukkoa $\mathscr{C}$ vastaavien leikkaavien perheiden joukko. Koska hypergraafi H on helly, on jokainen leikkaava perhe tähti ja voimme valita jokaisesta leikkaavasta perheestä

$\mathscr{X}_j \in \mathscr{X}_C$ alkio $e_j \in \mathscr{X}_j$ siten, että $H(e_i) = \mathscr{X}_j$. Merkitään näin saatua joukkoa $T = \{e_i \mid i \in J \subseteq I\}$.

Osoitetaan, että joukko T on transversaali hypergraafissa H. Tehdään vastaoletus, että näin ei ole. Siis on olemassa särmä $X \in \mathscr{X}$, jolla $T \cap X = \emptyset$. Koska joukko $\mathscr{C}$ on ositus, niin särmää X graafissa $L(H)$ vastaava piste x kuuluu klikkiin $c \in \mathscr{C}$. Tällöin särmä X kuuluu klikkiä c vastaavaan leikkaavaan perheeseen ja siten $T \cap X \neq \emptyset$, mikä on ristiriita. Siis joukko T on transversaali hypergraafissa H.

Osoitetaan seuraavaksi, että joukko T' on kooltaan pienin transversaali ja $|T'| \leq |T|$. Täten $|T \cap X| \geq 1$ jokaisella $X \in \mathscr{X}$. Siis jokaisella $X \in \mathscr{X}$ on olemassa $e_i \in T'$ siten, että $e_i \in X$. Olkoon c_i' tähteä $H(e_i)$ vastaava klikki. Oletetaan, että perhe $(c_i \mid i \in I')$ on graafin $L(H)$ ositus klikkeihin. Tehdään vastaoletus, että näin ei ole. Oletetaan, että on olemassa piste $x \notin c_i'$, jokaisella $i \in I'$. Jos pistettä x vastaava särmä X kuuluu jollakin $i \in I$ tähteen $P(e_i')$, niin $x \in c_i'$, mikä on ristiriita. Vastaavasti, jos pistettä x vastaava särmä X ei kuulu tähteen $P(e_i')$ millään $i \in I'$, niin $|T \cap X| = \emptyset|$ ja tämä on ristiriita. Siis joukko $(c_i')_{i \in I'}$ on ositus klikkeihin. Lisäksi on oltava $|T'| = |T|$, sillä joukko $\mathscr{C}$ oli kooltaan pienin mahdollinen.

Täten $\tau(H) = \theta(L(H))$. □

Jokainen transversaali T hypergraafissa H vastaa graafin $L(H)$ ositusta klikkeihin.

Määritelmä 3.24. Olkoon $H = (X, \mathscr{E})$ hypergraafi. Joukkoa $S \subseteq X$ sanotaan *riippumattomaksi*, jos se ei sisällä särmää $E \in \mathscr{E}$, kun $|E| > 1$. Hypergraafin H *riippumattomuusluvuksi* $\alpha(H)$ sanotaan kooltaan suurimman mahdollisen riippumattoman joukon kardinaliteettia.

Esimerkki 3.25. (vrt. [17, s. 152]) Olkoon $H = (X, \mathscr{E})$ hypergraafi ja T sen transversaali. Tällöin joukko $S = X \setminus T$ on riippumaton. Nimittäin, transversaali T sisältää jokaisesta särmästä $E \in \mathscr{E}$ vähintään yhden pisteen ja siis $E \nsubseteq S$. Olkoon T pienin mahdollinen transversaali. Selvästi tällöin S on suurin mahdollinen riippumaton joukko. Täten saamme muodostettua yhtälön:

$$\alpha(H) + \tau(H) = |X|.$$

Määritelmä 3.26. Olkoon $H = (X, \mathscr{E})$ hypergraafi ja olkoon $\mathscr{E}' \subseteq \mathscr{E}$. Merkitään $\mathscr{E}' = E_1, E_2, \ldots, E_n$. Jos $E_i \cap E_j = \emptyset$ aina kun $i \neq j$, niin sanotaan, että joukko $\mathscr{E}'$ on *pariutus*. Pariutusta $\mathscr{E}'$ sanotaan *täydelliseksi pariutukseksi*, jos lisäksi $\cup \mathscr{E}' = X$. Hypergraafin H kooltaan suurinta pariutusta sanotaan *pariutusluvuksi* ja merkitään $\nu(H)$:lla.

Pariutuksen särmät eivät siis leikkaa pareittain toisiaan ja tällöin mihin tahansa transversaaliin täytyy kuulua vähintään yksi piste jokaisesta pariutuksen särmästä. Tästä seuraa, että millä tahansa hypergraafilla H pätee:

$$\tau(H) \geq \nu(H).$$

Sanotaan, että hypergraafilla H on *Königin ominaisuus*, jos edellisen yhtälön yhtäsuuruus pätee. [17, s. 152]

Lause 3.27. *[17, s. 155, Theorem 7.6.2] Olkoon H hypergraafi. Tällöin:*

$$\nu(H) = \alpha(L(H)) \text{ ja } \nu(H^*) = \alpha((H)_2).$$

Todistus. Olkoon $H = (X, \mathscr{E})$ hypergraafi, missä $|\mathscr{E}| = m$. Oletaan, että joukko $\mathscr{E} = \{E_1, E_2, \ldots, E_k\}$ on pariutus hypergraafissa H. Olkoon graafi $L(H) = (X', \mathscr{E}')$. Pariutuksen särmien leikkaukset pareittain ovat epätyhjiä ja siten niitä vastaavat pisteet eivät ole vieruspisteitä. Formaalimmin ilmaistuna: koska $E_i \cap E_j = \emptyset$, niin $\{x_i, x_j\} \notin \mathscr{E}'$, kun $0 < i < j \leq k$. Täten pisteiden joukko $S = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\} \subseteq X'$ on riippumaton joukko graafissa $L(H)$.

Oletetaan, että joukko S on suurin mahdollinen riippumaton joukko graafissa $L(H)$. Olkoon $k' > k$. Tehdään vastaoletus, että joukko $\{x_{l_1}, x_{l_2}, \ldots, x_{l_{k'}}\}$ on graafin $L(H)$ kooltaan suurin mahdollinen riippumaton joukko. Tällöin $\{x_{l_i}, x_{l_j}\} \notin \mathscr{E}'$ ja edelleen siis $E_i \cap E_j = \emptyset$, kun $0 < l_i < l_j < l_{k'}$. Mutta tällöin joukko $\{E_{l_1}, E_{l_2}, \ldots, E_{l_{k'}}\}$ on pariutus. Koska pariutus $\mathscr{E}'$ on suurin mahdollinen, on päädytty ristiriitaan. Siis $\alpha(L(H)) = k = \nu(H)$.

Oletetaan seuraavaksi, että hypergraafi H on kuten edellä ja olkoon joukko $\{X_1, X_2, \ldots, X_{m'}\}$ on duaalin H^* suurin mahdollinen pariutus. Duaalin H^* pariutuksen särmiä vastaava pistejoukon $S = \{x_1, x_2, \ldots, x_{m'}\}$ pisteet ovat pareittain erillisiä, sillä $X_i \cap X_j = \emptyset$ ja duaalin määritelmän 3.7 mukaan ei siis ole särmää $E \in E(H)$, jolla $\{x_i, x_j\} \in E$, kun $0 < i < j \leq m'$. Siis $\{x_i, x_j\} \notin E((H)_2)$ ja joukko S on siten riippumaton graafissa $(H)_2$. Joukon S koon maksimius todistetaan samalla tavalla kuin edellä ja jätetään lukijan todettavaksi. Täten $\alpha((H)_2) = |S| = m' = \nu(H^*)$. □

Esimerkki 3.28. Kun merkitsemme luvulla m hypergraafin H särmien lukumäärää, voimme kirjoittaa pariutuksen ja transversaalin välille seuraavan yhtälön:

$$\nu(H) = m - \tau(L(H)).$$

(vrt. [6, s. 423])

Todistus. Lukijan todettavaksi jää miten tulos seuraa esimerkin 3.25 perusteella ja lausetta 3.27 soveltamalla. Teemme seuraavaksi todistuksen näitä lauseita hyödyntämättä, jotta voimme havainnollistaa paremmin pariutuksen ja transversaalin suhdetta.

Olkoon $H = (X, \mathscr{E})$ hypergraafi, missä $|\mathscr{E}| = m$. Oletetaan, että joukko $\mathscr{E}' = \{E_1, E_2, \ldots, E_k\}$ on sen suurin pariutus, kun $k \leq m$. Olkoon $L(H) = (E, \mathscr{X})$ hypergraafin H representatiivinen graafi, missä pistejoukko $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$. Olkoon $E' = \{e_{k+1}, e_{k+2}, \ldots, e_m\} \subseteq E$. Joukko E' on transversaali graafissa $L(H)$, sillä pariutuksen $\mathscr{E}'$ särmät eivät leikkaa toisiaan, joten niitä vastaavat graafin $L(H)$ pisteet $E_\nu = \{e_1, e_2, \ldots, e_k\}$ eivät ole yhdistettyjä keskenään ja siis jokaisessa joukon $\mathscr{X}$ särmässä vähintään toinen päätepiste kuuluu joukkoon E'.

Oletetaan, että transversaali E' ei ole pienin mahdollinen. Näin ollen voimme poistaa joukosta E' pisteen e. Oletetaan, että ei ole särmää $X \in \mathscr{X}$, johon piste e sisältyy. Tällöin pistettä e vastaava hypergraafin H särmä E ei leikkaa yhtäkään suurimman mahdollisen pariutuksen $\mathscr{E}'$ särmää, mikä on ristiriita. Samaan ristiriitaan päädytään, jos piste ei ole jonkin pistejoukon E_ν pisteen vieruspiste. Siis on olemassa särmä $\{e', e\} \in \mathscr{X}$. Mutta tällöin $|E' \setminus e \cap \{e', e\}| = 0$ ja $E' \setminus \{e\}$ ei ole transversaali. Transversaali E' on siis pienin mahdollinen. □

Määritelmä 3.29. Olkoon $H = (X, \mathscr{E})$ hypergraafi. Joukkoa $S \subseteq X$ sanotaan *vahvasti riippumattomaksi*, jos $|S \cap E| \leq 1$ jokaisella $E \in \mathscr{E}$. Suurimman vahvasti riippumattoman pistejoukon S pisteiden lukumäärää sanotaan *vahvaksi riippumattomuusluvuksi*. Hypergraafin H vahvaa riippumattomuuslukua merkitään $\overline{\alpha}(H)$ [[17, s. 152]].

Millä tahansa graafilla G pätee $\alpha(G) = \overline{\alpha}(G)$ [17, s. 152] ja millä tahansa hypergraafilla H on $\overline{\alpha}(H) = \overline{\alpha}((H)_2)$ [6, s. 448]. Näiden väitteiden todistamisen jätämme lukijalle.

Lause 3.30. *(vrt. [17, s. 152]) Jokaisella hypergraafilla H pätee:*

$$\nu(H) = \overline{\alpha}(H^*).$$

Todistus. Olkoon $H = (X, \mathscr{E})$ hypergraafi, missä $|\mathscr{E}| = m$. Oletetaan, että $\{E_1, E_2, \ldots, E_{m'}\} = \mathscr{E}' \subseteq \mathscr{E}$ on hypergraafin H suurin mahdollinen pariutus. Olkoon duaali $H^* = (E, \mathscr{X})$ ja $E' = \{e_1, e_2, \ldots, e_{m'}\} \subseteq E$ pariutusta $\mathscr{E}'$ vastaava pistejoukko. Olkoon $X_k \in \mathscr{X}$ jollakin $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Duaalin määritelmän 3.7 perusteella $e \in X_k$, jos ja vain jos särmää X_k vastaava piste x sisältyy pistettä e vastaavaan särmään E. Koska $\mathscr{E}'$ on pariutus, niin $E_i \cap E_j = \emptyset$, kun $0 < i < j \leq m'$. Näin ollen enintään yksi piste joukosta E' sisältyy särmään X_k.

Oletetaan sitten, että $m'' > m'$ ja $E'' = \{e_{l_1}, e_{l_2}, \ldots, e_{l_{m''}}\} \subseteq E$ on kooltaan suurin mahdollinen vahvasti riippumaton joukko hypergraafissa H^*. Siis duaalin H^* missä tahansa särmässä on enintään yksi joukon E'' piste. Näin ollen hypergraafissa H pistejoukkoa E'' vastaavan särmäjoukon $\mathscr{E}'' = \{E_{l_1}, E_{l_1}, \ldots, E_{l_{m''}}\}$ särmät eivät pareittain leikkaa toisiaan. Täten E'' on pariutus hypergraafissa H. Mutta $|\mathscr{E}''| = m'' > m' = |\mathscr{E}|$, mikä on ristiriita. □

3.2 Hypergraafien väritys ja normaalit hypergraafit

Tässä aliluvussa tarkastelemme hypergraafien värityksiä ja normaaleja hypergraafeja. Tämän teemme pitkälti Bergea [6, s. 428, 448, 458–460] lainaten ja mukaillen.

Määritelmä 3.31. Olkoon $H = (X, \mathscr{E})$ hypergraafi ja olkoon joukko $P = \{S_1, S_2, .., S_q\}$ hypergraafin H ositus riippumattomiin pisteiden joukkoihin, kun $q \in \mathbb{Z}_+$. Tällöin ositusta P sanotaan hypergraafin H *q-värітykseksi*. Hypergraafia sanotaan *q-värittyväksi*, mikäli sillä on olemassa q-väritys.

Alaluvussa 2.3 määrittelimme pisteiden värityksen 2.27 yksinkertaisille graafeille. Määrittelyssä viitataan ainoastaan graafin pistejoukkoon, joten voimme käyttää sen käsitteitä myös hypergraafeilla. Väritys, värit ja pisteen väri tarkoittaa siten hypergraafissa täsmälleen samaa kuin yksinkertaisessa graafissa.

Hypergraafin $H = (X, \mathscr{E})$ *vahvaksi q-värітykseksi* sanotaan q-väritystä, jossa saman särmän kahdella eri pisteellä ei ole samaa väriä. Olkoon P vahva q-väritys. Tällöin särmän $E \in \mathscr{E}$ jokainen piste on erivärinen ja mielivaltainen piste $x \in E$ kuuluu täsmälleen yhteen joukkoon $S \in P$. Joukon S jokainen piste on samanvärinen ja siten $|S \cap E'| \leq 1$ jokaisella särmällä $E' \in \mathscr{E}$. Vahva q-väritys on siis pistejoukon X ositus q:hun vahvasti riippumattomaan joukkoon.

Hypergraafin $H = (X, \mathscr{E})$ *vahvaksi väriluvuksi* sanotaan lukua $\gamma(H)$, joka on pienin luku q jolla on olemassa vahva q-väritys. Selvästi $\gamma(H) \geq r(X)$. Hypergraafia H sanotaan *γ-perfektiksi*, jos $\gamma(H_A) = r(H_A)$, kun $A \subseteq X$.

Huomautus 3.32. Olemme aikaisemmin merkinneet myös graafin G värilukua kirjaimilla $\gamma(G)$. Tämä ei aiheuta ongelmia, sillä on helppo todeta, että graafin vahva väriluku on sama kuin graafin väriluku. Sen sijaan γ-perfekti graafi ei välttämättä ole γ-perfekti hypergraafi.

Lause 3.33. *Jokainen γ-perfekti hypergraafi on konformaalinen.*

Todistus. Olkoon $H = (X, \mathscr{E})$ γ-perfekti hypergraafi. Osoittaaksemme, että hypergraafi H on konformaalinen, lauseen 3.17 perusteella riittää näyttää, että jokainen graafin $(H)_2$ klikki C sisältyy särmään $E \in \mathscr{E}$.

Olkoon joukko C jokin graafin $(H)_2$ klikki ja hypergaafi $H_C \subseteq H$ klikin C indusoima alihypergraafi. Olkoot eri pisteet $x, y \in V(H_C)$ mielivaltaisia. Koska joukko C on klikki graafissa $(H)_2$ ovat pisteet x, y vieruspisteitä graafissa $(H)_2$. 2-sektion määritelmän mukaan on olemassa $E \in \mathscr{E}$ siten, että $x, y \in E$. Edelleen alihypergraafissa H_C on särmä $E' \subseteq E$, missä $x, y \in E'$.

Jokainen klikin C pari kuuluu siis johonkin särmään alihypergraafissa H_C. Näin ollen alihypergraafin ainoa ositus vahvasti riippumattomiin joukkoihin on joukko $\{\{p\} \mid p \in C\}$. Täten γ-perfektin hypergraafin määritelmän mukaan: $|C| = \gamma(H_C) = r(H_C)$. Asteen määritelmän mukaan on olemassa $E_C \in E(H_C)$ siten, että $|C \cap E_C| = |C|$. Näin ollen jollakin $E'' \in \mathscr{E}$ pätee $C \subseteq E_C \subseteq E''$. $\square$

Olkoon hypergraafi H γ-perfekti ja joukko P sen minimaalinen vahva q-väritys. Koska hypergraafin H jokaisen särmän E jokainen piste on erivärinen, on joukko P myös graafin $(H)_2$ vahva q-väritys. Oletetaan, että P on graafin $(H)_2$ minimaalinen vahva q-väritys ja tehdään vastaoletus, että näin ei ole. Olkoon P' graafin $(H)_2$ minimaalinen vahva q-väritys. Tällöin siis $|P'| < |P|$. Olkoon $\mathscr{C}_{\max}$ graafin G maksimaalisten klikkien joukko ja $\mathscr{E}_{\max}$ hypergraafin H maksimaalisten särmien joukko. Jokaiseen klikkiin $C \in \mathscr{C}_{\max}$ kuuluvat pisteet ovat pareittain erivärisiä. Tästä ja lauseesta 3.33 seuraa konformaalisuuden määritelmän perusteella, että $\mathscr{C}_{\max} = \mathscr{E}_{\max}$. Voimme siis värittää hypergraafin H särmät kuten graafin G klikit on väritetty ja ositus P' on siten vahva q-väritys myös hypergraafissa H. Tämä on ristiriita, sillä oletuksen mukaan ositus P oli minimaalinen vahva q-väritys.

Mille tahansa γ-perfektille hypergraafille H siis pätee seuraava yhtälö:

$$\gamma(H) = \gamma((H)_2). \tag{3.2}$$

Hypergraafin H *särmien q-väritykseksi* sanotaan väritystä Q, jossa toisiaan leikkaavat särmät on väritetty erivärisiksi ja $|Q| = q$. Särmien q-väritys on siis hypergraafin H särmien ositus samanväristen särmien joukkoihin, joista jokainen on pariutus.

Määritelmä 3.34. Olkoon H hypergraafi. Hypergraafin H särmien pienintä väritystä sanotaan hypergraafin *kromaattiseksi indeksiksi* ja merkitään symboleilla $q(H)$.

Lause 3.35. *Olkoon H hypergraafi. Tällöin seuraava yhtälö pätee:*

$$q(H) = \gamma(H^*).$$

Todistus. Olkoon $H = (X, (E_1, E_2, \ldots, E_m))$ hypergraafi, jonka kromaattinen indeksi $q(H) = p$. Väritetään duaalin piste e_k samanväriseksi kuin sitä vastaava särmä E_k. Kun särmät E_i ja E_j ovat samanväriset, niin niitä vastaavat duaalin H^* pisteet e_i ja e_j eivät ole vieruspisteitä. Näin ollen jokaisen särmän $X \in E(H^*)$ jokainen piste on erivärinen ja pisteiden väritys on vahva q-väritys.

Oletetaan, että edellinen väritys on minimaalinen ja tehdään vastaoletus, että väritys ei ole minimaalinen. Oletetaan, että $\gamma(H^*) = p' < p$. Väritetään nyt hypergraafissa H särmä E_i samanväriseksi kuin vastaava piste $e \in E(H^*)$. Samanväriset särmät eivät ole leikkaa, sillä niitä vastaavat pisteet eivät kuulu samaan särmään duaalissa H^*. Näin olemme saaneet särmien värityksen, jolla $q(H) = p' < p = q(H)$, mikä on ristiriita. Siis alkuperäinen väite pätee. □

Selvästi $q(H) \geq \delta(H)$, sillä hypergraafissa H on särmien maksimiasteen $\delta(H)$ kokoinen särmien joukko $\mathscr{E}'$, joiden keskinäinen leikkaus ei ole tyhjä. Nämä särmät ovat siis vierekkäisiä ja näin ollen väritettävä eri väreillä, eikä värien lukumäärä $q(H)$ näin ollen voi olla pienempi kuin särmien maksimiaste $\delta(H)$. Edelleen hypergraafi $H = C_5$ on esimerkki graafista, missä $q(H) > \delta(H)$.

Määritelmä 3.36. Olkoon H hypergraafi. Hypergraafia H sanotaan *normaaliksi*, jos sen jokaisella osittaisgraafilla H' pätee $q(H') = \delta(H')$.

Lause 3.37. *Olkoon hypergraafi $H = (X, \mathscr{E})$ normaali. Tällöin duaali H^* on γ-perfekti.*

Todistus. Olkoon hypergraafi $H = (X, \mathscr{E})$ normaali. Merkitsemme duaalia $H^* = (E, \mathscr{X})$ ja olkoon $E' \subseteq E$. Merkitään pistejoukon E' generoimaa hypergraafin H^* alihypergraafia $H^*_{E'}$ ja pistejoukkoa E' hypergraafissa H vastaavan särmäperheen $\mathscr{E}' \subseteq \mathscr{E}$ generoimaa osittaishypergraafia H'.

Oletetaan, että $\delta_x(H') = q$ pisteessä $x \in V(H')$. Tällöin särmäperhettä $\mathscr{E}_x$ vastaavat pisteet kuuluvat särmään X duaalissa $H^*_{E'}$. Särmä X on maksimaalinen, sillä $|X_i| = |\delta_x(H)|$, kun $X_i \in E(H^*_{E'})$. Näin ollen saadaan $r(H^*_{E'}) = q = \delta(H')$. Koska hypergraafi H on normaali, on $\delta(H') = q(H')$. Lauseen 3.35 nojalla $q(H') = \gamma(H^*_{E'})$. Siis $r(H^*_{E'}) = \delta(H') = q(H') = \gamma(H^*_{E'})$ jokaisella alihypergraafilla $H^*_{E'}$. □

Määritelmä 3.38. Olkoon $H = (X, \mathscr{E})$ hypergraafi ja olkoon $E \subseteq X$. Merkinnällä $H + E$ tarkoitamme hypergraafia $H' = (X, \mathscr{E} \cup \{E\})$. Sanomme, että *hypergraafi H' saadaan lisäämällä hypergraafiin H särmä E.*

Lause 3.39. *Olkoon hypergraafi $H = (X, \mathscr{E})$ normaali ja olkoon särmäperhe $\mathscr{E} = (E_1, E_2, \ldots, E_m)$. Jos hypergraafiin H lisätään särmä $E_0 = E_1$, niin näin saatu hypergraafi H_0 on myös normaali.*

Todistus. Olkoon hypergraafi $H = (X, \mathscr{E})$ normaali ja olkoon särmäperhe $\mathscr{E} = (E_1, E_2, \ldots, E_m)$. Konstruoidaan hypergraafi H_0 lisäämällä hypergraafiin H särmä $E_0 = E_1$.

Olkoon hypergraafi H'_0 hypergraafin H_0 osittaishypergraafi. Jos särmä E_0 ei sisälly osittaishypergraafiin H'_0, niin on olemassa hypergraafin H osittaishypergraafi H' siten, että $H'_0 = H'$. Tällöin tietenkin $q(H'_0) = \delta(H'_0)$, koska hypergraafi H on normaali.

Olkoon hypergraafi H' on hypergraafin H osittaishypergraafi. Oletetaan, että $H'_0 = H' + E_0$. Jos hypergraafi H' ei sisällä särmää E_1, niin on olemassa osittaishypergraafi $H'' \subseteq H$ siten, että $H'' = H' + E_1 = H' + E_0 = H'_0$. Siis $q(H'_0) = \delta(H'_0)$, koska hypergraafi H on normaali.

Oletetaan seuraavaksi, että hypergraafi H' sisältää särmän E_1 ja olkoon $q = q(H') = \delta(H')$. Tällöin on kaksi tapausta:

1. Särmä E_1 sisältää pisteen $x \in X$, jolla $\delta(H') = q$. Piste x sisältyy myös särmään E_0, joten $\delta(H'_0) = \delta(H') + 1 = q + 1$. Jokaisella hypergraafilla hypergraafin aste on pienempi tai yhtäsuuri kuin sen väriluku, joten $\delta(H'_0) \leq q(H'_0)$. Hypergraafin H'_0 särmien minimaaliseen väritykseen tarvitaan enintään $q(H') + 1$ väriä, sillä särmä E_0 voidaan voidaan

värittää värillä, jota ei ole käytetty hypergraafin H' värityksessä. Siis $q(H'_0) \leq q(H') + 1$. Täten:

$$\delta(H'_0) \leq q(H'_0) \leq q(H') + 1 = q + 1 = \delta(H'_0)$$

ja näin ollen $\delta(H'_0) = q(H'_0)$.

2. Särmä E_1 ei sisällä pistettä $x \in X$, jolla $\delta(H') = q$. Siis $\delta_x(H') \leq q-1$ jokaisella $x \in E_1$. Olkoon väritys Q jokin hypergraafin H särmien q-väritys. Oletetaan, että särmä E_1 on väritetty punaiseksi. Jokainen piste a, jolla $\delta_a(H') = q$ kuuluu särmästä E_1 erilliseen punaiseen särmään, sillä kooltaan suurimmassa tähdessä on q erivärista särmää. Olkoon $\mathscr{E}_1$ särmästä E_1 erillisten punaisten särmien joukko. Poistetaan särmäjoukko $\mathscr{E}_1$ hypergraafista H'. Tällöin hypergraafin H' jokaisesta suurimmasta tähdestä poistetaan punainen särmä. Siis $\delta(H' - \mathscr{E}) = q - 1$.

   Koska hypergraafi H' on normaali, niin $q(H' - \mathscr{E}_1) = q - 1$ ja on olemassa hypergraafin $H - \mathscr{E}_1$ särmien $(q-1)$-väritys. Koska $\mathscr{E}_1 \cup \{E_0\}$ on pariutus, niin tämän pariutuksen särmät voidaan värittää samanvärisiksi. Väritetään ne värillä, jota ei ole käytetty hypergraafin $H' - \mathscr{E}_1$ värityksessä. Näin saadaan hypergraafin H'_0 särmien q-väritys. Täten:

$$\delta(H'_0) \leq q(H'_0) \leq q = \delta(H'_0)$$

   ja siis $\delta(H'_0) = q(H'_0)$.

□

Lause 3.40. *(vrt. [6, s. 459, Theorem 7], kts. [17, s. 185, Theorem 9.2.3]) Hypergraafi H on normaali, jos ja vain jos jokaisella osittaishypergraafilla $H' \subseteq H$ on Königin ominaisuus.*

Todistus. (vrt. [6, s. 459]) (“ $\Rightarrow$ “): Osoitamme aluksi, että jokaisella normaalilla hypergraafilla on Königin ominaisuus todistamalla seuraavan väitteen: jos hypergraafi H on normaali ja $\nu(H) = q$, niin tällöin on olemassa transversaali T, jolla $|T| = q$. Tämä riittää, sillä yleisesti hypergraafeilla pätee, että pienin transversaali on vähintään suurimman pariutuksen kokoinen. Näin ollen on transversaali T kooltaan pienin mahdolinen eli $\nu(H) = \tau(H)$. Todistus tehdään induktiolla.

Olkoon hypergraafi $H = (X, \mathscr{E})$ normaali. Oletetaan, että $\nu(H) = 1$. Tällöin hypergraafin H särmät leikkaavat pareittain. Koska hypergraafi H on normaali, niin lauseen 3.37 mukaan sen duaali H^* on γ-perfekti. Lauseen 3.33 nojalla se on konformaalinen. Edelleen lauseen 3.19 perusteella hypergraafin H^* duaali H on helly. Näin ollen $\cap\mathscr{E} \neq \emptyset$. Siis on olemassa piste x, joka sisältyy jokaiseen särmään $E \in \mathscr{E}$. Näin ollen on olemassa transversaali T, jolla $|T| = 1$. Väite siis pätee, kun $q = 1$.

Olkoon $q > 1$. Induktio-oletus: väite pätee jokaiselle normaalille hypergraafille H_1, kun $\nu(H_1) < q$. Osoitetaan, että väite pätee myös normaalille hypergraafille $H = (X, \mathscr{E})$, kun $\nu(H) = q$.

Olkoon piste $x \in X$ mielivaltainen ja olkoon särmäjoukko $\mathscr{E}_x$. Tällöin hypergraafi $H - \mathscr{E}_x$ on hypergraafin H osittaishypergraafi. Hypergraafin H suurimpaan mahdolliseen pariutukseen voi kuulua jokin särmä $E \in \mathscr{E}_x$. Näin ollen hypergraafin $H - \mathscr{E}_x$ suurimman pariutuksen koko $\nu(H - \mathscr{E}_x) = q$ tai $\nu(H - \mathscr{E}_x) = q - 1$. Jos $\nu(H - \mathscr{E}_x) = q - 1 < q$, niin induktio-oletuksen nojalla hypergraafissa $H - \mathscr{E}_x$ on olemassa transversaali T, missä $|T| = q - 1$. Näin ollen joukko $T \cup \{x\}$ on transversaali hypergraafissa $H - \mathscr{E}_x + \mathscr{E}_x = H$ ja $|T \cup \{x\}| = q$. Siis väite pätee.

Oletetaan sitten, että $\nu(H - \mathscr{E}_x) = q$ jokaisella $x \in X$. Asetetaan $n = |X|$. Olkoon $I = \{1, 2, \ldots, n\}$ ja joukko $\mathscr{F}_i$ hypergraafin $H - \mathscr{E}_{x_i}$ suurin mahdollinen pariutus jokaisella $x_i \in X$ kun $i \in I$. Muodostetaan hypergraafi $H_0 = \mathscr{F}_1 + \mathscr{F}_2 + \ldots + \mathscr{F}_n$ jokaisesta pariutuksen $\mathscr{F}_i$ särmästä jokaisella $i \in I$. Oletuksen mukaan jokaisessa pariutuksessa $\mathscr{F}_i$ on q särmää, joten hypergraafissa H_0 on tarkalleen nq särmää.

Koska jokainen piste x_i ei sisälly mihinkään pariutuksen $\mathscr{F}_i$ särmään ja pariutuksen $\mathscr{F}_i$ särmät eivat leikkaat toisiaan pareittain, niin pariutuksessa $\mathscr{F}_j$ voi olla enintään yksi särmä E, jolla $x_j \in E$, kun $i \neq j$. Siis $\delta(H_0) < n$.

Oletaan, että hypergraafin H_0 värityksessä on enintään q samanväristä särmää. Tehdään vastaoletus, että näin ei ole. Väritetään pariutuksen $\mathscr{F}_i$ jokainen särmä punaiseksi ja väritetään jokin särmä $E \in \mathscr{F}_j$ punaiseksi jollakin $j \neq i$, kun $i, j \in I$. Jos $\{E\} \cap \mathscr{F}_i \neq \emptyset$, niin $\{E\} \cup \mathscr{F}_i$ on pariutus hypergraafissa H_0. Mutta tällöin $|\{E\} \cup \mathscr{F}_i| = q + 1 \geq q$, mikä on ristiriita. Jos $\{E\} \cap \mathscr{F}_i = \emptyset$, niin ristiriita on ilmeinen ja alkuperäinen väite pätee.

Hypergraafissa H_0 on nq särmää ja eri värejä on siten vähintään n kappaletta. Täten $q(H_0) \geq n > \delta(H_0)$. Hypergraafi H_0 voidaan generoida jostakin hypergraafin H osittaishypergraafista H' lisäämällä siihen yksitellen hypergraafin H' särmiä. Lauseen 3.39 nojalla hypergraafi H_0 on normaali. Tästä seuraa, että $q(H_0) = \delta(H_0)$, mikä on ristiriita. Siis ei voi olla $\nu(H - \mathscr{E}_x) = q$ ja väite seuraa induktioperiaatteesta.

Olemme osoittaneet, että mielivaltaisella normaalilla hypergraafilla on Königin ominaisuus, kun pienimmän pariutuksen koko on luonnollinen luku. Normaalin hypergraafin H jokainen osittaishypergraafi H' on normaali hypergraafi, joten myös niillä on Königin ominaisuus.

(“ $\Leftarrow$ “): Olkoon hypergraafi $H = (X, \mathscr{E})$, jonka jokaisella osittaishypergraafilla H' pätee $\nu(H') = \tau(H')$. Riittää osoittaa, että $\delta(H) = q(H)$.

Olkoon $m = |\mathscr{E}|$ ja $I = \{1, 2, \ldots, m\}$. Olkoon hypergraafi $\overline{H}$ konstruoitu siten, että sen pisteet vastaavat pariutuksia hypergraafissa H ja sen särmä $\overline{E}_i$ joukko, jossa on kaikki hypergraafin H pariutukset, jotka sisältävät särmän E_i, kun $i \in I$. Seuraavaksi muodostamme ekvivalenssiketjun. Olkoon $J \subseteq I$.

Aliperheellä $H' = (E_j | j \in J)$ on epätyhjä leikkaus, jos ja vain jos

$$E_j \cap E_{j'} \neq \emptyset, \text{kun } j, j' \in J.$$

Nimittäin, jos särmät leikkaavat pareittain, niin $\nu(H) = 1$ ja siis $\tau(H) = 1$. Edellisen kanssa yhtäpitävää on, että

$$\overline{E}_j \cap \overline{E}_{j'} = \emptyset, \text{kun } j, j' \in J,$$

sillä jos särmien leikkaus on epätyhjä, niin ne eivät kuulu yhdessä mihinkään pariutukseen.

Toisin sanoen, perheen $(E_j \mid j \in J)$ joukoilla on yhteinen piste hypergraafissa H, jos ja vain jos perhe $(\overline{E}_j \mid j \in J)$ on pariutus hypergraafissa $\overline{H}$. Olkoon $T = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ kooltaan pienin mahdollinen transversaali hypergraafissa H. Nyt $x_i \in \cap \mathscr{E}_{x_i}$, kun $i = 1, 2, \ldots, k$ ja näin ollen perhettä $\mathscr{E}_{x_i}$ vastaava perhe $\overline{\mathscr{E}}_{x_i}$ hypergraafissa H on pariutus. Väritetään ensimmäiseksi pariutuksen $\overline{\mathscr{E}}_{x_1}$ särmät punaiseksi. Väritetään loput pariutukset indeksin mukaisessa suuruusjärjestyksessä pienimmästä suurimpaan seuraavalla tavalla: väritetään pariutuksen $\overline{\mathscr{E}}_{x_i}$ ne särmät, joita ei ole väritetty pariutuksessa $\overline{\mathscr{E}}_{x_j}$, kun $j < i$. Näin on saatu hypergraafin $\overline{H}$ särmien väritys ja edellä todetusta ekvivalenssiketjusta seuraa, että se on minimaalinen. Näin ollen:

$$q(\overline{H}) = \tau(H) \tag{3.3}$$

ja suoraan asteen määritelmästä 3.2 ja ekvivalenssiketjusta saamme:

$$\delta(H) = \nu(\overline{H}) \tag{3.4}$$

Muodostetaan seuraavaksi toinen ekvivalenssiketju. Oletetaan, että särmäperheen $(\overline{E}_j \mid j \in J)$ leikkaus on epätyhjä. Särmässä $\overline{E}_j$ on tarkalleen ne hypergraafin H pariutukset, joihin särmä E_j sisältyy. Siis perheen $(\overline{E} \mid j \in J)$ joukoilla on yhteinen piste $\mathscr{E}_0$, jos ja vain jos jokaisella $j \in J$ särmä E_j sisältyy pariutukseen $\mathscr{E}_0$ ja näin on, jos ja vain jos joukko $(E_j \mid j \in J)$ on pariutus hypergraafissa H.

Näin ollen kooltaan suurin pariutus hypergraafissa H vastaa maksimaalista leikkaavaa perhettä hypergraafissa $\overline{H}$ eli

$$\delta(\overline{H}) = \nu(H) \tag{3.5}$$

ja vastaavalla tavalla kuin totesimme yhtälön 3.3 saamme:

$$q(H) = \tau(\overline{H}) \tag{3.6}$$

Soveltamalla yhtälöitä 3.3 ja 3.5 hypergraafin H osittaishypergraafiin H' ja vastaavan hypergraafin $\overline{H}$ osittaishypergraafiin $\overline{H}'$ saadaan:

$$q(\overline{H}') = \tau(H') = \nu(H') = \delta(\overline{H}').$$

Täten hypergraafi $\overline{H}$ on normaali ja todistuksen toisesta suunnasta saadaan $\nu(\overline{H}) = \tau(\overline{H})$. Näin ollen soveltamalla yhtälöitä 3.4 ja 3.6 osittaishypergraafeihin H' ja $\overline{H}'$ saadaan:

$$\delta(H') = \nu(\overline{H}') = \tau(\overline{H}') = q(H')$$

ja hypergraafi H on siis normaali. □

Nyt meillä on riittävä käsitteistö ja tarvittavat lauseet perfektien graafien teoreeman todeksi näyttämiseen. Tämän teemme seuraavassa luvussa.

3.3 Perfektien graafien teoreema

Seuraavaksi todistettava perfektien graafien teoreema on malliesimerkki siitä, miten graafiteoreettinen ongelma ratkaistaan lähestymällä sitä hypergraafien avulla.

Lause 3.41 (Perfektien graafien teoreema)**.** *(vrt. [6, s. 461, Theorem 8]) Olkoon $G = (X, E)$ graafi. Tällöin graafi G on α-perfekti, jos ja vain jos se on γ-perfekti.*

Todistus. Olkoon $G = (X, E)$ graafi. Konstruoidaan hypergraafi H siten, että sen pisteet vastaavat graafin G klikkejä ja sen särmä X_i on kaikkien niiden klikkien joukko, jotka sisältävät pisteen $x_i \in X$. Merkitään graafin G kaikkien klikkien joukkoa $\mathscr{C}$. Siis hypergraafi $H = (E, \mathscr{X})$, missä pistejoukko $E = \{e_i \mid c_i \in \mathscr{C}\}$ ja särmä $X_j = \{e_i \mid x_j \in C_i \text{ ja } C_i \in \mathscr{C}\}$. Duaalin määritelmän mukaan duaalin $H^* = (X, \mathscr{E})$ pistejoukko $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ vastaa hypergraafin H särmäjoukkoa $\mathscr{X}$ ja särmäperheen $\mathscr{E}$ särmä $E_j = \{x_i \mid i \leq m, X_i \ni e_j, e_j \in E\}$, missä $m = |\mathscr{X}|$.

Särmässä E_j on siis tarkalleen kaikki ne pisteet jotka kuuluvat pistettä e_j vastaavaan klikkiin $C_j \in \mathscr{C}$ ja siten $\mathscr{C} \subseteq \mathscr{E}$. Koska jokainen graafin G särmä on itsessään klikki ja jokainen graafin G piste on jonkun särmän päätepiste, niin graafin jokainen särmä ja piste sisältyy johonkin $E \in \mathscr{E}$. Lauseen 3.15 alkuosan perusteella graafi G on hypergraafin H representatiivinen graafi. Siis $G = L(H)$.

Täten lauseen 3.27 perusteella (tai vaihtoehtoisesti esimerkkien 3.25 ja 3.28 yhtälöitä käyttämällä):

$$\nu(H) = \alpha(L(H)) = \alpha(G) \tag{3.7}$$

ja lauseiden 3.35, 3.14, 3.37 ja yhtälön 3.2 perusteella:

$$q(H) = \gamma(H^*) = \gamma(L(H)) = \gamma(G). \tag{3.8}$$

Koska $(H^*)_2 = L(H) = G$ ja edellä on todettu, että graafin G klikkijoukolla $\mathscr{C}$ pätee $\mathscr{C} \subseteq \mathscr{E}$, niin hypergraafi H^* on konformaalinen apulauseen

3.17 nojalla. Näin ollen soveltamalla lausetta 3.19 saadaan, että hypergraafi H on helly.

Täten lauseen 3.23 perusteella saamme:

$$\tau(H) = \theta(L(H)) = \theta(G). \tag{3.9}$$

Lisäksi lauseen 3.21 perusteella tiedämme, että hypergraafin H jokainen leikkaava perhe on tähti. Koska hypergraafin aste tarkoittaa samaa kuin sen suurimman tähden särmien lukumäärä, niin lauseesta 3.20 saamme:

$$\delta(H) = \omega(G) \tag{3.10}$$

Olkoon hypergraafin H osittaishypergraafi H' ja graafin G aligraafi G_S siten, että pistejoukko $S \subseteq X$ ja osittaishypergraafi H' on pistejoukkoa S vastaavaan särmäjoukon generoima. Olemme aikaisemmin tässä luvussa todenneet, että kuvaus $H' \to G_S$ on bijektio. Näin ollen yhtälöistä 3.7 ja 3.9 saamme $\nu(H') = \alpha(G_S)$ ja $\tau(H') = \theta(G_S)$, kun aligraafia G_S vastaava osittaishypergraafi on H'.

($\Rightarrow$) Oletetaan seuraavaksi, että graafi $G = (X, E)$ α-perfekti. Tällöin jokaisella $S \subseteq X$ pätee $\alpha(G_S) = \theta(G_S)$. Sijoittamalla edelliset yhtälöt saadaan $\nu(H') = \alpha(G_S) = \theta(G_S) = \tau(H')$. Lauseen 3.40 perusteella hypergraafi H on normaali. Näin ollen $q(H') = \delta(H')$ ja sijoittamalla yhtälöt 3.8 ja 3.10 saamme $\gamma(G_S) = q(H') = \delta(H') = \omega(G_S)$. Koska $\gamma(G_S) = \omega(G_S)$ jokaisella $S \subseteq X$, niin graafi G on γ-perfekti.

($\Leftarrow$) Oletetaan sitten, että graafi $G = (X, E)$ γ-perfekti. Siis jokaisella $S \subseteq X$ pätee $\gamma(G_S) = \omega(G_S)$. Koska kuvaus $H' \to G_S$ on bijektio saadaan sijoittamalla yhtälöt 3.8 ja 3.10 $q(H') = \gamma(G_S) = \omega(G_S) = \delta(H')$ jokaisella osittaishypergraafilla $H' \subseteq H$. Täten hypergraafi H on normaali ja lauseen 3.40 mukaan $\nu(H') = \tau(H')$ jokaisella osittaishypergraafilla H'. Yhtälöihin 3.7 ja 3.9 sijoittamalla saadaan: $\alpha(G_S) = \nu(H') = \tau(H') = \theta(G_S)$. Koska $\alpha(G_S) = \theta(G_S)$ jokaisella $S \subseteq X$, niin graafi G on γ-perfekti. □

Edellä saamamme tuloksen perusteella α-perfektit graafit sekä γ-perfektit graafit ovat määritelmän 2.33 mukaisesti perfektejä graafeja. Sanotaan, että graafi *epäperfekti* jos se ei ole perfekti.

Osoitamme viimeiseksi, että perfektien graafien teoreeman suositumpi muotoilu on ekvivalentti lauseen 3.41 kanssa.

Lause 3.42 (Perfektien graafien teoreema)**.** *Olkoon G graafi. Graafi G on α-perfekti, jos ja vain jos sen komplementti $\overline{G}$ on α-perfekti.*

Todistus. Olkoon graafi G α-perfekti. Lauseen 3.41 perusteella graafi G on γ-perfekti ja edelleen lauseen 2.36 perusteella sen komplementti $\overline{G}$ on α-perfekti. Vastaavalla tavalla lauseista 2.36 ja 3.42 seuraa Bergen muotoilu 3.41. □

4 Vahva perfektien graafien teoreema

Vahva perfektien graafien teoreema todistettiin vuonna 2002 – noin kuukausi ennen Bergen kuolemaa. Nelihenkinen tutkimusryhmä työskenteli todistuksen parissa täysipäiväisesti yhteensä yli kahdeksan henkilötyövuotta [15]. Todistuksesta tuli pitkä sekä tekninen ja jopa tiivistelmän kirjoittaminen tästä todistuksesta on osoittautunut haasteelliseksi. Niinpä tässä kirjoituksessa tyydymme tarkastelemaan todistuksen ideaa ja käymään joitakin käsitteitä kevyesti läpi.

Määritelmä 4.1. Olkoon $G = (X, U)$ graafi ja olkoon $A \subseteq X$. Jos pistejoukon A generoima graafi G_A on parittoman pituinen, vähintään viiden pituinen sykli, niin aligraafin G_A sanotaan olevan *aukko.*(vrt. [15, s. 2–3])

Määritelmä 4.2. Olkoon G graafi ja aligraafi $G_A \subseteq G$ aukko. Aukon G_A komplementtigraafia $\overline{G}_A$ sanotaan *epäaukoksi.*(vrt. [15, s. 2–3])

Määritelmä 4.3. Graafia G sanotaan *Bergen graafiksi*, jos siinä ei ole aligraafina aukkoa tai epäaukkoa.

Esimerkki 4.4. Sykli C_5 on samanaikaisesti sekä aukko että epäaukko, sillä $\overline{C}_5 = C_5$. Tämä ei kuitenkaan päde yleisesti sykleillä.

Sanomme Bergen graafia lyhyemmin *bergeksi*, jos sekaannuksen vaaraa ei ole. Vahvan perfektien graafien teoreeman Bergen muotoilun (lause 2.38) ehto 3 on selvästi ekvivalentti Bergen graafin määritelmän 4.3 kanssa. Vahva perfektien graafien teoreema voidaan siten muotoilla kompaktimpaan muotoon.

Lause 4.5 (Vahva perfektien graafien teoreema)**.** *(kts. [9]) Graafi G on perfekti, jos ja vain jos se on berge.*

Lauseen 4.5 todistus on tekninen ja pitkä − lyhyempänä versionakin yli 140 sivua. Tarkastelemme seuraavaksi pintapuoleisesti todistuksen ideaa ja tarvitsemme sitä varten muutamia lisämääritelmiä.

Määritelmä 4.6. Olkoon $G = (X, U)$ graafi ja olkoon $P = (X_1, X_2)$ graafin G ositus. Osituksen P sanotaan olevan 2-*yhdistetty* graafissa G, jos on olemassa erilliset epätyhjät $A_i, B_i \subseteq X_i$, kun $i = 1, 2$, ja seuraavat ehdot täyttyvät:

1. Parit (A_1, A_2) ja (B_1, B_2) muodostavat täydelliset kaksijakoiset aligraafit ja joukkojen X_1 ja X_2 välillä ei ole muita särmiä.

2. Pistejoukon X_i indusoiman aligraafin jokainen komponentti sisältää vähintään yhden pisteen joukoista A_i ja B_i, kun $i = 1, 2$.

3. Jos pistejoukot A_i ja B_i molemmat koostuvat yhdestä pisteestä ja pistejoukon X_i indusoima aligraafi koostuu polusta, tällöin tämän polun pituus on suurempi tai yhtäsuuri kuin 3, kun $i = 1, 2$.

Määritelmä 4.7. (kts.[10]) Olkoon $G = (X, U)$ graafi ja olkoon joukko $P = (A, B, C, D, E, F)$ graafin G ositus, missä joukot A, B, C, D, E ja F ovat epätyhjiä. Osituksen P sanotaan olevan *M-yhdistetty* graafissa G, jos seuraavat ehdot täyttyvät:

1. Jokaisella pisteellä $x \in A$ on vieruspiste $x \in B$ sekä piste $y \in B$, joka ei ole vieruspiste, ja jokaisella pisteellä $x' \in B$ on vieruspiste $x' \in A$ sekä piste $y' \in A$, joka ei ole vieruspiste.

2. Parit (A, C), (A, F), (B, D) ja (B, F) muodostavat täydelliset kaksijakoiset aligraafit.

3. Pistejoukkoparien (A, D), (A, E), (B, C) ja (B, E) välillä ei ole särmiä.

Määritelmä 4.8. (kts.[10]) Olkoon $G = (X, U)$ graafi ja olkoon $P = (X, Y)$ graafin G ositus. Ositusta P sanotaan *vino-ositukseksi*, jos pistejoukon X indusoimassa aligraafissa jokainen piste on irtopiste ja pistejoukon Y indusoiman aligraafin komplementissa jokainen piste on irtopiste.

Monet yritykset todistaa vahva perfektien graafien teoreema ovat perustuneet niin sanotun pienimmän vastaesimerkin ei-olemassaolon oletukseen. Seuraavaksi esittelemme todistuksen varsinaisen päätuloksen, jonka lähestymistapa on erilainen. Sen mukaan Bergen graafeilla on määrätty rakenne. On tunnettua, että graafit, joilla on tämä rakenne, ovat perfektejä.

Lause 4.9 (Bergen graafien rakenneteoreema)**.** *(kts. [9]) Olkoon G graafi. Graafi G on berge, jos ja vain jos*

1. *se on kaksijakoinen graafi, kaksijakoisen graafin viivagraafi tai näistä toisen komplementti; tai*

2. *sillä on jokin seuraavista osituksista: 2-yhdistetty ositus graafissa G, 2-yhdistetty ositus graafissa $\overline{G}$, M-yhdistetty ositus graafissa G tai vino-ositus graafissa G.*

$\square$

Vahva perfektien graafien teoreema (4.5) seuraa suoraan edellisestä tuloksesta.

Todetaan seuraavaksi, että vahvasta täydellisten graafien teoreemasta seuraa suoraviivaisesti perfektien graafien teoreema. Olkoon graafi G α-perfekti. Tällöin graafi G on berge eikä siinä eikä sen komplementissa $\overline{G}$ siis ole aukkoa. Perfektien graafien teoreeman toisen muotoilun (3.42) mukaan graafi $\overline{G}$ on α-perfekti. Tehdään vastaoletus, että $\overline{G}$ ei ole α-perfekti. Tällöin graafissa $\overline{G}$ tai $\overline{\overline{G}} = G$ on aukko tai epäaukko ja tämä on ristiriita. Siis graafi $\overline{G}$ on α-perfekti.

5 Shannonin kapasiteetti

Tarkastellaan seuraavaksi, mitä Shannon tarkoitti kommunikaatiokanavalla. Kommunikaatiokanava on joukko lähettimiä, jotka voivat lähettää yhden symbolin mittaisia viestejä. Lähettimen lähettämä symboli saattaa mennä sekaisin toisen lähettimen lähettämän symbolin kanssa, jolloin viestin vastaanottaja saa virheellisen viestin. Vastaanottaja tulkitsee siis väärin mitä lähettimiä viestin lähettäjä käytti. Vuonna 1956 Shannon kysyi, mikä on kommunikaatiokanavan maksimaalinen tiedonsiirtokyky siten, että vastaanottaja saa viestin ilman virhetulkinnan mahdollisuutta. [1, s. 213]

Olkoon joukko X *aakkosto*. Mallinnamme kommunikaatiokanavaa graafilla $G = (X, U)$, missä pistejoukon X pisteet vastaavat *lähettimiä* ja särmäjoukon U särmät vastaavat symbolipareja, jotka voivat mennä sekaisin. Irtopistettä vastaavan lähettimen symboli ei voi siis mennä toisen lähettimen symbolin kanssa sekaisin. Pisteen x kaikki vieruspisteet muodostavat *hajaannusjoukon* S_x. Kun kommunikaatiokanava saa *syötteeksi* symbolin $x \in X$, niin pistettä x vastaavaa lähetintä käytetään ja *vastaanottaja* saa satunnaisen *tulosteen* hajaannusjoukosta S_x. [2, s. 2] Tällaista graafia G sanotaan *sekaannusgraafiksi* [1, s. 213]. Graafiteoreettisen tarkastelun kannalta ei ole merkitystä, mallintaako graafi kommunikaatiokanavaa. Näin ollen kutsumme sekaannusgraafeja yksinkertaisemmin graafeiksi.

Jos lähettäjä ja vastaanottaja sopivat, että käytettävät syötteet kuuluvat tiettyyn riippumattomaan joukkoon, niin tällöin todennäköisyys on nolla sille, että vastaanottaja tulkitsisi satunnaisen hajaannusjoukon tulosteen väärin. Kommunikaatiokanavan maksimaalinen virheetön tiedonsiirtokyky (eli informaation määrä) on siis sitä vastaavan graafin G riippumattomuusluku $\alpha(G)$. Riippumattomuusluku kuvaa siten kooltaan suurinta mahdollista syötejoukkoa. [2, s. 2]

Viestin pituutta kasvattamalla voidaan joskus kasvattaa informaation määrää, mutta ei vähentää sitä.[1, s. 214] Viestin pituutta voidaan kasvattaa käyttämällä samaa kommunikaatiokanavaa monta kertaa peräkkäin. Tämä asia mielissämme lähdemme seuraavaksi tarkastelemaan graafien tuloja.

5.1 Graafien tulot ja potenssit

Graafeille voidaan määritellä monia tulo-operaatiota. Yhteistä näille on se, että tulona saatavan graafin pistejoukko on tulontekijöinä olevien graafien pistejoukkojen karteesinen tulo (kts. [18], Graph products). Seuraavaksi määrittelemme yhden tuloista eli graafien normaalin tulon, sekä tarkastelemme sen yhteyttä aiemmin määriteltyihin tunnuslukuihin α ja θ (vrt. [6, s. 377–381]).

Määritelmä 5.1. Olkoon graafit $G = (X, U)$ ja $H = (Y, V)$. Asetetaan graafien G ja H *normaali tulo* $G \times H := (X \times Y, E)$, missä $\{(x, y), (x', y')\} \in E$ täsmälleen silloin, kun jokin seuraavista ehdoista pätee:

1. $x = x'$ ja $\{y, y'\} \in V$

2. $\{x, x'\} \in U$ ja $y = y'$

3. $\{x, x'\} \in U$ ja $\{y, y'\} \in V$

Graafien normaalista tulosta käytetään myös sanontaa *vahva tulo*. Usein puhumme pelkästään *graafien tulosta* tai *tulosta*, kun tarkoitamme graafien normaalia tuloa. Selvästi graafien G ja H tulo $G \times H$ on graafi. On helppo todeta, että määritelmän 5.1 tulo-operaattori $\times$ on liitännäinen. Merkinnällä G^n tarkoitamme tuloa $G \times G \times \ldots \times G$, missä graafi G esiintyy n kertaa.

Lause 5.2. *(kts. [6, s. 381, Proposition 9]) Olkoon graafit G ja H. Tällöin:*

$$\alpha(G \times H) \geq \alpha(G)\alpha(H).$$

Todistus. Olkoon graafit $G = (X, U)$ ja $H = (Y, V)$, ja joukot S ja T vastaavasti näiden suurimmat mahdolliset riippumattomat joukot. Tällöin $\alpha(G) = |S|$ ja $\alpha(H) = |T|$. Osoitetaan seuraavaksi, että karteesinen tulo $S \times T$ on riippumaton joukko graafissa $G \times H$. Olkoot $x, x' \in S$ ja $y, y' \in T$. Koska joukot S ja T ovat riippumattomia, niin $\{x, x'\} \notin U$ ja $\{y, y'\} \notin V$. Näin ollen graafien tulon määritelmän perusteella $\{(x, y), (x', y')\} \notin E(G \times H)$. Voimme täten muodostaa graafille $G \times H$ riippumattoman joukon asettamalla $S' := \{(x, y) \in X \times Y \mid x \in S \text{ ja } y \in T\}$ ja siis $S' = S \times T$. Graafin $G \times H$ suurimmassa riippumattomassa joukossa on vähintään $|S'| = |S \times T|$ alkiota. Näin saamme:

$$\alpha(G \times H) \geq |S \times T| = |S| \cdot |T| = \alpha(G)\alpha(H).$$

□

Lause 5.3. *(vrt. [6, s. 381, Proposition 10]) Olkoot graafit G ja H. Tällöin:*

$$\theta(G \times H) \leq \theta(G)\theta(H).$$

Todistus. Olkoon perhe $(C_1, C_2, \ldots, C_p)$ graafin G kooltaan pienin mahdollinen ositus klikkeihin ja olkoon perhe $(D_1, D_2, \ldots, D_q)$ graafin H kooltaan pienin mahdollinen ositus klikkeihin. Osoitetaan, että graafissa $G \times H$ joukko $C_i \times D_j$ on klikki kaikilla $i \in \{1, 2, \ldots, q\}$ ja kaikilla $j \in \{1, 2, \ldots, p\}$ ja klikkijoukko $(C_i \times D_j)_{1 \leq i \leq q, 1 \leq j \leq p}$ on ositus graafissa $G \times H$.

Olkoot eri pisteet $x, x' \in C_i$ ja eri pisteet $y, y' \in D_j$ joillakin indekseillä $i \in \{1, 2, \ldots, q\}$ ja $j \in \{1, 2, \ldots, p\}$. Koska joukot C_i ja D_j ovat klikkejä, on niiden jokainen alkio yhdistetty johonkin joukon toiseen alkioon. Näin ollen tulon määritelmän perusteella $\{(x, y), (x', y')\} \in E(G \times H)$. Koska pisteet x, x', y ja y' olivat mielivaltaisia, niin jokainen karteesisen tulon $C_i \times D_j$ alkio on yhdistetty graafissa jokaiseen saman tulon alkioon kaikilla $i \in \{1, 2, \ldots, q\}$

ja $j \in \{1, 2, \dots, p\}$ graafissa $G \times H$. Näin ollen $C_i \times D_j$ on klikki jokaisella $i \in \{1, 2, \dots, q\}$ ja $j \in \{1, 2, \dots, p\}$.

Tehdään vastaoletus, että klikkijoukko $(C_i \times D_j)_{1 \leq i \leq q, 1 \leq j \leq p}$ ei ole ositus graafissa $G \times H$. Todetaan ensiksi, että suoraan ristiriitaan päädytään, jos $C_i \times D_j \cap C'_i \times D'_j \neq \emptyset$, joillakin $i \neq i'$ tai $j \neq j'$. Tällöin nimittäin $C_i \cap C'_i \neq \emptyset$ tai $D_j \cap D'_j \neq \emptyset$ ja tällöin $(C_1, C_2, \dots, C_p)$ tai $(D_1, D_2, \dots, D_q)$ ei ole ositus graafissa G tai graafissa H. Todetaan seuraavaksi, että selvästi ristiriitaan päädytään myös, jos olemassa pisteet x ja y siten, että $(x, y) \notin C_i \times D_j$, joillakin indekseillä i ja j

Kooltaan pienin mahdollinen ositus klikkeihin graafissa $G \times H$ on enintään osituksen $(C_i \times D_j)_{1 \leq i \leq q, 1 \leq j \leq p}$ suuruinen. Näin on saatu:

$$\theta(G \times H) \leq pq = \theta(G)\theta(H).$$

□

5.2 Shannonin kapasiteetti

Olkoon $G = (X, U)$ kommunikaatiokanavaa C vastaava graafi ja merkitään symbolin $x \in X$ hajaannusjoukkoa S_x. Oletetaan, että samaa kommunikaatiokanavaa C käytetään peräkkäin $n > 1$ kertaa. Tällöin lähettimet lähettävät *viestinä* jonon syötteitä $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ja vastaanottaja vastaanottaa jonon $(y_1, y_2, \dots, y_n)$, missä jokainen $y_i \in S_{x_i}$. Saman kanavan C käyttäminen n kertaa peräkkäin voidaan kuvata n-kertaisen kanavan yhtenä käyttökertana. Tällaisen kanavan syötejoukko on X^n, tulostejoukko Y^n ja symbolin $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ hajaannusjoukko on $S_{x_1} \times S_{x_2} \times \dots \times S_{x_n}$. Edellä luonnehdittua kommunikaatiokanavaa voidaan kuvata graafilla G^n. (vrt. [2, s. 2]) Näin ollen seuraavaksi esiteltävä kommunikaatiokanavan maksimaalista virheetöntä tiedonsiirtokykyä kuvaava käsite on mielekäs.

Määritelmä 5.4. (vrt. [6, s. 383]) Olkoon G graafi. Asetetaan luku

$$c(G) := \sup_{k \in \mathbb{Z}_+} \sqrt[k]{\alpha(G^k)}.$$

Lukua $c(G)$ sanotaan graafin G *Shannonin kapasiteetiksi.* Toisinaan kirjoitamme lyhyemmin *kapasiteetti*, kun tarkoitamme Shannonin kapasiteettia.

Määritelmä 5.5. (vrt. [6, s. 383]) Lukujonoa $(a_n)_{n \geq 1}$ sanotaan *subadditiviiseksi*, kun

$$a_{n+m} \leq a_n + a_m \text{ kaikilla } n, m \in \mathbb{Z}_+.$$

Apulause 5.6. *(vrt. [6, s. 383]) Olkoon lukujono $a_1, a_2, \dots$ subadditiivinen ja $a_n \geq 0$ jokaisella $n \in \mathbb{Z}_+$. Tällöin raja-arvo $\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{n}$ on olemassa ja*

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{n} = \inf \frac{a_n}{n}.$$

Todistus. (kts. [14, s. 137, Lemma A.4.1 (Subadditivity)]) Oletetaan, että lukujono $a_1, a_2, \ldots$ on subadditiviinen. Merkitään $x = \lim_{k\to\infty} \sup \frac{a_k}{k}$ ja olkoon $n \in \mathbb{Z}_+$. Olkoon $m \in \mathbb{Z}_+$ riittävän suuri. Jaetaan luku m luvulla n ja merkitään $m = qn + r$ siten, että $0 \leq r \leq n$. Subadditiviisuuden perusteella saadaan:

$$a_m \leq qa_n + a_r.$$

Jakamalla yhtälö puolittain luvulla m saadaan:

$$\frac{a_m}{m} \leq \frac{qa_n + a_r}{qn + r} \leq \frac{qa_n + a_r}{qn} \leq \frac{a_n}{n} + \frac{a_r}{qn}.$$

Valitaan lukujen m jono siten, että $m \to \infty$ ja $\frac{a_m}{m} \to x$. Koska a_r on äärellinen ja luku n on vakio, niin $\frac{a_r}{qn} \to 0$, sillä $q \to \infty$. Näin ollen $x \leq \frac{a_n}{n}$ jokaisella $n \in \mathbb{Z}_+$. Tällöin

$$\lim_{n\to\infty} \inf \frac{a_n}{n} \geq x = \lim_{n\to\infty} \sup \frac{a_n}{n}$$

ja siten

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = x \text{ ja } \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = \inf \frac{a_n}{n}$$

□

Lause 5.7. *(vrt. [6, s. 383]) Olkoon G yksinkertainen graafi. Tällöin:*

$$c(G) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\alpha(G^n)}$$

Todistus. Olkoon G graafi. Olkoon $a_n = -\log \alpha(G^n)$. Soveltamalla lausetta 5.2 voidaan muodostaa epäyhtälöketju.

$$\begin{aligned}
\alpha(G^{m+n}) &\geq \alpha(G^m)\alpha(G^n) && \iff \\
\log \alpha(G^{m+n}) &\geq \log(\alpha(G^m)\alpha(G^n)) && \iff \\
\log \alpha(G^{m+n}) &\geq \log \alpha(G^m) + \log \alpha(G^n) && \iff \\
-\log \alpha(G^{m+n}) &\leq -\log \alpha(G^m) + (-\log \alpha(G^n)) && \iff \\
a_{m+n} &\leq a_m + a_n
\end{aligned}$$

Lukujono $(a_n)_{n\geq 1}$ on siis subadditiivinen. Soveltamalla apulausetta 5.6 voidaan muodostaa toinen ekvivalenssiketju, joka päättää todistuksen:

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \frac{-\log \alpha(G^n)}{n} = \inf \frac{-\log \alpha(G^n)}{n} && \iff \\
&\lim_{n\to\infty} \frac{\log \alpha(G^n)}{n} = \sup \frac{\log \alpha(G^n)}{n} && \iff \\
&\lim_{n\to\infty} \log \sqrt[n]{\alpha(G^n)} = \sup \log \sqrt[n]{\alpha(G^n)} && \iff \\
&\lim_{n\to\infty} e^{\log \sqrt[n]{\alpha(G^n)}} = \sup e^{\log \sqrt[n]{\alpha(G^n)}} && \iff \\
&\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\alpha(G^n} = \sup \sqrt[n]{\alpha(G^n} = c(G)
\end{aligned}$$

□

Lause 5.8. *(vrt. [6, s. 383]) Olkoon graafi G heikosti α-perfekti. Tällöin $c(G) = \alpha(G)$.*

Todistus. Olkoon graafi G heikosti α-perfekti. Aiemmin todistetuista lauseista (2.26, 5.2 ja 5.3) seuraa, että jokaisella $k \in \mathbb{Z}_+$ pätee:

$$(\alpha(G))^k \leq \alpha(G^k) \leq \theta(G^k) \leq (\theta(G))^k$$

ja edelleen $\alpha(G) \leq \sqrt[k]{\alpha(G^k)} \leq \theta(G)$. Koska graafi G on heikosti α-perfekti, niin $\alpha(G) = \theta(G)$. Edellisestä yhtälöstä saadaan: $\alpha(G) = \sqrt[k]{\alpha(G^k)} = \theta(G)$ jokaisella $k \in \mathbb{Z}_+$. Suoraan määritelmästä 5.4 seuraa $c(G) = \alpha(G)$. $\square$

Lause 5.9. *Olkoon G perfekti graafi. Tällöin $c(G) = \alpha(G)$.*

Todistus. Perfekti graafi on aina heikosti α-perfekti, joten tulos seuraa suoraan lauseesta 5.8. $\square$

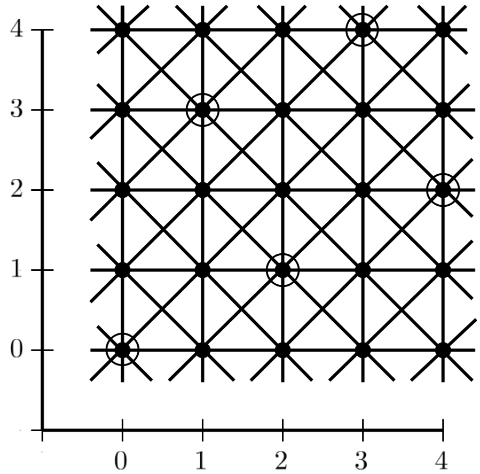
Vahvan perfektien graafien teoreeman 4.5 ja lauseen 5.9 ansiosta heuristiikka pienien graafien Shannonin kapasiteetin määrittämiseksi on selvä: jos graafissa ei ole aukkoa tai epäaukkoa tai jos siinä on aukko tai epäaukko, mutta se on heikosti α-perfekti, niin etsitään suurin riippumaton joukko tai pienin ositus klikkeihin. Itse asiassa, kun tutkimme onko graafi G α-perfekti, tulemme samalla määrittäneeksi myös luvun $\alpha(G)$. Tällä tavoin laskemme suurimmalle osalle alle kahdeksanpisteisistä graafeista Shannonin kapasiteetin. Tarkastelussamme ensimmäinen graafi, jossa on aukko (ja epäaukko) ja joka ei ole heikosti α-perfekti on sykli C_5.

5.3 Sykli C_5

Enintään seitsemänpisteisessä graafeissa ainoastaan viisi-, kuusi- ja seitsemänpisteisissä voi esiintyä aukko tai epäaukko. Kahdessa ensimmäisessä voi olla aukkona tai epäaukkona enintään sykli C_5, sillä tämän komplementti $\overline{C}_5 = C_5$. Seitsemänpisteissä graafissa voi lisäksi olla aukkona sykli C_7 tai epäaukkona tämän komplementti $\overline{C}_7$.

Seuraavaksi määritämme Shannonin kapasiteetin $c(C_5)$. Lähteenä tässä alaluvussa käytämme pääsääntöisesti Lovászin artikkelia [12, s. 1–2]. Määritämme aluksi ala-rajan laskemalla kahden ensimmäisen potenssin riippumattomuusluvut. Selvästi $\alpha(C_5) = 2$, sillä syklistä C_5 ei mitenkään voida valita kolme pistettä ilman, että jotkin näistä eivät olisi vieruspisteitä.

Tarkastellaan seuraavaksi graafia C_5^2. Olkoon $V(C) = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Havainnollistetaan graafia C_5^2 matriisilla $A^{5\times5}$ siten, että matriisin A alkio (a_j^i) vastaa graafin C_5^2 pistettä (i, j). Pisteet (i, j) ja (i', j') ovat vierekkäisiä, jos ne ovat vierekkäisillä sarakkeilla tai samalla sarakkeella (ensimmäinen ja viimeinen sarake ovat vierekkäisiä) ja jos $i + 1 \equiv i' \pmod 5$ tai $i + 4 \equiv i' \pmod 5$ tai $i = i'$. On helppo todeta, että tämä sääntö määrittää graafin pisteelle (i, j) samat vieruspisteet kuin määritelmä 5.1.



Kuva 1: $\alpha(C_5^2) = 5$.

Määritetään seuraavaksi riippumaton joukko S. Valitaan piste $(0,0)$. Koska $0+1 \equiv 1 \pmod 5$ ja $0+4 \equiv 4 \pmod 5$ emme voi valita sarakkeista 1 ja 4 pisteen $(0,0)$ vieruspisteitä $(i,0),(i,1),(i,4)$, kun $i=1$ tai $i=4$. Valitaan siis pisteet $(1,3)$ ja $(4,2)$. Nyt sarakkeesta 2 ei voi valita vieruspisteitä $(2,2)$, $(2,3)$ tai $(2,4)$ ja sarakkeesta 3 ei voi valita vieruspisteitä $(3,1)$, $(3,2)$, tai $(3,3)$. Valitaan pisteet $(2,1)$ ja $(3,4)$. Viimeiseksi valitut pisteet eivät ole vieruspisteitä, sillä $1+4 \not\equiv 4 \pmod 5$ ja $1+1 \not\equiv 4 \pmod 5$. Joukko $S = \{(0,0),(1,3),(2,1),(3,4),(4,2)\}$ on siis riippumaton (kts. kuva 1). Joukko S on maksimaalinen, sillä jos jostakin sarakkeesta valittaisiin kaksi pistettä, niin tämän vierussarakkeista ei voisi valita yhtään pistettä ja jäljelle jääneistä kahdesta sarakkeesta saisi valittua enintään kaksi riippumatonta pistettä. Siis $\alpha(C_5^2) = 5$. (vrt. [6, s. 382], [12, s. 1] ja [1, s. 214])

Täten määritelmän 5.4 mukaan on eräs alaraja määritetty:

$$c(C_5) = \sup \sqrt[k]{\alpha(C_5^k)} = \sup\{\alpha(C_5), \sqrt{\alpha(C_5^2)}, \ldots\} = \sup\{2, \sqrt{5}, \ldots\} \geq \sqrt{5}.$$

Seuraavaksi tarkastelemme Shannonin kapasiteetin erästä yleistä ylärajaa. Tarvitsemme tarkastelussamme lineaarista ohjelmointia ja lineaarisen ohjelmoinnin duaalisuuslausetta, jonka tyydymme ainoastaan esittelemään.

Määritelmä 5.10. (kts. [14, s. 134–135]) Olkoon matriisi $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}_+^{m\times n}$, vektorit $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}_+^m$ ja $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}_+^n$ ja olkoon vektori $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}_+^n$ sellainen, joka saa arvoja kaikkien n-vektorien suhteen, joiden alkioiden arvot ovat epänegatiivisia. Tällöin optimointiongelmaa, joka voidaan ilmaista muodossa: “maksimoi (minimoi) $\boldsymbol{c}^\mathsf{T}\boldsymbol{x}$, kun $\boldsymbol{Ax} \leq \boldsymbol{b}$ ($\boldsymbol{Ax} \geq \boldsymbol{b}$)“, sanotaan *lineaariseksi ohjelmaksi* (*LP*). Merkinnöillä $\leq$ ja $\geq$ tarkoitamme lineaarisen ohjelman yhteydessä sitä, että vertailu tapahtuu komponenteittain.

Määritelmä 5.11. (kts. [14, s. 135]) Jos lineaarinen ohjelma LP on “maksimoi $\boldsymbol{c}^\mathsf{T}\boldsymbol{x}$, kun $\boldsymbol{Ax} \leq \boldsymbol{b}$ ja $\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$“ (vastaavasti: “minimoi $\boldsymbol{c}^\mathsf{T}\boldsymbol{x}$, kun $\boldsymbol{Ax} \geq \boldsymbol{b}$

ja $\boldsymbol{x} \geq \mathbf{0}$“), niin lineaarista ohjelmaa, joka on “minimoi $\boldsymbol{b}^\mathsf{T}\boldsymbol{y}$, kun $\boldsymbol{A}^\mathsf{T}\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{c}$ ja $\boldsymbol{y} \geq \mathbf{0}$“ (vastaavasti: “maksimoi $\boldsymbol{b}^\mathsf{T}\boldsymbol{y}$, kun $\boldsymbol{A}^\mathsf{T}\boldsymbol{y} \leq \boldsymbol{c}$ ja $\boldsymbol{y} \geq \mathbf{0}$“), sanotaan lineaarisen ohjelman LP *duaaliksi*.

Lause 5.12. *(kts.[14, s. 135]) Olkoon LP lineaarinen ohjelma. Tällöin lineaarisella ohjelmalla LP ja sen duaalilla on sama arvo.* □

Olkoon $G = (X, U)$ graafi. Asetetaan jokaiselle $x \in X$ epänegatiivinen paino $w(x)$ siten, että jokaisella graafin G täydellisellä aligraafilla C pätee:

$$\sum_{x \in C} w(x) \leq 1.$$

Tällaista painojen asettamista sanotaan *fraktionaaliseksi pistepakkaukseksi*. Summan $\sum_x w(x)$ maksimia otettuna kaikkien fraktionaalisten pistepakkauksien suhteen merkitään $\alpha^*(G)$. Lineaarisen ohjelmoinnin duaalisuuslauseesta 5.12 seuraa, että $\alpha^*(G)$ voidaan määritellä duaalisesti seuraavalla tavalla: asetetaan jokaiselle graafin G klikille C epänegatiivinen paino $q(C)$ siten, että jokaisella graafin G pisteellä x pätee

$$\sum_{C \ni x} q(C) \geq 1.$$

ja etsitään minimi summalle $\sum_C q(C)$. [12, s. 1]

Lause 5.13. *Olkoon G graafi. Tällöin $c(G) \leq \alpha^*(G)$.*

Todistus. (kts. esim. [1, s. 214–216]) □

Asetetaan graafin C_5 jokaiselle klikille C paino $q(C) = \frac{1}{2}$, kun $|C| = 2$, ja muulloin $q(C) = 0$. Syklissä C_5 on tarkalleen 5 särmää ja 5 pistettä. Jokaisen särmän päätepisteet ovat yksi klikki ja jokainen piste on itsessään klikkki. Jokainen piste kuuluu siten tarkalleen kolmeen klikkiin. Näin ollen jokaisella $x \in E(C_5)$ on

$$\sum_{C \ni x} q(C) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 0 \geq 1$$

eli fraktionaalinen pistepakkaus on siis jokaisella $x \in E(C_5)$ minimaalinen. Summa $\sum_C q(C) = \frac{5}{2}$ on siis minimi ja siten $\alpha^*(G) = \frac{5}{2}$. Käyttämällä lausetta 5.13 saamme:

$$\sqrt{5} \leq c(C_5) \leq \frac{5}{2}.$$

Ylärajaa voidaan kuitenkin vielä parantaa. Osoitamme seuraavaksi, että alaraja on itse asiassa etsimämme Shannonin kapasiteetti. Tämän tehdäksemme tarvitsemme kuitenkin lisää työvälineitä lineaarialgebran puolelta. Olkoon $\boldsymbol{v}$ ja $\boldsymbol{w}$ vektoreita. Merkitsemme vektorien $\boldsymbol{v}$ ja $\boldsymbol{w}$ *sisätuloa* kirjoittamalla $\boldsymbol{v}^\mathsf{T}\boldsymbol{w}$ ja vektorin $\boldsymbol{v}$ *vektorinormia* kirjoittamalla $\|\boldsymbol{v}\|$. Jos vektorit $\boldsymbol{v}$ ja $\boldsymbol{w}$ ovat *ortogonaalisia*, niin merkitsemme toisinaan $\boldsymbol{v} \perp \boldsymbol{w}$.

Määritelmä 5.14. Jos $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ ja $\boldsymbol{w} = (w_1, w_2, \dots, w_m)$, niin nm pituista vektoria $(v_1w_1, v_1w_2, \dots, v_1w_m, v_2w_1, \dots, v_2, v_m, \dots, v_nw_1, \dots, v_nw_m)$ sanotaan vektorien $\boldsymbol{v}$ ja $\boldsymbol{w}$ *tensorituloksi* ja tätä merkitään $\boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{w}$:llä.

Lause 5.15. *Olkoon $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{v}$ ja $\boldsymbol{q}$ vektoreita. Pistetulon ja tensoritulon välillä seuraava yhtälö pätee:*

$$(\boldsymbol{x} \otimes \boldsymbol{y})^\mathsf{T}(\boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{w}) = (\boldsymbol{x}^\mathsf{T}\boldsymbol{v})(\boldsymbol{y}^\mathsf{T}\boldsymbol{w}) \tag{5.1}$$

Todistus. (vrt. [12, s. 2]) Olkoon $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{v}$ ja $\boldsymbol{q}$ vektoreita.

$$\begin{aligned}
&(\boldsymbol{x} \otimes \boldsymbol{y})^\mathsf{T}(\boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{w}) = \\
&(x_1y_1, \dots, x_1y_m, \dots, x_ny_1, \dots, x_ny_m)^\mathsf{T}(v_1w_1, \dots, v_1w_m, \dots, v_nw_1, \dots, v_nw_m) = \\
&(x_1y_1v_1w_1 + \ldots + x_1y_mv_1w_m + \ldots + x_ny_1v_nw_1 + \ldots + x_ny_mv_nw_m) = \\
&(x_1v_1\sum_{i=1}^{m} y_iw_i + \ldots + x_nv_n\sum_{i=1}^{m} y_iw_i) = \sum_{j=1}^{n} x_jv_j\sum_{i=1}^{m} y_iw_i = (\boldsymbol{x}^\mathsf{T}\boldsymbol{v})(\boldsymbol{y}^\mathsf{T}\boldsymbol{w})
\end{aligned}$$

□

Määritelmä 5.16. Olkoon $G = (X, U)$ graafi, missä pistejoukko $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. Olkoon euklidisen avaruuden yksikkövektori $\boldsymbol{v}_i$, missä i saa arvot $1, 2, \dots, n$. Systeemiä $(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_n)$ sanotaan graafin G *ortonormaaliksi esitykseksi*, jos vektorit $\boldsymbol{v}_i$ ja $\boldsymbol{v}_j$ ovat ortogonaalisia, kun eri pisteet x_i ja x_j eivät ole vieruspisteitä.

Selvästi jokaisella graafille voidaan määrittää on ortonormaali esitys. Olkoon vektoriperhe $V = (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_n)$ ja olkoon $\boldsymbol{v}_i = (w_1, w_2, \dots, w_n)$, missä $w_j = 1$, kun $j = i$, muulloin 0. Vektoriperheen V vektorit ovat selvästi pareittain ortogonaalisia ja näin ollen, perhe V on minkä tahansa n-pisteisen graafin ortonormaali esitys.

Huomautus 5.17. Edellistä esitystä V voidaan pitää triviaalina. Graafin G ortonormaalia esitystä sanotaan *uskolliseksi*, kun ortonormaalin esityksen vektorit ovat ortogonaalisia silloin ja vain silloin, kun niitä vastaavat pisteet ovat erillisiä [13, s. 440]. Näin ollen edellä mainittu perhe V on siis graafin $G_0 = (X, \emptyset)$ uskollinen ortonormaali esitys, kun $|X| = n$.

Esimerkki 5.18. Mielivaltaiselle graafille on helppo konstruoida uskollinen ortonormaali esitys. Olkoon $\mathscr{C} = \{C_1, C_2, \dots, C_m\}$ graafin $G = (X, E)$ kaikkien klikkien joukko. Olkoon $\boldsymbol{u}_i \in \mathbb{R}^m$ pistettä $x_i \in X$ vastaava yksikkövektori, missä

$$\begin{cases} u_j > 0, & \text{jos } x_i \in C_j \\ u_j = 0, & \text{jos } x_i \notin C_j \end{cases} \tag{5.2}$$

Olkoon pisteet x_l ja $x_k \in X$. Jos pisteet ovat erilliset ne eivät voi kuulua samaan klikkiin ja näin ollen $\boldsymbol{u}_l^\mathsf{T}\boldsymbol{u}_k = 0$. Jos pisteet ovat vieruspisteitä, niin ne ovat niitä yhdistävän särmän päätepisteet ja kuuluvat siis vähintään yhteen klikkiin. Täten $\boldsymbol{u}_l^\mathsf{T}\boldsymbol{u}_k > 0$ ja vektoriperhe $(\boldsymbol{u}_i \mid 1 \leq i \leq |X|)$ on graafin G ortonormaali esitys.

Apulause 5.19. *Olkoot graafit G ja H. Olkoot vektoriperheet $(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n)$ ja $(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_m)$ vastaavasti näiden ortonormaalit esitykset. Tällöin vektoriperhe $(\boldsymbol{u}_i \otimes \boldsymbol{v}_j \mid 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m)$ on graafin $G \times H$ ortonormaali esitys.*

Todistus. (vrt. [12, s. 2]) Olkoot graafit $G = (X, E)$ ja $H = (Y, F)$ ja olkoon pistejoukot $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ ja $Y = \{y_1, \ldots, y_m\}$. Olkoot graafeja G ja H vastaavat ortonormaalit esitykset $(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n)$ ja $(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_m)$. Olkoon indeksit $i, i' \in \{1, \ldots, n\}$ ja $j, j' \in \{1, \ldots, m\}$ mielivaltaisia. Osoitetaan, että vektorit $(\boldsymbol{u}_i \otimes \boldsymbol{v}_j)$ ja $(\boldsymbol{u}_{i'} \otimes \boldsymbol{v}_{j'})$ ovat ortogonaalisia, kun pisteet (x_i, y_j) ja $(x_{i'}, y_{j'})$ eivät ole vieruspisteitä. Soveltamalla nyt yhtälöä 5.1 voimme muodostaa päättelyketjun:

$$\begin{aligned}
&\{(x_i, y_j), (x_{i'}, y_{j'})\} \notin E(G \times H) && \Longleftrightarrow \\
&(\{x_i, x_{i'}\} \notin E \text{ ja } x_i \neq x_{i'}) \text{ tai } (\{y_j, y_{j'}\} \notin F \text{ ja } y_j \neq y_{j'}) && \Longrightarrow \\
&\boldsymbol{u}_i \perp \boldsymbol{u}_{i'} \text{ tai } \boldsymbol{v}_j \perp \boldsymbol{v}_{j'} \Longleftrightarrow \boldsymbol{u}_i^\mathsf{T}\boldsymbol{u}_{i'} = 0 \text{ tai } \boldsymbol{v}_j^\mathsf{T}\boldsymbol{v}_{j'} = 0 && \Longleftrightarrow \\
&(\boldsymbol{u}_i^\mathsf{T}\boldsymbol{u}_{i'})(\boldsymbol{v}_j^\mathsf{T}\boldsymbol{v}_{j'}) = 0 \Longleftrightarrow (\boldsymbol{u}_i \otimes \boldsymbol{v}_j)^\mathsf{T}(\boldsymbol{u}_{i'} \otimes \boldsymbol{v}_{j'}) = 0.
\end{aligned}$$

Vektoriperhe $(\boldsymbol{u}_i \otimes \boldsymbol{v}_j \mid 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m)$ on siis graafin $G \times H$ ortonormaali esitys. □

Huomautus 5.20. Jos apulauseen 5.19 graafien G ja H ortonormaalit esitykset ovat uskollisia, niin todistuksessa olevan päättelyketjun ainoa implikaatio muuttuu ekvivalenssiksi. Tällöin graafille $G \times H$ muodostettu ortonormaali esitys on myös uskollinen.

Määritelmä 5.21. Olkoon G graafi ja olkoon vektoriperhe $(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n)$, jokin graafin G ortonormaali esitys. Määritetään ortonormaalinen esityksen U arvo seuraavasti:

$$\min_{\boldsymbol{c}, \|\boldsymbol{c}\|=1} \max_{1 \leq i \leq n} \frac{1}{(\boldsymbol{c}^\mathsf{T}\boldsymbol{u}_i)^2}$$

Vektoria $\boldsymbol{c}$, jolla minimi saavutetaan, sanotaan ortonormaalin esityksen kahvaksi. Merkitsemme $\vartheta(G)$:llä graafin G minimaalisen ortonormaalin esityksen arvoa kaikkien ortonormaalien esityksien suhteen.

Huomautus 5.22. Lukua $\vartheta(G)$ sanotaan myös graafin G *Lovászin luvuksi.* Käytämme kreikkalaista thetan symbolia eri tyylillä kirjoitettuna määritelmissä 2.21 ja 5.21. Muuta yhteyttä näissä määriteltävillä käsitteillä ja siten luvuilla $\vartheta(G)$ ja $\theta(G)$ ei ole.

Jokaisella graafilla G voidaan määrittää pienin mahdollinen arvo $\vartheta(G)$, sillä tähän liittyy jatkuva funktio, jota minimoidaan kompaktissa joukossa. Graafin G ortonormaalia esitystä sanotaan *optimaaliseksi*, jos minimiarvo saavutetaan sillä.

Apulause 5.23. *Olkoot G ja H graafeja. Tällöin $\vartheta(G \times H) \leq \vartheta(G) \cdot \vartheta(H)$.*

Todistus. (vrt. [12, s. 2]) Olkoot graafit G ja H. Olkoot vektorit $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ graafin G optimaalinen ortonormaali esitys ja olkoot vektorit $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_m$ graafin H optimaalinen ortonormaali esitys. Olkoot yksikkövektorit $\boldsymbol{c}$ ja $\boldsymbol{d}$ vastaavasti näiden esityksien kahvat. Yksikkövektorien tensoritulo $\boldsymbol{c} \otimes \boldsymbol{d}$ on yksikkövektori. Apulauseen 5.19 perusteella vektoriperhe $(\boldsymbol{u}_i \otimes \boldsymbol{v}_j \mid 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m)$ on graafin $G \times H$ ortonormaali esitys. Tämän esityksen arvo on vähintään optimaalisen esityksen suuruinen. Näin ollen soveltamalla yhtälöä 5.1 saamme todistuksen päätökseen:

$$\vartheta(G \times H) \leq \max_{i,j} \frac{1}{((\boldsymbol{c} \otimes \boldsymbol{d})^\mathsf{T}(\boldsymbol{u}_i \otimes \boldsymbol{v}_j))^2} = \max_{i,j} \frac{1}{(\boldsymbol{c}^\mathsf{T}\boldsymbol{u}_i)^2} \cdot \frac{1}{(\boldsymbol{d}^\mathsf{T}\boldsymbol{v}_j)^2} = \vartheta(G)\vartheta(H)$$

□

Apulauseen 5.25 todistuksessa tarvitsemme seuraavaa sisätulovaruuksien perustulosta.

Lause 5.24 (Besselin epäyhtälö)**.** *Olkoot vektoriavaruuden $\mathbb{R}^n$ yksikkövektorit $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ pareittain ortogonaalisia. Tällöin kaikilla $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ pätee:*

$$||\boldsymbol{x}||^2 \geq \sum_{i=1}^{n} (\boldsymbol{x}^\mathsf{T}\boldsymbol{u}_i)^2$$

Todistus. (vrt. [4, s. 135, Exercise 2]) Olkoot vektorit $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n \in \mathbb{R}^n$ pareittain ortogonaalisia yksikkövektoreita ja olkoon vektori $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ mielivaltainen. Asetetaan skalaari $c_i = \boldsymbol{x}^\mathsf{T}\boldsymbol{u}_i$, vektori $\boldsymbol{y} = c_1\boldsymbol{u}_1 + c_2\boldsymbol{u}_2 + \ldots + c_n\boldsymbol{u}_n$ ja vektori $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}$. Kun $i \neq j$, niin $(c_i\boldsymbol{u}_i)^\mathsf{T}(c_j\boldsymbol{u}_j) = (c_ic_j)\boldsymbol{u}_i^\mathsf{T}\boldsymbol{u}_j = (c_ic_j)\cdot 0 = 0$, koska $\boldsymbol{u}_i \perp \boldsymbol{u}_j$. Muulloin $(c_i\boldsymbol{u}_i)^\mathsf{T}(c_j\boldsymbol{u}_j) = c_i^2$, sillä $u_i^\mathsf{T}u_i = 1$. Täten $\boldsymbol{z} \perp \boldsymbol{y}$, sillä

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{y}^\mathsf{T}\boldsymbol{z} = \boldsymbol{y}^\mathsf{T}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{y}^\mathsf{T}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}^\mathsf{T}\boldsymbol{y} &= (\sum_{i=1}^{n} c_i\boldsymbol{u}_i)^\mathsf{T}\boldsymbol{x} - \sum_{i=1}^{n} (c_i\boldsymbol{u}_i)^\mathsf{T} \sum_{i=1}^{n} (c_i\boldsymbol{u}_i)^\mathsf{T} \\
&= \sum_{i=1}^{n} c_i(\boldsymbol{u}_i^\mathsf{T}x) - (\sum_{i=1}^{n} c_i^2\boldsymbol{u}_i^\mathsf{T}\boldsymbol{u}_i + 0) = \sum_{i=1}^{n} c_i(\boldsymbol{x}^\mathsf{T}\boldsymbol{u}_i) - \sum_{i=1}^{n} c_i^2 \left\|\boldsymbol{u}_i\right\|^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n} c_ic_i - \sum_{i=1}^{n} (c_i^2 \cdot 1) = 0.
\end{aligned}$$

Koska $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}$, saadaan Pythagoraan lausetta soveltamalla:

$$\left\|\boldsymbol{x}\right\|^2 = \left\|\boldsymbol{y}\right\|^2 + \left\|\boldsymbol{z}\right\|^2 \geq \left\|\boldsymbol{y}\right\|^2 = ((\boldsymbol{y}^\mathsf{T}\boldsymbol{y})^{\frac{1}{2}})^2 = \sum_{i=1}^{n} c_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (\boldsymbol{x}^\mathsf{T}\boldsymbol{u}_i)^2.$$

□

Apulause 5.25. *Olkoon G graafi. Tällöin $\alpha(G) \leq \vartheta(G)$.*

Todistus. (vrt. [12, s. 2]) Olkoon graafi $G = (X, U)$ ja olkoon vektoriperhe $(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \dots, \boldsymbol{u}_m)$ sen optimaalinen ortonormaali esitys kahvalla $\boldsymbol{c}$. Olkoon graafin G suurin mahdollinen riippumaton joukko $S := \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$. Tätä vastaavan vektoriperheen $(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \dots, \boldsymbol{u}_k)$ vektorit ovat tällöin pareittain ortogonaalisia. Lauseen 5.24 avulla saamme:

$$1 = \boldsymbol{c}^\mathsf{T}\boldsymbol{c} = \|\boldsymbol{c}\|^2 \geq \sum_{i=1}^{k} (\boldsymbol{c}^\mathsf{T}\boldsymbol{u}_i)^2. \tag{5.3}$$

Graafin G ortonormaalin esityksen optimaalinen arvo $\vartheta(G)$ saadaan jollakin perheen $(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \dots, \boldsymbol{u}_m)$ vektorilla. Näin ollen jokaisella $i \in \{1, 2, \dots, k\}$:

$$\vartheta(G) = \max_{1 \leq i \leq n} \frac{1}{(\boldsymbol{c}^\mathsf{T}\boldsymbol{u}_i)^2} \geq \frac{1}{(\boldsymbol{c}^\mathsf{T}\boldsymbol{u}_i)^2} \iff (\boldsymbol{c}^\mathsf{T}\boldsymbol{u}_i)^2 \geq \frac{1}{\vartheta(G)} \iff k(\boldsymbol{c}^\mathsf{T}\boldsymbol{u}_i)^2 \geq \frac{k}{\vartheta(G)}.$$

Valitaan luku $i' \in \{1, 2 \dots, k\}$ siten, että $(\boldsymbol{c}^\mathsf{T}\boldsymbol{u}_{i'})^2 \leq (\boldsymbol{c}^\mathsf{T}\boldsymbol{u}_i)^2$ pätee jokaisella $i \in \{1, 2, \dots, k\}$. Nyt voimme yhdistää edellisen ekvivalenssiketjun oikeanpuoleisimman yhtälön ja yhtälön 5.3. Siis

$$1 = \sum_{i=1}^{k} (\boldsymbol{c}^\mathsf{T}\boldsymbol{u}_i)^2 \geq k(\boldsymbol{c}^\mathsf{T}\boldsymbol{u}_{i'})^2 \geq \frac{k}{\vartheta(G)}.$$

Kerrotaan vielä yhtälö puolittain luvulla $\vartheta(G)$ ja sijoitetaan $k = |S| = \alpha(G)$. Siis $\vartheta(G) \geq \alpha(G)$. □

Lause 5.26. *Olkoon G graafi. Tällöin seuraava yhtälö pätee:*

$$c(G) \leq \vartheta(G).$$

Todistus. (vrt. [12, s. 2]) Olkoon G graafi ja $k \in \mathbb{Z}_+$. Lauseita 5.25 ja 5.23 soveltamalla saamme:

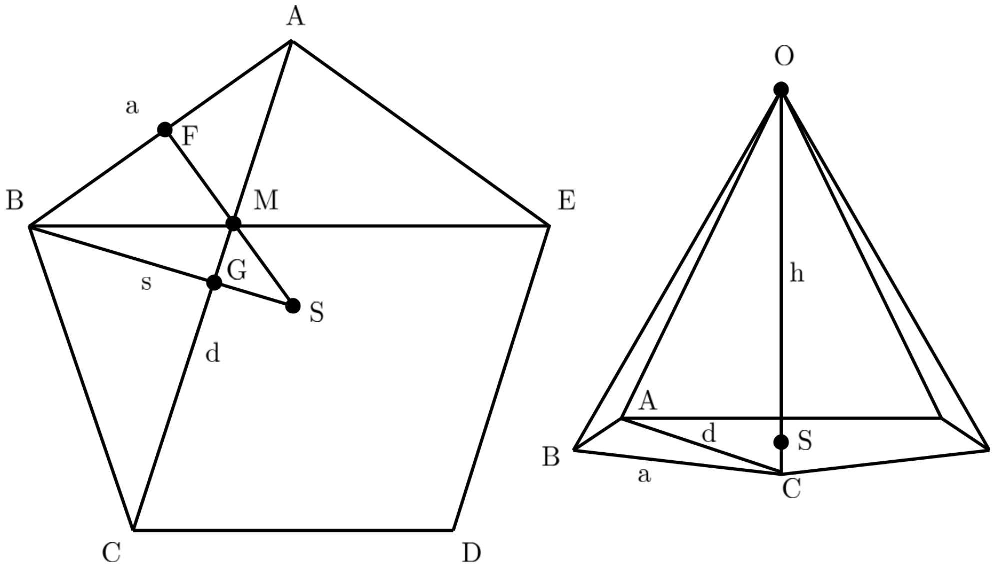
$$\alpha(G^k) \leq \vartheta(G^k) \leq \vartheta(G)^k.$$

Ottamalla yhtälöstä puolittain k:s juuren ja lauseen 5.7 perusteella:

$$c(G) = \sup_{k \in \mathbf{Z}_+} \sqrt[k]{\alpha(G^k)} \leq \sup_{k \in \mathbf{Z}_+} \sqrt[k]{\vartheta(G)^k} = \vartheta(G).$$

□

Nyt olemme lähes valmiita syklin C_5 Shannon kapasiteetin määrittämiseen. Lovászin alkuperäisessä todistuksessa käytettiin muun muassa pallotrigonometrian kosinilausetta. Teemme tämän osan todistuksesta perinteisemmällä tavalla ja siksi palauttelemme mieliimme muutamia geometrian perusasioita parin tuhannen vuoden takaa.



Kuva 2: Viisikulmio ja viisikulmainen pyramidi.

Esimerkki 5.27. (vrt. [1, s. 217]) Olkoon $\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Luku τ tunnetaan nimellä *kultainen leikkaus*. Tarkastellaan kuvan 2 säännöllistä viisikulmiota ja merkitään luvulla a sen sivun pituutta ja luvulla d sen diagonaalin pituutta. Jo vuosituhansia on tiedetty, että $\frac{d}{a} = \tau$ ja että diagonaalien leikkauspisteet jakavat diagonaalit kultaisella leikkauksella.

Todistus. Koska viisikulmion kulmien summa on 3π, niin jokaisen säännöllisen viisikulmion kulman on oltava $\frac{3\pi}{5}$. Kolmio ABE on tasakylkinen, joten kulma $ABE = \frac{\pi}{5}$. Tästä seuraa, että kulma $AMB = \frac{3\pi}{5}$ ja edelleen voimme todeta, että kolmiot ABC ja AMB ovat yhdenmuotoisia. Nelikulmio $CMED$ on neljäkäs, joten $|MC| = a$ ja $|AM| = d - a$. Kolmioiden ABC ja AMB yhdenmuotoisuuden perusteella toteamme, että

$$\frac{d}{a} = \frac{|AC|}{|AB|} = \frac{|AB|}{|AM|} = \frac{a}{d-a} = \frac{|MC|}{|MA|} = \tau.$$

□

Johdetaan seuraavaksi kaava viisikulmion säteen s neliölle. Huomaamme, että jana BS puolittaa diagonaalin ja jana FS puolittaa reunan. Kolmiot BFS ja ABG ovat yhdenmuotoiset, joten saamme seuraavan yhtälön:

$$\frac{|BS|}{|FS|} = \frac{s}{\sqrt{s^2 - (\frac{1}{2}a)^2}} = \frac{a}{\frac{1}{2}d} = \frac{|AB|}{|AG|}$$

Otetaan edellisestä yhtälöstä neliö puolittain ja sijoitetaan

$$a = \frac{d}{\tau} = \frac{d}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}.$$

Lukijan todettavaksi jää, että triviaalien laskutoimituksien jälkeen saadaan luvun s neliölle kaava:

$$s^2 = \frac{d^2}{\frac{5+\sqrt{5}}{2}} = \frac{d^2}{\tau + 2}.$$

Tarkastellaan sitten kuvassa 2 olevaa suoraa pyramidia, jonka pohja on säännöllinen viisikulmio, missä $|OB| = 1$. Ratkaistaan korkeus $h = |OS|$ käyttämällä Pythagoraan lausetta:

$$h^2 = 1 - s^2$$

Näin ollen $h = \sqrt{1 - s^2}$.

Seuraavan lauseen todistuksessa käytämme Lovászin sateenvarjotekniikkaa ja saamme hämmästyttävällä tavalla laskettua syklin C_5 kapasiteetin.

Lause 5.28. *Graafin C_5 Shannonin kapasiteetti on $\sqrt{5}$.*

Todistus. (vrt. [12, s. 2]) Tarkastellaan viisiruoteista sateenvarjoa, jonka ruodut ja kahva ovat yksivektorin pituisia. Avataan sateenvarjoa kunnes vastakkaisten ruotujen välinen kulma on tarkalleen $\frac{\pi}{2}$. Olkoot yksikkövektorit $(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{u}_4, \boldsymbol{u}_5)$ sateenvarjon ruodut ja yksikkövektori $\boldsymbol{c}$ sateenvarjon kahva siten, että nämä kaikki vektorit ovat yhteisestä pisteestä poispäin suunnattuja. Tällöin vektorit $(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{u}_4, \boldsymbol{u}_5)$ ovat graafin C_5 ortonormaali esitys.

Havaitsemme, että graafin G ortonormaali esitys vastaa esimerkin 5.27 viisikulmaista pyramidia, kun esityksen vektorit osoittavat pisteestä O pyramidin kulmiin ja kulma $AOC = \frac{\pi}{2}$. Täten saamme $d = 2\cos(\frac{\pi}{2\cdot 2}) = \sqrt{2}$. Edelleen saamme $s^2 = \frac{4}{\sqrt{5}+5}$ ja lopulta:

$$h = \sqrt{1 - s^2} = \sqrt{\frac{1}{\sqrt{5}}}.$$

Merkitään kahvan $\boldsymbol{c}$ ja vektorin $\boldsymbol{u}_i$ välistä kulmaa kirjaimella ϕ. Edelleen esimerkin 5.27 perusteella saamme:

$$c^{\mathsf{T}} u_i = \cos\phi = \frac{|OS|}{|OB|} = \frac{h}{\|\boldsymbol{u}_i\|} = \sqrt{\frac{1}{\sqrt{5}}} = 5^{-\frac{1}{4}}, \text{ kun } i = 1, 2, 3, 4, 5.$$

Täten lauseen 5.26 ja aiemmin määrittämme alarajan perusteella:

$$\sqrt{5} \le c(C_5) \le \vartheta(C_5) \le \max_i \frac{1}{(\boldsymbol{c}^{\mathsf{T}} \boldsymbol{u}_i)^2} = \frac{1}{(5^{-\frac{1}{4}})^2} = \sqrt{5}.$$

□

5.4 Yksinkertaisten graafien Shannonin kapasiteetit

Tässä alaluvussa määritämme kaikkien alle seitsemänpisteisten yksinkertaisten graafien Shannonin kapasiteetit. Seitsemänpisteistä graafeista tarkastelemme sellaisia, joissa on enintään seitsemän särmää. Määritämme graafien kapasiteetit graafien pisteiden lukumäärän mukaisessa järjestyksessä aloittaen pienimmästä ja yksinkertaisimmasta graafista K_1. Näin voimme hyödyntää aikaisemmin määritettyjen graafien kapasiteetteja näitä suurempien graafien kapasiteettien laskemisessa ja tällä tavoin pitää esityksen tiiviinä. Seuraavaksi määrittelemme Shannonin kapasiteetin laskemisen kannalta kaksi hyödyllistä lausetta.

Lause 5.29. *Olkoot graafit G_1 ja G_2 erillisiä. Jos graafit G_1 ja G_2 ovat heikosti α-perfektejä, niin graafi $G_1 + G_2$ on heikosti α-perfekti.*

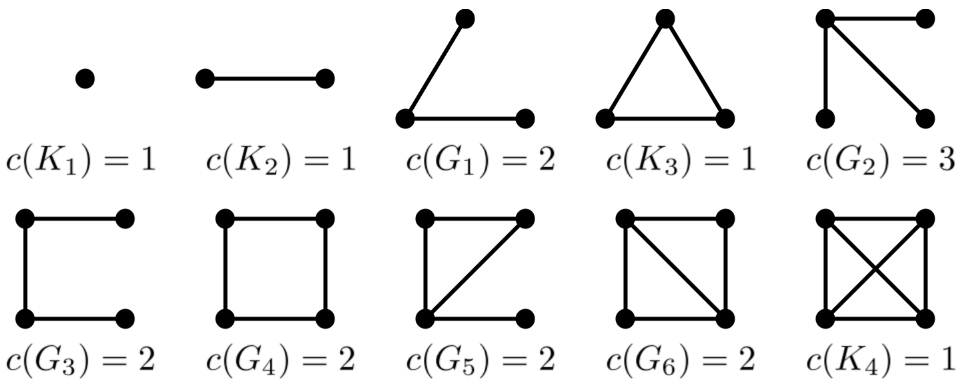
Todistus. Olkoot erilliset graafit G_1 ja G_2 ovat heikosti α-perfektejä. Graafin G_1+G_2 mikä tahansa riippumaton joukko saadaan yhdisteenä graafien G_1 ja G_2 riippumattomista joukoista. Vastaavasti graafin $G_1 + G_2$ kaikki ositukset saadaan ottamalla graafien G_1 ja G_2 ositusten unioni. Täten

$$\alpha(G_1 + G_2) = \alpha(G_1) + \alpha(G_2) = \theta(G_1) + \theta(G_2) = \theta(G_1 + G_2).$$

Siis graafi $G_1 + G_2$ myös heikosti α-perfekti. □

Lause 5.30. *Olkoon graafi G_1 heikosti perfekti ja graafi G_2 mielivaltainen. Jos graafit G_1 ja G_2 ovat erillisiä, niin $c(G_1 + G_2) = c(G_1) + c(G_2)$.*

Todistus. (kts. [16, s. 13, 15]) □

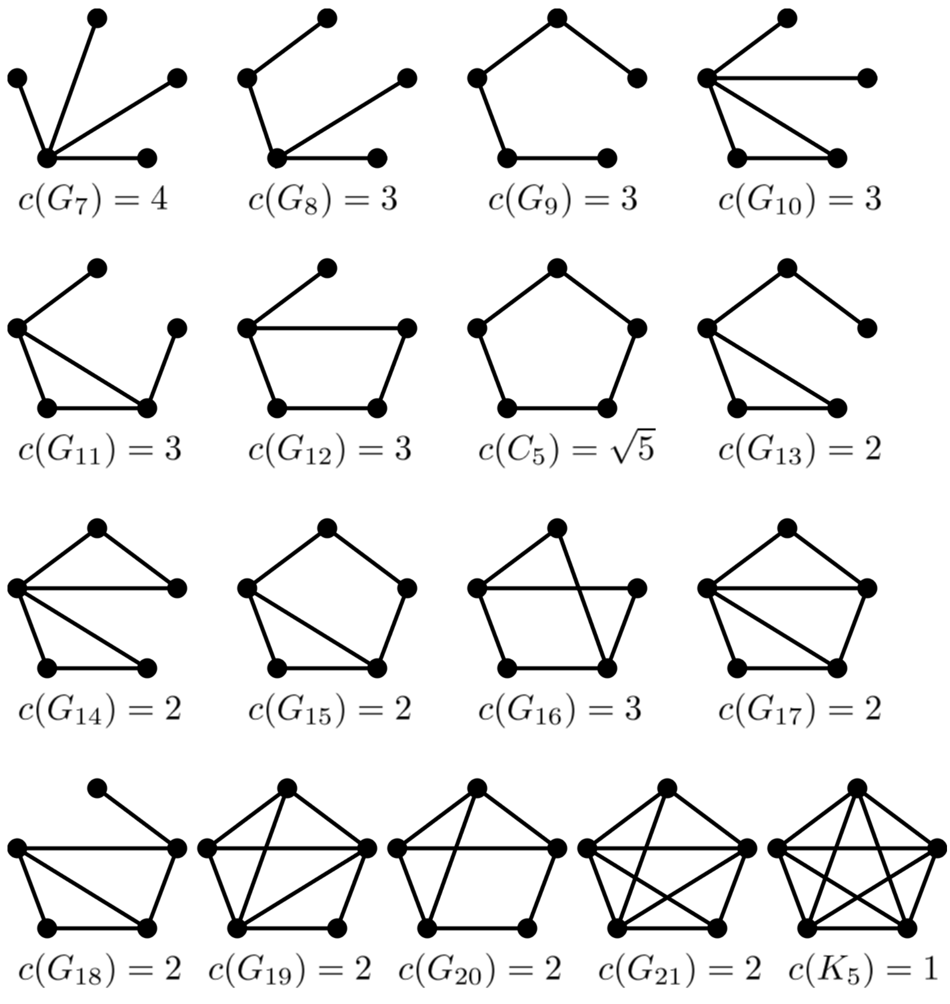


Kuva 3: Enintään neljäpisteisten graafien Shannonin kapasiteetit.

Huomautus 5.31. Tiedetään, että kaikilla erillisillä graafeilla G_1 ja G_2 pätee $c(G_1 + G_2) \geq c(G_1 + G_2)$(kts. [16, s. 13, 15]). Shannon arveli, että yhtäsuuruus pitäisi yleisesti paikkaansa. Tämä otaksuma on kuitenkin todistettu vääräksi. Nimittäin on olemassa graafi G, jossa on 27 pistettä ja $c(G) \leq 7$ ja $c(\overline{G}) = 3$, mutta $c(G + \overline{G}) \geq 2\sqrt{27} > 10$. (kts. [3, s. 2])

Seuraavaksi määritämme kapasiteetit graafeille, joissa on $1-5$ pistettä. Ainoa epäperfekti ja ei heikosti perfekti graafi tässä joukossa on sykli C_5, jonka kapasiteetti ratkaistiin edellä. Loput näistä ovat perfektejä ja lauseen 5.9 perusteella riittää etsiä suurin riippumaton joukko. Edelleen lauseiden 5.29 ja 5.30 nojalla riittää käsitellä ainoastaan yhtenäisiä graafeja. Näiden kapasiteetit on merkitty kuviin 3 ja 4.

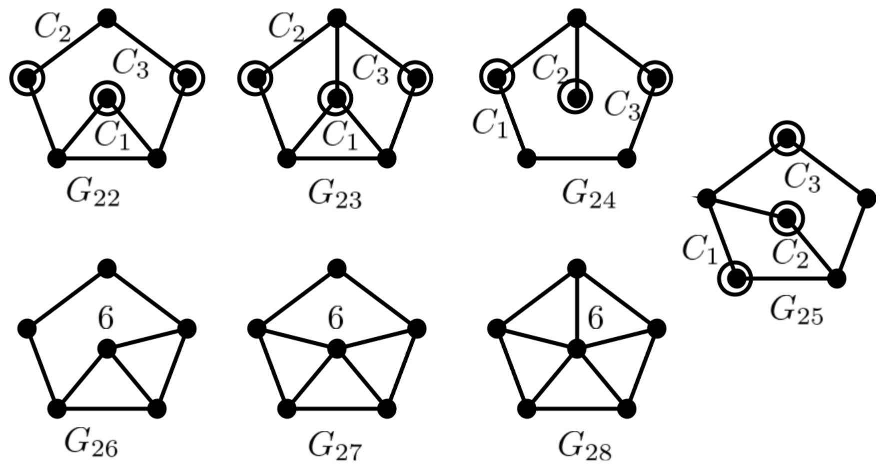
Epäyhtenäisen graafin Shannonin kapasiteetti saadaan summaamalla tämän komponenttien kapasiteetit, jotka on jo aiemmin määritetty. Epäyhtenäisten graafien Shannonin kapasiteetin toteamisen jätämme siten pääosin lukijalle. Täydellinen esitys on katsottavissa Shannonin alkuperäisestä kirjoituksesta (kts. [16, s. 14]).



Kuva 4: Viisipisteisten graafien Shannonin kapasiteetit.

Ei-isomorfisia 6-pisteisiä graafeja on yhteensä 156 kappaletta, joista 112 ovat yhtenäisiä.(kts. [18], Connected Graph) Määritämme Shannonin kapasiteetin ainoastaan sellaisille yhtenäisille graafeille, joissa on aukko C_5. Tällaisia graafeja on yhteensä 7 kappaletta (kts. [18], Imperfect Graph). Muissa tapauksissa graafit ovat perfektejä suoraan lauseen 4.5 perusteella ja lauseen 5.9 perusteella $c(G) = \alpha(G) = \theta(G)$. Niiden kapasiteetit määritetään vastaavalla tavalla kuin edellä on tehty.

Tarkastellaan sitten jäljelle jääneitä seitsemää 6-pisteistä epäperfektiä graafia. Kuvaan 5 on merkitty graafeille G_{22},G_{23},G_{24} ja G_{25} suurin mahdollinen riippumaton joukko ja pienin mahdollinen ositus klikkeihin. Jokaisella edellä mainituista graafeista nämä joukot ovat saman kokoiset ja näin ollen nämä graafit heikosti α-perfektejä. Lauseen 5.8 nojalla saadaan ratkaistua Shannonin kapasiteetti $c(G_{22}) = c(G_{23}) = c(G_{24}) = c(G_{25}) = 3$.



Kuva 5: Kuusipisteiset epäperfektit graafit.

Viimeisten graafien Shannonin kapasiteettien määrittämiseksi tarvitsemme seuraavia tuloksia.

Lause 5.32. *Olkoot G ja H graafeja. Olkoon $e \in E(H)$ ja $e' \in E(G)$. Jos graafi H on $G + e$, niin*

$$c(H) \leq c(G)$$

ja jos graafi H on $G - e'$ ja $|V(G)| \geq 2$, niin

$$c(G) \leq c(H).$$

Todistus. Olkoon G graafi ja $H = G + e$ ja olkoon $n \in \mathbb{Z}^+$. Graafien G^n ja H^n pistejoukot ovat samat ja $E(G^n) \subset E(H^n)$. Näin ollen jokainen graafin H riippumaton joukko on aina riippumaton joukko myös graafissa G, mutta graafin G riippumaton joukko ei välttämättä ole riippumaton joukko graafissa H. Siis $\alpha(H^n) \leq \alpha(G^n)$. Koska luku n oli mielivaltainen pätee $c(H) \leq c(G)$. Toinen tapaus todistetaan vastaavalla tavalla. $\square$

Edellisestä tuloksesta selvästi seuraa: jos graafi G on graafin H osittaisgraafi, niin $c(H) \leq c(G)$. Osoitetaan vielä pisteen poistamiselle ja lisäämiselle vastaavankaltainen tulos.

Lause 5.33. *Olkoon $G = (X, U)$ graafi, missä $|X| \geq 2$. Olkoon $x \in X$. Jos graafi H on $G - x$, niin*

$$c(H) \leq c(G).$$

Todistus. Olkoon $G = (X, U)$ graafi. Olkoon piste $x \in X$ ja olkoon $H = (X', U')$ pistejoukon $X \setminus \{x\}$ indusoima aligraafi. Tällöin seuraava tulos pätee jokaisella $x, y \in X'$ ja jokaisella $n \in \mathbb{Z}^+$: jos $\{x, y\} \notin E(H^n)$, niin $\{x, y\} \notin E(G^n)$. Edellisen todistaminen tapahtuu suoraviivaisesti induktiolla ja jätämme toteamisen lukijalle. Näin ollen jokainen graafin H^n riippumaton joukko on riippumaton joukko myös graafissa G^n ja täten $c(H) \leq c(G)$. □

Lauseen 5.33 tulos voidaan yleistää seuraavaan muotoon: jos graafi H on jonkin graafin G pistejoukon indusoima aligraafi, niin $c(H) \leq c(G)$.

Tarkastellaan sitten jäljellä olevia graafeja G_{26}, G_{27} ja G_{28}. Intuitiviisesti näissä graafeissa on syklin C_5 kuvaamaan kommunikaatiokanavaan lisätty lähetin, joka ei paranna alkuperäistä kanavaa. Etenemme tämän intuition mukaisesti ja määritämme graafeille G_{26}, G_{27} ja G_{28} Shannonin kapasiteetin alarajaksi $\sqrt{5} = c(C_5)$ lauseen 5.33 avulla. Intuitiivisesti emme siten hyödynnä pistettä 6 vastaavaa lähetintä. Sovelletaan nyt lauseen 5.28 todistusta ja siinä käytettyä sateenvarjotekniikkaa. Lisäämme "huonon" lähettimen sateenvarjoon tuomalla siihen kaksinkertaisen kahvan tai ruoteen. Lisätään siis graafin C_5 optimaaliseen esitykseen $(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{u}_4, \boldsymbol{u}_5)$ vektori $\boldsymbol{u}_6 = \boldsymbol{c}$ ja näin saadaan muodostettua graafin G_{28} ortonormaali esitys. Nyt:

$$\frac{1}{(\boldsymbol{c}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{u_6})^2} = \frac{1}{(\boldsymbol{c}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{c})^2} = 1 \leq \sqrt{5} = \frac{1}{(\boldsymbol{c}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{u_i})^2}, \text{ kun } i = 1, \ldots, 5.$$

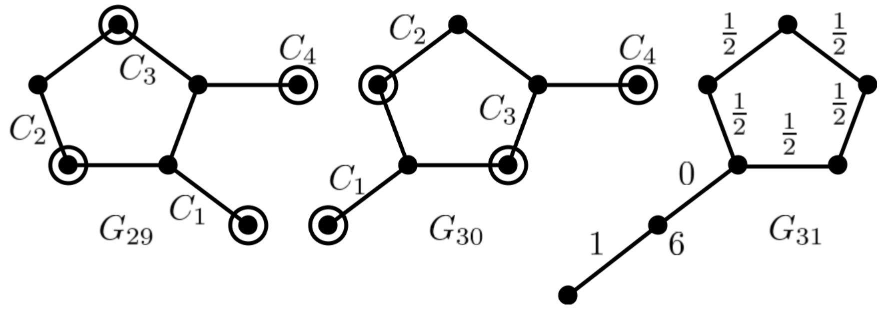
Näin ollen graafin G_{28} Lovászin luku $\vartheta(G_{28})$ on enintään $\sqrt{5}$ ja siis

$$c(C_5) = \sqrt{5} \leq c(G_{28}) \leq \vartheta(G_{28}) \leq \sqrt{5}.$$

Vastaavalla tavalla lisäämällä graafin C_5 ortonormaaliin esitykseen vektorin $\boldsymbol{u}_6 = \boldsymbol{u}_5$ saamme graafin G_{26} ortonormaalin esityksen. Edelleen samaan tapaan saamme $c(G_{26}) = \sqrt{5}$. Graafi G_{27} voidaan muodostaa poistamalla graafista G_{28} särmä tai lisäämällä graafiin G_{26} särmä. Siten myös graafin G_5 Shannonin kapasiteetti on lauseen 5.32 nojalla ratkaistu:

$$\sqrt{5} = c(G_{28}) \leq c(G_{27}) \leq c(G_{26}) = \sqrt{5}.$$

Seitsemänpisteisistä graafeista tarkastelemme sellaisia, joissa on enintään 7 särmää. Todetaan aluksi, että epäaukossa $\overline{C}_7$ on särmiä yhteensä $|E(K_7)| - |E(C_7)| = (\sum_{i=1}^{6} i) - 7 = 14$. Näin ollen riittää, että tarkastelemme kuten edellä 6-pisteisten graafien kohdalla sellaisia yhtenäisiä graafeja, joissa on aligraafina sykli C_5 tai sykli C_7. Tällaisia ei-isomorfisia graafeja on yhteensä neljä, joista kolme on kuvassa 6. Näistä G_{29} ja G_{30} ovat heikosti perfektejä ja niiden Shannonin kapasiteetti on 4.



Kuva 6: Seitsemänpisteisiä epäperfektejä graafeja.

Kuvassa 6 on graafiin G_{31} merkitty klikeille painot $0, \frac{1}{2}$ ja 1. Täten lauseen 5.13 mukaan $c(G_{31}) \leq \alpha^*(G_{31}) = 3\frac{1}{2}$. Ylärajaa voidaan kuitenkin tarkentaa. Graafi G_{31} voidaan muodostaa graafista $C_5 + K_2$ lisäämällä tähän särmä, joten Shannonin kapasiteetti $c(G_{31})$ on lauseen 5.32 perusteella enintään $c(C_5 + K_2)$. Alarajan määrittämisessä turvaudumme jälleen intuitioon rikkinäisestä lähettimestä. Oletetaan, että pistettä 6 vastaavaa lähetintä ei käytetä. Poistamalla tämä piste kapasiteetin $c(G_{31})$ alaraja on lauseen 5.33 mukaan vähintään graafin $C_5 + K_1$ kapasiteetti $c(C_5 + K_1)$. Näin saadaan muodostettua seuraava epäyhtälö:

$$c(C_5 + K_1) \leq c(G_{31}) \leq c(C_5 + K_2).$$

Lauseen 5.30 perusteella $c(C_5 + K_1) = c(C_5 + K_2) = \sqrt{5} + 1$. Näin ollen $c(G_{31}) = \sqrt{5} + 1$.

Näin olemme osoittaneet, että sykliä C_7 yksinkertaisempien graafien Shannonin kapasiteetit ovat tunnettuja. Sykli C_7 on siten yksinkertaisin graafi, jonka tarkkaa Shannonin kapasiteetin arvoa ei vielä tunneta. Tällä hetkellä tiedetään (kts. [1, s. 221]), että

$$3,2236 \approx \sqrt[4]{108} \leq c(C_7) \leq \frac{7}{1 + \cos(\frac{\pi}{7})^{-1}} \approx 3,3177$$

ja olisi houkuttelevaa arvata, että $c(C_7) = \sqrt{11}$.

Viitteet

[1] M. Aigner, G. M. Ziegler, *Proofs from THE BOOK*, Saksa: Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 2004.

[2] N. Alon, *Graph powers*, Contemporary Combinatorics, Bolyai Society Mathematical Studies, Springer, 11–28, 2002.

[3] N. Alon, *The Shannon Capacity of a union*, Combinatorica, Vol. 18, 301–310, 1998.

[4] S. K. Berberian, *Linear Algebra*, Yhdysvallat: Oxford University Press, 1992.

[5] F. Bekius, *The Shannon Capacity of Graph*, opinnäytetyö, 2011, `https://esc.fnwi.uva.nl/thesis/centraal/files/f1876615413.pdf`, [Viitattu 22.1.2017].

[6] C. Berge, *Graphs and Hypergraphs*, Iso-Britannia: North-Holland Publishing Company, 1973.

[7] C. Berge, *Hypergraphs*, Alankomaat: Elsevier science publishers B. V., 1989.

[8] T. Bohman, *Limit Theorem for the Shannon Capacities of Odd Cycles. II.*, Proceedings of the American Mathematical Society, Vol. 133, Number 2, 537–543, 2004.

[9] M. Chudnovsky, N. Robertson, P. Seymour, R. Thomas, *The Strong Perfect Graph Theorem*, Annals of Mathematics, Vol. 164, Issue 1, 51–229, 2006.

[10] J. I. Gross, J. Yellen, *Handbook of Graph Theory*, Yhdysvallat: CRC Press LLC, 2004.

[11] L. Lovász, *Normal hypergraphs and the perfect graph conjecture*. Annals of Discrete Mathematics 21, 29–42, 1984.

[12] L. Lovász, *On the Shannon Capacity of a Graph*. IEEE Transactions on Information Theory, Vol. 25, Issue 1, 1–7, 1979.

[13] L. Lovász, M. Saks, A. Schrijver, *Orthogonal Representations and Connectivity of Graphs*, Linear Algebra and Its Applications, Vol. 114/115, 439–454, 1989.

[14] E. R. Scheinerman, D. H. Ullman, *Fractional Graph Theory, A Rational Approach to the Theory of Graphs*, `http://www.ams.jhu.edu/ers/wp-content/uploads/sites/2/2015/12/fgt.pdf`, [Viitattu 22.1.2017].

[15] P. Seymour, *How the proof of the strong perfect graph conjecture was found*, puhe, 2006, `https://web.math.princeton.edu/~pds/papers/howtheperfect/howtheperfect.pdf`, [Viitattu 22.1.2017].

[16] C. E. Shannon, *The Zero Error Capacity of a Noisy Channel*, I IRE Transactions on Information Theory, Vol. 2, Issue 3, 8–19, 1956.

[17] V. I. Voloshin, *Introduction to Graph and Hypergraph Theory*, Yhdysvallat: Nova Science Publishers Inc., 2009.

[18] E. W. Weisstein, *MathWorld – A Wolfram Web Resource.* `http://mathworld.wolfram.com/`, [Viitattu 22.1.2017].