TAMPEREEN YLIOPISTO
Pro Gradu -tutkielma

Ville Puuska

Yleiset persistenssimodulit ja lomitusmetriikat

Informaatiotieteiden yksikkö
Matematiikka
Joulukuu 2016

Tampereen yliopisto

Informaatiotieteiden yksikkö

PUUSKA, VILLE: Yleiset persistenssimodulit ja lomitusmetriikat

Pro gradu -tutkielma, 54 s.

Matematiikka

Joulukuu 2016

Tiivistelmä

Tutkielmassa tarkastellaan persistenssimoduleita ja niiden välisiä lomitusmetriikoita. Erityisesti keskitytään lomitusmetriikoiden indusoimiseen ja lomitusmetriikoiden yleistämiseen. Aluksi esitellään tarvittavat esitiedot kategoriateoriasta. Yleisen teorian motivaatioksi käsitellään ensin $\mathbb{R}$-persistenssimodulien teoriaa ja esitetään tämän teorian keskeisimmät tulokset persistenssimodulien hajotelmista ja lomitusmetriikan stabiiliudesta. Yleiset persistenssimodulit määritellään funktoreiksi esijärjestetyltä joukolta johonkin kiinnitettyyn kategoriaan.

Esitietojen jälkeen tarkastellaan yleisten persistenssimodulien välisiä lomituksia. Tämän jälkeen esitellään kaksi tapaa indusoida lomitusmetriikoita persistenssimodulien välille, superlineaarinen perhe ja sublineaarinen projektio. Näiden välille määritellään liittorelaatio, joka on yleistys funktorien liitosta, ja osoitetaan, että liittorelaation toteuttava pari määrää saman lomitusmetriikan. Lisäksi osoitetaan, että liittorelaatio määrää parista toisen aina isomorfiaa vaille yksikäsitteisesti.

Superlineaarisen projektion ja sublineaarisen perheen todetaan vastaavan täysin lax ja oplax monoidaalisia funktoreita ja tutkielman loppu käsittelee edeltävän teorian yleistämistä symmetrisille monoidaalisille kategorioille. Tätä varten esitetään ensin tarvittavaa kategoriateoriaa liittofunktoreista ja monoidaalisista kategorioista. Lomitusetäisyys yleistetään lomitusjoukoiksi, jonka jälkeen osoitetaan, että liittorelaation toteuttava pari määrää edelleen samat lomitusjoukot, mutta liittorelaatio ei enää määrää parista toista yksikäsitteisesti.

Asiasanat Topologinen data-analyysi, liittofunktori, monoidaalinen kategoria, monoidaalinen funktori

Sisältö

Johdanto

Topologisen data-analyysin motivaationa ja lähtökohtana on pyrkimys käyttää topologian työkaluja datan muodon tutkimiseksi. Teorian kehittyessä tärkeimmäksi käsitteeksi on noussut niin sanottu persistenssimoduli, jonka voidaan yleisesti määritellä olevan funktori esijärjestetyltä joukolta.

Tutkittaessa niin sanottuja $\mathbb{R}$-persistenssimoduleita, on olemassa luonnollinen metriikka jota kutsutaan lomitusmetriikaksi tai lomitusetäisyydeksi. Yleisille persistenssimoduleille metriikan löytäminen on huomattavasti monimutkaisempaa. Artikkelissa [BdSS15] esitellään kaksi duaalista tapaa indusoida metriikoita yleisien persistenssimodulien välille, superlineaarinen perhe ja sublineaarinen projektio, jotka vastaavat lax ja oplax monoidaalisia funktoreita kaaviossa

$$[0, \infty) \xrightarrow{\text{lax}} \mathbf{Trans_P} \xrightarrow{\text{oplax}} [0, \infty],$$

missä $\mathbf{P}$ on esijärjestetty joukko ja $\mathbf{Trans_P}$ on joukon $\mathbf{P}$ niin sanottujen translaatioiden joukko. Samassa artikkelissa esitetään myös $\mathbb{R}^n$-persistenssimodulien motivoimana idea lomitusmetriikan yleistämisestä joukoiksi, joita tässä tutkielmassa kutsutaan lomitusjoukoiksi. Tämä idea voidaan kuvata kaaviona

$$[0, \infty)^n \xrightarrow{\text{lax}} \mathbf{Trans_P} \xrightarrow{\text{oplax}} [0, \infty]^n.$$

Tämän tutkielman tavoitteena on tutkia, miten artikkelin [BdSS15] kehittämä superlineaaristen perheiden ja sublineaaristen projektioiden teoria yleistyy lomitusjoukkojen tapaukseen. Ensimmäisessä luvussa aloitetaan esittelemällä lyhyesti tarvittavaa kategoriateoriaa ja $\mathbb{R}$-persistenssimodulien teoriaa motivaatioksi yleiselle teorialle.

Toisessa luvussa käsitellään yleisten persistenssimodulien teoriaa. Luku alkaa translaatioiden ja lomituksien määrittelemisellä. Tämän jälkeen esitellään superlineaarinen perhe ja sublineaarinen projektio ja näiden indusoimat lomitusmetriikat. Luvussa tarkastellaan myös niin sanottua liittorelaatiota superlineaarisen perheen ja sublineaarisen projektion välillä, joka on yleistys kahden funktorin liitosta. Liittorelaation toteuttavan parin indusoimien metriikoiden osoitetaan olevan samat. Luvussa esitetään myös milloin superlineaariselle perheelle tai sublineaariselle projektiolle on olemassa liittorelaation toteuttava pari, tämän parin osoitetaan olevan (isomorfiaa vaille) yksikäsitteinen ja osoitetaan myös miten tämä pari määräytyy.

Kolmannessa luvussa yleistetään toisen luvun teoria lomitusjoukkojen idean mukaisesti. Luvussa tarkastellaan kaavioita

$$\mathbf{N} \xrightarrow{\text{lax}} \mathbf{Trans_P} \xrightarrow{\text{oplax}} \mathbf{M},$$

missä $\mathbf{M}$ on symmetrinen monoidaalinen kategoria ja $\mathbf{N} \subseteq \mathbf{M}$ on symmetrinen monoidaalinen alikategoria. Luvun aluksi esitellään liittofunktorien ja monoidaalisten kategorioiden käsitteet. Tämän jälkeen tarkastellaan, mitkä toisen luvun tulokset yleistyvät symmetristen monoidaalisten kategorioiden tapaukseen. Liittorelaation toteuttavan parin osoitetaan edelleen määräävän samat lomitusjoukot, mutta liittorelaation toteuttava pari funktoreita ei enää määräydy yksikäsitteisesti parin toisesta funktorista.

1 Persistenssimodulit ja viivakoodit

Tutkielman ensimmäisessä luvussa kerrataan lyhyesti lukijalta tunnetuksi oletettava määrä kategoriateoriaa ja käsitellään yleisen teorian pohjustukseksi tärkeän erikoistapauksen eli $\mathbb{R}$-persistenssimodulien teoriaa. Tarkempaa ja laajempaa kategoriateorian käsittelyä varten katso esimerkiksi [ML98].

1.1 Kategoriat ja funktorit

Kategoria koostuu kahdesta osasta, *objekteista* ja *morfismeista*. Täsmällisemmin sanottuna kategoria $\mathbf{C}$ koostuu luokasta objekteja $\operatorname{Obj}\mathbf{C}$ ja kaikilla pareilla objekteja $a, b \in \operatorname{Obj}\mathbf{C}$ joukosta morfismeja $\operatorname{Hom}(a, b)$. Huomaa, että objektien ei tarvitse muodostaa joukkoa, mutta $\operatorname{Hom}(a, b)$ pitää olla joukko kaikilla $a, b \in \operatorname{Obj}\mathbf{C}$. Jos objektien luokka on joukko, niin kategoriaa kutsutaan *pieneksi*.

Morfismeilla käytetään usein merkintää $f : a \to b$ tarkoittamaan, että $f \in \operatorname{Hom}(a, b)$. Lisäksi jos $f : a \to b$, niin merkitään että $\operatorname{dom} f = a$ ja $\operatorname{codom} f = b$. Yleensä myös käytetään merkintää $a \in \mathbf{C}$ tarkoittamaan, että $a \in \operatorname{Obj}\mathbf{C}$. Morfismeilta vaaditaan, että niitä voidaan yhdistää, eli kaikilla $a, b, c \in \operatorname{Obj}\mathbf{C}$ on olemassa kuvaus

$$\circ\colon \operatorname{Hom}(b, c) \times \operatorname{Hom}(a, b) \to \operatorname{Hom}(a, c).$$

Näitä kuvauksia merkitään aina samalla symbolilla $\circ$ ja niitä kutsutaan *kompositioksi*. Usein myös jätetään symboli $\circ$ kokonaan pois ja merkinnän $g \circ f$ sijasta merkitään yksinkertaisesti gf.

Morfismeilta ja kompositiolta vaaditaan vielä seuraavien aksioomien täyttyminen:

– kaikilla $f : a \to b$, $g : b \to c$ ja $h : c \to d$ pätee

$$h(gf) = (hg)f,$$

– kaikilla $d \in \operatorname{Obj}\mathbf{C}$ on olemassa $1_d : d \to d$ siten, että kaikilla $f : a \to b$

$$1_b f = f 1_a = f.$$

Toisin sanoen kuvausten yhdistäminen noudattaa liitäntälakia ja jokaisella objektilla a on olemassa *identtinen morfismi* 1_a jonka yhdistäminen toiseen morfismiin ei muuta toista morfismia. Kahta objektia a, b sanotaan *isomorfisiksi*, jos on olemassa morfismit $f\colon a \to b$ ja $g\colon b \to a$ siten, että $gf = 1_a$ ja $fg = 1_b$. Tällöin merkitään, että $f^{-1} = g$ ja morfismeja f, g kutsutaan isomorfismeiksi. Usein myös merkitään $a \cong b$.

Esimerkki 1.1. Ensimmäinen ja mahdollisesti luonnollisin esimerkki kategoriasta on **Set** joka koostuu joukoista ja kuvauksista. Identtiset morfismit ovat tietenkin identtisiä kuvauksia. Muita helppoja esimerkkejä ovat esimerkiksi $\mathbf{Ab}$, R-$\mathbf{Mod}$, $\mathbf{Vect}_{\mathbb{F}}$, jotka tarkoittavat vastaavasti Abelin ryhmien, vasemmanpuoleisten R-modulien ja $\mathbb{F}$-vektoriavaruuksien kategorioita. Jokaisessa tapauksessa morfismit ovat siis homomorfismeja.

Esimerkki 1.2. Tämän tutkielman kannalta tärkeä esimerkki kategoriasta on esijärjestetyn joukon määräämä kategoria. Esijärjestetty joukko on siis joukko $\mathbf{P}$ varustettuna refleksiivisellä ja transitiivisella relaatiolla. Merkitään tätä relaatiota $\leq$ vaikka se ei järjestysrelaatio yleisesti olekaan. Nyt voidaan muodostaa kategoria jonka objektit ovat joukon $\mathbf{P}$ alkiot ja morfismit ovat relaation $\leq$ alkiot, eli jos $a \leq b$, niin $\mathrm{Hom}(a, b) = \{(a, b)\}$ ja jos $a \not\leq b$, niin $\mathrm{Hom}(a, b) = \emptyset$.

Morfismien yhdistäminen on tietenkin kaikilla $a, b, c \in \mathbf{P}$ kuvaus

$$\mathrm{Hom}(b, c) \times \mathrm{Hom}(a, b) \to \mathrm{Hom}(a, c),\ ((b, c), (a, b)) \mapsto (a, c).$$

Tämä on hyvinmääritelty sillä jos $\mathrm{Hom}(a, b) = \emptyset$ tai $\mathrm{Hom}(b, c) = \emptyset$, niin kuvaus on tyhjä kuvaus ja jos taas $\mathrm{Hom}(a, b) \neq \emptyset$ ja $\mathrm{Hom}(b, c) \neq \emptyset$, niin relaation $\leq$ transitiivisuuden perusteella $(a, c) \in \mathrm{Hom}(a, c)$. Jatkossa käytetään merkintää $a \leq b$ tarkoittamaan sekä järjestystä, että morfismia $a \to b$.

Kategorioiden määrittelyn jälkeen seuraava luonnollinen askel on miettiä miten kategorioiden välille voitaisiin määritellä morfismi. Aivan kuten ryhmien, renkaiden ja muiden algebrallisten struktuurien tapauksessa, kategorioiden välisten morfismien tulisi olla yhteensopivia kategorioiden morfismien yhdistämisen ja identtisten morfismien kanssa.

Määritelläänkin kahden kategorian $\mathbf{C}$ ja $\mathbf{D}$ välisen (*kovariantin*) *funktorin* olevan nuoli $F\colon \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ joka liittää jokaiseen objektiin $a \in \mathbf{C}$ objektin $F(a) \in \mathbf{D}$ ja jokaiseen morfismiin $f\colon a \to b$ $(a, b \in \mathbf{C})$ morfismin $F(f)\colon F(a) \to F(b)$ siten, että

– kaikilla $f\colon a \to b$ ja $g\colon b \to c$ $(a, b, c \in \mathbf{C})$ pätee

$$F(gf) = F(g)F(f),$$

– kaikilla $a \in \mathbf{C}$ pätee $F(1_a) = 1_{F(a)}$.

Usein funktoreilla merkitään lyhyemmin $Fa = F(a)$, kun $a \in \mathbf{C}$ ja $Ff = F(f)$, kun $f\colon a \to b$, missä $a, b \in \mathbf{C}$.

Esimerkki 1.3. Nyt kun on määritelty funktori, voidaan määritellä pienten kategorioiden kategoria **Cat**. Tämä koostuu siis pienistä kategorioista ja niiden välisistä funktoreista. Tämä todella on kategoria sillä on helppo nähdä, että funktorien yhdistäminen ilmeisellä tavalla on liitännäistä ja identtinen funktori käyttäytyy kuten identtinen morfismi.

Oleellisin huomio tässä onkin se, että kaikilla pienillä kategorioilla $\mathbf{C}$ ja $\mathbf{D}$ funktorit $\mathbf{C} \to \mathbf{D}$ muodostavat joukon, joka seuraa suoraan siitä, että $\operatorname{Obj} \mathbf{C}$ ja $\operatorname{Obj} \mathbf{D}$ ovat joukkoja.

Esimerkki 1.4. Helpoin esimerkki funktorista on niin sanottu unohdusfunktori $U\colon \mathbf{Ab} \to \mathbf{Set}$, joka "unohtaa" jokaisesta Abelin ryhmästä kaiken struktuurin. Tarkemmin sanottuna jokaisella Abelin ryhmällä S joukko $U(S)$ on ryhmän S alkioiden joukko ja jokaisella ryhmähomomorfismilla $f\colon S \to T$ kuvaus $U(f)\colon U(S) \to U(T)$ on vastaava kuvaus.

Myös funktorien välille voidaan määritellä morfismin käsite. Tätä kutsutaan *luonnolliseksi muunnokseksi*. Olkoon $\mathbf{C}, \mathbf{D}$ kategorioita ja $F, G\colon \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ funktoreita. Luonnollinen muunnos φ funktorilta F funktorille G on perhe morfismeja $(\varphi_a\colon F(a) \to G(a))_{a\in\mathbf{C}}$ siten, että kaavio

$$\begin{array}{ccc} F(a) & \xrightarrow{\varphi_a} & G(a) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle F(f)} & & \Big\downarrow{\scriptstyle G(f)} \\ F(b) & \xrightarrow{\varphi_b} & G(b) \end{array}$$

kommutoi kaikilla kaikilla $f\colon a \to b$ ($a, b \in \mathbf{C}$). Kaavion kommutointi tarkoittaa siis, että $\varphi_b F(f) = G(f)\varphi_a$. Luonnollista muunnosta merkitään $\varphi\colon F \Rightarrow G$. Muita käytettyjä merkintöjä ovat $\varphi\colon F \stackrel{\cdot}{\to} G$ tai yksinkertaisesti $\varphi\colon F \to G$.

Esimerkki 1.5. Tarkastellaan esimerkkinä tapausta, missä $\mathbf{P}$ on esijärjestetty joukko. Muistetaan aluksi, että kun ajatellaan $\mathbf{P}$ kategoriaksi, niin jokaisella parilla objekteja $a, b \in \mathbf{P}$ on olemassa enintään yksi morfismi $a \to b$. Tällaista kategoriaa kutsutaan *ohueksi* kategoriaksi.

On helppo nähdä, että ohuessa kategoriassa kaikki kaaviot kommutoivat, eli siis jos on olemassa jonot morfismeja $f_1, \ldots, f_n$ ja $g_1, \ldots, g_m$ siten, että $\operatorname{codom} f_i = \operatorname{dom} f_{i+1}$ kaikilla $i < n$, $\operatorname{codom} g_i = \operatorname{dom} g_{i+1}$ kaikilla $i < m$, ja $\operatorname{dom} f_1 = \operatorname{dom} g_1$ sekä $\operatorname{codom} f_n = \operatorname{codom} g_m$, niin $f_n \cdots f_1 = g_m \cdots g_1$. Siispä kuvaus $F\colon \mathbf{P} \to \mathbf{P}$ on funktori, jos ja vain jos jokaisella $a \le b \in \mathbf{P}$ pätee $F(a) \le F(b)$.

Vastaavasti jos $F, G\colon \mathbf{P} \to \mathbf{P}$ ovat funktoreita, niin on olemassa luonnollinen muunnos $\varphi\colon F \Rightarrow G$, jos ja vain jos $F(a) \le G(a)$ kaikilla $a \in \mathbf{P}$. Jos funktorilla $F\colon \mathbf{P} \to \mathbf{P}$ lisäksi pätee $a \le F(a)$ kaikilla $a \in \mathbf{P}$, niin sanotaan, että F on *translaatio*. Toisin sanottuna, F on translaatio, jos ja vain jos on olemassa luonnollinen muunnos $I \Rightarrow F$. Merkitään jatkossa translaatioiden tavanomaisen esijärjestyksen

$$F \leq G \iff F(x) \leq G(x) \text{ kaikilla } x \in \mathbf{P}$$

kanssa muodostamaa kategoriaa $\mathbf{Trans_P}$.

Jos $F, G, H \colon \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ ovat funktoreita, niin luonnollisten muunnosten $\varphi \colon F \Rightarrow G$ ja $\psi \colon G \Rightarrow H$ *(vertikaalinen) kompositio* $\psi\varphi \colon F \Rightarrow H$ määritellään asettamalla jokaisella $a \in \mathbf{C}$

$$(\psi\varphi)_a = \psi_a \varphi_a.$$

Kaavioiden kommutointi on helppo todeta, sillä jos $f \colon a \to b$ ($a, b \in \mathbf{C}$), niin kaavion

$$\begin{array}{ccccc} F(a) & \xrightarrow{\varphi_a} & G(a) & \xrightarrow{\psi_a} & H(a) \\ \big\downarrow{\scriptstyle F(f)} & & \big\downarrow{\scriptstyle G(f)} & & \big\downarrow{\scriptstyle H(f)} \\ F(b) & \xrightarrow{\varphi_b} & G(b) & \xrightarrow{\psi_b} & H(b) \end{array}$$

ulomman suorakulmion kommutointi seuraa sisempien suorakulmioiden kommutoinnista, joka taas seuraa luonnollisen muunnoksen määritelmästä.

Määritelmästä seuraa suoraan, että luonnollisten muunnosten yhdistäminen on liitännäistä ja että jokaisella funktorilla $F \colon \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ luonnollinen muunnos $\mathrm{id}_F \colon F \Rightarrow F$, $(\mathrm{id}_F)_a = 1_{F(a)}$ on identtinen luonnollisten muunnoksien yhdistämisen suhteen.

Jos $F, G \colon \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ ovat funktoreita, niin näiden välinen isomorfismi on luonnollinen muunnos $\varphi \colon F \Rightarrow G$ siten, että on olemassa luonnollinen muunnos $\psi \colon G \Rightarrow F$ jolla pätee $\psi\varphi = \mathrm{id}_F$ ja $\varphi\psi = \mathrm{id}_G$. Tämä on itseasiassa yhtäpitävää sen kanssa, että luonnollisen muunnoksen φ kaikki morfismit φ_a ovat isomorfismeja.

Jos $\mathbf{C}$ on pieni kategoria, niin saadaan muodostettua *funktorikategoria* $\mathbf{D}^{\mathbf{C}}$ joka koostuu funktoreista $\mathbf{C} \to \mathbf{D}$ ja jossa morfismit ovat luonnollisia muunnoksia. Käytetään merkintää $\mathbf{D}^{\mathbf{C}}$ tarkoittamaan kaikkien funktorien $\mathbf{C} \to \mathbf{D}$ luokkaa, vaikka $\mathbf{C}$ ei olisikaan pieni.

Luonnollisia muunnoksia voidaan yhdistää myös toisella tavalla. Olkoon $\mathbf{C}_i$ kategoria kaikilla $i = 1, 2, 3$ ja olkoot $F_i, G_i \colon \mathbf{C}_i \to \mathbf{C}_{i+1}$ molemmilla $i = 1, 2$. Olkoot lisäksi $\varphi_i \colon F_i \Rightarrow G_1$ luonnollisia muunnoksia molemmilla $i = 1, 2$. Nyt saadaan luonnollinen muunnos $\varphi_2\varphi_1 \colon F_2F_1 \Rightarrow G_2G_1$ asettamalla

$$(\varphi_2\varphi_1)_a = (\varphi_2)_{G_1(a)} F_2((\varphi_1)_a)$$

kaikilla $a \in \mathbf{C}_1$. Tämä todella on luonnollinen muunnos $F_2F_1 \Rightarrow G_2G_1$, sillä jos $f\colon a \to b$ $(a, b \in \mathbf{C}_1)$, niin

$$\begin{aligned}
(\varphi_2\varphi_1)_b(F_2F_1)(f) &= (\varphi_2)_{G_1(b)}F_2((\varphi_1)_b)F_2(F_1(f)) \\
&= (\varphi_2)_{G_1(b)}[F_2((\varphi_1)_bF_1(f))] && \Big| F_2 \text{ funktori} \\
&= (\varphi_2)_{G_1(b)}[F_2(G_1(f)(\varphi_1)_a)] && \Big| \varphi_1 \text{ luonn. muunnos} \\
&= (\varphi_2)_{G_1(b)}F_2(G_1(f))F_2((\varphi_1)_a) && \Big| F_2 \text{ funktori} \\
&= G_2(G_1(f))(\varphi_2)_{G_1(a)}F_2((\varphi_1)_a) && \Big| \varphi_2 \text{ luonn. muunnos} \\
&= (G_2G_1)(f)(\varphi_2\varphi_1)_a
\end{aligned}$$

kaikilla $a \in \mathbf{C}_1$. Tätä kutsutaan luonnollisten muunnosten φ_1 ja φ_2 *horisontaaliseksi kompositioksi.*

Jos $F\colon \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ on funktori ja $\varphi\colon G \Rightarrow H$ luonnollinen muunnos siten, että $\operatorname{codom} G = \operatorname{codom} H = \mathbf{C}$, niin merkitään horisontaalista kompositiota yksinkertaisemmin $F\varphi = \mathrm{id}_F\, \varphi$. Vastaavasti jos $\operatorname{dom} G = \operatorname{dom} H = \mathbf{D}$, niin merkitään $\varphi F = \varphi\, \mathrm{id}_F$.

Esimerkki 1.6. Otetaan tarkasteltavaksi kategoriaksi $\mathbb{R}$. Määritellään jokaisella $\epsilon \geq 0$ funktori $T_\epsilon\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ asettamalla $T_\epsilon(a) = a + \epsilon$ kaikilla $a \in \mathbb{R}$. Edellisen esimerkin nojalla tämä todella on funktori. Edellisen esimerkin nojalla on myös olemassa luonnollinen muunnos $\eta_\epsilon = ((\eta_\epsilon)_a)_{a\in\mathbb{R}}\colon I \Rightarrow T_\epsilon$, $(\eta_\epsilon)_a = (a \leq a + \epsilon)$, missä I on identtinen funktori $I\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Jos nyt otetaan funktori $F\colon \mathbb{R} \to \mathbf{C}$, niin horisontaalinen kompositio $F\eta_\epsilon\colon FI \Rightarrow FT_\epsilon$ on perhe morfismeja $(F\eta_\epsilon)_{a\in\mathbb{R}}$ siten, että kaikilla $a \in \mathbb{R}$

$$(F\eta_\epsilon)_a = (\mathrm{id}_F)_{T_\epsilon(a)}F(\eta_\epsilon(a)) = F(a \leq a + e).$$

Jos vastaavasti otetaan funktori $F\colon \mathbf{C} \to \mathbb{R}$, niin $\eta_\epsilon F\colon F \to T_\epsilon F$ on perhe morfismeja $(\eta_\epsilon F)_{a\in\mathbb{R}}$ siten, että kaikilla $a \in \mathbb{R}$

$$(\eta_\epsilon F)_a = (\eta_\epsilon)_{F(a)}I(\mathrm{id}_F(a)) = (\eta_\epsilon)_{F(a)}.$$

Esimerkiksi, jos valitaan $F = T_\delta\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jollakin $\delta \geq 0$, niin

$$(T_\delta\eta_\epsilon)_a = T_\delta(a \leq a + \epsilon) = (a + \delta \leq a + \epsilon + \delta)$$

ja

$$(\eta_\epsilon T_\delta)_a = (\eta_\epsilon)_{T_\delta(a)} = (\eta_\epsilon)_{a+\delta} = (a + \delta \leq a + \epsilon + \delta)$$

kaikilla $a \in \mathbb{R}$.

Nyt on saatu käsiteltyä kaikki ensi alkuun tarvittava kategoriateoria ja voidaan määritellä persistenssimoduli. Määritellään heti tässä kohtaa persistenssimoduli täysin yleisessä muodossaan, vaikka seuraavassa aliluvussa keskitytäänkin hyvin paljon konkreettisempaan erikoistapaukseen.

Määritelmä 1.7 (Persistenssimoduli)**.** Olkoon $\mathbf{D}$ kategoria ja $\mathbf{P}$ esijärjestetty joukko ja tulkitaan se kategoriaksi kuten yllä. $\mathbf{P}$-*persistenssimoduli* on funktori $F\colon \mathbf{P} \to \mathbf{D}$. Jos joukko $\mathbf{P}$ on asiayhteydestä selvä tai sillä ei ole väliä, puhutaan usein vain *persistenssimodulista.*

1.2 $\mathbb{R}$-persistenssimodulit

Tämän aliluvun määritelmät ja lauseet ovat suurelta osin suoraan artikkelin [BS14] luvuista 3 ja 4, mahdollisesti pienillä variaatioilla. Kiinnitetään myös kategoria $\mathbf{D} = \mathbf{Vec}_{\mathbb{F}}$ joka on *äärellisulotteisten* $\mathbb{F}$-vektoriavaruuksien kategoria. Kunnalla $\mathbb{F}$ ei ole väliä, joten merkitään yksinkertaisemmin $\mathbf{Vec} = \mathbf{Vec}_{\mathbb{F}}$. Nyt siis persistenssimodulilla tarkoitetaan funktoria $\mathbb{R} \to \mathbf{Vec}$.

Konkreettisemmin sanottuna, $\mathbb{R}$-persistenssimoduli V on perhe äärellisulotteisia vektoriavaruuksia $(V_x)_{x\in\mathbb{R}}$ ja niiden välisiä lineaarikuvauksia $(V(x \leq y)\colon V_x \to V_y)_{x\leq y\in\mathbb{R}}$ siten, että kaikilla $x \leq y \leq z$ pätee $V(x \leq z) = V(y \leq z)V(x \leq y)$. Kaavioina esitettynä kaavion

$$\begin{tikzcd}
V_x \arrow[rr, "V(x\leq z)"] \arrow[dr, "V(x\leq y)"'] & & V_z \\
& V_y \arrow[ur, "V(y\leq z)"'] &
\end{tikzcd}$$

pitää kommutoida kaikilla $x \leq y \leq z \in \mathbb{R}$. Morfismi $\varphi\colon U \to V$ persistenssimodulien U ja V välillä on perhe lineaarikuvauksia $(\varphi_x\colon U_x \to V_x)_{x\in\mathbb{R}}$ siten, että kaikilla $a \leq b \in \mathbb{R}$ kaavio

$$\begin{tikzcd}
U_a \arrow[r, "\varphi_a"] \arrow[d] & V_a \arrow[d] \\
U_b \arrow[r, "\varphi_b"] & V_b
\end{tikzcd}$$

kommutoi. Erityisesti φ on isomorfismi, jos ja vain jos kaavioiden kommutoinnin lisäksi φ_x on isomorfismi kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Tämä on käytännön tilanteissa usein turhan tiukka ehto joten tarvitaan jokin ”lähes isomorfisuuden” käsite. Tämä on niin kutsuttu ϵ-lomitus. Tämä myös antaa mahdollisuuden määritellä persistenssimoduleille laajennettu pseudometriikka jota kutsutaan lomitusetäisyydeksi tai lomitusmetriikaksi.

Määritelmä 1.8. Joukon X *laajannettu pseudometriikka* on kuvaus $\mathrm{d}\colon X \times X \to [0, \infty]$ siten, että kaikilla $x, y, z \in X$ pätee

- $\mathrm{d}(x, x) = 0$,
- $\mathrm{d}(x, y) = \mathrm{d}(y, x)$,
- $\mathrm{d}(x, z) \leq \mathrm{d}(x, y) + \mathrm{d}(y, z)$.

Määritelmä 1.9. Olkoot U, V $\mathbb{R}$-persistenssimoduleita. Jos on olemassa morfismit $\varphi\colon U \to VT_\epsilon$ ja $\psi\colon V \to UT_\epsilon$ siten, että $(\psi T_\epsilon)\varphi = U\eta_{2\epsilon}$ ja $(\varphi T_\epsilon)\psi = V\eta_{2\epsilon}$, niin sanotaan, että U ja V ovat ϵ-lomitetut. Paria (φ, ψ) kutsutaan ϵ-lomitukseksi.

Kaavioina esitettynä määritelmä sanoo, että kaikilla $a \leq b \in \mathbb{R}$ kaaviot

$$\begin{tikzcd} U_a \arrow[r, "\varphi_a"] \arrow[d] & V_{a+\epsilon} \arrow[d] \\ U_b \arrow[r, "\varphi_b"] & V_{b+\epsilon} \end{tikzcd} \quad \begin{tikzcd} V_a \arrow[r, "\psi_a"] \arrow[d] & U_{a+\epsilon} \arrow[d] \\ V_b \arrow[r, "\psi_b"] & U_{b+\epsilon} \end{tikzcd}$$

kommutoivat ja kaikilla $x \in \mathbb{R}$ kaaviot

$$\begin{tikzcd} U_x \arrow[rr] \arrow[dr, "\varphi_x"'] & & U_{x+2\epsilon} \\ & V_{x+\epsilon} \arrow[ur, "\psi_{x+\epsilon}"'] & \end{tikzcd} \quad \begin{tikzcd} V_x \arrow[rr] \arrow[dr, "\psi_x"'] & & V_{x+2\epsilon} \\ & U_{x+\epsilon} \arrow[ur, "\varphi_{x+\epsilon}"'] & \end{tikzcd}$$

kommutoivat. Merkitään jatkossa notaation yksinkertaistamiseksi kaikilla $\mathbb{R}$-persistenssimoduleilla $UT_\epsilon = U(\epsilon)$.

Määritelmä 1.10 (Lomitusetäisyys)**.** Olkoot U, V $\mathbb{R}$-persistenssimoduleita. Määritellään näiden *lomitusetäisyys* $d_I(U, V)$ asettamalla

$$d_I(U, V) = \inf\{\epsilon \in \mathbb{R}_{\geq 0} \mid U \text{ ja } V \text{ ovat } \epsilon\text{-lomitetut}\}.$$

Jos U ja V eivät ole ϵ-lomitetut millään $\epsilon \geq 0$, niin asetetaan $d_I(U, V) = \infty$.

Määritelmästä on selvää, että kaksi persistenssimodulia ovat isomorfiset, jos ja vain jos ne ovat 0-lomitetut. Kuitenkaan siitä, että kahden persistenssimodulin lomitusetäisyys on 0 ei seuraa, että ne olisivat isomorfisia. Tämän osoittamiseksi määritellään ensin $\mathbb{R}$-persistenssimodulien teorian tärkeimmät persistenssimodulit.

Olkoon $I \subseteq \mathbb{R}$ väli, eli jos $a \leq b \in I$, niin $[a, b] \subseteq I$. Määritellään välin I määräämä persistenssimoduli $C(I)$ asettamalla

$$C(I)_x = \begin{cases} \mathbb{F} & \text{jos } x \in I, \\ 0 & \text{muulloin} \end{cases}$$

ja lineaarikuvaukset

$$C(I)_x \to C(I)_y = \begin{cases} \mathrm{id}_{\mathbb{F}} & \text{jos } x, y \in I, \\ 0 & \text{muulloin.} \end{cases}$$

On helppo nähdä, että $C([0, 1])$ ja $C((0, 1))$ ovat ϵ-lomitetut kaikilla $\epsilon > 0$, mutta eivät kuitenkaan ole isomorfisia. Näin ollen lomitusetäisyys d_I ei voi olla (laajennettu) metriikka. Lomitusetäisyys on kuitenkin tietenkin symmetrinen, eli $d_I(U, V) = d_I(V, U)$ kaikilla persistenssimoduleilla U, V, ja kuten seuraava lause osoittaa lomitusetäisyys noudattaa kolmioepäyhtälöä. Siispä d_I on laajennettu pseudometriikka. Todistetaan sitä ennen kuitenkin lyhyt lemma.

Lemma 1.11. *Olkoot U, V $\mathbb{R}$-persistenssimoduleita ja (φ, ψ) näiden välinen ϵ-lomitus. Olkoon lisäksi $\epsilon' \geq \epsilon$. Tällöin on olemassa ϵ'-lomitus U ja V välillä.*

Todistus. Todistetaan, että $(\hat{\varphi}, \hat{\psi}) := ((V(\eta_{\epsilon'-\epsilon}T_\epsilon))\varphi, (U(\eta_{\epsilon'-\epsilon}T_\epsilon))\psi)$ on haettu ϵ'-lomitus. Nyt siis $\eta_{\epsilon'-\epsilon}T_\epsilon \colon T_\epsilon \Rightarrow T_{\epsilon'}$, joten $\hat{\varphi} \colon U \to V(\epsilon) \to V(\epsilon')$ ja $\hat{\psi} \colon V \to U(\epsilon) \to U(\epsilon')$. Pitää siis osoittaa, että kaaviot

$$\begin{tikzcd}
U_x \arrow[rr] \arrow[dr, "\hat{\varphi}_x"'] & & U_{x+2\epsilon'} \\
& V_{x+\epsilon'} \arrow[ur, "\hat{\psi}_{x+\epsilon'}"'] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
V_x \arrow[rr] \arrow[dr, "\hat{\psi}_x"'] & & V_{x+2\epsilon'} \\
& U_{x+\epsilon'} \arrow[ur, "\hat{\varphi}_{x+\epsilon'}"'] &
\end{tikzcd}$$

kommutoivat kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Todistetaan malliksi vasemmanpuoleisen kaavion kommutointi. Huomataan, että kaavio on laajemman kaavion

$$\begin{tikzcd}
U_x \arrow[rr] \arrow[dr, "\varphi_x"'] & & U_{x+\epsilon'-\epsilon} \arrow[rr] \arrow[dr, "\varphi_{x+\epsilon'-\epsilon}"'] & & U_{x+\epsilon'+\epsilon} \arrow[r] & U_{x+2\epsilon'} \\
& V_{x+\epsilon} \arrow[rr] & & V_{x+\epsilon'} \arrow[ur, "\psi_{x+\epsilon'}"'] & &
\end{tikzcd}$$

ulkokehä. Kaavion suunnikas kommutoi, koska φ on luonnollinen muunnos ja kolmio kommutoi, koska (φ, ψ) on ϵ-lomitus. Siispä koko kaavio kommutoi. Näin ollen $(\hat{\varphi}, \hat{\psi})$ on ϵ'-lomitus. □

Lause 1.12. *Olkoot U, V, W $\mathbb{R}$-persistenssimoduleita. Tällöin*

$$d_I(U, W) \leq d_I(U, V) + d_I(V, W).$$

Tarkemmin sanottuna, jos (φ, ψ) on ϵ_1-lomitus, missä $\varphi \colon U \to V(\epsilon_1)$ ja $\psi \colon V \to U(\epsilon_1)$, sekä (ϕ, θ) on ϵ_2-lomitus, missä $\phi \colon V \to W(\epsilon_2)$ ja $\theta \colon W \to V(\epsilon_2)$, niin $((\phi T_{\epsilon_1})\varphi, (\psi T_{\epsilon_2})\theta)$ on $(\epsilon_1 + \epsilon_2)$-lomitus U ja W välillä.

Todistus. Olkoon siis (φ, ψ) ϵ_1-lomitus ja (ϕ, θ) ϵ_2-lomitus. Merkitään $\epsilon = \epsilon_1 + \epsilon_2$. Nyt pitäisi siis osoittaa kaavioiden

$$\begin{tikzcd}
U_x \arrow[rr] \arrow[dr, "((\phi T_{\epsilon_1})\varphi)_x"'] & & U_{x+2\epsilon} \\
& W_{x+\epsilon} \arrow[ur, "((\psi T_{\epsilon_2})\theta)_{x+\epsilon}"'] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
W_x \arrow[rr] \arrow[dr, "((\psi T_{\epsilon_2})\theta)_x"'] & & W_{x+2\epsilon} \\
& U_{x+\epsilon} \arrow[ur, "((\phi T_{\epsilon_1})\varphi)_{x+\epsilon}"'] &
\end{tikzcd}$$

kommutointi kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Tämä nähdään huomaamalla, että kaaviot saadaan yhdistämällä pienempiä kommutoivia kaavioita yhdeksi. Esimerkiksi vasemmanpuoleinen kaavio saadaan kaavion

$$\begin{tikzcd}
U_x \arrow[rr] \arrow[dr, "\varphi_x"'] & & U_{x+2\epsilon_1} \arrow[rr] & & U_{x+2\epsilon} \\
& V_{x+\epsilon_1} \arrow[ur, "\psi_{x+\epsilon_1}"'] \arrow[rr] \arrow[dr, "\phi_{x+\epsilon_1}"'] & & V_{x+\epsilon+\epsilon_2} \arrow[ur, "\psi_{x+\epsilon+\epsilon_2}"'] & \\
& & W_{x+\epsilon} \arrow[ur, "\theta_{x+\epsilon}"'] & &
\end{tikzcd}$$

ulkokehänä. Kaavion kolmiot kommutoivat, koska (φ, ψ) ja (ϕ, θ) ovat ϵ_1- ja ϵ_2-lomitukset, ja suunnikas kommutoi, koska ψ on luonnollinen muunnos. Siispä koko kaavio kommutoi. Näin ollen $(\phi\varphi, \psi\theta)$ on ϵ-lomitus.

On siis osoitettu, että yhdistämällä ϵ_1- ja ϵ_2-lomitukset saadaan $(\epsilon_1+\epsilon_2)$-lomitus. Jos nyt $d_I(U,V) = a$ ja $d_I(V,W) = b$, niin infimumin määritelmän mukaan jokaisella $\epsilon > 0$ on olemassa $\epsilon_1, \epsilon_2 < \epsilon/2$ siten, että U ja V ovat $a+\epsilon_1$-lomitetut sekä V ja W ovat $b+\epsilon_2$-lomitetut, joten saadaan $(a+b+\epsilon_1+\epsilon_2)$-lomitus U ja W välille. Siispä edellisen lemman nojalla saadaan $(a+b+\epsilon)$-lomitus U ja W välille. Näin ollen $d_I(U,W) \leq a+b+\epsilon$ kaikilla $\epsilon > 0$, joten $d_I(U,W) \leq a+b = d_I(U,V) + d_I(V,W)$. □

Tarkastellaan seuraavaksi persistenssimodulien suoria summia. Olkoon U ja V $\mathbb{R}$-persistenssimoduleita. Määritellään $U \oplus V$ asettamalla kaikilla $x \in \mathbb{R}$

$$(U \oplus V)_x = U_x \oplus V_x$$

ja kaikilla $a \leq b \in \mathbb{R}$

$$[(U \oplus V)_x \to (U \oplus V)_y] = [(U_x \to U_y) \oplus (V_x \to V_y)].$$

Summat otetaan siis komponenteittain. Lukija jolle suorat summat kategorioissa eivät ole tuttuja voi perehtyä aiheeseen esimerkiksi kirjan [ML98] luvusta III.3. Vektoriavaruuksien tapauksessa vektoriavaruuksien U ja V summa on yksinkertaisesti niiden tulojoukko $U \times V$ varustettuna komponenteittaisilla laskutoimituksilla ja jos otetaan lineaarikuvaukset $L\colon U \to U'$ ja $L'\colon V \to V'$, niin lineaarikuvaus $L \oplus L'\colon U \oplus V \to U' \oplus V'$ määritellään ottamalla kuvauksien L ja L' tulo. Toisin sanoen $(L \oplus L')(u,v) = (L(u), L'(v))$ kaikilla $(u,v) \in U \oplus V$. On selvää, että tämä määritelmä täyttää suoran summan universaaliominaisuuden.

Sanotaan, että persistenssimoduli U on *hajoava*, mikäli on olemassa persistenssimodulit V, W siten, että $V, W \neq 0$ ja $U \cong V \oplus W$. Muulloin sanotaan, että U on *hajoamaton*.

Lause 1.13. *Olkoon $I \subseteq \mathbb{R}$ väli. Tällöin $C(I)$ on hajoamaton.*

Todistus. Olkoon U, V persistenssimoduleita siten, että $C(I) \cong U \oplus V$. Pitää osoittaa, että $U = 0$ tai $V = 0$. Voidaan olettaa, että $V \neq 0$. On siis olemassa $x \in \mathbb{R}$ siten, että $V_x \neq 0$. Koska $\dim C(I)_x = 1$, niin $U_x = 0$.

Olkoon sitten $y \in \mathbb{R}$. Jos $y \notin I$, niin tietenkin $U_y = 0$. Oletetaan sitten, että $y \in I$. Koska $\dim C(I)_y = 1$, niin joko $U_y = 0$ tai $V_y = 0$. Jos $y \leq x$, niin $U_y \oplus V_y \to U_x \oplus V_x$ on isomorfismi, koska $C(I)_y \to C(I)_x$ on isomorfismi. Siispä $U_x \to U_y$ on isomorfismi, joten $U_y = 0$. Vastaavasti jos $x \leq y$, niin morfismin $U_x \to U_y$ pitää olla isomorfismi, joten $U_y = 0$. Siispä $U = 0$. □

Nyt kun on nähty, että välien määräämät persistenssimodulit ovat hajoamattomia, luonnollisesti herää kysymys, että voidaanko kaikki muut persistenssimodulit esittää välimodulien summina. Tähän vastaus on kyllä, kunhan rajoitutaan persistenssimoduleihin joiden komponentit ovat äärellisulotteisia. William Crawley-Boevey todisti tämän artikkelissaan [CB12]. Tätä ennen väite oli todistettu monessa rajoittuneemmassa tapauksessa ja tässä tutkielmassa rajoitutaan todistamaan versio, joka koskee niin sanottuja kesyjä persistenssimoduleita. Tätä varten tarvitaan ensin muutama määritelmä ja lainataan myös yhtä tärkeää tulosta kommutatiivisen algebran puolelta.

Määritelmä 1.14. Olkoon U $\mathbb{R}$-persistenssimoduli. Jos on olemassa välit $I_1, \ldots, I_n \subseteq \mathbb{R}$ siten, että $U = \oplus_{i=1}^{n} C(I_i)$ niin sanotaan, että U on *äärellistyyppinen.*

Määritelmä 1.15. Olkoon U $\mathbb{R}$-persistenssimoduli ja $I \subseteq \mathbb{R}$ väli. Jos kaikilla $a \leq b \in I$ lineaarikuvaus $U(a \leq b)\colon U_a \to U_b$ on isomorfismi, niin sanotaan, että U on *vakio* välillä I. Sanotaan lisäksi, että jos pisteellä $a \in \mathbb{R}$ on olemassa avoin väli $I \subseteq \mathbb{R}$ siten, että $a \in I$ ja U on vakio välillä I, niin a on persistenssimodulin U *säännöllinen piste.* Jos a ei ole persistenssimodulin U säännöllinen piste, kutsutaan sitä *kriittikseksi pisteeksi.* Persistenssimodulia jolla on vain äärellinen määrä kriittisiä pisteitä kutsutaan *kesyksi.*

Lemma 1.16. *Olkoon U $\mathbb{R}$-persistenssimoduli ja $I \subseteq \mathbb{R}$ väli. Jos I ei sisällä yhtään persistenssimodulin U kriittistä pistettä, niin U on vakio välillä I.*

Todistus. Olkoon $a \leq b \in I$. Valitaan jokaisella $c \in I$ avoin väli $I_c \subseteq \mathbb{R}$ siten, että U on vakio välillä I_c. Nämä ovat olemassa, sillä yksikään c ei ole kriittinen piste. Nyt, koska $[a, b]$ on kompakti, niin äärellinen kokoelma välejä I_c peittää välin $[a, b]$. Olkoon tämä kokoelma $I_{c_1}, \ldots, I_{c_n}$. Koska välit ovat avoimia ja peittävät koko välin $[a, b]$, voidaan valita pisteet $d_1 \leq \cdots \leq d_k$ siten, että $a \leq d_1$, $b \geq d_k$ ja kaikilla $i < k$ on olemassa $j \leq n$ siten, että $d_i, d_{i+1} \in I_{c_j}$ ja lisäksi $a, d_1 \in I_{c_j}$ jollakin $j \leq n$ ja $b, d_k \in I_{c_j}$ jollakin $j \leq n$. Nythän

$$U(a \leq b) = U(d_k \leq b)U(d_{k-1} \leq d_k) \cdots U(a \leq d_1).$$

Koska U on vakio väleillä I_c, niin yhtälön oikealla puolella on pelkkiä isomorfismeja. Siispä myös $U(a \leq b)$ on isomorfismi, joten U on vakio välillä I. □

Nyt kun on saatu määritelmät kesyille ja äärellistyyppisille persistenssimoduleille, on aika tuoda kommutatiivisen algebran työkaluja avuksi.

Määritelmä 1.17. Olkoon M $\mathbb{F}[t]$-moduli. Sanotaan, että M on *porrastettu* $\mathbb{F}[t]$-moduli, mikäli on olemassa Abelin ryhmät M_i $(i \in \mathbb{Z})$ siten, että $M = \oplus_{i \in \mathbb{Z}} M_i$ ja kaikilla $i \in \mathbb{Z}$ pätee $t \cdot M_i \subseteq M_{i+1}$. Porrastettujen $\mathbb{F}[t]$-modulien homomorfismi, tai lyhyemmin morfismi, on modulihomomorfismi joka säilyttää porrastuksen. Porrastettua $\mathbb{F}[t]$-modulia sanotaan *äärellisviritteiseksi*, mikäli on olemassa alkiot $x_1, \ldots, x_n \in M$ siten, että $M = \{\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \mid a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{F}[t]\}$. Lisäksi porrastettua $\mathbb{F}[t]$-modulia $M = \oplus_{i \in \mathbb{Z}} M_i$ kutsutaan *äärellistyyppiseksi* mikäli jokainen M_i on äärellistä dimensiota $\mathbb{F}$-vektoriavaruutena.

Tässä tutkielmassa porrastettua $\mathbb{F}[t]$-modulia kutsutaan *sykliseksi*, jos se on muotoa $t^d\mathbb{F}[t]$, $\mathbb{F}[t]/(t^d)$ tai $t^d(\mathbb{F}[t]/(t^e))$, joillakin $d, e \in \mathbb{Z}$, missä siis esimerkiksi $t^d(\mathbb{F}[t]/(t^e))$ on porrastettu $\mathbb{F}[t]$ moduli $\oplus_{i\in\mathbb{Z}} M_i$ siten, että

$$M_i = \begin{cases} \mathbb{F}, & \text{jos } d \leq i < d+e, \\ 0, & \text{muulloin.} \end{cases}$$

Äärellisviritteisille porrastetuille $\mathbb{F}[t]$-moduleille on olemassa tärkeä struktuurilause, joka on analoginen erittäin tunnetun PID:n yli äärellisesti viritettyjen modulien struktuurilauseen kanssa. Esitetään seuraavaksi tästä lauseesta tässä tutkielmassa tarvittava versio ja jätetään innokkaalle lukijalle viittaukset todistukseen.

Lause 1.18. *Jokainen äärellisviritteinen porrastettu $\mathbb{F}[t]$-moduli on esitettävissä yksikäsitteisesti syklisten porrastettujen $\mathbb{F}[t]$-modulien summana.*

Todistus. Olemassaolo todistetaan artikkelissa [Web85, Lause 1, s. 567] ja yksikäsitteisyys seuraa suoraan tuloksesta [Les11, Lemma 3.3, s.12]. □

Seuraava lause mahdollistaa edellisen struktuurilauseen käyttämisen lähes suoraan kesyjen $\mathbb{R}$-persistenssimodulien tapauksessa.

Lause 1.19. *$\mathbb{Z}$-persistenssimodulien kategoria, eli $\mathbf{Vec}^{\mathbb{Z}}$ on isomorfinen äärellistyyppisten porrastettujen $\mathbb{F}[t]$-modulien kategorian kanssa.*

Todistus. Jokainen persistenssimoduli U määrää äärellistyyppisen porrastetun $\mathbb{F}[t]$-modulin $\oplus_{i\in\mathbb{Z}} U_i$ asettamalla $t \cdot u = U(k \leq k+1)(u)$ kaikilla $u \in U_k$. Vastaavasti jokainen äärellistyyppinen porrastettu $\mathbb{F}[t]$-moduli $\oplus_{i\in\mathbb{Z}} M_i$ määrää persistenssimodulin $M = (M_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ asettamalla $M(k \leq k+1)(m) = t \cdot m$ kaikilla $m \in M_k$.

On suoraviivaista tarkistaa, että nämä määräävät funktorit ja ovat toistensa käänteisfunktorit. □

Nyt päästään itse päätuloksen pariin. Edellisen lauseen isomorfian alla on selvää, että alhaalta rajoitettujen $\mathbb{Z}$-välien määräämät $\mathbb{Z}$-persistenssimodulit vastaavat syklisiä porrastettuja $\mathbb{F}[t]$-moduleja. Näin ollen edeltävä struktuurilause 1.18 antaa mahdollisuuden esittää äärellisviritteiset $\mathbb{Z}$-persistenssimodulit (yksikäsitteisesti) välien määräämien modulien summina. Seuraavassa lauseessa laajennetaan tämä koskemaan kesyjä $\mathbb{R}$-persistenssimoduleita.

Lause 1.20. *$\mathbb{R}$-persistenssimoduli on kesy, jos ja vain jos se on äärellistyyppinen.*

Todistus. Ensinnäkin on selvää, että äärellistyyppisen persistenssimodulin ainoat kriittiset pisteet ovat välien päätepisteet, joita on äärellinen määrä. Siispä äärellistyyppinen persistenssimoduli on myös kesy.

Olkoon sitten U persistenssimoduli jonka kriittiset pisteet ovat $a_1, \dots, a_n$. Valitaan $b_1, \dots, b_n$ siten, että

$$-\infty = a_0 < b_0 < a_1 < b_1 < \cdots < a_n < b_n < a_{n+1} = \infty.$$

Merkitään järjestettyä joukkoa $[2n] = \{0, 1, \dots, 2n\}$ ja tulkitaan tämä kategoriaksi. Määritellään sitten funktori $i\colon [2n] \to \mathbb{R}$ asettamalla

$$k \mapsto \begin{cases} b_{\frac{k}{2}}, & \text{jos } k \text{ on parillinen,} \\ a_{\frac{k+1}{2}}, & \text{jos } k \text{ on pariton} \end{cases}$$

ja toinen funktori $r\colon \mathbb{R} \to [2n]$ asettamalla

$$c \mapsto \begin{cases} 2k-1, & \text{jos } c = a_k, \\ 2k, & \text{jos } a_k < c < a_{k+1}. \end{cases}$$

Nyt saadaan yhdistämällä funktori $ir\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $c \mapsto a_k$ jos $c = a_k$ ja $c \mapsto b_k$ jos $a_k < c < a_{k+1}$. Siispä, koska $a_1, \dots, a_n$ ovat persistenssimodulin U ainoat kriittiset pisteet, niin lemman 1.16 mukaan $((ir)^*U)_c \cong U_c$, missä * merkitsee kompositiota oikealta, eli tässä tapauksessa $(ir)^*U = Uir$. Määritellään kaikilla $c \in \mathbb{R}$

$$\varphi_c = [((ir)^*U)_c \cong U_c].$$

Huomataan vielä, että kaikilla $c \leq d \in \mathbb{R}$ pätee

$$U(c \leq d)\varphi_c = U((ir)(c) \leq d) = \varphi_d U((ir)(c), (ir)(d)) = \varphi_d((ir)^*U)(c \leq d).$$

Siispä φ on luonnollinen isomorfismi $(ir)^*U \cong U$.

Siirrytään sitten tarkastelemaan persistenssimodulia i^*U. Tämä on siis $[2n]$-persistenssimoduli joten se voidaan ajatella $\mathbb{Z}$-persistenssimoduliksi asettamalla $(i^*U)_k = 0$ kaikilla $k < 0$ ja $k > 2n$. Morfismit luonnollisesti ovat $(i^*U)(k \leq 0) = 0$ kaikilla $k < 0$ ja $(i^*U)(2n \leq k) = 0$ kaikilla $k > 2n$.

Nyt, koska i^*U on todellisuudessa $[2n]$-persistenssimoduli, niin tulkittaessa se porrastetuksi $\mathbb{F}[t]$-moduliksi se on äärellisesti viritetty. Esimerkiksi virittäjiksi voitaisiin valita vektoriavaruuksien $(i^*U)_k$ äärellisten virittäjien joukkojen unioni. Kuten ennen tätä lausetta todettiin, struktuurilauseen 1.18 nojalla i^*U voidaan esittää muodossa

$$i^*U \cong \bigoplus_{k=1}^{m} C([d_k, d_k + e_k)),$$

missä siis $d_k, e_k \in \mathbb{N}$ kaikilla $k \leq m$. Tästä saadaan haettu isomorfia

$$U \cong (ir)^*U = r^*(i^*U) \cong r^*(\bigoplus_{k=1}^{m} C([d_k, d_k + e_k))) \cong \bigoplus_{k=1}^{m} r^*(C([d_k, d_k + e_k))).$$

Nyt riittää enää huomata, että tietenkin r^* muuntaa välin määräämän persistenssimodulin välin määräämäksi persistenssimoduliksi. Siispä U on äärellistyyppinen. $\square$

Tarkastelemalla edellisen lauseen todistusta, huomataan että modulin i^*U esityksen yksikäsitteisyydestä saadaan modulin U esityksen yksikäsitteisyys.

Seuraus 1.21. *Olkoon $U \cong \oplus_{k=1}^{n} C(I_k) \cong \oplus_{k=1}^{n'} C(I'_k)$. Tällöin $n = n'$ ja välien I_k ja I'_k kokoelmat ovat uudelleenjärjestämistä vaille samat. Toisin sanoen, äärellistyyppisen persistenssimodulin esitys välien määräämien persistenssimodulien summana on järjestystä vaille yksikäsitteinen.*

Todistus. Olkoot i ja r kuten edellisessä lauseessa. Huomataan ensin, että välien päätepisteet ovat täsmälleen persistenssimodulin U kriittiset pisteet. Siispä esitykset määräävät samat välit $C([d_k, d_k + e_k))$ siten, että

$$i^*U \cong \bigoplus_{k=1}^{m} C([d_k, d_k + e_k)).$$

Lisäksi $i^*U = \oplus_{k=1}^{n} i^*(C(I_k)) = \oplus_{k=1}^{n'} i^*(C(I'_k))$. Siispä tämän esityksen yksikäsitteisyyden nojalla välien $i^*(C(I_k))$ ja $i^*(C(I'_k))$ kokoelmien pitää olla järjestystä vaille samat. Koska välien I_k ja I'_k päätepisteet ovat persistenssimodulin U kriittisiä pisteitä, niin ir kuvaa ne identtisesti. Siispä $(ir)^*(C(I_k)) = C(I_k)$ kaikilla $k \leq n$ ja vastaavasti väleillä I'_k. Siispä esitykset ovat samat. □

1.3 Persistenssikaaviot

Topologisen data-analyysin alkuperäisenä motivaationa on pyrkimys päästä käyttämään topologian menetelmiä datan muodon analysoimiseksi. Tämän vuoksi laskennallisesti tehokkaat menetelmät ja invariantit ovat tärkeitä konkreettiselle teorialle. Tässä aliluvussa esitellään $\mathbb{R}$-persistenssimodulien tärkein ja eniten käytetty invariantti jota kutsutaan viivakoodiksi.

Todetaan ensin, että monijoukolla tarkoitetaan joukkoa, jossa yksittäinen alkio voi esiintyä useammin kuin kerran. Tarkemmin voidaan sanoa, että joukko M on monijoukko, jos on olemassa joukko N siten, että $M \subseteq N \times \mathbb{Z}_+$. Monijoukkojen väliset kuvaukset ovat tavallisia joukkojen välisiä kuvauksia.

Määritelmä 1.22. Olkoon $U \cong \oplus_{i=1}^{n} C(I_i)$, missä $I_i \subseteq \mathbb{R}$ on väli kaikilla $i \in \{1, \ldots, n\}$. Merkitään tällöin $\mathcal{B}(U) = \{I_1, \ldots, I_n\}$, missä joukko $\mathcal{B}(U)$ on monijoukko, ja sanotaan, että $\mathcal{B}(U)$ on persistenssimodulin U *viivakoodi.*

Seurauksen 1.21 mukaan viivakoodi on yksikäsitteisesti olemassa kaikilla kesyillä persistenssimoduleilla. Jotta saataisiin johdettua etäisyys viivakoodeille lomitusetäisyydestä, pitää ensin pystyä puhumaan viivakoodien täsmäyksistä. Määritellään täsmäys yleisesti monijoukoille. Kahden monijoukon A ja B välinen *täsmäys* $\sigma\colon A \rightleftharpoons B$ on bijektio $A' \to B'$ joillakin $A' \subseteq A$ ja $B' \subseteq B$. Merkitään $A' = \operatorname{coim} \sigma$ ja $B' = \operatorname{im} \sigma$.

Nyt ajatuksena on määritellä kahden välin väliseksi etäisyydeksi niiden määräämien persistenssimodulien lomitusetäisyys ja laajentaa tämä koskemaan kokonaisia viivakoodeja. Tämä tehdään kuten lomituksienkin kohdalla määrittelemällä ensin ϵ-täsmäys ja tämän jälkeen otetaan infimum kaikista ϵ joilla viivakoodit ovat ϵ-täsmätyt.

Määritelmä 1.23. Olkoon $I \subseteq \mathbb{R}$ väli. Sanotaan, että I on *ϵ-triviaali*, mikäli $\mathbb{R}$-persistenssimodulien $C(I)$ ja 0 välillä on olemassa ϵ-lomitus. Merkitään kaikilla viivakoodeilla $\mathcal{B}$

$$\mathcal{B}^{\epsilon} = \{I \in \mathcal{B} \mid I \text{ ei ole } \epsilon\text{-triviaali}\}.$$

Olkoon $B_U = \mathcal{B}(U)$ ja $B_V = \mathcal{B}(V)$ kesyjen $\mathbb{R}$-persistenssimodulien U ja V viivakoodit. Tällöin *ϵ-täsmäys* monijoukkojen B_U ja B_V välillä on täsmäys $\sigma\colon B_U \rightleftharpoons B_V$ siten, että

- $B_U^{2\epsilon} \subseteq \operatorname{coim} \sigma$,
- $B_V^{2\epsilon} \subseteq \operatorname{im} \sigma$,
- jos $\sigma(I) = J$, niin $\mathbb{R}$-persistenssimodulien $C(I)$ ja $C(J)$ välillä on olemassa ϵ-lomitus.

Määritellään lisäksi viivakoodien B_U ja B_V *pullonkaulaetäisyys* d_B asettamalla

$$d_B(B_U, B_V) = \inf\{\epsilon \in \mathbb{R}_{\geq 0} \mid \text{ on olemassa } \epsilon\text{-täsmäys } \sigma\colon B_U \rightleftharpoons B_V\}.$$

Huomaa, että määritelmistä seuraa suoraan, että yhdistämällä ϵ_1-täsmäys ja ϵ_2-täsmäys saadaan $(\epsilon_1 + \epsilon_2)$-täsmäys. Näin ollen d_B noudattaa kolmioepäyhtälöä. Lisäksi selvästi $d_B(\mathcal{B}(U), \mathcal{B}(V)) = d_B(\mathcal{B}(V), \mathcal{B}(U))$ kaikilla kesyillä $\mathbb{R}$-persistenssimoduleilla U ja V. Siispä d_B on laajennettu pseudometriikka, aivan kuten lomitusmetriikkakin.

Sovellusten kannalta pullonkaulaetäisyys on erinomainen metriikka, koska sen laskemiseksi on tehokkaita algoritmeja ja se itseasiassa vastaa täysin lomitusmetriikkaa. Tätä tulosta kutsutaan isometrialauseeksi kesyille persistenssimoduleille, tai joskus algebralliseksi stabiliteettilauseeksi kesyille persistenssimoduleille.

Lause 1.24 (Isometrialause kesyille $\mathbb{R}$-persistenssimoduleille)**.** *Olkoot U ja V kesyjä $\mathbb{R}$-persistenssimoduleita. Tällöin*

$$d_B(\mathcal{B}(U), \mathcal{B}(V)) = d_I(U, V).$$

Lause on todistettu kesyjen persistenssimodulien tapauksessa esimerkiksi artikkelissa [BS14, Lause 4.16, s.19] joka käyttää vahvasti apuna tulosta [CCSG+09, Lause 4.4]. Lause pätee kuitenkin myös yleisemmin niin kutsutuille q-kesyille persistenssimoduleille, joilta oletetaan vain, että persistenssimodulin sisäiset lineaarikuvaukset ovat äärellistä dimensiota. Tämä väite on todistettu kahdella oleellisesti erilaisella tavalla artikkeleissa [CdSGO12, Lause 4.11, s.59] ja [BL13, Lause 8.4, s.27].

2 Yleiset persistenssimodulit

Tarkastellaan seuraavaksi, miten edellisessä luvussa määritelty persistenssimodulien lomitus saadaan yleistettyä yleisille persistenssimoduleille, jotka määriteltiin jo määritelmässä 1.7. Tämän jälkeen näytetään, miten niin kutsutusta superlineaarisesta perheestä tai sublineaarisesta projektiosta saadaan indusoitua laajennettu pseudometriikka, joka yleistää edellisen luvun lomitusetäisyyden käsitteen. Lopuksi huomataan, että superlineaarinen perhe ja sublineaarinen projektio jotka täyttävät liittorelaation indusoivat saman lomitusetäisyyden.

Kiinnitetään tästä eteenpäin esijärjestetty joukko $\mathbf{P}$ ja kategoria $\mathbf{D}$. Persistenssimodulilla tarkoitetaan siis jatkossa funktoria $\mathbf{P} \to \mathbf{D}$ jos muuta ei erikseen määritellä. Luku on suurelta osin uudelleenjärjestelty versio artikkelin [BdSS15] luvusta 2.

2.1 Translaatiot ja lomitukset

Lomitusta yleistettäessä ensimmäinen kysymys on, mikä korvaa funktorit T_ϵ ja luonnolliset muunnokset η_ϵ. Nämä korvataan niin kutsutuilla translaatioilla.

Määritelmä 2.1. Esijärjestetyn joukon $\mathbf{P}$ *translaatio* on funktori $\Gamma \colon \mathbf{P} \to \mathbf{P}$ varustettuna luonnollisella muunnoksella $\eta_\Gamma \colon I \Rightarrow \Gamma$, missä I on identtinen funktori $\mathbf{P} \to \mathbf{P}$.

Translaatiot mainittiin jo esimerkissä 1.5. Koska kategoriana tulkittuna $\mathbf{P}$ on ohut, niin translaatio on toisin sanottuna funktio $\Gamma \colon \mathbf{P} \to \mathbf{P}$ jolla pätee kaikilla $a, b \in \mathbf{P}$

– jos $a \leq b$, niin $\Gamma(a) \leq \Gamma(b)$,

– $a \leq \Gamma(a)$.

Ensimmäinen ehto sanoo, että Γ on funktori, ja jälkimmäinen ehto sanoo, että on olemassa luonnollinen muunnos $\eta_\Gamma \colon I \Rightarrow \Gamma$. Tämä luonnollinen muunnos on aina yksikäsitteinen, koska kategoria on ohut. Merkitään translaatioiden muodostamaa kategoriaa $\mathbf{Trans_P}$, missä siis joukko on esijärjestetty relaatiolla

$$\Gamma \leq \mathrm{K} \iff \text{on olemassa luonnollinen muunnos } \Gamma \Rightarrow \mathrm{K}.$$

Käytetään jatkossa tarpeen mukaan lyhyempää merkintää

$$\Gamma x = \Gamma(x)$$

notaation selkiyttämiseksi.

Olkoon sitten $\Gamma \in \mathbf{Trans_P}$ ja F persistenssimoduli, eli $F \in \mathbf{D}^{\mathbf{P}}$. Koska on olemassa luonnollinen muunnos $\eta_\Gamma \colon I \Rightarrow \Gamma$, niin saadaan muodostettua funktori $F\Gamma$ ja luonnollinen muunnos $F\eta_\Gamma \colon F \Rightarrow F\Gamma$. Luonnollinen muunnos $F\eta_\Gamma$ on siis perhe morfismeja $(F\eta_\Gamma)_x = F(x \leq \Gamma(x))$ kaikilla $x \in \mathbf{P}$.

Nyt, korvaamalla lomituksen määritelmässä funktorit T_ϵ ja luonnolliset morfismit η_ϵ translaatioilla Γ ja luonnollisilla muunnoksilla η_Γ saadaan yleistettyä lomituksen määritelmä. Määritelmää voidaan yleistää vielä tätäkin enemmän. Edellisessä luvussa ei otettu parametrissa ϵ huomioon luonnollisen muunnoksen suuntaa, eli oliko kyse muunnoksesta $U \Rightarrow V\eta_\epsilon$ vai $V \Rightarrow U\eta_\epsilon$. Yleisessä tapauksessa suunnan huomioon ottamisesta on hyötyä, joten otetaankin määritelmään kaksi mahdollisesti toisistaan eroavaa translaatiota.

Määritelmä 2.2. Olkoot F ja G persistenssimoduleita, eli funktoreita $\mathbf{P} \to \mathbf{D}$ ja olkoot Γ ja K translaatioita $\mathbf{P} \to \mathbf{P}$. Jos on olemassa luonnolliset muunnokset $\varphi \colon F \Rightarrow G\Gamma$ ja $\psi \colon G \Rightarrow F\mathrm{K}$ siten, että

$$(\psi\Gamma)\varphi = F\eta_{\mathrm{K}\Gamma} \text{ ja } (\varphi\mathrm{K})\psi = G\eta_{\Gamma\mathrm{K}},$$

niin sanotaan, että (φ, ψ) on (Γ, K)-*lomitus* persistenssimodulien F ja G välillä. Sanotaan myös, että F ja G ovat (Γ, K)-*lomitetut*.

Kaavioina määritelmä sanoo, että jos

$$\begin{aligned} \varphi &= (\varphi_x \colon F(x) \to G(\Gamma x))_{x \in \mathbf{P}} \\ \psi &= (\psi_x \colon G(x) \to F(\mathrm{K}x))_{x \in \mathbf{P}} \end{aligned}$$

ovat kaksi perhettä morfismeja, niin (φ, ψ) on (Γ, K)-lomitus, jos ja vain jos kaikilla $a \leq b \in \mathbf{P}$ kaaviot

$$\begin{tikzcd} F(a) \arrow[r, "\varphi_a"] \arrow[d] & G(\Gamma a) \arrow[d] \\ F(b) \arrow[r, "\varphi_b"] & G(\Gamma b) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} G(a) \arrow[r, "\psi_a"] \arrow[d] & F(\mathrm{K}a) \arrow[d] \\ G(b) \arrow[r, "\psi_b"] & F(\mathrm{K}b) \end{tikzcd}$$

kommutoivat ja kaikilla $x \in \mathbf{P}$ kaaviot

$$\begin{tikzcd} F(x) \arrow[rr] \arrow[dr, "\varphi_x"'] & & F(\mathrm{K}\Gamma x) \\ & G(\Gamma x) \arrow[ur, "\psi_{\Gamma x}"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} G(x) \arrow[rr] \arrow[dr, "\psi_x"'] & & G(\Gamma\mathrm{K} x) \\ & F(\mathrm{K} x) \arrow[ur, "\varphi_{\mathrm{K} x}"'] & \end{tikzcd}$$

kommutoivat. Ensimmäiset kaksi kaaviota kertonat, että φ ja ψ ovat luonnollisia muunnoksia ja jälkimmäiset kaksi kertovat, että $(\psi\Gamma)\varphi = F\eta_{\mathrm{K}\Gamma}$ ja $(\varphi\mathrm{K})\psi = G\eta_{\Gamma\mathrm{K}}$. Jos persistenssimodulit F ja G ovat (Γ, Γ)-lomitetut, niin sanotaan lyhyemmin, että ne ovat Γ-lomitetut.

Esimerkki 2.3. Tämä määritelmä lomitukselle yleistää edellisessä luvussa määritellyn lomituksen. Nimittäin jos $\mathbf{P} = \mathbb{R}$ ja $\mathbf{D} = \mathbf{Vec}_{\mathbb{F}}$, niin kaksi persistenssimodulia ovat ϵ-lomitetut, jos ja vain jos ne ovat T_ϵ-lomitetut, eli (T_ϵ, T_ϵ)-lomitetut.

Yleinen määritelmä lomitukselle säilyttää myös alkuperäisen määritelmän motivoivan ajatuksen ”lähes isomorfisuudesta”. Nythän siis selvästi kaksi persistenssimodulia ovat isomorfiset, jos ja vain jos ne ovat I-lomitetut.

Seuraavaksi osoitetaan, että yleinen lomitus käyttäytyy oleellisesti samoin kuin edellinen lomitus, eli osoitetaan yleistykset lauseille 1.11 ja 1.12 jotka toteavat lomituksen olevan monotoninen ja noudattavan kolmioepäyhtälöä.

Lause 2.4 (Monotonisuus, vrt 1.11)**.** *Olkoot* $\Gamma_1, \Gamma_2, \mathrm{K}_1, \mathrm{K}_2 \in \mathbf{Trans}_{\mathbf{P}}$ *ja olkoot* $F, G \in \mathbf{D}^{\mathbf{P}}$*. Jos* F *ja* G *ovat* (Γ_1, K_1)*-lomitetut ja* $\Gamma_1 \leq \Gamma_2$ *sekä* $\mathrm{K}_1 \leq \mathrm{K}_2$*, niin* F *ja* G *ovat myös* (Γ_2, K_2)*-lomitetut.*

Todistus. Olkoon (φ_1, ψ_1) jokin (Γ_1, K_1)-lomitus F ja G välillä. Lisätään näiden luonnollisten muunnosten perään luonnolliset muunnokset $G\Gamma_1 \Rightarrow G\Gamma_2$ ja $F\mathrm{K}_1 \Rightarrow F\mathrm{K}_2$, jolloin saadaan luonnolliset muunnokset

$$\begin{aligned} \varphi_2 &\colon F \Rightarrow G\Gamma_2, \\ \psi_2 &\colon G \Rightarrow F\mathrm{K}_2. \end{aligned}$$

Osoitetaan seuraavaksi, että (φ_2, ψ_2) on (Γ_2, K_2)-lomitus, eli

$$(\psi_2\Gamma_2)\varphi_2 = F\eta_{\mathrm{K}_2\Gamma_2} \text{ ja } (\varphi_2\mathrm{K}_2)\psi_2 = G\eta_{\Gamma_2\mathrm{K}_2}.$$

Osoitetaan esimerkkinä ensimmäinen yhtäsuuruus, jälkimmäinen voidaan osoittaa täysin vastaavasti.

Olkoon siis $x \in \mathbf{P}$. Riittää osoittaa seuraavan kaavion ulkokehän kommutointi, sillä ulkokehältä saadaan luonnolliset muunnokset $F\eta_{\mathrm{K}_2\Gamma_2}$, φ_2 ja ψ_2.

$$\begin{tikzcd}
F(x) \arrow[rr] \arrow[dr, "(\varphi_1)_x"'] & & F(\mathrm{K}_1\Gamma_1 x) \arrow[rr] & & F(\mathrm{K}_1\Gamma_2 x) \arrow[r] & F(\mathrm{K}_2\Gamma_2 x) \\
& G(\Gamma_1 x) \arrow[rr] \arrow[ur, "(\psi_1)_{\Gamma_1 x}"'] & & G(\Gamma_2 x) \arrow[ur, "(\psi_1)_{\Gamma_2 x}"'] & &
\end{tikzcd}$$

Ensinnäkin kaavion kolmio kommutoi, koaka (φ_1, ψ_1) on (Γ_1, K_1)-lomitus. Kaavion suunnikaskin kommutoi, sillä ψ_1 on luonnollinen muunnos. Siispä koko kaavio kommutoi, joten on osoitettu, että $(\psi_2\Gamma_2)\varphi_2 = F\eta_{\mathrm{K}_2\Gamma_2}$. □

Lause 2.5 (Kolmioepäyhtälö, vrt 1.12)**.** *Olkoot* $\Gamma_1, \Gamma_2, \mathrm{K}_1, \mathrm{K}_2 \in \mathbf{Trans}_{\mathbf{P}}$ *ja olkoot* $F, G, H \in \mathbf{D}^{\mathbf{P}}$*. Oletetaan lisäksi, että* F *ja* G *ovat* (Γ_1, K_1)*-lomitetut ja* G *ja* H *ovat* (Γ_2, K_2)*-lomitetut. Tällöin* F *ja* H *ovat* $(\Gamma_2\Gamma_1, \mathrm{K}_1\mathrm{K}_2)$*-lomitetut.*

Todistus. Olkoon (φ_1, ψ_1) jokin (Γ_1, K_1)-lomitus F ja G välillä ja olkoon (φ_2, ψ_2) jokin (Γ_2, K_2)-lomitus G ja H välillä. Määritellään

$$\begin{aligned}\varphi\colon F &\overset{\varphi_1}{\Rightarrow} G\Gamma_1 \overset{\varphi_2\Gamma_1}{\Longrightarrow} H\Gamma_2\Gamma_1,\\ \psi\colon H &\overset{\psi_2}{\Rightarrow} G\mathrm{K}_2 \overset{\psi_1\mathrm{K}_2}{\Longrightarrow} F\mathrm{K}_1\mathrm{K}_2.\end{aligned}$$

Osoitetaan seuraavaksi, että (φ, ψ) on $(\Gamma_2\Gamma_1, \mathrm{K}_1\mathrm{K}_2)$-lomitus F ja H välillä, eli

$$(\psi\Gamma_2\Gamma_1)\varphi = F\eta_{\mathrm{K}_1\mathrm{K}_2\Gamma_2\Gamma_1} \text{ ja } (\varphi\mathrm{K}_1\mathrm{K}_2)\psi = G\eta_{\Gamma_2\Gamma_1\mathrm{K}_1\mathrm{K}_2}.$$

Todistetaan taas vain ensimmäinen yhtäsuuruus, jälkimmäinen voidaan todistaa täysin vastaavasti.

Olkoon $x \in \mathbf{P}$. Luonnollisten muunnosten yhtäsuuruuden osoittamiseksi pitää osoittaa kaavion

$$\begin{tikzcd}
F(x) \arrow[rr] \arrow[dr, "(\varphi_1)_x"'] & & F(\mathrm{K}_1\Gamma_1 x) \arrow[rr] & & F(\mathrm{K}_1\mathrm{K}_2\Gamma_2\Gamma_1 x) \\
& G(\Gamma_1 x) \arrow[ur, "(\psi_1)_{\Gamma_1 x}"'] \arrow[rr] \arrow[dr, "(\varphi_2)_{\Gamma_1 x}"'] & & G(\mathrm{K}_2\Gamma_2\Gamma_1 x) \arrow[ur, "(\psi_1)_{\mathrm{K}_2\Gamma_2\Gamma_1 x}"'] & \\
& & H(\Gamma_2\Gamma_1 x) \arrow[ur, "(\psi_2)_{\Gamma_2\Gamma_1 x}"'] & &
\end{tikzcd}$$

ulkokehän kommutoivan. Kaavion kolmiot kommutoivat, koska (φ_1, ψ_1) ja (φ_2, ψ_2) ovat (Γ_1, K_1)- ja (Γ_2, K_2)-lomitukset. Suunnikas taas kommutoi, koska ψ_1 on luonnollinen muunnos. Siispä koko kaavio kommutoi, joten on osoitettu, että $(\psi\Gamma_2\Gamma_1)\varphi = F\eta_{\mathrm{K}_1\mathrm{K}_2\Gamma_2\Gamma_1}$. $\square$

Osoitetaan vielä, että lomitus on funktoriaalinen. Lyhyesti sanottuna tällä tarkoitetaan, että lomitusrelaatio säilyy jos persistenssimoduleita $F, G \in \mathbf{D}^\mathbf{P}$ jatketaan jollain funktorilla $H\colon \mathbf{D} \to \mathbf{E}$.

Lause 2.6 (Funktoriaalisuus)**.** *Olkoot* $\Gamma, \mathrm{K} \in \mathbf{Trans}_\mathbf{P}$ *ja* $F, G \in \mathbf{D}^\mathbf{P}$*. Olkoon lisäksi* H *funktori* $\mathbf{D} \to \mathbf{E}$*. Jos* F *ja* G *ovat* (Γ, K)*-lomitetut, niin myös* HF *ja* HG *ovat* (Γ, K)*-lomitetut.*

Todistus. Olkoon (φ, ψ) jokin (Γ, K)-lomitus F ja G välillä. Osoitetaan, että $(H\varphi, H\psi)$ on (Γ, K)-lomitus HF ja HG välillä. Tämä on selvää, sillä kaavioiden

$$\begin{tikzcd}
F(x) \arrow[rr] \arrow[dr, "\varphi_x"'] & & F(\mathrm{K}\Gamma x) \\
& G(\Gamma x) \arrow[ur, "\psi_{\Gamma x}"'] &
\end{tikzcd}
\quad
\begin{tikzcd}
G(x) \arrow[rr] \arrow[dr, "\psi_x"'] & & G(\Gamma\mathrm{K} x) \\
& F(\mathrm{K} x) \arrow[ur, "\varphi_{\mathrm{K}x}"'] &
\end{tikzcd}$$

kommutoinnista seuraa tarvittavien kaavioiden

$$\begin{tikzcd} HF(x) \arrow[rr] \arrow[dr, "(H\varphi)_x"'] & & HF(\mathrm{K}\Gamma x) \\ & HG(\Gamma x) \arrow[ur, "(H\psi)_{\Gamma x}"'] & \end{tikzcd} \quad \begin{tikzcd} HG(x) \arrow[rr] \arrow[dr, "(H\psi)_x"'] & & HG(\Gamma \mathrm{K} x) \\ & HF(\mathrm{K} x) \arrow[ur, "(H\varphi)_{\mathrm{K}x}"'] & \end{tikzcd}$$

kommutointi. □

2.2 Superlineaariset perheet ja sublineaariset projektiot

Nyt kun on saatu luonnollinen työkalu persistenssimodulien keskenään vertaamiseksi, seuraava askel on yrittää indusoida metriikoita lomituksella. Kaksi ilmeistä tapaa on kuvata väli $[0,\infty)$ kategoriaan $\mathbf{Trans_P}$ tai kuvata $\mathbf{Trans_P}$ väliin $[0,\infty]$. Tarkemmin sanottuna halutaan saada indusoitua laajennettuja pseudometriikoita, kuten $\mathbb{R}$-persistenssimodulien tavallinen lomitusetäisyys. Aloitetaan tarkastelemalla ensin ensimmäistä ideaa joka on nimeltään superlineaarinen perhe.

Määritelmä 2.7 (Superlineaarinen perhe)**.** Olkoon $\Omega_\epsilon \in \mathbf{Trans_P}$ kaikilla $\epsilon \in [0,\infty)$. Perhettä $\Omega = (\Omega_\epsilon)_{\epsilon\in[0,\infty)}$ sanotaan *superlineaariseksi perheeksi*, jos kaikilla $\epsilon_1, \epsilon_2 \in [0,\infty)$ pätee

$$\Omega_{\epsilon_1}\Omega_{\epsilon_2} \leq \Omega_{\epsilon_1+\epsilon_2}.$$

Määritelmästä seuraa suoraan, että superlineaarinen perhe on itse asiassa funktori $[0,\infty) \to \mathbf{Trans_P}$. Nimittäin jos $\epsilon_1 \leq \epsilon_2$, niin

$$\Omega_{\epsilon_1} = I\Omega_{\epsilon_1} \leq \Omega_{\epsilon_2-\epsilon_1}\Omega_{\epsilon_1} \leq \Omega_{\epsilon_2},$$

koska $I \leq \Omega_{\epsilon_2-\epsilon_1}$ translaation määritelmän mukaan.

Superlineaarisen perheen ajatus on siis kuvata väli $[0,\infty)$ kategoriaan $\mathbf{Trans_P}$ siten, että saadaan indusoitua laajennettu pseudometriikka. Kolmioepäyhtälön vuoksi perheeltä vaaditaan ehto $\Omega_{\epsilon_1}\Omega_{\epsilon_2} \leq \Omega_{\epsilon_1+\epsilon_2}$. Toinen lähestymistapa, eli kategorian $\mathbf{Trans_P}$ kuvaaminen välille $[0,\infty]$ on nimeltään sublineaarinen projektio.

Määritelmä 2.8 (Sublineaarinen projektio)**.** Funktori $\omega\colon \mathbf{Trans_P} \to [0,\infty]$ on *sublineaarinen projektio*, jos $\omega_I = 0$ ja kaikilla $\Gamma, \mathrm{K} \in \mathbf{Trans_P}$ pätee

$$\omega_{\Gamma\mathrm{K}} \leq \omega_\Gamma + \omega_\mathrm{K}.$$

Koska sublineaarisen projektion vaaditaan olevan funktori, niin siltä vaaditaan monotonisuus, eli että $\omega_\Gamma \leq \omega_\mathrm{K}$ kaikilla $\Gamma \leq \mathrm{K} \in \mathbf{Trans_P}$. Tämä ei kuitenkaan metriikan indusoimisen kannalta ole oleellinen vaatimus. Kuitenkin jos otetaan kuvaus $\omega\colon \mathbf{Trans_P} \to [0,\infty]$ joka täyttää ehdot $\omega_I = 0$ ja

$\omega_{\Gamma \mathrm{K}} \leq \omega_\Gamma + \omega_\mathrm{K}$ kaikilla $\Gamma, \mathrm{K} \in \mathbf{Trans_P}$, niin voidaan tarkastella funktion ω *monotonista sulkeumaa*

$$\overline{\omega}\colon \mathbf{Trans_P} \to [0,\infty],\ \Gamma \mapsto \inf\{\omega_{\Gamma'} \mid \Gamma' \geq \Gamma\}.$$

Tämä on myös sublineaarinen projektio ja indusoi saman metriikan kuin alkuperäinen sublineaarinen projektio ω, kuten artikkelin [BdSS15] lauseessa 2.3.4. todetaan. Näin ollen voidaan huoletta vaatia sublineaarisen projektion olevan aina monotoninen.

Superlineaarisen perheen ja sublineaarisen perheen määritelmien oleellisimmat ehdot

$$\Omega_{\epsilon_1}\Omega_{\epsilon_2} \leq \Omega_{\epsilon_1+\epsilon_2}$$

ja

$$\omega_{\Gamma \mathrm{K}} \leq \omega_\Gamma + \omega_\mathrm{K}$$

ovat hyvin samankaltaiset. Tämä samankaltaisuus voidaan ilmaista sanomalla, että käsitteet ovat (lähes) duaaliset. Tarkemmin sanottuna superlineaarinen perhe on lax monoidaalinen funktori $[0,\infty) \to \mathbf{Trans_P}$ ja sublineaarinen projektio on oplax monoidaalinen funktori $\mathbf{Trans_P} \to [0,\infty]$. Näistä huomioista jatketaan luvussa 3.3.

2.3 Indusoidut metriikat

Tarkastellaan sitten, miten superlineaarisesta perheestä tai sublineaarisesta projektiosta saadaan indusoitua metriikka. Tämä tapahtuu tietenkin aivan vastaavalla tavalla kuin $\mathbb{R}$-persistenssimoduleilla, eli ottamalla infimum sopivasta joukosta.

Kiinnitetään tämän aliluvun ajaksi jokin superlineaarinen perhe Ω ja sublineaarinen projektio ω.

Määritelmä 2.9 (Superlineaarinen lomitusetäisyys)**.** Olkoot F ja G persistenssimoduleita. Määritellään näiden väliseksi *lomitusetäisyydeksi* Ω *suhteen*

$$\mathrm{d}^\Omega(F,G) = \inf\{\epsilon \in [0,\infty) \mid F \text{ ja } G \text{ ovat } \Omega_\epsilon\text{-lomitetut}\}.$$

Jos joukko on tyhjä, niin asetetaan $\mathrm{d}^\Omega(F,G) = \infty$.

Lause 2.10. *Lomitusetäisyys* Ω *suhteen* d^Ω *on laajennettu pseudometriikka.*

Todistus. Ensinnäkin, koska jokainen persistenssimoduli on I-lomitettu, niin monotonisuuden (lause 2.4) perusteella se on myös Ω_0-lomitettu. Siispä kaikilla persistenssimoduleilla F pätee $\mathrm{d}^\Omega(F,F) = 0$. On myös selvää, että $\mathrm{d}^\Omega(F,G) = \mathrm{d}^\Omega(G,F)$ kaikilla persistenssimoduleilla F ja G, sillä jos F ja G ovat Ω_ϵ-lomitetut, niin tietenkin myös G ja F ovat Ω_ϵ-lomitetut.

Olkoon sitten F, G ja H persistenssimoduleita. Jos F ja G ovat Ω_{ϵ_1}-lomitetut ja G ja H ovat Ω_{ϵ_2}-lomitetut, niin kolmioepäyhtälön (lause 2.5) nojalla F ja H ovat $(\Omega_{\epsilon_2}\Omega_{\epsilon_1}, \Omega_{\epsilon_1}\Omega_{\epsilon_2})$-lomitetut. Superlineaarisuuden mukaan $\Omega_{\epsilon_2}\Omega_{\epsilon_1}, \Omega_{\epsilon_1}\Omega_{\epsilon_2} \leq \Omega_{\epsilon_1+\epsilon_2}$ joten monotonisuuden (lause 2.4) nojalla F ja H ovat $\Omega_{\epsilon_1+\epsilon_2}$-lomitetut. Tämä osoittaa, että

$$\begin{aligned}\{\epsilon \in [0,\infty) \mid F, G\ \Omega_\epsilon\text{-lomitetut}\} + \{\epsilon \in [0,\infty) \mid G, H\ \Omega_\epsilon\text{-lomitetut}\}\\ \subseteq \{\epsilon \in [0,\infty) \mid F, H\ \Omega_\epsilon\text{-lomitetut}\}.\end{aligned}$$

Ottamalla infimumit joukoista saadaan kolmioepäyhtälö

$$\mathrm{d}^\Omega(F, H) \leq \mathrm{d}^\Omega(F, G) + \mathrm{d}^\Omega(G, H).$$

□

Käytännön sovellusten kannalta lomitusetäisyyden eräs tärkeä ominaisuus on sen stabiilius funktorien suhteen. Tämä ominaisuus on erityisen helppo nähdä näin abstraktissa kontekstissa.

Lause 2.11. *Olkoot F ja G persistenssimoduleita ja $H\colon \mathbf{D} \to \mathbf{E}$. Tällöin*

$$\mathrm{d}^\Omega(HF, HG) \leq \mathrm{d}^\Omega(F, G).$$

Todistus. Jos F ja G ovat Ω_ϵ-lomitetut, niin funktoriaalisuuden (lause 2.6) mukaan myös HF ja HG ovat Ω_ϵ-lomitetut. Siispä

$$\{\epsilon \mid F \text{ ja } G \text{ ovat } \Omega_\epsilon\text{-lomitetut}\} \subseteq \{\epsilon \mid HF \text{ ja } HG \text{ ovat } \Omega_\epsilon\text{-lomitetut}\},$$

jolloin ottamalla infimum saadaan $\mathrm{d}^\Omega(HF, HG) \leq \mathrm{d}^\Omega(F, G)$. □

Määritelmä 2.12. Olkoot F ja G persistenssimoduleita. Sanotaan, että F ja G ovat *ϵ-lomitetut ω suhteen*, jos on olemassa $\Gamma, \mathrm{K} \in \mathbf{Trans_P}$ siten, että F ja G ovat (Γ, K)-lomitetut ja $\omega_\Gamma, \omega_K \leq \epsilon$. Kyseistä lomitusta kutsutaan *ϵ-lomitukseksi ω suhteen.* Jos ω on asiayhteydestä selvä se jätetään usein mainitsematta.

Määritelmä 2.13 (Sublineaarinen lomitusetäisyys)**.** Olkoot F ja G persistenssimoduleita. Määritellään näiden väliseksi *lomitusetäisyydeksi ω suhteen*

$$\mathrm{d}^\omega(F, G) = \inf\{\epsilon \in [0,\infty) \mid F \text{ ja } G \text{ ovat } \epsilon\text{-lomitetut } \omega \text{ suhteen}\}.$$

Jos joukko on tyhjä, niin asetetaan $\mathrm{d}^\omega(F, G) = \infty$.

Lause 2.14. *Lomitusetäisyys ω suhteen* d^ω *on laajennettu pseudometriikka.*

Todistus. Koska $\omega_I = 0$, niin persistenssimoduleilla F pätee $\mathrm{d}^\omega(F, F) = 0$. Jos F ja G ovat ϵ-lomitettuja persistenssimoduleita, niin kääntämällä ϵ-lomitus saadaan ϵ-lomitus G ja F välille. Siispä $\mathrm{d}^\omega(F, G) = \mathrm{d}^\omega(G, F)$.

Olkoot sitten F, G ja H persistenssimoduleita. Oletetaan, että F ja G ovat ϵ_1-lomitetut ja G ja H ovat ϵ_2-lomitetut. Määritelmän mukaan on olemassa $\Gamma_1, \Gamma_2, \mathrm{K}_1, \mathrm{K}_2 \in \mathbf{Trans_P}$ siten, että $\omega_{\Gamma_i}, \omega_{\mathrm{K}_i} \leq \epsilon_i$ molemmilla $i = 1, 2$,

F ja G ovat (Γ_1, K_1)-lomitetut ja G ja H ovat (Γ_2, K_2)-lomitetut. Kolmioepäyhtälön (lause 2.5) mukaan F ja H ovat $(\Gamma_2\Gamma_1, \mathrm{K}_1\mathrm{K}_2)$-lomitetut. Sublineaarisuuden mukaan $\omega_{\Gamma_2\Gamma_1}, \omega_{\mathrm{K}_1\mathrm{K}_2} \leq \epsilon_1 + \epsilon_2$, joten monotonisuuden F ja H ovat $(\epsilon_1 + \epsilon_2)$-lomitetut. Näin ollen

$$\begin{aligned}\{\epsilon \in [0,\infty) \mid F,\ G\ \epsilon\text{-lomitetut}\}+&\{\epsilon \in [0,\infty) \mid G,\ H\ \epsilon\text{-lomitetut}\}\\ \subseteq&\{\epsilon \in [0,\infty) \mid F,\ H\ \epsilon\text{-lomitetut}\}.\end{aligned}$$

Ottamalla infimumit joukoista saadaan kolmioepäyhtälö

$$\mathrm{d}^\omega(F, H) \leq \mathrm{d}^\omega(F, G) + \mathrm{d}^\omega(G, H).$$

□

Lause 2.15. *Olkoot F ja G persistenssimoduleita ja $H\colon \mathbf{D} \to \mathbf{E}$. Tällöin*

$$\mathrm{d}^\omega(HF, HG) \leq \mathrm{d}^\omega(F, G).$$

Todistus. Jos F ja G ovat ϵ-lomitetut ω suhteen, niin on olemassa $\Gamma, \mathrm{K} \in \mathbf{Trans_P}$ siten, että F ja G ovat (Γ, K)-lomitetut ja $\omega_\Gamma, \omega_\mathrm{K} \leq \epsilon$. Funktoriaalisuuden (lause 2.6) mukaan myös HF ja HG ovat (Γ, K)-lomitetut joten ne ovat myös ϵ-lomitetut ω suhteen. Siispä

$$\{\epsilon \mid F, G\ \epsilon\text{-lomitetut } \omega \text{ suhteen}\} \subseteq \{\epsilon \mid HF, HG\ \epsilon\text{-lomitetut } \omega \text{ suhteen}\},$$

jolloin ottamalla infimum saadaan $\mathrm{d}^\omega(HF, HG) \leq \mathrm{d}^\omega(F, G)$. □

Nyt kun on konstruoitu kaksi eri tapaa indusoida lomitusetäisyys, voidaan kysyä, milloin metriikat ovat samat. Eräs luonteva ehto yhtäsuuruuden takaamiseksi on liittorelaatio.

Määritelmä 2.16 (Liittorelaatio)**.** Sanotaan, että Ω ja ω toteuttavat *liittorelaation*, jos kaikilla $\epsilon \in [0, \infty)$ ja $\Gamma \in \mathbf{Trans_P}$ pätee

$$\omega_\Gamma \leq \epsilon \iff \Gamma \leq \Omega_\epsilon.$$

Tällöin merkitään $\omega \dashv \Omega$.

Liittorelaatiossa itseasiassa ei tarvita oletusta funktioiden Ω ja ω monotonisuudesta vaan se seuraa suoraan relaatiosta. Lisäksi riittää olettaa Ω olevan superlineaarinen tai ω olevan sublineaarinen. Jo näistä oletuksista seuraa, että $\omega \dashv \Omega$ ja $\mathrm{d}^\Omega = \mathrm{d}^\omega$, kuten seuraava lause osoittaa.

Lause 2.17 (vrt. [BdSS15, lause 4.1.3])**.** *Olkoot* $\Omega\colon [0, \infty) \to \mathbf{Trans_P}$ *ja* $\omega\colon \mathbf{Trans_P} \to [0, \infty]$ *funktioita. Oletetaan, että kaikilla* $\epsilon \in [0, \infty)$ *ja* $\Gamma \in \mathbf{Trans_P}$ *pätee*

$$\omega_\Gamma \leq \epsilon \iff \Gamma \leq \Omega_\epsilon. \tag{2.17.1}$$

Tällöin

i) *kaikilla* $\Gamma \in \mathbf{Trans_P}$ *pätee* $\Gamma \leq \Omega_{\omega_\Gamma}$*, kunhan* $\omega_\Gamma < \infty$*,*

ii) *kaikilla* $\epsilon \in [0, \infty)$ *pätee* $\omega_{\Omega_\epsilon} \leq \epsilon$*,*

iii) Ω *ja* ω *ovat monotonisia, eli funktoreita,*

iv) Ω *on superlineaarinen perhe, jos ja vain jos* ω *on sublineaarinen projektio,*

v) *jos* Ω *ja* ω *ovat super- ja sublineaarisia, niin* $\mathrm{d}^\Omega = \mathrm{d}^\omega$*.*

Todistus. i) Sijoittamalla ekvivalenssiin 2.17.1 $\epsilon = \omega_\Gamma$ saadaan

$$\omega_\Gamma \leq \omega_\Gamma \iff \Gamma \leq \Omega_{\omega_\Gamma}.$$

ii) Vastaavasti kuin yllä, tulos saadaan sijoittamalla ekvivalenssiin 2.17.1 translaatioksi Γ translaatio Ω_ϵ.

iii) Olkoon $\Gamma \leq \mathrm{K}$ translaatioita. Jos $\omega_\mathrm{K} = \infty$, niin tietenkin $\omega_\Gamma \leq \omega_\mathrm{K}$. Voidaan siis olettaa, että $\omega_\mathrm{K} < \infty$. Nyt sijoittamalla ekvivalenssiin 2.17.1 $\epsilon = \omega_\mathrm{K}$ saadaan ekvivalenssi

$$\omega_\Gamma \leq \omega_\mathrm{K} \iff \Gamma \leq \Omega_{\omega_\mathrm{K}}.$$

Koska ensimmäisen kohdan mukaan $\mathrm{K} \leq \Omega_{\omega_\mathrm{K}}$, niin $\Gamma \leq \mathrm{K} \leq \Omega_{\omega_\mathrm{K}}$. Siispä ekvivalenssin oikea puoli on tosi, joten $\omega_\Gamma \leq \omega_\mathrm{K}$ ja näin ollen ω on monotoninen.

Olkoon sitten $\delta \leq \epsilon \in [0, \infty)$. Vastaavasti kuin edellä, toisen kohdan nojalla $\omega_{\Omega_\delta} \leq \delta \leq \epsilon$, joten ekvivalenssista 2.17.1 saadaan $\Omega_\delta \leq \Omega_\epsilon$. Siispä myös Ω on monotoninen.

iv) Oletetaan aluksi, että Ω on superlineaarinen. Pitäisi siis osoittaa, että $\omega_I = 0$ ja $\omega_{\Gamma\mathrm{K}} \leq \omega_\Gamma + \omega_\mathrm{K}$ kaikilla translaatioilla Γ, K. Ensinnäkin $\omega_I = 0$ saadaan ekvivalenssista 2.17.1 asettamalla $\Gamma = I$ ja $\epsilon = 0$.

Olkoon $\Gamma, \mathrm{K} \in \mathbf{Trans_P}$. Jos $\omega_\Gamma = \infty$ tai $\omega_\mathrm{K} = \infty$, niin epäyhtälö $\omega_{\Gamma\mathrm{K}} \leq \omega_\Gamma + \omega_\mathrm{K}$ on tietenkin tosi. Voidaan siis olettaa, että $\omega_\Gamma, \omega_\mathrm{K} < \infty$. Tämän lauseen ensimmäisen kohdan nojalla $\Gamma \leq \Omega_{\omega_\Gamma}$ ja $\mathrm{K} \leq \Omega_{\omega_\mathrm{K}}$. Yhdistämällä saadaan $\Gamma\mathrm{K} \leq \Omega_{\omega_\Gamma}\Omega_{\omega_\mathrm{K}}$. Lisäksi koska Ω on superlineaarinen, niin $\Omega_{\omega_\Gamma}\Omega_{\omega_\mathrm{K}} \leq \Omega_{\omega_\Gamma + \omega_\mathrm{K}}$. Siispä $\Gamma\mathrm{K} \leq \Omega_{\omega_\Gamma + \omega_\mathrm{K}}$. Ekvivalenssin 2.17.1 mukaan $\omega_{\Gamma\mathrm{K}} \leq \omega_\Gamma + \omega_\mathrm{K}$. Siispä ω on sublineaarinen projektio.

Oletetaan sitten, että ω on sublineaarinen projektio. Pitäisi osoittaa, että $\Omega_{\epsilon_1}\Omega_{\epsilon_2} \leq \Omega_{\epsilon_1+\epsilon_2}$ kaikilla $\epsilon_1, \epsilon_2 \in [0, \infty)$. Aivan vastaavasti kuin edellä, tämän lauseen toisesta kohdasta saadaan $\omega_{\Omega_{\epsilon_1}} \leq \epsilon_1$ ja $\omega_{\Omega_{\epsilon_2}} \leq \epsilon_2$ joten summaamalla saadaan $\omega_{\Omega_{\epsilon_1}} + \omega_{\Omega_{\epsilon_2}} \leq \epsilon_1 + \epsilon_2$. Edelleen funktion ω sublineaarisuudesta saadaan $\omega_{\Omega_{\epsilon_1}\Omega_{\epsilon_2}} \leq \omega_{\Omega_{\epsilon_1}} + \omega_{\Omega_{\epsilon_2}}$. Siispä $\omega_{\Omega_{\epsilon_1}\Omega_{\epsilon_2}} \leq \epsilon_1 + \epsilon_2$ joten ekvivalenssista 2.17.1 saadaan $\Omega_{\epsilon_1}\Omega_{\epsilon_2} \leq \Omega_{\epsilon_1+\epsilon_2}$. Näin ollen Ω on superlineaarinen perhe.

v) Olkoot F ja G persistenssimoduleita ja $\epsilon \in [0, \infty)$. Osoitetaan, että F ja G ovat Ω_ϵ-lomitettuja, jos ja vain jos F ja G ovat ϵ-lomitettuja ω suhteen, jolloin tietenkin $\mathrm{d}^\Omega(F, G) = \mathrm{d}^\omega(F, G)$.

   Jos F ja G ovat Ω_ϵ-lomitetut, niin tämän lauseen toisen kohdan mukaan F ja G ovat myös ϵ-lomitetut ω suhteen. Oletetaan sitten, että F ja G ovat ϵ-lomitetut ω suhteen. On siis olemassa $\Gamma, \mathrm{K} \in \mathbf{Trans_P}$ siten, että $\omega_\Gamma, \omega_\mathrm{K} \leq \epsilon$ ja F ja G ovat (Γ, K)-lomitetut. Ekvivalenssin 2.17.1 mukaan $\Gamma, \mathrm{K} \leq \Omega_\epsilon$, joten monotonisuuden (lause 2.4) perusteella F ja G ovat Ω_ϵ-lomitetut.

□

Tarkastelemalla tilannetta jossa Ω tiedetään superlineaariseksi tai ω tiedetään sublineaariseksi, edellisestä lauseesta saadaan lisää informaatiota, miten konstruoida liittorelaatio toteuttaen sublineaarinen projektio superlineaarisesta perheestä tai päin vastoin.

Seuraus 2.18 (vrt. [BdSS15, lause 2.5.6])**.** *Olkoot* $\Omega\colon [0, \infty) \to \mathbf{Trans_P}$ *ja* $\omega\colon \mathbf{Trans_P} \to [0, \infty]$ *funktioita.*

i) Olkoon Ω *superlineaarinen perhe. Jos kaikilla* $\Gamma \in \mathbf{Trans_P}$ *joilla* $\omega_\Gamma < \infty$ *pätee* $\Gamma \leq \Omega_{\omega_\Gamma}$ *ja kaikilla* $\Gamma \in \mathbf{Trans_P}$ *ja* $\epsilon \in [0, \infty)$ *pätee* $\Gamma \leq \Omega_\epsilon \implies \omega_\Gamma \leq \epsilon$*, niin* ω *on sublineaarinen projektio ja* $\omega \dashv \Omega$*.*

ii) Olkoon ω *sublineaarinen projektio. Jos kaikilla* $\epsilon \in [0, \infty)$ *pätee* $\omega_{\Omega_\epsilon} \leq \epsilon$ *ja kaikilla* $\Gamma \in \mathbf{Trans_P}$ *ja* $\epsilon \in [0, \infty)$ *pätee* $\omega_\Gamma \leq \epsilon \implies \Gamma \leq \Omega_\epsilon$*, niin* Ω *on superlineaarinen perhe ja* $\omega \dashv \Omega$*.*

Lisäksi molemmissa tapauksissa $\mathrm{d}^\Omega = \mathrm{d}^\omega$*.*

Todistus. Lauseen 2.17 perusteella molemmissa tapauksissa riittää osoittaa ekvivalenssin 2.17.1 puuttuva suunta.

i) Olkoot $\Gamma \in \mathbf{Trans_P}$ ja $\epsilon \in [0, \infty)$ siten, että $\omega_\Gamma \leq \epsilon$. Koska Ω on superlineaarinen perhe, on se erityisesti monotoninen, joten $\Omega_{\omega_\Gamma} \leq \Omega_\epsilon$. Oletuksen mukaan $\Gamma \leq \Omega_{\omega_\Gamma}$, joten $\Gamma \leq \Omega_\epsilon$.

ii) Olkoot $\Gamma \in \mathbf{Trans_P}$ ja $\epsilon \in [0, \infty)$ siten, että $\Gamma \leq \Omega_\epsilon$. Vastaavasti kuin yllä, funktion ω monotonisuuden ja oletuksen nojalla saadaan $\omega_\Gamma \leq \omega_{\Omega_\epsilon} \leq \epsilon$.

□

Tarkastelemalla edellistä seurausta hieman tarkemmin, voidaan tulosta vahvistaa merkittävästi. Keskitytään ensin ensimmäiseen kohtaan. Olkoon Ω siis superlineaarinen perhe ja yritetään konstruoida ω siten, että $\omega \dashv \Omega$.

Huomataan aluksi, että ehto $\Gamma \leq \Omega_{\omega_\Gamma}$ on yhtäpitävää sen kanssa, että $\omega_\Gamma \in \{\epsilon \in [0,\infty) \mid \Gamma \leq \Omega_\epsilon\} \cup \{\infty\}$. Tämän lisäksi implikaatio $\Gamma \leq \Omega_\epsilon \implies \omega_\Gamma \leq \epsilon$ on yhtäpitävää sen kanssa, että ω_Γ on tämän joukon alaraja. Siispä

$$\omega_\Gamma = \min(\{\epsilon \in [0,\infty) \mid \Gamma \leq \Omega_\epsilon\} \cup \{\infty\})$$

kaikilla $\Gamma \in \mathbf{Trans_P}$.

Vastaavasta tarkastelusta huomataan, että jos otetaan sublineaarinen projektio ω ja yritetään konstruoida superlineaarinen perhe Ω siten, että $\omega \dashv \Omega$, niin

$$\Omega_\epsilon = \max\{\Gamma \in \mathbf{Trans_P} \mid \omega_\Gamma \leq \epsilon\},$$

missä maksimilla tarkoitetaan alkiota joka kuuluu joukkoon ja on suurempi kuin kaikki muut joukon alkiot. Koska nämä ehdot pätevät aina, niin ensimmäisessä tapauksessa ω määräytyy yksikäsitteisesti ja toisessa tapauksessa Ω määräytyy *isomorfiaa vaille* yksikäsitteisesti. On siis todistettu seuraava seurauslause.

Seuraus 2.19.

i) Olkoon Ω superlineaarinen perhe. On olemassa sublineaarinen projektio ω siten, että $\omega \dashv \Omega$, jos ja vain jos kaikilla $\Gamma \in \mathbf{Trans_P}$ joukolla $\{\epsilon \in [0,\infty) \mid \Gamma \leq \Omega_\epsilon\} \cup \{\infty\}$ on olemassa minimi. Tällöin ω_Γ on kyseisen joukon yksikäsitteinen minimi jokaisella $\Gamma \in \mathbf{Trans_P}$.

ii) Olkoon ω sublineaarinen projektio. On olemassa superlineaarinen perhe Ω siten, että $\omega \dashv \Omega$, jos ja vain jos jokaisella $\epsilon \in [0,\infty)$ joukolla $\{\Gamma \in \mathbf{Trans_P} \mid \omega_\Gamma \leq \epsilon\}$ on olemassa maksimi. Tällöin Ω_ϵ on kyseisen joukon eräs *maksimi jokaisella $\epsilon \in [0,\infty)$.*

Todistus. Yllä. $\square$

2.4 Esimerkki: Zigzag-persistenssimodulit ja lomitusmetriikat

Eräs mielenkiintoisimmista persistenssimodulien tyypeistä on niin sanottu Zigzag-persistenssimoduli. Tällä tarkoitetaan funktoria $\mathbf{ZZ} \to \mathbf{Vec}$, missä $\mathbf{ZZ} = \mathbb{Z}$ varustettuna järjestyksellä, jossa $2k > 2k+1$ ja $2k > 2k-1$ kaikilla $k \in \mathbb{Z}$, eli

$$\cdots > -3 < -2 > -1 < 0 > 1 < 2 > 3 < \cdots$$

Toinen hieman havainnollisempi tapa kuvata $\mathbf{ZZ}$ on esittää se kategoriana

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
\cdots & & \bullet & & \bullet & & \bullet & & \cdots \\
& {} \arrow[ur] & & \bullet \arrow[ul] \arrow[ur] & & \bullet \arrow[ul] \arrow[ur] & & {} \arrow[ul]
\end{tikzcd}$$

missä ylätasolla kulkevat parilliset luvut ja alatasolla parittomat luvut.

Artikkelissa [BL16] näille persistenssimoduleille esitettiin lomitusmetriikan saamiseksi ensin laajentamista **ZZ**-persistenssimodulit $\mathbb{R}^2$-persistenssimoduleiksi käyttäen hyväksi niin sanottua vasemmanpuoleista Kan-laajennusta, jonka jälkeen voidaan etäisyydeksi määritellä $\mathbb{R}^2$-persistenssimodulien tavanomainen lomitusetäisyys. Tarkemmin sanottuna, merkitään funktoria

$$i\colon \mathbf{ZZ} \to \mathbb{R}^2,\ a \mapsto \begin{cases} (k,-k), & \text{jos } a = 2k,\ k \in \mathbb{Z}, \\ (k,-k-1), & \text{jos } a = 2k+1,\ k \in \mathbb{Z}, \end{cases}$$

ja jokainen **ZZ**-persistenssimoduli V laajennetaan $\mathbb{R}^2$-persistenssimoduliksi $E(V)$ asettamalla

$$E(V)_{(x,y)} = \varinjlim_{\substack{a\in\mathbf{ZZ},\\ i(a)\le(x,y)}} V_a.$$

Lineaarikuvaukset $E(V)_{(x,y)} \to E(V)_{(x',y')}$ kaikilla $(x,y) \le (x',y')$ saadaan suoran raja-arvon $\varinjlim$ universaaliominaisuudesta. Lukija jolle suora raja-arvo ei ole tuttu, voi halutessaan lukea lisää esimerkiksi lähteistä [ML98, III.3] ja [Lan02, III.10].

Kuvaus $E\colon \mathbf{Vect}^{\mathbf{ZZ}} \to \mathbf{Vect}^{\mathbb{R}^2}$ on itseasiassa funktori, sillä jos otetaan kaksi **ZZ**-persistenssimodulia U ja V ja näiden välinen morfismi $U \to V$, niin suoran raja-arvon universaaliominaisuus antaa yksikäsitteisen morfismin $E(U) \to E(V)$.

Nyt kun **ZZ**-persistenssimodulit voidaan laajentaa $\mathbb{R}^2$-persistenssimoduleiksi, voidaan määritellä näiden välille lomitusmetriikka d^Ω asettamalla

$$\Omega\colon [0,\infty) \to \mathbf{Trans}_{\mathbb{R}^2},\ \Omega_\epsilon(\mathbf{a}) = \mathbf{a} + \epsilon(1,1).$$

On helppo todeta, että Ω on superlineaarinen perhe, joten d^Ω todella on lomitusmetriikka. Tälle superlineaariselle perheelle saadaan pariksi sublineaarinen projektio

$$\omega\colon \mathbf{Trans}_{\mathbb{R}^2} \to [0,\infty],\ \Gamma \mapsto \max(\mathbf{sup}(\Gamma(\mathbf{a}) - \mathbf{a} \mid \mathbf{a} \in \mathbb{R}^2)),$$

missä **sup** ottaa supremumin koordinaateittain. On helppo nähdä, että $\omega \dashv \Omega$, joten $\mathrm{d}^\Omega = \mathrm{d}^\omega$.

Vielä kuitenkin herää kysymys, että voitaisiinko jonkinlaisia lomitusmetriikoita määrätä **ZZ**-persistenssimoduleille ilman niiden laajentamista $\mathbb{R}^2$-persistenssimoduleiksi. Ensimmäinen ongelma johon törmätään on translaatioiden puuttuminen. Tarkemmin sanottuna ainoa translaatio $\mathbf{ZZ} \to \mathbf{ZZ}$ on identtinen translaatio: Olkoon $\Gamma \in \mathbf{Trans}_{\mathbf{ZZ}}$. Ensinnäkin kaikilla parillisilla $a \in \mathbf{ZZ}$ pätee $\Gamma(a) = a$, sillä $\Gamma(a) \ge a$. Olkoon sitten $a \in \mathbf{ZZ}$ pariton. Nyt

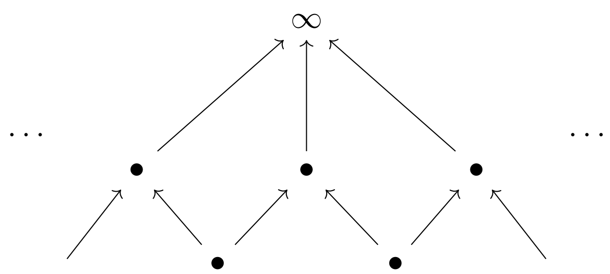
$$\Gamma(a) \in \{a-1, a, a+1\},$$

koska taas $\Gamma(a) \geq a$. Toisaalta $a \leq a-1$, joten $\Gamma(a) \leq \Gamma(a-1) = a-1$ ja vastaavasti $\Gamma(a) \leq a+1$. Ainoa vaihtoehto on siis $\Gamma(a) = a$, joten $\Gamma = I$.

Kategoriaan $\mathbf{ZZ}$ pitää siis lisätä alkioita epätriviaalien translaatioiden saamiseksi. Yksi vaihtoehto on lisätä joukkoon ”äärettömyyspiste” joka on kaikkia muita alkioita suurempi.

Määritelmä 2.20. Laajennetaan kategoriaa $\mathbf{ZZ}$ äärettömyyspisteellä ∞. Merkitään näin saatua kategoriaa $\mathbf{ZZ}^*$. Tämän kategorian objektit ovat siis $\mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ ja morfismit ovat $\mathbb{Z}$ alkioiden välillä samat kuin kategoriassa $\mathbf{ZZ}$, jonka lisäksi jokaiselta $a \in \mathbf{ZZ}^*$ on olemassa yksikäsitteinen morfismi $a \to \infty$.

On helppo nähdä, että $\mathbf{ZZ}^*$ on edelleen osittain järjestetty joukko joten morfismeja voidaan edelleen merkitä myös relaatiolla $\leq$. Jos $\mathbf{ZZ}^*$ esitetään vastaavalla kaaviolla kuin $\mathbf{ZZ}$ yllä, niin saadaan kaavioksi



Nyt saadaan jo epätriviaalejakin translaatioita. Laajennetaan sitten $\mathbf{ZZ}$-persistenssimodulit U $\mathbf{ZZ}^*$-persistenssimoduleiksi asettamalla

$$U_\infty = 0.$$

Tämäkin laajennus on selvästi funktori. Nyt voidaan määrätä lomitusmetriikoita keksimällä superlineaarisia perheitä $\Omega\colon [0,\infty) \to \mathbf{Trans}_{\mathbf{ZZ}^*}$ tai sublineaarisia projektioita $\omega\colon \mathbf{Trans}_{\mathbf{ZZ}^*} \to [0,\infty]$. Annetaan seuraavaksi esimerkki molemmista. Superlineaariseksi perheeksi Ω voidaan valita esimerkiksi

$$\Omega_\epsilon(a) = \begin{cases} \infty, & \text{jos } a \in [-2\lfloor\epsilon\rfloor, 2\lfloor\epsilon\rfloor], \\ a, & \text{muulloin,} \end{cases}$$

missä siis $\lfloor\epsilon\rfloor$ on suurin lukua ϵ pienempi kokonaisluku. On suoraviivaista todeta, että Ω_ϵ todella on translaatio kaikilla $\epsilon \in [0,\infty)$ ja että Ω on superlineaarinen perhe. Lisäksi, koska $\Omega_\epsilon = \Omega_{\lfloor\epsilon\rfloor}$, niin seurauksen 2.19 avulla on helppo todeta, että on olemassa sublineaarinen projektio $\omega\colon \mathbf{Trans}_{\mathbf{ZZ}^*} \to [0,\infty]$ siten, että $\omega \dashv \Omega$.

Jos otetaan $\mathbf{ZZ}$-persistenssimoduli U, niin kaikilla $n \in \mathbb{N}$ saadaan $\mathbf{ZZ}$-persistenssimoduli $U\Omega_n$. Tämä persistenssimoduli on välin $[-2n, 2n]$ ulkopuolella täysin sama persistenssimoduli kuin U, mutta välillä $[-2n, 2n]$ kaikki asetetaan nollaksi.

Unohdetaan sitten edellä mainittu ω ja tarkastellaan hieman erilaista sublineaarista projektiota ω. Määritellään

$$\omega\colon \mathbf{Trans}_{\mathbf{ZZ}^*} \to [0,\infty],\ \omega_\Gamma = \#\{a \in \mathbf{ZZ}^* \mid \Gamma(a) \neq a\},$$

missä # tarkoittaa joukon kokoa. Jos joukko ei ole äärellinen, niin # antaa arvoksi ∞. Tämän on helppo nähdä olevan sublineaarinen projektio, sillä jos $\Gamma\mathrm{K}(a) \neq a$, niin $\Gamma(a) \neq a$ tai $\mathrm{K}(a) \neq a$, joten $\omega_{\Gamma\mathrm{K}} \leq \omega_\Gamma + \omega_\mathrm{K}$, ja tietenkin $\omega_I = 0$. Toisin kuin edellä määritellylle superlineaariselle perheelle, tälle ω ei ole olemassa superlineaarista perhettä Ω siten, että $\omega \dashv \Omega$. Tämä on selvää seurauksen 2.19 avulla, sillä esimerkiksi joukolla $\{\Gamma \mid \omega_\Gamma \leq 1\}$ ei voi olla maksimia. Nimittäin $T, T' \in \{\Gamma \mid \omega_\Gamma \leq 1\}$, missä

$$T(a) = \begin{cases} \infty, & \text{jos } a = 0, \\ a, & \text{muulloin,} \end{cases} \quad T'(a) = \begin{cases} \infty, & \text{jos } a = 2, \\ a, & \text{muulloin,} \end{cases}$$

ja kaikilla translaatioilla $\Gamma \geq T, T'$ pätee $\omega_\Gamma \geq 2$.

Mielenkiintoinen osa translaatioiden joukosta, on kaikkien translaatioiden Γ joukko joilla pätee

$$\Gamma(a) \neq a \Rightarrow \Gamma(a) = \infty,$$

johon myös yllä määritellyt translaatiot Ω_ϵ kuuluvat. Näillä translaatioilla pätee vastaavanlainen ominaisuus kuin translaatioilla Ω_n: kun otetaan $\mathbf{ZZ}$-persistenssimoduli U, niin $U\Gamma$ saadaan persistenssimodulista U asettamalla kaikki joukon $\{a \mid \Gamma(a) \neq a\}$ pisteitä vastaavat vektoriavaruudet nollaksi ja säilyttämällä loput samoina kuin persistenssimodulissa U.

Näillä translaatioilla pätee myös yhtäsuuruus $\Gamma^2 = \Gamma$. Tarkastelemalla kahden persistenssimodulin U ja V välistä Γ-lomitusta huomataankin, että tämä antaa isomorfismin $U\Gamma \cong V\Gamma$. Tämä pätee yleisestikin.

Lause 2.21. *Olkoon* $\mathbf{P}$ *esijärjestetty joukko,* $\mathbf{D}$ *jokin kategoria ja* $U, V \in \mathbf{D}^\mathbf{P}$. *Olkoon* $\Gamma \in \mathbf{Trans}_\mathbf{P}$ *siten, että* $\Gamma^2 = \Gamma$.

i) Olkoon (φ, ψ) $\mathbf{P}$*-persistenssimodulien* U *ja* V *välinen* Γ*-lomitus. Tällöin* $\varphi\Gamma\colon U\Gamma \cong V\Gamma$ *ja* $(\varphi\Gamma)^{-1} = \psi\Gamma$.

ii) Toisaalta jokainen isomorfismi $\varphi'\colon U\Gamma \cong V\Gamma$ *antaa* Γ*-lomituksen*

$$\big(\varphi' U(I \leq \Gamma), (\varphi')^{-1} V(I \leq \Gamma)\big)$$

persistenssimodulien U *ja* V *välille.*

iii) Lisäksi nämä operaatiot ovat toistensa käänteisoperaatiot, eli nämä antavat bijektion

$$\{U \text{ ja } V \text{ väliset } \Gamma\text{-lomitukset}\} \cong \{U\Gamma \text{ ja } V\Gamma \text{ väliset isomorfismit}\}.$$

Todistus. i) Koska (φ, ψ) on Γ-lomitus, niin kaaviot

$$\begin{tikzcd} U \arrow[d, "U(I\leq\Gamma)"'] \arrow[dr, "\varphi"] & \\ U\Gamma & V\Gamma \arrow[l, "\psi\Gamma"] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & V \arrow[dl, "\psi"'] \arrow[d, "V(I\leq\Gamma)"] \\ U\Gamma \arrow[r, "\varphi\Gamma"'] & V\Gamma \end{tikzcd}$$

kommutoivat. Osoitetaan esimerkiksi, että $(\psi\Gamma)(\varphi\Gamma) = \mathrm{id}_{U\Gamma}$. Toinen suunta voidaan osoittaa täysin vastaavasti. Olkoon $a \in \mathbf{P}$. Nyt

$$\begin{aligned} (\psi\Gamma)(\varphi\Gamma)(a) &= \psi(\Gamma a)\varphi(\Gamma a) \\ &= \psi(\Gamma^2 a)\varphi(\Gamma a) \\ &= \big((\psi\Gamma)\varphi\big)(\Gamma a) \\ &= U(\Gamma a \leq \Gamma^2 a) \\ &= U(\Gamma a = \Gamma^2 a) \\ &= \mathrm{id}_{U\Gamma a}\,. \end{aligned}$$

Siispä $(\psi\Gamma)(\varphi\Gamma) = \mathrm{id}_{U\Gamma}$. Näin ollen $\varphi\Gamma\colon U\Gamma \cong V\Gamma$ ja $(\varphi\Gamma)^{-1} = \psi\Gamma$.

ii) Olkoon $\varphi'\colon U\Gamma \cong V\Gamma$ ja merkitään

$$(\varphi, \psi) = \Big(\varphi' U(I \leq \Gamma), (\varphi')^{-1} V(I \leq \Gamma)\Big).$$

Nyt pitäisi osoittaa, että $(\psi\Gamma)\varphi = U(I \leq \Gamma)$ ja $(\varphi\Gamma)\psi = V(I \leq \Gamma)$. Osoitetaan jälkimmäinen, ensimmäinen voidaan osoittaa vastaavasti. Huomataan ensin, että

$$\varphi\Gamma = (\varphi'\Gamma)U(\Gamma \leq \Gamma^2) = (\varphi'\Gamma)U(\Gamma = \Gamma^2) = \varphi'\Gamma = \varphi',$$

missä viimeinen yhtäsuuruus nähdään kaaviosta

$$\begin{tikzcd} U\Gamma_a = U_{\Gamma a} \arrow[r, "\varphi'(a)"] \arrow[d, equal, "(U\Gamma)(a\leq\Gamma a)=\mathrm{id}_{U\Gamma a}"'] & V\Gamma_a = V_{\Gamma a} \arrow[d, equal, "(V\Gamma)(a\leq\Gamma a)=\mathrm{id}_{V\Gamma a}"] \\ U\Gamma_{\Gamma a} = U_{\Gamma a} \arrow[r, "\varphi'(\Gamma a)"'] & V\Gamma_{\Gamma a} = V_{\Gamma a} \end{tikzcd}$$

joka kommutoi kaikilla $a \in \mathbf{P}$, koska φ' on luonnollinen muunnos. Näin ollen $(\varphi\Gamma)\psi = \varphi'(\varphi')^{-1}V(I \leq \Gamma) = V(I \leq \Gamma)$. Siispä (φ, ψ) on Γ-lomitus.

iii) Otetaan ensin Γ-lomitus (φ, ψ) persistenssimodulien U ja V välillä ja osoitetaan, että sen kuvaaminen isomorfismiksi ja takaisin lomitukseksi antaa saman lomituksen. Pitäisi siis osoittaa, että

$$\varphi = (\varphi\Gamma)U(I \leq \Gamma) \text{ ja } \psi = (\varphi\Gamma)^{-1}V(I \leq \Gamma).$$

Tämä nähdään heti sijoittamalla $U(I \leq \Gamma) = (\psi\Gamma)\varphi$ ja $V(I \leq \Gamma) = (\varphi\Gamma)\psi$ ja käyttämällä tietoa $(\varphi\Gamma)^{-1} = \psi\Gamma$.

Otetaan sitten isomorfismi $\varphi' \colon U\Gamma \cong V\Gamma$. Nyt pitäisi osoittaa, että $\varphi' = (\varphi' U(I \leq \Gamma))\Gamma$, mutta tämähän osoitettiin jo edellisessä kohdassa.

□

3 Persistenssimodulien vertaaminen

Tässä luvussa tarkastellaan aliluvun 2.2 lopussa esitettyä ajatusta superlineaarisen perheen ja sublineaarisen projektion yleistämisestä monoidaalisiksi lax- ja oplax-funktoreiksi. Aivan ensiksi kuitenkin esitellään tähän tarvittavaa kategoriateoriaa. Kategoriateorian päälähteenä on käytetty kirjaa [ML98].

3.1 Liittofunktorit

Kategoriateorian eräs hyödyllisimmistä käsitteistä on liittofunktorien käsite. Tämän tutkielman kannalta liittofunktorit ovat oleellisia, sillä liittorelaatio (määritelmä 2.16) on lähes täysin sama kuin kahden funktorin liiton määritelmä. Liittofunktorien määritelmä antaakin keinon yleistää liittorelaatio, kun yleistetään superlineaariset perheet ja sublineaariset projektiot. Tämä aliluku seuraa suurelta osin kirjan [ML98] lukua IV.1.

Määritelmä 3.1. Olkoot $F \colon \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ ja $G \colon \mathbf{D} \to \mathbf{C}$ funktoreita. Jos on olemassa luonnollinen perhe bijektioita

$$\varphi = \Big(\varphi_{x,a} \colon \mathrm{Hom}_{\mathbf{D}}(Fx, a) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(x, Ga)\Big)_{x \in \mathbf{C}, a \in \mathbf{D}}$$

niin sanotaan että F ja G ovat *pari liittofunktoreita.* Sanotaan myös, että F on funktorin G *vasen liitännäinen* ja G on funktorin F *oikea liitännäinen.* Kolmikkoa (F, G, φ) kutsutaan funktorien F ja G *liitoksi.* Perheen φ luonnollisuus tarkoittaa sitä, että kaikilla kategorian $\mathbf{C}$ nuolilla $f \colon x' \to x$ ja kategorian $\mathbf{D}$ nuolilla $h \colon a \to a'$ kaaviot

(3.1.1)
$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_{\mathbf{D}}(Fx, a) & \xrightarrow{\varphi} & \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(x, Ga) \\ \big\downarrow{\scriptstyle (Ff)^*} & & \big\downarrow{\scriptstyle f^*} \\ \mathrm{Hom}_{\mathbf{D}}(Fx', a) & \xrightarrow{\varphi} & \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(x', Ga) \end{array}$$

(3.1.2)
$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_{\mathbf{D}}(Fx, a) & \xrightarrow{\varphi} & \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(x, Ga) \\ \big\downarrow{\scriptstyle h_*} & & \big\downarrow{\scriptstyle (Gh)_*} \\ \mathrm{Hom}_{\mathbf{D}}(Fx, a') & \xrightarrow{\varphi} & \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(x, Ga') \end{array}$$

kommutoivat. Kaavioissa merkintä f^* tarkoittaa kuvausta $g \mapsto gf$ ja h_* tarkoittaa kuvausta $g \mapsto hg$.

Bijektiot $\varphi_{x,a}$ määräytyvät itseasiassa täysin nuolien $1_{Fx} \colon Fx \to Fx$ kuvien perusteella. Tämä on seurausta siitä, että nuolien 1_{Fx} kuvat määräävät luonnollisen muunnoksen $\eta = (\varphi(1_{Fx}))_{x \in \mathbf{C}} \colon I \Rightarrow GF$ siten, että $\eta_x \colon x \to GFx$ on *universaalinen nuoli* alkiolta x funktorille G jokaisella $x \in \mathbf{D}$.

Määritelmä 3.2 (Universaalinen nuoli)**.** Olkoon $G \colon \mathbf{D} \to \mathbf{C}$ funktori ja $x \in \mathbf{C}$. *Universaalinen nuoli alkiolta x funktorille G* on pari (f, a), missä $a \in \mathbf{D}$ ja f on nuoli $f \colon x \to Ga$ siten, että kaikilla alkioilla $b \in \mathbf{D}$ nuolen

$$g \colon x \to Gb$$

olemassaolosta seuraa, että on olemassa yksikäsitteinen nuoli $h \colon a \to b$ siten, että kaavio

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g"'] & Ga \arrow[d, "Gh"] \\ & Gb \end{tikzcd}$$

kommutoi. Kääntämällä kaikkien määritelmän nuolien suunta saadaan määritelmä *universaaliselle nuolelle funktorilta G alkiolle x.*

Todistetaan sitten, että $\eta_x = \varphi(1_{Fx}) \colon x \to GFx$ todella on universaalinen nuoli alkiolta x funktorille G. Olkoon siis $g \colon x \to Gb$ jollakin $b \in \mathbf{D}$. Merkitään $g' = \varphi^{-1}(g) \colon Fx \to b$. Kaavion 3.1.2 mukaan

$$g = \varphi(g') = \varphi(g' \circ 1_{Fx}) = Gg' \circ \varphi(1_{Fx}) = Gg' \circ \eta_x,$$

eli kaaviona esitettynä

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "\eta_x"] \arrow[dr, "g"'] & GFx \arrow[d, "Gg'"] \\ & Gb \end{tikzcd}$$

Vielä pitäisi osoittaa nuolen g' yksikäsitteisyys. Jos $g'' \colon Fx \to b$ on nuoli jolla $Gg'' \circ \eta_x = g$, niin vastaavasti kuin yllä saadaan kaavion 3.1.2 nojalla

$$\varphi(g'') = Gg'' \circ \eta_x = g,$$

joten φ bijektiivisyyden mukaan $g'' = g'$. Siispä η_x on universaalinen nuoli. Lisäksi, kuten yllä jo todettiin, bijektiot $\varphi_{x,a}$ määräytyvät täysin nuolien 1_{Fx} kuvien mukaan seuraavalla tavalla: olkoon $f \colon Fx \to a$. Tällöin

$$\varphi(f) = Gf \circ \eta_x. \tag{3.2.1}$$

Perhe η on myös luonnollinen muunnos. Tämä on helppo nähdä, sillä jos otetaan nuoli $h\colon x' \to x$, niin tällä kertaa käyttäen ensin kaaviota 3.1.2 ja perään kaaviota 3.1.1 saadaan

$$GFh \circ \eta_{x'} = GFh \circ \varphi(1_{Fx'}) = \varphi(Fh \circ 1_{Fx'}) = \varphi(1_{Fx} \circ Fh) = \varphi(1_{Fx}) \circ h = \eta_x \circ h,$$

joka tarkoittaa kaaviona ilmaistuna kaavion

$$\begin{tikzcd} x' \arrow[r, "\eta_{x'}"] \arrow[d, "h"'] & GFx' \arrow[d, "GFh"] \\ x \arrow[r, "\eta_x"] & GFx \end{tikzcd}$$

kommutointia. Siispä η on luonnollinen muunnos $I \Rightarrow GF$ siten, että η_x on universaalinen nuoli jokaisella $x \in \mathbf{C}$.

Aivan vastaavasti voidaan todistaa, että $\epsilon = (\varphi^{-1}(1_{Ga}))_{a \in \mathbf{D}}$ määrää luonnollisen muunnoksen $FG \Rightarrow I$ siten, että $\epsilon_a\colon FGa \to a$ on universaalinen nuoli jokaisella $a \in \mathbf{D}$. Lisäksi

$$\varphi^{-1}(g) = \epsilon_a \circ Fg \tag{3.2.2}$$

kaikilla kategorian $\mathbf{C}$ nuolilla $g\colon x \to Ga$, sillä kaavion 3.1.1 mukaan

$$\varphi(\epsilon_a \circ Fg) = \varphi(\epsilon_a) \circ g = g = \varphi(\varphi^{-1}(g))$$

joten φ bijektiivisyyden nojalla $\varphi^{-1}(g) = \epsilon_a \circ Fg$.

Huomataan vielä lopuksi, että yhdistelemällä näitä kahta luonnollista muunnosta ja funktoreita F ja G saadaan kommutoivat kaaviot

$$\begin{tikzcd} G \arrow[rr, Rightarrow, "\mathrm{id}"] \arrow[dr, Rightarrow, "\eta G"'] & & G \\ & GFG \arrow[ur, Rightarrow, "G\epsilon"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} F \arrow[rr, Rightarrow, "\mathrm{id}"] \arrow[dr, Rightarrow, "F\eta"'] & & F \\ & FGF \arrow[ur, Rightarrow, "\epsilon F"'] & \end{tikzcd}$$

Vasemmanpuoleisen kaavion kommutointi saadaan yhtälöstä

$$1_{Ga} = \varphi(\epsilon_a) = G\epsilon_a \circ \eta_{Ga}$$

ja oikeanpuoleisen yhtälöstä

$$1_{Fx} = \varphi^{-1}(\eta_x) = \epsilon_{Fx} \circ F\eta_x.$$

Kootaan yllä todistetut huomiot seuraavaksi lauseeksi.

Lause 3.3 (vrt. [ML98, lause IV.1.1])**.** *Funktorien liitto määrää luonnolliset muunnokset*

$$\eta\colon I \Rightarrow GF \text{ ja } \epsilon\colon FG \Rightarrow I$$

siten, että kaikilla $x \in \mathbf{C}$ ja $a \in \mathbf{D}$ nuoli $\eta_x \colon x \to GFx$ on universaalinen nuoli alkiolta x funktorille G ja nuoli $\epsilon_a \colon FGa \to a$ on universaalinen nuoli funktorilta F alkiolle a. Lisäksi kaaviot

$$
\begin{tikzcd}
G \arrow[rr, Rightarrow, "\mathrm{id}"] \arrow[dr, Rightarrow, "\eta G"'] & & G \\
& GFG \arrow[ur, Rightarrow, "G\epsilon"'] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
F \arrow[rr, Rightarrow, "\mathrm{id}"] \arrow[dr, Rightarrow, "F\eta"'] & & F \\
& FGF \arrow[ur, Rightarrow, "\epsilon F"'] &
\end{tikzcd}
$$

kommutoivat.

Todistus. Yllä. □

Funktorien liiton määräämää luonnollista muunnosta $\eta \colon I \Rightarrow GF$ kutsutaan liiton *yksiköksi* ja muunnosta $\epsilon \colon FG \Rightarrow I$ kutsutaan *koyksiköksi*. Funktorien liitto voidaan määrätä myös yksiköstä tai koyksiköstä tietämättä bijektioista φ mitään. Seuraava lause, joka jätetään todistamatta, kokoaa muutaman tapauksen tästä.

Lause 3.4. *Funktorien liitto määräytyy täysin seuraavan listan minkä hyvänsä kohdan informaation perusteella:*

i) Funktorit F ja G sekä luonnollinen muunnos $\eta \colon I \Rightarrow GF$ siten, että jokaisella $x \in \mathbf{C}$ nuoli η_x on universaalinen nuoli alkiolta x funktorille G.

ii) Funktori $G \colon \mathbf{D} \to \mathbf{C}$, funktio $F \colon \mathbf{C} \to \mathbf{D}$, ja jokaisella $x \in \mathbf{C}$ universaalinen nuoli $\eta_x \colon x \to GFx$ alkiolta x funktorille G.

iii) Funktorit F ja G sekä luonnollinen muunnos $\epsilon \colon FG \Rightarrow I$ siten, että jokaisella $a \in \mathbf{D}$ nuoli ϵ_a on universaalinen nuoli funktorilta F alkiolle a.

iv) Funktori $F \colon \mathbf{C} \to \mathbf{D}$, funktio $G \colon \mathbf{D} \to \mathbf{C}$, ja jokaisella $a \in \mathbf{D}$ universaalinen nuoli $\epsilon_A \colon FGa \to a$ funktorilta F alkiolle a.

v) Funktorit F ja G ja luonnolliset muunnokset $\eta \colon I \Rightarrow GF$ ja $\epsilon \colon FG \Rightarrow I$ siten, että kaaviot

$$
\begin{tikzcd}
G \arrow[rr, Rightarrow, "\mathrm{id}"] \arrow[dr, Rightarrow, "\eta G"'] & & G \\
& GFG \arrow[ur, Rightarrow, "G\epsilon"'] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
F \arrow[rr, Rightarrow, "\mathrm{id}"] \arrow[dr, Rightarrow, "F\eta"'] & & F \\
& FGF \arrow[ur, Rightarrow, "\epsilon F"'] &
\end{tikzcd}
$$

kommutoivat.

Jokaisessa tapauksessa φ ja φ^{-1} määräytyvät yhtälöiden 3.2.1 ja 3.2.2 mukaan.

Todistus. Katso [ML98, lause IV.1.2]. □

Esimerkki 3.5. Tarkastellaan seuraavaksi muutamaa klassista esimerkkiä funktorien liitosta. Otetaan aluksi tarkasteluun *unohdusfunktori* $U \colon \mathbf{Ab} \to \mathbf{Set}$, joka on siis funktori Abelin ryhmien kategorialta joukkojen kategoriaan, joka kuvaa Abelin ryhmän alkioidensa joukolle ja morfismit identtisesti. Tämän funktorin vasen liitännäinen on funktori $F \colon \mathbf{Set} \to \mathbf{Ab}$, joka kuvaa joukon X vapaalle Abelin ryhmälle FX. Todistetaan, että nämä todella ovat liittofunktoreita käyttäen hyväksi edellisen lauseen 3.4 kohtaa ii. Pitäisi siis määrätä jokaisella joukolla X universaalinen nuoli

$$\eta_X \colon X \to UFX = \{\sum_{i \in I} a_i x_i \mid I \text{ äärellinen, } a_i \in \mathbb{Z} \text{ ja } x_i \in X \text{ kaikilla } i \in I\}.$$

Tämä nuoli on tietenkin kuvaus

$$\eta_X \colon X \to UFX,\ x \mapsto x.$$

Universaaliuden todistamiseksi, olkoon A Abelin ryhmä ja $f \colon X \to UA$ jokin kuvaus. Abelin ryhmän FX vapauden perusteella on olemassa yksikäsitteinen morfismi $g \colon FX \to A$ siten, että kaavio

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\eta_X"] \arrow[dr, "f"'] & UFX \arrow[d, "Ug=g"] \\ & UA \end{tikzcd}$$

kommutoi. Siispä η_X on universaalinen.

Tässä esimerkissä kategorian $\mathbf{Ab}$ voisi suoraan korvata vektoriavaruuksien kategorialla $\mathbf{Vect}$ tai yleisemmin R-moduleiden kategorialla R-$\mathbf{Mod}$. Täysin vastaava todistus osoittaisi, että unohdusfunktorin U vasen liitännäinen on funktori, joka kuvaa joukon X vastaavalle vektoriavaruudelle tai vapaalle R-modulille FX. Molemmissa tapauksissa liiton yksikkö on myös luonnollinen muunnos η siten, että

$$\eta_X \colon X \to UFX,\ x \mapsto x$$

jokaisella joukolla X.

Esimerkki 3.6. Olkoon R kommutatiivinen rengas ja otetaan tarkasteluun unohdusfunktori $U \colon R\text{-}\mathbf{Mod} \to \mathbf{Ab}$, joka kuvaa R-modulin samaksi Abelin ryhmäksi. Tämän funktorin vasen liitännäinen on funktori

$$F \colon \mathbf{Ab} \to R\text{-}\mathbf{Mod}, A \mapsto R \otimes A.$$

Abelin ryhmä $R \otimes A$ on siis Abelin ryhmien tensoritulo, joka voidaan tulkita R-moduliksi siten, että $r\Big(\sum_i (x_i \otimes a_i)\Big) = \sum_i (r x_i \otimes a_i)$. Käytetään taas hyväksi lauseen 3.4 kohtaa ii, eli määrätään universaaliset nuolet $\eta_A \colon A \to U(R \otimes A)$. Nämä nuolet ovat tietenkin

$$\eta_A \colon A \to U(R \otimes A), \;\; a \mapsto 1 \otimes a.$$

Jos B on jokin R-moduli ja $f \colon A \to UB$ on homomorfismi, niin voidaan määrätä R-modulihomomorfismi $g \colon R \otimes A \to B$ asettamalla $r \otimes a \mapsto rf(a)$ kaikilla $r \in R$ ja $a \in A$. Tällöin kaavio

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[dr, "f"'] & U(R \otimes A) \arrow[d, "Ug=g"] \\
& UB
\end{tikzcd}$$

kommutoi. Jos otetaan jokin R-modulihomomorfismi $g' \colon R \otimes A \to B$ siten, että kaavio kommutoi, niin kaikilla $r \in R$ ja $a \in A$ pätee

$$g'(r \otimes a) = rg'(1 \otimes a) = rf(a) = g(r \otimes a),$$

joten $g' = g$. Siispä g on yksikäsitteinen, joten η_A on universaalinen jokaisella Abelin ryhmällä A.

Tämän tutkielman kannalta tärkein tapaus liittofunktoreista on kahden esijärjestetyn joukon väliset liittofunktorit. Kuten seuraava lause osoittaa, kahden esijäerjestetyn joukon välinen pari liittofunktoreita on täsmälleen *Galois'n yhteys (engl. Galois connection).*

Lause 3.7. *Olkoot* $\mathbf{P}$ *ja* $\mathbf{Q}$ *esijärjestettyjä joukkoja ja tulkitaan ne kategorioiksi. Olkoot lisäksi* $F \colon \mathbf{P} \to \mathbf{Q}$ *ja* $G \colon \mathbf{Q} \to \mathbf{P}$ *funktoreita. Tällöin* F *ja* G *ovat pari liittofunktoreita, jos ja vain jos kaikilla* $a \in \mathbf{P}$ *ja* $b \in \mathbf{Q}$ *pätee*

$$F(a) \leq b \iff a \leq G(b).$$

Todistus. Todetaan aluksi, että koska $\mathbf{P}$ ja $\mathbf{Q}$ ovat esijärjestettyjä joukkoja, niin kaikilla $a \in \mathbf{P}$ ja $b \in \mathbf{Q}$ bijektion

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Q}}(F(a), b) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{P}}(a, G(b))$$

olemassaolo on yhtäpitävää ekvivalenssin

$$F(a) \leq b \iff a \leq G(b)$$

kanssa. Lisäksi kaikki kaaviot 3.1.1 ja 3.1.2 kommutoivat, kunhan bijektiot $\varphi_{a,b} \colon \mathrm{Hom}_{\mathbf{Q}}(F(a), b) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{P}}(a, G(b))$ ovat olemassa kaikilla $a \in \mathbf{P}$ ja $b \in \mathbf{Q}$, sillä molemmat kategoriat ovat ohuita (ks. esimerkki 1.5).

Siispä on olemassa liitto (F, G, φ), jos ja vain jos bijektiot $\varphi_{a,b}$ ovat olemassa kaikilla $a \in \mathbf{P}$ ja $b \in \mathbf{Q}$, jos ja vain jos

$$F(a) \leq b \iff a \leq G(b)$$

kaikilla $a \in \mathbf{P}$ ja $b \in \mathbf{Q}$. $\square$

Jos asetetaan $F = \omega$, $G = \Omega$, $a = \Gamma$ ja $b = \epsilon$, niin ekvivalenssi

$$F(a) \leq b \iff a \leq G(b)$$

saadaan muotoon

$$\omega_\Gamma \leq \epsilon \iff \Gamma \leq \Omega_\epsilon,$$

joka on sama ekvivalenssi kuin sublineaarisen projektion ja superlineaarisen perheen välisen liittorelaation määritelmässä 2.16. Siispä liittorelaatio sublineaarisen projektion ω välillä ja superlineaarisen perheen Ω on lähes sama, kuin liitto kahden funktorin välillä. Ainoa ero onkin siinä, että funktorin Ω lähtökategoria ja funktorin ω maalikategoria eivät ole samat, sillä translaatiota Ω_∞ ei välttämättä pystytä määräämään siten, että liittorelaatio edelleen pätisi. Tämä voidaan tehdä täsmälleen silloin, kun on olemassa translaatio, joka on kaikkia muita translaatioita suurempi, eli on niin sanottu terminaalinen alkio.

Tämä tilanne voitaisiin korjata lisäämällä kategoriaan $\mathbf{Trans_P}$ uusi alkio, joka on kaikkia muita suurempi. Kuitenkin jos korvataan välit $[0, \infty)$ ja $[0, \infty]$ esimerkiksi näiden potensseilla $[0, \infty)^n$ ja $[0, \infty]^n$, niin sub- ja superlineaarisuus sekä liittorelaatio voidaan edelleen määritellä aivan vastaavasti kuin aiemminkin, mutta enää ei riitäkään lisätä vain yhtä alkiota kategoriaan $\mathbf{Trans_P}$, vaan tilanne on paljon monimutkaisempi. Siispä tyydytään liittorelaatioon joka ei aivan täysin vastaa funktorien liittoa.

3.2 Monoidaalinen kategoria

Kuten jo aliluvun 2.2 lopussa todettiin, superlineaarinen perhe on lax monoidaalinen funktori ja sublineaarinen projektio on oplax monoidaalinen funktori. Tässä aliluvussa määritellään, mitä tämä tarkoittaa. Määritelmät ovat pääosin kirjan [ML98] luvuista VII ja XI.

Ennen monoidaalisten kategorioiden ja monoidaalisten funktorien määrittelemistä, esitellään muutama tarpeellinen määritelmä.

Määritelmä 3.8. Olkoon $\mathbf{C}$ kategoria. Olkoon lisäksi $\mathbf{D}$ kokoelma kategorian $\mathbf{C}$ objekteja ja kaikilla $a, b \in \mathbf{D}$ joukko $\mathrm{Hom}_{\mathbf{D}}(a, b) \subseteq \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(a, b)$. Jos $1_a \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{D}}(a, a)$ kaikilla $a \in \mathbf{D}$ ja kaikilla $a, b, c \in \mathbf{D}$ pätee

$$f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{D}}(a, b) \text{ ja } g \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{D}}(b, c) \implies gf \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{D}}(a, c),$$

missä $gf = g \circ f$ on kategorian $\mathbf{C}$ morfismien yhdistäminen, niin sanotaan, että $\mathbf{D}$ on kategorian $\mathbf{C}$ *alikategoria.*

Toisin sanottuna, kategorian $\mathbf{C}$ alikategoria $\mathbf{D}$ koostuu osasta kategorian $\mathbf{C}$ objekteja ja nuolia siten, että $\mathbf{D}$ on kategoria saman morfismien komposition suhteen kuin kategoria $\mathbf{C}$. Alikategoria on siis aina myös kategoria.

Määritelmä 3.9. Olkoot $\mathbf{C}$ ja $\mathbf{D}$ kategorioita. Määritellään näiden *tuloksi* kategoria $\mathbf{C} \times \mathbf{D}$, jonka objektien luokka on $\mathrm{Obj}(\mathbf{C} \times \mathbf{D}) = \mathrm{Obj}\,\mathbf{C} \times \mathrm{Obj}\,\mathbf{D}$ ja kaikilla $(a, b), (a', b') \in \mathrm{Obj}(\mathbf{C} \times \mathbf{D})$ morfismien joukko on

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}\times\mathbf{D}}((a, b), (a', b')) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(a, a') \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{D}}(b, b').$$

Morfismien yhdistäminen tapahtuu komponenteittain, eli jos otetaan kategorian $\mathbf{C}$ nuolet $a \xrightarrow{f} a' \xrightarrow{f'} a''$ ja kategorian $\mathbf{D}$ nuolet $b \xrightarrow{g} b' \xrightarrow{g'} b''$, niin nuolien (f', g') ja (f, g) kompositio on $(f', g')(f, g) = (f'f, g'g)$. Lisäksi funktorien $F\colon \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ ja $G\colon \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ tuloksi määritellään funktori

$$F \times G\colon \mathbf{C} \times \mathbf{X} \to \mathbf{D} \times \mathbf{Y},\ (a, b) \mapsto (Fa, Gb),\ (f, g) \mapsto (Ff, Gg).$$

Kategorioille voidaan aivan vastaavalla tavalla määritellä useammankin tekijän tuloja. Toinen vaihtoehto olisi määritellä useamman tekijän tuloja ketjuttamalla kahden kategorian tulon määritelmää, mutta oletetaan jatkossa, että usean tekijän tulot määritellään vastaavasti kuin yllä. Esimerkiksi siis kategorioiden $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ ja $\mathbf{D}$ tulon $\mathbf{B} \times \mathbf{C} \times \mathbf{D}$ objektit ovat muotoa (b, c, d) ja nuolet ovat muotoa (f, g, h).

Esimerkki 3.10. Olkoot $\mathbf{C}$, $\mathbf{D}$ ja $\mathbf{X}$ kategorioita. Funktoreita $\mathbf{C} \times \mathbf{D} \to \mathbf{X}$ kutsutaan *bifunktoreiksi*. Ensimmäinen esimerkki bifunktorista on joukkojen tulo, joka on siis funktori $\mathbf{Set}\times\mathbf{Set} \to \mathbf{Set}$, joka kuvaa joukot $(A, B) \mapsto A\times B$ ja kuvaukset $(f, g) \mapsto f \times g$. Toinen tärkeä esimerkki bifunktorista on Abelin ryhmien tensoritulo. Tensoritulo $\otimes$ on siis funktori $\mathbf{Ab} \times \mathbf{Ab} \to \mathbf{Ab}$, joka kuvaa objektit $(A, B) \to A \otimes B$ ja morfismit $(f, g) \to f \otimes g$. Vastaavasti R-modulien tai F-vektoriavaruuksien tensoritulo on bifunktori.

Tämän tutkielman kannalta erityisen oleellinen esimerkki bifunktorista on $+\colon [0, \infty) \times [0, \infty) \to [0, \infty)$, $(a, b) \mapsto a + b$. Itseasiassa jos $\mathbf{P}$ on mikä hyvänsä esijärjestetty joukko, niin bifunktori $F\colon \mathbf{P} \times \mathbf{P} \to \mathbf{P}$ on täsmälleen kuvaus siten, että kaikilla $a \le c, b \le d \in \mathbf{P}$ pätee $F(a, b) \le F(c, d)$. Tämä riittää, koska kategoria $\mathbf{P}$ on ohut.

Määritelmä 3.11 (Monoidaalinen kategoria)**.** *Monoidaalinen kategoria* on kategoria $\mathbf{M}$ varustettuna

– bifunktorilla

$$\Box\colon \mathbf{M} \times \mathbf{M} \to \mathbf{M},$$

– perheellä luonnollisia isomorfismeja

$$\alpha_{a,b,c}\colon a \,\Box (b \,\Box\, c) \cong (a \,\Box\, b) \,\Box\, c,$$

– neutraalialkiolla $e \in \mathbf{M}$ ja perheillä luonnollisia isomorfismeja

$$\lambda_a\colon e \,\Box\, a \cong a,\ \rho_a\colon a \,\Box\, e \cong a,$$

siten, että $\lambda_e = \rho_e \colon e \,\square\, e \to e$ ja kaikki kaaviot

$$\begin{tikzcd}
a \,\square (b \,\square (c \,\square\, d)) \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "1 \,\square\, \alpha"'] & (a \,\square\, b) \,\square (c \,\square\, d) \arrow[r, "\alpha"] & ((a \,\square\, b) \,\square\, c) \,\square\, d \arrow[d, "\alpha \,\square\, 1"] \\
a \,\square ((b \,\square\, c) \,\square\, d) \arrow[rr, "\alpha"] & & (a \,\square (b \,\square\, c)) \,\square\, d
\end{tikzcd}$$

ja

$$\begin{tikzcd}
a \,\square (e \,\square\, b) \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[dr, "1 \,\square\, \lambda"'] & & (a \,\square\, e) \,\square\, b \arrow[dl, "\rho \,\square\, 1"] \\
& a \,\square\, b &
\end{tikzcd}$$

kommutoivat. Bifunktoria $\square$ kutsutaan *tuloksi* tai *tensorituloksi* ja sitä merkitään myös vaihtoehtoisilla merkinnöillä $a \,\square\, b = a \otimes b = ab$.

Määritelmässä perheellä luonnollisia isomorfismeja tarkoitetaan vastaavien funktorien välistä isomorfismia. Funktorien välinen isomorfismi tarkoittaa siis kääntyvää luonnollista muunnosta, joka on yhtäpitävää sen kanssa, että luonnollisen muunnoksen jokainen morfismi on isomorfismi. Esimerkiksi perheellä luonnollisia isomorfismeja

$$\alpha_{a,b,c} \colon a \,\square (b \,\square\, c) \cong (a \,\square\, b) \,\square\, c$$

tarkoitetaan funktorien

$$- \,\square (- \,\square\, -) \colon \mathbf{M} \times \mathbf{M} \times \mathbf{M} \to \mathbf{M}, \;\; (a, b, c) \mapsto a \,\square (b \,\square\, c),$$

ja

$$(- \,\square\, -) \,\square\, - \colon \mathbf{M} \times \mathbf{M} \times \mathbf{M} \to \mathbf{M}, \;\; (a, b, c) \mapsto (a \,\square\, b) \,\square\, c,$$

välistä isomorfismia, missä funktoreilla $- \,\square (- \,\square\, -)$ ja $(- \,\square\, -) \,\square\, -$ tarkoitetaan yhdistettyjä funktoreita

$$\mathbf{M} \times \mathbf{M} \times \mathbf{M} \xrightarrow{\mathrm{id} \times \square} \mathbf{M} \times \mathbf{M} \xrightarrow{\square} \mathbf{M}$$

ja

$$\mathbf{M} \times \mathbf{M} \times \mathbf{M} \xrightarrow{\square \times \mathrm{id}} \mathbf{M} \times \mathbf{M} \xrightarrow{\square} \mathbf{M}.$$

Esimerkki 3.12. Esimerkissä 3.10 mainitut kolme bifunktoria $\times$, $\otimes$ ja $+$ ovat monoidaalisten kategorioiden tuloja:

– Kategoria **Set** on monoidaalinen kategoria, kun tuloksi $\square$ valitaan joukkojen tulo $\times$. Perheen α kuvaukset ovat joukkojen luonnolliset isomorfismit $X \times (Y \times Z) = (X \times Y) \times Z$, jotka yleensä tulkitaan yhtäsuuruuksiksi. Neutraalialkio on mikä tahansa kiinnitetty yksiö.

– Kategoriat **Ab**, R-**Mod** ja $\mathbf{Vect}_{\mathbb{F}}$ ovat monoidaalisia kategorioita, kun tuloksi $\square$ valitaan tensoritulo $\otimes$. Neutraalialkiot ovat $\mathbb{Z}$, R ja $\mathbb{F}$.

– Esijärjestetyt joukot $[0,\infty)^n$ ja $[0,\infty]^n$ ovat monoidaalisia kategorioita, kun valitaan tuloksi komponenteittainen summa ja neutraalialkioksi $(0,\dots,0)$. Myöskin $\mathbf{Trans}_{\mathbf{P}}$ on monoidaalinen kategoria, kun valitaan tuloksi translaatioiden kompositio ja neutraalialkioksi identtinen translaatio I.

Määritelmä 3.13 (Symmetrinen monoidaalinen kategoria)**.** *Symmetrinen monoidaalinen kategoria* on monoidaalinen kategoria $\mathbf{M}$ varustettuna perheellä luonnollisia isomorfismeja

$$\gamma_{a,b}\colon a\,\square\, b \cong b\,\square\, a,$$

siten, että $\gamma_{b,a}\gamma_{a,b} = 1$ kaikilla $a,b\in\mathbf{M}$, $\rho_a = \lambda_a\gamma_{a,e}$ kaikilla $a\in\mathbf{M}$ ja kaikki kaaviot

$$\begin{tikzcd}
a\,\square(b\,\square\, c) \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "1\,\square\,\gamma"] & (a\,\square\, b)\,\square\, c \arrow[r, "\gamma"] & c\,\square(a\,\square\, b) \arrow[d, "\alpha"] \\
a\,\square(c\,\square\, b) \arrow[r, "\alpha"] & (a\,\square\, c)\,\square\, b \arrow[r, "\gamma\,\square\,1"] & (c\,\square\, a)\,\square\, b
\end{tikzcd}$$

kommutoivat.

Yhtäsuuruudet $\gamma_{b,a}\gamma_{a,b} = 1$ ja $\rho_a = \lambda_a\gamma_{a,e}$ tarkoittavat kaavioiden

$$\begin{tikzcd}
a\,\square\, b \arrow[rr, "1"] \arrow[dr, "\gamma_{a,b}"'] & & a\,\square\, b \\
& b\,\square\, a \arrow[ur, "\gamma_{b,a}"'] &
\end{tikzcd}$$

ja

$$\begin{tikzcd}
a\,\square\, e \arrow[rr, "\gamma_{a,e}"] \arrow[dr, "\rho_a"'] & & e\,\square\, a \arrow[dl, "\lambda_a"] \\
& a &
\end{tikzcd}$$

kommutoimista.

Esimerkki 3.14. Esimerkin 3.12 kategoriat, poislukien kategoria $\mathbf{Trans}_{\mathbf{P}}$ ovat symmetrisiä monoidaalisia kategorioita. Jos esimerkiksi valitaan $\mathbf{P} = \{0,1,2\}\subset\mathbb{Z}$, niin $\mathbf{Trans}_{\mathbf{P}}$ ei ole symmetrinen, sillä translaatioilla $T,P\in\mathbf{Trans}_{\mathbf{P}}$,

$$T(x) = \begin{cases} 0, & \text{kun } x = 0,\\ 2, & \text{kun } x = 1,\\ 2, & \text{kun } x = 2,\end{cases}\qquad P(x) = \begin{cases} 1, & \text{kun } x = 0,\\ 2, & \text{kun } x = 1,\\ 2, & \text{kun } x = 2,\end{cases}$$

pätee $TP(0) = 2 \neq 1 = PT(0)$, jolloin $TP\neq PT$.

Määritelmä 3.15. Olkoon $\mathbf{M}$ monoidaalinen kategoria ja $\mathbf{N}$ sen alikategoria. Sanotaan, että $\mathbf{N}$ on monoidaalisen kategorian $\mathbf{M}$ *monoidaalinen alikategoria*, mikäli

– $e \in \mathbf{N}$,

– kaikilla $a, b \in \mathbf{N}$, myös $a \,\square\, b \in \mathbf{N}$,

– kaikilla alikategorian $\mathbf{N}$ nuolilla f, g, myös $f \,\square\, g$ on alikategorian $\mathbf{N}$ nuoli,

– kaikilla $a, b, c \in \mathbf{N}$, nuolet $\alpha_{a,b,c}$ ja $\alpha^{-1}_{a,b,c}$ ovat alikategoriassa $\mathbf{N}$,

– kaikilla $a \in \mathbf{N}$, nuolet λ_a, λ_a^{-1}, ρ_a ja ρ_a^{-1} ovat alikategoriassa $\mathbf{N}$.

On selvää, että monoidaalinen alikategoria on aina myös monoidaalinen kategoria. Jos lisäksi $\mathbf{M}$ on symmetrinen ja kaikilla $a, b \in \mathbf{N}$ nuolet $\gamma_{a,b}$ ja $\gamma^{-1}_{a,b}$ ovat alikategoriassa $\mathbf{N}$, niin myös $\mathbf{N}$ on symmetrinen. Esimerkiksi $[0, \infty)^n \subset [0, \infty]^n$ on esimerkki symmetrisestä monoidaalisesta alikategoriasta.

Ennen kuin siirrytään monoidaalisista kategorioista eteenpäin, tarkastellaan vielä funktoreita monoidaalisten kategorioiden $\mathbf{M}$ ja $\mathbf{M}'$ välillä. Luonnollinen vaatimus funktorilta F olisi vaatia, että $e' = F(e)$, $F(a) \,\square\, F(g) = F(a \,\square\, b)$ ja vastaavasti nuolille $F(f) \,\square\, F(g) = F(f \,\square\, g)$. Tämä on kuitenkin usein turhan tiukka vaatimus. Vaaditaankin, että yhtäsuuruuksien sijaan on olemassa sopivat nuolet $\to$, jolloin saadaan lax monoidaalinen funktori, tai vaihtoehtoisesti on olemassa nuolet $\leftarrow$, jolloin saadaan oplax monoidaalinen funktori.

Määritelmä 3.16. Olkoot $\mathbf{M}$ ja $\mathbf{M}'$ monoidaalisia kategorioita. *Lax monoidaalinen funktori* $(F, F_2, F_0)\colon \mathbf{M} \to \mathbf{M}'$ koostuu

– funktorista $F\colon \mathbf{M} \to \mathbf{M}'$,

– luonnollisesta perheestä nuolia $F_2 = (F_2(a, b))_{a,b \in \mathbf{M}}$

$$F_2(a, b)\colon F(a) \,\square\, F(b) \to F(a \,\square\, b),$$

– nuolesta

$$F_0\colon e' \to F(e),$$

siten, että kaikki kaaviot

$$\begin{tikzcd}
F(a) \,\square (F(b) \,\square\, F(c)) \arrow[r, "\alpha'"] \arrow[d, "1 \,\square\, F_2"] & (F(a) \,\square\, F(b)) \,\square\, F(c) \arrow[d, "F_2 \,\square\, 1"] \\
F(a) \,\square\, F(b \,\square\, c) \arrow[d, "F_2"] & F(a \,\square\, b) \,\square\, F(c) \arrow[d, "F_2"] \\
F(a \,\square (b \,\square\, c)) \arrow[r, "F(\alpha)"] & F((a \,\square\, b) \,\square\, c)
\end{tikzcd}$$

ja

$$
\begin{tikzcd}
F(a)\,\square\, e' \arrow[r, "\rho'"] \arrow[d, "1\,\square\, F_0"] & F(a) \\
F(a)\,\square\, F(e) \arrow[r, "F_2"] & F(a\,\square\, e) \arrow[u, "F(\rho)"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
e'\,\square\, F(a) \arrow[r, "\lambda'"] \arrow[d, "F_0\,\square\, 1"] & F(a) \\
F(e)\,\square\, F(a) \arrow[r, "F_2"] & F(e\,\square\, a) \arrow[u, "F(\lambda)"']
\end{tikzcd}
$$

kommutoivat.

Oplax monoidaalinen funktori määritellään kääntämällä lax monoidaalisen funktorin määritelmässä nuolet $F_2(a,b)\colon F(a\,\square\, b) \to F(a)\,\square\, F(b)$ ja $F_0\colon F(e) \to e'$ ja korvaamalla kaavioissa nuolet α, λ ja ρ nuolilla α^{-1}, λ^{-1} ja ρ^{-1}.

Määritelmässä perheen F_2 luonnollisuus tarkoittaa sitä, että F_2 on luonnollinen muunnos

$$F_2\colon F(-)\,\square\, F(-) \Rightarrow F(-\,\square\, -).$$

Esimerkki 3.17. Kuten jo aiemmin on todettu, superlineaarinen perhe on täsmälleen lax monoidaalinen funktori $[0,\infty) \to \mathbf{Trans_P}$ ja sublineaarinen projektio on täsmälleen oplax monoidaalinen funktori $\mathbf{Trans_P} \to [0,\infty]$. Tämä on helppo todeta, koska kaikki kolme kategoriaa ovat ohuita, joten riittää osoittaa nuolien F_2 ja F_0 olemassaolot.

Aloitetaan ensin superlineaarisesta perheestä. Olkoon siis $\Omega\colon [0,\infty) \to \mathbf{Trans_P}$ kuvaus. Nuolien $F_2(a,b)\colon \Omega_a\Omega_b \leq \Omega_{a+b}$ olemassaolo on täsmälleen superlineaarisen perheen määritelmä. Siispä riittää osoittaa, että jos Ω on superlineaarinen, niin nuoli $I \leq \Omega_0$ on olemassa. Tämä nuoli on olemassa translaation määritelmän mukaan. Siispä Ω on superlineaarinen perhe, jos ja vain jos Ω on lax monoidaalinen funktori.

Olkoon sitten $\omega\colon \mathbf{Trans_P} \to [0,\infty]$ kuvaus. Huomataan, että nuolien $F_2(a,b)\colon \omega_{ab} \leq \omega_a + \omega_b$ olemassaolo tarkoittaa sublineaarisuutta ja nuolen $F_0\colon \omega_I \leq 0$ olemassaolo on yhtäpitävää yhtäsuuruuden $\omega_I = 0$ kanssa. Siispä ω on sublineaarinen projektio, jos ja vain jos ω on oplax monoidaalinen funktori.

3.3 Lomitusjoukot

Nyt kun on saatu esiteltyä tarvittavat työkalut, voidaan siirtyä lomitusetäisyyden yleistämiseen. Artikkelin [BdSS15] lopussa esitetään idea lomitusetäisyyden yleistämisestä joukoksi

$$\mathfrak{D}(F,G) = \{\mathbf{e} \in [0,\infty)^n \mid F,G \text{ ovat } \Omega_{\mathbf{e}}\text{-lomitetut}\},$$

missä $\Omega\colon [0,\infty)^n \to \mathbf{Trans_P}$ on lax monoidaalinen funktori, tai joukoksi

$$\mathfrak{D}(F,G) = \{\mathbf{e} \in [0,\infty)^n \mid F,G \text{ ovat } (\Gamma,\mathrm{K})\text{-lomitetut ja } \omega_\Gamma,\omega_\mathrm{K} \leq \mathbf{e}\},$$

missä $\omega\colon \mathbf{Trans_P} \to [0,\infty]^n$ on oplax monoidaalinen funktori. Nämä joukot käyttäytyvät tietyssä mielessä kuten laajennettu pseudometriikka. Tarkemmin sanottuna näille joukoille pätee aina

- $\mathfrak{D}(F,F) = [0,\infty)^n$,
- $\mathfrak{D}(F,G) = \mathfrak{D}(G,F)$,
- $\mathfrak{D}(F,G) + \mathfrak{D}(G,H) \subseteq \mathfrak{D}(F,H)$.

Lisäksi jos $\omega \dashv \Omega$, niin joukot ovat yhtäsuuret. Tämä idea voidaan yleistää vielä korvaamalla joukot $[0,\infty)^n$ ja $[0,\infty]^n$ monoidaalisilla kategorioilla.

Määritelmä 3.18. Olkoon $\mathbf{M}$ symmetrinen monoidaalinen kategoria ja $\mathbf{N}$ sen symmetrinen monoidaalinen alikategoria. Jos $\Omega\colon \mathbf{N} \to \mathbf{Trans_P}$ on lax monoidaalinen funktori, niin määritellään kaikilla persistenssimoduleilla F ja G *lomitusjoukko* Ω *suhteen*

$$\mathfrak{D}(F,G) = \mathfrak{D}^\Omega(F,G) = \{a \in \mathbf{N} \mid F, G \text{ ovat } \Omega_a\text{-lomitetut}\}.$$

Vastaavasti jos $\omega\colon \mathbf{Trans_P} \to \mathbf{M}$ on oplax monoidaalinen funktori, niin määritellään kaikilla persistenssimoduleilla F ja G *lomitusjoukko* ω *suhteen*

$$\begin{aligned}\mathfrak{D}(F,G) = \mathfrak{D}^\omega(F,G) = \{a \in \mathbf{N} \mid & F, G \text{ ovat } (\Gamma, \mathrm{K})\text{-lomitetut ja on} \\ & \text{olemassa nuolet } \omega_\Gamma \to a, \omega_\mathrm{K} \to a\}.\end{aligned}$$

Lomitusjoukoista $\mathfrak{D}$ puhuttaessa jätetään yläindeksi Ω ja ω pois jos funktori on asiayhteydestä selvä. Oletetaan jatkossa, että $\mathbf{M}$ on symmetrinen monoidaalinen kategoria ja $\mathbf{N}$ sen symmetrinen monoidaalinen alikategoria.

Määritelmä 3.19 (Liittorelaatio)**.** Olkoon $\Omega\colon \mathbf{N} \to \mathbf{Trans_P}$ lax monoidaalinen funktori ja $\omega\colon \mathbf{Trans_P} \to \mathbf{M}$ oplax monoidaalinen funktori. Sanotaan, että Ω ja ω toteuttavat *liittorelaation*, jos on olemassa luonnollinen perhe bijektioita

$$\varphi = \Big(\varphi_{\Gamma,a}\colon \operatorname{Hom}_\mathbf{M}(\omega_\Gamma, a) \cong \operatorname{Hom}_{\mathbf{Trans_P}}(\Gamma, \Omega_a)\Big)_{\Gamma \in \mathbf{Trans_P}, a \in \mathbf{N}}.$$

Tällöin merkitään $\omega \dashv \Omega$.

Liittorelaation määritelmässä perheen φ luonnollisuus tarkoittaa, että kaikki kaavioiden 3.1.1 ja 3.1.2 mukaiset kaaviot kommutoivat. Jos määritelmässä $\mathbf{M} = \mathbf{N}$, niin määritelmä on täsmälleen liittofunktorien määritelmä. Tarkastellaan seuraavaksi lauseen 2.17 yleistämistä. Lauseesta kohdat i, ii ja v yleistyvät suoraan.

Lause 3.20. *Olkoot* $\Omega\colon \mathbf{N} \to \mathbf{Trans_P}$ *ja* $\omega\colon \mathbf{Trans_P} \to \mathbf{M}$ *funktioita. Oletetaan lisäksi, että on olemassa perhe bijektioita*

$$\varphi = \Big(\varphi_{\Gamma,a}\colon \operatorname{Hom}_\mathbf{M}(\omega_\Gamma, a) \cong \operatorname{Hom}_{\mathbf{Trans_P}}(\Gamma, \Omega_a)\Big)_{\Gamma \in \mathbf{Trans_P}, a \in \mathbf{N}}. \tag{3.20.1}$$

Tällöin

i) *kaikilla* $\Gamma \in \mathbf{Trans_P}$ *pätee* $\Gamma \leq \Omega_{\omega_\Gamma}$*, kunhan* $\omega_\Gamma \in \mathbf{N}$*,*

ii) *kaikilla* $a \in \mathbf{N}$ *on olemassa täsmälleen yksi nuoli* $\omega_{\Omega_a} \to a$*,*

iii) *jos lisäksi* Ω *on lax monoidaalinen funktori ja* ω *on oplax monoidaalinen funktori, niin kaikilla persistenssimoduleilla* F *ja* G *pätee*

$$\mathfrak{D}^\Omega(F,G) = \mathfrak{D}^\omega(F,G).$$

Todistus. i) Olkoon $\omega_\Gamma \in \mathbf{N}$. Nyt $\Gamma \leq \Omega_{\omega_\Gamma}$, jos ja vain jos

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Trans_P}}(\Gamma, \Omega_{\omega_\Gamma}) \neq \emptyset.$$

Oletuksen 3.20.1 perusteella

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Trans_P}}(\Gamma, \Omega_{\omega_\Gamma}) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{M}}(\omega_\Gamma, \omega_\Gamma) \neq \emptyset,$$

joten $\Gamma \leq \Omega_{\omega_\Gamma}$.

ii) Vastaavasti kuin yllä, bijektion

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{M}}(\omega_{\Omega_a}, a) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Trans_P}}(\Omega_a, \Omega_a)$$

nojalla $\mathrm{Hom}_{\mathbf{M}}(\omega_{\Omega_a}, a)$ on yksiö, eli on olemassa täsmälleen yksi nuoli $\omega_{\Omega_a} \to a$.

iii) Olkoon ensin $a \in \mathfrak{D}^\Omega(F,G)$. Määritelmän mukaan F ja G ovat Ω_a-lomitetut, eli (Ω_a, Ω_a)-lomitetut. Tämän lauseen toisen kohdan mukaan on olemassa nuoli $\omega_{\Omega_a} \to a$ joten joukon $\mathfrak{D}^\omega(F,G)$ määritelmän mukaan $a \in \mathfrak{D}^\omega(F,G)$.

Olkoon sitten $a \in \mathfrak{D}^\omega(F,G)$. On siis olemassa translaatiot Γ ja K siten, että F ja G ovat (Γ, K)-lomitetut ja on olemassa nuolet $\omega_\Gamma \to a$ ja $\omega_\mathrm{K} \to a$. Bijektioiden

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{M}}(\omega_\Gamma, a) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Trans_P}}(\Gamma, \Omega_a),$$

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{M}}(\omega_\mathrm{K}, a) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Trans_P}}(\mathrm{K}, \Omega_a)$$

mukaan $\Gamma, \mathrm{K} \leq \Omega_a$. Siispä monotonisuuden (lause 2.4) nojalla F ja G ovat myös Ω_a-lomitetut, joten $a \in \mathfrak{D}^\Omega(F,G)$.

□

Lauseen 2.17 kohdat iii ja iv eivät yleisty täysin. Tässä ongelmana on se, että alikategoria $\mathbf{N}$ voi olla mielivaltaisen pieni osa suurempaa kategoriaa $\mathbf{M}$. Siispä bijektioiden 3.20.1 olemassaolosta ei voida taata funktiolle ω funktoriaalisuutta, eikä myöskään voida todistaa sen olevan oplax monoidaalinen funktori, vaikka oletettaisiin molempien olevan funktoreita ja funktorin Ω olevan lax monoidaalinen. Tarkastellaan vastaesimerkkejä näistä tilanteista esimerkissä 3.22. Funktiolle Ω nämä kuitenkin voidaan todistaa.

Lause 3.21. *Olkoot* $\Omega\colon \mathbf{N} \to \mathbf{Trans_P}$ *ja* $\omega\colon \mathbf{Trans_P} \to \mathbf{M}$ *funktioita. Oletetaan, että kaikilla* $a \in \mathbf{N}$ *ja* $\Gamma \in \mathbf{Trans_P}$ *on olemassa bijektio*

$$\varphi_{\Gamma,a}\colon \mathrm{Hom}_{\mathbf{M}}(\omega_\Gamma, a) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Trans_P}}(\Gamma, \Omega_a). \tag{3.21.1}$$

Tällöin Ω *on funktori. Jos lisäksi* ω *on oplax monoidaalinen funktori, niin* Ω *on lax monoidaalinen ja* $\omega \dashv \Omega$.

Todistus. Aloitetaan osoittamalla, että Ω on funktori. Pitäisi siis osoittaa, että jos kategoriassa $\mathbf{N}$ on olemassa nuoli $f\colon a \to b$, niin $\Omega_a \leq \Omega_b$. Sijoittamalla bijektioon 3.21.1 $\Gamma = \Omega_a$ nähdään, että

$$\Omega_a \leq \Omega_b \iff \text{on olemassa nuoli } \omega_{\Omega_a} \to b.$$

Edellisen lauseen toisen kohdan mukaan on olemassa nuoli $\omega_{\Omega_a} \to a$, joten yhdistämällä tämän perään nuoli $a \to b$ saadaan nuoli $\omega_{\Omega_a} \to b$. Siispä $\Omega_a \leq \Omega_b$, joten Ω on funktori.

Oletetaan sitten, että ω on oplax monoidaalinen funktori. Osoitetaan, että Ω on lax monoidaalinen. Koska $\mathbf{Trans_P}$ on ohut, riittää osoittaa nuolien F_2 ja F_0 olemassaolo. Nuolen F_0 olemassaolo seuraa suoraan translaation määritelmästä, nimittäin määritelmässä vaaditaan että jokaisella translaatiolla Γ pätee $I \leq \Gamma$, joten erityisesti $I \leq \Omega_e$.

Olkoon sitten $a, b \in \mathbf{N}$. Pitäisi osoittaa, että $\Omega_a\Omega_b \leq \Omega_{a \,\Box\, b}$. Bijektiosta 3.21.1 saadaan

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{M}}(\omega_{\Omega_a\Omega_b}, a \,\Box\, b) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Trans_P}}(\Omega_a\Omega_b, \Omega_{a \,\Box\, b}).$$

Koska ω on oplax monoidaalinen funktori, niin on olemassa nuoli $\omega_{\Omega_a\Omega_b} \to \omega_{\Omega_a} \,\Box\, \omega_{\Omega_b}$. Lisäksi edellisen lauseen toisen kohdan mukaan on olemassa nuolet $\omega_{\Omega_a} \to a$ ja $\omega_{\Omega_b} \to b$, joten on olemassa nuoli $\omega_{\Omega_a} \,\Box\, \omega_{\Omega_b} \to a \,\Box\, b$. Siispä on olemassa nuoli $\omega_{\Omega_a\Omega_b} \to a \,\Box\, b$, joten $\Omega_a\Omega_b \leq \Omega_{a \,\Box\, b}$.

Vielä pitäisi osoittaa, että $\omega \dashv \Omega$. Määritelmän vaatima perhe bijektioita φ on oletuksen mukaan olemassa, joten riittää osoittaa sen olevan luonnollinen. Pitäisi siis osoittaa kaavioita 3.1.1 ja 3.1.2 vastaavien kaavioiden kommutointi. Kaavioiden kommutointi kuitenkin seuraa suoraan siitä, että kaikki kaavioissa esiintyvät morfismien joukot ovat joko yksiöitä tai tyhjiä, sillä $\mathbf{Trans_P}$ on ohut. Siispä $\omega \dashv \Omega$. □

Tämä lause osoittaa, että liittorelaation määritelmässä riittäisi olettaa, että Ω on funktio, ω on oplax monoidaalinen funktori ja että bijektiot ovat olemassa. Luonnollisuutta ei siis tarvitse olettaa, vaan se seuraa suoraan bijektioiden olemassaolosta.

Esimerkki 3.22. Tarkastellaan sitten ennen edellistä lausetta luvattua esimerkkiä tilanteesta, jossa bijektiot 3.21.1 ovat olemassa ja Ω on lax monoidaalinen funktori, mutta

i) ω ei ole funktori,

ii) ω on funktori, mutta ei oplax monoidaalinen.

Valitaan $\mathbf{P} = \mathbb{R}^2$, $\mathbf{M} = [0,\infty]^2$, $\mathbf{N} = [0,\infty)^2$ ja

$$\Omega\colon [0,\infty)^2 \to \mathbf{Trans}_{\mathbb{R}^2},\ \Omega_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \mathbf{a}.$$

Nyt Ω on tietenkin lax monoidaalinen funktori ja bijektioiden 3.21.1 olemassaolo on tarkoittaa, että kaikilla $\mathbf{a} \in [0,\infty)^2$ ja $\Gamma \in \mathbf{Trans}_{\mathbb{R}^2}$

$$\omega_\Gamma \leq \mathbf{a} \iff \Gamma \leq \Omega_{\mathbf{a}}. \tag{3.22.1}$$

i) Määritellään ensin $\mathrm{d}\colon \mathbf{Trans}_{\mathbb{R}^2} \to [0,\infty]^2$, $\Gamma \mapsto \mathbf{sup}_{\mathbf{a}\in\mathbb{R}^2}(\Gamma(\mathbf{a}) - \mathbf{a})$, missä supremum otetaan koordinaateittain. Määritellään sitten ω asettamalla

$$\omega_\Gamma = \begin{cases} \mathrm{d}(\Gamma), & \text{jos } \mathrm{d}(\Gamma) \in [0,\infty)^2, \\ (0,\infty), & \text{muulloin.} \end{cases}$$

Nyt selvästi 3.22.1 pätee kaikilla $\mathbf{a} \in [0,\infty)^2$ ja $\Gamma \in \mathbf{Trans}_{\mathbb{R}^2}$. Tarkastellaan sitten translaatioita

$$T'\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ T'(a_1,a_2) = \begin{cases} (a_1+2, a_2+2), & \text{jos } a_2 \leq 0, \\ (a_1+2, 2a_2+2), & \text{muulloin} \end{cases}$$

ja $T_1\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\mathbf{a} \mapsto \mathbf{a} + (1,1)$. Nyt $T_1 \leq T'$, mutta $\omega_{T_1} = (1,1) \not\leq (0,\infty) = \omega_{T'}$. Siispä ω ei ole funktori.

ii) Käytetään tässäkin apuna edellisen kohdan funktiota d, joka itseasiassa on oplax monoidaalinen funktori ja toteuttaa Ω kanssa liittorelaation $\mathrm{d} \dashv \Omega$. Määritellään ω asettamalla

$$\omega_\Gamma = \begin{cases} \mathrm{d}(\Gamma), & \text{jos } \mathrm{d}(\Gamma) \in [0,\infty)^2, \\ 2^{\mathrm{d}(\Gamma)}, & \text{muulloin,} \end{cases}$$

missä siis $2^{(x_1,x_2)} = (2^{x_1}, 2^{x_2})$ ja $2^\infty = \infty$. Nyt 3.22.1 pätee taas selvästi kaikilla $\mathbf{a} \in [0,\infty)^2$ ja $\Gamma \in \mathbf{Trans}_{\mathbb{R}^2}$.

Osoitetaan sitten, että ω on funktori. Olkoon $\Gamma, \mathrm{K} \in \mathbf{Trans}_{\mathbb{R}^2}$ siten, että $\Gamma \leq \mathrm{K}$. Yhtälöistä $\mathrm{d}(\Gamma) \leq \mathrm{d}(\mathrm{K})$, $\mathrm{d}(\Gamma) \leq 2^{\mathrm{d}(\Gamma)}$ ja $2^{\mathrm{d}(\Gamma)} \leq 2^{\mathrm{d}(\mathrm{K})}$ nähdään, että $\omega_\Gamma \leq \omega_{\mathrm{K}}$. Siispä ω on funktori.

Vielä lopuksi osoitetaan, että ω ei ole oplax monoidaalinen. Olkoon T' kuten edellisessä kohdassa. Nyt $\omega_{T'} = 2^{(2,\infty)} = (4,\infty)$ ja

$$\omega_{T'T'} = 2^{(4,\infty)} = (16,\infty) \not\leq (8,\infty) = \omega_{T'} + \omega_{T'}.$$

Siispä ω ei ole oplax monoidaalinen.

Lauseista 3.20 ja 3.21 saadaan yleistettyä seurauksen 2.19 kohta ii.

Seuraus 3.23. *Olkoon* $\omega\colon \mathbf{Trans_P} \to \mathbf{M}$ *oplax monoidaalinen funktori. On olemassa lax monoidaalinen funktori* $\Omega\colon \mathbf{N} \to \mathbf{Trans_P}$ *siten että* $\omega \dashv \Omega$*, jos ja vain jos kaikilla* $a \in \mathbf{N}$ *ja* $\Gamma \in \mathbf{Trans_P}$

$$|\mathrm{Hom}_{\mathbf{M}}(\omega_\Gamma, a)| \leq 1$$

ja joukolla

$$\{\Gamma \in \mathbf{Trans_P} \mid \textit{on olemassa nuoli } \omega_\Gamma \to a\}$$

on olemassa maksimi. Tällöin Ω_a *on kyseisen joukon eräs maksimi.*

Todistus. Merkitään jokaisella $a \in \mathbf{N}$

$$A_a = \{\Gamma \in \mathbf{Trans_P} \mid \text{on olemassa nuoli } \omega_\Gamma \to a\}.$$

Jos Ω on lax monoidaalinen ja $\omega \dashv \Omega$, niin lauseen 3.20 kohdan ii nojalla $\Omega_a \in A_a$ kaikilla $a \in \mathbf{N}$. Lisäksi bijektioiden $\varphi_{\Gamma,a}$ olemassaolon perusteella Ω_a on joukon A_a yläraja, joten Ω_a on joukon A_a jokin maksimi.

Oletetaan sitten, että joukoilla A_a on olemassa maksimit. Valitaan jokaisella $a \in \mathbf{N}$ jokin joukon A_a maksimi ja merkitään sitä Ω_a. Nyt pitäisi siis osoittaa, että Ω on lax monoidaalinen funktori ja $\omega \dashv \Omega$. Koska $|\mathrm{Hom}_{\mathbf{M}}(\omega_\Gamma, a)| \leq 1$, niin lauseen 3.21 perusteella riittää osoittaa, että kaikilla $a \in \mathbf{N}$ ja $\Gamma \in \mathbf{Trans_P}$

$$\text{on olemassa nuoli } \omega_\Gamma \to a \iff \Gamma \leq \Omega_a.$$

Koska Ω_a on joukon A_a maksimi, niin ekvivalenssin suunta $\Rightarrow$ on selvä. Oletetaan sitten, että $\Gamma \leq \Omega_a$. Koska ω on funktori, niin saadaan nuoli $\omega_\Gamma \to \omega_{\Omega_a}$. Tämän perään voidaan lisätä nuoli $\omega_{\Omega_a} \to a$, joka on olemassa oletuksen $\Omega_a \in A_a$ mukaan. Saadaan siis nuoli $\omega_\Gamma \to a$. $\square$

Osoitetaan vielä tämän aliluvun alussa mainitut ominaisuudet, jotka kertovat, että $\mathfrak{D}$ käyttäytyy tietyssä mielessä kuten laajennettu pseudometriikka.

Lause 3.24. *Olkoon* $\mathfrak{D}$ *joko* $\mathfrak{D}^\Omega$ *tai* $\mathfrak{D}^\omega$*. Tällöin kaikilla persistenssimoduleilla* F *ja* G

i) $e \in \mathfrak{D}(F, F)$,

ii) $\mathfrak{D}(F, G) = \mathfrak{D}(G, F)$,

iii) $\mathfrak{D}(F, G) \,\Box\, \mathfrak{D}(G, H) \subseteq \mathfrak{D}(F, H)$,

missä joukkojen $X, Y \subseteq \mathbf{M}$ *tensoritulolla tarkoitetaan joukkoa* $X \,\Box\, Y = \{x \,\Box\, y \mid x \in X,\ y \in Y\}$.

Todistus. Aloitetaan tapauksesta $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}^\Omega$.

i) Koska F on itsensä kanssa Ω_a-lomitettu kaikilla $a \in \mathbf{N}$, niin $\mathfrak{D}(F,F) = \mathbf{N}$. Erityisesti siis $e \in \mathfrak{D}(F,F)$.

ii) Olkoon $a \in \mathfrak{D}(F,G)$. Määritelmän mukaan F ja G ovat Ω_a-lomitetut, eli (Ω_a, Ω_a)-lomitetut. Tällöin myös G ja F ovat Ω_a-lomitetut, joten $a \in \mathfrak{D}(G,F)$. Toinen suunta saadaan symmetrisesti. Siispä $\mathfrak{D}(F,G) = \mathfrak{D}(G,F)$.

iii) Olkoon $a \in \mathfrak{D}(F,G)$ ja $b \in \mathfrak{D}(G,H)$. Koska F ja G ovat Ω_a-lomitetut ja G ja H ovat Ω_b-lomitetut, niin kolmioepäyhtälön (lause 2.5) mukaan F ja H ovat $(\Omega_b\Omega_a, \Omega_a\Omega_b)$-lomitetut. Edelleen monotonisuuden (lause 2.4) ja epäyhtälöiden $\Omega_b\Omega_a \leq \Omega_{b\,\square\,a}$ ja $\Omega_a\Omega_b \leq \Omega_{a\,\square\,b}$ nojalla F ja H ovat $(\Omega_{b\,\square\,a}, \Omega_{a\,\square\,b})$-lomitetut. Lisäksi, koska $\mathbf{N}$ on symmetrinen, niin $b \,\square\, a \cong a \,\square\, b$, joten $\Omega_{b\,\square\,a} \cong \Omega_{a\,\square\,b}$. Erityisesti siis $\Omega_{b\,\square\,a} \leq \Omega_{a\,\square\,b}$ joten taas monotonisuuden perusteella F ja H ovat $\Omega_{a\,\square\,b}$-lomitetut, eli $a \,\square\, b \in \mathfrak{D}(F,H)$.

Todistetaan sitten tapaus $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}^\omega$.

i) Koska ω on oplax monoidaalinen funktori, niin on olemassa nuoli $\omega_I \to e$. Lisäksi F on itsensä kanssa I-lomitettu, joten määritelmän mukaan $e \in \mathfrak{D}(F,F)$.

ii) Olkoon $a \in \mathfrak{D}(F,G)$. On siis olemassa $\Gamma, \mathrm{K} \in \mathbf{Trans_P}$ siten, että F ja G ovat (Γ, K)-lomitetut ja on olemassa nuolet $\omega_\Gamma \to a$ ja $\omega_\mathrm{K} \to a$. Kääntämällä lomitus saadaan G ja F välille (K, Γ)-lomitus, joten $a \in \mathfrak{D}(G,F)$. Toinen suunta saadaan symmetrisesti. Siispä $\mathfrak{D}(F,G) = \mathfrak{D}(G,F)$.

iii) Olkoon $a \in \mathfrak{D}(F,G)$ ja $b \in \mathfrak{D}(G,H)$. On siis olemassa $\Gamma_1, \Gamma_2, \mathrm{K}_1, \mathrm{K}_2 \in \mathbf{Trans_P}$ siten, että F ja G ovat (Γ_1, K_1)-lomitetut, G ja H ovat (Γ_2, K_2)-lomitetut ja on olemassa nuolet $\omega_{\Gamma_1} \to a$, $\omega_{\mathrm{K}_1} \to a$, $\omega_{\Gamma_2} \to b$ ja $\omega_{\mathrm{K}_2} \to b$. Kolmioepäyhtälön (lause 2.5) mukaan F ja H ovat $(\Gamma_2\Gamma_1, \mathrm{K}_1\mathrm{K}_2)$-lomitetut. Lisäksi, koska ω on oplax monoidaalinen, niin on olemassa nuolet

$$\omega_{\Gamma_2\Gamma_1} \to \omega_{\Gamma_2} \,\square\, \omega_{\Gamma_1} \to b \,\square\, a,$$

$$\omega_{\mathrm{K}_1\mathrm{K}_2} \to \omega_{\mathrm{K}_1} \,\square\, \omega_{\mathrm{K}_2} \to a \,\square\, b.$$

Kategorian $\mathbf{M}$ symmetrisyyden perusteella on olemassa nuoli $b \,\square\, a \to a \,\square\, b$. Lisäämällä tämä vielä ensimmäisen nuolen perään saadaan nuolet $\omega_{\Gamma_2\Gamma_1} \to a \,\square\, b$ ja $\omega_{\mathrm{K}_1\mathrm{K}_2} \to a \,\square\, b$. Siispä $a \,\square\, b \in \mathfrak{D}(F,H)$.

$\square$

Jos valitaan $\mathbf{M} = [0,\infty]^n$ ja $\mathbf{N} = [0,\infty)^n$, niin $\mathfrak{D}(F,F) = [0,\infty)^n$. Tämä pätee yleisesti, kun $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}^\Omega$, kuten yllä itse asiassa todistettiin. Kuitenkin jos tämä väite halutaan osoittaa myös tapauksessa $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}^\omega$, tarvitsee olettaa, että jokaisella $a \in \mathbf{N}$ on olemassa jokin nuoli $\omega_\Gamma \to a$, missä $\Gamma \in \mathbf{Trans}_\mathbf{P}$. Eräs luonteva oletus joka takaa tämän on olettaa, että neutraalialkiolta e on nuoli jokaiseen alikategorian $\mathbf{N}$ alkioon.

Esimerkki 3.25. Tämän aliluvun alussa mainitut joukkojen $\mathfrak{D}(F,G)$ ominaisuudet seuraavat lauseesta 3.24. Tarkastellaankin seuraavaksi näitä lomitusjoukkoja ja niistä saatavia metriikoita, kun $\mathbf{P} = \mathbb{R}^n$, $\mathbf{N} = [0,\infty)^n$ ja $\mathbf{M} = [0,\infty]^n$. Luonnollinen valinta funktoriksi $\Omega\colon [0,\infty)^n \to \mathbf{Trans}_{\mathbb{R}^n}$ on

$$\Omega_\mathbf{a}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \mathbf{a}.$$

Tälle pariksi saadaan funktori $\omega\colon \mathbf{Trans}_{\mathbb{R}^n} \to [0,\infty]^n$,

$$\omega_\Gamma = \sup_{\mathbf{a}\in\mathbb{R}^n}(\Gamma(\mathbf{a}) - \mathbf{a}),$$

missä **sup** ottaa supremumin koordinaateittain. Selvästi $\omega \dashv \Omega$.

Joukoista $\mathfrak{D}(F,G)$ saadaan aikaiseksi lomitusmetriikoita ottamalla sopivia infimumeita. Yksinkertaisin vaihtoehto on asettaa esimerkiksi

$$\mathrm{d}(F,G) = \inf\Big(\{\epsilon \in [0,\infty) \mid \epsilon\mathbf{1} \in \mathfrak{D}(F,G)\} \cup \{\infty\}\Big),$$

missä $\mathbf{1} = (1,\ldots,1) \in [0,\infty)^n$. Hieman yleisemmin vektori $\mathbf{1}$ voitaisiin korvata millä hyvänsä $\mathbf{a} \in [0,\infty)^n$ ja saataisiin laajennettu pseudometriikka. Tätä voidaan ajatella vektorin $\mathbf{a}$ suuntaiseksi lomitusmetriikaksi.

Tämän idean ydin on se, että $\epsilon \mapsto \epsilon\mathbf{a}$ on itseasiassa lax monoidaalinen funktori. Voidaankin yleistää vielä enemmän ja korvata $\epsilon\mathbf{a}$ jollain lax monoidaalisella funktorilla $L\colon [0,\infty) \to [0,\infty)^n$. Tällöin asetetaan

$$\begin{aligned}\mathrm{d}_L(F,G) &= \inf\Big(\{\epsilon \in [0,\infty) \mid L(\epsilon) \in \mathfrak{D}(F,G)\} \cup \{\infty\}\Big)\\ &= \inf\Big(\mathfrak{D}^{\Omega L}(F,G) \cup \{\infty\}\Big),\end{aligned}$$

joka on laajennettu pseudometriikka suoraan lauseen 3.24 nojalla, sillä ΩL on lax monoidaalisten funktoreiden kompositiona myös lax monoidaalinen funktori.

Vastaavasti voidaan lisätä funktorin ω perään mikä hyvänsä oplax monoidaalinen funktori $l\colon [0,\infty]^n \to [0,\infty]$ ja saadaan laajennettu pseudometriikka d_l asettamalla

$$\mathrm{d}_l(F,G) = \inf\Big(\mathfrak{D}^{l\omega}(F,G) \cup \{\infty\}\Big).$$

Unohdetaan sitten valittu Ω ja ω ja oletetaan vain, että $\omega \dashv \Omega$. Edelliset ideat lax monoidaalisen funktorin L lisäämisestä funktorin Ω eteen ja oplax monoidaalisen funktorin l lisäämisestä funktorin ω perään toimivat edelleen. Tästä huomataan helposti, että mikäli L ja l toteuttavat liittorelaation sopivan yleistyksen, saadaan $l\omega \dashv \Omega L$.

Lause 3.26. *Olkoot* $\mathbf{M}$, $\mathbf{M}'$ *symmetrisiä monoidaalisia kategorioita ja* $\mathbf{N} \subseteq \mathbf{M}$, $\mathbf{N}' \subseteq \mathbf{M}'$ *symmetrisiä monoidaalisia alikategorioita. Olkoot* $\Omega \colon \mathbf{N} \to \mathbf{Trans_P}$ *ja* $\Omega' \colon \mathbf{N}' \to \mathbf{N}$ *funktioita ja* $\omega \colon \mathbf{Trans_P} \to \mathbf{M}$ *ja* $\omega' \colon \mathbf{M} \to \mathbf{M}'$ *oplax monoidaalisia funktoreita. Oletetaan lisäksi, että kaikilla* $\Gamma \in \mathbf{Trans_P}$ *ja* $a \in \mathbf{N}$ *on olemassa bijektio*

$$\varphi_{\Gamma,a} \colon \mathrm{Hom}_{\mathbf{M}}(\omega_\Gamma, a) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Trans_P}}(\Gamma, \Omega_a)$$

ja, että kaikilla $a \in \mathbf{N}$ *ja* $b \in \mathbf{N}'$ *on olemassa bijektio*

$$\varphi'_{a,b} \colon \mathrm{Hom}_{\mathbf{M}'}(\omega'_a, b) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{M}}(a, \Omega'_b).$$

Tällöin $\Omega\Omega'$ *on lax monoidaalinen funktori ja* $\omega'\omega \dashv \Omega\Omega'$*.*

Todistus. Koska $\omega'\omega$ on oplax monoidaalisten funktorien kompositiona myös oplax monoidaalinen, niin lauseen 3.21 perusteella riittää osoittaa, että kaikilla $a \in \mathbf{N}'$ ja $\Gamma \in \mathbf{Trans_P}$ on olemassa bijektio

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{M}'}((\omega'\omega)_\Gamma, a) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Trans_P}}(\Gamma, (\Omega\Omega')_a).$$

Bijektioiksi voidaan valita $\varphi_{\Gamma,\Omega'_a} \circ \varphi'_{\omega_\Gamma,a}$. $\square$

Tämä on analogista liittofunktorien yhdistämisen kanssa. Nimittäin jos otetaan funktorit $F \colon \mathbf{B} \to \mathbf{C}$, $G \colon \mathbf{C} \to \mathbf{B}$ ja $F' \colon \mathbf{C} \to \mathbf{D}$, $G' \colon \mathbf{D} \to \mathbf{C}$ siten, että F ja G ovat pari liittofunktoreita sekä F' ja G' ovat pari liittofunktoreita, niin $F'F$ ja GG' ovat myös pari liittofunktoreita.

Esimerkki 3.27. Olkoon $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in [0,\infty)^n$. Määritellään

$$L_{\mathbf{a}}(\epsilon) = \epsilon\mathbf{a}, \quad l_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) = \max_{i=1,\ldots,n}\left(\frac{x_i}{a_i}\right),$$

missä asetetaan $\frac{0}{0} = 0$ ja $\frac{x}{0} = \infty$, kun $x \neq 0$. Nyt on helppo nähdä, että $L_{\mathbf{a}} \colon [0,\infty) \to [0,\infty)^n$ on lax monoidaalinen funktori, $l_{\mathbf{a}} \colon [0,\infty]^n \to [0,\infty]$ on oplax monoidaalinen funktori ja kaikilla $\epsilon \in [0,\infty)$ ja $\mathbf{x} \in [0,\infty]^n$ pätee

$$l_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) \leq \epsilon \iff \mathbf{x} \leq L_{\mathbf{a}}(\epsilon).$$

Valitaan lisäksi Ω ja ω kuten esimerkissä 3.25. Tällöin $\Omega L_{\mathbf{a}}$ on lax monoidaalisten funktorien kompositiona lax monoidaalinen funktori, eli superlineaarinen perhe, ja vastaavasti $l_{\mathbf{a}}\omega$ on sublineaarinen projektio. Kaikilla $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$

$$(\Omega L_{\mathbf{a}})_\epsilon(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \epsilon\mathbf{a}$$

ja kaikilla $\Gamma \in \mathbf{Trans}_{\mathbb{R}^n}$

$$(l_{\mathbf{a}}\omega)_\Gamma = \max_{i=1,\ldots,n}\left(\frac{\mathbf{sup}(\Gamma(\mathbf{x}) - \mathbf{x})}{\mathbf{a}}\right),$$

missä jakolasku otetaan komponenteittain. Lisäksi edellisen lauseen nojalla $l_{\mathbf{a}}\omega \dashv \Omega L_{\mathbf{a}}$.

Viitteet

[BdSS15] Peter Bubenik, Vin de Silva ja Jonathan Scott. Metrics for generalized persistence modules. *Foundations of Computational Mathematics*, 15(6):1501–1531, 2015.

[BL13] Ulrich Bauer ja Michael Lesnick. Induced matchings and the algebraic stability of persistence barcodes. arXiv:1311.3681 [math.AT], 2013.

[BL16] Magnus Botnan ja Michael Lesnick. Algebraic stability of zigzag persistence modules. arXiv:1604.00655 [math.AT], 2016.

[BS14] Peter Bubenik ja Jonathan A. Scott. Categorification of persistent homology. *Discrete & Computational Geometry*, 51(3):600–627, 2014.

[CB12] William Crawley-Boevey. Decomposition of pointwise finite-dimensional persistence modules. arXiv:1210.0819 [math.RT], 2012.

[CCSG+09] Frederic Chazal, David Cohen-Steiner, Marc Glisse, Leonidas J. Guibas ja Steve Y. Oudot. Proximity of persistence modules and their diagrams. *Proceedings of the 25th annual symposium on Computational geometry*, SCG '09, sivut 237–246, New York, NY, USA, 2009. ACM.

[CdSGO12] Frederic Chazal, Vin de Silva, Marc Glisse ja Steve Oudot. The structure and stability of persistence modules. arXiv:1207.3674 [math.AT], 2012.

[Lan02] Serge Lang. *Algebra*, *Graduate Texts in Mathematics*, vol. 211. Springer-Verlag New York, 3. painos, 2002. ISBN 978-0-387-95385-4.

[Les11] Michael Lesnick. The optimality of the interleaving distance on multidimensional persistence modules. arXiv:1106.5305v2 [cs.CG], 2011.

[ML98] Saunders Mac Lane. *Categories for the working mathematician*, *Graduate texts in mathematics*, vol. 5. Springer, 2. painos, 1998. ISBN 0-387-98403-8.

[Web85] Cary Webb. Decomposition of graded modules. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 94(4):565–571, 1985.