
TAMPEREEN YLIOPISTO
Pro gradu -tutkielma

Maija Hanhijärvi

Potenssi- ja eksponenttiyhtälö sekä
logaritmi lukion lyhyessä
matematiikassa

Informaatiotieteiden yksikkö
Matematiikka
Lokakuu 2016

Tampereen yliopisto

Informaatiotieteiden yksikkö

HANHIJÄRVI, MAIJA: Potenssi- ja eksponenttiyhtälö sekä logaritmi lukion lyhyessä matematiikassa

Pro gradu -tutkielma, 57 s., 7 liites.

Matematiikka

Lokakuu 2016

Tiivistelmä

Tutkielmassa tarkastellaan vuoden 2003 lukion opetussuunnitelman perusteiden mukaista lyhyen matematiikan kurssia Matemaattisia malleja I (MAB3). Tarkoituksena on selvittää, onko kurssi sellaisenaan tarpeellinen ja hyödyllinen lyhyen matematiikan opiskelijoille. Ensimmäiseksi luodaan katsaus lukion opetussuunnitelman perusteisiin, ja sen jälkeen tarkastellaan matemaattisen ajattelun käsitettä. Näiden pohjalta muotoillaan tarkastellun kurssin merkitys ja tehtävä. Seuraavaksi käsitellään kurssin matemaattista aihetta potenssi- ja eksponenttifunktioista sekä logaritmista yliopistotasoisesti, jolloin voidaan tehdä vertailua lyhyen matematiikan ja yliopistomatematiikan välillä. Tutkielmassa analysoidaan myös kolmea kurssin oppikirjaa, joiden sisältöjä ja esitystapoja vertaillaan. Lisäksi tarkastellaan oppikirjoissa olevia esimerkkejä, tehtäviä ja laskinohjeita. Oppikirjojen avulla saadaan näkemys kurssin sisällöstä ja rakenteesta.

Tutkielmassa päädytään johtopäätökseen, että Matemaattisia malleja I -kurssi on sisällöltään hyvä sellaisenaan sekä hyödyllinen lyhyen matematiikan opiskelijoille. Asiat potenssi- ja eksponenttiyhtälöstä sekä logaritmista esitetään selkeästi ja yksinkertaisesti. Ne liitetään hienosti matemaattisiin malleihin, joihin opiskelijoiden on hyvä tutustua jo lukiossa. Tutkielman loppuksi otetaan katsaus uusimpaan lukion opetussuunnitelmaan. Tarkasteltu kurssi muuttuu rakenteeltaan uuden opetussuunnitelman myötä. Kurssin sisältöön tulee uutta asiaa ja osa nykyisestä sisällöstä käydään läpi jo aiemmilla kursseilla.

Sisältö

1	Johdanto	1
2	Lukion opetussuunnitelman perusteet	2
2.1	Matematiikka	2
2.2	Matemaattisia malleja I	3
3	Matemaattinen ajattelu	5
3.1	Lähtökohdat ja matemaattinen tieto	6
3.2	Matemaattisen ajattelun kehittäminen	8
4	Lukion lyhyen matematiikan opetuksen tavoite	11
5	Potenssi-, eksponentti- ja logaritmifunktio	13
5.1	Potenssifunktio	14
5.2	Luonnollinen logaritmi	16
5.3	Luonnollinen eksponenttifunktio	19
5.4	Yleiset eksponenttifunktiot	21
5.5	Yleiset logaritmifunktiot	23
5.6	Teorian tarkastelu ja esimerkkejä	26
6	Oppikirja-analyysi	30
6.1	Kirjojen esittely	30
6.1.1	Lyhyt matikka 3	30
6.1.2	Lukiolaisen matematiikka 3	31
6.1.3	Kertoma $3!$	31
6.2	Kirjojen sisällön vertailu	32
6.2.1	Miten kirjat alkavat?	32
6.2.2	Lineaarinen malli ja suora	33
6.2.3	Eksponentiaalinen malli	35
6.2.4	Mitä muuta kirjat sisältävät?	40
6.3	Esimerkkien ja tehtävien tarkastelu	41
6.3.1	Esimerkkien tarkastelu	43
6.3.2	Tehtävien tarkastelu	44
6.4	Laskinohjeiden vertailu	47
6.5	Yhteenveto	49
7	Pohdintaa ja uusi opetussuunnitelma	51
	Viitteet	55
	Liitteet	58

1 Johdanto

Vuoden 1994 lukion opetussuunnitelman perusteiden tullessa voimaan, muuttui lukion matematiikan yleinen ja laaja oppimäärä pitkäksi ja lyhyeksi oppimääräksi. Lyhyen matematiikan oppimäärään kuului kuusi pakollista kurssia: Tilastot ja todennäköisyys, Matemaattinen ongelmanratkaisu, Geometria, Matemaattisia malleja, Matemaattinen analyysi sekä Matemaattisia tutkimusmenetelmiä. [17, s. 73–74] Vuoden 2003 opetussuunnitelmassa pakollisten kurssien määrä säilyi samana, mutta joidenkin kurssien nimet ja sisällöt muuttuivat hieman. Uudet kurssit olivat Lausekkeet ja yhtälöt, Geometria, Matemaattisia malleja I, Matemaattinen analyysi, Tilastot ja todennäköisyys sekä Matemaattisia malleja II. [18, s. 125–127]

Matemaattisia malleja kurssi muuttui opetussuunnitelman muutoksen myötä neljännestä kurssista kolmanneksi. Kurssin sisältö on kuitenkin pysynyt melko samanlaisena jo yli 20 vuotta painottaen lineaarista ja eksponentiaalista mallia. Vuoden 1994 opetussuunnitelmassa ei kuitenkaan mainita eksponenttiyhtälöä [17, s. 74], kuten vuoden 2003 opetussuunnitelmassa [18, s. 126]. Ainoastaan polynomi- ja potenssiyhtälöt sekä logaritmi mainitaan. Vuoden 2003 opetussuunnitelma nostaa keskeisenä sisältönä esiin myös eksponenttiyhtälöt. Kurssin sisältö on koettu hyvin tärkeäksi matematiikan lyhyen oppimäärän opiskelijoille, koska kurssi on säilynyt opetussuunnitelmassa näin pitkään. Myös uusimmassa, tänä syksynä voimaan tullessa, lukion opetussuunnitelmassa on saman niminen kurssi.

Lukion lyhyen matematiikan kurssit saavat yleensä vähemmän huomiota kuin pitkän matematiikan. Pitkän matematiikan kursseja tutkitaan ja arvioidaan enemmän, koska pitkää matematiikkaa arvostetaan. Yhtä tärkeässä arvossa matematiikka on myös lyhyen oppimäärän opiskelijoille. Hekin tarvitsevat matematiikkaa tulevalla alallaan. Todennäköisesti tarve on vain vähäisempi tai erilainen. Lyhyen matematiikan kursseihin kuuluisi tämän vuoksi kiinnittää yhtä paljon huomiota kuin pitkän matematiikan kursseihin. Tässä tutkielmassa keskitytään tarkastelemaan lyhyen matematiikan oppimäärää ja erityisesti siihen kuuluvaa kurssia.

Tutkielman tarkoituksena on selvittää, onko vuoden 2003 opetussuunnitelman mukaisen kurssin Matemaattisia malleja I (MAB3) sisältö tarpeellinen ja hyödyllinen lukion lyhyen matematiikan opiskelijoille. Tutkielmassa lähdetään aluksi pohtimaan opetussuunnitelman avulla, mikä on kyseisen kurssin merkitys opiskelijoille: Mitä opiskelijat opiskelevat kurssilla? Miksi he opiskelevat kyseisiä asioita ja mihin he niitä tarvitsevat? Tutkielmassa tarkastellaan myös matemaattisen ajattelun käsitettä. Pohditaan, millaiseen matemaattiseen ajatteluun opiskelijoita halutaan ohjata kurssilla ja millaista matematiikkaa heidän halutaan oppivan. Kurssin aiheeseen liittyvää teoriaa potenssi-, eksponentti- ja logaritmifunktioista käydään läpi, ja tarkastellaan kurssin asiaa yliopistotason matematiikan näkökulmasta. Voisiko käsiteltäviä asioita viedä kurssilla pidemmälle? Tämän jälkeen analysoidaan kurssin

oppikirjoja. Verrataan, miten oppikirjat eroavat toisistaan: Mitä asioita oppikirjoissa käsitellään? Miten asiat on esitetty? Minkälaisia tehtäviä ja esimerkkejä oppikirjat sisältävät? Ovatko tehtävät hyödyllisiä ja opiskelijoita motivoivia? Ovatko opetettavat asiat merkityksellisiä? Tutkielman viimeisessä luvussa luodaan vielä katsaus uuteen opetussuunnitelmaan ja miten se tulee muuttamaan kyseistä kurssia.

2 Lukion opetussuunnitelman perusteet

Syksyllä 2016 tuli voimaan uusi Opetushallituksen muotoilema Lukion opetussuunnitelman perusteet 2015. Tässä tutkielmassa pohjaudutaan kuitenkin vielä vanhaan vuoden 2003 lukion opetussuunnitelman perusteisiin, koska tarkastelun kohteena on vanhan opetussuunnitelman mukainen lukion lyhyen matematiikan kolmas kurssi: Matemaattisia malleja I (MAB3). Tutkielman lopussa otetaan myös katsaus uuteen opetussuunnitelmaan.

Valtakunnallisessa lukion opetussuunnitelman perusteissa määritellään lukiokoulutuksen tehtäväksi perusopetuksen opetus- ja kasvatustehtävän jatkaminen. Lukiokoulutuksen tulee antaa laaja-alainen yleissivistys ja riittävät valmiudet jatko-opintoihin lukion jälkeen. Lukion käytyään opiskelijalla tulisi olla valmiuksia vastata yhteiskunnan ja ympäristön haasteisiin sekä kykyä tarkastella asioita eri näkökulmista. Opiskelijan tulisi osata toimia vastuuntuntoisena ja velvollisuuksistaan huolehtivana kansalaisena yhteiskunnassa ja työelämässä. Opetuksessa nähdään tärkeänä opiskelijan itsetuntemuksen kehittyminen ja hänen myönteisen kasvunsa tukeminen kohti aikuisuutta. Opiskelijaa tulee kannustaa elinikäiseen oppimiseen ja itsensä jatkuvaan kehittämiseen. [18, s. 12]

2.1 Matematiikka

Matematiikan opetuksen tehtävä määritellään lukion opetussuunnitelman perusteissa seuraavasti: ”Matematiikan opetuksen tehtävänä on tutustuttaa opiskelija matemaattisen ajattelun malleihin sekä matematiikan perusideoihin ja rakenteisiin, opettaa käyttämään puhuttua ja kirjoitettua matematiikan kieltä sekä kehittää laskemisen ja ongelmien ratkaisemisen taitoja.” Opetussuunnitelmassa kannustetaan herättämään opiskelijoissa kiinnostusta tekemään havaintojen pohjalta kysymyksiä, oletuksia ja päätelmiä sekä perustelemaan niitä. Lisäksi kannustetaan ohjaamaan opiskelijaa hahmottamaan matemaattisten käsitteiden merkityksiä, liittämään niitä laajempiin kokonaisuuksiin sekä keksimään luovia ratkaisuja matemaattisiin ongelmiin. Opetuksessa kehoitetaan myös liittämään matematiikkaa arkielämään. [18, s. 118]

Opetussuunnitelmassa matematiikan lyhyen oppimäärän opetuksen tehtävä määritellään lyhyesti: ”opetuksen tehtävänä on tarjota valmiudet hank-

kia, käsitellä ja ymmärtää matemaattista tietoa ja käyttää matematiikkaa elämän eri tilanteissa ja jatko-opinnoissa” [18, s. 125]. Tämän lisäksi opetussuunnitelmassa on vielä listattu opetuksen tavoitteet lyhyellä oppimäärällä [18, s. 125]: ”Matematiikan lyhyen oppimäärän opetuksen tavoitteena on, että opiskelija

- osaa käyttää matematiikkaa jokapäiväisen elämän ja yhteiskunnallisen toiminnan apuvälineenä
- saa myönteisiä oppimiskokemuksia matematiikan parissa työskennellessään ja oppii luottamaan omiin kykyihinsä, taitoihinsa ja ajatteluunsa, rohkaistuu kokeilevaan, tutkivaan ja keksivään oppimiseen
- hankkii sellaisia matemaattisia tietoja, taitoja ja valmiuksia, jotka antavat riittävän pohjan jatko-opinnoille
- sisäistää matematiikan merkityksen välineenä, jolla ilmiöitä voidaan kuvata, selittää ja mallintaa ja jota voidaan käyttää johtopäätösten tekemisessä
- saa käsityksen matemaattisen tiedon luonteesta ja sen loogisesta rakenteesta
- harjaantuu vastaanottamaan ja analysoimaan viestimien matemaattisessa muodossa tarjoamaa informaatioita ja arvioimaan sen luotettavuutta
- tutustuu matematiikan merkitykseen kulttuurin kehityksessä
- oppii käyttämään kuvioita, kaavioita ja malleja ajattelun apuna.”

Edellä olevat tavoitteet koskevat koko lyhyen matematiikan oppimäärää, joten yhden kurssin ei ole tarkoitus toteuttaa kaikkia annettuja tavoitteita. Seuraavaksi otetaan katsaus tässä tutkielmassa tarkasteltavan kurssin opetussuunnitelman mukaisiin tavoitteisiin ja sisältöihin.

2.2 Matemaattisia malleja I

Opetussuunnitelma esittelee kurssin Matemaattisia malleja I (MAB3) tavoitteet ja keskeiset sisällöt seuraavasti [18, s. 126]:

TAVOITTEET

Kurssin tavoitteena on, että opiskelija

- näkee reaalimaailman ilmiöissä säännönmukaisuuksia ja riippuvuuksia ja kuvaa niitä matemaattisilla malleilla
- tottuu arvioimaan mallien hyvyttä ja käyttökelpoisuutta

KESKEISET SISÄLLÖT

- lineaarisen ja eksponentiaalisen mallin soveltaminen
- potenssiyhtälön ratkaiseminen
- eksponenttiyhtälön ratkaiseminen logaritmin avulla

Keskeisenä kurssilla ovat lineaarinen ja eksponentiaalinen malli matemaattisina malleina, potenssiyhtälön ja eksponenttiyhtälön ratkaiseminen sekä eksponenttiyhtälön ratkaisemiseen liittyvä logaritmi. Nämä asiat tulevat uutena opiskelijoille, mutta näiden lisäksi kurssilla käsitellään paljon muutakin riippuen opettajasta ja oppikirjoista. Kurssiin kuuluu usein myös kertausta funktiosta, suoran yhtälöstä ja suoraan liittyvistä ominaisuuksista (kulmakerroin, suuntakulma, leikkauspisteet ja yhdensuuntaisuus), yhtälöparista sekä verrannollisuudesta. Lisäksi kurssikirjat saattavat sisältää asiaa prosenttilaskennasta, korkolaskuista, paraabeleista sekä erilaisista kurssin aiheen sovelluksista.

Peruskoulussa opiskelijoille on muotoutunut jo hyvä pohja MAB3-kurssia varten. Kahdeksannella luokalla käsitellään melko laajasti prosenttilaskentaa, potenssin määritelmä ja laskusäännöt sekä polynomeja. Yhtälöihin on tutustuttu jo seitsemännellä luokalla, ja niitä käydään läpi vielä sekä kahdeksannella että yhdeksännellä luokalla. [15] Viimeistään yhdeksännellä luokalla tutustutaan funktioihin. Lineaarinen funktio ja suora tulevat tutuiksi. Niihin liittyvät suoran kulmakerroin, suorien yhdensuuntaisuus, suoran yhtälö ja sen muodostaminen sekä kuvaajan piirtäminen. Yhdeksännellä luokalla käydään läpi suoraan ja kääntäen verrannollisuus sekä toisen asteen funktio ja paraabeli hyvin lyhyesti. Myös yhtälöpari ja sen ratkaiseminen graafisesti ja algebrallisesti käydään yhdeksännellä luokalla. [16]

Kuten voidaan huomata, suuri osa MAB3-kurssin sisällöstä, jota ei mainita opetussuunnitelmassa, on kertausta peruskoulusta. Kertaus on tietysti aina hyväksi ja usein tarpeellista, mutta onko sitä kuitenkin turhan paljon. Heikommat opiskelijat tarvitsevat kertausta, mutta lahjakkaimmat opiskelijat voivat helposti turhautua, jos asiat ovat liian tuttuja.

Pitkällä matematiikalla MAB3-kurssin asioihin päästään jo ensimmäisellä kurssilla Funktiot ja yhtälöt (MAA1), jossa keskeisiin sisältöihin kuuluvat potenssifunktio, potenssiyhtälön ratkaiseminen, juuret ja murtopotenssi sekä eksponenttifunktio [18, s. 119]. Kyseisiin asioihin ei kuitenkaan tällä pitkän matematiikan kurssilla mennä vielä kovin tarkasti, vaan asiat lähinnä esitellään ja käydään läpi. Muita MAB3-kurssilla esiin tulevia asioita, kuten potenssin laskusäännöt, yhtälöpari, verrannollisuus, prosenttilaskenta ja neliöjuuri, on myös mukana tällä pitkän matematiikan kurssilla. Mainittuja asioita käsitellään paljon yksityiskohtaisemmin kuin tarkastellulla lyhyen matematiikan kurssilla. [14]

Varsinaisesti MAB3-kurssin keskeisintä sisältöä vastaa pitkällä matematiikalla kahdeksas kurssi Juuri- ja logaritmifunktiot (MAA8). Tällä kurssil-

la eksponenttifunktion määritelmä ja sen ominaisuudet käydään läpi hyvin tarkasti. Tämän jälkeen tulevat eksponenttiyhtälö ja -epäyhtälö. Vastaavasti myös logaritmin määritelmä ja ominaisuudet käydään läpi syvällisesti ja laajasti, paljon syvemmin kuin lyhyellä matematiikalla. Kurssilla käsitellään lisäksi logaritmfunktio ja sen ominaisuuksia sekä logaritmiyhtälö ja logaritmiepäyhtälö. Näitä ei lyhyellä matematiikalla käsitellä. Myös juurifunktio sekä kaikkien edellä mainittujen funktioiden derivaatat esiintyvät kyseisellä kurssilla. [13]

Pitkän ja lyhyen matematiikan kursseja vertaillen voisi sanoa, että lyhyen matematiikan MAB3-kurssiin on otettu pitkältä matematiikalta tärkeinä aiheina potenssiyhtälö, eksponenttiyhtälö ja logaritmi. Nämä aiheet on pyritty tarkastellulla kurssilla esittämään hyvin lyhyesti ja todella yksinkertaisesti helposti tulkittavalla tavalla. Kurssilla on esitetty selkeästi potenssi- ja eksponenttifunktio, mutta laajemmin näiden määritelmiä ja ominaisuuksia sekä logaritmfunktion määritelmää ei ole tuotu esiin. Asiat on yksinkertaistettu ja pyritty tuomaan lähemmäksi käytäntöä. Potenssi- ja eksponenttiyhtälö sekä logaritmi on kyseisellä kurssilla liitetty vahvasti matemaattisiin malleihin, ja sitä kautta asiat on tuotu helpommin lähestyttäväksi ja ymmärrettäväksi.

Omasta mielestäni pitkän matematiikan MAA8-kurssista on otettu oleellisia asioita sekä MAA1-kurssista vähän täytettä. Näistä on koottu lyhyelle matematiikalle kurssi, jonka rakenne on hyvin jäsenelty ja keskeisenä asiana on matemaattisen mallin käsittely. Kuitenkin asiaa potenssi- ja eksponenttiyhtälöistä sekä logaritmista käydään läpi melko lyhyesti eikä kovin tarkasti. Kurssille voisi tuoda vähän enemmän teoriaa kyseisistä asioista, mikä auttaisi opiskelijoita asioiden ymmärtämisessä ja oppimisessa, sekä toisi vähän haastetta kurssille. Samalla vähennettäisiin peruskoulun asioiden kertaamisen määrää ja näin innostettaisiin lahjakkaimpia opiskelijoita.

3 Matemaattinen ajattelu

Matemaattisen ajattelun käsite esiintyy usein ainedidaktisessa kirjallisuudessa, mutta myös kouluhallinnollisissa asiakirjoissa, kuten esimerkiksi opetussuunnitelmassa. Käsitteenä matemaattinen ajattelu ei ole uusi, mutta sen sisältöä on vaikea kuvailla tai määritellä yksiselitteisesti. Ainedidaktiikan kirjallisuudessa matemaattinen ajattelu määritellään usealla eri tavalla riippuen kirjoittajan lähtökohdista. Tämän vuoksi en pyri tässä tutkielmassa määrittelemään matemaattisen ajattelun tarkkaa käsitettä. Sen sijaan esitelen kahden eri suomalaisen tutkijan, didaktiikan lehtori Jorma Joutsenlahden ja dosentti Raija Yrjönsuuren, näkemyksiä matemaattisen ajattelun sisällöstä.

3.1 Lähtökohdat ja matemaattinen tieto

Didaktiikan lehtori Jorma Joutsenlahti nojautuu vahvasti tunnetun psykologian tutkijan Robert J. Sternbergin näkemykseen matemaattisesta ajattelusta. Sternberg yritti löytää yhteisesti hyväksyttävän määritelmän matemaattiselle ajattelulle keräämällä eri tutkijoiden määritelmiä. Hän kuitenkin totesi, että eri tutkijoiden erilaiset tutkimuslähtökohdat vaikuttivat siihen, mitkä matemaattisen ajattelun piirteet nousivat tarkasteltaviksi. Muodostui viisi erilaista matemaattisen ajattelun kuvausta. Kuvausten erilaiset näkökulmat painottavat kukin eri tavalla matemaattiseen ajatteluun vaikuttavia tekijöitä. [11, s. 363–364] Sternberg jakaa matemaattisen ajattelun tutkimuksen lähestymistavat seuraavasti:

Psykometrinen lähestymistapa

Informaation prosessointia tutkiva lähestymistapa

Antropologinen lähestymistapa

Pedagoginen lähestymistapa

Matematiikan lähestymistapa

Psykometrisessä lähestymistavassa keskeisenä tutkittavana käsitteenä on matematiikassa tarvittavat kyvyt, joita on useita. Tässä lähestymistavassa tutkitaan esimerkiksi mitkä kykyfaktorit ovat keskeisiä matemaattisessa ajattelussa. Informaation prosessointia tutkivassa lähestymistavassa tutkitaan matemaattisen ongelmanratkaisun kannalta oleellisia prosesseja, joista matemaattisen ajattelun ydin muodostuu. Antropologisessa lähestymistavassa lähdetään matemaattista ajattelua tarkastelemaan kulttuurien näkökulmasta. Pedagoginen lähestymistapa ottaa opettamisen näkökulman lähtökohdaksi matemaattiseen ajatteluun: toisia matematiikan käsitteitä on helppompaa opettaa tuloksetta kuin toisia. Matematiikan lähestymistavassa selvitetään niitä piirteitä, jotka ovat keskeisimpiä matemaattisessa ajattelussa, kun matematiikkaa opiskellaan puhtaasti tieteenä esimerkiksi yliopistossa. [11, s. 364–365]

Joutsenlahti painottaa erityisesti informaation prosessointia tutkivaa lähestymistapaa, jonka mukaan matemaattinen tieto on yksi keskeisimmistä käsitteistä matemaattisen ajattelun kannalta. Joutsenlahti lähestyy tiedon käsitettä psykologisen epistemologian kannalta Hän jakaa tiedon kahteen tyyppiin: konseptuaaliseen ja proseduraaliseen tietoon. [11, s. 366] Konseptuaalinen tieto on tietoa riippuvuuksista (käsitetietoa) ja proseduraalinen tieto sisältää formaalin kielen ja käsitteen symboliset esitykset sekä säännöt, toimintakaavat ja algoritmit ongelmien ratkaisemiseksi (menetelmätieto). Kaikkea tietoa ei voida kuitenkaan jakaa näihin luokkiin, ja toisaalta tieto voi sisältää molempien tiedon lajien ominaisuuksia. [10, s. 6] Esimerkiksi strategiat, joita käytetään ongelmanratkaisussa, ovat tietoja, joita ei voida

luontevasti jakaa kumpaankaan tiedon tyyppiin. Näitä Joutsenlahti kutsuu strategiatiedoiksi. Strategiat määritellään henkisinä operaatioina, joilla kognitiivisia prosesseja ohjaillaan ja kontrolloidaan erilaisissa tilanteissa. Strategioihin kuuluvat myös niiden säätelyä ohjaavat metakognitiot. Matemaattisissa strategioissa käytetään matemaattisia käsitteitä, lauseita tai algoritmeja. [12, s. 89]

Joutsenlahti siis pohjaa matemaattisen ajattelun näkemyksensä informaation prosessointia tutkivaan lähestymistapaan. Hänen mukaansa matemaattinen ajattelu on matemaattisen tiedon prosessointia. Joutsenlahti kuvaa matemaattista ajattelua seuraavasti [12, s. 103]: ”Opiskelijan matemaattinen ajattelu on hänen metakognitioidensa ohjaamaa matemaattisten tietojen (proseduraalista, konseptuaalista, strategiatietoa) prosessointia, jossa yksilö organisoii uudelleen tietoverkkoaan.” Joutsenlahden mukaan tiedonprosessoinnin näkökulmasta keskeisimpiä prosesseja matemaattisessa ajattelussa ovat ongelmanratkaiseminen ja käsitteen muodostaminen [12, s. 82]. Opiskelija käyttää matemaattista ajattelua ainakin opiskellessaan tarkoituksenmukaisesti matemaattisia käsitteitä, matematiikan ongelmanratkaisutilanteissa sekä yhdistellessään vapaasti tietojaan. Matemaattista ajattelua eivät kuitenkaan vaadi esimerkiksi pelkkien faktojen ulkoa opetteleminen ja toistaminen, mutta niiden hyödyntäminen ja soveltaminen ongelmanratkaisuisissa vaativat. Koulumatematiikalle tyypillinen matemaattisten taitojen kehittäminen tehtäviä ratkaisemalla saattaa helposti olla vain faktojen toistamista, mikä ei sinällään ole matemaattista ajattelua. [12, s. 101]

Dosentti Raija Yrjönsuuri tarkastelee matemaattista ajattelua algoritmisena ja refleктоivana, sillä matemaattisen tiedon luonne voidaan historialliselta pohjalta nähdä algoritmisena ja refleктоivana matematiikkana. Refleктоivassa matematiikassa suuntaudutaan olemassaolon pohtimiseen sekä tulevan ennakoimiseen. Refleктоiva matematiikka on täsmällinen looginen tiede, jossa ilmaisu on joko tosi tai epätosi. Siinä kohteiden spesifioidut ominaisuudet joko ovat olemassa tai eivät ole. Refleктоiva matematiikka kannustaa kehittämään oivalluksia ja tekemään deduktiivisia eli valideja päätelmiä. Siihen kuuluu älyllisiä oletuksia pelattaessa säännöillä, joista on korkean tason yksimielisyys. Algoritmisessa matematiikassa taas suuntaudutaan toimintaan. Se on työkalu tehtävien ratkaisemiseen, jolloin ei olla tekemisissä ainoastaan matemaattisen kohteen olemassaolon, vaan myös sen olemassaolon todisteiden kanssa. Algoritmisen matematiikka yrittää kehittää approksimaatioita, työvälineitä ja tuloksia. Sen oletukset saattavat vaihdella välineiden ja tehtävän tärkeyden mukaan. [24, s. 205]

Kun käytetään algoritmista ja refleктоivaa ajattelua yhdessä, saadaan aikaan ennalta arvaamattoman laajaa ja syvällistä osaamista [24, s. 217]. Yrjönsuuri toteaa: ”Matemaattinen ajattelu on ajattelun tyyli, joka ilmenee matemaattisena toimintana. Matemaattisen ajattelun sisäiset mallit ovat välttämättömiä käsitteiden ymmärtämiseksi ja käyttämiseksi.” [24, s. 205]

Yrjönsuuri kallistuu myös tutkija Leone Burtonin näkemykseen mate-

maattisesta ajattelusta. Burtonin mukaan matemaattinen ajattelu on ajattelun tyyli, joka on tunnistettavasti matemaattista toimintaa [23, s. 24]. Hän on määritellyt matemaattisen ajattelun keskeisiksi toiminnoiksi [24, s. 206]:

- täsmäntäminen
- otaksumien esittäminen
- yleistäminen
- vakuuttuminen
- koettelu ja periaatteen ymmärtäminen

Täsmäntäminen on induktiivisen lähestymistavan lähtöpiste. Kohdattaessa tehtävä tunnustellaan, valikoidaan, kokeillaan malleja, sovitetaan elementtejä ja pohditaan. Otaksumien esittäminen antaa tutkituista esimerkeistä sopivan yhteyden. Käytetään erilaisia päättelysääntöjä ja heuristista tietoa, jolloin yrityksiä erehdyksien määrä vähenee. Sopivin yhteys ilmaistaan ja vahvistetaan. Yleistämistä käytetään, jotta saadaan järjestys ja merkitys laajaan asiatietoon ja kehitellään uusi rakenne ja sisäinen malli kyseessä olevan tiedon pohjalta. Vakuuttumisessa saadaan tiedon yleistäminen liikkumaan henkilöstä yleisöön. Koettelu määrittellään matemaattiseksi käsitykseksi, heuristiseksi väitteeksi. Se johdetaan matematiikan lauseista, eikä sitä välttämättä voida todentaa empiirisesti. Koettelu nähdään yksittäisen tapauksen kautta tapahtuvana päättelynä. Koetteluja voidaan tarkastella yrityksinä konstruoida vakuuttavat argumentit, ei universaalit eikä lopulliset. Periaatetta käytetään tarkoittamaan yleistämistä, kaavoja tai ohjeita. Periaatteen ymmärtäminen voidaan testata pyytämällä opiskelijaa soveltamaan sitä. Sen soveltaminen ei kuitenkaan ole sama kuin käyttäminen assosioituna taitona. Edellä esitellyistä voidaan koettelu ja vakuuttumista pitää refleктоivana ajatteluna. Kaikki nämä toiminnat johtavat matemaattisen ajattelun kehittymiseen. [24, s. 206–207]

3.2 Matemaattisen ajattelun kehittäminen

Joutsenlahti tutkii väitöskirjassaan [12] opiskelijoiden matemaattisen ajattelun kehittymistä opiskelijoiden matemaattisten tehtävien suoritusten kautta. Hän nojautuu Wilsonin luomaan matemaattisten tehtävien luokituksen malliin, joka pohjautuu Bloomin taksonomiaan. Bloomin taksonomia on Benjamin Bloomin johdolla kehitetty, tunnettu luokitus, jossa oppimisen kannalta tärkeät tiedolliset tavoitteet on jaettu kuuteen tasoon: mieleenpalauttaminen, ymmärtäminen, soveltaminen, analysoiminen, syntetisoiminen ja arvioiminen [5]. Wilsonin taksonomiaa taas on käytetty useissa sekä kansallisissa että kansainvälisissä koulusaavutustesteissä ja tutkimuksissa. Wilsonin malli on hierarkkinen ja se sisältää neljä tasoa: laskutaito, ymmärtäminen, soveltaminen ja analyysi. Tasojen rajat voivat olla vaikeasti erotettavissa, sillä tehtävän ratkaisu saattaa usein sisältää molempia tasoja. [12, s. 122]

Alimmalla laskutaidon tasolla on kyse tosiasioiden muistamisesta. Siinä ei edellytetä päätöksentekoa eikä monimutkaista muistamista. Opittuja algoritmeja tulee osata käyttää tehtävää ratkaistaessa, mutta algoritmeja ei tarvitse osata valita. Tason keskeisiä piirteitä ovat yksinkertaiset muistamisharjoitukset ja rutiininomaiset käsittelyharjoitukset, terminologian tunteminen sekä algoritmien käytön hallitseminen. [12, s. 121–122]

Ymmärtämisen tasossa tehtävän ratkaisijalta vaaditaan päätöksentekestä siitä, kuuluuko tehtävä ratkaisijan tuntemaan käsitteen alaan vai ei. Ratkaisijalta edellytetään tehtävän ratkaisuun johtavaa kykyä noudattaa tietynlaista ajatusketjua. Keskeisiä piirteitä ovat käsitteiden tietäminen, periaatteen, säännön tai yleistyksen tunnistaminen, matemaattisen rakenteen tietäminen, tehtävien eri osien muuntaminen muodosta toiseen ja menetelmällinen yleistäminen sekä tehtävän loogisuuden seuraaminen ja ymmärtäminen. [12, s. 121–122]

Kolmannessa soveltamisen tasossa edellytetään useiden tehtävän ratkaisuun johtavien reaktioiden peräkkäistä hallitsemista. Tehtävän ratkaisija joutuu tekemään päätöksiä, jotka ovat usein rutiiniluontoisia, sillä tehtävien rakenne on tuttu. Soveltamisen tason keskeisiä piirteitä ovat rutiinitehtävän ratkaiseminen, vertailujen tekeminen, tietojen erotteleminen sekä mallien ja rakenneyhtäläisyyksien hyväksikäyttö. [12, s. 121–122]

Korkeimman analysoinnin tasoon kuuluvat luovuus ja keksimisen kokemukset. Ongelman voi joutua erittelemään ennalta tuntemattomalla tavalla osiin ja yhdistelemään osaratkaisut uudelleen, jotta saadaan ratkaisu. Ratkaisemisessa saatetaan vaatia uusien muuttujien tai käsitteiden välisten suhteiden havaitsemista, jotka eivät ole aikaisemmista malleista tuttuja. Keskeiset piirteet ovat ei-rutiinitehtävän ratkaiseminen, relaation löytäminen, todistuksen konstruointi sekä yleistyksen muodostaminen ja koettelu. [12, s. 122–123]

Joutsenlahti toteaa Wilsonin mallin tasojen erottelun ja tehtävien luokittelun jaon mukaisesti olevan hankalaa johtuen osaksi opiskelijoiden erilaisista lähtötilanteista. Tämän vuoksi Joutsenlahti käyttää sekä liseniaatintutkimuksessaan että väitöskirjassaan pelkistetympää tehtäväluokittelua, johon kuuluu kolme kognitiivista tasoa:

1. Laskutaito/Ymmärtäminen
2. Ymmärtäminen/Soveltaminen
3. Soveltaminen/Analyysi

Näiden tasojen avulla pystytään arvioimaan tehtävien vaikeusastetta ja minikäläistä ajatteluprosessia tehtävien ratkaiseminen vaatii. Kunkin tason tunnuspiirteinä ovat Wilsonin mallin tasojen kuvaukset. Alimmalla tasolla tärkeitä ovat faktojen muistaminen ja algoritmien hallintaan liittyvät taidot eli proseduraalisen tiedon hallinta. Keskimmaisella tasolla on hallittava proseduureja ja kyttävä siirtämään ja soveltamaan niitä vastaavan tyyppiisiin

tilanteisiin. Ylimmällä tasolla korostuvat konseptuaalinen tieto ja strategia-tieto ongelmanratkaisutehtävissä. [12, s. 123]

Yrjönsuuri selvittää vuonna 1990 julkaistussa tutkimuksessaan [23] lukio-laisten matemaattisen ajattelun oppimista. Hän toteaa muun muassa, että matematiikan oppimisessa lukiolaisen algoritminen ajattelu on yleisempää kuin refleктоiva ajattelu. Tätä tutkiessaan hän esittää matemaattisen ajattelun ominaisuudet kahtena hierarkina: kognitiivisen taidon käyttäminen, joka vastaa algoritmista ajattelua, sekä refleктоiva ajattelu. Kognitiivisen taidon käyttämisen hän jakaa edelleen kahteen alueeseen: Ensimmäinen on symbolien ja operaatioiden käyttäminen, joka on lähellä edellä mainittua wilsonilaista laskutaitoa sekä periaatteen ja säännön tietämistä. Toinen on matemaattisten käsitteiden ominaisuuksien tietäminen, joka vastaa matemaattisen kielen ja symbolien merkityksen täsmentämistä. Myös refleктоiva ajattelu jaetaan kahteen alueeseen: matemaattisten rakenteiden yleistäminen, joka vastaa otaksumien arvailua ja yleistämistä, sekä ongelman ratkaisun koettelu, joka vastaa koettelua ja vakuuttumista sekä analysoimisen tasoa wilsonilaisessa hierarkiassa. [23, s. 143–144]

Yrjönsuuri on kehittänyt matematiikan tehtävän ratkaisemisen mallin, joka hänen mukaansa on hyödyllinen apu matemaattisen ajattelun opettamisessa. Jokaisessa mallin vaiheessa voidaan käyttää hyvin erilaista matemaattista ajattelua. [24, s. 213] Ratkaisemisen vaiheet ovat:

1. Matemaattisen tehtävän tavoite
2. Verbaalisesta kielestä siirtyminen symboliseen
3. Matemaattisten käsitteiden, lauseiden ja operaattoreiden ominaisuuksien pohtiminen
4. Matemaattisen operaattorin käyttäminen
5. Ongelman rajojen arviointi ja ratkaisun esittäminen

Ensimmäisen vaiheen tarkoituksena on tiedostaa alkutilan ja lopputilan sisällöllinen muutos. Vaiheeseen sisältyvät ongelman havaitseminen, hahmottaminen ja kuvallinen esittäminen sekä mielikuva tuloksesta ja mahdollisesti konkretisoiminen. Kun yritetään tiedostaa tehtävän ongelmaa, tulisi löytää matematiikan rakenteellista tai menetelmällistä samanlaisuutta aikaisempiin tehtäviin. Erityisen tärkeää olisi hallita induktiivinen päättely, käsitteiden ominaisuuksien tietäminen ja kokonaisuuden hahmottaminen. [24, s. 213–214]

Toinen vaihe tarkoittaa reaali maailman tapahtuman ja kielen muuttamista matematiikan kielelle. Kun alku- ja lopputila on saatu esitettyä matematiikan lauseina, on mietittävä muuttujien valinnat ja lisäehdot. Tärkeitä ovat sekä refleктоiva ja yleistävä ajattelu että käsitteiden ja rakenteiden koettelu. [24, s. 214]

Kolmas vaihe antaa yhteydet alkutilan muuttamiseen lopputilaksi. Tässä vaiheessa lauseita muutetaan alkutilasta lopputilaksi tai päinvastoin muuttamalla lopputilaa lähemmäksi alkutilaa. Oleellista on matemaattisten rakenteiden merkityksien ja periaatteiden tietäminen, jotta valitut muutokset sopivat kokonaisuuteen ja tukevat operaattorin tai menetelmän valintaa. [24, s. 214]

Neljäs vaihe on aikaisempien vaiheiden jälkeen rutiininomaista ja voidaan suorittaa päässä laskien, laskimella tai muilla apuvälineillä. Tavoitteena on oppia käsitteiden ja rakenteiden koettelulla erittelemään niitä tietoja, ominaisuuksia ja muuttujia, joita tietyn operaation käyttäminen edellyttää. Yleensä käytetään algoritmista ajattelua ratkaisuun pääsemiseksi. [24, s. 214–215]

Viimeisessä vaiheessa tarkoituksena on ottaa huomioon kaikki mahdollisuudet, kriittisesti verrata saatuja rinnakkaistuloksia tavoiteltuun lopputilaan sekä täsmentää paras tulos. Tärkeää on pohtia, ollaanko todella vastauksessa ongelmaan, johon on tarkoitus vastata. Lopuksi saatu tulos esitetään reaali maailman kielellä. [24, s. 215]

4 Lukion lyhyen matematiikan opetuksen tavoite

Lukion päätavoitteena on antaa opiskelijalle yleissivistys ja valmiudet jatko-opintoihin. Matematiikan kannalta tämä merkitsee ainakin perusteiden hallintaa, mutta minkälaiset valmiudet ovat riittävät jatko-opintoja ajatellen. Tämä tietenkin riippuu siitä, mille alalle tulevat jatko-opinnot suuntautuvat. Opiskelijat valitsevat lukiossa pitkän tai lyhyen matematiikan sen perusteella, kuinka paljon he tulevat tarvitsemaan matematiikkaa tulevilla alallaan ja kuinka paljon he pitävät matematiikasta. Kaikilla olisi kuitenkin syytä olla hyvä pohja, sillä jokaiseen alaan sisältyy jonkinasteista matematiikan opiskelua. Pitkältä matematiikalta saadaan jo melko kattava pohja, mutta miten on lyhyellä matematiikalla. Lyhyen matematiikan opiskelijoita suuntautuu moniin eri aloihin kuten humanistisiin, yhteiskuntatieteellisiin tai kaupallisiin. Eri aloilla kuitenkin vaaditaan eritasoista osaamista matematiikan suhteen, joten minkälainen pohja olisi hyvä saada lukiossa lyhyellä matematiikalla. Matemaattinen pohjatieto olisi hyvä olla sellainen, että oppilaiden matemaattinen näkemys olisi suhteellisen laaja ja melko hyvin hallinnassa. Mitä tämä sitten tarkoittaa?

Yksi tärkeä tavoite opetus suunnitelman mukaan on opiskelijan kannustaminen elinikäiseen oppimiseen ja itsensä jatkuvaan kehittämiseen. Tähän liittyen on tärkeää, että opiskelijalle muodostuu positiivinen kuva matematiikasta ja hän saa myönteisiä kokemuksia siitä. Näin pyritään estämään, ettei opiskelija näe matematiikkaa vain välttämättömänä ja pakollisena oppiai-

neena. Opiskelijoita tulee innostaa ja kannustaa matematiikan opiskeluun, ja heidän positiivista matematiikkakuvaansa tulee pitää yllä.

Esimerkiksi luokanopettajaksi aikovat usein suorittavat lukiossa lyhyen matematiikan, ja he tulevat tulevaisuudessa opettamaan lapsille ja nuorille matematiikkaa. Jos heille on muotoutunut jo peruskoulussa negatiivinen kuva matematiikasta, eikä sitä ole lukiossa onnistuttu muuttamaan, siirtyy samanlainen negatiivinen asenne helposti myös heidän oppilailleen.

Myös sairaanhoitajat tarvitsevat matematiikkaa esimerkiksi lääkelaskuissa. Jos lukiossa tuleville sairaanhoitajaopiskelijoille on muodostunut negatiivinen kuva matematiikasta, ei heitä luultavasti innosta matematiikan opiskelu seuraavassakaan opiskelupaikassa. Tällöin lääkelaskuja ei välttämättä jakseta opetella tarpeeksi hyvin, jolloin virheiden mahdollisuus työelämässä suurenee.

Hyvin usein ajatellaan, että opiskelijat, jotka valitsevat lukiossa lyhyen matematiikan, eivät pidä matematiikasta. Nämä ennakkokäsitykset vaikuttavat opiskelijoiden motivaatioon, mutta myös opettajien työmotivaatioon. Tällöin käy helposti niin, että lyhyen matematiikan opetukseen ei nähdä yhtä paljon vaivaa kuin pitkän. Kuitenkin monet opiskelijat valitsevat lyhyen matematiikan, koska heillä ei ole aikaa suorittaa kaikkia pitkän matematiikan kursseja, vaikka he pitävät matematiikasta ja ovat hyviä siinä. Tämän takia lyhyen matematiikan tulisi saada yhtä paljon huomiota kuin pitkän. Myös lyhyen matematiikan opiskelijoita suuntautuu aloille, joissa tarvitaan matematiikkaa.

Olellainen matematiikan opetuksen tavoite on tutustuminen matemaattisen ajattelun malleihin. Joutsenlahden näkemyksiin nojautuen tämä voidaan nähdä tutustumisena matemaattisen tiedon prosessoinnin malleihin. Matemaattisen ajattelun keskeisinä prosesseina Joutsenlahti mainitsee ongelmanratkaisemisen ja käsitteen muodostamisen, joten opiskelijan pitäisi tutustua erilaisiin ongelmanratkaisun ja käsitteen muodostamisen malleihin. Yrjönsuuren näkemyksiin pohjautuen matemaattisen ajattelun mallit voidaan nähdä ajattelun malleina, jotka ilmenevät matemaattisena toimintana. Näistä toiminnoista keskeisiä ovat täsmentäminen, otaksumien esittäminen, yleistäminen, vakuuttuminen sekä koettelu ja periaatteen ymmärtäminen.

Opetuksen tavoitteena on myös matematiikan yleinen hallinta, johon kuuluvat perusideat, rakenteet, puhuttu ja kirjoitettu matematiikan kieli, laskeminen ja ongelmanratkaisutaidot. Tämä tavoite kokoaa hyvin pohjaa, jollainen opiskelijalle halutaan luoda sekä elämää että jatko-opintoja varten. Se tiivistää opittavan matematiikan lähtökohdat, mutta ei paneudu niihin tarkemmin.

Myös matemaattisen tiedon käsite nousee esiin, kun puhutaan matematiikan tavoitteista. Opiskelijan tulisi saada valmiuksia hankkia, käsitellä ja ymmärtää matemaattista tietoa. Joutsenlahti jakaa kyseisen matemaattisen tiedon konseptuaaliseen riippuvuuksiin käsittelevään käsitetietoon ja proseduraaliseen symbolit, säännöt, toimintakaavat ja algoritmit sisältävään me-

netelmätietoon. Näiden kahden joukkoon kuuluu vielä matemaattiset strategiat sisältävä strategiatieto. Yrjönsuuri taas jakaa tiedon toimintaan suuntautuvaan algoritmiseen ja olemassaoloa pohtivaan reflektointitietoon. Molempien tutkijoiden näkemyksistä voidaan nähdä yhteisenä, että opiskelijan tulisi kyetä selvittämään, tarkastelemaan ja ymmärtämään matemaattisia käsitteitä, ilmaisuja, riippuvuuksia, säännönmukaisuuksia, strategioita sekä symboleja, kaavoja, työkaluja ja algoritmeja.

Lyhyen matematiikan kolmannen kurssin tavoite on harjaannuttaa opiskelijan taitoja matemaattisten mallien käytössä ja hallinnassa. Reaalimaailmassa esiintyy monenlaisia säännönmukaisuuksia ja riippuvuuksia, joita pystytään kuvailemaan matemaattisten mallien avulla esimerkiksi erilaisilla kuvaajilla, funktioilla ja yhtälöillä. Tärkeää on myös osata arvioida käytettävien mallien sopivuutta ja kelpoisuutta asiayhteyteen. Tavoite on tärkeä nykyisen kaltaisessa yhteiskunnassa, jossa hyvin monia asioita pystytään mallintamaan monin erilaisin menetelmin.

Tietokoneiden, ohjelmistojen ja informaatioteknologian vauhdikas kehitys kasvattaa matemaattisen mallinnuksen merkitystä nykyisessä yhteiskunnassa [22, s. 3]. Matemaattinen mallintaminen pohjautuu matemaattisen mallin käsitteelle. Matemaattinen malli on monimutkaisesta todellisuudesta matematiikan kielellä tehty yksinkertaistus. Matemaattisen mallintamisen avulla ilmiöitä voidaan tarkastella usein reaalimaailman järjestelmiä halvemmalla ja turvallisemmin. Testausta voidaan tehdä myös olosuhteissa, joita on vaikea luoda reaalimaailmassa. Matemaattisen mallintamisen opettaminen on erityisen tärkeää yliopistoissa, mutta jonkinlaista näkemystä on hyvä luoda jo lukioissa, sillä se valaisee matematiikan käyttöä teollisuudessa ja yhteiskunnassa. [22, s. 11–13]

Koottuna lyhyen matematiikan opetuksen tavoite on luoda pohja jatkoopinnoille ja elämässä selviytymiselle. Tähän sisältyvät olennaisina matemaattisen ajattelun mallit, matematiikan perusideat ja rakenteet, matematiikan kieli, laskeminen, ongelmanratkaisutaidot, positiivinen asenne matematiikkaa kohtaan sekä matemaattisen tiedon hallinta. MAB3-kurssin tavoite on matemaattisiin malleihin tutustuminen, mikä on omasta mielestäni erityisen tärkeää yhteiskunnassamme, jossa teknologia ja mallintaminen kehittyvät kovaa vauhtia.

5 Potenssi-, eksponentti- ja logaritmifunktio

Tässä luvussa käsitellään teoriaa potenssi-, eksponentti- ja logaritmifunktioista, joista muodostetut yhtälöt ovat tarkastellun MAB3-kurssin tärkeintä sisältöä. Luvun asiat pohjautuvat lähes kokonaan Edwarsin ja Penneyn teokseen *Calculus - Early Transcendentals* [6], jota käytetään muun muassa Tampereen teknillisellä yliopistolla insinöörimatematiikan oppikirjana.

Monissa yliopistotason matematiikan kirjoissa esitellään ensin potens-

sifunktio. Sitten tulevat eskponenttifunktion yleinen muoto ja sen käänteisfunktiona logaritmifunktion yleinen muoto. Näiden funktioiden erikoistapauksina esitellään lopulta luonnollinen logaritmifunktio ja luonnollinen eskponenttifunktio. Edwardsin ja Penneyn teoksessa, kuten muutamassa muusakin kirjassa, käydään edellä olleiden asioiden jälkeen vielä tarkemmin ja perustellen luonnollinen logaritmifunktio ja sen käänteisfunktio eli luonnollinen eskponenttifunktio. Näiden määritelmien avulla pystytään perustelemaan yleisten eskponentti- ja logaritmifunktioiden ominaisuuksia.

Tässä luvussa esitellään ensin potenssifunktio ja lähdetään sitten liikkeelle luonnollisen logaritmin määritelmästä, jota kautta päästään luonnollisen logaritmifunktion käänteisfunktioon eli luonnolliseen eskponenttifunktioon. Lopussa tulevat yleinen eskponenttifunktio ja yleinen logaritmifunktio.

5.1 Potenssifunktio

Tässä luvussa esitettävät potenssifunktion määritelmä ja sen ominaisuudet pohjautuvat Edwardsin ja Penneyn teokseen [6, s. 24–25].

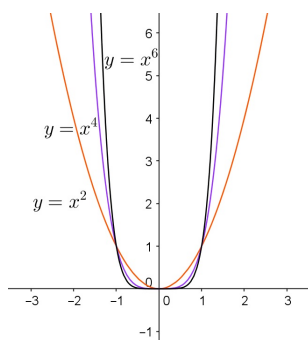
Funktiota $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^k$, missä $k \in \mathbb{R}$ on vakio, kutsutaan *potenssifunktioksi*. Kun $k = 0$, saadaan vakiofunktio $f(x) = 1$. Potenssifunktion kuvaajan muoto riippuu eskponentista k .

Kun k on positiivinen kokonaisluku eli $k = n$, missä n on positiivinen kokonaisluku, niin muotoa x^k olevat potenssifunktion kuvaajat kulkevat origon ja pisteen $(1, 1)$ kautta sekä riippuen siitä, onko n pariton vai parillinen, myös pisteen $(-1, 1)$ tai $(-1, -1)$ kautta. Muutamia potenssifunktion kuvaajia on esitetty kuvissa 1 ja 2. Voidaan todeta, että

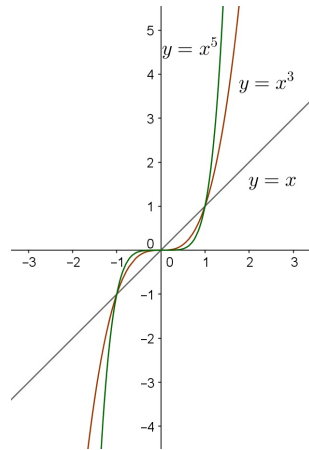
$$x^n \rightarrow +\infty, \quad \text{kun } x \rightarrow +\infty$$

ja

$$x^n \rightarrow \begin{cases} +\infty, & \text{kun } x \rightarrow -\infty, \text{ jos } n \text{ on parillinen} \\ -\infty, & \text{kun } x \rightarrow -\infty, \text{ jos } n \text{ on pariton.} \end{cases}$$



Kuva 1: Parillisen eskponentin potenssifunktion kuvaajia

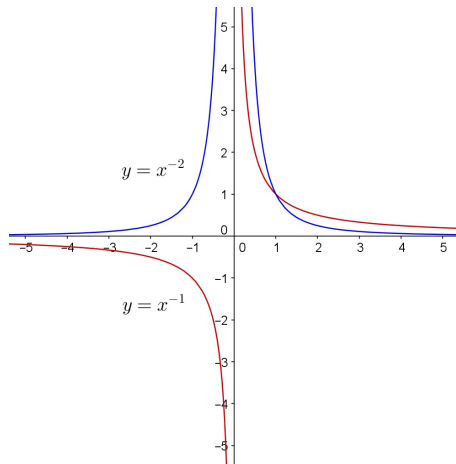


Kuva 2: Parittoman eksponentin potenssifunktion kuvaajia

Jos k on negatiivinen kokonaisluku eli $k = -m$, missä m on positiivinen kokonaisluku, niin

$$f(x) = x^k = x^{-m} = \frac{1}{x^m}.$$

Kuvaajat $y = x^{-1}$ ja $y = x^{-2}$ on esitetty kuvassa 3. Huomataan, että 0 ei kuulu tämän funktion määrittelyjoukkoon. Koska hyvin lähellä nollaa olevien lukujen käänteislukujen itseisarvot ovat hyvin suuria, kuvaajat lähestyvät $+\infty$ tai $-\infty$, kun x lähestyy nollaa.



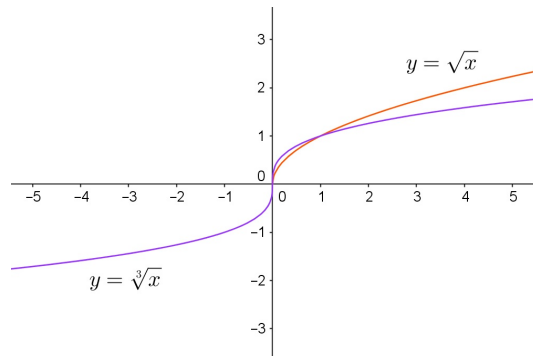
Kuva 3: Funktioiden x^{-1} ja x^{-2} kuvaajat

Jos k on rationaaliluku eli $k = m/n$, missä m ja n ovat kokonaislukuja, voidaan kirjoittaa

$$f(x) = x^k = x^{m/n} = \sqrt[n]{x^m}.$$

Jos n on pariton, niin $\sqrt[n]{x^m}$ on määritelty kaikilla reaaliluvuilla x , kun m on positiivinen, ja kaikilla nollasta eroavilla reaaliluvuilla x , kun m on negatiivinen. Jos taas n on parillinen ja m pariton, niin $\sqrt[n]{x^m}$ ei ole määritelty

negatiivisilla reaaliluvuilla x . Jos n ja m ovat molemmat parillisia, niin $\sqrt[n]{x^m}$ on määritelty kaikilla reaaliluvuilla x . Funktiota $f(x) = x^{m/n}$ kutsutaan *juurifunktioksi*, kun $m = 1$, ja merkitään $f(x) = x^{1/n} = \sqrt[n]{x}$. Juurifunktioiden $x^{1/2}$ ja $x^{1/3}$ kuvaajat on esitetty kuvassa 4.



Kuva 4: Funktioiden $x^{1/2}$ ja $x^{1/3}$ kuvaajat

Kun k on irrationaaliluku, voidaan x^k määritellä vain, kun $x \geq 0$.

5.2 Luonnollinen logaritmi

Tämän luvun luonnollisen logaritmin määritelmä ja sen ominaisuudet pohjautuvat suurelta osin Edwarsin ja Penneyn teokseen [6, s. 476-479].

Määritelmä 5.1. Kun x on positiivinen reaaliluku, määritellään *luonnollinen logaritmifunktio* $\ln x :]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ integraalina

$$(5.1) \quad \ln x = \int_1^x \frac{1}{t} dt.$$

Luonnollinen logaritmi $\ln x$ voidaan tulkita geometrisesti kuvaajan $y = 1/t$ ja t -akselin välisenä positiivisena pinta-alana välillä $1 < t < x$, kun $x > 1$, ja negatiivisena pinta-alana välillä $x < t < 1$, kun $0 < x < 1$.

Lause 5.1. *Logaritmilla $\ln x$ on seuraavat ominaisuudet*

$$(5.2) \quad \ln 1 = 0$$

ja

$$(5.3) \quad D_x \ln x = \frac{1}{x},$$

kun $x > 0$.

Todistus. [3, s. 229] Yhtälö (5.2) seuraa suoraan määritelmästä 5.1 ja yhtälön (5.3) todistamiseksi todetaan funktion $\ln x$ olevan jatkuvan funktion integraali ja käytetään integraalilaskennan lausetta

$$D_x \left(\int_1^x f(t) dt \right) = f(x).$$

□

Koska funktio $\ln x$ on derivoituva positiivisilla luvuilla x , niin funktio on myös jatkuva positiivisilla luvuilla x . Lisäksi koska

$$D_x \ln x = \frac{1}{x} > 0 \quad \text{ja} \quad D_x^2 \ln x = -\frac{1}{x^2} < 0$$

positiivisilla luvuilla x , niin $\ln x$ on aidosti kasvava funktio, jonka kuvaaja on alaspäin kovera. Luonnollisen logaritmfunktion kuvaaja on esitetty kuvassa 5. Funktiolle pätee

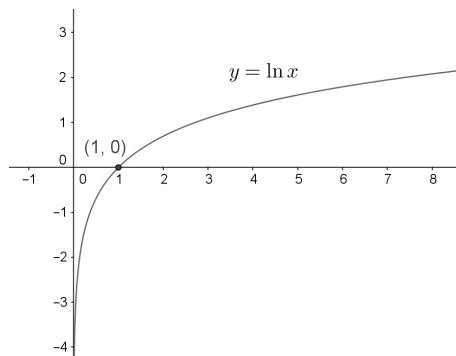
$$(5.4) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \ln x = +\infty \quad \text{ja} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty.$$

Seuraavaksi määritellään Neperin luku $e \approx 2,71828$.

Määritelmä 5.2. Luku e on reaaliluku siten, että

$$(5.5) \quad \ln e = 1.$$

Siis kuvaaja $y = \ln x$ leikkaa suoran $y = 1$ pisteessä $x = e$.



Kuva 5: Luonnollisen logaritmfunktion kuvaaja

Lause 5.2 (Luonnollisten logaritmien laskusäännöt). *Kun x ja y ovat positiivisia reaalilukuja ja r on rationaaliluku, niin*

$$(5.6) \quad \ln xy = \ln x + \ln y,$$

$$(5.7) \quad \ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln x,$$

$$(5.8) \quad \ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y,$$

$$(5.9) \quad \ln(x^r) = r \ln x.$$

Todistus. Yhtälön (5.6) todistus: Kiinnitetään väliaikaisesti muuttuja y , jotta muuttujaa x voidaan tarkastella itsenäisenä ja muuttujaa y vakiona. Tällöin

$$D_x \ln xy = \frac{D_x(xy)}{xy} = \frac{y}{xy} = \frac{1}{x} = D_x \ln x.$$

Täten funktioilla $\ln xy$ ja $\ln x$ on sama derivaatta muuttujan x suhteen. Tästä voidaan päätellä, että

$$\ln xy = \ln x + C$$

jollakin vakiolla C . Vakion C määrittämiseksi sijoitetaan $x = 1$ yhtälön molemmille puolille. Tiedetään, että $\ln 1 = 0$, jolloin saadaan $C = \ln y$. Näin on todistettu yhtälö (5.6).

Yhtälön (5.7) todistus: Aloitetaan derivoimalla funktio $\ln(1/x)$:

$$D_x \left(\ln \frac{1}{x} \right) = \frac{-\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}} = -\frac{1}{x} = D_x(-\ln x).$$

Todetaan, että funktioilla $\ln(1/x)$ ja $-\ln x$ on sama derivaatta, joten

$$\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln x + C$$

jollakin vakiolla C . Sijoitetaan $x = 1$ yhtälön molemmille puolille, jolloin saadaan $C = 0$ ja yhtälö (5.7) on näin todistettu.

Yhtälön (5.8) todistus: Koska $x/y = x \cdot (1/y)$, niin yhtälö (5.8) seuraa suoraan yhtälöistä (5.6) ja (5.7).

Yhtälön (5.9) todistus: Tunnetusti $D_x x^r = r x^{r-1}$, kun r on rationaaliluku. Tällöin saadaan, että

$$D_x(\ln x^r) = \frac{r x^{r-1}}{x^r} = \frac{r}{x} = D_x(r \ln x).$$

Täten

$$\ln(x^r) = r \ln x + C,$$

jossa C on vakio. Sijoittamalla $x = 1$ yhtälöön, saadaan $C = 0$ ja yhtälö (5.9) on todistettu. Rajoitus, että r on rationaaliluku poistuu myöhemmin, kun tutkitaan yleistä eksponenttifunktiota.

□

5.3 Luonnollinen eksponenttifunktio

Luonnollinen eksponenttifunktio ja sen ominaisuudet määritellään kuten Edwardsin ja Penneyn teoksessa [6, s. 480-482]. Edellä esitetyllä luonnollisella logaritmifunktiolla on olemassa käänteisfunktio, joka on määritelty kaikilla reaaliluvuilla x . Osoitetaan tämä seuraavaksi.

Luonnollisen logaritmifunktion $\ln x$ todettiin edellisessä luvussa olevan jatkuva ja aidosti kasvava, kun $x > 0$. Näin ollen funktio on injektio. Olkoon y jokin reaaliluku. Koska luonnollinen logaritmifunktio saa mielivaltaisen pieniä ja suuria arvoja, niin on olemassa positiiviset reaaliluvut a ja b siten, että $\ln a < y < \ln b$. Lisäksi koska funktio on jatkuva, on olemassa $x > 0$ siten, että $a < x < b$ ja $\ln x = y$. Koska $\ln x$ on aidosti kasvava funktio, on olemassa vain yksi x , jolle pätee $\ln x = y$. Tästä johtuen luonnollinen logaritmifunktio on surjektio. Luonnollinen logaritmifunktio on siis bijektio, koska se on sekä injektio että surjektio. Sillä on siis olemassa käänteisfunktio, joka on määritelty kaikilla reaaliluvuilla x . Koska y määrittää täsmälleen yhden arvon x , niin x on muuttujan y funktio. Tämä muuttujan y funktio x on luonnollisen logaritmifunktion käänteisfunktio ja sitä kutsutaan luonnolliseksi eksponenttifunktioksi. Kyseistä funktiota merkitään \exp , jolloin

$$x = \exp y \quad \text{edellyttäen, että} \quad y = \ln x$$

Vaihtamalla muuttujien x ja y paikkaa saadaan seuraava määritelmä.

Määritelmä 5.3. *Luonnollinen eksponenttifunktio* $\exp : \mathbb{R} \rightarrow]0, \infty[$ määritellään kaikilla reaaliluvuilla x seuraavasti

$$(5.10) \quad \exp x = y \quad \text{jos ja vain jos} \quad \ln y = x.$$

Määritelmän mukaisesti $\exp x$ on sellainen positiivinen luku, jonka luonnollinen logaritmi on x . Määritelmästä seuraa, että

$$(5.11) \quad \ln(\exp x) = x$$

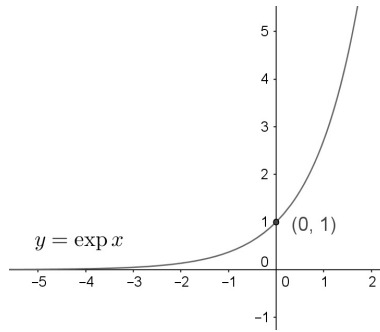
kaikilla x , ja

$$(5.12) \quad \exp(\ln y) = y$$

kaikilla $y > 0$.

Koska $\exp x$ ja $\ln x$ ovat toistensa käänteisfunktioita, niiden kuvaajat $y = \exp x$ ja $y = \ln x$ ovat toistensa peilikuvia suoran $y = x$ suhteen. Luonnollisen eksponenttifunktion kuvaaja on esitetty kuvassa 6. Se saa positiivisia arvoja kaikilla reaaliluvuilla x ja sille pätee yhtälön $\ln 1 = 0$ ja rajojen (5.4) nojalla seuraavat

$$(5.13) \quad \exp 0 = 1, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \exp x = +\infty \quad \text{ja} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \exp x = 0.$$



Kuva 6: Luonnollisen eksponenttifunktion kuvaaja

Palataan Neperin lukuun e . Kun r on rationaaliluku, niin yhtälön (5.9) mukaan $\ln(e^r) = r \ln e = r$. Kuitenkin määritelmän 5.3 mukaan $\ln(e^r) = r$ jos ja vain jos $\exp r = e^r$. Täten $\exp x = e^x$, kun x on rationaaliluku.

Määritellään e^x sekä rationaali- että irrationaaliluvuille x seuraavasti

$$(5.14) \quad e^x = \exp x.$$

Tällöin yhtälöt (5.10)-(5.12) muuntuvat muotoon

$$(5.15) \quad e^x = y \quad \text{jos ja vain jos} \quad \ln y = x,$$

$$(5.16) \quad \ln(e^x) = x$$

kaikilla reaaliluvuilla x ja

$$(5.17) \quad e^{\ln x} = x$$

kaikilla $x > 0$.

Luvun e potenssit toteuttavat eksponenttien laskusäännöt.

Lause 5.3 (Luonnollisten eksponenttien laskusäännöt). *Kun x ja y ovat reaalilukuja ja r on rationaaliluku, niin*

$$(5.18) \quad e^x e^y = e^{x+y},$$

$$(5.19) \quad e^{-x} = \frac{1}{e^x},$$

$$(5.20) \quad \frac{e^x}{e^y} = e^{x-y}$$

$$(5.21) \quad (e^x)^r = e^{rx}.$$

Todistus. Luonnollisten logaritmien laskusäännöillä (Lause 5.2) ja yhtälön (5.16) avulla saadaan

$$\ln(e^x e^y) = \ln(e^x) + \ln(e^y) = x + y = \ln(e^{x+y}).$$

Yhtälö (5.18) seuraa tästä ja siitä, että luonnollinen logaritmifunktio on aidosti kasvava eli injektio. Vastaavasti

$$\ln\left(\frac{e^x}{e^y}\right) = \ln(e^x) - \ln(e^y) = x - y = \ln(e^{x-y})$$

ja yhtälö (5.20) on todistettu. Samoin

$$\ln(e^x)^r = r \ln(e^x) = rx = \ln(e^{rx})$$

ja yhtälö (5.21) seuraa tästä. Yhtälö (5.19) todistetaan lähes vastaavasti käyttäen hyväksi yhtälöä (5.21):

$$\ln(e^{-x}) = \ln(e^x)^{-1} = -\ln(e^x) = \ln\left(\frac{1}{e^x}\right).$$

□

Luonnollista eksponenttifunktiota e^x sanotaan e -kantaiseksi eksponenttifunktioksi ja luonnollista logaritmifunktiota $\ln x$ e -kantaiseksi logaritmifunktioksi. Seuraavaksi määritellään yleiset eksponentti- ja logaritmifunktiot muodossa a^x ja $\log_a x$, joissa kantana on positiivinen luku $a \neq 1$.

5.4 Yleiset eksponenttifunktiot

Tämän luvun teorian lähteenä on Edwadsin ja Penneyn teos [6, s. 482-484].

Jos r on rationaaliluku, niin yhtälöistä (5.17) ja (5.21) seuraa, että

$$a^r = (e^{\ln a})^r = e^{r \ln a}.$$

Tämän vuoksi määritellään positiivisen reaaliluvun a mielivaltainen potenssi kaikilla reaaliluvuilla x seuraavasti

$$(5.22) \quad a^x = e^{x \ln a}.$$

Seuraavassa esimerkissä käytetään hyväksi yhtälöä 5.22.

Esimerkki 5.1. (vrt. [6, s. 482])

$$5^{\sqrt{3}} = e^{\sqrt{3} \ln 5} \approx e^{2,7876} \approx 16,2425.$$

Funktiota $f : \mathbb{R} \rightarrow]0, \infty[$, $f(x) = a^x$ kutsutaan a -kantaiseksi eksponenttifunktioksi. Huomataan, että $a^x > 0$ kaikilla x ja $a^0 = e^0 = 1$ kaikilla $a > 0$.

Lause 5.4 (Eksponenttien laskusäännöt). *Kun x ja y ovat reaalilukuja ja a positiivinen reaaliluku, niin*

$$(5.23) \quad a^x a^y = a^{x+y},$$

$$(5.24) \quad a^{-x} = \frac{1}{a^x},$$

$$(5.25) \quad \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y},$$

$$(5.26) \quad (a^x)^y = a^{xy}.$$

Todistus. Eksponenttien laskusäännöt seuraavat suoraan yhtälöstä (5.22) ja luonnollisten eksponenttien laskusäännöistä (Lause 5.3). Yhtälö (5.23) todistetaan seuraavasti

$$a^x a^y = e^{x \ln a} e^{y \ln a} = e^{(x \ln a) + (y \ln a)} = e^{(x+y) \ln a} = a^{x+y}.$$

Vastaavasti todistetaan yhtälö (5.25):

$$\frac{a^x}{a^y} = \frac{e^{x \ln a}}{e^{y \ln a}} = e^{(x \ln a) - (y \ln a)} = e^{(x-y) \ln a} = a^{x-y}.$$

Huomataan, että yhtälön (5.22) nojalla $\ln a^x = x \ln a$. Yhtälö (5.26) saadaan tämän avulla todistettua:

$$(a^x)^y = e^{y \ln(a^x)} = e^{xy \ln a} = a^{xy}.$$

Yllä oleva pätee kaikille reaaliluvuille x ja y , joten rajoitus, että r on rationaalinen yhtälössä $(e^x)^r = e^{rx}$ voidaan unohtaa. Käyttämällä yhtälöä (5.26) voidaan vielä todistaa yhtälö (5.24):

$$a^{-x} = (a^x)^{-1} = e^{-x \ln a} = \frac{1}{e^{x \ln a}} = \frac{1}{a^x}.$$

□

Kun $a > 1$ eli $\ln a > 0$, niin rajojen (5.13) nojalla

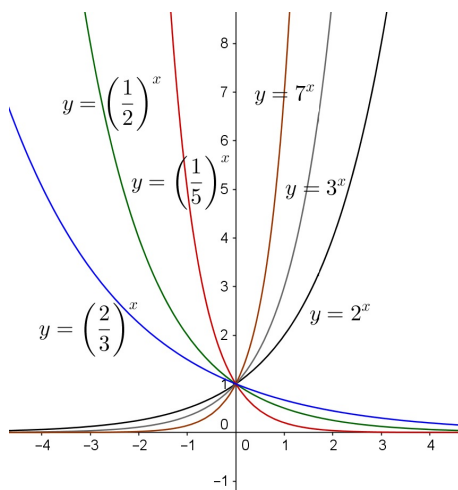
$$(5.27) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} a^x = +\infty \quad \text{ja} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0.$$

Koska

$$(5.28) \quad D_x a^x = D_x(e^{x \ln a}) = (\ln a) e^{x \ln a} = a^x \ln a$$

on positiivinen kaikilla arvoilla x , kun $a > 0$, niin $f(x) = a^x$ on muuttujan x aidosti kasvava funktio. Kuvaaja $y = a^x$ muistuttaa luonnollisen eksponenttifunktion kuvaajaa $y = e^x$, mutta sen jyrkkyys riippuu luvun a suuruudesta.

Kun $0 < a < 1$ eli $\ln a < 0$, niin derivoinnista (5.28) seuraa, että $f(x) = a^x$ on aidosti vähenevä funktio ja rajat (5.27) ovat vaihtuneet. Olipa $a > 1$ tai $0 < a < 1$, niin derivoinnista (5.28) seuraa, että $D_x(D_x a^x) = a^x (\ln a)^2 > 0$ kaikilla reaaliluvuilla x , jolloin funktion $f(x) = a^x$ kuvaaja on ylöspäin kovera kaikilla muuttujan x arvoilla. Eksponenttifunktion kuvaajia eri luvun a arvoilla on esitetty kuvassa 7.



Kuva 7: Eksponenttifunktion kuvaajia

5.5 Yleiset logaritmifunktiot

Luvun teoriassa käytetään lähteenä Edwadsin ja Penneyn teosta [6, s. 484-485].

Kun $a > 1$, yleinen eksponenttifunktio a^x on jatkuva ja aidosti kasvava kaikilla reaaliluvuilla x , ja se saa kaikki positiiviset reaalilukuarvot. Tämän vuoksi sillä on käänteisfunktio, joka on määritelty kaikilla $x > 0$. Funktion a^x käänteisfunktiota kutsutaan *a-kantaiseksi logaritmifunktioksi* ja sitä merkitään $\log_a x$. Funktiolle $\log_a x :]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ pätee

$$(5.29) \quad y = \log_a x \quad \text{jos ja vain jos} \quad x = a^y.$$

Yllä olevasta voidaan johtaa seuraavat yhtälöt [6, s. 185]

$$(5.30) \quad a^{\log_a x} = x,$$

kun $x > 0$, ja

$$(5.31) \quad \log_a(a^y) = y$$

kaikilla reaaliluvuilla y .

Luonnollinen logaritmifunktio on *e*-kantainen logaritmifunktio: $\ln x = \log_e x$. Kymmenkantaista logaritmifunktiota $\log_{10} x$ merkitään usein pelkästään $\log x$. Eri kantaluvun logaritmifunktion kuvaajia on esitetty kuvassa 8.

Lause 5.5 (Logaritmien laskusäännöt). *Kun $a \neq 1$ on positiivinen reaaliluku sekä x ja y ovat positiivisia reaalilukuja, pätee*

$$(5.32) \quad \log_a xy = \log_a x + \log_a y,$$

$$(5.33) \quad \log_a \left(\frac{1}{x} \right) = -\log_a x,$$

$$(5.34) \quad \log_a \left(\frac{x}{y} \right) = \log_a x - \log_a y,$$

$$(5.35) \quad \log_a x^y = y \log_a x.$$

Yhtälössä (5.35) y voi olla myös negatiivinen tai nolla.

Todistus. Yhtälöt voidaan todistaa helposti eksponenttien laskusääntöjen (Lause 5.4) ja yhtälön (5.30) avulla. Todistuksia ei ole esitetty lähdekirjassa, joten olen itse muotoillut seuraavat todistukset. Yhtälön (5.32) todistus:

$$a^{\log_a xy} = xy = a^{\log_a x} a^{\log_a y} = a^{\log_a x + \log_a y}.$$

Koska eksponenttifunktio on aidosti kasvava tai vähenevä eli injektio, $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$.

Yhtälön (5.34) todistus:

$$a^{\log_a(x/y)} = \frac{x}{y} = \frac{a^{\log_a x}}{a^{\log_a y}} = a^{\log_a x - \log_a y}$$

ja koska eksponenttifunktio on aidosti kasvava tai vähenevä $\log_a(x/y) = \log_a x - \log_a y$. Tämä voidaan myös todistaa käyttäen yhtälöitä (5.32) ja (5.33) sekä tietoa $x/y = x \cdot 1/y$. Yhtälön (5.35) todistus:

$$a^{\log_a x^y} = x^y = (a^{\log_a x})^y = a^{y \log_a x},$$

joten vastaavasti kuten edellä $\log_a x^y = y \log_a x$.

Yhtälön (5.33) todistus:

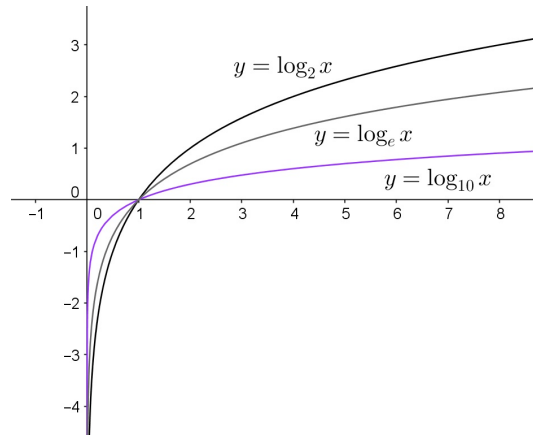
$$a^{\log_a(1/x)} = \frac{1}{x} = x^{-1} = (a^{\log_a x})^{-1} = a^{-\log_a x}$$

ja jälleen $\log_a(1/x) = -\log_a x$. □

Seuraavassa keksimässäni esimerkissä hyödynnetään logaritmien laskusääntöjä.

Esimerkki 5.2.

$$\log_2 6 + \log_2 12 - \log_2 9 = \log_2 \frac{6 \cdot 12}{9} = \log_2 8 = \log_2 2^3 = 3 \log_2 2 = 3$$



Kuva 8: Logaritmifunktion kuvaajia

Erikantaiset logaritmit ovat kytkeytyneet toisiinsa seuraavasti

$$(5.36) \quad (\log_a b)(\log_b c) = \log_a c.$$

Tämä pätee kun a , b ja c ovat positiivisia lukuja sekä $a, b \neq 1$.

Yhtälö (5.36) voidaan todistaa vastaavasti kuin edellinen lause:

$$a^{\log_a c} = c = b^{\log_b c} = (a^{\log_a b})^{\log_b c} = a^{(\log_a b)(\log_b c)}$$

ja koska eksponenttifunktio a^x on jatkuva ja aidosti kasvava tai vähenevä eli injektio, niin yhtälö (5.36) pätee.

Jos sijoitetaan $c = a$ yhtälöön (5.36), saadaan

$$(\log_a b)(\log_b a) = 1.$$

Kun tähän sitten sijoitetaan $b = e$, saadaan

$$(5.37) \quad \ln a = \frac{1}{\log_a e}.$$

Yhtälöstä (5.36) saadaan myös seuraava muoto

$$(5.38) \quad \log_b c = \frac{\log_a c}{\log_a b}.$$

Tämän yhtälön avulla voidaan b -kantainen logaritmi vaihtaa a -kantaiseksi. Yhtälön avulla voidaan siis vaihtaa logaritmin kanta, niin kuin on tehty seuraavassa esimerkissä.

Esimerkki 5.3. (vrt. [2, s. 182])

$$3^{\log_9 5} = 3^{(\log_3 5)/(\log_3 9)} = 5^{1/\log_3 3^2} = 5^{1/2} = \sqrt{5}$$

5.6 Teorian tarkastelu ja esimerkkejä

Edellä esitelty teoria on paljon laajempi ja pidemmälle viety kuin mitä lyhyen matematiikan kolmannella kurssilla käsitellään. Lyhyen matematiikan kohdalla on tehty valinta, että vain tiettyjä asioita käydään läpi ja hyvin yksinkertaistetusti. Miksi kirjoissa sitten käsitellään asioita niin suppeasti? Voisiko käsiteltäviä asioita viedä lyhyellä matematiikalla pidemmälle?

Yhtä laajasti asioita ei voida käsitellä lyhyen matematiikan kurssilla kuin tässä tutkielmassa. Opiskelijoilla ei ole vaadittavaa tietoa muun muassa integroinnista, derivoinnista ja käänteisfunktioista, jotka ovat oleellisia edellä esitetyissä määritelmässä. Tästä johtuen on perusteltua, että kurssilla asiat on esitetty yksinkertaisemmin. Tällöin esitettyjen asioiden perusteleva on kuitenkin jätettävä suurelta osin pois, koska opiskelijoilla ei ole tarvittavaa tietoa ymmärtää perusteluja. Kaikesta huolimatta esimerkiksi potenssi- ja eksponenttifunktiota voitaisiin kurssilla käydä hieman tarkemmin ja ottaa mukaan myös logaritmifunktio hyvin yksinkertaisesti. Näitä voisi hahmottaa opiskelijoille esimerkiksi edellä olleiden kuvaajien avulla. Logaritmifunktion käsittely voisi auttaa logaritmin ymmärtämisessä.

Jos asioita halutaan viedä vielä pidemmälle, voitaisiin lyhyellä matematiikalla käsitellä jo aiemmillä kursseilla käänteisfunktio, jolloin logaritmifunktio pystyttäisiin määrittelemään eksponenttifunktion käänteisfunktiona. Käänteisfunktio voitaisiin esittää hyvin yksinkertaisesti. Mielestäni logaritmifunktion mieltäminen eksponenttifunktion käänteisfunktiona auttaa logaritmin ymmärtämisessä ja perustelee sen läpikäymistä muutenkin kuin eksponenttiyhtälön ratkaisukeinona. Tällöin kurssin teoria noudattaisi paremmin yliopistotason matematiikkaa. Myös matemaattisen ajattelun kehittymistä tukee asioiden perusteellisempi käyminen esimerkiksi käänteisfunktion avulla.

Miksi kirjoissa ja kouluissa sitten jätetään käsittelemättä edellä mainittuja asioita? Ovatko ne liian vaikeita lyhyen matematiikan opiskelijoille? Eikö niitä tarvita elämässä tai tulevassa ammatissa? Miksi opetussuunnitelmassa ei vaadita kyseisiä asioita?

Eksponentti- ja logaritmifunktiolla voidaan mallintaa kasvamista ja hajoamista. Moniin luonnon prosesseihin ja muihin ilmiöihin liittyy suureita, jotka kasvavat tai vähenevät nopeudella, jota voidaan mallintaa kyseisillä funktioilla. Tätä hyödynnetään myös tarkastellulla lyhyen matematiikan kurssilla, jossa potenssi- ja eksponenttiyhtälöt liitetään vahvasti mallintamiseen.

Seuraavaksi käydään läpi muutamia esimerkkejä, jotka ovat hyvin tyyppisiä lyhyen matematiikan soveltavia tehtäviä. Ensimmäinen esimerkki on tehtävä Aryan ja Lardnerin teoksesta *Mathematical analysis for Business, Economics, and the Life and Social Sciences* [4, s. 203]. Toisen ja kolmannen esimerkin olen keksinyt itse. Näiden jälkeen on vielä esitetty esimerkkejä, joita lyhyen matematiikan opiskelijat pystyisivät laskemaan, jos lyhyen matematiikan teoriaa vietäisiin hieman pidemmälle.

Esimerkki 5.4. Maapallon väkiluku oli vuoden 1976 alussa 4 miljardia. Jos kasvunopeus on 2 % vuodessa, kuinka paljon väkiluku on vuonna 2026? Minä vuonna väkiluku ylittää 12 miljardia?

Maapallon väkiluku kasvaa 2 % vuodessa, joten vuoden 1976 väkiluku 4 miljardia kerrotaan joka vuosi kertoimella 1,02. Väkiluvun kasvua voidaan kuvata matemaattisella mallilla, jossa käytetään eksponenttifunktiota $f(x) = 4 \cdot 1,02^x$. Vuoden 2026 väkiluku saadaan sijoittamalla eksponenttifunktion lausekkeeseen $x = 50$, jolloin $f(50) = 4 \cdot 1,02^{50} \approx 10,8$. Väkiluku 50 vuoden kuluttua eli vuonna 2026 on 10,8 miljardia.

Toisen kysymyksen vastaus selvitetään ratkaisemalla, millä muuttujan x arvolla funktion arvo on 12. Saadaan eksponenttiyhtälö, josta ratkaistaan muuttujan x arvo.

$$\begin{aligned} 4 \cdot 1,02^x &= 12 \\ 1,02^x &= \frac{12}{4} \\ \log 1,02^x &= \log 3 \\ x \cdot \log 1,02 &= \log 3 \\ x &= \frac{\log 3}{\log 1,02} \approx 55,4781 \end{aligned}$$

Väkiluku ylittää 12 miljardia 56 vuoden kuluttua eli vuonna 2032.

Esimerkki 5.5. Säästötilille talletettiin 2 500 euroa vuonna 2001. Vuonna 2015 tilillä oli rahaa 3 060 euroa. Kuinka suuri oli tilin vuosittainen korkoprosentti?

Annetuista tiedoista voidaan muodostaa potenssiyhtälö: Tiedetään, että tilillä oli alussa rahaa 2 500 euroa. Tämä rahamäärä kasvoi vuosittain tietyn samansuuruisen määrän korkoa eli rahamäärä kerrottiin joka vuosi tietyllä kertoimella q . 14 vuoden kuluttua tilillä oli rahaa 3060 euroa, joten

$$\begin{aligned} 2500 \cdot q^{14} &= 3060 \\ q^{14} &= \frac{3060}{2500} \\ q^{14} &= 1,224 \\ q &= \sqrt[14]{1,224} \approx 1,0145 \end{aligned}$$

Tilin vuosittainen korkoprosentti on 1,45 prosenttia.

Esimerkki 5.6. Aineen puoliintumisaika on 1 590 vuotta. Kuinka monta prosenttia ainetta on jäljellä 10 000 vuoden kuluttua? Milloin määrä on vähentynyt 80 %?

Kyseessä on eksponentiaalinen väheneminen, jota voidaan kuvata funktiolla $f(t) = A \cdot 0,5^{t/1590}$, jossa A on aineen määrä alussa ja t on aika vuosina. Kymmenen tuhannen vuoden kuluttua jäljellä olevan aineen määrä saadaan sijoittamalla $t = 10000$ edellä olevaan funktioon. Saadaan $f(10000) = A \cdot 0,5^{10000/1590} \approx A \cdot 0,013$. Aineen määrä on siis vähentynyt 1,3 prosenttiin.

Aika, jolloin aineen määrä on vähentynyt 80 % saadaan ratkaisemalla t yhtälöstä $A \cdot 0,5^{t/1590} = A \cdot 0,80$ seuraavasti:

$$\begin{aligned} A \cdot 0,5^{t/1590} &= A \cdot 0,80 \\ 0,5^{t/1590} &= 0,80 \\ \log 0,5^{t/1590} &= \log 0,80 \\ \frac{t}{1590} \log 0,5 &= \log 0,80 \\ \frac{t}{1590} &= \frac{\log 0,5}{\log 0,80} \\ t &= \frac{\log 0,5}{\log 0,80} \cdot 1590 \approx 4938,99 \end{aligned}$$

Aineen määrä on vähentynyt 80 % 4939 vuoden kuluttua.

Seuraavan esimerkin logaritmiyhtälö pystytään ratkaisemaan, kun tunnetaan logaritmien laskusäännöt sekä aikaisemmin tässä luvussa esiteltyjä logaritmien ominaisuuksia. Kyseisen yhtälön tai muun hieman hankalamman logaritmiyhtälön ratkaiseminen ei ole kaikista tärkeintä lyhyen matematiikan opiskelijoille. Toisaalta, jos jotakin asiaa mallinnetaan logaritmifunktion avulla, olisi hyvä osata ratkaista logaritmiyhtälö ja tähän usein tarvitaan logaritmin laskusääntöjä. Esimerkki on tehtävä Adamsin kirjasta *Calculus: a complete course* [2, s. 183].

Esimerkki 5.7. Ratkaistaan yhtälö $2 \log_3 x + \log_9 x = 10$:

$$\begin{aligned} 2 \log_3 x + \log_9 x &= 10 \\ 2 \log_3 x + \frac{\log_3 x}{\log_3 9} &= 10 \\ 2 \log_3 x + \frac{\log_3 x}{\log_3 3^2} &= 10 \\ 2 \log_3 x + \frac{1}{2} \log_3 x &= 10 \\ \frac{5}{2} \log_3 x &= 10 \\ \log_3 x &= 4 \\ 3^{\log_3 x} &= 3^4 \\ x &= 3^4 = 81 \end{aligned}$$

Seuraava esimerkki pystytään laskemaan, kun on tutustuttu luonnolliseen logaritmiin ja Neperin lukuun sekä käsitelty laajemmin potenssi- ja eksponenttiyhtälön ratkaisemista. Esimerkki on tehtävä Aryan ja Lardnerin teoksesta [4, s. 229]. Tehtävä ei sinällään ole vaikea, mutta se voi opiskelijalle näyttää hankalalta.

Esimerkki 5.8. Uusi tuote esiteltiin kaupoissa ajankohdalla $t = 0$ ja siitä lähtien sen kuukausittainen myynti on kasvanut seuraavan kaavan mukaisesti

$$S = 4000(1 - e^{-kt})^3.$$

Jos myynti on 2000 kymmenen kuukauden kuluttua ($S = 2000$, kun $t = 10$), niin määritä kerroin k .

$$\text{Ratkaistaan yhtälö } 2000 = 4000(1 - e^{-10k})^3.$$

$$\begin{aligned} 2000 &= 4000(1 - e^{-10k})^3 \\ \frac{2000}{4000} &= (1 - e^{-10k})^3 \\ \frac{1}{2} &= (1 - e^{-10k})^3 \\ \sqrt[3]{\frac{1}{2}} &= \sqrt[3]{(1 - e^{-10k})^3} \\ \frac{1}{\sqrt[3]{2}} &= 1 - e^{-10k} \\ e^{-10k} &= 1 - \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \\ \ln e^{-10k} &= \ln \left(1 - \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \right) \\ -10k \ln e &= \ln \left(1 - \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \right) \\ -10k &= \ln \left(1 - \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \right) \\ k &= -\frac{1}{10} \ln \left(1 - \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \right) \approx 0,16 \end{aligned}$$

Kerroin k on 0,16.

Useita käytäntöön liittyviä tehtäviä kuten väestönkasvua, korkolaskuja ja radioaktiivista hajoamista pystytään laskemaan tarkastellun kurssin tiedoilla. Kun asioissa mennään pidemmälle, esimerkiksi logaritmfunktioon, logaritmien laskusääntöihin ja luonnolliseen logaritmiin, ei käsiteltävissä asioissa ole juurikaan käytännön kannalta oleellista, josta olisi opiskelijalle hyötyä esimerkiksi arjessa. Tehtävät ovat lähinnä hyvin laskemispainotteisia ja käytännönläheisten tehtävien määrä on pieni. Tämän vuoksi on hyvä, että tarkastellulla lyhyen matematiikan kurssilla keskitytään suppeampaan teoriaan ja painotetaan asioiden kertaamista. Näin opiskelijoille luodaan hyvä matemaattinen pohjatieto. Joillakin aloilla tarvitaan pidemmälle vietyä matemaattista teoriaa, mutta sitä opiskelijat oppivat tulevaisuuden opiskelupaikoissaan.

6 Oppikirja-analyysi

Oppikirjoja olen lähtenyt tarkastelemaan huomioimalla ensin niiden rakennetta ja ulkoasua. Tämän jälkeen olen perehtynyt tarkemmin kirjoihin ja pyrkinyt vertailemaan niiden sisältöjä ja esitystapoja. Esimerkkejä ja tehtäviä olen tarkastellut luokittelemalla niitä kahdella eri tavalla. Lopuksi olen vertaillut kirjoissa annettavia laskinohjeita.

6.1 Kirjojen esittely

Tässä tutkielmassa tarkastellaan kolmea lyhyen matematiikan Matemaattisia malleja I -kurssin (MAB3) kirjoja. Ensimmäinen on Sanoma Pro Oy:n kustantama Lyhyt matikka 3 [1], toinen on WSOY:n kustantama Lukiolaisen matematiikka 3 [9] ja kolmas on kustannusosakeyhtiö Otavan Kertoma 3! [21].

6.1.1 Lyhyt matikka 3

Lyhyt matikka 3 -kirja on rakenteeltaan yksinkertainen. Kirja koostuu kuudesta luvusta, joista jokainen alkaa luvun aihepiiriin johdattelevalla ongelmalla tai johdantoesimerkillä. Tämän jälkeen on muutamia esimerkkejä ja niiden välissä teoriaa. Esimerkkien tarkoitus on opastaa löydetyt tiedon hyväksikäyttöön ja syventämiseen. Tekijöiden mukaan esimerkit on laadittu niin, että opiskelija pystyy omaksumaan ne myös itsenäisesti. Teoriaosuudet on selkeästi erotettu tekstistä paksulla turkoosilla marginaaliviivalla. Väriykseltään kirja on muuten melkein kokonaan mustavalkoinen muutamaa kuvaa lukuun ottamatta. Teoriaosuuksia on jäsennely otsikoilla, ja joidakin tärkeitä kaavoja on korostettu turkooseilla laatikoilla. Jokaisen luvun lopussa on harjoitustehtäviä, jotka on esitetty kahtena vaativuudeltaan samantasoisena sarjana. Kirjan tekijät neuvovat, että sarjaa I voidaan käyttää oppitunneilla harjoitteluun ja sarjasta II voidaan valita kotitehtävät. Kirja tukee myös symbolisen laskimen käyttöä antamalla tekstissä ohjeita. Nämä kohdat on merkitty marginaaliin laskinsymbolilla.

Kirjan lopusta löytyy kertausluku, jonka avulla voidaan kerrata koko kurssi. Tämän jälkeen on kertaustehtäviä, jotka seuraavat samaa otsikointia kuin kertausluku. Kertausosuuden lopuksi on vielä kolme vaativuustasoltaan erilaista tehtäväsarjaa. Kaikkiin kirjan tehtäviin löytyy vastaukset kirjan lopusta.

Kirjan Käyttäjälle-johdannosta saa vaikutelman, että kirja on suunniteltu niin, että opiskelijan on helppo käydä sitä läpi myös itsenäisesti tarkoituksena edetä omatoimisesti omaan tahtiin. Opettajajohtoiseksi kirjaa ei siis ole tarkoitettu. Luvut lähtevät ongelmasta, joka johdattaa teoriaan. Teoria on esitetty hyvin yksinkertaisesti ja selkeästi. Harjoitustehtävistä voi valita kahdesta sarjasta, joten tehtäviä ainakin riittää. Koko kirja on helppo lopuksi

kerrata kertausluvun ja kertaustehtävien avulla. Kirjan rakenne on suunniteltu niin, että sen sisältö voidaan käydä luku kerrallaan kuudentoista 75 minuutin oppitunnin aikana.

6.1.2 Lukiolaisen matematiikka 3

Lukiolaisen matematiikka 3 -kirjasta tulee heti ainakin itselleni mieleen fyysikan tai kemian oppikirja, mikä johtunee runsaasta kuvien määrästä ja selkeästä rakenteesta. Kirja sisältää neljä suurempaa lukua, jotka koostuvat useammista alaluvuista. Jokaisessa luvussa esiintyy teoriaa ja esimerkkejä vuorotellen. Tärkeimmät teoriaan liittyvät asiat on esitetty vihreissä laati-koissa. Harjoitustehtävät on sijoitettu alalukujen loppuun. Tekijöiden mukaan tehtävissä edetään lyhyistä perustehtävistä laajempaa näkemystä soveltaviin tilanteisiin. Tekstin yhteydessä esiintyy myös laskinviitteitä, jotka on koottu kirjan lopussa olevaan laskinliitteeseen. Liite sisältää aiheisiin liittyviä laskinohjeita.

Jokaisen neljän pääluvun lopussa on kertaustehtäviä, joista luvun aiheita pystyy helposti kertaamaan. Kirjan lopussa on myös kertaustiivistelmä, jossa käydään lyhyesti läpi luvuittain teoriaa ja esimerkkejä. Tämän jälkeen on vielä lyhyt kertaustehtävistö. Kaikkien kirjan tehtävien vastaukset on koottu kirjan loppuun. Kirja sisältää lisäksi kaksi laajempaa tutkimustehtävää kolmannen ja neljännen pääluvun lopussa. Näihin tehtäviin opiskelija voi perehtyä itsenäisesti, jos tunnilla ei ehditä.

Lukiolaisen matematiikka -kirjan tekijöiden mukaan kirjassa esitetään perusasiat selkeästi ja tiiviisti. Opiskelijaa kannustetaan olemaan aktiivisesti tunnilla mukana ja keskittymään opetuksen seuraamiseen. Tästä saa käsityksen, että kirja on vain pienenä osana opetusta ja tärkeämpää on, mitä oppitunneilla käydään. Kirja ei siis tunnu tukevan kovin hyvin opiskelijan itsenäistä opiskelua, vaan se painottaa opettajan pitämiä oppitunteja.

6.1.3 Kertoma 3!

Kertoma 3! -kirja on pirteä oranssin ja vihreän värin sekoitus, jossa on myös melko paljon kuvia. Kirja koostuu kahdeksasta luvusta. Jokaisen luvun alussa on yksi tai kaksi lyhyttä tutkimustehtävää. Tämän jälkeen alkaa koko luvun asiat sisältävä usein pitkäkin teoriaosuus, jonka seassa on esimerkkejä, lisää tutkimustehtäviä sekä keskustelua virittäviä tehtäviä. Teoriaa on jäsennelty otsikoiden avulla selkeästi ja tärkeät kaavat ovat keltaisissa laati-koissa. Tekstiä on runsaasti ja sen joukkoon on myös ripoteltu huutomerkkein varustettuja tärkeitä huomioita. Lisäksi kirjassa on erottuvia tietokortteja, jotka kertovat muun muassa historian henkilöistä ja muista mielenkiintoisista asioista. Varsinaiset harjoitustehtävät on sijoitettu lukujen loppuun. Jotkut tehtävistä ovat ryhmätehtäviä ja ne erottuvat omalla symbolillaan. Jokaisen luvun otsikon perässä on myös lyhyt kuvaus luvun tavoitteista.

Kirjan lopussa on kertausosio esimerkkeineen sekä lisätehtäviä luvuittain. Lisäksi löytyy kolme harjoituskoetta. Harjoitustehtävien, lisätehtävien ja harjoituskokeiden vastaukset löytyvät kirjan lopusta. Tutkimustehtäviin, keskustelua virittäviin tehtäviin sekä ryhmätehtäviin ei ole vastauksia. Ihan kirjan lopussa on englanninkielinen sanasto. Kirjassa on esitetty tuntisuunnitelma kirjan läpikäymiseen sekä 45 minuutin että 75 minuutin oppitunneille.

Kirjan tekijät uskovat matematiikan oppimisen tapahtuvan tutkimalla, toimimalla, kokeilemalla ja kertomalla. Tähän viittaavat myös kirjan tutkimustehtävien, harjoitustehtävien ja keskustelua herättävien tehtävien suuri määrä. Kirja herättää pohtimaan ja miettimään asioita yhdessä. Suuri teorian määrä viittaa siihen, että opiskelija pystyy myös itsenäisesti opiskelemaan asioita kirjan avulla. Kirja vaikuttaakin kannustavan opiskelijaa tutkimaan ja keskustelemaan matematiikasta yhdessä muiden kanssa.

6.2 Kirjojen sisällön vertailu

Tässä luvussa keskitytään vertailemaan oppikirjojen sisältöjä ja asioiden esitystapoja. Ensin tarkastellaan, miten oppikirjat alkavat ja kuinka niissä johdatellaan kurssin asiaan. Tämän jälkeen vertaillaan kurssin varsinaisen asian esitystapoja lineaarisesta mallista ja suorasta sekä eksponentiaalisesta mallista ja siihen liittyvistä potenssi- ja eksponenttiyhtälöistä sekä logaritmistä. Lopuksi selvitetään, mitä muita aiheita oppikirjoissa käsitellään.

6.2.1 Miten kirjat alkavat?

Tarkasteltavat oppikirjat alkavat kukin melko erilaisesti. Lyhyt matikka -kirja menee heti suoraan asiaan ja alkaa käsitellä kulmakerrointa ja suoraa. Lukiolaisen matematiikka -kirja aloittaa ensimmäisen pääluvun matemaattisen mallin selittämällä sekä esittelemällä lyhyesti lineaarisen ja eksponentiaalisien kasvun. Myös reaalityyppiset välit ja funktion käsite kerrataan. Kirjan aloitus on perusteltu, koska kurssin aiheena on matemaattiset mallit. On järkevää, että heti kurssin alussa kerrotaan, mistä koko kurssilla on kyse: mitä matemaattinen malli tarkoittaa, mihin sitä käytetään ja miten se rakennetaan. Yhtälöiden ja funktioiden tarpeellisuus matemaattisen mallin luomisessa tuodaan myös hyvin esiin, jolloin perustellaan funktion ja suoran kertaamista. Reaalityyppiset välit eivät kovin selkeästi liity kurssin asioihin, joten asian käsittely on hieman irrallinen kirjassa. Myös funktion kertaamisen tarpeellisuutta voidaan pohtia. Funktion pitäisi kuitenkin olla jo hyvin hallinnassa peruskoulusta. Kirjassa funktio tosin esitetään tavalla, jolla se liitetään tärkeäksi osaksi matemaattista mallintamista, ja näin se voidaan nähdä oleelliseksi osaksi kurssin sisältöä.

Kertoma-kirjassa ensimmäinen luku Työvälineitä kertaa aiemmin opittuja asioita, joita kurssilla tullaan tarvitsemaan. Luku on suunniteltu yhdessä keskusteltavaksi ja pohdittavaksi. Siinä kerrataan monipuolisesti asioita eri-

laisten tutkimustehtävien ja keskustelua herättävien tehtävien avulla. Kirja alkaa varsinaisesti toisesta luvusta ja kyseisen luvun rakenne muistuttaa hyvin paljon Lukiolaisen matematiikka -kirjan ensimmäistä lukua. Ensimmäiseksi selitetään, mitä tarkoitetaan matemaattisilla malleilla, mihin niitä voidaan käyttää ja mitä voidaan mallintaa. Samalla esitellään lineaarinen ja eksponentiaalinen malli. Kirjassa tulee myös perusteltua funktioiden ja suoran kertaaminen. Seuraavaksi kirjassa kerrataan funktio hieman laajemmin kuin Lukiolaisen matematiikka -kirjassa. Funktio liitetään selkeästi matemaattiseen malliin kertomalla ihan aluksi, että kurssilla käydään vain yhden muuttujan funktion avulla esitettäviä malleja. Funktiot liitetään vielä vahvasti esimerkein matemaattisiin malleihin. Luvun lopuksi kerrataan hyvin lyhyesti verrannollisuus, joka toimii matemaattisena mallina.

Sekä Lukiolaisen matematiikka- että Kertoma-kirjan aloitukset toimivat hyvänä johdantona matemaattiseen malliin. Niissä perustellaan kirjassa kerrattavat asiat kuten funktio ja suora. Kertoma-kirjan lyhyt ja kertaava luku Työvälineitä ei ole sisällöltään välttämätön ja se saatetaan jättää kurssilla käsittelemättä ajan puutteen vuoksi. Kirjassa on muutenkin paljon asiaa käsiteltävänä. Kyseinen luku toimii kuitenkin hyvänä kertauksena opiskelijalle, jos asiat ovat päässeet unohtumaan. Lyhyt matikka -kirjan aloitus ei muiden tavoin anna minkäänlaista johdatusta kurssiin tai matemaattiseen malliin. Tällöin opiskelijalle jää helposti epäselväksi kurssin aihe ja miksi tulevia asioita opiskellaan.

6.2.2 Lineaarinen malli ja suora

Suora on yksi oleellinen aihe MAB3-kurssilla, vaikka se ei varsinaisesti kuulu lukion opetussuunnitelmassa kurssin keskeisiin sisältöihin. Se toimii kuitenkin johdantona lineaarisuuteen ja lineaariseen malliin sekä kertauksena yläkoulun asioista. Yläkoulussa opetetaan suoraa jo jonkin verran, joten lukuun ottamatta suoran yhtälön muodostamisen kaavaa $y - y_1 = k(x - x_1)$ sekä suoran suuntakulmaa ovat kurssilla käytävät asiat jo ennestään tuttuja. Jokaisessa kirjassa suora tulee melko alussa: Lyhyt matikka -kirjassa heti ensimmäiset luvut käsittelevät suoraa. Lukiolaisen matematiikka pääsee suoraan toisessa pääluvussa ja Kertoma kolmannessa.

Tarkastelluissa oppikirjoissa käsitellään suorasta melko samanlaisia asioita. Joitakin poikkeamia kuitenkin löytyy. Kaikissa kirjoissa käydään läpi muun muassa kulmakerroin, suorien yhdensuuntaisuus, suoran yhtälö, suoran piirtäminen, suoran yhtälön muodostaminen sekä suorien leikkauspiste. Lyhyt matikka -kirjassa ei esitellä suoran suuntakulmaa, mikä tehdään muissa tarkastelluissa kirjoissa. Kertoma-kirjassa käsitellään lisäksi suoran yhtälön normaalimuoto, suorien kohtisuoruus ja suoran normaali. Lisäksi esimerkin avulla määritetään pisteen etäisyys suorasta. Näitä asioita ei käsitellä yläkoulun puolella, joten ne tuovat opiskelijoille uutta ja vähän haastavampaa teoriaa.

Lineaarisen mallin ja suoran teoriaan käytetty sivumäärä ja harjoitustehtävien lukumäärä kertovat, kuinka laajasti oppikirjat käsittelevät kyseisiä aiheita. Lyhyt matikka -kirjassa suoraan ja siihen liittyviin asioihin käytetään kuusi lukua eli 31 sivua. Lukiolaisen matematiikka -kirjassa lineaarista mallia ja suoraa käsitellään toisen pääluvun verran eli 34 sivua. Kertoma-kirjassa on varattu kolmas luku kokonaan suoralle ja neljäs luku lineaariselle mallille eli yhteensä 52 sivua. Huomioitavaa on myös, että Kertoma-kirjan sivut sisältävät paljon enemmän tekstiä kuin esimerkiksi Lyhyt matikka -kirjan sivut.

Lineaariseen malliin ja suoraan liittyvien harjoitustehtävien määrä kirjoissa lukuun ottamatta kertaustehtäviä on seuraava: Lyhyt matikka -kirjassa 114 tehtävää (35 %), Lukiolaisen matematiikka -kirjassa 48 tehtävää (34 %) ja Kertoma-kirjassa 51 tehtävää (29 %). Lyhyt matikka -kirja painottaa tarkastelluista oppikirjoista eniten suoran käsittelyä, mutta vähiten lineaarista mallia. Lukiolaisen matematiikka -kirjassa suoraa käsitellään vähiten ja Kertoma-kirjassa lineaarista mallia eniten.

Lyhyt matikka -kirjassa keskitytään melko tarkasti suoraan. Esimerkiksi kulmakertoimen määrittämistä ja suoran yhtälön muodostamista eri tavoin painotetaan hyvin paljon. Asioita käydään hyvin perusteellisesti läpi selkeiden esimerkkien avulla. Kertausta yläkoulusta on melko paljon, mikä toisaalta voitaisiin korvata viemällä suoraan liittyviä asioita pidemmälle. Tällöin pystyttäisiin laajentamaan opiskelijan näkemystä suorasta. Esimerkiksi yhtälöparin ratkaisemisen useammat vaihtoehdot voitaisiin kirjassa käydä läpi. Näin on tehty muissa oppikirjoissa. Tässä kirjassa yhtälöparin ratkaisukeinoksi annetaan symbolisen laskimen käyttäminen ja sijoitusmenetelmä, jossa molempien yhtälöparin yhtälöiden on oltava ratkaistussa muodossa. Graafista ratkaisua ei varsinaisesti esitetä ratkaisukeinona, vaan se annetaan ratkaisun tueksi. Yhtälöparin yhteenlaskumenetelmää ei mainita lainkaan. Kokonaisuudessaan suora toimii hyvänä johdantona lineaariseen malliin, mutta tässä kirjassa lineaarisuus mainitaan lyhyesti jo heti kirjan alussa, eikä sitä ole selkeästi liitetty suoraan.

Lukiolaisen matematiikka -kirjan suoraa käsittelevässä luvussa on ensimmäiseksi esimerkki, jossa mainitaan lineaarinen malli ja matemaattinen malli. Kirjassa on hyvin johdateltu, miten mallintamisessa tarvitaan suoraa: ”Edellisessä esimerkissä ilmiön mallina oli matemaattisena lausekkeena ilmaistu lineaarinen riippuvuus, jonka kuvaaja oli suora.” Tästä on hyvä lähteä käsittelemään suoraa. Kirjassa käydään oleellimmat asiat suorasta melko lyhyesti. Yhtä paljon ei painoteta suoran yhtälön muodostamista kuin Lyhyt matikka -kirjassa. Suoralle on Lukiolaisen matematiikka -kirjassa varattu vain kaksi alalukua. Kolmas alaluku on varattu kokonaan lineaariselle yhtälöparille, joka käydään hyvin perusteellisesti, vaikka vastaavat asiat ovat tulleet jo yläkoulussa. Kirjassa käydään läpi yhtälöparin sekä graafinen ratkaisu että algebrallisen ratkaisun yhteenlasku- ja sijoitusmenetelmä toisin kuin Lyhyt matikka -kirjassa.

Suoran käsittelemiseen on Kertoma-kirjassa varattu kokonaan erillinen luku, jossa keskitytään ainoastaan suoraan ja siihen liittyviin asioihin hyvin laajasti. Suoraa lähdetään käsittelemään lineaarisen polynomifunktion kautta, mitä ei muissa kirjoissa ole tehty. Luvussa myös painotetaan yhtälöparin ratkaisua suorien leikkauspisteiden selvittämisen keinona paljon enemmän kuin muissa kirjoissa. Lisäksi Kertoma-kirjassa käsitellään paljon muista tarkastelluista kirjoista puuttuvia asioita, kuten tämän luvun alussa on kerrottu.

Toisin kuin muut tarkastellut oppikirjat, Lyhyt matikka -kirja ei määrittele lineaarista mallia. Kirjan ensimmäisessä luvussa määritellään ainoastaan lineaarinen riippuvuus suureiden y ja x välisenä riippuvuutena, jota kuvaa suora. Tämän enempää ei kirjan alussa tai suoran yhteydessä puhuta lineaarisesta mallista. Vasta kirjan viimeisessä luvussa, jonka aiheena on eksponentiaalisen mallin sovellukset, on esimerkki, jossa mainitaan lineaarinen malli ja sekin on kirjoitettu sulkujen sisään. Tästä johtuen voi opiskelijalle jäädä hieman epäselväksi lineaarisen mallin käsite, ja miksi kurssilla on opiskeltu suoraa niin paljon. Kirjan alku suorasta ja lineaarisesta mallista ei muodosta eheää ja perusteltua kokonaisuutta.

Lukiolaisen matematiikka -kirjan toisen pääluvun viimeisen alaluvun aiheena on lineaarinen malli. Tämä liittyy hyvin luvussa aiemmin käsitellyt asiat suorasta ja yhtälöparista varsinaiseen opetussuunnitelmaan kuuluvaan aiheeseen. Kertoma-kirjassa suoraa käsittelevää lukua seuraa luku lineaarisesta mallista. Molemmista kirjoissa lineaarinen malli selitetään hyvin samanlaisesti: Puhutaan tasaisesta muutoksesta, jossa muutos on tietyllä välillä yhtä suurta. Esitellään lineaarinen funktio ja sitä kuvaava suora sekä käsitellään lineaarinen kasvaminen ja väheneminen suoran kulmakertoimeen liittäen. Kertoma-kirjassa mainitaan vielä suoraan verrannollisuus lineaarisen mallin erikoistapauksena. Kirjassa on myös lineaariseen malliin liittyviä esimerkkejä paljon enemmän kuin Lukiolaisen matematiikka -kirjassa.

Kokonaisuudessaan kirjojen Lukiolaisen matematiikka ja Kertoma alku-puoliskot on hyvin liitetty kurssin aiheeseen. Alusta lähtien on tuotu esiin matemaattinen malli ja selitetty, miten funktio ja suora liittyvä siihen. Suoran käsittelyn jälkeen tulee lineaarinen malli, joka on esitetty hyvin selvästi ja ymmärrettävästi. Kirjojen alut muodostavat selkeän, yhtenäisen ja perustellun kokonaisuuden.

6.2.3 Eksponentiaalinen malli

Kaikissa tarkastelluissa oppikirjoissa käydään suoran käsittelyn ja lineaarisen mallin jälkeen potenssiyhtälön ratkaiseminen, eksponenttifunktio, eksponenttiyhtälön ratkaiseminen, logaritmi ja eksponentiaalinen malli. Nämä kuitenkin esitetään erilaisissa järjestyksissä ja hieman eri asioita painottaen. Kuten luvussa 5 kerrottiin, yliopistotason kirjat esittelevät yleensä ensin potenssifunktion, sitten eksponenttifunktion ja lopuksi sen käänteisfunktion eli

logaritmifunktion. Kertoma-kirja noudattaa tätä rakennetta parhaiten tarkastelluista kirjoista. Yliopistossa käytetty asioiden esitysjärjestys ei kuitenkaan ole ainoa oikea, eikä täysin verrattavissa lyhyen matematiikan oppikirjoihin. Oppikirjoissa kuitenkin painotetaan yhtälöiden ratkaisemista, eikä käsitellä lainkaan logaritmifunktiota ja vain yhdessä kirjassa käsitellään potenssifunktio.

Potenssiyhtälö

Potenssiyhtälö käsitellään Lyhyt matikka -kirjassa kirjan toiseksi viimeisessä luvussa. Muissa kirjoissa potenssiyhtälö tulee melkein ensimmäisenä, kun aloitetaan eksponentiaalisen mallin käsittely. Potenssiyhtälön sijoittamiseen kirjan loppuun voi vaikuttaa se, että potenssin määritelmä ja potenssilausekkeiden sieventäminen käsitellään Lyhyt matikka -kirjassa ennen eksponentiaalisuuteen siirtymistä. Lukiolaisen matematiikka -kirjassa potenssiyhtälöön johdatellaan käymällä eksponentiaalisuuteen liittyviä esimerkkejä. Kertoma-kirjassa määritellään potenssifunktio ennen potenssiyhtälön esittämistä. Potenssifunktiota ei muissa kirjoissa määritellä lainkaan. Ennen potenssiyhtälöä Kertoma-kirjassa kerrataan neliöjuuri ja kuutiojuuri sekä käsitellään muut juuret ja murtopotenssi. Muissa kirjoissa nämä käydään potenssiyhtälön ratkaisun yhteydessä. Ainoastaan murtopotenssi tulee Lukiolaisen matematiikka -kirjassa eksponenttifunktion yhteydessä ja Lyhyt matikka -kirjassa ei lainkaan.

Kirjoissa Lukiolaisen matematiikka ja Kertoma potenssiyhtälö määritellään yhtälönä, jossa potenssin kantaluku on tuntematon. Tällaista määrittelyä ei anneta Lyhyt matikka -kirjassa, ainoastaan yhtälö $x^n = a$, joka esitetään myös muissa kirjoissa samassa muodossa. Lukiolaisen matematiikka -kirjassa annetaan seuraavat määrittelyehdot yhtälölle: $a > 0$ ja $n > 0$. Kertoma-kirjassa annetaan ainoastaan, että $n = 1, 2, 3, \dots$ Lyhyt matikka -kirjassa annetaan ehto $a \geq 0$ vasta, kun käsitellään potenssiyhtälön ratkaisua, kun n on parillinen. Kirjoissa Lyhyt matikka ja Lukiolaisen matematiikka esitetään potenssiyhtälön ratkaiseminen hyvin samankaltaisesti: $x = \sqrt[n]{a}$ erikseen parittomalle ja parilliselle eksponentille. Molemmissa kirjoissa kerrataan myös neliöyhtälön ja kuutioyhtälön ratkaiseminen ennen potenssiyhtälön ratkaisemista. Myös Kertoma-kirjassa potenssiyhtälön ratkaiseminen esitetään erikseen, mutta ratkaisumenetelmänä viitataan toisen asteen ja kolmannen asteen yhtälön ratkaisemiseen ja annetaan näistä esimerkit.

Negatiivisen eksponentin käsittely on kirjoissa hyvin erilainen. Lyhyt matikka -kirja käsittelee yhden luvun verran negatiivista eksponenttia ennen eksponenttifunktioon siirtymistä. Lukiolaisen matematiikka -kirjassa negatiivinen eksponentti tulee esiin potenssiyhtälöä koskevassa esimerkissä. Tämän jälkeen mainitaan vain, että negatiivinen eksponentti tarkoittaa oppikirjan esimerkeissä ja tehtävissä yleensä kulunutta aikaa. Myöhemmin todetaan eksponenttifunktion käsittelyn yhteydessä, että potenssin laskulait pätevät

kaikille reaalitylukueksponenteille, mutta matemaattiset määrittelyt kyseiselle tilanteelle ohitetaan. Kertoma-kirjassa negatiivinen eksponentti tulee esiin vain eksponentiaaliseen malliin liittyvien esimerkkien yhteydessä. Tarkemmin asiaa ei tarkastella.

Eksponenttifunktio

Kirjoissa Lukiolaisen matematiikka ja Kertoma potenssiyhtälön käsittelyä seuraa eksponenttifunktio. Lyhyt matikka -kirjassa taas eksponenttifunktio seuraa eksponentiaalisen muutoksen tarkastelun sekä negatiivisen eksponentin jälkeen. Kirjoissa Lyhyt matikka ja Kertoma eksponenttifunktio määritellään funktiona, jossa muuttujana on eksponentti. Näin ei mainita Lukiolaisen matematiikka -kirjassa. Eksponenttifunktion määritelmä on muuten melko samanlainen kirjoissa Lukiolaisen matematiikka ja Kertoma. Molemmissa huomioidaan mahdollinen kerroin eksponenttifunktion edessä sekä esitetään kasvavan ja vähenevän eksponenttifunktion kuvaajat. Näitä ei ole Lyhyt matikka -kirjassa, jossa eksponenttifunktio esitetään vain muodossa k^x . Kaikissa määritelmässä mainitaan kuitenkin kantaluvun positiivisuus, ja Kertoma-kirja on ainoa, joka ei mainitse eksponenttifunktion olevan määritelty kaikilla eksponentin reaalitylukuarvoilla. Lukiolaisen matematiikka -kirja sanoo muista poiketen, että kantaluvuksi ei kelpaa luku 1, mutta kirjassa ei perustella tätä tarkemmin, vaan se jätetään opiskelijan pohdittavaksi. Kirjoissa Lyhyt matikka ja Lukiolaisen matematiikka on muutama esimerkki eksponenttifunktioon liittyen, mutta Kertoma-kirjassa esimerkkejä ei ole lainkaan.

Logaritmi ja eksponenttiyhtälö

Logaritmia ja eksponenttiyhtälöä lähestytään oppikirjoissa eri tavoin. Lyhyt matikka -kirja aloittaa heti eksponenttifunktion jälkeen logaritmin käsitteilyn. Muissa kirjoissa esitellään ennen logaritmia eksponenttiyhtälö yhtälönä, jossa muuttuja on eksponentissa ja kantaluku on positiivinen.

Logaritmin määrittelyminen poikkeaa kirjoissa huomattavasti toisistaan. Lukiolaisen matematiikka -kirjassa logaritmi määritellään eksponenttiyhtälön ratkaisuna, kun taas Lyhyt matikka -kirjassa logaritmin määritelmä vain liitetään eksponenttiyhtälöön ennen eksponenttiyhtälön esittämistä. Logaritmin positiivinen määrittelyjoukko perustellaan molemmissa kirjoissa. Lyhyt matikka -kirja poikkeaa määritelmässä siinä, että se esittää logaritmin merkintätavan vasta määritelmän ja esimerkin jälkeen. Kertoma-kirjassa ei varsinaisesti anneta logaritmin yleisempää määritelmää, ainoastaan kymmenkantaisen logaritmin määritelmä potenssin avulla. Logaritmin määrittelyjoukkoa ei mainita ollenkaan.

Yhdenkään tarkastellun oppikirjan määritelmä ei noudata täysin luvussa 5.5 esitettyä määritelmää. Kyseistä määritelmää on oppikirjoissa luultavasti yritetty helpottaa ja selittää enemmän. Kertoma-kirjan määritelmä vastaa

eniten luvun 5.5 määritelmää, mutta se on esitetty vain kymmenkantaiselle logaritmillemme.

Kertoma-kirjan osio logaritmistä on hyvin suppea. Määritelmän lisäksi kerrotaan vain lyhyesti logaritmisesta asteikosta ja annetaan potenssin logaritmikaava. Lisänä luvussa on kaksi lyhyttä tietokorttia, joista toinen kertoo logaritmin historiasta ja toinen Neperin luvusta. Muita logaritmiin liittyviä esimerkkejä kirjassa ei ole kuin eksponenttityhtälöiden ratkaiseminen logaritmin avulla. Lyhyt matikka -kirja sisältää runsaasti logaritmiin liittyviä esimerkkejä sekä laskinohjeet logaritmillemme. Myös Lukiolaisen matematiikka -kirjassa on esimerkkejä, viittaus laskinliitteeseen sekä pieni teksti Richterin asteikosta esimerkkinä logaritmisesta asteikosta.

Potenssin logaritmikaava on perusteltu ainoastaan Lyhyt matikka -kirjassa, jossa perustelu on selkeä, yksinkertainen ja logaritmin määritelmää hyödyntävä. Lukiolaisen matematiikka -kirjassa johdattelava esimerkki antaa hieman ymmärtää, mistä kaava on johdettu. Kertoma-kirjassa taas ei anneta minkäänlaisia perusteluja. Perustelu antaa kaavalle suuremman merkityksen, eikä se tunnu vain tuulesta temmatulta, joka pitää jatkossa muistaa. Tällaisen kuvan voi saada esimerkiksi Kertoma-kirjan esitystavasta.

Annettujen logaritmin määritelmien perusteella ei ole kuitenkaan täysin selvää opiskelijalle, miten yhtäkkiä voidaan eksponenttityhtälö ratkaista kirjoittamalla yhtälön molemmille puolille logaritmit. Kirjoissa vain todetaan, että näin voidaan tehdä perustelematta asiaa kovin hyvin. Erityisesti Kertoma-kirjassa asiaa ei perustella lainkaan. Menetelmä vain annetaan. Lyhyt matikka -kirja perustelee, että eksponenttityhtälön molempien puolien logaritmit voidaan merkitä yhtä suuriksi. Lukiolaisen matematiikka -kirjan mukaan koska eksponenttityhtälössä kaksi lukua ovat yhtä suuria, niin niiden kymmenkantaiset logaritmit ovat yhtä suuria. Parempia perusteluja ei toisaalta voida esittää, koska oppikirjoissa ei käsitellä asioita tarpeeksi syvällisesti perustelujen kannalta.

Jokaisessa oppikirjassa logaritmi esitetään keinona ratkaista eksponenttityhtälö. Kirjoissa Lyhyt matikka ja Lukiolaisen matematiikka ratkaisumenetelmä on esitetty selkeästi, mutta niissä korostetaan paljon eksponenttityhtälön $k^x = a$ ratkaisukaavaa $x = \frac{\log a}{\log k}$. Kirjoissa kuitenkin käydään yhtälön ratkaiseminen alusta asti. Teorian perusteella voi saada käsityksen, että edellä mainittu kaava tulee opetella ulkoa. Lyhyt matikka -kirjan esimerkeissä käydään eksponenttityhtälön ratkaiseminen kohta kohdalta läpi, kun taas Lukiolaisen matematiikka -kirjassa käytetään suoraan annettua kaavaa. Kertoma-kirjassa ei varsinaisesti teoriaosassa esitetä, miten eksponenttityhtälö ratkaistaan logaritmin avulla. Kyseinen asia tulee esiin esimerkissä, jossa ratkaiseminen käydään huolellisesti läpi.

Luonnollisesta logaritmistä kerrotaan kirjoissa kovin vähän. Jokaisessa kirjassa mainitaan lyhyesti Neperin luvusta, sen likiarvosta ja siitä logaritmin kantalukuna. Ainoastaan Lyhyt matikka -kirjassa ei mainita luonnollista logaritmia, vain laskimen ln-näppäin. Lukiolaisen matematiikka -kirja

taas on ainoa, jossa on esimerkkejä ja tehtäviä luonnollisesta logaritmista. Kertoma-kirjassa Neperin luvusta ja luonnollisesta logaritmista puhutaan tietokortissa, jota opiskelijat eivät välttämättä lue, koska monet oppikirjan tietokorteista liittyvät täysin matematiikan ulkopuolisiin aiheisiin.

Omasta mielestäni Lyhyt matikka -kirjan logaritmin määritelmä ei ole kovin selkeä, mutta potenssin logaritmikaava on hyvin perusteltu ja eksponenttiyhtälön ratkaiseminen on selkeästi esitetty. Erityisesti pidän kirjan monipuolisista esimerkeistä, joita on myös paljon. Lukiolaisen matematiikka -kirjan logaritmin määritelmä on selkeämpi kuin Lyhyt matikka -kirjan ja siinä painotetaan logaritmia eksponenttiyhtälön ratkaisuna. Opetussuunnitelmassakin mainitaan kurssin keskeisenä sisältönä eksponenttiyhtälön ratkaiseminen logaritmin avulla. Potenssin logaritmikaavaa ei ole kirjassa yhtä hyvin perusteltu, mutta eksponenttiyhtälön ratkaiseminen on esitetty selkeästi, vaikkakin ratkaisukaavaa painottaen. Kirjan esimerkit eksponenttiyhtälön ratkaisun osalta eivät omasta mielestäni ole täysin kattavia.

Kertoma-kirjan sisältö on tältä osin erilainen kuin muissa kirjoissa. Eksponenttiyhtälö määritellään selkeästi, mutta logaritmin määritelmä on hyvin yksinkertaistettu. Toisaalta asia on yritetty tehdä hyvin helpoksi opiskelijalle, mutta asian soveltaminen voi tällöin osoittautua hankalaksi. Kirjan avulla opitaan vain kymmenkantaisen logaritmin käyttäminen. Eksponenttiyhtälön ratkaiseminen on esitetty vain esimerkissä. Esitys etenee hienosti vaiheittain, mutta perusteluja on hyvin vähän. Luvussa on niukasti esimerkkejä ja soveltavia esimerkkejä ei ole lainkaan. Tämä on toisaalta ymmärrettävää, sillä esimerkkejä löytyy runsaasti seuraavasta luvusta, jossa käsitellään eksponentiaalista mallia. Luvun harjoitustehtävissä on kuitenkin näillä alkutiedoilla melko hankalia ryhmätehtäviä logaritmista.

Eksponentiaallinen malli

Luku eksponentiaalisesta mallista seuraa oleellisesti edellä käytyjen asioiden jälkeen sekä Lukiolaisen matematiikka- että Kertoma-kirjassa. Lyhyt matikka -kirjassa ei varsinaisesti erikseen käsitellä eksponentiaalista mallia: Ennen eksponenttifunktiota, logaritmia ja potenssifunktiota tarkastellaan eksponentiaalista kasvamista ja vähenemistä funktion $k^n \cdot a$ avulla. Kirjan viimeisen luvun aihe on eksponentiaallisen mallin sovelluksia. Luku koostuu ainoastaan soveltavista esimerkeistä ja tehtävistä. Tarkemmin ei eksponentiaalista mallia määritellä kuten ei lineaaristakaan mallia. Eksponentiaallinen malli mainitaan vain viimeisen luvun otsikossa sekä samassa esimerkissä kuin lineaarinen malli.

Kirjat Lukiolaisen matematiikka ja Kertoma määrittelevät eksponentiaallisen mallin hyvin samanlaisesti. Molemmissa esitetään eksponenttifunktio eksponentiaallisen mallin kuvaajana. Kirjoissa selitetään yhtenäisesti funktion liittyvät muuttujat ja vakiot sekä milloin on kyseessä eksponentiaallinen kasvaminen ja milloin eksponentiaallinen väheneminen. Kertoma-kirjassa

puhutaan suhteellisesta muutoksesta, ja Lukiolaisen matematiikka -kirjassa muutoksesta, jossa jokainen arvo saadaan edellisestä kertomalla se samalla positiivisella luvulla. Kertoma-kirjassa on enemmän eksponentiaaliseseen malliin liittyviä esimerkkejä ja yhtenä sovelluksena koronkorkolaskennan kaava. Luvun lopussa kerrataan vielä, mistä lineaarisessa ja eksponentiaalisessa mallissa on kyse. Lukiolaisen matematiikka -kirjassa käsitellään sekä koronkorkolaskennan kaava että radioaktiiviseen hajoamiseen liittyvä kaava.

Kaiken kaikkiaan eksponentiaalinen malli käsitellään Kertoma-kirjassa mielestäni laajemmin kuin Lukiolaisen matematiikka -kirjassa. Kertoma-kirjan lopussa lineaarinen malli tuodaan hyvänä kertauksena eksponentiaalisen mallin rinnalle. Lukiolaisen matematiikka -kirja esittelee eksponentiaalisen mallin hyvin selkeästi ja tiiviisti, samanlaisesti kuin lineaarisen mallin aikaisemmin.

6.2.4 Mitä muuta kirjat sisältävät?

Oppikirjoissa esiintyy myös muita käsiteltäviä asioita, joita ei vielä tässä ole tullut esiin. Esimerkiksi Lyhyt matikka -kirjassa kerrataan suoran jälkeen ja ennen eksponentiaalista muutosta prosenttilaskentaa sekä potenssin määritelmä ja potenssilausekkeiden sieventäminen. Näitä aiheita ei muissa kirjoissa käsitellä lainkaan. Prosenttilaskenta ja potenssi tulevat melko yllättäen suoran käsittelyn jälkeen, jolloin niiden merkitys kurssin kannalta voi tuntua hämärältä. Asiat on kuitenkin kirjassa esitetty hyvin selkeästi ja ne toimivat hyvänä kertauksena yläkoulusta sekä valmistautumisena eksponentiaalisen mallin käsittelyyn. Potenssin laskusääntöjen kertaaminen voidaan kyseenalaistaa, sillä asiaa on käsitelty yläkoulussa melko laajasti ja muissa oppikirjoissa niiden oletetaan olevan hallussa.

Kertoma-kirjassa on lineaarista mallia käsittelevän luvun jälkeen lyhyehkö luku, joka käsittelee paraabelia matemaattisena mallina. Paraabelia ei käydä lainkaan muissa kirjoissa. Kertoma-kirjassa paraabelista käydään määritelmä, ominaisuuksia, nollakohdat, kappaleen lentoradan mallinnus sekä muita mallinnuksia, joissa paraabelia voidaan hyödyntää. Näin se on myös hyvin liitetty kurssin aiheeseen matemaattiset mallit. Yläkoulussa opiskelijoille on mahdollisesti esitelty paraabeli, mutta nyt sen käsittelyä viedään pidemmälle soveltavien tehtävien avulla.

Sekä Lukiolaisen matematiikka- että Kertoma-kirja sisältävät soveltavaman luvun sijoitettuna kirjan loppuun. Lukiolaisen matematiikka -kirjassa kyseisessä luvussa annetaan esimerkkejä lineaarisen ja eksponentiaalisen mallin käytöstä sekä paneudutaan tarkemmin korko- ja koronkorkolaskuihin. Lopuksi kerrataan vielä yläkoulussa ja lyhyen matematiikan ensimmäisellä kursilla käytyä suoraan ja kääntäen verrannollisuutta, mikä voidaan nähdä lineaarisen ja eksponentiaalisen mallin soveltamisena. Myös tasainen liike tulee tässä yhteydessä. Kirjan viimeisen pääluvun sisältö tuntuu hieman hätäisesti kootulta: Lineaarisuus ja eksponentiaalisuus liitetään hyvin yhteen luvun

alun esimerkissä. Koronkorkolaskennan toistaminen tuntuu kuitenkin turhalta, joten mielestäni sen voisi siirtää kokonaan aiemmasta luvusta tähän soveltavaan lukuun, samoin kuin radioaktiivisen hajoamisen.

Kertoma-kirjan viimeisessä luvussa kerrataan aiemmin käydyt mallit ja niihin liittyviä asioita lyhyesti. Pääpaino on pitkänpuoleisissa esimerkeissä. Luvussa kerrataan lineaarinen ja eksponentiaalinen malli, paraabeli ja suora sekä käydään tasainen liike ja radioaktiivinen hajoaminen. Kertaus toimii hyvin: Teoria on lyhyt kertaus opituista asioista ja esimerkit ovat monipuolisia ja niitä on paljon. Uutta asiaa ei juurikaan tule, vaan opittuja asioita sovelletaan pidemmälle. Kertoma-kirjan soveltavan luvun rakenne on mielestäni onnistunut. Se sisältää sopivasti kertausta, mutta myös hieman uutta soveltavaa asiaa.

Kirjoista eniten yläkoulusta kertaavaa asiaa esiintyy Lyhyt matikka -kirjassa, jossa suoran käsittely käydään todella tarkasti, vaikka asiat ovat suurelta osin tulleet jo peruskoulun puolella. Lisäksi kerrataan prosenttilaskentaa ja potenssia. Nämä vievätkin sivumäärältään kirjasta puolet. Myös Kertoma-kirjassa on runsaasti kertausta funktiosta, verrannollisuudesta ja suorasta. Lisäksi on kertaava Työvälineitä-luku. Kertaamisen ohella asioita on kuitenkin viety pidemmälle ja näin tuotu uutta asiaa kertauksen joukkoon. Lukiolaisen matematiikka -kirjassa kertausta on vähiten tarkastelluista kirjoista. Lähinnä kerrataan vain funktio ja suora, joita käsitellään paljon tiiviimmin kuin muissa kirjoissa. Kirjan lopussa tulee kertauksena vielä verrannollisuus, joka esitetään kuitenkin osana lineaarista mallia.

6.3 Esimerkkien ja tehtävien tarkastelu

Oppikirjojen tehtäviä tarkastellessani olen pyrkinyt luokittelemaan niitä eri tavoin. Olen käyttänyt kahdenlaista luokittelua. Ensimmäisen luokittelun tarkoituksena on tutkia, miten oppikirjojen tehtävät kehittävät opiskelijoiden matemaattista ajattelua. Toisen luokittelun tavoitteena on selvittää, minkälaisia valmiuksia oppikirjat antavat opiskelijoille ja erityisesti mille aloille ne antavat valmiuksia.

Ensimmäisessä luokittelussa noudatan luvussa 3.2 esitettyä Joutsenlahden käyttämää tehtäväluokittelua. Ensimmäiseen luokkaan Laskutaito/Ymmärtäminen olen sijoittanut tehtävät, joissa selkeästi noudatetaan teoriassa ja esimerkeissä opittuja sääntöjä ja menetelmiä. Tehtävät ovat melko mekaanisia ja jopa hyvin samanlaisia kuin annetut esimerkit. Luokkaan Ymmärtäminen/Soveltaminen kuuluvat tehtävät, joissa käytetään opittuja proseduurijonoja hieman soveltavampiin tehtäviin. Tehtävät ovat rutiiniluonteisia, mutta niissä yhdistellään erilaisia opittuja asioita. Kolmannen luokan Soveltaminen/Analyysi tehtävissä opiskelijan pitää pystyä soveltamaan opittuja asioita laajemmassa yhteydessä. Opiskelijan tulee osata suunnitella strategioita, joilla ratkaista hankalampia ongelmanratkaisutehtäviä. Tehtävät eivät ole rutiiniluonteisia, vaan ne poikkeavat selkeästi muista tehtävistä ja

vaativat luovuutta ja kekseliäisyyttä.

Tehtäviä luokitellessani olen olettanut, että opiskelijat ovat lukeneet ja omaksuneet tarkasteltuun lukuun ja aiempiin lukuihin liittyvän teorian. Luokittelutavasta johtuen eri kirjojen samantyyppiset tehtävät voivat kuulua eri luokkiin riippuen siitä, mitä kirjoissa on teoriaosassa käsitelty. Tällaisen luokittelun tekeminen ei ole helppoa. Useiden tehtävien kohdalla on hankala päättää, mihin luokkaan ne kuuluvat. Arvioin tällaisten tehtävien lukumääräksi noin viisi prosenttia kaikista tehtävistä. Tämä on hyvä huomioida tuloksia tarkastellessa.

Toista luokittelua olen käyttänyt myös oppikirjojen esimerkkejä tarkastellessani. Tämän luokittelun aloitan jakamalla oppikirjojen tehtävät kahteen luokkaan. Ensimmäisen luokan tehtäviin olen sijoittanut tehtävät, joissa lasketaan mekaanisesti tai piirretään ja tulkitaan yksinkertaisia kuvaajia. Näissä tehtävissä ei yleensä ole paljon tekstiä. Toiseen luokkaan kuuluvat kaikki sanalliset tehtävät, joissa opittavat asiat on liitetty käytäntöön ja elämään.

Sanallisia tehtäviä olen luokitellut vielä aihepiirien mukaan. Aihepiireiksi olen valinnut kaupallisuuteen, fysiikkaan, kemiaan ja lääketieteisiin liittyvät sekä muut. Neljä ensimmäiseksi mainittua aihepiiriä erottuvat selkeästi oppikirjoissa ja loput sekalaiset aiheet olen koonnut yhteen luokkaan.

Kaupallisuuteen liittyviin tehtäviin olen luokitellut tehtäviä, joissa mainitaan hinta, myynti, palkka, korko, liikevaihto, vuokra, kustannus tai vastaava. Jotkut tähän luokkaan kuuluvista esimerkeistä voidaan nähdä myös yleistietona ja jokaiselle ihmiselle tarpeellisena. Fysiikkaan liittyvät tehtävät käsittelevät yleensä radioaktiivista hajoamista, lämpötilaa, nopeuden kaavaa, läpäisevyyttä, maanjäristyksen voimakkuutta, valaistuksen voimakkuutta, intensiteettiä tai heittoliikettä. Kemian tehtävissä lasketaan liuoksen pH:ta tai absorbanssiarvoja. Lääketieteeseen liittyvissä tehtävissä aiheena voi olla lääkevalmiste, aivo-, veri- tai munasolu, sepelvaltimotauti tai leikkauksen odotustaika.

Luokkaan muut kuuluvat tehtävät, jotka eivät sisälly aiempiin luokkiin. Tämän luokan tehtävien aiheet vaihtelevat kopiokoneen suurennoksista alkoholin palamiseen elimistössä. Usein esiintyviä aiheita ovat väkiluku sekä eläin- ja bakteerikanta. Muita aiheita ovat päästöt, ketjukirje, ihmisen pituus, myrkyn poistuminen vedestä, tentin arvosana ja pistemäärä sekä bensiinin kulutus.

Aihepiirien mukaan luokittelu on suhteellisen helppoa. Jotkut yksittäiset tehtävät kuitenkin herättävät pohtimaan, mihin luokkaan ne kuuluvat. Esimerkiksi radioaktiiviseen hajoamiseen liittyvä tehtävä saattaa sisältää maininnan lääkeaineesta. Tällöin olen tehnyt päätöksen oman mielipiteeni mukaan. Näiden tehtävien osuus kirjan kaikista tehtävistä on noin kaksi prosenttia, joten asian ei pitäisi suuresti vaikuttaa tuloksiin.

6.3.1 Esimerkkien tarkastelu

Oppikirjoissa esiintyy runsaasti esimerkkejä, joten niitä on syytä tarkastella. Lyhyt matikka -kirjassa esitetään yhteensä 66 esimerkkiä, Lukiolaisen matematiikka -kirjassa 61 ja Kertoma-kirjassa 54. Kertoma-kirjassa esimerkkien määrään vaikuttaa varmasti tutkimustehtävien sekä harjoitustehtävistä poikkeavien, tutkivien ja keskustelua herättävien tehtävien suuri määrä. Lyhyt matikka -kirjassa on vastaavasti joissakin luvuissa aihepiiriin johdattelava ongelma, mutta Lukiolaisen matematiikka -kirjassa ei ole tällaisia esimerkkejä tukevia lisäongelmia tai -tehtäviä.

Kirjoissa on hyvin erilaisia ja eri aiheisiin liittyviä esimerkkejä. Olen luokitellut esimerkit luvun alussa esitetyllä menetelmällä. Ensin olen jakanut esimerkit mekaanisesti laskettaviin (Luokka 1) ja sanallisiin (Luokka 2). Tämän luokittelun perusteella olen saanut taulukossa 1 nähtävät tulokset.

Taulukko 1: Esimerkkien luokittelu mekaanisesti laskettaviin (Luokka 1) ja sanallisiin esimerkkeihin (Luokka 2)

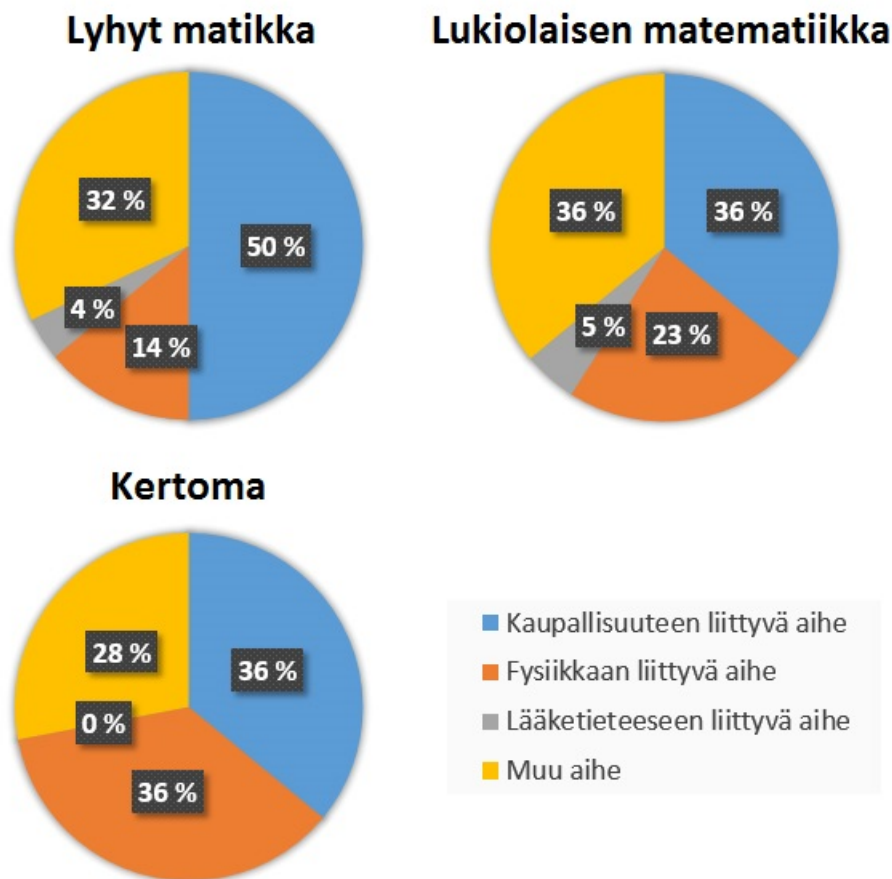
	Lyhyt matikka	Lukiolaisen matematiikka	Kertoma
Luokka 1	58 %	36 %	48 %
Luokka 2	42 %	64 %	52 %

Kuten voidaan huomata, oppikirjoissa on eroja. Lyhyt matikka -kirjassa suurin osa esimerkeistä on sellaisia, joissa opetetaan laskemaan mekaanisesti. Kertoma-kirjassa esimerkit jakautuvat lähes tasan mekaanisesti laskettaviin ja sanallisiin, kun taas Lukiolaisen matematiikka -kirjassa on huomattavasti enemmän sanallisia esimerkkejä. Tuloksia voidaan selittää oppikirjojen sisällyksen avulla.

Lyhyt matikka -kirjan alku käsittelee usean luvun verran suoraa, johon liittyy paljon mekaanista laskemista. Myös Kertoma-kirjassa käsitellään melko paljon suoraa. Lisäksi kirjassa on teoriaa funktiosta ja paraabelista, joihin liittyy mekaanista laskemista. Kirjassa on erillinen luku potenssi- ja eksponenttiyhtälöille, eikä sitä ole yhdistetty eksponentiaalisen mallin käsittelyyn niin kuin muissa kirjoissa. Tällöin kyseinen luku koostuu pääosin mekaanisesta laskemisesta. Lukiolaisen matematiikka -kirja poikkeaa muista siinä, että funktiota ja suoraa käsitellään vähemmän sekä logaritmia, potenssi- ja eksponenttiyhtälöä käsitellään eksponentiaalisen mallin yhteydessä. Tällöin voidaan heti ottaa mukaan soveltavampia esimerkkejä. Jokaisen kirjan viimeinen luku on hyvin soveltava, eikä sisällä lainkaan mekaanisesti laskettavia esimerkkejä.

Sanallisia esimerkkejä olen tarkastellut lähemmin ja luokitellut niitä aihepiireittäin. Luokittelun tulokset on esitetty oppikirjoittain ympyräkaaviona kuvassa 9. Kaavioista huomataan, että suurin osa kirjojen esimerkeistä (59–72 %) liittyy kaupallisuuteen tai fysiikkaan. Lyhyt matikka -kirjassa puolet

kaikista esimerkeistä on kaupallisuuteen liittyviä, kun muissa tämä osuus on 36 %. Kertoma-kirja sisältää oppikirjoista eniten fysiikkaan liittyviä esimerkkejä, saman verran kuin kaupallisuuteen liittyviä eli 36 %. Lyhyt matikka-kirja sisältää vain 14 %. Lääketieteeseen liittyvien esimerkkien osuus on kirjoissa melko pieni vain 4–5 prosentin luokkaa. Ainoastaan Kertoma-kirja ei sisällä yhtään lääketieteeseen liittyvää esimerkkiä. Kemiaan liittyviä esimerkkejä ei esiinny yhdessäkään kirjassa. Muiden aihepiirien esimerkkien osuus on jokaisessa kirjassa 30 prosentin tienoilla. Tarkemmin luokittelun tuloksia voi tarkastella liitteestä 1.



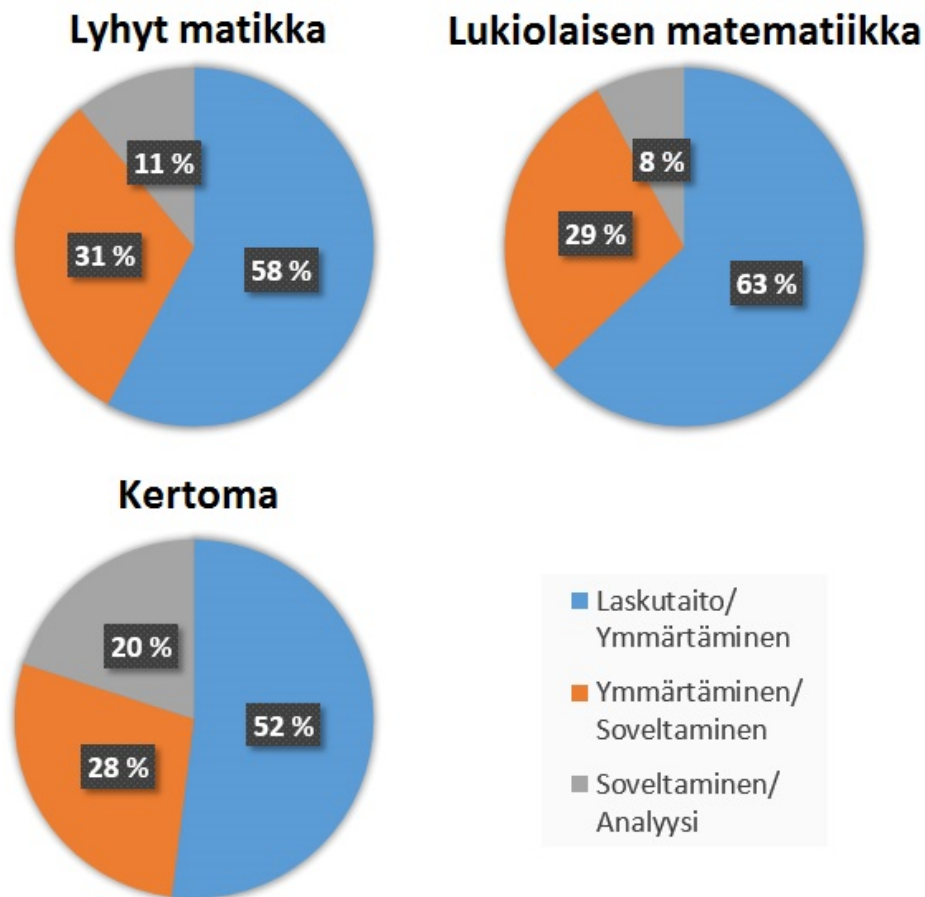
Kuva 9: Oppikirjojen esimerkkien jakautuminen aiheittain

6.3.2 Tehtävien tarkastelu

Oppikirjojen harjoitustehtävät ovat tärkeässä osassa oppimisessa, joten niitä on hyvä tarkastella lähemmin. Tehtävien määrä kirjoissa poikkeaa huomattavasti. Lyhyt matikka -kirjassa harjoitustehtäviä on 330. Lisäksi kirjan lopussa on kertaustehtäviä 53 sekä tehtäväsarjoja, joissa on yhteensä 18 tehtävää. Suurta tehtävämäärää selittää se, että kirjan jokainen luku sisältää

kaksi vaativuudeltaan samantasoista tehtäväsarjaa. Lukiolaisen matematiikka -kirjassa harjoitustehtäviä on 142 ja kertaustehtäviä kirjan lopussa 19. Jokaisen luvun lopussa on myös kertaustehtäviä ja näitä on yhteensä 36. Vastaavasti Kertoma-kirja sisältää 178 harjoitustehtävää sekä 25 lisätehtävää. Kirjan lopussa on harjoituskokeita, jotka sisältävät vielä 36 tehtävää. Tarkastelluista kirjoista Lyhyt matikka sisältää eniten tehtäviä ja Lukiolaisen matematiikka vähiten.

Olen ensin luokitellut tehtävät luvun alussa esitetyllä tavalla kolmeen luokkaan. Tulokset on koottu oppikirjoittain ympyräkaavioihin, jotka on esitetty kuvassa 10. Tuloksissa on huomioitu ainoastaan kirjojen lukuihin liittyvät harjoitustehtävät eikä kertaus- tai lisätehtäviä. Suurin osa harjoitustehtävistä, Lukiolaisen matematiikka -kirjassa jopa 63 %, kuuluu luokittelussa ensimmäiseen luokkaan. Kaikissa kirjoissa noin 30 % tehtävistä kuuluu toiseen luokkaan ja melko pieni osa tehtävistä kuuluu kolmanteen luokkaan. Kertoma-kirja sisältää eniten kolmannen luokan tehtäviä (20 %) ja Lukiolaisen matematiikka vähiten (8 %).



Kuva 10: Oppikirjojen tehtävien luokittelu

Oppikirjojen kertaus- ja lisätehtäviä sekä harjoituskokeiden tehtäviä ei ole

kaavioissa huomioitu. Ne kuuluvat suurelta osin edellä käytetyn luokittelun ensimmäiseen luokkaan. Lyhyt matikka -kirjassa jopa 92 % kertaustehtävistä ja harjoituskokeiden tehtävistä kuuluu ensimmäiseen luokkaan ja vain yksi tehtävä kuuluu kolmanteen luokkaan. Lukiolaisen matematiikka -kirjan kertaustehtävät ovat jakautuneet seuraavasti: ensimmäisen luokan tehtäviä on 71 %, toisen luokan tehtäviä 21 % ja kolmannen luokan tehtäviä 8 %. Kun Kertoma-kirjan lisätehtävät ja harjoituskokeiden tehtävät kootaan yhteen, saadaan ensimmäisen luokan tehtäviä 75 %, toisen luokan 18 % ja kolmannen luokan 7 %. Lukiolaisen matematiikka- ja Kertoma-kirja noudattelevat hyvin samanlaista tehtävien jakautumista kertaus- ja lisätehtävien osalta. Tarkempia tuloksia kaikkien tehtävien luokittelusta oppikirjoittain on liitteessä 2.

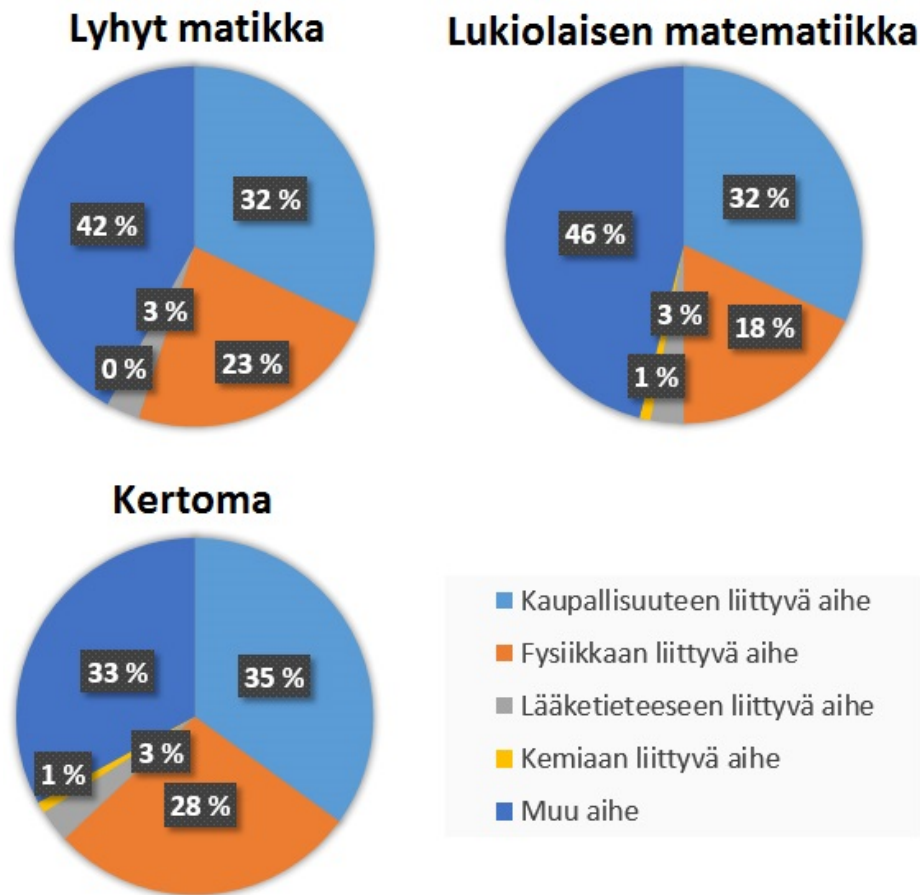
Toisen luokittelun olen tehnyt täysin vastaavasti kuin esimerkkien kanssa. Ensin olen luokitellut tehtävät mekaanisesti laskettaviin ja sanallisiin. Nämä tulokset on esitetty taulukossa 2. Verrattuna esimerkkien jakautumiseen (Taulukko 1), oppikirjojen tehtävät jakautuvat näihin kahteen luokkaan melko yhtenäisesti. Jokaisessa oppikirjassa noin 40 prosenttia tehtävistä on mekaanisesti laskettavia ja 60 prosenttia sanallisia. Esimerkkien kohdalla on suurempia eroja.

Taulukko 2: Tehtävien luokittelu mekaanisesti laskettaviin (Luokka 1) ja sanallisiin tehtäviin (Luokka 2)

	Lyhyt matikka	Lukiolaisen matematiikka	Kertoma
Luokka 1	41 %	38 %	44 %
Luokka 2	59 %	62 %	56 %

Tarkastellaan sitten tarkemmin sanallisten tehtävien jakautumista aihepiirien mukaan, mitä on havainnollistettu oppikirjoittain ympyräkaavioina kuvassa 11. Jokaisessa kirjassa yli 30 % tehtävistä liittyy kaupallisuuteen sekä 3 % lääketieteeseen. Fysiikkaan liittyvien tehtävien määrä vaihtelee kirjoissa hieman. Lukiolaisen matematiikka -kirja sisältää vähiten fysiikkaan liittyviä tehtäviä (18 %), kun taas Kertoma-kirjassa niitä on eniten (28 %). Lyhyt matikka -kirja ei sisällä lainkaan ja muut kirjat sisältävät vain yhden selkeästi kemiaan liittyvän tehtävän. Eniten muihin aiheisiin liittyviä tehtäviä on Lukiolaisen matematiikka -kirjassa (46 %) ja vähiten Kertoma-kirjassa (33 %). Tarkempia tuloksia tehtävien jakautumisesta aihepiireittäin on esitetty liitteessä 3.

Tehtävät noudattelevat melko samankaltaista aihepiireihin jakautumista kuin kirjojen esimerkit. Ainoastaan Lyhyt matikka -kirjan esimerkeissä painottuu huomattavasti enemmän kaupallisuuteen liittyvä aihe kuin tehtävissä. Jokaisessa kirjassa on myös enemmän muihin aiheisiin liittyviä tehtäviä kuin esimerkkejä. Sekä esimerkeissä että tehtävissä kuitenkin painottuvat selkeästi kaupallisuuteen ja fysiikkaan liittyvät aiheet.



Kuva 11: Oppikirjojen tehtävien jakautuminen aiheittain

Eri oppikirjojen esimerkit ja tehtävät poikkeavat luonteeltaan toisistaan, vaikka niissä on myös paljon samanlaista kuten aiheet. Esimerkiksi Lyhyt matikka -kirjan tehtävissä noudatetaan hyvin paljon esimerkkien mallia. Jotkut tehtävät ovat täysin samankaltaisia kuin esimerkit. Kahdessa muussa kirjassa taas tehtävät saattavat poiketa melko paljon annetuista esimerkeistä ja täysin esimerkkien kaltaisia tehtäviä on melko vähän. Kertoma-kirja sisältää tavallisten harjoitustehtävien joukossa erityisiä ryhmätehtäviä, jotka ensimmäisessä luokittelussa sijoittuvat hyvin usein kolmanteen luokkaan Soveltaminen/Analyysi. Nämä tietysti vaikuttavat Kertoma-kirjan kolmannen luokan suuruuteen, vaikka kyseiset ryhmätehtävät ovat sellaisia, joita tunneilla saatetaan jättää käymättä ajan puutteen tai erikoisuutensa vuoksi.

6.4 Laskinohjeiden vertailu

Vuonna 2012 tuli voimaan, että matematiikan ylioppilaskirjoituksissa on sallittua käyttää kaikkia funktio-, graafisia ja symbolisia laskimia. Opiskelijalle olisikin hyödyllistä osata käyttää myös hienompaa graafista tai symbolista

laskinta kuin ainoastaan tavallista funktiolaskinta. Laskimen käyttäminen voi tuoda myös motivaatiota opiskeluun. Lyhyen matematiikan opiskelijoista monet eivät kuitenkaan panosta hienon laskimen hankintaan yhtä paljon kuin pitkän matematiikan opiskelijat. Heitä voisi kuitenkin kannustaa laskimen käyttöön. Tähän auttavat kirjassa annettavat ohjeistukset samoin kuin opettajan neuvot.

Tarkastelluista kirjoista laajin laskinohjeistus löytyy Lukiolaisen matematiikka -kirjasta, jossa ohjeet on koottu kirjan lopussa olevaan laskinliitteeseen. Tähän liitteeseen viitataan tekstin yhteydessä laskinviitteillä. Liitteessä annetaan ensin yleisiä ohjeita laskimen käytöstä. Tämän jälkeen käsitellään neljää aihetta: toistuva laskutoimitus pikatoimintona, potenssit ja juuret, eksponenttifunktio ja logaritmi sekä funktion kuvaaja. Jokaisesta aiheesta on pieni johdanto ja sitten esimerkkitehtävän avulla neuvottu, miten tehtävä ratkaistaan laskimella. Ohjeissa on erityisesti käsitelty tietyt funktio- ja graafiset laskimet, joiden merkit on mainittu liitteen alussa. Symbolisista laskimista ei puhuta, mutta on otettava huomioon, että tarkasteltu kirja on vuodelta 2005 ja samanlaiset ohjeet pätevät monissa laskimissa.

Muissa tarkastelluissa oppikirjoissa laskinohjeet on sijoitettu teorian joukkoon. Lyhyt matikka -kirjassa on oleellisissa kohdissa teorian joukossa neuvoja symbolisen laskimen käytöstä. Nämä kohdat on merkitty kirjan marginaaliin laskinsymbolilla. Neuvoja on esimerkiksi yhtälöparin ratkaisemisesta, potenssilausekkeiden sieventämisestä, logaritmin laskemisesta sekä siitä, missä muodossa laskin näyttää tulokset. Yhteensä laskinohjeita on kirjassa kahdeksan kappaletta ja jokainen ohje on melko lyhyt. Lisäksi joissakin esimerkeissä on lyhyitä ohjeita, miten tehtävä ratkaistaan symbolisella laskimella.

Kertoma-kirjassa on tasan neljä laskinohjeistusta. Ne ovat lyhyitä laskimen näppäilyohjeita teorian ja esimerkkien yhteydessä, jotka on erotettu tekstistä huutomerkkein. Niissä kerrotaan, miten laskimella ratkaistaan tangenttiyhtälö $\tan \alpha = 2$ ja miten lasketaan juurilauseke, murtopotenssi ja logaritmien jakolasku. Nämä tehdään aina tekstissä olevan laskun yhteydessä. Kirjan ohjeet ovat hyvin suppeat, mutta yleispätevät, jotka toimivat useimmissa laskimissa.

Mielestäni parhaiten laskimen käyttöön kannustaa Lukiolaisen matematiikka -kirjan laskinohjeistus. Kirjan laskinliite on laaja ja perusteellinen sekä ohjeet annetaan selkeästi ja yksityiskohtaisesti esimerkkitehtävien ratkaisemisen yhteydessä. Myös Kertoma-kirjassa pyritään antamaan ohjeet esimerkkilaskun yhteydessä, mutta muuten ohjeistus on hyvin yksinkertainen. Molemmissa kirjoissa annetaan tarkat näppäilyohjeet. Lukiolaisen matematiikka -kirjassa ohjeita vielä tuetaan sanallisesti ja annetaan tarkat laskinkohtaiset ohjeet. Lyhyt matikka -kirjassa on melko paljon ohjeita, mutta niitä ei ole välttämättä annettu esimerkkien yhteydessä ja näppäilyohjeet eivät ole yhtä tarkat kuin muissa kirjoissa.

Laskinohjeiden lisäksi kirjoissa ei ole muita neuvoja tai ohjeita teknisten apuvälineiden käyttämisestä matematiikan opiskelussa. Mielenkiintoista

on nähdä tuleeko tämä muuttumaan uuden opetussuunnitelman myötä, sillä uudessa opetussuunnitelmassa kannustetaan hyvin paljon teknisten apuvälineiden hyödyntämiseen matematiikassa.

6.5 Yhteenveto

Oppikirjojen teoria poikkeaa paljon yliopistossa esitetystä, kuten tämän tutkielman luvusta 5. Tämä on ymmärrettävää, sillä lyhyellä matematiikalla asioita ei viedä yhtä pitkälle kuin yliopistossa. Esimerkiksi integraalilaskentaa, derivointia, käänteisfunktioita ja logaritmifunktioita ei käsitellä lainkaan lyhyen matematiikan kursseilla. Tällä on tietysti vaikutus oppikirjojen sisältöön ja asioiden esitystapaan. Potenssifunktion määritelmä on Kertoma-kirjassa hyvin samankaltainen kuin luvussa 5, mutta ei yhtä perusteellinen ja yksityiskohtainen. Se on yksinkertaistettu ja helpotettu samoin kuin eksponenttifunktion määritelmä kaikissa tarkastelluissa kirjoissa. Toisaalta tämä on ymmärrettävää, sillä kurssin painotus on yhtälöissä ja niiden ratkaisemisessa. Se, että asiat yksinkertaistetaan ja käsitteet kuten logaritmi vain tiputetaan kirjoihin perustelematta juuri lainkaan, voi vaikeuttaa asian ymmärtämistä ja tehdä oppimisesta tylsää. Jos funktioita tarkasteltaisiin lähemmin ja käytäisiin läpi käänteisfunktio ja logaritmifunktio, niin asioita olisi helpompi perustella ja oppimisesta tulisi näin mielekkäämpää.

Kirjat sisältävät hyvin paljon samoja käsiteltäviä asioita muutenkin kuin opetussuunnitelman osalta. Tietysti on jonkin verran eroja, kuinka paljon asioita käsitellään. Esimerkiksi suora on jokaisessa kirjassa tärkeässä roolissa, mutta sen käsittelemistä painotetaan eri tavalla. Muut kerrattavat aiheet vaihtelevat kirjoittain funktion, prosenttilaskennan ja paraabelin välillä. Kaikki tarkasteltavat kirjat noudattavat hyvin opetussuunnitelman keskeisiä sisältöjä. Ainoastaan Lyhyt matikka -kirjan lineaarisen mallin käsittely jää melko suppeaksi ja hieman epäselväksi.

Käsiteltäviä asioita käydään oppikirjoissa läpi hyvin samankaltaisesti, mutta joitakin yksittäisiä eroja kirjojen välillä on. Esimerkiksi Kertoma-kirjassa potenssiyhtälö ja eksponenttifunktio esitetään hyvin tarkasti, mutta potenssi- ja eksponenttiyhtälön ratkaiseminen sekä logaritmin määritelmä ovat hyvin suppeita. Muissa kirjoissa logaritmi sekä potenssi- ja eksponenttiyhtälön ratkaiseminen esitetään todella tarkasti. Vastaavasti Lyhyt matikka -kirjassa ei esitellä yhtä tarkasti lineaarista ja eksponentiaalista mallia kuin muissa kirjoissa. Jokaisesta kirjasta puuttuu mielestäni jotain oleellista, mikä muista kirjoista löytyy. Näitä asioita opettaja voi kuitenkin täydentää oppitunneilla.

Tarkastelluista oppikirjoista on hyvin vaikea valita tehtävien perusteella parasta kirjaa. Lyhyt matikka -kirjassa tehtäviä on hyvin runsaasti. Tehtävät myös noudattelevat hyvin annettuja esimerkkejä, mikä toisaalta helpottaa opiskelijoilla tehtävien tekemistä, mutta toisaalta ei kehitä suuresti matemaattista ajattelua. Lukiolaisen matematiikka -kirjassa taas tehtäviä on

paljon vähemmän, mutta tehtävät eivät noudattele esimerkkejä. Kertomakirjassa tehtäviä on melko hyvin. Ne ovat monipuolisia, eivätkä täysin esimerkkien kaltaisia. Ryhmätehtävät ovat mielenkiintoisia ja muista tehtävistä selkeästi poikkeavia. Kirjassa on myös teorian joukossa ylimääräisiä tehtäviä sekä tutkimustehtäviä.

Tehtävien analysoinnin ja luokittelun nojalla voidaan todeta, että tarkastelluissa lyhyen matematiikan oppikirjojen tehtävissä painottuu hyvin suuressi laskutaito ja mekaaninen laskeminen. Jonkin verran tehtävissä on myös ymmärtämistä ja soveltamista vaativia tehtäviä, mutta varsinaista analyysia ja soveltamista laajempaan asiayhteyteen on melko vähän. Tietysti laskutaitoa on hyvä harjoitella ja kehittää sopiva rutiini laskemiseen. Asioita tulisi myös osata soveltaa arkeen, ja tähän tuovat tukea sanalliset soveltavat tehtävät. Luovuuteen ja kekseliäisyyteen innostavien tehtävien vähäinen määrä on sinänsä harmillista, sillä Joutsenlahden mukaan juuri ne kehittävät parhaiten matemaattista ajattelua. Mekaaninen laskeminen ja ulkoa opettelu eivät juurikaan kehitä matemaattista ajattelua, vaan siihen vaaditaan näiden soveltamista ongelmanratkaisussa.

Matemaattista ajattelua kehittävät erityisesti tehtävät, joiden ratkaiseminen noudattaa luvussa 3.2 esitettyä Yrjönsuuren tehtävän ratkaisemisen mallia. Tarkasteltujen kirjojen tehtävissä on jonkin verran sellaisia, joiden ratkaiseminen edellyttää kaikkia Yrjönsuuren esittämiä tehtävän ratkaisemisen vaiheita. Esimerkiksi täysin esimerkkien kaltaiset tehtävät eivät juurikaan vaadi mainittujen tehtävän ratkaisemisen vaiheiden noudattamista. Samoin mekaanisissa laskutehtävissä ei tarvita kovin monimutkaisia ajatteluprosesseja. Joutsenlahden määrittelemään kolmanteen luokkaan kuuluvat tehtävät noudattelevat hyvin Yrjönsuuren tehtävän ratkaisemisen vaiheita.

Esimerkkien ja tehtävien jakaminen aihepiireittäin paljastaa oppikirjojen kaupallisuuteen ja fysiikkaan liittyvän painotuksen verrattuna muihin aiheisiin. Onko kirjojen tarkoitus siis kannustaa enemmän kyseisistä aloista kiinnostuneita? Toisaalta näitä aiheita tarvitaan monilla aloilla. Kyseisten aiheiden painotus on myös ymmärrettävää. Kaupallisuuteen liittyvissä esimerkeissä ja tehtävissä on paljon hyödyllistä asiaa esimerkiksi prosenttilaskennasta, jota ihminen tulee tarvitsemaan elämässään, vaikka ei kaupalliselle alalle lähtisikään. Samoin fysiikkaan liittyvissä esimerkeissä ja tehtävissä on jokaiselle hyödyllistä yleistietoa maailmasta.

Lääketieteeseen ja kemiaan liittyvien esimerkkien ja tehtävien vähäisyys yllättää. Opiskelijoita kuitenkin suuntautuu lukion jälkeen esimerkiksi terveydenhuoltoalalle, jossa näitä tietoja tarvitaan. Kemiastakin varmasti löytyy runsaasti asiaan liittyviä esimerkkejä ja tehtäviä.

Tehtävien ja esimerkkien monipuoliset aiheet innostavat opiskelijoita ja kannustavat oppimaan. Osa kirjojen tehtävistä tuntuu hieman keinotekoisilta ja eri aiheista väkisin keksityiltä. Itse kokisin mielenkiintoisimpana ja tärkeimpänä tehtävät, jotka liittyvät tulevaan opiskelualaani. Ketjukirjeisiin tai piirakan syömiseen liittyvät tehtävät eivät hirveästi innosta opiskelemaan.

Tehtäviä olisi hyvä olla tasaisesti eri aloilta. Yksipuoliset tehtävät tekevät oppimisesta tylsää.

Laskinohjeiden määrä vaihtelee kirjoissa hyvin paljon. Ohjeet ovat hyviä. Niiden avulla opiskelijat pystyvät tarvittaessa itsenäisesti opettelemaan laskimen käytön. Kurssilla kuitenkin tarvitaan laskinta, eikä opettaja välttämättä ehdi neuvomaan jokaista opiskelijaa sen käytössä. Graafista tai symbolista laskinta on myös helppo hyödyntää tämän kurssin aiheissa, ja näin voidaan innostaa oppilaita kokeilemaan ja käyttämään apuvälineitä matematiikan opiskelussa. Esimerkiksi potenssi- ja eksponenttifunktioiden kuvaajia pystytään piirtämään näillä laskimilla ja määrittämään pisteitä saaduilta kuvaajilta. Oppikirjoihin voidaan toki tuoda enemmän laskinohjeistusta, mutta paljon on kiinni myös opettajasta. Opettaja pystyy parhaiten innostamaan oppilaita laskimen käyttöön.

Muiden teknisten apuvälineiden kuten tietokoneiden käyttö on lisääntynyt kouluissa. Vuoteen 2019 mennessä ylioppilaskirjoitukset tullaan tekemään kokonaan tietokoneella. Laskinten käyttö luultavasti tämän seurauksena vähenee oppitunneilla ja tietokoneiden käyttö lisääntyy. Tästä johtuen tulevaisuudessa oppikirjoissa ei välttämättä enää tarvita laskinohjeistusta, vaan enemmän ohjeet erilaisten tietokoneohjelmien käyttöön.

Liitteeseen 4 olen vielä koonnut lopullisen näkemykseni kustakin tutkielmassa tarkastellusta oppikirjasta. Jokainen oppikirja on erilainen ja sisältää monia hyviä puolia, mutta myös huonoja. Sopivaa oppikirjaa valittaessa on syytä tarkastella kirjoja tarkemmin. Pintapuolinen tarkastelu ei kerro kirjoista juuri mitään.

7 Pohdintaa ja uusi opetussuunnitelma

Kurssi Matemaattisia malleja I toteuttaa omalta osaltaan lukion opetussuunnitelmassa annettuja matematiikan opetuksen tehtäviä. Se tutustuttaa opiskelijaa matemaattisen ajattelun malleihin sekä matematiikan perusideoihin ja rakenteisiin. Kurssi kehittää oppilaan laskemisen ja ongelmanratkaisemisen taitoja. Matematiikka liitetään kurssilla hyvin selkeästi matemaattisiin malleihin ja tätä kautta opiskelijoiden elämään. Kurssikirjat antavat runsaasti käytännön esimerkkejä erilaisista elämän tilanteista, joissa kurssilla käsiteltäviä asioita tarvitaan. Tätä kautta opiskelijat saavat lyhyen matematiikan tehtävän mukaisesti valmiuksia hankkia, käsitellä ja ymmärtää matemaattista tietoa sekä käyttää matematiikkaa elämän eri tilanteissa ja jatkoopinnoissa.

Matemaattisia malleja I -kurssi on sisällöltään hyödyllinen lyhyen matematiikan opiskelijoille. Kurssilla kerrataan aiemmin tuttuja oleellisia asioita suorasta ja muista aiheista. Varsinainen opetussuunnitelman mukainen kurssin sisältö potenssi- ja eksponenttiyhtälöistä sekä logaritmista ovat oppimisen arvoisia asioita. Niitä hyödynnetään kuvattaessa elämässä tapahtuvia muu-

toksia, jotka tapahtuvat lineaarisesti tai eksponentiaalisesti. Kyseisiä asioita opiskellaan, jotta hahmotetaan, miten ilmiöitä voidaan havainnollistaa matemaattisesti ja mitä hyötyä tästä on. Asian opiskelu voi olla myös hyödyllistä seuraavan opiskelupaikan kannalta. Tarkoituksena on oppia mallintamaan tietynlaisia ilmiöitä ja prosesseja sekä määrittää haluttuja arvoja kyseisten mallien avulla.

Kurssin asioiden esittäminen tavalla, jolla ne tällä hetkellä esitetään, on perusteltua. Opiskelijoilla ei ole aiemmilta kursseilta riittävästi tarvittavaa matemaattista tietoa, jotta kyseisen kurssin teoriaa voitaisiin viedä paljon pidemmälle. Teorian vieminen pidemmälle ei ole myöskään tarpeellista. Tällöin asiat muuttuvat teoreettisemmiksi ja käytännönläheisyys häviää. Toisaalta hieman pidemmälle viety teoria voi myös auttaa joitakin opiskelijoita asioiden ymmärtämisessä.

Oppikirjoissa kurssin asioita käsitellään hieman eri tavoin. Yksi oppikirja ei mitenkään pysty vastaamaan kaikkiin tarpeisiin. Suurin vastuu asioiden käsittelyssä on kuitenkin opettajalla. Hän on vastuussa opetussuunnitelman toteutumisesta ja opiskelijoiden oppimisesta. Opettajalla on mahdollisuus tuoda opetukseensa asioita, joita oppikirjat eivät mahdollisesti pysty tarjoamaan. Esimerkiksi lahjakkaimmille lyhyen matematiikan opiskelijoille voi tarjota pitkän matematiikan teoriaa ja tehtäviä, vaikka hän ei pitkän matematiikan kursseja suorittaisikaan. Vastaavasti opetukseen voi tuoda mukaan symbolisen laskimen käyttöä, vaikka sitä ei oppikirjoissa olisikaan. Tärkeintä on opiskelijoiden oppiminen ja motivaation ylläpitäminen. Myös monipuolisilla harjoitustehtävillä voidaan innostaa ja motivoida oppilaita.

Tarkasteltu kurssi on kuulunut jo pitkään lukion lyhyen matematiikan oppimäärään. Sen sisältö ei juurikaan ole tänä aikana muuttunut. Kurssin asiat on nähty erittäin tärkeinä, eikä ole koettu tarvetta jättää niitä pois. Uuden opetussuunnitelman myötä kurssissa kuitenkin tulee tapahtumaan muutoksia.

Uusi tänä vuonna voimaan tullut Lukion opetussuunnitelman perusteet 2015 [20] painottaa vanhasta hieman poiketen, että matematiikassa tulee käyttää vaihtelevia työtapoja ja suunnitella lähtökohdat opiskelijoita kiinnostavista aiheista. Opiskelijoita on kannustettava käyttämään ajattelua tukevia kuvia, piirroksia ja välineitä. Heille tulee opettaa teknisten apuvälineiden kuten tietokoneohjelmistojen, symbolisen laskennan ohjelmistojen, tilasto-ohjelmistojen, taulukkolaskennan, tekstinkäsittelyn ja digitaalisten tiedonlähteiden käyttöä sekä niiden hyödyllisyyden ja käytön rajallisuuden arviointia. [20, s. 129]

Lyhyen matematiikan opetuksen tehtävään on lisätty pyrkimys antaa opiskelijalle käsitys matematiikan merkityksestä yhteiskunnan kehityksessä ja sen soveltamismahdollisuuksista arkielämässä ja eri tieteissä. Tavoitteisiin on myös lisätty kohta tarkoituksenmukaisten matemaattisten menetelmien, teknisten apuvälineiden ja tietolähteiden käytön osaamisesta. [20, s. 136]

Lukion kurssien sisällöt muuttuvat jonkin verran uuden opetussuunnitel-

man myötä. Lukioissa alkoi tänä syksynä kaikille sekä pitkän että lyhyen matematiikan opiskelijoille yhteinen opintokokonaisuus, jonka tehtävänä on herättää opiskelijoiden kiinnostus matematiikkaa kohtaan. Yhteisen kurssin Luvut ja laskutoimitukset (MAY1) keskeisiin sisältöihin kuuluu peruslaskutoimitusten, prosenttilaskennan, funktion, lukujonojen ja niiden summan lisäksi logaritmi ja potenssi sekä niiden välinen yhteys ja muotoa $a^x = b$, $x \in \mathbb{N}$, olevien yhtälöiden ratkaiseminen. [20, s. 130] Siis osa tässä tutkielmassa tarkastellusta vanhan opetussuunnitelman mukaisesta lyhyen matematiikan kolmannen kurssin asiasta on siirtynyt tähän ensimmäiseen yhteiseen kurssiin.

Kustannusosakeyhtiö Otavan julkaisemassa lukion yhteisen kurssin oppikirjassa Otavan matematiikka MAY1 Luvut ja lukujonot [8] on viidennen luvun aiheena eksponenttiyhtälö ja logaritmi. Luvussa käydään eksponenttiyhtälön määritelmä ja miten eksponenttiyhtälö voidaan ratkaista kirjoittamalla yhtälön molemmat puolet saman kantaluvun potensseina. Asiaa käydään jopa laajemmin läpi kuin tässä tutkielmassa tarkastelluissa vanhan opetussuunnitelman mukaisissa kolmannen kurssin oppikirjoissa. Logaritmi määritellään eksponenttiyhtälön $a^x = b$ ratkaisun merkintätapana $x = \log_a b$, ja kaikki eksponenttiyhtälöt ratkaistaan kirjassa tämän kaavan avulla. Logaritmi esitetään kirjassa niin, että sen kantaluku voi vaihdella, ei pelkästään kymmenkantaisena logaritmina. Eksponenttiyhtälön ratkaisemista kymmenkantaisten logaritmien avulla ei esitetä.

Sanoma Pro Oy:n kustantamassa lukion yhteisen kurssin oppikirjassa Yhteinen tekijä - Lukion matematiikka 1 [7] eksponenttiyhtälö ja logaritmi tulevat melko aikaisessa vaiheessa kurssia. Eksponentin ratkaiseminen on liitetty osaksi lukua, jossa aiheena on potenssi. Luvussa kerrataan ensin potenssin määritelmä ja laskusäännöt, jonka jälkeen esitellään eksponenttiyhtälö ja harjoitellaan sen sieventämistä sekä ratkaisemista kuten Otavan kirjassa. Logaritmi määritellään eksponenttiyhtälön ratkaisuna hyvin samanlaisesti kuin Otavan kirjassa. Luvun lopussa on esimerkki, jossa mainitaan lyhyesti luonnollinen logaritmi sekä logaritmin kantaluvun vaihtosääntö. Eksponenttiyhtälöön ja logaritmiin liittyviä asioita käydään jopa paremmin läpi kuin vanhan opetussuunnitelman mukaisissa kolmannen kurssin oppikirjoissa. Asioita ei kuitenkaan viedä yhtä pitkälle eksponentiaalisen mallin käsittelyyn, vaan painotetaan eksponenttiyhtälön ratkaisemista logaritmin avulla.

Yhteinen kurssi siis tuottaa opiskelijoille alkukatsauksen eksponenttiyhtälöön ja logaritmiin. Asioita pohjustetaan tarkastelemalla eksponenttiyhtälöä ja sen ratkaisemista logaritmin avulla hyvin yksinkertaisesti mutta perusteellisesti. Miten tämä sitten tulee muuttamaan Matemaattisia malleja I -kurssia? Eksponenttiyhtälö ja logaritmi ovat kuitenkin kurssin oleellisinta asiaa. Miten käy, kun asiat onkin jo esitelty ensimmäisessä kurssissa? Viedäänkö asioita nyt pidemmälle vai tuleeko kurssiin vielä enemmän kertausta tutuista asioista?

Yhteinen kurssi vaikuttaa lyhyen matematiikan kursseihin niin, että van-

ha ensimmäinen kurssi siirtyy toiseksi lyhyen matematiikan kurssiksi. Sisältö pysyy muuten samana, mutta kurssiin lisätään yhtälöparin ratkaiseminen, joka myös on vanhan kolmannen kurssin sisältöä. Vastaavasti vanha toinen kurssi siirtyy kolmanneksi. Matemaattisia malleja I -kurssista tulee neljäs kurssi (MAB4) ja nimeksi Matemaattisia malleja. [20, s. 137] Kurssin keskeisiin sisältöihin on lisätty lukujonot matemaattisina malleina ja tavoitteisiin [20, s. 137–138]: opiskelija

- tutustuu ennusteiden tekemiseen mallien pohjalta
- osaa käyttää teknisiä apuvälineitä polynomi- ja eksponenttifunktion ominaisuuksien tutkimisessa sekä polynomi- ja eksponenttiyhtälöiden ratkaisussa sovellusongelmien yhteydessä.

Lukujonoja käydään uuden opetussuunnitelman mukaisesti jo ensimmäisellä kurssilla, joten neljännellä kurssilla niitä luultavasti tarkastellaan matemaattisten mallien pohjalta samoin kuin lineaarisuutta ja eksponentiaalisuutta. Ennusteiden tekeminen mallien pohjalta on myös uusi asia, jota ei vanhoissa kirjoissa suuremmin esiinny. Teknisten apuvälineiden käyttöä painotetaan uudessa opetussuunnitelmassa todella paljon, joten uudet oppikirjat tulevat varmasti sisältämään ohjeita niiden käyttöön. Ainakin edellä mainittu Otavan MAY1-kurssin digikirja sisältää teoriaa ja esimerkkejä havainnollistavia appletteja ja interaktiivisia kuvia sekä ohjevideoita esimerkiksi Geogebralla tehtävän taulukkolaskennan käyttöön ja funktion kuvaajan piirtämiseen [8].

Valitettavasti uuden neljännen kurssin oppikirjoja ei ole vielä julkaistu, joten tarkemmin kurssin sisältöä ei tässä päästä tarkastelemaan. Mielenkiintoista olisikin seuraavaksi lähteä tutkimaan, miten kyseisen kurssin oppikirjat muuttuvat uuden opetussuunnitelman myötä. Mikä tulee olemaan kurssin merkitys, kun suuri osa kurssin asioista käydään aiemmilla kursseilla? Koostuuko kurssi aiemmin opittujen asioiden kertaamisesta ja syventämisestä? Miten lukujonot otetaan mukaan matemaattisiin malleihin? Miten teknisten apuvälineiden hyödyntäminen näkyy uusissa kirjoissa? Kuinka paljon Matemaattisia malleja -kurssi oikeasti muuttuu?

Viitteet

- [1] Aalto, A., Kangasaho, J., Kylliäinen, O., Metiäinen, A., Mäkinen, J. & Tahvanainen, J., *Lyhyt matikka 3: Matemaattisia malleja I*, 7. painos, Sanoma Pro Oy, 2013.
- [2] Adams, R. A., *Calculus: a complete course*, 4th edition, Canada, Addison Wesley Longman Ltd., 1999.
- [3] Apostol, T. M., *Calculus - Volume 1: One-Variable Calculus, with an Introduction to Linear Algebra*, 2nd edition, Blaisdell Publishing Company, 1967.
- [4] Arya, J. C. & Lardner, R. W., *Mathematical analysis for Business, Economics, and the Life and Social Sciences*, 3rd edition, Prentice Hall, Inc. New Jersey, 1989.
- [5] *Bloomin taksonomia*, Jyväskylän yliopiston Koppa. Päivitetty 13.1.2011. Saatavissa: <https://koppa.jyu.fi/avoimet/mit/oppimisesta-ja-opettamisesta/bloomin-taksonomia>. Viitattu 28.9.2016.
- [6] Edwards, C. H. & Penney, D. E., *Calculus: Early Transcendentals*, 7th edition, Pearson Prentice Hall, 2008.
- [7] Ekonen, M., Hassinen, S., Heiskanen, P., Hemmo, K., Kaakinen, P., Tahvanainen, J. & Taskinen, T., *Yhteinen tekijä - Lukion matematiikka 1*, 1.–2. painos, Sanoma Pro Oy, 2016.
- [8] Halinen, H., Hähkiöniemi, M., Juhala, S., Kurvinen, S., Louhikallio-Fomin, S., Luoma-aho, E., Ottelin, J., Parmanen, K., Raittila, T., Tauriainen, T., Tikka, T. & Vallineva, S., *Otavan matematiikka MAY1 Luvut ja lukujonot*, Kustannusosakeyhtiö Otava, 2016.
- [9] Isotalo, S., Peräsalo, M., Soro, R. & Wuolijoki, H., *Lukiolaisen matematiikka 3: Matemaattisia malleja I*, 1. painos, WSOY Oppimateriaalit, 2005.
- [10] Joutsenlahti, J., *Matemaattinen ajattelu ja kieli, eräs mielenkiintoinen ulottuvuus uudessa opetuswunnitelmassa*. Teoksessa: Joutsenlahti, J., Ilmavirta, R. & Sieppi, H. (toim.), *Projekteja ja prosesseja — Opetuksen käytäntöjä matematiikassa ja viestinnässä*, Tampereen yliopisto, 2003, Hämeenlinnan normaalikoulun julkaisuja nro 8.
- [11] Joutsenlahti, J., *Matemaattinen ajattelu lukiossa*. Teoksessa: Räsänen, P., Kupari, P., Ahonen, T. & Malinen, P. (toim.), *Matematiikka — näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen*, 2. painos, Jyväskylä: Niilo Mäki Instituutti, 2004.

- [12] Joutsenlahti, J., *Lukiolaisen tehtävääorientoituneen matemaattisen ajattelun piirteitä, 1990-luvun pitkän matematiikan opiskelijoiden matemaattisen osaamisen ja uskomusten ilmentämänä*, Akateeminen Väitöskirja, Tampereen yliopisto, 2005.
- [13] Kontkanen, P., Lehtonen, J., Luosto, K. & Savolainen, S., *Pyramidi 8: Juuri- ja logaritmifunktiot*, 1.–2. painos, Tammi, 2006.
- [14] Kontkanen, P., Liira, R., Luosto, K., Nurmi, J., Nurmiainen, R., Ronkainen, A. & Savolainen, S., *Pyramidi 1: Funktiot ja yhtälöt*, 1. painos, Tammi, 2005.
- [15] Laurinolli, T., Lindroos-Heinänen, R., Luoma-aho, E., Sankilampi, T., Talvitie, K. & Vähä-Vahe, O., *Laskutaito 8*, 5. painos, WSOYpro Oy, 2009.
- [16] Laurinolli, T., Lindroos-Heinänen R., Luoma-aho E., Sankilampi T., Talvitie, K. & Vähä-Vahe, O., *Laskutaito 9*, 5. painos, WSOYpro Oy, 2010.
- [17] Opetushallitus, *Lukion opetussuunnitelman perusteet 1994*, Painatuskeskus, Helsinki, 1994.
- [18] Opetushallitus, *Lukion opetussuunnitelman perusteet 2003*, Vammalan Kirjapaino Oy, 2003. Saatavissa: http://www.oph.fi/download/47345_lukion_opetussuunnitelman_perusteet_2003.pdf. Viitattu 13.6.2016.
- [19] Opetushallitus, *Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet 2004*, Vammalan Kirjapaino Oy, 2004. Saatavissa: http://www.oph.fi/download/139848_pops_web.pdf. Viitattu: 13.6.2016.
- [20] Opetushallitus, *Lukion opetussuunnitelman perusteet 2015*, Next Print Oy, Helsinki, 2015. Saatavissa: http://www.oph.fi/download/172124_lukion_opetussuunnitelman_perusteet_2015.pdf. Viitattu 17.8.2016.
- [21] Parmanen, K., Portaankorva-Koivisto, P. & Sirviö, S., *Kertoma 3! Matemaattisia malleja I*, 1. painos, Otava, 2009.
- [22] Pohjolainen, S. (toim.), *Matemaattinen mallinnus*, 1. painos, WSOYpro Oy, 2010.
- [23] Yrjönsuuri, R., *Lukiolaisten matemaattisen ajattelun oppiminen*. Helsingin yliopiston opettajankoulutuslaitos, Tutkimuksia 88, Helsinki Yliopistopaino, 1990.

- [24] Yrjönsuuri, R., *Matematiikka mieluisaksi: Psykologinen lähestymistapa opetukseen ja opiskeluun sekä matemaattisen ajattelun osaamisen arviointiin*, Oppilo, 2007.

Liitteet

Liite 1: Oppikirjojen esimerkkien jakautuminen aiheittain

	Lyhyt matikka	Lukiolaisen matematiikka	Kertoma
Esimerkkejä yhteensä	66	61	54
Suoraa laskemista, kuvaajien piirtämistä ja tulkintaa	38 (58%)	22 (36%)	26 (48%)
Soveltavia ja sanallisia esimerkkejä	28 (42%)	39 (64%)	28 (52%)
Kaupallisuuteen liittyvä aihe	14 (50%)	14 (36%)	10 (36%)
Fysiikkaan liittyvä aihe	4 (14%)	9 (23%)	10 (36%)
Lääketieteeseen liittyvä aihe	1 (4%)	2 (5%)	0 (0%)
Muut	9 (32 %)	14 (36 %)	8 (28 %)

Liite 2: Oppikirjojen tehtävien luokittelu

Lyhyt matikka			
Aihe/luvut	Laskutaito/ Ymmärtäminen	Ymmärtäminen/ Soveltaminen	Soveltaminen/ Analyysi
Suora, luvut 1-6	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 12, 18, 19, 20, 21, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 62, 63, 64, 65, 66, 70, 71, 72, 73, 74, 78, 79, 80, 83, 84, 88, 89, 91, 92, 98, 99, 100, 107, 108	8, 14, 15, 16, 17, 30, 31, 40, 41, 51, 60, 61, 67, 68, 69, 75, 76, 77, 81, 82, 85, 87, 90, 94, 96, 97, 101, 102, 104, 109, 110, 111, 113	10, 11, 13, 22, 23, 42, 86, 93, 95, 103, 105, 106, 112, 114
Prosentti luvut 7-8	115, 116, 117, 118, 119, 120, 121, 122, 127, 128, 129, 130, 131, 132, 133, 136, 137, 138, 139, 140, 141, 142, 144, 145, 146, 150, 151, 152, 154	123, 124, 125, 126, 134, 135, 147, 148, 149, 153, 155, 156, 157, 158	143, 159, 160
Potenssi, luku 9	161, 162, 163, 164, 165, 166, 167, 169, 170, 175, 176, 177, 178, 179, 182	168, 171, 174, 180, 181, 183	172, 173, 184, 185, 186
EkspONENTTI ja logaritmi, luvut 10-16	187, 188, 189, 190, 191, 193, 194, 199, 200, 201, 202, 204, 205, 213, 214, 215, 218, 219, 223, 224, 227, 228, 232, 233, 234, 235, 236, 237, 241, 242, 243, 247, 249, 250, 251, 252, 253, 254, 255, 256, 260, 261, 262, 263, 264, 265, 271, 272, 273, 274, 275, 276, 277, 278, 279, 283, 284, 285, 286, 287, 294, 295, 297, 299, 300, 301, 306, 307, 311, 312, 313, 317, 318, 319, 320, 322, 324, 325, 328	192, 195, 196, 198, 203, 206, 207, 208, 209, 211, 212, 216, 217, 220, 225, 226, 229, 238, 239, 240, 244, 245, 257, 266, 267, 268, 269, 280, 281, 282, 288, 289, 290, 291, 293, 296, 298, 302, 303, 305, 308, 309, 310, 314, 315, 321, 326, 327, 329, 330	197, 210, 221, 222, 230, 231, 246, 248, 258, 259, 270, 292, 304, 316, 323
Kertaustehtävät	331, 332, 333, 334, 335, 336, 337, 338, 339, 340, 341, 342, 343, 344, 345, 346, 347, 348, 349, 350, 351, 352, 353, 354, 355, 356, 357, 358, 359, 360, 361, 362, 363, 364, 365, 366, 367, 368, 369, 370, 371, 372, 373, 374, 375, 376, 377, 378, 379, 380, 381, 382, 383		
Tehtäväsarjat:			
Sarja A	1, 2, 3, 4, 5, 6		
Sarja B	1, 2, 3, 4,	5, 6	
Sarja C	1, 2,	3, 4, 6	5

Lukiolaisen matematiikka			
Aihe/luvut	Laskutaito/ Ymmärtäminen	Ymmärtäminen/ Soveltaminen	Soveltaminen/ Analyysi
Matemaattinen malli	2, 3, 4, 5, 9, 10, 11, 13, 14, 15, 16, 17	6, 8, 12, 18, 19, 20	1, 7
Suora ja lineaarinen malli	30, 32, 33, 35, 36, 37, 38, 39, 41, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 52, 53, 54, 55, 56, 58, 59, 60, 61, 62, 64, 67, 68, 69, 72, 76	31, 40, 51, 57, 65, 66, 70, 71, 73, 74, 75	34, 42, 63, 77
Eksponentiaalinen malli	99, 103, 104, 105, 106, 107, 108, 110, 111, 112, 113, 114, 115, 116, 117, 118, 120, 121, 122, 123, 124, 125, 130, 131, 134, 135, 136, 138, 139, 140, 144, 145, 146, 148, 152	98, 100, 102, 109, 119, 126, 127, 128, 129, 132, 133, 137, 141, 142, 143, 149, 150, 151, 153, 154, 155	101, 147
Arkielämän ilmiöitä ja malleja	175, 176, 177, 178, 181, 182, 183, 184, 186	179, 180, 185, 187	174, 188, 189
Kertaustehtävät lukujen lopussa	22, 23, 24, 25, 26, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 86, 87, 88, 90, 91, 92, 94, 96, 156, 157, 158, 159, 160, 161, 162, 163, 164, 167, 172, 173, 190, 191, 192, 193, 194	21, 27, 85, 93, 95, 165, 166, 168, 169, 170, 171, 195, 197, 198	28, 29, 84, 89, 97, 196
Kertaustehtävistä kirjan lopussa	199, 200, 201, 202, 203, 204, 205, 206, 207, 208, 209, 210, 212, 214, 215, 216, 217, 218, 219	211, 213	

Kertoma			
Aihe/luvut	Laskutaito/ Ymmärtäminen	Ymmärtäminen/ Soveltaminen	Soveltaminen/ Analyysi
Työvälineitä	1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 16, 17, 18, 19	6, 11, 12, 13, 14, 15, 22	20r, 21r, 23r
Matemaattinen malli ja funktio	30, 31, 32, 37, 39, 40, 41	29, 33, 34, 35, 36, 38	24r, 25r, 26r, 27r, 28r, 42r
Suora koordinaatistossa	44, 48, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 62, 63, 64, 66, 67, 68, 69, 71, 73	45, 46, 47, 70, 72	43r, 49, 60, 61, 65
Lineaarinen malli	78, 79, 82, 83, 84, 85, 87, 89, 90	76, 80, 81, 88, 91, 92r, 93r	74r, 75r, 77, 86
Paraabeli matemaattisena mallina	95, 96, 97, 98, 99	100, 101, 102	94r, 103
Potenssi- ja eksponenttiyhtälö	104, 105, 106, 107, 108, 109, 110, 114, 115, 116, 117	118, 119, 120, 121, 122	111r, 112r, 113r
Eksponentiaalinen malli	126, 127, 128, 129, 130, 132, 133, 137, 138, 141, 142, 143, 144, 146, 149, 150, 152	124r, 131, 134, 135, 136, 139, 140, 145, 147, 148	123r, 125r, 151
Sovelluksia	155, 156, 157, 159, 160, 161, 162, 164, 165, 167	154r, 163, 173, 174, 175, 177, 178	153r, 158, 166r, 168, 169, 170, 171, 172, 176r
Lisätehtäviä	179, 180, 181, 182, 183, 184, 185, 186, 187, 189, 190, 194, 197, 201, 202, 203, 204, 207, 208, 209, 211, 212, 214, 215, 216	188, 191, 192, 195, 196, 198, 199, 205, 210, 217, 218	193, 200, 206, 213, 219
Pikaosion tehtävät	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15		
Harjoituskokeiden tehtävät	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 1, 2, 3, 5, 6, 1, 2, 3, 5, 6, 7	4, 7, 4	
Tehtäviä (teorian joukossa) x = yksi tehtävä	xxxxxxxxxxxxxxxxxxxx	xxxxxxxxxxxxxxxxxxxx	xxxxxxxx

r = ryhmätehtävä

Liite 3: Oppikirjojen tehtävien jakautuminen aiheittain

	Lyhyt matikka	Lukiolaisen matematiikka	Kertoma
Harjoitustehtäviä yhteensä (ei kertaustehtäviä)	330	142	178
Suoraa laskemista, kuvaajien piirtämistä ja tulkintaa	134 (41%)	54 (38%)	78 (44%)
Soveltavia ja sanallisia tehtäviä	196 (59%)	88 (62%)	100 (56%)
Kaupallisuuteen liittyvä aihe	63 (32%)	28 (32%)	35 (35%)
Fysiikkaan liittyvä aihe	45 (23%)	16 (18%)	28 (28%)
Lääketieteeseen liittyvä aihe	6 (3%)	3 (3%)	3 (3%)
Kemiaan liittyvä aihe	0 (0%)	1 (1%)	1 (1%)
Muut	82 (42%)	40 (46%)	33 (33%)

Liite 4: Tiivistetyt näkemykseni tarkastelluista oppikirjoista

Lyhyt matikka -kirjan johdattelevat ongelmat ovat todella hyviä. Ne laitavat lukijan pohtimaan erilaisia asioita, jotka liittyvät opittavaan asiaan. Suurin osa kirjan teoriasta on esitetty selkeästi, yksinkertaisesti ja tarpeeksi lyhyesti, jotta se on helppo opiskelijan lukea itsenäisesti. Ainoastaan logaritmin määritelmä tuntuu hieman hankalalta ymmärtää ja vaatii oppilaalta kärsivällisyyttä. Kirjan esimerkit ovat osuvia ja niissä käytetyt menetelmät on perusteltu huolellisesti. Kirjan alussa käytäviä asioita ei ole kovin selkeästi liitetty kurssin varsinaiseen asiaan. Alun tarkoitus on paneutua lineaariseen malliin, mutta lineaarisuus mainitaan selkeästi vain kerran. Tämä voi siksi mennä opiskelijalta hieman ohi, eikä hän saa selkeää kuvaa lineaarisesta mallista tai näe sen merkitystä käytännössä. Osa asioista on myös otettu kirjaan hieman irrallisina, vaikka niitä tullaan tarvitsemaan myöhemmin. Kirjan alkupuoli ei muodosta yhtenäistä kokonaisuutta ja asioita kerrataan ehkä turhan tarkasti. Loppupuoli muodostaa jo paremmin selkeän kokonaisuuden eksponentiaalisuudesta, mutta eksponentiaalinen malli ei tule selkeästi esille, eikä sen merkitys. Kirja kaipaisi yhtenäisempää koko kirjan läpi jatkuvaa tarinaa. Tehtäviä on kirjassa kuitenkin kiitettävästi.

Lukiolaisen matematiikka -kirja muodostaa hienon jatkumon kolmessa ensimmäisessä pääluvussa. Kurssin aihe matemaattisia malleja säilyy läheisesti mukana koko kirjan ajan. Käsiteltävät asiat on hienosti pystytty liittämään tähän ja samalla on perusteltu niiden mukana olo. Tuttujen asioiden kertaus on sopivan tiivis ja perusteltu. Viimeinen pääluku kuitenkin tuntuu vähän hätäisesti kootulta. Luvun voisi paremmin muotoilla opitun asian soveltamisluvuksi ja siirtää edellisessä luvussa olleet koronkorkolaskenta ja radioaktiivinen hajoaminen tähän lukuun. Toisaalta luvusta voi tällöin tulla turhan soveltava, jolloin taas sieltä voidaan jättää jotain pois ja lisätä muihin lukuihin asiaa laajemmin tai perusteellisemmin. Kokonaisuudessaan kirjan sisältö vastaa todella hyvin opetussuunnitelmaa. Sen rakenne on yhtenäinen ja muodostaa sujuvan tarinan. Omasta mielestäni teoriassa ja esimerkeissä on välillä vähän turhan paljon tekstiä ylimääräisistä asioista. Opiskelija kuitenkin haluaa lukea teorian ja esimerkit nopeasti. Tässä asiassa Lyhyt matikka -kirja palvelee paremmin, vaikka rakenteeltaan se ei ole yhtä hyvä. Tehtäviä kirjassa on riittävästi.

Kertoma-kirjassa on hyvät informatiiviset yhteenvedot lukujen tavoitteista lukujen otsikoiden alla. Kirja sisältää paljon esimerkkejä, jotka liittyvät monipuolisesti eri asioihin ja ilmiöihin. Kirjassa on paljon teoriaa, mikä on hyvä, mutta määritelmät eivät aina ole kovin perusteellisia. Sisältö muodostaa selkeän ja järkevän, sujuvasti etenevän kokonaisuuden. Matemaattinen malli säilyy tärkeänä käsitteenä lähes koko kirjan ajan paitsi luvuissa, joissa aiheena on suora sekä potenssi- ja eksponenttiyhtälöt. Nämä luvut ovat hieman irralliset, koska niissä ei mainita matemaattista mallia niin kuin muissa luvuissa. Niiden merkitys on kuitenkin selkeä, sillä ilman näiden lukujen asioi-

ta on vaikea käsitellä lineaarista ja eksponentiaalista mallia. Kirjan sisältö ja lukujen järjestys ovat omasta mielestäni todella hyviä ja kertausta on juuri sopivasti. Asiaa on todella paljon verrattuna muihin oppikirjoihin. Tämä tuo kurssiin vaativuutta. Joitakin asioita voidaan jättää kurssilla käymättä, jos tunneilla ei ole aikaa. Tietokortit, tutkimustehtävät ja osa pohdintatehtävistä voisi mielestäni jättää kirjasta pois ja osan niiden tiedosta ilmaista varsinaisessa tekstissä. Suuri osa kyseisistä tietokorteista ja tehtävistä on ylimääräistä ja turhaa, koska niiden sisältämät asiat eivät aina liity matematiikkaan tai eivät muuten ole tärkeässä osassa kurssia. Toisaalta ne tarjoavat kiinnostuneille lisätietoa. Kirja sisältää runsaasti vaativuustasoltaan erilaisia tehtäviä, ja ryhmätehtävät ovat hauska lisä tavallisten harjoitustehtävien joukossa.