TAMPEREEN TEKNILLINEN YLIOPISTO
Teknis-luonnontieteellinen osasto

Simo Ali-Löytty

Kalmanin suodatin ja sen laajennukset paikannuksessa

Diplomityö

Aihe hyväksytty osastoneuvostossa 10.3.2004
Tarkastaja: professori Robert Piché (TTY)

Esipuhe

Aloitin työskentelyn Matematiikan laitoksen henkilökohtaisen paikannuksen algoritmien tutkimusryhmässä keväällä 2003. Työskentelin aluksi ”Personal Positioning Algorithms”-projektissa osa-aikaisesti, viime toukokuusta lähtien olen työskennellyt projektin parissa täysipäiväisesti. Tänä aikana on syntynyt myös diplomityön kirjallinen osuus. Kalmanin suodatin ja sen laajennukset paikannuksessa on ollut erittäin mielenkiintoinen ja mukaansa tempaava aihe.

Työni ohjaajana ja tarkastajana on toiminut Robert Piché. Häntä haluan lämpimästi kiittää projektiin mukaan kysymisestä ja lukuisista opetuksista, joita olen saanut henkilökohtaisen palautteen lisäksi myös useista hänen pitämistään kursseista.

Suuri kiitos kuuluu myös työn rahoittajalle Nokian teknologiayksikölle. Rahoituksen lisäksi haluan kiittää myös asiantuntijalausunnosta, mittauslaitteiston lainaamisesta ja lukuisista hyödyllisistä näkökulmista, joita projektin palavereissa on noussut esille.

Monet kiitokset kuuluvat myös työkaverille Niilo Sirolalle useista korjausehdotuksista, ideoista, pähkäilyistä ja avusta tietokoneen kanssa kommunikoinnissa. Kiitokset myös Kari Heineelle monista antoisista keskusteluista suodatusongelman ympärillä.

Haluan kiittää kaikkia ihmisiä, jotka ovat tavalla tai toisella olleet kannustamassa opintojen aikana. Erityinen kiitos rakkaalle vaimolleni Anna-Marianalle kieliasua koskevista neuvoista, rohkaisemisesta opinnoissa ja olemassaolosta. Suurimman kiitokseni haluan antaa taivaalliselle Isälle.

Tampere, 16. marraskuuta 2004

Simo Ali-Löytty
Insinöörinkatu 59 B 56
33720 Tampere

Puh. 041-5305929

Sisältö

Tiivistelmä **4**

Abstract **5**

Lyhenteet **6**

Merkinnät **8**

1 Johdanto **12**

2 Suodatus **14**
2.1 Yleinen ongelman asettelu 14
2.2 Kalmanin suodatin 16
2.2.1 Kalmanin suodattimen ongelman asettelu 17
2.2.2 Kalmanin suodattimen algoritmi 18
2.2.3 Tilan paras estimaattori 18
2.2.4 Estimaattori yleisemmille ongelmille 20
2.2.5 Stokastinen differentiaaliyhtälö 21
2.2.6 Epävarmuus ja herkkyys mallinnusvirheille 23
2.3 Kalmanin suodattimen soveltaminen epälineaariseen systeemiin 28
2.3.1 Kalmanin suodattimen erilaisia laajennuksia 28
2.3.2 Toisen asteen laajennettu Kalmanin suodatin 32

3 GPS- ja tukiasemapaikannus **35**
3.1 GPS 35
3.1.1 GPS-mittausyhtälöt 36
3.1.2 GPS-mittauksien virhearviot 37
3.2 Tukiasemapaikannus 38
3.3 Hybridipaikannus 40

4 Suodatus paikannuksessa **42**
4.1 Käyttäjän tilamalli 42
4.2 Laajennettu Kalmanin suodatin 45
4.2.1 Pseudoetäisyysmittaukset 45
4.2.2 Pseudoetäisyyksien derivaattamittaukset 46
4.2.3 Tukiasemien etäisyysmittaukset 47

4.2.4 Mittausmalli 47
4.3 Toisen asteen laajennettu Kalmanin suodatin 50
4.3.1 Epälineaarisuus satelliittimittauksissa 51
4.3.2 Epälineaarisuus tukiasemamittauksissa 54
4.3.3 Vertailu EKF2 vs. EKF 55
4.4 Paikkaratkaisun Kalmanin suodatin 57
4.4.1 Epävarmuus PKF:ssa 58

5 Simulaatiot ja testaus 61
5.1 Suodattimien vertailu 62
5.1.1 Tasan- ja ylimäärätty systeemi 62
5.1.2 Alimäärätty systeemi 64
5.2 PKF:n epävarmuus 66
5.3 EKF:n ja EKF2:n hairahtuminen 67
5.3.1 Tasanmäärätty systeemi 68
5.3.2 Alimäärätty systeemi 71
5.4 Suodattimien toiminta oikealla reitillä 72

6 Yhteenveto ja jatkotutkimus 74

Lähdeluettelo 76

A Kalmanin suodattimen johto 81

B Algoritmeja 88

Tiivistelmä

TAMPEREEN TEKNILLINEN YLIOPISTO
Teknis-luonnontieteellinen osasto
Matematiikan laitos
Ali-Löytty, Simo: Kalmanin suodatin ja sen laajennukset paikannuksessa
Diplomityö, 80 sivua ja 9 liitesivua
Tarkastaja: professori Robert Piché
Käsitellään osastoneuvostossa joulukuussa 2004

Tämä diplomityö on tehty Matematiikan laitoksen henkilökohtaisen paikannuksen algoritmien tutkimusryhmässä. Diplomityössä on aluksi selvitetty kirjallisuustutkimuksen avulla matemaattisia perusteita Kalmanin suodattimen ja sen laajennuksien soveltuvuudesta paikannukseen. Tässä työssä paikannus perustuu sekä satelliiteista että matkapuhelimien tukiasemista tuleviin mittauksiin.

Diplomityössä on keskitytty laajennettuun Kalmanin suodattimeen (EKF, Extended Kalman Filter), toisen asteen laajennettuun Kalmanin suodattimeen (EKF2, Second Order Extended Kalman Filter) ja paikkaratkaisun Kalmanin suodattimeen (PKF, Position Kalman Filter). Nämä edustavat laajasti paikannussovellukseen sopivia Kalmanin suodattimen laajennuksia. Suodattimien yksityiskohtaiset algoritmit paikannussovelluksessa on esitetty tässä työssä. Nämä suodattimet on myös toteutettu Matlab-ohjelmalla, jolla on tehty erilaisia simulaatiota ja vertailuja.

Simulaatioiden ja teorian perusteella voidaan todeta, että kyseiset suodattimet toimivat hyvin ylimäärätyissä systeemeissä, eli systeemeissä joissa mittauksia on jokaisena ajanhetkenä enemmän kuin mitä yksikäsitteiseen paikkaratkaisuun tarvitaan. Alimäärätyissä systeemeissä PKF ei toimi optimaalisesti, koska se hylkää mittauksia. Toisaalta EKF ei alimäärätyissä tapauksissa toimi useinkaan konsistentisti, eli EKF:n ennustama virhe on paljon pienempi, kuin mitä virhe on todellisuudessa. Simulaatioiden mukaan EKF2 toimi luotettavammin kuin EKF, koska EKF2 ottaa huomioon mittausmallissa olevaa epälineaarisuutta. Kuitenkin myös EKF2:ssa oli samoja ongelmia kuin EKF:ssa. EKF:ssa ja EKF2:ssa ongelmia esiintyy lähinnä silloin kun tiheysfunktiot eivät muistuta normaalijakauman tiheysfunktioita. PKF:lla ei ole vastaavanlaisia ongelmia konsistenttiuden kanssa.

Abstract

TAMPERE UNIVERSITY OF TECHNOLOGY
Department of Science and Engineering
Institute of Mathematics
Ali-Löytty, Simo: Kalman Filter and Its Extensions in Navigation
Master of Science Thesis, 80 pages and 9 pages appendices
Examiner: professor Robert Piché
Evaluated by department council in December 2004

This thesis was done in the Personal Positioning Algorithms Research Group of the Institute of Mathematics. In this thesis, the mathematical foundations of the Kalman filter and its extensions were studied by literature survey, concentrating on navigation applications based on signals from satellites and from mobile phone network base stations.

In this thesis, we concentrate on Extended Kalman Filter (EKF), Second Order Extended Kalman Filter (EKF2) and Position Kalman Filter (PKF). These extensions widely represent extensions of Kalman filter in navigation. Algorithms of these filters are presented in this thesis. These filters were also programmed in Matlab.

The following results are based on simulations and theory. All studied filters work well on overdetermined systems that contain at every time instant more measurements than what we need for an unambiguous position solution. For underdetermined systems, PKF does not work optimally because it ignores some measurements. On the other hand, EKF does not usually work consistently and actual errors are much larger than EKF predicts. EKF2 works better than EKF, because EKF2 takes into consideration the nonlinearity of the measurement models. Nevertheless, EKF2 has also similar problems as EKF, especially when the probability density function does not resemble the normal probability density function. PKF does not have this kind of consistency problems.

Lyhenteet

3G	kolmas sukupolvi (Third Generation)
AOA	saapumiskulmamittaus (Angle of Arrival)
BLUE	paras lineaarinen harhaton estimaattori (Best Linear Unbiased Estimator)
BS	tukiasema (Base Station)
CDF	keskierotussuodatin (Central Difference Filter)
CDMA	siirtotekniikkamenetelmä (Code Division Multiple Access)
Cell-ID	solutunniste (Cell Identity)
DD1	ensimmäisen asteen jaettu erotussuodatin (First Order Divided Difference Filter)
DoD	Yhdysvaltain puolustusministeriö (Department of Defence)
EKF	laajennettu Kalmanin suodatin (Extended Kalman Filter)
EKF2	toisen asteen laajennettu Kalmanin suodatin (Second Order Extended Kalman Filter)
ENU	lokaalinen itä-pohjois-korkeus-koordinaatisto (East-North-Up)
GPS	maailmanlaajuinen paikannusjärjestelmä (Global Positioning System)
GSM	toisen sukupolven matkaviestinjärjestelmä (Global System for Mobile Communications)
IEKF	iteroitu laajennettu Kalmanin suodatin (Iterated Extended Kalman Filter)
KF	Kalmanin suodatin (Kalman Filter)
LKF	linearisoitu Kalmanin suodatin (Linearized Kalman Filter)
LRKF	lineaarisen regression Kalmanin suodatin (Linear Regression Kalman Filter)
MAP	maksimi-a-posteriori (Maximum a Posteriori)
NLOS	epäsuora eteneminen (Non-Line of Sight)
PF	partikkelisuodatin (Particle Filter)

PKF	paikkaratkaisun Kalmanin suodatin (Position Kalman Filter)
RSS	vastaanotetun signaalin voimakkuusmittaus (Received Signal Strength)
RTD	kulkuaikamittaus (Round Trip Delay)
RTT	RTD-mittaus 3G verkossa (Round Trip Time)
SA	rajoitettu saatavuus (Selective Availability)
SI	kansainvälisen mittayksikköjärjestelmä (Système International d'Unités)
SV	satelliitti (Space Vehicle)
TA	RTD-mittaus GSM verkossa (Timing Advance)
TDOA	saapumisaikaerotusmittaus (Time Difference of Arrival)
TOA	saapumisaikamittaus (Time of Arrival)
UERE	vastaanottimen kokonaisetäisyysvirheen sigma (User Equivalent Range Error)
UKF	hajuton Kalmanin suodatin (Unscented Kalman Filter)
US CDMA	Yhdysvaltojen CDMA-järjestelmä (IS-801) (United States Code Division Multiple Access)
WLS	painotettu pienin neliösumma (Weighted Least Squares)

Merkinnät

$\int$	integraali kyseessä olevan avaruuden yli (s. 15)
∞	ääretön (s. 24)
$\int_A$	integraali alueen A yli (s. 27)
$\mathbf{1}$	vektori, jonka kaikki alkiot ovat ykkösiä (s. 45)
$\bigotimes$	ei korkeusmittausta käytössä (s. 63)
$\varnothing$	ei yksikäsitteistä paikkaratkaisua (s. 64)
α	$\min(\alpha_\mathrm{o}, \alpha_\mathrm{t})$ (s. 24)
α_o	ohjattavuusmatriisin alaraja (s. 23)
α_t	tarkkailtavuusmatriisin alaraja (s. 23)
$\boldsymbol{\beta}$	Brownin liike (s. 21)
β	$\max(\beta_\mathrm{o}, \beta_\mathrm{t})$ (s. 24)
β_o	ohjattavuusmatriisin yläraja (s. 23)
β_t	tarkkailtavuusmatriisin yläraja (s. 23)
b	vastaanottimen kellopoikkeama (s. 36)
$\dot{b}$	vastaanottimen kellopoikkeaman aikaderivaatta (s. 37)
$\mathcal{C}$	ohjattavuusmatriisi (s. 23)
det	matriisin determinantti (s. 17)
D	yleinen differenssikuvausmatriisi (s. 46)
D_1	$[\mathrm{I} - \mathbf{1}]$ työssä käytetty differenssikuvausmatriisi (s. 52)
Diag	operaattori, joka tekee vektorista diagonaalimatriisin (s. 62)
diag	diagonaalioperaattori, poimii matriisin diagonaalin vektoriksi (s. 46)
Δt	$t_{k+1} - t_k$ aika-askeleen pituus (s. 44)
E	odotusarvo-operaattori (s. 17)
$\mathrm{E}(\mathbf{x}\|\mathbf{y})$	ehdollinen odotusarvo (satunnaismuuttuja) (s. 18)
$\mathrm{E}(\mathbf{x}\|\mathbf{y} = y)$	ehdollinen odotusarvo ehdolla $\mathbf{y} = y$ (realisaatio) (s. 17)
$\mathbf{e}_i$	karteesisen koordinaatiston i. kantavektori (s. 33)
e_0	alkuehdon odotusarvon itä-komponentti (s. 71)
exp	eksponenttifunktio (s. 17)
$\boldsymbol{\epsilon}$	satunnaismuuttuja, joka sisältää mittauksienvirhetermit (s. 40)
$\epsilon_{\rho_i^\mathrm{s}}$	i. satelliitin pseudoetäisyysmittauksen virhetermi (s. 36)
$\epsilon_{\dot{\rho}_i^\mathrm{s}}$	i. satelliitin pseudoetäisyysderivaattamittauksen virhetermi (s. 37)
$\epsilon_{\rho_i^\mathrm{t}}$	i. tukiaseman etäisyysmittauksen virhetermi (s. 38)
Φ	tilansiirtomatriisi (s. 17)
Φ^{e_i}	tilansiirtofunktion i. komponentin Hessen matriisi (s. 33)

F	kerroinmatriisi stokastisessa differentiaaliyhtälössä (s. 21)
$\mathbf{f}$	tilansiirtofunktio (s. 16)
$\mathcal{F}$	joukon Ω σ-algebra (s. 15)
$f(x)$, $f_{\mathbf{x}}(x)$	satunnaismuuttujan $\mathbf{x}$ tiheysfunktio (s. 15), jälkimmäistä merkintää käytetään joissakin tapauksissa selkeyden vuoksi (s. 27).
$f(x, y)$	satunnaismuuttujien $\mathbf{x}$ ja $\mathbf{y}$ yhdistetty tiheysfunktio (s. 15)
$f(x\|y)$	satunnaismuuttujan $\mathbf{x}$ ehdollinen tiheysfunktio ehdolla $\mathbf{y} = y$ (s. 15)
G	liitosmatriisi kohinan ja tilan välillä (s. 21)
H	mittausmatriisi (s. 17)
H^{e_i}	mittausfunktion i. komponentin Hessen matriisi (s. 33)
$\mathrm{H}^{e}_{\lVert\mathbf{a}-\mathbf{x}\rVert}$	funktion $h(\mathbf{x}) = \lVert\mathbf{a} - \mathbf{x}\rVert$ Hessen matriisi (s. 48)
$\mathbf{h}$	mittausfunktio (s. 16)
$\check{\mathbf{h}}(\mathbf{x})$	apumerkintä EKF:n mittausmallin rakentamisessa (s. 47)
I	yksikkömatriisi (s. 18)
$\mathcal{I}$	tarkkailtavuusmatriisi (s. 23)
K	Kalmanin vahvistus (Kalman gain) (s. 18)
L	kustannusfunktio (s. 19)
λ	matriisin ominaisarvo (s. 53)
$\lambda_{\max}^{\hat{\mathrm{P}}^-}$	kovarianssimatriisin $\hat{\mathrm{P}}^-$ suurin ominaisarvo (s. 52)
μ	odotusarvo (s. 17)
$\mathbb{N}$	luonnollisten lukujen joukko (s. 15)
n_β	Brownin liikkeen dimensio (s. 21)
n_{o}	ohjattavuusmatriisin aika-askelien lukumäärä (s. 23)
n_{s}	satelliittien lukumäärä (s. 40)
n_{t}	asiayhteydestä riippuen joko tarkkailtavuusmatriisin aika-askelien lukumäärä (s. 23) tai tukiasemien lukumäärä (s. 40)
n_x	tilan dimensio (s. 17)
n_y	mittauksien dimensio (s. 17)
Ω	otosavaruus (s. 15)
$(\Omega, \mathcal{F}, P)$	todennäköisyysavaruus (s. 15)
P	todennäköisyysmitta (s. 15)
P_k	tilan $\mathbf{x}_k$ kovarianssimatriisi (s. 17)
$\widetilde{\mathbf{P}}$	satunnaismuuttuja $\mathrm{V}(\mathbf{x} - \hat{\bar{\mathbf{x}}})$, missä $\hat{\bar{\mathbf{x}}}$ on virheellisen mallin antama estimaattori tilalle $\mathbf{x}$ (s. 25)
Q_k	dynamiikan kohinan $\mathbf{w}_k$ kovarianssimatriisi (s. 17)
Q_{c}	diffuusiomatriisi (s. 21)
R_k	mittauskohinan $\mathbf{v}_k$ kovarianssimatriisi (s. 17)
$\mathbb{R}$	reaalilukujen joukko (s. 15)
$\mathbf{r}_i^{\mathrm{s}}$	i. satelliitin paikkavektori (s. 36)
$\mathbf{r}_i^{\mathrm{t}}$	i. tukiaseman paikkavektori (s. 38)
$\mathbf{r}_{\mathrm{u}}$	vastaanottimen (käyttäjän) paikkavektori (s. 36)
ρ_i^{s}	pseudoetäisyysmittaus i. satelliittiin (s. 36)
$\dot{\rho}_i^{\mathrm{s}}$	pseudoetäisyyden derivaattamittaus i. satelliittiin (s. 37)
ρ_i^{t}	etäisyysmittaus i. tukiasemaan (s. 38)

Σ	kovarianssimatriisi (s. 17)
$\sigma_{\rho^{\mathrm{s}}}$	satelliitin pseudoetäisyysmittauksen virheen sigma (s. 62)
$\sigma_{\dot{\rho}^{\mathrm{s}}}$	satelliitin pseudoetäisyyden derivaattamittauksen virheen sigma (s. 62)
$\sigma_{\rho^{\mathrm{t}}}$	tukiaseman etäisyysmittauksen virheen sigma (s. 62)
$\sigma_{\max}$	kovarianssimatriisin suurimman ominaisarvon neliöjuuri (s. 27)
$\sigma^2_{\rho^{\mathrm{s}}_i}$	i. satelliitin pseudoetäisyysmittauksen virheen varianssi (s. 37)
σ^2_{kork}	diffuusiomatriisin alkio, kuvaa tilamallin virhettä korkeussuunnassa (s. 44)
σ_{ratk}	yläraja yksittäisen ratkaisun virheen sigmalle (s. 58)
σ_{R}	mittausvirheen sigma (s. 58)
σ_{suod}	yläraja suodatetun ratkaisun virheen sigmalle (s. 58)
σ^2_{taso}	diffuusiomatriisin alkio, kuvaa tilamallin virhettä tasossa (s. 44)
T	parametrijoukko (s. 15)
t_{suod}	lauseen 2.15 aika-askelien lukumäärää ($n_{\mathrm{o}} = n_{\mathrm{t}}$) vastaava aika (s. 58)
tr	matriisin jälki-operaattori (s. 26)
U^{s}	matriisi johon on koottu yksikkövektorit käyttäjästä satelliitteihin (s. 46)
$\dot{\mathrm{U}}^{\mathrm{s}}_{\mathbf{v}_{\mathrm{u}}}$	vektorin $\mathrm{U}^{\mathrm{s}}\mathbf{v}_{\mathrm{u}}$ paikkaderivaatta prioripaikan odotusarvossa (s. 49)
$\dot{\mathrm{U}}^{\mathrm{s}}_{\mathrm{V}^{\mathrm{s}}}$	vektorin $\mathrm{diag}(\mathrm{U}^{\mathrm{s}}(\mathrm{V})^T)$ paikkaderivaatta prioripaikan odotusarvossa (s. 49)
U^{t}	matriisi johon on koottu yksikkövektorit käyttäjästä tukiasemiin (s. 49)
$\mathbf{u}^{\mathrm{s}}_i$	yksikkövektoi käyttäjästä i. satellittiin (s. 46)
V	kovarianssimatriisioperaattori (s. 17)
V^{s}	matriisi johon on koottu satelliittien nopeudet (s. 46)
$\mathbf{v}$	mittauskohinan stokastinen prosessi (s. 16)
$\mathbf{v}^{\mathrm{s}}_i$	i. satelliitin nopeus (s. 37)
$\lVert\mathbf{v}^{\mathrm{s}}_{\max}\rVert$	satelliittien maksiminopeus (s. 54)
$\mathbf{v}_{\mathrm{u}}$	käyttäjän nopeus (s. 37)
$\mathbf{v}_{\mathrm{u}-i^{\mathrm{s}}}$	$\mathbf{v}_{\mathrm{u}} - \mathbf{v}^{\mathrm{s}}_i$ apumerkintä Hessen matriisin laskemisessa (s. 51)
$\mathbf{w}$	dynamiikan kohinan stokastinen prosessi (s. 16)
$\mathbf{w}_{k_{12}}$	tilansiirtomatriisi $\Phi(t_{k+2}, t_k)$ vastaava kohina (s. 22)
$\mathbf{x}$	asiayhteydestä riippuen joko (tilan) stokastinen prosessi (s. 15), satunnaismuuttuja (s. 15) tai vektori (s. 19)
$\mathbf{x}\|y$	satunnaismuuttuja, jonka tiheysfunktio on $f(x\|y)$ (s. 15)
$\mathbf{x} \sim \mathrm{N}_p(\mu, \Sigma)$	$\mathbf{x}$ noudattaa p-ulotteista normaalijakaumaa parametrein μ ja Σ (s. 17)
$\mathbf{y}$	asiayhteydestä riippuen joko satunnaismuuttuja (s. 15), (mittauksien) stokastinen prosessi (s. 15) tai vektori (s. 19)

Lihavoitu symboli ($\mathbf{x}$, $\mathbf{P}$, $\mathbf{s}$, ...) viittaa asiayhteydestä riippuen stokastiseen prosessiin, satunnaismuuttujaan tai vektoriin.

Lihavoimaton symboli (P, t, x, ...) viittaa asiayhteyden mukaan satunnaismuuttujan realisaatioon, skalaariin tai muodolliseen muuttujaan. Muodollisia muuttujia (dummy variables) ovat esimerkiksi tiheysfunktion argumentit ja integrointimuuttujat.

Isot kirjaisimet ($\mathbf{P}$, H, K, ...) tarkoittavat matriisiarvoisia stokastisia prosesseja, matriisiarvoisia satunnaismuuttujia tai matriiseja.

Hattumerkintä ($\hat{\mathbf{x}}$, $\hat{x}$, ...) viittaa lihavoidun symbolin päällä estimaattoriin ja lihavoimattoman symbolin päällä estimaattiin. Yläviiva $\overline{\mathbf{x}}$ viittaa dynaamiseen systeemiin, jossa on mallinnusvirhettä (kts. sivu 24).

alaindeksit

$_k$: ajanhetkellä t_k

$_0$: alkuehto/-tila

$_c$: jatkuvan prosessin parametri

$_{n\times m}$: matriisin tyyppi on $\mathbb{R}^{n\times m}$

$_{1:k}$: $y_{1:k} = \{y_i, i = 1, \ldots, k\}$

yläindeksit

$^{-1}$: matriisin inverssi

^{T}: transpoosi

$^-$: priori-tila

^{s}: satelliitti

^{t}: tukiasema

Luku 1

Johdanto

Paikannuksessa on tarkoitus saada mahdollisimman tarkasti selville paikannettavan (käyttäjän) paikka. Paikan lisäksi on usein tarkoitus selvittää myös aika ja käyttäjän nopeus. Nykyisin suotuisissa olosuhteissa erittäin tarkka paikannus on mahdollista satelliittipaikannuksen avulla (esimerkiksi GPS, Global Positioning System). GPS-vastaanottimien halventuessa paikannusta on entistä enemmän alettu käyttämään ammattilaisten lisäksi myös yksityisten ihmisten keskuudessa. Paikannuksen ympärille on kehitetty ja kehitetään monenlaisia sovelluksia. Esimerkkejä yksityisten tarvitsemista palveluista ovat autonavigointilaitteisto, joka opastaa autoilijan perille ja hätäpuhelun paikantaminen, jonka avulla apu osattaisiin lähettää perille vaikka hädässäolija ei osaisi kertoa sijaintiaan. Nykyään useisiin matkapuhelimiin saa paikannusominaisuuden, joten paikannuksen käyttäminen ei välttämättä enää tarvitse edes omaa erillistä laitetta. On arvioitu, että paikannus tulee entisestään kasvattamaan suosiotaan myös tulevaisuudessa.

Satelliittipaikannuksen lisäksi paikantaa voidaan esimerkiksi matkapuhelimien tukiasemista saamien signaalien avulla. Tukiasemapaikannus on huomattavasti epätarkempaa kuin satelliittipaikannus. Satelliittipaikannus kuitenkin vaatii toimiakseen lähes avonaisen näkymän taivaalle. Paikoissa, joissa tämä ei ole mahdollista (sisällä, kaupunkialueella tai tiheässä metsässä) satelliittipaikannus ei välttämättä toimi. Tämän vuoksi on kehitelty hybridipaikannusmenetelmiä, jotka käyttävät sekä satelliiteista että tukiasemista tulevia mittauksia ja näin pystyvät toimimaan entistä laajemmalla alueella. Tämän työn luvussa 3 on kerrottu tarkemmin GPS-paikannuksesta,

tukiasemapaikannuksesta ja hybridipaikannuksesta. Tässä työssä pelkästä paikannuksesta puhuttaessa tarkoitetaan hybridipaikannusta.

Eräs tapa paikantaa on ratkaista paikkaestimaatti käyttäen vain nykyisiä mittauksia. Suodatuksen ideana on käyttää paikkaestimaatin ratkaisemisessa hyväksi kaikkia siihen mennessä saatuja mittauksia, myös aikaisemmin tulleita. Näin suodatuksella saadaan aikaiseksi tarkempi estimaatti paikalle, varsinkin silloin kun nykyisiä mittauksia ei ole tarpeeksi yksikäsitteisen paikkaratkaisun saamiseksi. Suodatuksen yleistä ongelmanasettelua on käsitelty kappaleessa 2.1.

Tämän työn varsinaisena aiheena on Kalmanin suodatin ja sen laajennukset paikannuksessa. Kalmanin suodatin (kappale 2.2) on analyyttinen ratkaisu lineaariseen ja Gaussiseen suodatusongelmaan. Kalmanin suodattimen erilaisia laajennuksia yleiseen suodatusongelmaan käsitellään kappalessa 2.3. Laajennuksissa rajoitutaan vain sellaisiin suodattimiin, jotka pitävät kirjaa tiheysfunktioiden odotusarvoista ja kovarianssimatriiseista.

Tässä työssä esitettyjä Kalmanin suodattimien laajennuksia on jo sovellettu hybridipaikannukseen [Heinrichs et al. 2004], [Ilmavirta 2002] ja [Ma 2003]. Kyseisissä julkaisuissa ei ole kovinkaan teoreettisesti paneuduttu perustavaa laatua olevaan kysymykseen siitä, pitäisikö suodattimien toimia oikein kyseisissä tilanteissa. Tässä työssä pyritään selvittämään erityisesti tätä kysymystä. Työssä pyritään luomaan katsaus käsiteltävien suodattimien matemaattisiin perusteisiin. Esimerkiksi Kalmanin suodattimen yksityiskohtainen johto on esitetty liitteessä A.

Sovellusosassa keskitytään laajennetun Kalmanin suodattimen (EKF, Extended Kalman Filter), toisen asteen laajennetun Kalmanin suodattimen (EKF2, Second Order Extended Kalman Filter) ja paikkaratkaisun Kalmanin suodattimen (PKF, Position Kalman Filter) soveltamiseen paikannuksessa (luku 4). Luvussa tutkitaan teorian avulla muun muassa minkälaisissa tilanteissa EKF ja EKF2 poikkeavat huomattavasti toisistaan (kappale 4.3.3). PKF:n yhteydessä tutkitaan, kuinka tarkkoihin estimaatteihin suodattimella teoreettisesti voidaan ainakin päästä (kappale 4.4.1). Suodattimien algoritmit on esitetty tiiviissä muodossa liitteessä B. Työhön kuuluu myös kyseisten suodattimien toteutus Matlab-funktioiksi. PKF:n tarvitsemana paikkaratkaisijana käytetään Niilo Sirolan toteuttamaa algoritmia [Sirola et al. 2003]. Matlab-funktioiden avulla tehtyjä erilaisia simulaatioita ja vertailuja on esitetty luvussa 5. Simulaatiot on pyritty tekemään mahdollisimman todenmukaisiksi käyttämällä muun muassa tekijän mittaamaa oikeata navigointiviestiä satelliittien simuloinnissa.

Lopuksi työssä sovelletaan käsiteltyjä suodattimia myös tekijän mittaamaan todelliseen reittiin. Kyseiset tulokset on esitetty kappaleessa 5.4. Tämän tarkoituksena on antaa käsitys siitä, minkälainen hyöty suodatuksesta on käytännön tilanteessa.

Luku 2

Suodatus

Tämä luku aloitetaan katsauksella yleiseen suodatusongelmaan, jonka erikoistapauksen ratkaisuna tunnettua Kalmanin suodatinta käsitellään laajasti kappaleessa 2.2. Varsinaisen Kalmanin suodattimen algoritmin (kappale 2.2.2) lisäksi käsitellään missä mielessä Kalmanin suodattimen antama ehdollinen odotusarvo on optimaalinen estimaatti tilalle kyseisessä erikoistapauksessa (kappale 2.2.3). Tämän jälkeen käsitellään sitä, missä mielessä Kalmanin suodattimen antama ehdollinen odotusarvo on optimaalinen myös yleisemmälle suodatusongelmalle (kappale 2.2.4). Kalmanin suodatinta koskevassa kappaleessa puututaan myös kysymykseen, mistä suodatuksen tilamalli on usein peräisin (kappale 2.2.5). Lisäksi Kalmanin suodattimen yhteydessä tutkitaan Kalmanin suodattimen epävarmuutta ja herkkyyttä mallinnusvirheille (2.2.6). Luvun lopussa esitellään erilaisia tapoja ratkaista yleistä suodatusongelmaa Kalmanin suodattimen laajennuksilla (kappale 2.3), erityisesti esitellään toisen asteen laajennettu Kalmanin suodatin (kappale 2.3.2).

2.1 Yleinen ongelman asettelu

Monissa teknisissä sovelluksissa halutaan saada selville mahdollisimman hyvä estimaatti prosessin tilalle tietyllä ajanhetkellä. Estimaatin arvon lisäksi ollaan kiinnostuneita sen tarkkuudesta ja epävarmuudesta. Tähän tarkoitukseen on käytettävissä malli

prosessin dynamiikalle, eli sille, miten prosessi muuttuu ajan kuluessa. Tämän lisäksi on käytettävissä mittauksia, jotka riippuvat sen hetkisestä tilasta. Mallia ja siihen liittyviä mittauksia kutsumme dynaamiseksi systeemiksi. Esimerkkinä tälläisestä dynaamisesta systeemistä on paikannus. Paikannuksessa tilana on vastaanottimen paikka ja mahdollisesti muita muuttujia. Mittauksina voi toimia esimerkiksi etäisyysmittaukset satelliitteihin ja/tai tukiasemiin, korkeusmittaus ja sektoritiedot. Tässä työssä on tarkoituksena esittää tämä ongelma matemaattisessa muodossa, ratkaista se muutamassa erikoistapauksessa ja soveltaa ratkaisuja paikannukseen. Ennen varsinaista ongelman matemaattista formulointia määritellään muutama käsite. Peruskäsitteet, kuten otosavaruus (merkintä Ω), joukon Ω σ-algebra (merkintä $\mathcal{F}$), todennäköisyysmitta (merkintä P), todennäköisyysavaruus (merkintä $(\Omega, \mathcal{F}, P)$), satunnaismuuttuja (merkintä lihavoitu kirjain esimerkiksi $\mathbf{x}$), satunnaismuuttujan $\mathbf{x}$ tiheysfunktio (merkintä $f(x)$ tai $f_{\mathbf{x}}(x)$), riippumattomuus ja satunnaismuuttujien $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ yhteisjakauma (merkintä $f(x, y)$) oletetaan tunnetuiksi. Nämä löytyvät muun muassa viitteistä [Kaleva 2003a] ja [Maybeck 1979].

Määritelmä 2.1 (Stokastinen prosessi). *Olkoon $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ todennäköisyysavaruus ja T parametrijoukko. Stokastinen prosessi on sellainen kuvaus $\mathbf{x} : \Omega \times T \to \mathbb{R}^n$, että jokaisella kiinteällä $t_k \in T$ $\mathbf{x}(\cdot, t_k)$ on satunnaismuuttuja (joka voi olla myös matriisiarvoinen, tällöin maalijoukko on $\mathbb{R}^{n\times m}$). Tätä satunnaismuuttujaa merkitään myös symboleilla $\mathbf{x}_k$ ja $\mathbf{x}(t_k)$.*

Määritelmä 2.2 (Ehdollinen tiheysfunktio, Bayesin sääntö). *Satunnaismuuttujan $\mathbf{x}$ ehdollinen tiheysfunktio ehdolla $\mathbf{y} = y$ määritellään yhtälöllä*

$$f(x|y) = \frac{f(x, y)}{f(y)} \tag{2.1}$$

pisteissä, joissa nimittäjä on positiivinen. Jos nimittäjä on nolla, niin ehdollista tiheysfunktiota ei ole määritelty. Kyseisen tiheysfunktion omaavaa satunnaismuuttujaa merkitään $\mathbf{x}|y$.

Seuraus 2.3 (Bayesin säännön toinen muoto). *Määritelmästä 2.2 seuraa, että*

$$f(x|y) = \frac{f(y|x)f(x)}{f(y)} = \frac{f(y|x)f(x)}{\int f(y|x)f(x)dx} \tag{2.2}$$

[Maybeck 1979, s.81].

Määritelmä 2.4 (Markovin prosessi). *Stokastinen prosessi $\{\mathbf{x}_k, k \in \mathbb{N}\}$ on Markovin prosessi jos kaikilla $k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$*

$$f(x_k|x_1, \ldots, x_{k-1}) = f(x_k|x_{k-1}). \tag{2.3}$$

Määritelmä 2.5 (Valkoinen prosessi). *Stokastinen prosessi $\{\mathbf{x}_k, k \in \mathbb{N}\}$ on valkoinen prosessi jos se on Markovin prosessi ja kaikilla $k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$*

$$f(x_k|x_{k-1}) = f(x_k). \tag{2.4}$$

Näiden määritelmien avulla tehtävä voidaan formuloida. Dynaamisen prosessin tilat ja mittaukset mallinnetaan stokastiseksi prosesseiksi $\{\mathbf{x}_k, k \in \mathbb{N}\}$ ja $\{\mathbf{y}_{k+1}, k \in \mathbb{N}\}$. Alkuehtoa merkitään satunnaimuuttujana $\mathbf{x}_0$. Prosessin dynamiikka mallinnetaan stokastiseksi differenssiyhtälöksi

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{f}_k(\mathbf{x}_k, \mathbf{w}_k). \tag{2.5}$$

Mittausyhtälö

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{h}_k(\mathbf{x}_k, \mathbf{v}_k) \tag{2.6}$$

mallintaa mittauksien ja tilan välistä yhteyttä. Funktiot oletetaan jatkuvasti derivoituviksi argumenttiensa suhteen. $\{\mathbf{w}_k, k \in \mathbb{N}\}$ kuvaa dynamiikan kohinaa ja $\{\mathbf{v}_{k+1}, k \in \mathbb{N}\}$ kuvaa mittauksien kohinaa. Molemmat kohinat oletetaan nollakeskisiksi- ja valkoisiksi kohinoiksi ja riipumattomiksi toisistaan. Lisäksi oletetaan, että $\{\mathbf{w}_k\}$ on riippumaton alkuehdosta $\mathbf{x}_0$. Näin ollen prosessit $\{\mathbf{x}_k\}$, $\{\mathbf{y}_{k+1}\}$ ja $\{\mathbf{x}_k, \mathbf{y}_{k+1}\}$ ovat Markovin prosesseja [Jazwinski 1970, s.143].

Tehtävänä on ratkaista tilan $\mathbf{x}_k$ ehdollinen tiheysfunktio realisoituneiden mittausten ehdolla. Otetaan käyttöön mittauksien, jotka tapahtuvat ennen ajanhetkeä t_{k+1}, kokoelma $\mathbf{y}_{1:k} = \{\mathbf{y}_i, i = 1, \ldots, k\}$. Jos mittaukset $y_{1:k} = \{y_i, i = 1, \ldots, k\}$ ovat realisoituneet, tehtävänä on ratkaista tiheysfunktio

$$f(x_k|y_{1:k}). \tag{2.7}$$

Bayesin säännön ja kohinoiden valkoisuuden avulla saadaan kaava (2.7) muotoon [Ristic et al. 2004, s.5]

$$f(x_k|y_{1:k}) = \frac{f(y_k|x_k)f(x_k|y_{1:k-1})}{f(y_k|y_{1:k-1})}, \tag{2.8}$$

missä normalisointivakio on muotoa

$$f(y_k|y_{1:k-1}) = \int f(y_k|x_k)f(x_k|y_{1:k-1})dx_k. \tag{2.9}$$

Ratkaistusta ehdollisesta tiheysfunktiosta (2.8) voidaan laskea haluttu estimaatti tilalle $\mathbf{x}_k$ ja arvio sen epävarmuudelle. Useissa tapauksissa ehdollista todennäköisyyttä ei voida ratkaista analyyttisesti [Arulampalam et al. 2002]. Kuitenkin hyvin tärkeässä erikoistapauksessa Kalmanin suodatin ratkaisee kyseisen tehtävän. Kalmanin suodatinta käsitellään tarkemmin kappaleessa 2.2.

2.2 Kalmanin suodatin

Kalmanin suodatin (KF, Kalman Filter), jonka Rudolf E. Kalman julkaisi vuonna 1960 [Kalman 1960], ratkaisee kappaleessa 2.1 määritellyn ongelman erikoistapauksen, jossa kaavojen (2.5) ja (2.6) funktiot ovat lineaarisia ja alkuehto sekä kohinat normaalijakautuneita (Määritelmä 2.6). Tässä kappaleessa on esitetty Kalmanin suodatin. Suodattimen johto löytyy liitteestä A.

Määritelmä 2.6 (Normaalijakauma). *Olkoon* $\mathbf{x} : \Omega \to \mathbb{R}^p$ *vektoriarvoinen satunnaismuuttuja, jonka odotusarvo* $\mathrm{E}(\mathbf{x}) = \mu \in \mathbb{R}^p$ *ja kovarianssimatriisi* $\mathrm{V}(\mathbf{x}) = \Sigma$ *on symmetrinen positiivisesti definiitti* $p \times p$ *matriisi. Tällöin satunnaismuuttuja* $\mathbf{x}$ *noudattaa* p*-ulotteista normaalijakaumaa parametrein* μ *ja* Σ*, jota merkitään* $\mathbf{x} \sim \mathrm{N}_p(\mu, \Sigma)$*, jos sen tiheysfunktio on*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{\det(2\pi\Sigma)}} \exp\Big(- \frac{(x-\mu)^T \Sigma^{-1} (x-\mu)}{2} \Big), \quad x \in \mathbb{R}^p \tag{2.10}$$

2.2.1 Kalmanin suodattimen ongelman asettelu

Kalmanin suodattimen alkuehtona on (oletetaan, että P_0 on positiividefiniitti)

$$\mathbf{x}_0 \sim \mathrm{N}_{n_x}(x_0, \mathrm{P}_0). \tag{2.11}$$

Kalmanin suodattimen tilamallina on

$$\mathbf{x}_{k+1} = \Phi_k \mathbf{x}_k + \mathbf{w}_k \tag{2.12}$$

ja mittausmallina on

$$\mathbf{y}_k = \mathrm{H}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k, \tag{2.13}$$

missä $\mathbf{x}_k$ on n_x-dimensionaalisen tilavektorin satunnaismuuttuja ajanhetkellä t_k. $\Phi_k \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ on tilansiirtomatriisi satunnaismuuttujalta $\mathbf{x}_k$ satunnaismuuttujalle $\mathbf{x}_{k+1}$, käytetään myös merkintää $\Phi(t_{k+1}, t_k)$. $\mathbf{w}_k \sim \mathrm{N}_{n_x}(\mathbf{0}, \mathrm{Q}_k)$ on tilamallin virhe, joka oletetaan valkoiseksi ja riippumattomaksi alkuehdosta $\mathbf{x}_0$. $\mathbf{y}_k$ on n_y-dimensionaalisen mittausvektorin satunnaismuuttuja ajanhetkellä t_k. $\mathrm{H}_k \in \mathbb{R}^{n_y \times n_x}$ kuvaa tilan ja mittauksien välistä ideaalista yhteyttä ajanhetkellä t_k. $\mathbf{v}_k \sim \mathrm{N}_{n_y}(\mathbf{0}, \mathrm{R}_k)$ on mittausvirhe, joka oletetaan valkoiseksi ja riippumattomaksi prosessin $\mathbf{w}_k$ kanssa. Matriisit R_k oletetaan positiividefiniiteiksi.

Määritelmä 2.7 (Ehdollinen odotusarvo). *Satunnaismuuttujan* $\mathbf{x}$ *ehdollinen odotusarvo ehdolla* $\mathbf{y} = y$ *määritellään yhtälöllä*

$$\mathrm{E}(\mathbf{x}|\mathbf{y} = y) = \int x f(x|y) dx \tag{2.14}$$

Huomataan (liite A), että kaikki Kalmanin suodattimen antamat ehdolliset tiheysfunktiot $f(x_k|y_{1:k})$, missä $k \in \mathbb{N}$, ovat normaalisti jakautuneita. Riittää, että saadaan selville satunnaismuuttujien $\mathbf{x}_k$ ehdolliset odotusarvot ja kovarianssimatriisit ehdolla $\mathbf{y}_{1:k} = y_{1:k}$ (Määritelmä 2.7), tällöin kaikki jakaumien parametrit ovat tiedossa. Merkitään parametreja hattusymbolilla, koska niitä käytetään myös tilan ja tilan epävarmuuden estimaatteina (kappale 2.2.3).

$$\hat{x}_k = \mathrm{E}(\mathbf{x}_k|\mathbf{y}_{1:k} = y_{1:k}) \tag{2.15}$$

$$\hat{\mathrm{P}}_k = \mathrm{E}((\mathbf{x}_k - \hat{x}_k)(\mathbf{x}_k - \hat{x}_k)^T|\mathbf{y}_{1:k} = y_{1:k}) \tag{2.16}$$

$$\mathbf{x}_k|y_{1:k} \sim \mathrm{N}_{n_x}(\hat{x}_k, \hat{\mathrm{P}}_k) \tag{2.17}$$

Kaavassa (2.17) oleva merkintä tarkoittaa, että satunnaismuuttujan $\mathbf{x}_k$, jonka dimensio on n_x, ehdollinen jakauma ehdolla $\mathbf{y}_{1:k} = y_{1:k}$ on normaalijakauma parametrein $\hat{x}_k$ ja $\hat{\mathrm{P}}_k$. On syytä huomata, että parametrit $\hat{x}_k$ ja $\hat{\mathrm{P}}_k$ riippuvat arvosta $y_{1:k}$ ja ovat siten satunnaismuuttujien $\hat{\mathbf{x}}_k$ ja $\hat{\mathbf{P}}_k$ reaalisaatioita. Satunnaismuuttujan $\mathbf{x}_k$ ehdollista tiheysfunktiota ehdolla $\mathbf{y}_{1:k-1} = y_{1:k-1}$ kutsutaan priori-tilan tiheysfunktioksi. Priori-tila, jonka merkkinä on yläindeksissä miinus ($\mathbf{x}_k^-$), on suodattimen ennustama tila ajanhetkelle t_k mittauksien $\mathbf{y}_{1:k-1} = y_{1:k-1}$ perusteella. Priori-tilan ehdollisen odotusarvon realisaatio on

$$\hat{x}_k^- = \mathrm{E}(\mathbf{x}_k|\mathbf{y}_{1:k-1} = y_{1:k-1}) = \Phi_{k-1}\hat{x}_{k-1} \tag{2.18}$$

ja priori-tilan ehdollisen kovarianssimatriisin realisaatio on

$$\hat{\mathrm{P}}_k^- = \mathrm{E}((\mathbf{x}_k - \hat{x}_k^-)(\mathbf{x}_k - \hat{x}_k^-)^T|\mathbf{y}_{1:k-1} = y_{1:k-1}) = \Phi_{k-1}\hat{\mathrm{P}}_{k-1}\Phi_{k-1}^T + \mathrm{Q}_{k-1}. \tag{2.19}$$

2.2.2 Kalmanin suodattimen algoritmi

Kalmanin suodattimen algoritmi on esitelty myös liitteessä B ja sen johto on esitetty liitteessä A. Kalmanin suodatin määritellään rekursiivisesti. Oletetaan, että

$$\mathbf{x}_{k-1}|y_{1:k-1} \sim \mathrm{N}_{n_x}(\hat{x}_{k-1}, \hat{\mathrm{P}}_{k-1}), \quad k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}. \tag{2.20}$$

Merkintä $\mathbf{x}_0|y_{1:0}$ tarkoittaa satunnaismuuttujaa $\mathbf{x}_0$. Tällöin

$$\mathbf{x}_k|y_{1:k} \sim \mathrm{N}_{n_x}(\hat{x}_k^- + \mathrm{K}_k(y_k - \mathrm{H}_k\hat{x}_k^-), (\mathrm{I} - \mathrm{K}_k\mathrm{H}_k)\hat{\mathrm{P}}_k^-), \tag{2.21}$$

missä K_k kutsutaan Kalmanin vahvistukseksi (Kalman gain),

$$\mathrm{K}_k = \hat{\mathrm{P}}_k^-\mathrm{H}_k^T(\mathrm{H}_k\hat{\mathrm{P}}_k^-\mathrm{H}_k^T + \mathrm{R}_k)^{-1}. \tag{2.22}$$

Erotusta $(y_k - \mathrm{H}_k\hat{x}_k^-)$ kutsutaan *innovaatioksi*, $\hat{x}_k^-$ on määritelty yhtälössä (2.18) ja $\hat{\mathrm{P}}_k^-$ on määritelty yhtälössä (2.19). Kyseistä tilaa, joka saadaan päivittämällä priori-tilaa kutsutaan posteriori-tilaksi.

2.2.3 Tilan paras estimaattori

Kalmanin suodattimen algoritmin avulla (2.21) saadaan selville tilan $\mathbf{x}_k$ normaalisti jakautuneet ehdollisten tiheysfunktioiden $f(x_k|y_{1:k})$ parametrit, missä $k \in \mathbb{N}$. Nämä parametrit ovat itsekin satunnaismuuttujia. Monissa teknisissä sovelluksissa käyttäjä haluaa saada selville mahdollisimman hyvän estimaatin tilalle ja arvion sen hyvyydelle, eikä ole niinkään kiinnostunut ehdollisesta tiheysfunktiosta. Seuraavaksi perustellaan miksi estimaattori

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \mathrm{E}(\mathbf{x}_k|\mathbf{y}_{1:k}) \tag{2.23}$$

on paras valinta estimaattoriksi. Kuten edellä todettiin, Kalmanin suodatin antaa tilan estimaatiksi juuri tämän estimaattorin realisaatioita (2.21).

Ensin todetaan, että valittu estimaattori (2.23) on harhaton, jolla tarkoitetaan seuraavaa [Jazwinski 1970, s.150]

$$\mathrm{E}(\hat{\mathbf{x}}_k) = \mathrm{E}(\mathrm{E}(\mathbf{x}_k|\mathbf{y}_{1:k})) = \mathrm{E}(\mathbf{x}_k). \tag{2.24}$$

Jotta voidaan vertailla tarkemmin estimaattoreita, määritellään kustannusfunktioita $L(\mathbf{x})$, joilla voidaan kuvata estimaattorin hyvyyttä. Olkoon $L(\mathbf{x})$ reaaliarvoinen funktio, jolla on ominaisuudet

$$\begin{gathered} L(\mathbf{0}) = 0, \\ 0 \leq \rho(\mathbf{x}) \leq \rho(\mathbf{y}) \Rightarrow 0 \leq L(\mathbf{x}) \leq L(\mathbf{y}), \end{gathered} \tag{2.25}$$

missä ρ on konveksi funktio (Määritelmä 2.8).

Määritelmä 2.8 (Konveksi joukko ja funktio). *Vektoriavaruuden $\mathbb{R}^n$ osajoukko A on konveksi, jos*

$$\lambda\mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{y} \in A \ \textit{ kaikilla } \ \mathbf{x}, \mathbf{y} \in A,\ \lambda \in [0,1] \tag{2.26}$$

Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$ konveksi joukko. Funktio $\rho : A \to \mathbb{R}$ on konveksi jos

$$\rho(\lambda\mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{y}) \leq \lambda\rho(\mathbf{x}) + (1-\lambda)\rho(\mathbf{y}) \ \textit{ kaikilla } \ \mathbf{x}, \mathbf{y} \in A, 0 \leq \lambda \leq 1 \tag{2.27}$$

Esimerkki konveksista funktiosta on

$$\rho(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathrm{S}\mathbf{x}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \tag{2.28}$$

missä $\mathrm{S} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ on symmetrinen positiivisesti semidefiniitti matriisi [Kaleva 2003b, s.69]. Kyseinen funktio sopii selvästi myös kustannusfunktioksi.

Lause 2.9. *Olkoon satunnaismuuttujan $\mathbf{x}_k|y_{1:k}$ tiheysfunktio $f(x_k|y_{1:k})$ normaalinen, odotusarvona satunnaismuuttujan $\hat{\mathbf{x}}_k = \mathrm{E}(\mathbf{x}_k|\mathbf{y}_{1:k})$ reaalisaatio $\hat{x}$. Olkoon $L(\mathbf{x})$ ehdot (2.25) täyttävä kustannusfunktio. Tällöin satunnaismuuttujan $\mathbf{x}_k$ paras estimaattori on $\hat{\mathbf{x}}_k$, siinä mielessä, että $\mathrm{E}(L(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k))$ minimoituu.*

Todistus. Jazwinskin kirjassa [Jazwinski 1970, s.147] on todistettu lause soveltamalla Shermanin julkaisussa [Sherman 1955] olevaa tulosta. Tässä esitetään lyhyesti todistuksen idea.

$$\mathrm{E}(L(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k)) = \mathrm{E}(\mathrm{E}(L(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k)|\mathbf{y}_{1:k})) \tag{2.29}$$

Koska $\mathrm{E}(L(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k)|\mathbf{y}_{1:k})$ on määritelty samassa todennäköisyysavaruudessa kuin $\mathbf{y}_{1:k}$, niin $\mathrm{E}(L(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k))$ minimoimiseksi riittää löytää sellainen estimaattori joka minimoi odotusarvon $\mathrm{E}(L(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k)|\mathbf{y}_{1:k})$ jokaisella reaalisaatiolla $y_{1:k}$. Shermanin mukaan tälläinen estimaattori on $\hat{\mathbf{x}}_k = \mathrm{E}(\mathbf{x}_k|\mathbf{y}_{1:k})$ [Sherman 1955]. □

Lauseen 2.9 mukaan on selvää valita tilan estimaattoriksi $\hat{\mathbf{x}}_k = \mathrm{E}(\mathbf{x}_k|\mathbf{y}_{1:k})$, koska tämä estimaattori on optimaalinen, vertaillaan sitä millä tahansa ehdot (2.25) täyttävällä kustannusfunktiolla. Estimaattoria, joka minimoi kustannusfunktion

$L(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathrm{S}\mathbf{x}$, missä S on symmetrinen positiivisesti semidefiniitti matriisi, kutsutaan minimivarianssiestimaattoriksi. Näin ollen Kalmanin suodattimen antama estimaatti on harhaton minimivarianssiestimaatti. Myös laskettaessa Kalmanin suodattimen tehtävälle MAP (maksimi-a-posteriori) estimaattori, joka maksimoi tiheysfunktion $f(x_k|y_{1:k})$, saamme odotetusti saman estimaattorin kuin edellä [Maybeck 1979, s.234]. Kalmanin suodattimen antama estimaattori on siis suhteessa muihin estimaattoreihin erittäin hyvä. Tämä ei kuitenkaan kerro vielä sen absoluuttista ”hyvyyttä”.

Kalmanin suodattimen ratkaisema estimaatin kovarianssimatriisi ($\hat{\mathrm{P}}_k$) puolestaan kertoo minkälaisissa rajoissa todellinen tila todennäköisesti on, jos systeemin malli on oikein. Tässä työssä puhutaan suodattimen *epävarmuudesta*, kun tarkoitetaan kyseistä tilan virhettä, jonka suodatin antaa kovarianssimatriisin ($\hat{\mathrm{P}}_k$) muodossa. Suodattimen *epätarkkuudesta* puhuttaessa tarkoitetaan epätarkan mallin aiheuttamia virheitä tilalle ja sen epävarmuuden estimaatille. Epävarmuutta ja -tarkkuutta käsittelemme lisää kappaleessa 2.2.6.

2.2.4 Estimaattori yleisemmille ongelmille

Edellisessä kohdassa määritelty estimaattori $\hat{\mathbf{x}}_k = \mathrm{E}(\mathbf{x}_k|\mathbf{y}_{1:k})$ on minimivarianssiestimaattori myös yleiselle ongelman asettelulle, joka on esitetty kappaleessa 2.1 [Sage&Melsa 1971, s.178] ja [Robert&Casella 1999, s.11]. On hyvä muistaa, että Kalmanin suodatin laskee kyseisen estimaattorin vain hyvin rajatussa tapauksessa. Kuitenkin jos käytetään Kalmanin suodattimen algoritmia ja verrataan lineaarisia harhattomia estimaattoreita kustannusfunktion $L(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T\mathbf{x}$ avulla, niin osoittautuu, että Kalmanin suodattimen algoritmi antaa parhaan estimaatin tilalle myös ilman satunnaismuuttujien $\mathbf{x}_0$, $\{\mathbf{w}_k\}$ ja $\{\mathbf{v}_{k+1}\}$ ($k \in \mathbb{N}$) normaalisuusoletusta. Kalmanin suodatinta kutsutaan tämän takia myös parhaaksi lineaariseksi harhattomaksi estimaattoriksi (BLUE, Best Linear Unbiased Estimator). Toisin sanoen Kalmanin suodattimessa Kalmanin vahvistus määräytyy siten, että estimaattori

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \hat{\mathbf{x}}_k^- + \mathrm{K}_k(\mathbf{y}_k - \mathrm{H}_k\hat{\mathbf{x}}_k^-) \tag{2.30}$$

minimoi kustannusfunktion $L(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T\mathbf{x}$ mukaisen virheen, vaikka jakautumat eivät olisi normaaleja [Brown 1983, s.195] ja [Candy 1986, s.71].

Tämä tulos on erittäin miellyttävä, koska usein jakautumat eivät ole aivan normaaleja. Tämän ominaisuuden valossa Kalmanin suodattimelta voi odottaa näissäkin tilanteissa hyviä tuloksia. Tosin tällöin suodatin on paras kyseisen kustannusfunktion mielessä vain harhattomien lineaaristen suodattimien joukosta. Toinen Kalmanin suodattimen rajoittava ehto on oletus tila- ja mittausmallien lineaarisuudesta. Epälineaarisuutta käsitellään tarkemmin kappaleessa 2.3.

2.2.5 Stokastinen differentiaaliyhtälö

Yleensä kaavojen (2.5) ja (2.12) takana on stokastinen differentiaaliyhtälö. Tässä tapauksessa keskitytään vain lineaariseen stokastiseen differentiaaliyhtälöön ja siihen kuinka se diskretoituu yhtälöksi (2.12). Lineaarinen stokastinen differentiaali yhtälö on

$$\mathbf{dx}(t) = \mathrm{F}(t)\mathbf{x}(t)dt + \mathrm{G}(t)\mathbf{d}\boldsymbol{\beta}(t), \tag{2.31}$$

missä $\mathbf{x}(t)$ on n_x-dimensionaalinen tilan stokastinen prosessi, $\mathrm{F}(t)$ ja $\mathrm{G}(t)$ ovat vastaavasti $n_x \times n_x$ ja $n_x \times n_\beta$-dimensionaalisia ei-satunnaisia jatkuvia matriisifunktioita, ja $\boldsymbol{\beta}$ on n_β-dimensionaalinen Brownin liike, joka määritellään seuraavasti.

Määritelmä 2.10 (Brownin liike). *Stokastinen prosessi $\mathbf{x}_k$, $t_k \geq t_0$ on Brownin liikettä, jos*

i. $P(\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}) = 1$

ii. $\mathbf{x}_0$, $\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_{i-1}$, $i = 1, 2, \ldots, k$ *ovat riipumattomia satunnaismuuttujia kaikilla* $t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_k$ *(riippumattomien lisäysten prosessi)*

iii. lisäykset riippuvat vain aikavälin pituudesta, eivät ajasta (stationääriset lisäykset)

iv. $\mathbf{x}_k$ *noudattaa normaalijakaumaa* $\mathbf{x}_k \sim \mathrm{N}_{n_x}(\mathbf{0}, (t_k - t_0)\mathrm{Q}_c)$ *jokaisella* $t_k > t_0$ *(Matriisia* Q_c *kutsutaan diffuusiomatriisiksi)*

Yhtälön (2.31) ratkaisu voidaan kirjoittaa muotoon ([Maybeck 1979, s.171] ja [Jazwinski 1970, s.200])

$$\mathbf{x}_{k+1} = \Phi(t_{k+1}, t_k)\mathbf{x}_k + \mathbf{w}_k, \tag{2.32}$$

missä $\mathbf{x}_k$ on tila ajanhetkellä t_k, $\Phi(t_{k+1}, t_k)$ on tilansiirtomatriisi (määritelmä 2.11) ja $\mathbf{w}_k$ on valkoista, nollakeskistä, normaalisti jakautunutta kohinaa, jonka kovarianssimatriisi on

$$\mathrm{V}(\mathbf{w}_k) = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \Phi(t_{k+1}, t)\mathrm{G}(t)\mathrm{Q}_c\mathrm{G}(t)^T\Phi(t_{k+1}, t)^T dt. \tag{2.33}$$

Määritelmä 2.11 (Tilansiirtomatriisi). *Matriisi $\Phi(t, t_k)$ on tilansiirtomatriisi, jos*

i. $\dot{\Phi}(t, t_k) = \mathrm{F}(t)\Phi(t, t_k)$

ii. $\Phi(t_k, t_k) = \mathrm{I}$

Merkitään tilansiirtomatriisia $\Phi(t_{k+1}, t_k)$ lyhyesti vain Φ_k, tällöin yhtälö (2.32) on Kalmanin suodattimen tilamallin mukainen (2.12). Jos matriisi $\mathrm{F}(t)$ on vakio, tilansiirtomatriisi voidaan laskea matriisieksponentina kaavan

$$\Phi(t_{k+1}, t_k) = e^{(t_{k+1} - t_k)\mathrm{F}} \tag{2.34}$$

avulla [Maybeck 1979, s.42].

Tilansiirtomatriisilla on monia ominaisuuksia, joita on lueteltu muun muassa kirjoissa [Maybeck 1979, s.41] ja [Grewal&Andrews 1993, s.38]. Eräs niistä on

$$\Phi(t_{k+2}, t_k) = \Phi(t_{k+2}, t_{k+1})\Phi(t_{k+1}, t_k). \tag{2.35}$$

Lause 2.12. *Olkoon tilansiirtomatriisit (Φ) määritelmän 2.11 mukaisia ja olkoon $\mathbf{w}_k$ ja $\mathbf{w}_{k+1}$ ratkaisun (2.32) tilansiirtomatriiseja vastaavia kohinoita, lisäksi $\mathbf{w}_{k_{12}}$ vastaa tilansiirtomatriisia $\Phi(t_{k+2}, t_k)$. Tällöin*

$$\mathbf{x}_{k+2} = \Phi(t_{k+2}, t_k)\mathbf{x}_k + \mathbf{w}_{k_{12}} = \Phi(t_{k+2}, t_{k+1})(\Phi(t_{k+1}, t_k)\mathbf{x}_k + \mathbf{w}_k) + \mathbf{w}_{k+1}. \tag{2.36}$$

Todistus. Koska ominaisuuden (2.35) mukaan

$$\Phi(t_{k+2}, t_{k+1})(\Phi(t_{k+1}, t_k)\mathbf{x}_k + \mathbf{w}_k) + \mathbf{w}_{k+1} = \Phi(t_{k+2}, t_k)\mathbf{x}_k + \Phi(t_{k+2}, t_{k+1})\mathbf{w}_k + \mathbf{w}_{k+1}, \tag{2.37}$$

niin riittää näyttää, että $\mathbf{w}_{k_{12}}$ ja $\Phi(t_{k+2}, t_{k+1})\mathbf{w}_k + \mathbf{w}_{k+1}$ ovat identtisesti jakautuneita. Koska molemmat ovat normaalisti jakautuneita, väite on todistettu, jos kyseiset satunnaismuuttujien odotusarvot ja kovarianssimatriisit ovat samoja. Odotusarvot ovat samat nollakeskisyyden ja odotusarvo-operaattorin lineaarisuuden johdosta:

$$\mathrm{E}(\mathbf{w}_{k_{12}}) = \mathbf{0} = \Phi(t_{k+2}, t_{k+1})\,\mathrm{E}(\mathbf{w}_k) + \mathrm{E}(\mathbf{w}_{k+1}) = \mathrm{E}(\Phi(t_{k+2}, t_{k+1})\mathbf{w}_k + \mathbf{w}_{k+1}). \tag{2.38}$$

Koska $\mathbf{w}_k$ ja $\mathbf{w}_{k+1}$ ovat peräisin valkoisesta prosessista niin määritelmien 2.2 ja 2.5 mukaan:

$$f(\mathbf{w}_{k+1}, \mathbf{w}_k) = f(\mathbf{w}_{k+1}|\mathbf{w}_k)f(\mathbf{w}_k) = f(\mathbf{w}_{k+1})f(\mathbf{w}_k), \tag{2.39}$$

joten $\mathbf{w}_{k+1}$ ja $\mathbf{w}_k$ ovat riippumattomia. Näin ollen

$$\mathrm{V}(\Phi(t_{k+2}, t_{k+1})\mathbf{w}_k + \mathbf{w}_{k+1}) = \Phi(t_{k+2}, t_{k+1})\,\mathrm{V}(\mathbf{w}_k)\Phi(t_{k+2}, t_{k+1})^T + \mathrm{V}(\mathbf{w}_{k+1}) \tag{2.40}$$

Integraalin lineaarisuuden ja ominaisuuden (2.35) mukaan

$$\Phi(t_{k+2}, t_{k+1})\,\mathrm{V}(\mathbf{w}_k)\Phi(t_{k+2}, t_{k+1})^T = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \Phi(t_{k+2}, t)\mathrm{G}(t)\mathrm{Q_c}\mathrm{G}(t)^T\Phi(t_{k+2}, t)^T dt. \tag{2.41}$$

Toisaalta

$$\mathrm{V}(\mathbf{w}_{k+1}) = \int_{t_{k+1}}^{t_{k+2}} \Phi(t_{k+2}, t)\mathrm{G}(t)\mathrm{Q_c}\mathrm{G}(t)^T\Phi(t_{k+2}, t)^T dt. \tag{2.42}$$

Laskemalla yhtälöt (2.41) ja (2.42) yhteen saadaan, että

$$\mathrm{V}(\Phi(t_{k+2}, t_{k+1})\mathbf{w}_k + \mathbf{w}_{k+1}) = \int_{t_k}^{t_{k+2}} \Phi(t_{k+2}, t)\mathrm{G}(t)\mathrm{Q_c}\mathrm{G}(t)^T\Phi(t_{k+2}, t)^T dt = \mathrm{V}(\mathbf{w}_{k_{12}}) \tag{2.43}$$

□

Lause 2.12 takaa hyvin hyödyllisen ominaisuuden virhemallille. Mikäli mittauksia ei saada ajanhetkellä t_{k+1} niin $\mathbf{x}_{k+2}$ on samoin jakautunut, riippumatta siitä onko suodatin, jonka tilamalli on peräisin stokastisesta differentiaaliyhtälöstä (2.31),

laskenut arvion tilalle $\mathbf{x}_{k+1}$ vai ei. Tämä ominaisuus olisi itsestään selvä, mikäli virhe koostuisi pelkästään Brownin liikkeestä. Kuitenkin yhtälössä (2.31) voidaan haluttaessa liitosmatriisin $\mathrm{G}(t)$ avulla mallintaa vain osa tilanvirheestä Brownin liikkeellä. Tällöin tilassa voi olla komponentteja, joiden virhe ei ole Brownin liikettä ja virheen lisäyksen suuruus riippuu myös ajasta eikä vain välin pituudesta, jolloin edellä todistettu ominaisuus ei ole aivan itsestään selvä.

2.2.6 Epävarmuus ja herkkyys mallinnusvirheille

Tässä kappaleessa käsitellään sitä, minkälaisissa rajoissa suodattimen epävarmuus on. Arvio on tarkoitus muodostaa ilman, että lasketaan tarkasti estimaattien kovarianssimatriiseja $\hat{\mathrm{P}}_k$. Tämän avulla, mikäli malli on oikea, voidaan huomata milloin suodatus on ylipäätänsä mahdollista ja kuinka paljon suodatus ainakin parantaa tilan estimaattoria verrattuna muihin estimaattoreihin. Lisäksi käsitellään sitä, kuinka mallinnusvirheet vaikuttavat näihin kovarianssimatriiseihin. Tässä kappaleessa esitetään pääasiassa vain tuloksia. Tulokset ovat peräisin Jazwinskin kirjasta, jossa on myös käsitelty tarkemmin kyseistä aihetta todistuksien kera [Jazwinski 1970].

Määritelmä 2.13 (Ohjattavuus- ja tarkkailtavuusmatriisit). *Matriisia $\mathcal{C}$ kutsutaan ohjattavuusmatriisiksi*

$$\mathcal{C}(k, k-n_o) = \sum_{i=k-n_o}^{k-1} \Phi(t_k, t_{i+1})\mathrm{Q}_{i+1}\Phi^T(t_k, t_{i+1}), \tag{2.44}$$

missä $\Phi(t_k, t_{i+1})$ on tilansiirtomatriisi ja $\mathrm{Q}_{i+1} = \mathrm{V}(\mathbf{w}_{i+1})$.

Matriisia $\mathcal{I}$ kutsutaan tarkkailtavuusmatriisiksi

$$\mathcal{I}(k, k-n_t) = \sum_{i=k-n_t}^{k} \Phi^T(t_i, t_k)\mathrm{H}_i^T\mathrm{R}_i^{-1}\mathrm{H}_i\Phi(t_i, t_k), \tag{2.45}$$

missä $\Phi(t_i, t_k)$ on tilansiirtomatriisi, H on mittausmatriisi ja $\mathrm{R}_i = \mathrm{V}(\mathbf{v}_i)$.

Määritelmä 2.14 (Täydellisesti ohjattavissa ja tarkkailtavissa). *Dynaaminen systeemi (2.12), (2.13) on täydellisesti ohjattavissa, jos on olemassa positiivinen kokonaisluku n_o ja positiiviset α_o ja β_o siten, että*

$$0 < \alpha_o\mathrm{I} \leq \mathcal{C}(k, k-n_o) \leq \beta_o\mathrm{I}, \tag{2.46}$$

kaikilla $k \geq n_o$. Kyseinen dynaaminen systeemi on täydellisesti tarkkailtavissa, jos on olemassa positiivinen kokonaisluku n_t ja positiiviset α_t ja β_t siten, että

$$0 < \alpha_t\mathrm{I} \leq \mathcal{I}(k, k-n_t) \leq \beta_t\mathrm{I}, \tag{2.47}$$

kaikilla $k \geq n_t$.

Symmetristen matriisien tapauksessa $\mathrm{A} < \mathrm{B}$ tarkoittaa, että $\mathrm{B} - \mathrm{A}$ on positiivisesti definiitti. Vastaavasti $\mathrm{A} \leq \mathrm{B}$ tarkoittaa, että $\mathrm{B} - \mathrm{A}$ on positiivisesti semidefiniitti.

Lause 2.15. *Olkoon dynaaminen systeemi (2.12), (2.13) täydellisesti ohjattavissa ja tarkkailtavissa siten, että* $n_o = n_t$, $\alpha = \min(\alpha_o, \alpha_t)$, $\beta = \max(\beta_o, \beta_t)$ *ja* $\mathrm{P}_0 > 0$. *Tällöin* $\hat{\mathrm{P}}_k$ *on tasaisesti rajoitettu kaikilla* $k \geq n_o$.

$$\frac{\alpha}{1+\alpha\beta}\mathrm{I} \leq \hat{\mathrm{P}}_k \leq \frac{1+\alpha\beta}{\alpha}\mathrm{I} \tag{2.48}$$

Todistus. Todistus on esitetty Jazwinskin kirjassa [Jazwinski 1970, s.234]. □

Seuraava lause kertoo, että mallinnusvirhe alkuehdon kovarianssimatriisissa häviää ajan kuluessa estimaatin kovarianssimatriisista, mikäli dynaaminen systeemi on täydellisesti ohjattavissa ja tarkkailtavissa.

Lause 2.16. *Olkoon dynaaminen systeemi (2.12), (2.13) täydellisesti ohjattavissa ja tarkkailtavissa. Oletetaan, että* $\hat{\mathrm{P}}_{k_1}$ *ja* $\hat{\mathrm{P}}_{k_2}$ *ovat kaksi systeemin kovarianssimatriisien ratkaisua vastaten alkuehtoja* $\mathrm{P}_{0_1} \geq 0$ *ja* $\mathrm{P}_{0_2} \geq 0$. *Olkoon* $\Delta\hat{\mathrm{P}}_k = \hat{\mathrm{P}}_{k_1} - \hat{\mathrm{P}}_{k_2}$. *Tällöin*

$$\|\Delta\hat{\mathrm{P}}_k\| \to 0, \quad \text{kun} \quad \mathrm{k} \to \infty. \tag{2.49}$$

Todistus. Todistus on esitetty Jazwinskin kirjassa [Jazwinski 1970, s.242]. □

Seuraavaksi perehdytään tarkemmin siihen, kuinka virheiden mallinnusvirheet vaikuttavat suodattimen toimintaan. Olkoon

$$\begin{aligned}
&\mathbf{x}_{k+1} = \Phi_k \mathbf{x}_k + \mathbf{w}_k \\
&\mathbf{y}_k = \mathrm{H}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k \\
&\mathrm{E}(\mathbf{x}_0) = x_0,\ \mathrm{V}(\mathbf{x}_0) = \mathrm{P}_0, \\
&\mathrm{E}(\mathbf{w}_k) = \mathrm{E}(\mathbf{v}_k) = \mathbf{0},\ \mathrm{V}(\mathbf{w}_k) = \mathrm{Q}_k \text{ ja } \mathrm{V}(\mathbf{v}_k) = \mathrm{R}_k
\end{aligned} \tag{2.50}$$

todellinen systeemi ja

$$\begin{aligned}
&\overline{\mathbf{x}}_{k+1} = \Phi_k \overline{\mathbf{x}}_k + \overline{\mathbf{w}}_k \\
&\overline{\mathbf{y}}_k = \mathrm{H}_k \overline{\mathbf{x}}_k + \overline{\mathbf{v}}_k \\
&\mathrm{E}(\overline{\mathbf{x}}_0) = \overline{x}_0,\ \mathrm{V}(\overline{\mathbf{x}}_0) = \overline{\mathrm{P}}_0, \\
&\mathrm{E}(\overline{\mathbf{w}}_k) = \mathrm{E}(\overline{\mathbf{v}}_k) = \mathbf{0},\ \mathrm{V}(\overline{\mathbf{w}}_k) = \overline{\mathrm{Q}}_k \text{ ja } \mathrm{V}(\overline{\mathbf{v}}_k) = \overline{\mathrm{R}}_k
\end{aligned} \tag{2.51}$$

malli kyseiselle systeemille. Yläviivalla merkitään mallinnettuja suureita, jotka poikkeavat todellisesta systeemistä. Tässä oletetaan, etteivät suureet Φ_k ja H_k sisällä mallinnusvirheitä.

Seuraava lause kertoo, kuinka voidaan tarpeeksi pessimistisillä virhearvioilla taata se, että mallin antama epävarmuus on arvioitu yläkanttiin. Tällöin mallin antama epävarmuus mallisysteemin Kalmanin suodattimen estimaattorille on ainakin niin suuri kuin kyseisen estimaattorin epävarmuus olisi todelliselle systeemille. Tästä seuraa myös se,

että mallin estimaattorin epävarmuus on ainakin yhtä suuri kuin todellisen systeemin minimivarianssiestimaattorin epävarmuus. Lauseessa 2.17 käytetetään merkintöjä

$$\overline{\mathbf{P}}_k = \mathrm{V}(\overline{\mathbf{x}}_k - \hat{\overline{\mathbf{x}}}_k) \tag{2.52}$$

$$\widetilde{\mathbf{P}}_k = \mathrm{V}(\mathbf{x}_k - \hat{\overline{\mathbf{x}}}_k), \tag{2.53}$$

missä $\hat{\overline{x}}_k$ on Kalmanin suodattimen antama BLUE-estimaatti (kappale 2.2.4) malli systeemille (2.51).

Lause 2.17. *Jos* $\mathrm{P}_0 \leq \overline{\mathrm{P}}_0$, $\mathrm{Q}_k \leq \overline{\mathrm{Q}}_k$ *ja* $\mathrm{R}_k \leq \overline{\mathrm{R}}_k$ *kaikilla* k, *niin* $\widetilde{\mathbf{P}}_k \leq \overline{\mathbf{P}}_k$ *kaikilla* k.

Todistus. Todistetaan väite induktiolla.

Induktioalku: Kun $k = 0$ niin väite on selvä.

Induktioaskel: Näytetään, että väitteestä arvolla $k = n$ seuraa väite arvolla $k = n+1$.

Kalmanin suodattimen algoritmin mukaan (Liite B)

$$\overline{\mathbf{P}}_{n+1} = (\mathrm{I} - \overline{\mathrm{K}}_{n+1}\mathrm{H}_{n+1})(\Phi_n\overline{\mathbf{P}}_n\Phi_n^T + \overline{\mathrm{Q}}_n)(\mathrm{I} - \overline{\mathrm{K}}_{n+1}\mathrm{H}_{n+1})^T + \overline{\mathrm{K}}_{n+1}\overline{\mathrm{R}}_{n+1}\overline{\mathrm{K}}_{n+1}^T \tag{2.54}$$

$$\hat{\overline{\mathbf{x}}}_{n+1} = (\mathrm{I} - \overline{\mathrm{K}}_{n+1}\mathrm{H}_{n+1})(\Phi_n\hat{\overline{\mathbf{x}}}_n) + \overline{\mathrm{K}}_{n+1}\mathbf{y}_{n+1}. \tag{2.55}$$

Huomaa, että mallisysteemissä estimaatin laskemiseen käytetään todellisen systeemin mittauksia. Kaavoista (2.50) ja (2.55) seuraa

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{n+1} - \hat{\overline{\mathbf{x}}}_{n+1} &= \mathbf{x}_{n+1} - (\mathrm{I} - \overline{\mathrm{K}}_{n+1}\mathrm{H}_{n+1})(\Phi_n\hat{\overline{\mathbf{x}}}_n) - \overline{\mathrm{K}}_{n+1}\mathbf{y}_{n+1} \\ &= \mathbf{x}_{n+1} - (\mathrm{I} - \overline{\mathrm{K}}_{n+1}\mathrm{H}_{n+1})(\Phi_n\hat{\overline{\mathbf{x}}}_n) - \overline{\mathrm{K}}_{n+1}(\mathrm{H}_{n+1}\mathbf{x}_{n+1} + \mathbf{v}_{n+1}) \\ &= (\mathrm{I} - \overline{\mathrm{K}}_{n+1}\mathrm{H}_{n+1})(\Phi_n(\mathbf{x}_n - \hat{\overline{\mathbf{x}}}_n) + \mathbf{w}_n) - \overline{\mathrm{K}}_{n+1}\mathbf{v}_{n+1}.\end{aligned} \tag{2.56}$$

Joten riippumattomuusoletuksien nojalla

$$\widetilde{\mathbf{P}}_{n+1} = (\mathrm{I} - \overline{\mathrm{K}}_{n+1}\mathrm{H}_{n+1})(\Phi_n\widetilde{\mathbf{P}}_n\Phi_n^T + \mathrm{Q}_n)(\mathrm{I} - \overline{\mathrm{K}}_{n+1}\mathrm{H}_{n+1})^T + \overline{\mathrm{K}}_{n+1}\mathrm{R}_{n+1}\overline{\mathrm{K}}_{n+1}^T. \tag{2.57}$$

Tällöin

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathbf{P}}_{n+1} - \overline{\mathbf{P}}_{n+1} =&(\mathrm{I} - \overline{\mathrm{K}}_{n+1}\mathrm{H}_{n+1})\Phi_n(\widetilde{\mathbf{P}}_n - \overline{\mathbf{P}}_n)\Phi_n^T(\mathrm{I} - \overline{\mathrm{K}}_{n+1}\mathrm{H}_{n+1})^T \\ &+ (\mathrm{I} - \overline{\mathrm{K}}_{n+1}\mathrm{H}_{n+1})\Phi_n(\mathrm{Q}_n - \overline{\mathrm{Q}}_n)\Phi_n^T(\mathrm{I} - \overline{\mathrm{K}}_{n+1}\mathrm{H}_{n+1})^T \\ &+ \overline{\mathrm{K}}_{n+1}(\mathrm{R}_{n+1} - \overline{\mathrm{R}}_{n+1})\overline{\mathrm{K}}_{n+1}^T.\end{aligned} \tag{2.58}$$

Koska oletuksen mukaan $\mathrm{R}_{n+1} \leq \overline{\mathrm{R}}_{n+1}$ niin $\mathrm{R}_{n+1} - \overline{\mathrm{R}}_{n+1}$ on negatiivisesti semidefiniitti. Toisin sanoen $\mathbf{x}^T(\mathrm{R}_{n+1} - \overline{\mathrm{R}}_{n+1})\mathbf{x} \leq 0$ kaikilla $\mathbf{x}$. Tällöin myös

$$\mathbf{y}^T\overline{\mathrm{K}}_{n+1}(\mathrm{R}_{n+1} - \overline{\mathrm{R}}_{n+1})\overline{\mathrm{K}}_{n+1}^T\mathbf{y} \leq 0 \tag{2.59}$$

kaikilla $\mathbf{y}$, koska voidaan valita $\mathbf{x} = \overline{\mathrm{K}}_{n+1}^T\mathbf{y}$. Vastaavasti voidaan toimia kaavan 2.58 oikeanpuolen ensimmäisen ja toisen termin kanssa. Näin ollen $\widetilde{\mathbf{P}}_{n+1} \leq \overline{\mathbf{P}}_{n+1}$. Tämän ja induktioperiaatteen nojalla väite on tosi kaikilla k. □

Kalmanin suodatimella on siis erittäin miellyttäviä ominaisuuksia mallinnuksen kannalta. Edellisen ja BLUE-ominaisuuden (kappale 2.2.4) avulla suodatinta voidaan järkevästi käyttää, vaikkei täysin tiedetäkään kuinka virhe käyttäytyy. Tämän vuoksi sovelluksissa voidaan arvioida (yläkanttiin) virheiden kovarianssimatriiseja ja sovellus toimii siltikin halutulla tavalla. Kovarianssimatriisien arviointia kutsutaan myös suodattimen virittämiseksi (tuning) [Maybeck 1979] [Julier&Durrant-Whyte 2003]. Jos suodattimen antama kovarianssimatriisi estimaattorille on aina suurempi tai yhtä suuri kuin todellinen kovarianssimatriisi estimaattorille olisi niin estimaattoria kutsutaan konsistentiksi (consistent) [Lefebvre et al. 2004]. Maybeck kutsuu konsistentiksi estimaattoriksi estimaattoria, joka konvergoi todelliseen arvoon ajan kuluessa [Maybeck 1979, s.235] [Maybeck 1982, s.96]. Tässä työssä käytetään Lefebvren määritelmää. Lähes poikkeuksetta hyvältä estimaattorilta vaaditaan, että se on konsistentti. Edellä mainittu tapa arvioida virheet yläkanttiin on eräs keino varmistaa estimaattorin konsistenttius. Mikäli kovarianssimatriiseja arvioidaan yläkanttiin, niin estimaattorin epävarmuus kasvaa [Lefebvre et al. 2004] [Maybeck 1979, s. 338]. Käytännössä kovarianssimatriisien arviointiin haetaan kompromissi, jonka avulla estimaattori on lähes varmasti konsistentti ja estimaattorilla on mahdollisimman pieni epävarmuus. Useinkaan virheet eivät ole normaalijakautuneita. Tällöin tyydytään BLUE-estimaattiin.

Odotusarvo ja kovarianssimatriisi määräävät täysin normaalijakautuneen suureen tiheysfunktio. Näin ei ole yleisessä tapauksessa, kuitenkin seuraavaksi esitettävän Tshebyshevin epäyhtälön nojalla voidaan arvioida tilan epävarmuutta odotusarvon ja kovarianssimatriisin avulla. Tosin käytännössä virheet ja siten myös tila usein oletetaan lähes normaalijakautuneiksi ja käytetään normaalijakauman ominaisuuksia. Varsinkin epälineaarisessa tapauksessa näin ei kuitenkaan voida tehdä. Epälineaarisesta tapauksesta lisää kappaleessa 2.3.

Tshebyshevin epäyhtälö

Seuraava lause on erikoistapaus Tshebyshevin epäyhtälöstä [Evans 2002, s.14]. Matriisin jälki-operaattoria merkitään tr.

Lause 2.18. *Olkoon* $\mathbf{x}$ *n-dimensionaalinen jatkuva satunnaismuuttuja siten, että* $\mathrm{E}(\mathbf{x}) = \mu$ *ja* $\mathrm{V}(\mathbf{x}) = \Sigma$. *Tällöin satunnaismuuttuja* $\mathbf{x}$ *saa arvon* μ *keskisen* $k\sqrt{\mathrm{tr}(\Sigma)}$*-säteisen pallon sisältä vähintään todennäköisyydellä* $\frac{k^2-1}{k^2}$.

Todistus. Koska Σ on symmetrinen reaalimatriisi niin Schurin lauseen mukaan [Perttula 1999b, s.95] on olemassa ortogonaalinen matriisi Q siten että

$$\Sigma = \mathrm{Q}\Lambda\mathrm{Q}^T, \tag{2.60}$$

missä Λ on diagonaalimatriisi, jonka diagonaalilla on matriisin Σ ominaisarvot. Tiedetään, että [Perttula 1999b, s.91]

$$\mathrm{tr}(\Sigma) = \mathrm{tr}(\Lambda). \tag{2.61}$$

Tehdään kovarianssimatriisin integraaliin muuttujanvaihto $\mathbf{x} = \mathrm{Q}\mathbf{y} + \mu$. Tällöin integraalioperaattorin lineaarisuuden mukaan

$$\mathrm{V}(\mathbf{x}) = \int (x-\mu)(x-\mu)^T f_{\mathbf{x}}(x)dx = \mathrm{Q}\int yy^T f_{\mathbf{x}}(\mathrm{Q}y+\mu)dy\mathrm{Q}^T = \Sigma \tag{2.62}$$

Joten

$$\int yy^T f_{\mathbf{x}}(\mathrm{Q}y+\mu)dy = \Lambda \tag{2.63}$$

Olkoon alue A origokeskinen ja $k\sqrt{\mathrm{tr}(\Sigma)}$-säteinen pallo. Tällöin integraalioperaattorin lineaarisuuden ja integrandin positiivisuuden mukaan

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}(\Sigma) &= \int y^T y f_{\mathbf{x}}(\mathrm{Q}y+\mu)dy \geq \int_{\mathbb{R}^n\setminus A} y^T y f_{\mathbf{x}}(\mathrm{Q}y+\mu)dy \\ &\geq k^2\,\mathrm{tr}(\Sigma)\int_{\mathbb{R}^n\setminus A} f_{\mathbf{x}}(\mathrm{Q}y+\mu)dy = k^2\,\mathrm{tr}(\Sigma)\left(1-\int_A f_{\mathbf{x}}(\mathrm{Q}y+\mu)dy\right).\end{aligned} \tag{2.64}$$

Kaavasta (2.64) seuraa väite

$$\int_A f_{\mathbf{x}}(\mathrm{Q}y+\mu)dy \geq \frac{k^2-1}{k^2}. \tag{2.65}$$

□

Seuraavassa taulukossa 2.1 on sovellettu edellistä lausetta kolmiulotteiseen tapaukseen ja laskettu millä vähimmäistodennäköisyydellä satunnaismuuttuja, jonka odotusarvo ja kovarianssimatriisi tunnetaan, on tietyn säteisen pallon sisällä. Pallon keskipiste on satunnaismuuttujan odotusarvo. Tuloksia on verrattu normaalijakauman vastaaviin todennäköisyyksiin. $\sigma_{\max}$ on kovarianssimatriisin suurimman ominaisarvon neliöjuuri. Taulukosta 2.1 havaitaan, että suodattimen antama informaatio vähenee rajusti jos normaalisuusoletuksesta joudutaan luopumaan.

Taulukko 2.1: Yleisenjakauman ja normaalijakauman todennäköisyysmassan sijainnin vertailu samoilla odotusarvolla ja kovarianssimatriisilla.

Säde	Yleinen	Normaali
$2\sigma_{\max}$	25%	73%
$3\sigma_{\max}$	66%	97%
$4\sigma_{\max}$	81%	99,8%
$6\sigma_{\max}$	91%	99,99999%
$10\sigma_{\max}$	97%	∼100%

2.3 Kalmanin suodattimen soveltaminen epälineaariseen systeemiin

Kalmanin suodatin ratkaisee lineaarisen dynaamisen systeemin ja on sille monessa mielessä paras estimaattori. Kalmanin suodatin on myös yksinkertainen ja nopea. Kuitenkaan usein systeemi ei ole lineaarinen. Epälineaarisille systeemeille ei useinkaan ole olemassa analyyttistä ratkaisua (kaava (2.7)) tai jos on olemassa, niin se on monimutkainen ja hidas laskea. Tämän takia Kalmanin suodatinta on pyritty soveltamaan myös epälineaariseen tapaukseen monella eri tavalla, hyvällä ja huonolla menestyksellä. Kalmanin suodatin arvioi vain tilan odotusarvoa ja kovarianssimatriisia, yleinen jakauma ei ole näiden pohjalta täysin määrätty. Näin ollen Kalmanin suodatin ei voi toimia optimaalisesti, mikäli todellinen jakauma ei muistuta normaalijakaumaa, esimerkiksi jakauma on monihuippuinen. Tällöin on selvää, että jokin epälineaarinen suodatin olisi parempi.

Mielikuvan monihuippuisen jakauman tiheysfunktion arvioinnista vain odotusarvolla ja kovarianssimatriisilla saa taulukon 2.1 lisäksi sivulla 68 olevasta kuvasta 5.3. Yhtenä osana kuvaa toisen asteen laajennettu Kalmanin suodatin arvioi kaksihuippuista tiheysfunktiota odotusarvon ja kovarianssimatriisin avulla. Kuvan perusteella huomataan, että pelkkä odotusarvo ja kovarianssimatriisi kertoo monihuippuisesta jakaumasta suhteellisen vähän.

Mikäli Kalmanin suodatin halutaan konsistentiksi, joudutaan usein arvioimaan virheitä paljon yläkanttiin ja näin ollen estimaattorin epävarmuus kasvaa. Toisin sanoen Kalmanin suodattimen soveltaminen epälineaariseen systeemiin voi onnistua hyvin lähinnä vain silloin kun epälineaarisuus on pientä ja virhejakaumat muistuttavat normaalijakaumaa. Kappaleessa 2.3.1 käsitellään erilaisia tapoja hyödyntää Kalmanin suodatinta epälineaariseen tapaukseen. Tämän jälkeen kappaleessa 2.3.2 käsitellään toisen asteen laajennettua Kalmanin suodatinta tarkemmin ja esitetään arvioita tilanteista, jolloin kyseistä suodatinta tulisi käyttää mieluummin kuin laajennettua Kalmanin suodatinta.

2.3.1 Kalmanin suodattimen erilaisia laajennuksia

LKF

Eräs tapa hyödyntää Kalmanin suodattimen algoritmia epälineaariseen tapaukseen on linearisoitu Kalmanin suodatin (LKF, Linearized Kalman Filter). Ideana linearisoidussa Kalmanin suodattimessa on, että tiedetään suunnilleen tilan kulkema reitti. Silloin riittää, että lasketaan poikkeama tältä reitiltä. Laskemisessa käytetään hyväksi tilansiirtofunktion ja mittausfunktion linearisointeja reittipisteissä [Grewal&Andrews 1993, s.169]. Tämä toimii tietenkin vain niissä tapauksissa, joissa tilan reitti on suunnilleen tiedossa. Useinkaan näin ei ole, varsinkin henkilön paikan-

nuksessa. Tässä työssä emme käsittele linearisoitua Kalmanin suodatinta tämän enempää.

EKF

Laajennettu Kalmanin suodatin (EKF, Extended Kalman Filter) toimii hyvin samalla tavalla kuin linearisoitu Kalmanin suodatin, mutta ei tarvitse etukäteen tietoa reitistä. EKF on yleisesti käytetty työkalu epälineaarisille systeemeille. EKF:ssa priori-tilat lasketaan tilansiirtofunktioilla ja mittauksien ennusteet lasketaan puolestaan mittausfunktioilla. Kovarianssimatriisien ja Kalmanin vahvistusten laskemiseen käytetään tilansiirtofunktioiden derivaattamatriiseja laskettuna posteriori-tilojen odotusarvojen kohdalla ja mittausfunktioiden derivaattamatriiseja laskettuna priori-tilojen odotusarvojen kohdalla. Laajennetun Kalmanin suodattimen algoritmi löytyy liitteestä B.

EKF:ta pidetään perustyökaluna epälineaarisessa suodatuksessa, johon yleensä verrataan uusia menetelmiä. EKF on erikoistapaus toisen asteen laajennetusta Kalmanin suodattimesta, jota käsitellään kappaleessa 2.3.2. Laajennettu Kalmanin suodatin ei ota huomioon linearisointivirhettä. Tämän vuoksi suodatin usein aliarvioi virhettä eikä tällöin ole konsistentti [Jazwinski 1970, s.357]. Laajennetulle Kalmanin suodattimelle on todistettu suppeneminen (tila estimaatin suppeminen kohti oikeata tilaa) vain erikoistapauksissa, joissa oletetaan systeemiltä niin pienet virheet, ettei niitä käytännön sovelluksissa saavuteta [Reif et al. 1999]. Suppenemistulokset paranevat, mikäli kovarianssimatriisit voidaan virittää (kasvattaa) sopiviksi. Tällöin suppenemisnopeus hidastuu eikä kyseessä ole enää ”puhdas” EKF. Käyttökelpoisia suppenemistuloksia on lähinnä vain dynaamisille systeemeille, joiden tilamalli oletetaan virheettömäksi [Ljung 1979] [Boutayeb et al. 1995] [Boutayeb et al. 1997].

EKF2

Laajennettua Kalmanin suodatinta voidaan parantaa ottamalla tilansiirto- ja mittausfunktioista mukaan korkeamman kertaluokan derivaattoja. Toisen asteen laajennetussa Kalmanin suodattimessa (EKF2, Second Order Extended Kalman Filter, kappale 2.3.2) [Bar-Shalom et al. 2001, s.384] on otettu huomioon toisen kertaluvun termit. Tämän on havaittu parantavan suodattimen toimintaa epälineaarisissa tapauksissa, joissa epälineaarisuus on huomattava [Jazwinski 1970, s.351] [Athans et al. 1968] [Sorenson&Stubberud 1968]. Sivulla 34 esitellään työkalu, jonka avulla voi arvioida, onko epälineaarisuus huomattava. Toisen asteen laajennettua Kalmanin suodatinta on kutsuttu myös muunnetuksi Gaussiseksi toisen asteen suodattimeksi (Modified Gaussian Second Order Filter) [Maybeck 1982, s.226] [Jazwinski 1970, s.346]. Gaussinen on nimessä sen takia, että suodatin toimii hyvin jos jakaumat oletetaan lähes Gaussiseksi (normaaleiksi) [Maybeck 1982, s.216].

EKF2 on usein niin vaikea tai mahdoton toteuttaa, ettei korkeamman asteen termejä edes harkita huomioon otetuiksi analyyttisesti. Myös toisen asteen termien vaikutusta voidaan arvioida approksimatiivisesti ja käyttää hyvänä arviona suodattimen virittämiseen, tai huomioida vain epälineaarisuuden aiheuttama poikkeaman [Maybeck 1982, s.225]. EKF2:n algoritmi on esitetty tiiviissä muodossa liitteessä B.

IEKF

Toinen tapa parantaa EKF:ää on linearisoida funktiot uudestaan posteritilan odotusarvon kohdalla ja laskea priori-tilan päivitys uudestaan ja toistaa tätä kunnes posteriori-tila ei juurikaan muutu. Tälläistä suodatinta kutsutaan iteroiduksi laajennetuksi Kalmanin suodattimeksi (IEKF, Iterated Extended Kalman Filter) [Jazwinski 1970, s.279]. Tämän on myös havaittu parantavan suodattimen toimintaa enemmän kuin toisen asteen laajennetun Kalmanin suodattimen, varsinkin tapauksissa joissa systeemi on täydellisesti tarkkailtavissa hyvin lyhyellä aikavälillä (esim: $n_{\mathrm{t}} = 1$ määritelmässä 2.14) [Lefebvre et al. 2004] [Jazwinski 1970, s.351] [Wishner et al. 1969].

Eräs ongelmakohta IEKF:ssä on merkityksellisen tulkinnan antaminen tilan kovarianssimatriisille iteroinnin jälkeen [Moraal&Grizzle 1995]. Lisäksi silloin kun dynaaminen systeemi on tarkkailtavissa hyvin lyhyellä aikavälillä, mittauksia on samalla hetkellä usein niin paljon, että niistä voidaan ratkaista tila esimerkiksi Gauss-Newtonin algoritmillä tai joskus jopa suljetun muodon ratkaisijalla. Näitä käsitellään lisää kappaleessa 3.3. Tällöin voidaan suodattaa tilaratkaisua tavallisella Kalmanin suodattimella. Enemmän tästä tavasta seuraavassa kohdassa. Muun muassa näiden seikkojen vuoksi tässä työssä ei käsitellä IEKF:ää enempää.

Kaksivaiheiset algoritmit

Eräs tapa epälineaarisuuden aiheuttaman ongelman ratkaisemiseen mikäli mittauksia on riittävästi, on käyttää kaksivaiheista algoritmia. Algoritmin ensimmäisessä vaiheessa ratkaistaan mittauksista tila tai osa tilasta joko iteratiivisilla menetelmillä tai suljetussa muodossa. Tämän jälkeen suodatetaan ratkaisua tavallisella Kalmanin suodattimella. Tämän algoritmin heikkoutena on tilaratkaisun virheen arviointi, joka on usein hyvin vaikea tehdä tarkasti.

Tälläistä kaksivaiheista algoritmia, tilan ratkaisemista ja suodattamista, on testattu GPS-paikannuksessa [Chaffee&Abel 1992] (GPS-paikannusta on käsitelty luvussa 3). Tuloksena on yksinkertainen ja nopea algoritmi, sekä paremmat suppenemistulokset verrattuna EKF:een. Tarkemmin sanoen, jos EKF käytti samaa virhemallia kuin kaksivaiheinen algoritmi niin EKF harhautui helposti reitiltä (ei pysynyt konsistenttina). Kun virhettä lisättiin niin ettei hairahtumista tapahtunut tuotti EKF tällöin luonnollisesti epävarmempia tuloksia kuin kaksivaiheinen algoritmi. Tutkimuksessa todettiin

myös, että tasanmäärätyssä systeemissä (neljän satelliitin pseudoetäisyysmittaukset samalla ajanhetkellä) ei ole tilastollisesti merkitystä suodattaako alkuperäistä mittausdataa vai mittausdatan bijektiivistä muunnosta paikka-avaruuteen. Tosin yleensä, mikäli alkuperäinen mittausdata on normaalisti jakautunut, näistä laskettu paikka ei useinkaan ole normaalisti jakautunut eikä laskettu paikkarealisaatio välttämättä edusta paikan ehdollista odotusarvoa (ehdolla mittaukset).

Ylimäärätyksi systeemiksi kutsumme sellaista systeemiä, jossa mittauksia on samalla ajanhetkellä enemmän kuin mitä vaaditaan yksikäsitteisen paikan ratkaisemiseen virheettömistä mittauksista. Ma [Ma 2003] testasi edellä mainittua kaksivaiheista algoritmiä GPS/tukiasema-paikannukseen ja havaitsi, että pelkkä EKF tuotti parempia tuloksia kuin kaksivaiheinen algoritmi varsinkin ylimäärätyssä systeemissä. Tosin Ma ei kommentoinut hairahtumisilmiötä, joka on EKF:n heikkoutena tasan- ja alimäärätyissä systeemeissä. Tässä työssä on keskitytty lähinnä tasan- ja alimäärättyihin systeemeihin, koska yleisesti ottaen ylimäärätyssä systeemissä paikan estimaattorin tarkkuus saadaan riittäväksi molemmilla edellä mainituilla tavoilla.

LRKF

(Toisen asteen) laajennetussa Kalmanin suodattimessa täytyy ratkaista derivaattoja analyyttisesti, mikä on usein työlästä tai peräti mahdotonta. On kehitelty erilaisia suodattimia, joissa käytetään muutamia deterministisesti valittuja tilapisteitä erilaisilla painoilla siten, että pisteistä laskettu odotusarvo ja kovarianssimatriisi approksimoivat tilan vastaavia suureita. Näin suodattimet arvioivat linearisointia ja sen virhettä numeerisesti. Lefebvre kutsuu näitä suodattimia lineaarisen regression Kalmanin suodatimiksi (LRKF, Linear Regression Kalman Filter) [Lefebvre et al. 2004]. Tälläisiksi suodattimiksi, joissa on eri tavalla valittu kyseiset pisteet, Lefebvre mainitsee esimerkiksi: keskierotussuodatin (CDF, Central Difference Filter) [Schei 1997], ensimmäisen asteen jaettu erotussuodatin (DD1, First Order Divided Difference Filter) [Nørgaard et al. 2000] ja hajuttoman Kalmanin suodattimen (UKF, Unscented Kalman Filter) [Julier et al. 2000]. Julier tosin toteaa, että Lefebvren UKF:n luokittelu itsensä määrittämäksi lineaarisen regression Kalmanin suodattimeksi ei ole onnistunut, koska UKF:llä pystyy pisteitä lisäämällä käsittelemään korkeampiakin kuin toisen asteen tilastollisia momentteja ja se on näin ollen parempi kuin LRKF [Lefebvre et al. 2002] [Julier&Uhlmann 2002] [Julier&Uhlmann 2004].

Ilmavirran diplomityössä [Ilmavirta 2002] vertailtiin seuraavia suodattimia lentävien kohteiden seurannassa: EKF, EKF2, IEKF ja UKF. Tutkimuksessa mittaukset tulivat kahdesta liikkumattomasta tutkasta. Työssä todettiin, että joissakin tapauksissa UKF tuotti parempia tuloksia kuin EKF2 ja päinvastoin. Kaiken kaikkiaan suuria eroja epävarmuudessa, konsistenttiudessa tai laskenta-ajassa ei EKF2:n ja UKF:n välillä ollut. Kuten olettaa sopii, EKF ei toiminut yhtä luotettavasti kuin edelliset. IEKF tuotti kaikkein huonoimpia tuloksia, joka ei ole ristiriidassa aikaisemman IEKF kohdan kanssa, koska kahden liikkumattoman tutkan tapauksessa, silloin kun suodatettavana

tilana on paikka, nopeus ja mahdollisesti kiihtyvyys, systeemi ei ole täydellisesti tarkailtavissa hyvin lyhyellä aikavälillä. Työssä havaittiin, että IEKF on hyvä valinta ainoastaan paikallaan olevien kohteiden seurannassa.

Tämän työn sovelluksessa paikannuksessa osoittautuu (luku 4), että derivaatat voidaan laskea analyyttisesti. Tämän takia tässä työssä ei käytetä LRKF-suodattimia.

Voi olla, että varsinkin hajuton Kalmanin suodatin, missä pisteitä on lisätty niin, että se huomioi korkeampiakin kuin toisen asteen tilastollisia momentteja, toimisi paremmin kuin EKF2. Tosin tällöin sitä ei enää voisi pitää Kalmanin suodattimena, koska Kalmanin suodatin pitää kirjaa vain tilan kahdesta ensimmäisestä tilastollisesta momentista, odotusarvosta ja kovarianssimatriisista. Erilaiset tavat approksimoida jakaumia tarkemmin kuin kahdella ensimmäisellä tilastollisella momentilla jätetään tämän työn ulkopuolelle jatkotutkimusaiheiksi. Näitä ovat edellisen lisäksi esimerkiksi ruudukkomenetelmät (Grid-based Methods) ja partikkelisuodattimet (PF, Particle Filter) [Arulampalam et al. 2002] [Ristic et al. 2004].

2.3.2 Toisen asteen laajennettu Kalmanin suodatin

Toisen asteen laajennettu Kalmanin suodatin (EKF2) ratkaisee epätarkasti dynaamisen systeemin

$$\begin{aligned}
&\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{f}_k(\mathbf{x}_k) + \mathbf{w}_k, \\
&\mathbf{y}_k = \mathbf{h}_k(\mathbf{x}_k) + \mathbf{v}_k, \\
&\mathrm{E}(\mathbf{x}_0) = x_0,\ \mathrm{V}(\mathbf{x}_0) = \mathrm{P}_0, \\
&\mathrm{E}(\mathbf{w}_k) = \mathrm{E}(\mathbf{v}_k) = \mathbf{0},\ \mathrm{V}(\mathbf{w}_k) = \mathrm{Q}_k \text{ ja } \mathrm{V}(\mathbf{v}_k) = \mathrm{R}_k.
\end{aligned} \tag{2.66}$$

Virheillä $\{\mathbf{w}_k\}$, $\{\mathbf{v}_{k+1}\}$ ja alkutilalla on samat riippumattomuus- ja valkoisuusoletukset kuin yleisessä ongelman asettelussa (kappale 2.1). Tässä esitetään EKF2, joka on esitetty kirjassa [Bar-Shalom et al. 2001, s.385]. Identtinen suodatin EKF2:sen kanssa on muunnettu Gaussinen toisen asteen suodatin (Modified Gaussian Second Order Filter), joka on esitetty kirjoissa [Maybeck 1982, s.226] ja [Jazwinski 1970, s.346]. EKF on EKF2:sen erikoistapaus, joka saadaan kun Hessen matriisit oletetaan nollamatriiseiksi. Tosin EKF:ssä voidaan suorittaa tilansiirtofunktion linearisointi posteriori-tilan odotusarvon sijasta myös priori-tilan odotusarvossa, jolloin EKF:n algoritmi eroaa hieman alla esitetystä. Tälläinen EKF on esitetty muun muassa kirjassa [Grewal&Andrews 1993, s.170].

EKF2:n idea on approksimoida dynaamisen systeemin (2.66) tilansiirto- ja mittausfunktioita toisen kertaluvun approksimaatiolla [Perttula 1999a, s.54] ja hylätä korkeampien kertaluokkien termit. Tällöin dynaaminen systeemi tulee muotoon

$$\begin{aligned}
&\mathbf{x}_{k+1} \approx \mathbf{f}_k(\hat{x}_k) + \Phi_k[\mathbf{x}_k - \hat{x}_k] + \tfrac{1}{2}\textstyle\sum_{i=1}^{n_x} \mathbf{e}_i[\mathbf{x}_k - \hat{x}_k]^T \Phi_k^{e_i}[\mathbf{x}_k - \hat{x}_k] + \mathbf{w}_k \\
&\mathbf{y}_k \approx \mathbf{h}_k(\hat{x}_k^-) + \mathrm{H}_k[\mathbf{x}_k - \hat{x}_k^-] + \tfrac{1}{2}\textstyle\sum_{i=1}^{n_y} \mathbf{e}_i[\mathbf{x}_k - \hat{x}_k^-]^T \mathrm{H}_k^{e_i}[\mathbf{x}_k - \hat{x}_k^-] + \mathbf{v}_k \\
&\mathrm{E}(\mathbf{x}_0) = x_0,\ \mathrm{V}(\mathbf{x}_0) = \mathrm{P}_0, \\
&\mathrm{E}(\mathbf{w}_k) = \mathrm{E}(\mathbf{v}_k) = \mathbf{0},\ \mathrm{V}(\mathbf{w}_k) = \mathrm{Q}_k \text{ ja } \mathrm{V}(\mathbf{v}_k) = \mathrm{R}_k,
\end{aligned} \tag{2.67}$$

missä n_x on tilan dimensio, n_y on sen hetkisten mittauksien dimensio, $\mathbf{e}_i$ on karteesisen koordinaatiston i. kantavektori. ”Tilansiirtomatriisit” ja ”mittausmatriisit” on korvattu derivaattamatriiseilla

$$\Phi_k = \left.\frac{\partial \mathbf{f}_k(\mathbf{x}_k)}{\partial \mathbf{x}_k}\right|_{\mathbf{x}_k=\hat{x}_k}, \tag{2.68}$$

$$\mathrm{H}_k = \left.\frac{\partial \mathbf{h}_k(\mathbf{x}_k)}{\partial \mathbf{x}_k}\right|_{\mathbf{x}_k=\hat{x}_k^-}, \tag{2.69}$$

”tilansiirtomatriisit” on laskettu posteriori-tilojen odotusarvoissa (2.75) ja ”mittausmatriisit” on laskettu priori-tilojen odotusarvoissa

$$\hat{x}_{k+1}^- = \mathbf{f}_k(\hat{x}_k) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n_x} \mathbf{e}_i \operatorname{tr}(\Phi_k^{e_i}\hat{\mathrm{P}}_k), \tag{2.70}$$

jotka on saatu ottamalla ehdollinen odotusarvo, ehdolla $\mathbf{y}_{1:k} = y_{1:k}$, tilan $\mathbf{x}_{k+1}$ approksimaatiosta. Systeemissä (2.67) toisen kertaluvun termeissä esiintyvät Hessen matriisit lasketaan seuraavalla tavalla. Tilansiirtofunktion $\mathbf{f}_k$ l.:n komponentin Hessen matriisi on

$$\Phi_k^{e_l} = \left.\left(\frac{\partial^2(\mathbf{f}_k(\mathbf{x}_k))_l}{\partial x_j \partial x_i}\right)\right|_{\mathbf{x}_k=\hat{x}_k} \tag{2.71}$$

ja mittausfunktion $\mathbf{h}_k$ l.:n komponentin Hessen matriisi puolestaan on

$$\mathrm{H}_k^{e_l} = \left.\left(\frac{\partial^2(\mathbf{h}_k(\mathbf{x}_k))_l}{\partial x_j \partial x_i}\right)\right|_{\mathbf{x}_k=\hat{x}_k^-}. \tag{2.72}$$

Priori-tilan kovarianssimatriisi lasketaan kaavalla

$$\begin{aligned}\hat{\mathrm{P}}_{k+1}^- &= \mathrm{V}(\mathbf{x}_{k+1} - \hat{x}_{k+1}^-) \\ &= \Phi_k \hat{\mathrm{P}}_k \Phi_k^T + \mathrm{Q}_k + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n_x}\sum_{j=1}^{n_x} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j^T \operatorname{tr}(\Phi_k^{e_i}\hat{\mathrm{P}}_k \Phi_k^{e_j}\hat{\mathrm{P}}_k).\end{aligned} \tag{2.73}$$

Mittauksen ennuste (priori-mittaus) lasketaan vastaavasti kuin priori-tilan odotusarvo

$$\hat{y}_{k+1}^- = \mathbf{h}_{k+1}(\hat{x}_{k+1}^-) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n_y} \mathbf{e}_i \operatorname{tr}(\mathrm{H}_{k+1}^{e_i}\hat{\mathrm{P}}_{k+1}^-). \tag{2.74}$$

Priori-tilan odotusarvon ja kovarianssimatriisin päivitys posteriori-tilan odotusarvoksi ja kovarianssimatriisiksi tapahtuu lähes samoilla kaavoilla kuin Kalmanin suodattimessa (2.21), joten

$$\hat{x}_{k+1} = \hat{x}_{k+1}^- + \mathrm{K}_{k+1}(y_{k+1} - \hat{y}_{k+1}^-) \tag{2.75}$$

ja

$$\hat{\mathrm{P}}_{k+1} = (\mathrm{I} - \mathrm{K}_{k+1}\mathrm{H}_{k+1})\hat{\mathrm{P}}_{k+1}^-, \tag{2.76}$$

joissa

$$\mathrm{K}_{k+1} = \hat{\mathrm{P}}_{k+1}^- \mathrm{H}_{k+1}^T \left[\mathrm{H}_{k+1}\hat{\mathrm{P}}_{k+1}^- \mathrm{H}_{k+1} + \mathrm{R}_{k+1} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n_y}\sum_{j=1}^{n_y} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j^T \operatorname{tr}(\mathrm{H}_{k+1}^{e_i}\hat{\mathrm{P}}_{k+1}^- \mathrm{H}_{k+1}^{e_j}\hat{\mathrm{P}}_{k+1}^-)\right]^{-1}. \tag{2.77}$$

EKF:n ja EKF2:n algoritmit on esitetty tiiviissä muodossa liitteessä B.

Toisen asteen laajennetun Kalmanin suodattimen käyttö epälineaarisessa systeemissä

Eräs tärkeä kysymys EKF2:n käytöstä epälineaarisessa systeemissä on milloin suodatinta tulee käyttää verrattuna EKF:een. Niin kuin aikaisemmin todettiin, suodatin EKF2 tuo parannusta EKF:een verrattuna, mikäli systeemissä on huomattavaa epälineaarisuutta. Eräs tapa arvioida milloin epälineaarisuus on huomattava, on verrata kaavoissa (2.77) ja (2.73) olevia "korjaustermejä" kohinoiden kovarianssimatriiseihin. Mittauksissa on huomattavaa epälineaarisuutta mikäli

$$\sum_{i=1}^{n_y}\sum_{j=1}^{n_y} \mathbf{e}_i\mathbf{e}_j^T \operatorname{tr}(\mathrm{H}_k^{e_i}\hat{\mathrm{P}}_k^-\mathrm{H}_k^{e_j}\hat{\mathrm{P}}_k^-) \gtrsim \mathrm{R}_k. \tag{2.78}$$

Määritelmä on esitetty Jazwinskin kirjassa skalaaritapaukselle [Jazwinski 1970, s.349]. Merkintä $\mathrm{A} \gtrsim \mathrm{B}$ tarkoittaa, että symmetristen matriisien tapauksessa A on suurempi tai samaa suuruusluokkaa kuin B. Vastaavasti tilamallissa on huomattavaa epälineaarisuutta mikäli

$$\sum_{i=1}^{n_x}\sum_{j=1}^{n_x} \mathbf{e}_i\mathbf{e}_j^T \operatorname{tr}(\Phi_k^{e_i}\hat{\mathrm{P}}_k\Phi_k^{e_j}\hat{\mathrm{P}}_k) \gtrsim \mathrm{Q}_k. \tag{2.79}$$

Näillä kaavoilla voi arvioida milloin tulisi käyttää EKF2:ta tai muuta vastaavaa suodatinta, joka kompensoi linearisointivirhettä.

Kuten on todettu, EKF2 ei sovellu kaikkiin epälineaarisiin systeemeihin. EKF2:ta tulisi käyttää hyvin varauksellisesti mikäli tiedossa on, että jakaumat eivät ole normaaleja. EKF2:n ideana on arvioida epälineaarisia funktioita toisen kertaluvun approksimaatiolla ja tämä onnistuu vain, mikäli funktiot ovat kahdesti jatkuvasti osittaisderivoituvia ympäristössä, jossa arviota käytetään [Perttula 1999a, s.54]. Toisin sanoen, mikäli priori-tilan alueella funktiot eivät ole kahdesti jatkuvasti osittaisderivoituvia, niin EKF2:n alkuoletukset eivät pidä paikkaansa. Tällöin EKF2:n käyttö pitäisi kyseenalaistaa.

Paikannussovelluksessa (luku 3) tukiaseman etäisyysmittaus-funktiot eivät ole derivoituvia tukiasemien kohdalla. Tämä havaitaan esimerkiksi apulauseen 4.2 avulla. Tällöin EKF:n ja EKF2:n käyttö on hieman kyseenalaista, koska priori-tila on mallin mukaan koko avaruuteen jakautunut. Tämän ongelman usein kierretään sillä, että priori-tilana käytetään "katkaistua" priori-tilaa. "Katkaistun" priori-tilan tiheysfunktio on verrannollinen priori-tilan tiheysfunktioon jollain tietyllä alueella ja muualla se on nolla. Tietty alue valitaan siten, että sen sisällä on priori-tilan todennäköisyysmassasta jokin osuus, esimerkiksi 95%. Tämäkään ei ratkaise ongelmaa, mikäli priori-tilan odotusarvo on liian lähellä tukiasemaa. Vastaavanlaisia ongelmia on myös satelliittimittausten kanssa.

Luku 3

GPS- ja tukiasemapaikannus

Tässä luvussa keskitytään GPS- ja tukiasemapaikannukseen. Ensimmäisessä kappaleessa käsitellään GPS-paikannusta ensin yleisellä tasolla ja sen jälkeen paneudutaan GPS-mittausyhtälöihin (kappale 3.1.1) ja GPS-mittauksien virhearvioihin (kappale 3.1.2). Näiden jälkeen siirrytään tukiasemapaikannukseen, jota käsitellään kappaleessa 3.2. Luvun lopuksi esitetään tapa, jolla hybridipaikannusongelmat voidaan ratkaista yhden ajanhetken mittauksien perusteella (kappale 3.3).

3.1 GPS

GPS (Global Positioning System) on maailmanlaajuinen satelliittipaikannusjärjestelmä, jonka avulla vastaanotin voi määrittää oman paikkansa, nopeutensa ja tarkan ajan. Järjestelmä on Yhdysvaltain puolustusministeriön (DoD, Department of Defence) kehittämä, ja alun perin sotilaskäyttöön tarkoitettu. Järjestelmä jakautuu kolmeen osaan: satelliitteihin, kontrolliverkkoon ja käyttäjiin. Satelliitteja on vähintään 24, jotka kiertävät maapalloa yli 20 000 km korkeudessa noin 4 000 $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ vauhdilla. Satelliiteista on joka hetki näkyvissä 6–12, mikäli taloja tai muita vastaavia näköesteitä ei ole. Kontrolliverkko koostuu viidestä maa-asemasta, verkon ylläpito ja johto tapahtuu Colorado Springissä. Kontrolliverkon tarkoituksena on tarkailla satelliittien

tilaa, määrittää niiden rataelementit ja kellovirheet, sekä päivittää satelliittien lähettämiä tietoja. [Poutanen 1998]

Perehdytään hiukan perusteisiin siitä kuinka GPS-paikannus toimii. GPS-satelliitit lähettävät kahta eri kantoaallon taajuutta, L1 = 1 575,42 MHz ja L2 = 1 227,60 MHz. Kantoaaltoihin on moduloitu kaksi pseudosatunnaista jonoa. P-koodin taajuus on 10,23 MHz ja se on moduloitu sekä L1- että L2-taajuuteen. C/A-koodin taajuus on 1,23 MHz ja se on moduloitu vain L1-taajuuteen. C/A-koodin tuottava algoritmi on julkinen ja näin ollen sen siviilikäyttö on mahdollinen. P-koodin tuottava algoritmi ei ole julkinen. Kyseisiä koodeja käytetään erottamaan satelliitit toisistaan, lisäksi koodin vaiheen avulla saadaan selville lähetysaika. Lähetysajan perusteella voidaan vastaanottimen kellon avulla laskea signaalin kulkuaika. Koska signaalit kulkevat valonnopeudella, voidaan kulkuajan avulla ratkaista etäisyys satelliittiin. Tätä etäisyyttä kutsutaan pseudoetäisyydeksi (pseudorange), koska vastaanottimen kellossa on aina jonkin verran virhettä. Näiden koodien lisäksi kantoaaltoihin on moduloitu navigointiviesti 50,00 MHz taajuudella. Navigointiviestin kokonaispituus on 12,5 minuuttia ja se sisältää muun muassa GPS-viikon numeron, erilaisia korjaustermejä, tiedon satelliitin ”terveydentilasta”, satelliitin ratatiedot (broadcast ephemeris) ja muista satelliiteista epätarkempia ratatietoja niin sanottuja almanakkatietoja (almanac message). Navigointiviestin avulla vastaanotin pääsee kiinni edellä mainittujen koodien vaiheeseen, pystyy laskemaan satelliitin tarkan paikan signaalin lähtöhetkellä ja korjaamaan pseudoetäisyysmittauksesta osan virheistä pois.

Jos tiedetään vähintään neljän satelliitin paikat ja etäisyydet niistä vastaanottimeen, voidaan vastaanottimen paikka ja aika ratkaista. Näin GPS-paikannus lyhykäisyydessä toimii. Luonnollisesti tässä paikka- ja aikaratkaisussa on virhettä, koska pseudoetäisyysmittauksissa on virhettä.

Tässä työssä ei paneuduta GPS-järjestelmään kuin siltä osalta, joka vaaditaan suodattimen onnistuneeseen suunnitteluun. GPS-järjestelmää on paljon tutkittu ja siitä on kirjoitettu monia kirjoja. Esimerkiksi seuraavissa kirjoissa on käsitelty GPS-järjestelmää: [Kaplan 1996], [Parkinson&Spilker 1996], [Farrell&Barth 1999] ja suomenkielisessä kirjassa [Poutanen 1998].

3.1.1 GPS-mittausyhtälöt

Pseudoetäisyys ρ_i^{s} i. satelliittiin voidaan laskea [Parkinson&Spilker 1996, s.410]

$$\rho_i^{\mathrm{s}} = \|\mathbf{r}_i^{\mathrm{s}} - \mathbf{r}_{\mathrm{u}}\| + b + \epsilon_{\rho_i^{\mathrm{s}}}, \tag{3.1}$$

missä $\mathbf{r}_i^{\mathrm{s}}$ on i. satelliitin paikkavektori (tunnettu, s viittaa satelliittiin), $\mathbf{r}_{\mathrm{u}}$ on vastaanottimen (käyttäjän, user) paikkavektori (tuntematon), b on vastaanottimen kellopoikkeama metreissä GPS ajasta (clock bias, tuntematon) ja $\epsilon_{\rho_i^{\mathrm{s}}}$ on virhetermi, jota käsitellään tarkemmin kappaleessa 3.1.2.

GPS-vastaanottimet pystyvät usein seuraamaan pseudoetäisyyden muutosta sata, jopa tuhat kertaa tarkemmin kuin pseudoetäisyyttä. Tämä onnistuu seuraamalla koodivaiheen lisäksi myös kantoallon vaihetta tai taajuutta [Kaplan 1996, s.190]. Tätä pseudoetäisyyden muutosmittausta (pseudoetäisyyden derivaattaa) kutsutaan eri nimillä riippuen kirjoittajasta ja tavasta, jolla muutos on laskettu. Monesti puhutaan vain pseudoetäisyyden erotusmittauksesta (delta pseudorange) [Kaplan 1996, s.190]. Usein, jos verrataan mitattua taajuutta kantoaallon taajuuteen, puhutaan Doppler-mittauksesta joka voidaan muuttaa pseudoetäisyyden derivaataksi [Parkinson&Spilker 1996, s.411]. Näin ollen kyseiset mittaukset voidaan matemaattisesti ilmaista samalla tavalla ja ero ilmenee vain mittausvirheessä. Seuraavassa kaavassa on esitetty i. satelliitin pseudoetäisyysmittauksen derivaatta

$$\dot{\rho}_i^{\mathrm{s}} = \frac{(\mathbf{r}_i^{\mathrm{s}} - \mathbf{r}_{\mathrm{u}})^T}{\|\mathbf{r}_i^{\mathrm{s}} - \mathbf{r}_{\mathrm{u}}\|}(\mathbf{v}_i^{\mathrm{s}} - \mathbf{v}_{\mathrm{u}}) + \dot{b} + \epsilon_{\dot{\rho}_i^{\mathrm{s}}}, \tag{3.2}$$

missä $\mathbf{v}_i^{\mathrm{s}}$ on i. satelliitin nopeus (tunnettu, voidaan laskea navigointiviestin avulla), $\mathbf{v}_{\mathrm{u}}$ on vastaanottimen nopeus (tuntematon), $\dot{b}$ on vastaanottimen kellopoikkeaman aikaderivaatta (clock drift, tuntematon) ja $\epsilon_{\dot{\rho}_i^{\mathrm{s}}}$ on virhetermi, jota käsitellään tarkemmin kappaleessa 3.1.2.

3.1.2 GPS-mittauksien virhearviot

Pseudoetäisyysmittauksissa esiintyy virhettä $\epsilon_{\rho_i^{\mathrm{s}}}$ vielä korjauksien jälkeenkin. Virhe johtuu lähinnä satelliiteista, signaalin kulusta ja vastaanottimesta. Suurimpia virhelähteitä ovat: satelliitteissa rata- ja kellovirheet, signaalin kulussa troposfäärirefraktio, ionosfäärirefraktio ja monitieheijastukset, ja vastaanottimessa kellovirhe. Kokonaisvirheen jakauma on lähellä normaalijakaumaa. Tämän vuoksi virhe usein oletetaan nollakeskisesti normaalijakautuneeksi varianssilla $\sigma^2_{\rho_i^{\mathrm{s}}}$ ja riippumattomaksi muiden pseudoetäisyysmittauksien virheistä. Taulukkoon 3.1 on koottu arviot eri virheistä ja arvio vastaanottimen kokonaisetäisyysvirheestä (UERE, User Equivalent Range Error). Taulukko perustuu lähteisiin [Parkinson&Spilker 1996, s.481] ja [Kaplan 1996, s.262]. Virheeseen ei ole otettu huomioon rajoitettua saatavuutta (SA, Selective Availability), jonka avulla DoD voi lisätä signaaliin virhettä siten, että vain sotilaskäyttöön tarkoitetut vastaanottimet osaavat poistaa sen. SA, joka oli noin 30 metriä, kytkettiin pois käytöstä vuonna 2000 [Clinton 2000].

Kuten edellä todettiin, satelliitteja on jatkuvasti näkyvissä 6–12, mikäli taloja tai muita vastaavia näköesteitä ei ole. Paikannus vaatii lähes aina näköyhteyden satelliitteihin. Satelliitteja, jotka jäävät esimerkiksi talon taakse ei voida käyttää paikannuksessa. Esimerkiksi Tokiossa on testattu satelliittien näkyvyyttä kaupunkialueella. Luonnollisesti satelliittien näkyvyyttä testattiin vain rakennusten ulkopuolella. Tuloksena oli, että alle kolme satelliittia oli näkyvissä lähes 30% ajasta ja kolme satelliittia oli näkyvissä noin 10% ajasta [Suh et al. 2003]. Kaupungeissa on siis katvealueita, joilla ei voi paikantaa pelkällä GPS:llä ilman lisätietoja. Luonnollisesti katvealueet riippuvat ajanhetkestä, koska satelliitit liikkuvat. Lisäksi on mahdollista, että

Taulukko 3.1: Arvioitu kokonaisetäisyysvirhe

Virhelähde	1σ virhe (m)
Satelliitin ratavirhe	2,1–4,2
Satelliitin kellovirhe	2,1–3,0
Ionosfääri	4,0–5,0
Troposfääri	0,7–1,5
Monitieheijastus	1,4–2,5
Vastaanotin	0,5–1,5
UERE	5,3–8,1

signaali heijastuu esimerkiksi seinästä. Mikäli heijastunut signaali on voimakkaampi kuin suoraan tuleva, jonka kulun esimerkiksi talo on voinut estää, niin puhutaan monitieheijastuksesta. Monitieheijastus saattaa aiheuttaa suuriakin virheitä pseudoetäisyysmittauksiin. Tässä työssä ei keskitytä monitieheijastuksen aiheuttamiin ongelmiin. Tosin taulukossa 3.1 on otettu huomioon monitieheijastus, joka tapahtuu hyvin lähellä vastaanotinta.

Niin kuin aikaisemmin todettiin, pseudoetäisyysmittauksen derivaattavirheen ($\epsilon_{\dot{\rho}_i^{\mathrm{s}}}$) sigma voi olla jopa tuhannes osa pseudoetäisyysmittaus virheen sigmasta. Tämän työn simulaatioissa käytämme pseudoetäisyysmittauksen derivaattavirheen sigmana 0,1 $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.

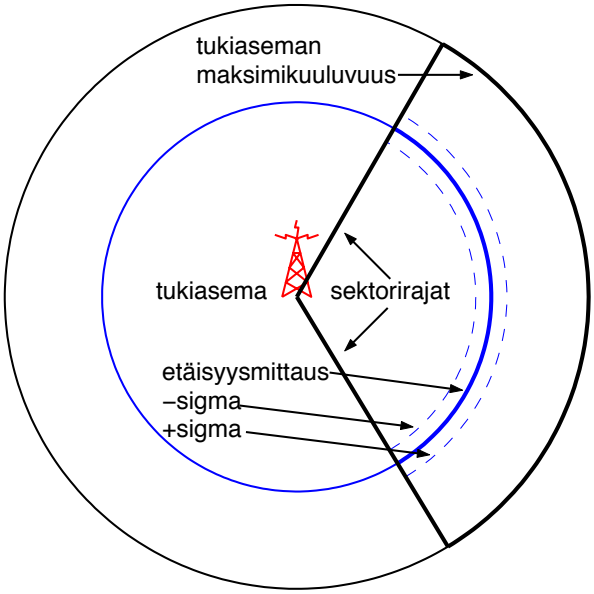
3.2 Tukiasemapaikannus

Tukiasemapaikannuksessa on mahdollista hyödyntää monenlaisia mittauksia. Usein käytettyjä mittauksia ovat saapumisaika (TOA, Time of Arrival), kulkuaika (RTD, Round Trip Delay), vastaanotetun signaalin voimakkuus (RSS, Received Signal Strength), saapumisaikaerotus (TDOA, Time Difference of Arrival), saapumiskulma (AOA, Angle of Arrival) ja solutunniste (Cell-ID, Cell Identity) [Drane et al. 1998] [Spirito et al. 2001] [Syrjärinne 2001] [Vossiek et al. 2003].

TOA-mittaus vaatii onnistuakseen täysin synkronissa olevan verkon ja päätelaitteet. US CDMA-verkko (United States Code Division Multiple Access) on synkronissa, mutta GSM-verkko (Global System for Mobile Communications) ja 3G-verkko (Third Generation) eivät ole synkronissa. RTD-mittaus puolestaan on mahdollista, vaikka verkko ei olisikaan synkronissa. GSM-verkossa RTD-mittausta kutsutaan TA-mittaukseksi (Timing Advance) ja 3G-verkossa RTT-mittaukseksi (Round Trip Time). TA-mittaus on kvantittunut resoluutiolla 550 metriä ja RTT-mittaus on kvantittunut resoluutiolla 80 metriä. Mittausvirheiden sigmat ovat resoluutioiden suuruusluokkaa. TOA-, RTD- ja RSS-mittaukset ovat matemaattisesti samoja, erotuksena vain virheen suuruus [Syrjärinne 2001]. Näiden mittauksien mittausfunktio on

$$\rho_i^{\mathrm{t}} = \|\mathbf{r}_i^{\mathrm{t}} - \mathbf{r}_{\mathrm{u}}\| + \epsilon_{\rho_i^{\mathrm{t}}}, \tag{3.3}$$

missä ρ_i^{t} on etäisyys i. tukiasemaan, $\mathbf{r}_i^{\mathrm{t}}$ on i. tukiaseman paikkavektori ja $\epsilon_{\rho_i^{\mathrm{t}}}$ on tukiaseman etäisyysmittauksen virhe. Etäisyysmittauksen virheen jakauma riippuu siitä millä tavalla etäisyysmittaus on mitattu. Yleensä virheen odotusarvo oletetaan nollaksi. Samoin kuin GPS:n pseudoetäisyysmittauksissa, tukiasemaetäisyysmittauksissa voi esiintyä monitieheijastusta. Tämän lisäksi etäisyysmittauksiin tulee virhettä myös signaalin epäsuorasta etenemisestä (NLOS, Non-Line of Sight). Nämä aiheuttavat myös virhettä AOA ja TDOA mittauksiin [Caffery&Stüber 1998]. Tämän virheen tunnistaminen ja korjaaminen on vielä hyvin aktiivisen tutkimuksen alla. Muutamia tutkittuja tapoja on, että NLOS-virhe lisätään tilavektoriin [Nájar&Vidal 2003] tai hypoteesin testauksen avulla tunnistetaan missä mittauksissa on huomattava virhetermi ja otetaan se laskuissa huomioon [Le et al. 2003]. Tässä työssä ei käsitellä monitieheijastuksen ja epäsuoran etenemisen aiheuttamaa virhettä tämän enempää.



Kuva 3.1: Solutunnisteeseen ja etäisyysmittaukseen perustuvan paikannuksen periaate.

Kuvasta 3.1 käy ilmi solutunnisteeseen ja etäisyysmittaukseen perustuvan paikannuksen periaate. Solutunniste kertoo, minkä tukiaseman kuuluvuusalueella käyttäjä on. Solutunniste identifioi myös sektorin, jossa käyttäjä on. Kuvaan on piirretty myös etäisyysmittausta vastaava ympyrä ja käyttäjän sektorin sisälle on piirretty katkoviivalla ympyröiden kaaret, jotka vastaavat etäisyysmittausta vähennettynä ja lisättynä mittausvirheen sigmalla. Solutunnisteen avulla voidaan myös mahdollisesti määrittää solun keskimääräinen korkeus, jota voidaan käyttää apuna kolmiulotteisen paikan määrittämisessä. GSM-verkossa kuuluvuus voi olla jopa 35 km tai vieläkin suurempi laajennetuilla soluilla (extended cells) [Syrjärinne 2001, s.32]. Kuitenkin kaupungissa päästään paikannuksessa pelkän solutunnisteen avulla alle 800 metrin tarkkuuteen, jolloin usein ollaan alle 500 metrin etäisyydellä tukiasemasta ja esikaupunkialueellakin alle 2 000 metrin tarkkuuteen [Spirito et al. 2001]. Saapumiskulmamittaus on matemaattisesti samanlainen kuin sektoritieto, paitsi huomattavasti tarkempi. Saapumis-

aikaerotusmittaus vastaa matemaattisesti kahden saapumisaikamittauksen erotusta, joka matemaattisesti on sama kuin kahden satelliittien pseudoetäisyysmittauksien erotus, jota on käsitelty kappaleessa 4.2.1.

3.3 Hybridipaikannus

Hybridipaikannuksessa pyritään ratkaisemaan käyttäjän paikka käytettävissä olevien mittauksien perusteella. Hybridi-sanalla korostetaan sitä, että mittausyhtälöt ovat erilaisia. Toki esitettyä tapaa voidaan soveltaa tilanteisiin, joissa mittausyhtälöt ovat kaikki samanlaisia, esimerkiksi pelkkiä GPS-satelliittien pseudoetäisyysmittauksia. Tässä työssä tarkastellaan hybridipaikannusta, joissa mittauksina käytetään GPS-satelliittien pseudoetäisyysmittauksia (3.1) ja tukiasemien etäisyysmittauksia (3.3). Kootaan mittaukset vektoriin

$$\mathbf{y} = [\rho_1^{\mathrm{s}}, \ldots, \rho_{n_{\mathrm{s}}}^{\mathrm{s}}, \rho_1^{\mathrm{t}}, \ldots, \rho_{n_{\mathrm{t}}}^{\mathrm{t}}]^T, \tag{3.4}$$

missä ρ_i^{s} on pseudoetäisyysmittaus i. satelliittiin, eri satelliittien pseudoetäisyysmittauksia on n_{s} kappaletta, ρ_i^{t} on etäisyysmittaus i. tukiasemaan ja eri tukiasemien etäisyysmittauksia on n_{t} kappaletta. Mikäli korkeusmittaus on käytössä, se voidaan ajatella yhdeksi tukiasemamittaukseksi, siten että tukiaseman paikka on maapallon keskipiste ja etäisyys on korkeutta vastaava etäisyys maapallon keskipisteestä. Näin myös korkeusmittaus voidaan käsitellä samalla koneistolla kuin muut mittaukset. Kootaan vastaavat mittausfunktiot ilman virhetermejä vektoriarvoiseen mittausfunktioon

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \|\mathbf{r}_1^{\mathrm{s}} - \mathbf{r}_{\mathrm{u}}\| + b \\ \vdots \\ \|\mathbf{r}_{n_{\mathrm{s}}}^{\mathrm{s}} - \mathbf{r}_{\mathrm{u}}\| + b \\ \|\mathbf{r}_1^{\mathrm{t}} - \mathbf{r}_{\mathrm{u}}\| \\ \vdots \\ \|\mathbf{r}_{n_{\mathrm{t}}}^{\mathrm{t}} - \mathbf{r}_{\mathrm{u}}\| \end{bmatrix}, \tag{3.5}$$

missä $\mathbf{x} = [\mathbf{r}_{\mathrm{u}}, b]^T$ on tuntematon tilavektori, $\mathbf{r}_{\mathrm{u}}$ on käyttäjän paikkavektori, b on vastaanottimen kellopoikkeama metreissä GPS-ajasta, $\mathbf{r}_i^{\mathrm{s}}$ on i. satelliitin paikkavektori ja $\mathbf{r}_i^{\mathrm{t}}$ on i. tukiaseman paikkavektori. Viimeisenä kootaan vastaavat virhetermit vektoriin

$$\boldsymbol{\epsilon} = [\epsilon_{\rho_1^{\mathrm{s}}}, \ldots, \epsilon_{\rho_{n_{\mathrm{s}}}^{\mathrm{s}}}, \epsilon_{\rho_1^{\mathrm{t}}}, \ldots, \epsilon_{\rho_{n_{\mathrm{t}}}^{\mathrm{t}}}]^T, \tag{3.6}$$

missä $\epsilon_{\rho_i^{\mathrm{s}}}$ on i. satelliittiin pseudoetäisyysmittauksen virhe ja $\epsilon_{\rho_i^{\mathrm{t}}}$ on i. tukiaseman etäisyysmittauksen virhe. Nyt voidaan kirjottaa mittaukset yhden yhtälön avulla,

$$\mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\epsilon}. \tag{3.7}$$

Oletetaan että $\mathrm{E}(\boldsymbol{\epsilon}) = \mathbf{0}$ ja $\mathrm{V}(\boldsymbol{\epsilon}) = \Sigma$, missä Σ on positiividefiniitti matriisi. Tällöin on olemassa symmetrinen kääntyvä matriisi, jota merkitään $\Sigma^{1/2}$ ja jonka käänteismatriisia merkitään $\Sigma^{-1/2}$, siten että $\Sigma^{1/2}\Sigma^{1/2} = \Sigma$ [Pohjavirta&Ruohonen 2004, s.59].

Tällöin kovarianssimatriisioperaattorin ominaisuuksien [Pohjavirta&Ruohonen 2004, s.43] ja matriisin $\Sigma^{1/2}$ symmetrisyyden nojalla

$$\mathrm{V}(\Sigma^{-1/2}(\mathbf{y} - \mathbf{h}(\mathbf{x}))) = \Sigma^{-1/2}\,\mathrm{V}(\boldsymbol{\epsilon})\Sigma^{-1/2} = \mathrm{I}. \tag{3.8}$$

Oletuksen mukaan $\mathbf{0} = \mathrm{E}(\mathbf{y} - \mathbf{h}(\mathbf{x})) = \mathrm{E}(\Sigma^{-1/2}(\mathbf{y} - \mathbf{h}(\mathbf{x})))$. Tarkoituksena on optimoimalla ratkaista $\mathbf{x}$, siten että kustannusfunktio $L(\mathbf{x}) = (\mathbf{y} - \mathbf{h}(\mathbf{x}))^T\Sigma^{-1}(\mathbf{y} - \mathbf{h}(\mathbf{x})))$ arvo minimoituu. Kustannusfunktioon on valittu painomatriisiksi Σ^{-1}, joka takaa kaavan (3.8) mukaan sen, että eri "mittauksien" varianssit ovat yhtä suuret. Tällöin optimiratkaisu sallii epätarkoissa tukiasemaetäisyysmittauksissa suurempia virheitä kuin tarkemmissa satelliittien pseudoetäisyysmittauksissa. Tehtävän voi ratkaista esimerkiksi iteratiivisella Gauss-Newtonin algoritmilla [Kaleva 2003b, s.126]. Menetelmää kutsutaan myös painotetuksi pienimmän neliösumman menetelmäksi (WLS, Weighted Least Squares). Algoritmi tuottaa yksikäsitteisen ratkaisun, vain jos mittauksia on vähintään tilan dimension määrä, tässä tapauksessa neljä. Varmoja takeita algoritmin toiminnalla ei ole ja vaikka algoritmi konvergoisikin, tämä arvo ei välttämättä olisi globaali minimi. Tämän takia alkuarvo iteraatiolle on syytä valita huolella. Algoritmin (linearisoinnin) avulla voidaan lisäksi arvioda saadun ratkaisun epävarmuutta seuraavasti

$$\mathrm{V}(\mathbf{x}) = (\mathbf{h}'(\mathbf{x})^T\Sigma^{-1}\mathbf{h}'(\mathbf{x}))^{-1}, \tag{3.9}$$

missä $\mathbf{x}$ on saatu ratkaisu, $\mathbf{h}'(\mathbf{x})$ on vektorin $\mathbf{h}(\mathbf{x})$ derivaatta ja $\mathrm{V}(\boldsymbol{\epsilon}) = \Sigma$. Oletetaan, että kyseiset käänteismatriisit ovat olemassa.

Yhtälölle (3.7) on kehitetty myös suljetun muodon ratkaisijoita, joissa oletetaan, että $\boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{0}$. Sirola kumppaneineen on esittänyt erään tälläisen ratkaisijan [Sirola et al. 2003]. Luonnollisestikin suljetun muodon ratkaisun epävarmuutta voidaan arvioida vastaavalla tavalla linearisoimalla kuin Gauss-Newtonin algoritmissa. Suljetun muodon ratkaisijan avulla voidaan myös arvioida montako lokaalia minimiä tehtävällä on ja käyttää näitä esimerkiksi Gauss-Newtonin algoritmin alkuarvoina. Ennen tätä suljetun muodon ratkaisuista voidaan myös valita vain ne, jotka täyttävät mahdollisen lisäinformaation, esimerkiksi sektoritiedon.

Luku 4

Suodatus paikannuksessa

Tässä luvussa käsitellään suodatuksen soveltamista paikannuksessa kolmen erilaisen suodattimen avulla, jotka edustavat laajasti paikannukseen soveltuvia Kalmanin suodattimen laajennuksia, kuten kappaleessa 2.3 havaittiin. Nämä kolme suodatinta ovat laajennettu Kalmanin suodatin (EKF, kappale 4.2), toisen asteen laajennettu Kalmanin suodatin (EKF2, kappale 4.3) ja paikkaratkaisun Kalmanin suodatin (PKF, kappale 4.4). Kaikki suodattimet käyttävät samaa tilamallia, joka on esitetty kappaleessa 4.1. EKF2:n tapauksessa keskitytään mittausfunktion epälineaarisuuteen kappaleissa 4.3.1 ja 4.3.2. Kappaleessa 4.3.3 vertaillaan esimerkin avulla EKF:ta ja EKF2:ta. Luvun lopussa (kappale 4.4.1) on sovellettu kappaleen 2.2.6 menetelmiä arvioidessa PKF:n epävarmuutta.

4.1 Käyttäjän tilamalli

Suodatuksen tavoite on saada mahdollisimman hyvä estimaattori prosessin tilalle käytettävissä olevien, nykyisten ja vanhojen, mittauksien perusteella. Paikannuksessa prosessin tila sisältää vähintään käyttäjän paikkavektorin. Tässä työssä koordinaatistona käytetään lokaalia itä-pohjois-korkeus (ENU, East-North-Up) koordinaatistoa, jossa on jokin referenssipiste (koordinaatiston origo, esimerkiksi alkuehto), jonka suhteen koordinaatit on ilmoitettu metreinä itään, pohjoiseen ja ylöspäin. Luonnol-

lisesti negatiiviset arvot ovat päinvastaisiin suuntiin. Tässä työssä prosessin tilana on käyttäjän paikkavektori ja nopeus

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_{\mathrm{u}} \\ \mathbf{v}_{\mathrm{u}} \end{bmatrix}. \tag{4.1}$$

On useampia syitä miksi nopeus on osana tilavektoria. Ensiksikin käyttäjä on usein kiinnostunut myös nopeudesta. Pohjimmiltaan kuitenkin on kysymys tilavektorin valinnasta siten, että todellinen malli sopisi hyvin suodatuksen oletuksiin. Suodatuksessa tilamallin perusoletuksiin kuuluu, että tilamallin virheet muodostavat valkoisen prosessin ja edelleen tilat muodostavat Markovin prosessin. Toisin sanoen optimaalinen ennuste seuraavasta tilasta pitää pystyä laskemaan nykyisen tilan pohjalta. Mikäli todellisen mallin mukaan kiihtyvyys muodostaa valkoisen prosessin, niin tilamallin vastaava tilavektori koostuu paikasta ja nopeudesta. Tämä vastaa tässä yllä esitettyä tilavektoria (intuition pohjalta kiihtyvyyden valkoisuusoletus tuntuu oikealta). Tälläistä tilamallia kutsutaan vakionopeusmalliksi. Lisäksi vakionopeusmallin avulla voidaan helposti käyttää hyödyksi satelliittien pseudoetäisyyksien derivaattamittaukset.

Prosessin tilassa voisi olla myös monia muita tuntemattomia, esimerkiksi kellopoikkeama, kellopoikkeaman derivaatta, eri mittaukset, mittauksien virhevarianssit ja monitieheijastuksen aiheuttama virhe.

Vakionopeusmalli, jossa mukana on myös kellopoikkeama ja sen derivaatta, on usein esitetty GPS-paikannuksen yhteydessä esimerkiksi kirjoissa [Brown 1983] [Parkinson&Spilker 1996] [Kaplan 1996] [Farrell&Barth 1999]. Kuitenkin halvoille kelloille, jotka lähinnä tulevat kysymykseen massamarkkinoille, tarkka kellomalli (kellopoikkeaman ja sen derivaatan tilamalli) on vaikea rakentaa. Tämän takia prosessin tilaan ei ole otettu kellopoikkeamaan ja sen derivaattaa mukaan. Tällöin tosin GPS-mittaukset joudutaan muuttamaan siten, ettei niissäkään ole kyseisiä suureita. Tämä onnistuu laskemalla mittauksien erotuksia, niin kutsuttuja differenssimittauksia. Tarkemmin tämä on esitetty kappaleessa 4.2. Vakionopeusmallia ilman kellopoikkeamaa ja sen derivaattaa on sovellettu myös hybridipaikannukseen muun muassa artikkelissa [Ma 2003].

Mallinnetaan tila stokastiseksi differentiaaliyhtälöksi

$$\mathbf{dx}(t) = \mathrm{F}(t)\mathbf{x}(t)dt + \mathrm{G}(t)\mathbf{d}\boldsymbol{\beta}(t), \tag{4.2}$$

missä

$$\mathrm{F}(t) = \begin{bmatrix} 0_{3\times3} & \mathrm{I}_{3\times3} \\ 0_{3\times3} & 0_{3\times3} \end{bmatrix}, \tag{4.3}$$

missä alaindeksi $_{n\times m}$ ilmoittaa selvyyden vuoksi, että matriisin tyyppi on $\mathbb{R}^{n\times m}$. Vakionopeusmallissa nopeuden virhe mallinnetaan Brownin liikkeeksi $\boldsymbol{\beta}$, joten

$$\mathrm{G}(t) = \begin{bmatrix} 0_{3\times3} \\ \mathrm{I}_{3\times3} \end{bmatrix}. \tag{4.4}$$

Brownin liikkeen $\boldsymbol{\beta}$ diffuusiomatriisi on

$$\mathrm{Q_c} = \begin{bmatrix} \sigma^2_{\mathrm{taso}}\mathrm{I}_{2\times 2} & 0_{2\times 1} \\ 0_{1\times 2} & \sigma^2_{\mathrm{kork}} \end{bmatrix}, \tag{4.5}$$

missä σ^2_{taso} kuvaa tilamallin nopeuden virhettä itä-pohjoistasossa. Tarkemmin sanottuna σ^2_{taso} kuvaa sitä, kuinka paljon nopeuden virheeseen tulee lisää varianssia yhden sekunnin aikana pohjois-etelä ja itä-länsi suunnissa. Vastaavasti σ^2_{kork} kuvaa sitä, kuinka paljon nopeuden virheeseen tulee lisää varianssia yhden sekunnin aikana korkeussuunnassa. Tämä on otettu erikseen siksi, että intuition mukaan nopeus vaihtelee hitaammin korkeussuunnassa kuin itä-pohjoistasossa. Kyseisten parametrien σ^2_{taso}, σ^2_{kork} arvot riippuvat tietenkin siitä, miten käyttäjä liikkuu, esimerkiksi kävellen, pyörällä vai autolla. Tätä ongelmaa on pyritty ratkaisemaan esimerkiksi erilaisilla adaptiivisilla menetelmillä, joiden tarkoituksena on innovaation (mittauksen ja mittauksen ennusteen erotuksen) perusteella arvioida tilamallin virheen kovarianssimatriisia [Bar-Shalom et al. 2001, luku 11]. Tässä työssä ei käsitellä adaptiivisia menetelmiä, vaan σ^2_{taso} ja σ^2_{kork} arvoina käytetään vakioarvoja $\sigma^2_{\mathrm{taso}} = 2\ \frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^3}$ ja $\sigma^2_{\mathrm{kork}} = 1\ \frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^3}$. Saman suuntaisia arvoja löytyy variansille σ^2_{taso} artikkelissa [Ma 2003]. Simulaatioiden kannalta ei ole väliä mitä arvoja käytetään, koska simuloidulla reitillä ja suodatuksessa käytetään samoja arvoja.

Stokastinen differentiaaliyhtälön (4.2) ratkaisu voidaan kirjoittaa lineaariseksi tilamalliksi, jota tullaan käyttämään tämän työn eri suodattimien tilamallina kaavan (2.32) avulla:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \Phi_k \mathbf{x}_k + \mathbf{w}_k, \tag{4.6}$$

missä

$$\Phi_k = e^{(t_{k+1}-t_k)\mathrm{F}} = \begin{bmatrix} \mathrm{I}_{3\times 3} & \Delta t \mathrm{I}_{3\times 3} \\ 0_{3\times 3} & \mathrm{I}_{3\times 3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{I}_{3\times 3} & \mathrm{I}_{3\times 3} \\ 0_{3\times 3} & \mathrm{I}_{3\times 3} \end{bmatrix}. \tag{4.7}$$

Merkintä $\Delta t = t_{k+1} - t_k$ tarkoittaa aika-askeleen pituutta, joka tässä työssä on vakio 1. Näin ollen Φ_k on vakiomatriisi. On huomattava, että lauseen 2.12 mukaan vakioaskelpituutta voidaan käyttää, vaikka välissä olisi ajanhetkiä, jolloin ei saada mittauksia. Tilamallin virhe $\mathbf{w}_k$ on valkoista, nollakeskistä, normaalijakautunutta kohinaa, joka oletetaan riippumattomaksi alkuehdosta $\mathbf{x}_0$ ja näin ollen yllä esitetty tilamalli toteuttaa Kalmanin suodattimen oletukset tilamallille. Tilamallin virheen kovarianssimatriisi Q_k on laskettu yhtälön (2.33) avulla

$$\begin{aligned} \mathrm{Q}_k = \mathrm{V}(\mathbf{w}_k) &= \int_{t_k}^{t_{k+1}} \Phi(t_{k+1}, t)\mathrm{G}(t)\mathrm{Q_c}\mathrm{G}(t)^T \Phi(t_{k+1}, t)^T dt \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\Delta t^3}{3}\mathrm{Q_c} & \frac{\Delta t^2}{2}\mathrm{Q_c} \\ \frac{\Delta t^2}{2}\mathrm{Q_c} & \Delta t \mathrm{Q_c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}\mathrm{Q_c} & \frac{1}{2}\mathrm{Q_c} \\ \frac{1}{2}\mathrm{Q_c} & \mathrm{Q_c} \end{bmatrix}, \end{aligned} \tag{4.8}$$

missä $\mathrm{Q_c}$ on annettu yhtälössä (4.5). Viimeinen muoto tulee sijoittamalla $\Delta t = 1$, jota käytetään tässä työssä. Käytännössä käyttäjän tilamalli harvoin on täysin Brownin liikettä. Silloin tyydytään arvioimaan tilamallin virheen kovarianssimatriisia yläkanttiin ja käytetään Kalmanin suodatinta BLUE-estimaattorina. Asiaa on käsitelty enemmän kappaleessa 2.2.6.

4.2 Laajennettu Kalmanin suodatin

Laajennettu Kalmanin suodatin (EKF) on erikoistapaus toisen asteen laajennetusta Kalmanin suodattimesta, jota on käsitelty kappaleessa 2.3.2. EKF:n algoritmi on annettu tiiviissä muodossa liitteessä B. Sovellettaessa laajennettua Kalmanin suodatinta paikannukseen tarvitaan käyttäjän tilamalli, jota on käsitelty kappaleessa 4.1 (kaava (4.6)), ja mittausmalli, jota käsitellään seuraavaksi.

Niinkuin edellä on todettu, tilamalli on rakennettu siten, etteivät kellopoikkeama ja sen derivaatta ole tiloina. Tällöin GPS-satelliittien mittausmallit, joita on käsitelty kappaleessa 3.1.1, tulee muuttaa siten, ettei niissä esiinny kyseisiä suureita. Tämä onnistuu laskemalla niin kutsutut differenssimittaukset, joissa lasketaan GPS-mittauksien painotettu summa siten, että painojen summa on nolla. Tällöin kellopoikkeama häviää mittauksista. Painoista vähintään kaksi tulee olla erisuuria kuin nolla. Tämä ei onnistu mikäli mittauksia on vain yhdestä satelliitista, sillä tällöin differenssimittauksia ei voida laskea. Tämän takia tässä työssä ei käytetä hyväksi vain yhdestä satelliittista samalla hetkellä tulleita mittauksia.

4.2.1 Pseudoetäisyysmittaukset

Käsitellään ensin pseudoetäisyysmittauksia. Olkoon pseudoetäisyysmittauksia yhteensä n_s kappaletta, tässä $n_\mathrm{s} \geq 2$ ja merkitään pseudoetäisyysmittauksia vektorilla

$$\boldsymbol{\rho}^\mathrm{s} = [\rho_1^\mathrm{s}, \ldots, \rho_{n_\mathrm{s}}^\mathrm{s}]^T. \tag{4.9}$$

Merkitään vastaavia mittausfunktioita ilman virhetermejä vektoriarvoisena mittausfunktiona. Mittausfunktion muuttujana pidetään vain käyttäjän paikkaa $\mathbf{r}_\mathrm{u}$, kellopoikkeamaa b pidetään tuntemattomana vakiona

$$\mathbf{h}_\rho^\mathrm{s}(\mathbf{r}_\mathrm{u}) + b\mathbf{1} = \begin{bmatrix} \|\mathbf{r}_1^\mathrm{s} - \mathbf{r}_\mathrm{u}\| \\ \vdots \\ \|\mathbf{r}_{n_\mathrm{s}}^\mathrm{s} - \mathbf{r}_\mathrm{u}\| \end{bmatrix} + b\mathbf{1}, \tag{4.10}$$

missä $\mathbf{r}_i^\mathrm{s}$ on i. satelliitin paikkavektori. Vektori $\mathbf{1}$ on aina tilanteeseen sopivan kokoinen vektori, jonka kaikki alkiot ovat ykkösiä. Lisäksi merkitään kyseisten pseudoetäisyysmittauksien virheitä vektorilla

$$\boldsymbol{\epsilon}_\rho^\mathrm{s} = [\epsilon_{\rho_1^\mathrm{s}}, \ldots, \epsilon_{\rho_{n_\mathrm{s}}^\mathrm{s}}]^T, \tag{4.11}$$

joka oletetaan nollakeskiseksi. Näin ollen satelliittien pseudoetäisyysmittaukset voidaan kirjoittaa seuraavasti

$$\boldsymbol{\rho}^\mathrm{s} = \mathbf{h}_\rho^\mathrm{s}(\mathbf{r}_\mathrm{u}) + b\mathbf{1} + \boldsymbol{\epsilon}_\rho^\mathrm{s}. \tag{4.12}$$

Määritellään vielä matriisi, jonka avulla mittaukset saadaan kuvattua differenssimittauksiksi.

Määritelmä 4.1 (Differenssikuvaus). *Olkoon matriisi* D *sellainen, että sen nolla-avaruuteen kuuluu vektori* $\mathbf{1}$*, toisin sanoen* $\mathrm{D}\mathbf{1} = \mathbf{0}$*. Tällöin matriisia* D *kutsutaan differenssikuvausmatriisiksi. Matriisi* D *kuvaa pseudoetäisyysmittaukset (4.9) ja pseudoetäisyyksien derivaattamittaukset (4.14) differenssimittauksiksi siten, että kellopoikkeama* b *ja kellopoikkeaman derivaatta* $\dot{b}$ *häviävät yhtälöistä. Eräs esimerkki tälläisesta matriisista on* $\mathrm{D}_1 = \begin{bmatrix} \mathrm{I} & -\mathbf{1} \end{bmatrix}$*, missä* $\mathrm{I} \in \mathbb{R}^{(n_s-1)\times(n_s-1)}$ *on yksikkömatriisi.*

Pseudoetäisyysmittauksien differenssimittaukset tällöin ovat

$$\mathbf{y}^{\mathrm{s}}_{\rho} = \mathrm{D}\boldsymbol{\rho}^{\mathrm{s}} = \mathrm{D}\mathbf{h}^{\mathrm{s}}_{\rho}(\mathbf{r}_{\mathrm{u}}) + b\mathrm{D}\mathbf{1} + \mathrm{D}\boldsymbol{\epsilon}^{\mathrm{s}}_{\rho} = \mathrm{D}\mathbf{h}^{\mathrm{s}}_{\rho}(\mathbf{r}_{\mathrm{u}}) + \mathrm{D}\boldsymbol{\epsilon}^{\mathrm{s}}_{\rho}, \tag{4.13}$$

missä $\mathbf{y}^{\mathrm{s}}_{\rho}$ tarkoittaa satelliittien pseudoetäisyyksien differenssimittauksia ja D tarkoittaa differenssikuvausmatriisia.

4.2.2 Pseudoetäisyyksien derivaattamittaukset

Vastaavalla tavalla toimitaan pseudoetäisyyksien derivaattamittauksien kanssa. Nyt merkitään pseudoetäisyyksien derivaattamittauksia vektorilla

$$\dot{\boldsymbol{\rho}}^{\mathrm{s}} = [\dot{\rho}^{\mathrm{s}}_1, \ldots, \dot{\rho}^{\mathrm{s}}_{n_{\mathrm{s}}}]^T. \tag{4.14}$$

Pseudoetäisyyksien derivaattamittauksien virheitä puolestaan merkitään vektorilla

$$\boldsymbol{\epsilon}^{\mathrm{s}}_{\dot{\rho}} = [\epsilon_{\dot{\rho}^{\mathrm{s}}_1}, \ldots, \epsilon_{\dot{\rho}^{\mathrm{s}}_{n_{\mathrm{s}}}}]^T. \tag{4.15}$$

Yksikkövektoreita käyttäjästä i. satellittiin merkitään vektorilla

$$\mathbf{u}^{\mathrm{s}}_i = \frac{\mathbf{r}^{\mathrm{s}}_i - \mathbf{r}_{\mathrm{u}}}{\|\mathbf{r}^{\mathrm{s}}_i - \mathbf{r}_{\mathrm{u}}\|}, \tag{4.16}$$

Matriisia, johon on koottu yksikkövektorit käyttäjästä satelliitteihin $\mathbf{u}^{\mathrm{s}}_i$:t merkitään

$$\mathrm{U}^{\mathrm{s}} = [\mathbf{u}^{\mathrm{s}}_1, \ldots, \mathbf{u}^{\mathrm{s}}_{n_{\mathrm{s}}}]^T. \tag{4.17}$$

Matriisia, johon on koottu tunnetut satelliittien nopeudet ($\mathbf{v}^{\mathrm{s}}_i$) merkitään

$$\mathrm{V}^{\mathrm{s}} = [\mathbf{v}^{\mathrm{s}}_1, \ldots, \mathbf{v}^{\mathrm{s}}_{n_{\mathrm{s}}}]^T. \tag{4.18}$$

Näin ollen voidaan kirjoittaa pseudoetäisyyksien derivaattamittaukset (yhtälö 3.2) mittausyhtälönä

$$\begin{aligned} \mathbf{y}^{\mathrm{s}}_{\dot{\rho}} = \mathrm{D}\dot{\boldsymbol{\rho}}^{\mathrm{s}} &= \mathrm{D}(\mathrm{diag}(\mathrm{U}^{\mathrm{s}}(\mathrm{V}^{\mathrm{s}})^T) - \mathrm{U}^{\mathrm{s}}\mathbf{v}_{\mathrm{u}} + \dot{b}\mathbf{1} + \boldsymbol{\epsilon}^{\mathrm{s}}_{\dot{\rho}}) \\ &= \mathrm{D}(\mathrm{diag}(\mathrm{U}^{\mathrm{s}}(\mathrm{V}^{\mathrm{s}})^T) - \mathrm{U}^{\mathrm{s}}\mathbf{v}_{\mathrm{u}}) + \mathrm{D}\boldsymbol{\epsilon}^{\mathrm{s}}_{\dot{\rho}}, \end{aligned} \tag{4.19}$$

missä $\mathbf{y}^{\mathrm{s}}_{\dot{\rho}}$ tarkoittaa satelliittien pseudoetäisyyksien derivaattojen differenssimittauksia ja diag on diagonaali operaattori, joka poimii matriisin diagonaalin vektoriksi.

4.2.3 Tukiasemien etäisyysmittaukset

Tukiasemien etäisyysmittauksista (kappale 3.2) ei tarvitse muodostaa differenssimittauksia, vaan ne voidaan käyttää sellaisenaan suodatuksessa. Merkitään etäisyysmittauksia vektorilla

$$\boldsymbol{\rho}^{\mathrm{t}} = [\rho_1^{\mathrm{t}}, \ldots, \rho_{n_{\mathrm{t}}}^{\mathrm{t}}]^T, \tag{4.20}$$

missä n_{t} on tukiasemien etäisyysmittauksien lukumäärä. Merkitään vastaavia mittausfunktioita ilman virhetermejä vektoriarvoisena mittausfunktiona

$$\mathbf{h}_{\rho}^{\mathrm{t}}(\mathbf{r}_{\mathrm{u}}) = \begin{bmatrix} \|\mathbf{r}_1^{\mathrm{t}} - \mathbf{r}_{\mathrm{u}}\| \\ \vdots \\ \|\mathbf{r}_{n_{\mathrm{t}}}^{\mathrm{t}} - \mathbf{r}_{\mathrm{u}}\| \end{bmatrix}, \tag{4.21}$$

missä $\mathbf{r}_i^{\mathrm{t}}$ on i. tukiaseman paikkavektori. Lisäksi merkitään kyseisten etäisyysmittauksien virheitä vektorilla

$$\boldsymbol{\epsilon}_{\rho}^{\mathrm{t}} = [\epsilon_{\rho_1^{\mathrm{t}}}, \ldots, \epsilon_{\rho_{n_{\mathrm{t}}}^{\mathrm{t}}}]^T, \tag{4.22}$$

joka oletetaan nollakeskiseksi.

Näin ollen tukiasemien etäisyysmittaukset voidaan kirjoittaa

$$\mathbf{y}_{\rho}^{\mathrm{t}} = \boldsymbol{\rho}^{\mathrm{t}} = \mathbf{h}_{\rho}^{\mathrm{t}}(\mathbf{r}_{\mathrm{u}}) + \boldsymbol{\epsilon}_{\rho}^{\mathrm{t}}. \tag{4.23}$$

4.2.4 Mittausmalli

Kootaan yhteen laajennetun Kalmanin suodattimen mittausmalli hybridipaikannuksessa. Mittausmalli koostuu pseudoetäisyyksien differenssimittauksista, pseudoetäisyyksien derivaattojen differenssimittauksista ja tukiasemien etäisyysmittauksista. Mittauksista koottua vektoria merkitään lyhyesti

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_{\rho}^{\mathrm{s}} \\ \mathbf{y}_{\dot{\rho}}^{\mathrm{s}} \\ \mathbf{y}_{\rho}^{\mathrm{t}} \end{bmatrix}, \tag{4.24}$$

missä $\mathbf{y}_{\rho}^{\mathrm{s}}$ on annettu kaavassa (4.13), $\mathbf{y}_{\dot{\rho}}^{\mathrm{s}}$ on annettu kaavassa (4.19) ja $\mathbf{y}_{\rho}^{\mathrm{t}}$ on annettu kaavassa (4.23). Samojen kaavojen pohjalta saadaan rakennettua yhteinen mittausfunktio $\mathbf{h}(\mathbf{x})$ ilman virhetermejä

$$\begin{aligned} \mathbf{h}(\mathbf{x}) &= \begin{bmatrix} \mathrm{D}\mathbf{h}_{\rho}^{\mathrm{s}}(\mathbf{r}_{\mathrm{u}}) \\ \mathrm{D}(\mathrm{diag}(\mathrm{U}^{\mathrm{s}}(\mathrm{V}^{\mathrm{s}})^T) - \mathrm{U}^{\mathrm{s}}\mathbf{v}_{\mathrm{u}}) \\ \mathbf{h}_{\rho}^{\mathrm{t}}(\mathbf{r}_{\mathrm{u}}) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathrm{D} & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{D} & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{I}_{n_{\mathrm{t}} \times n_{\mathrm{t}}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{h}_{\rho}^{\mathrm{s}}(\mathbf{r}_{\mathrm{u}}) \\ \mathrm{diag}(\mathrm{U}^{\mathrm{s}}(\mathrm{V}^{\mathrm{s}})^T) - \mathrm{U}^{\mathrm{s}}\mathbf{v}_{\mathrm{u}} \\ \mathbf{h}_{\rho}^{\mathrm{t}}(\mathbf{r}_{\mathrm{u}}) \end{bmatrix} \\ &\overset{merk.}{=} \begin{bmatrix} \mathrm{D} & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{D} & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{I}_{n_{\mathrm{t}} \times n_{\mathrm{t}}} \end{bmatrix} \check{\mathbf{h}}(\mathbf{x}), \end{aligned} \tag{4.25}$$

missä $\mathbf{x}$ on tilamuuttuja, joka on annettu kaavassa (4.1) ja matriisit 0 ovat sopivan kokoisia nollamatriiseja. Viimeisessä kohtaa on otettu käyttöön merkintä, jonka tavoitteena on lyhentää tulevia kaavoja. Kootaan vielä samojen kaavojen pohjalta virhevektori

$$\boldsymbol{\epsilon} = \begin{bmatrix} \mathrm{D}\boldsymbol{\epsilon}^{\mathrm{s}}_{\rho} \\ \mathrm{D}\boldsymbol{\epsilon}^{\mathrm{s}}_{\dot{\rho}} \\ \boldsymbol{\epsilon}^{\mathrm{t}}_{\rho} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{D} & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{D} & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{I}_{n_{\mathrm{t}} \times n_{\mathrm{t}}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\epsilon}^{\mathrm{s}}_{\rho} \\ \boldsymbol{\epsilon}^{\mathrm{s}}_{\dot{\rho}} \\ \boldsymbol{\epsilon}^{\mathrm{t}}_{\rho} \end{bmatrix}, \tag{4.26}$$

missä matriisit 0 ovat sopivan kokoisia nollamatriiseja. Näin ollen EKF:n mittausmalli, kun aikaindeksi on lisätty suureisiin, on

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{h}_k(\mathbf{x}_k) + \mathbf{v}_k, \tag{4.27}$$

missä $\mathbf{y}_k$ on annettu kaavassa (4.24), $\mathbf{h}_k(\mathbf{x}_k)$ on annettu kaavassa (4.25) ja $\mathbf{w}_k = \boldsymbol{\epsilon}_k$, joka on annettu kaavassa (4.26). Mainituissa kaavoissa ei ole selkeyden vuoksi merkitty aikaindeksiä. EKF:n algoritmi vaati mittausfunktion derivaatan ja mittausmallin virheen $\mathbf{v}_k$ kovarianssimatriisin, jotka lasketaan seuraavaksi.

Apulause 4.2. *Olkoon funktio* $h(\mathbf{x}) = \|\mathbf{a} - \mathbf{x}\|$ *ja* $\mathbf{x} \neq \mathbf{a}$. *Tällöin*

$$h'(\mathbf{x}) = \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{a})^T}{\|\mathbf{a} - \mathbf{x}\|}, \tag{4.28}$$

lisäksi normin $h(\mathbf{x}) = \|\mathbf{a} - \mathbf{x}\|$ *Hessen matriisi (merkitään* $\mathrm{H}^e_{\|\mathbf{a}-\mathbf{x}\|}$*) on*

$$\mathrm{H}^e_{\|\mathbf{a}-\mathbf{x}\|} = \frac{1}{\|\mathbf{a} - \mathbf{x}\|}\left(\mathrm{I} - \frac{(\mathbf{a} - \mathbf{x})}{\|\mathbf{a} - \mathbf{x}\|}\frac{(\mathbf{a} - \mathbf{x})^T}{\|\mathbf{a} - \mathbf{x}\|}\right). \tag{4.29}$$

Todistus. Muodostetaan yhdistetty funktio

$$g_1(\mathbf{x}) = g_2(h(\mathbf{x})) = \|\mathbf{a} - \mathbf{x}\|^2 = (\mathbf{a} - \mathbf{x})^T(\mathbf{a} - \mathbf{x}), \tag{4.30}$$

missä $g_2(x) = x^2$. Funktion g_1 derivaatta on [Perttula 1999a, s.30,s.35]

$$g_1'(\mathbf{x}) = g_2'(h(\mathbf{x}))h'(\mathbf{x}) = 2(\mathbf{x} - \mathbf{a})^T, \tag{4.31}$$

josta seuraa, että

$$h'(\mathbf{x}) = \frac{2(\mathbf{x} - \mathbf{a})^T}{g_2'(h(\mathbf{x}))} = \frac{2(\mathbf{x} - \mathbf{a})^T}{2\|\mathbf{a} - \mathbf{x}\|}. \tag{4.32}$$

Haettu Hessen matriisi on funktion $\mathbf{g}_3(\mathbf{x})$ derivaatta, kun

$$\mathbf{g}_3(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x} - \mathbf{a}}{\|\mathbf{a} - \mathbf{x}\|} = \mathbf{g}_4(\mathbf{x})g_5(h(\mathbf{x})), \tag{4.33}$$

missä $\mathbf{g}_4(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - \mathbf{a}$ ja $g_5(x) = \frac{1}{x}$. Tällöin edellisen kohdan, tulon derivoimissäännön ja ketjusäännön mukaan

$$\begin{aligned} \mathrm{H}^e_{\|\mathbf{a}-\mathbf{x}\|} &= \mathbf{g}_3'(\mathbf{x}) = \mathbf{g}_4'(\mathbf{x})g_5(h(\mathbf{x})) + \mathbf{g}_4(\mathbf{x})(g_5'(h(\mathbf{x}))h'(\mathbf{x})) \\ &= \mathrm{I}\frac{1}{\|\mathbf{a} - \mathbf{x}\|} + (\mathbf{x} - \mathbf{a})\left(-\frac{1}{\|\mathbf{a} - \mathbf{x}\|^2}\right)\frac{(\mathbf{x} - \mathbf{a})^T}{\|\mathbf{a} - \mathbf{x}\|} \\ &= \frac{1}{\|\mathbf{a} - \mathbf{x}\|}\left(\mathrm{I} - \frac{(\mathbf{a} - \mathbf{x})}{\|\mathbf{a} - \mathbf{x}\|}\frac{(\mathbf{a} - \mathbf{x})^T}{\|\mathbf{a} - \mathbf{x}\|}\right). \end{aligned} \tag{4.34}$$

□

Mittausfunktion (4.25) derivaatta ajanhetkellä t_k priori-tilan odotusarvon kohdassa $\mathbf{x}_k = \hat{x}_k^-$ voidaan laskea derivaatta-operaattorin lineaarisuuden ja apulauseen (4.2) avulla

$$\mathrm{H}_k = \left.\frac{\partial \mathbf{h}_k(\mathbf{x}_k)}{\partial \mathbf{x}_k}\right|_{\mathbf{x}_k=\hat{x}_k^-} = \begin{bmatrix} \mathrm{D} & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{D} & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{I}_{n_\mathrm{t}\times n_\mathrm{t}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\mathrm{U}^\mathrm{s} & 0_{n_\mathrm{s}\times 3} \\ \dot{\mathrm{U}}^\mathrm{s}_{\mathrm{V}^\mathrm{s}} - \dot{\mathrm{U}}^\mathrm{s}_{\mathbf{v}_\mathrm{u}} & -\mathrm{U}^\mathrm{s} \\ -\mathrm{U}^\mathrm{t} & 0_{n_\mathrm{t}\times 3} \end{bmatrix}, \tag{4.35}$$

missä D on annettu määritelmässä 4.1, U^s on matriisi, joka sisältää yksikkövektorit priori-paikan odotusarvosta satelliitteihin (4.17). U^t on samanlainen matriisi kuin U^s paitsi että yksikkövektorit, joista matriisi koostuu, ovat priori-paikan odotusarvosta tukiasemiin. Matriisit 0 ovat sopivan kokoisia nollamatriiseja ja $\dot{\mathrm{U}}^\mathrm{s}_{\mathbf{v}_\mathrm{u}}$ on vektorin $\mathrm{U}^\mathrm{s}\mathbf{v}_\mathrm{u}$ derivaatta paikan suhteen. Sen laskemisessa on käytetty hyödyksi apulauseen 4.2 Hessen matriisia,

$$\dot{\mathrm{U}}^\mathrm{s}_{\mathbf{v}_\mathrm{u}} = \begin{bmatrix} -\mathbf{v}_\mathrm{u}^T \mathrm{H}^{e_i}_{\|\mathbf{r}^\mathrm{s}_1-\mathbf{r}_\mathrm{u}\|} \\ \vdots \\ -\mathbf{v}_\mathrm{u}^T \mathrm{H}^{e_i}_{\|\mathbf{r}^\mathrm{s}_{n_\mathrm{s}}-\mathbf{r}_\mathrm{u}\|} \end{bmatrix}, \tag{4.36}$$

missä $\mathbf{r}_\mathrm{u}$ on priori-paikan odotusarvo, $\mathbf{v}_\mathrm{u}$ on priori-nopeuden odotusarvo ja $\mathbf{r}^\mathrm{s}_i$ on i. satelliitin paikkavektori. Matriisi $\mathrm{H}^{e_i}_{\|\mathbf{r}^\mathrm{s}_i-\mathbf{r}_\mathrm{u}\|}$ on normin $\|\mathbf{r}^\mathrm{s}_i - \mathbf{r}_\mathrm{u}\|$ Hessen matriisi paikan $\mathbf{r}_\mathrm{u}$ suhteen:

$$\mathrm{H}^{e_i}_{\|\mathbf{r}^\mathrm{s}_i-\mathbf{r}_\mathrm{u}\|} = \frac{1}{\|\mathbf{r}^\mathrm{s}_i - \mathbf{r}_\mathrm{u}\|}\left(\mathrm{I} - \frac{(\mathbf{r}^\mathrm{s}_i - \mathbf{r}_\mathrm{u})}{\|\mathbf{r}^\mathrm{s}_i - \mathbf{r}_\mathrm{u}\|}\frac{(\mathbf{r}^\mathrm{s}_i - \mathbf{r}_\mathrm{u})^T}{\|\mathbf{r}^\mathrm{s}_i - \mathbf{r}_\mathrm{u}\|}\right). \tag{4.37}$$

Matriisi $\dot{\mathrm{U}}^\mathrm{s}_{\mathrm{V}^\mathrm{s}}$ on vektorin $\mathrm{diag}(\mathrm{U}^\mathrm{s}(\mathrm{V}^\mathrm{s})^T)$ derivaatta paikan suhteen ja sen laskemisessa on käytetty hyödyksi vektorin $\mathrm{U}^\mathrm{s}\mathbf{v}_\mathrm{u}$ derivaattaa, kaava (4.36):

$$\dot{\mathrm{U}}^\mathrm{s}_{\mathrm{V}^\mathrm{s}} = \begin{bmatrix} -(\mathbf{v}^\mathrm{s}_1)^T \mathrm{H}^{e_i}_{\|\mathbf{r}^\mathrm{s}_1-\mathbf{r}_\mathrm{u}\|} \\ \vdots \\ -(\mathbf{v}^\mathrm{s}_{n_\mathrm{s}})^T \mathrm{H}^{e_i}_{\|\mathbf{r}^\mathrm{s}_{n_\mathrm{s}}-\mathbf{r}_\mathrm{u}\|} \end{bmatrix}, \tag{4.38}$$

missä $\mathbf{v}^\mathrm{s}_i$ on i. satelliitin nopeus. Usein matriisit $\dot{\mathrm{U}}^\mathrm{s}_{\mathbf{v}_\mathrm{u}}$ ja $\dot{\mathrm{U}}^\mathrm{s}_{\mathrm{V}^\mathrm{s}}$ ovat normiltaan hyvin pieniä, koska jakajassa oleva etäisyys satelliittiin on yli 20 000 km (kappale 3.1).

Mittausvirheen $\mathbf{v}_k$ kovarianssimatriisi voidaan laskea kaavan (4.26) ja kovarianssimatriisioperaattorin ominaisuuksien avulla [Pohjavirta&Ruohonen 2004, s.43]:

$$\mathrm{R}_k = \mathrm{V}(\mathbf{v}_k) = \begin{bmatrix} \mathrm{D} & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{D} & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{I}_{n_\mathrm{t}\times n_\mathrm{t}} \end{bmatrix} \mathrm{V}\left(\begin{bmatrix} \boldsymbol{\epsilon}^\mathrm{s}_\rho \\ \boldsymbol{\epsilon}^\mathrm{s}_{\dot{\rho}} \\ \boldsymbol{\epsilon}^\mathrm{t}_\rho \end{bmatrix}\right) \begin{bmatrix} \mathrm{D} & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{D} & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{I}_{n_\mathrm{t}\times n_\mathrm{t}} \end{bmatrix}^T, \tag{4.39}$$

missä $\mathrm{V}\left(\begin{bmatrix} \boldsymbol{\epsilon}^\mathrm{s}_\rho \\ \boldsymbol{\epsilon}^\mathrm{s}_{\dot{\rho}} \\ \boldsymbol{\epsilon}^\mathrm{t}_\rho \end{bmatrix}\right)$ on mittauksien yhteiskovarianssimatriisi.

4.3 Toisen asteen laajennettu Kalmanin suodatin

Toisen asteen laajennettua Kalmanin suodatinta on käsitelty kappaleessa 2.3.2. EKF2:n algoritmi on annettu tiiviissä muodossa liitteessä B. Sovellettaessa toisen asteen laajennettua Kalmanin suodatinta paikannukseen tarvitaan käyttäjän tilamalli, jota on käsitelty kappaleessa 4.1 kaava (4.6), ja mittausmalli, joka on sama kuin EKF:lla. EKF:ta on käsitelty kappaleessa 4.2. EKF:n, samoin kuin EKF2:n, mittausmalli on annettu kaavassa (4.27). Mittausfunktion derivaatta H_k on annettu kaavassa (4.35) ja mittausmallin virheen kovarianssimatriisi R_k on annettu kaavassa (4.39). Koska tilamalli on lineaarinen, niin epälineaarisuutta ilmenee vain mittausmallissa, jolloin EKF2 on hieman yksinkertaisempi laskea. Edellä olevien tietojen lisäksi EKF2:sen soveltamiseen paikannukseen tarvitaan enää tilamallissa olevan mittausfunktion (4.25) komponenttien Hessen matriisit. Lasketaan nämä Hessen matriisit. Koska derivointi on lineaarinen operaattori, niin mittausfunktion komponenttien Hessen matriisin laskemiseen riittää määrittää vektorin

$$\check{\mathbf{h}}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \mathbf{h}_\rho^{\mathrm{s}}(\mathbf{r}_{\mathrm{u}}) \\ \mathrm{diag}(\mathrm{U}^{\mathrm{s}}(\mathrm{V}^{\mathrm{s}})^T) - \mathrm{U}^{\mathrm{s}}\mathbf{v}_{\mathrm{u}} \\ \mathbf{h}_\rho^{\mathrm{t}}(\mathbf{r}_{\mathrm{u}}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \|\mathbf{r}_1^{\mathrm{s}} - \mathbf{r}_{\mathrm{u}}\| \\ \vdots \\ \|\mathbf{r}_{n_{\mathrm{s}}}^{\mathrm{s}} - \mathbf{r}_{\mathrm{u}}\| \\ \frac{(\mathbf{v}_1^{\mathrm{s}}-\mathbf{v}_{\mathrm{u}})^T(\mathbf{r}_1^{\mathrm{s}}-\mathbf{r}_{\mathrm{u}})}{\|\mathbf{r}_1^{\mathrm{s}}-\mathbf{r}_{\mathrm{u}}\|} \\ \vdots \\ \frac{(\mathbf{v}_{n_{\mathrm{s}}}^{\mathrm{s}}-\mathbf{v}_{\mathrm{u}})^T(\mathbf{r}_{n_{\mathrm{s}}}^{\mathrm{s}}-\mathbf{r}_{\mathrm{u}})}{\|\mathbf{r}_{n_{\mathrm{s}}}^{\mathrm{s}}-\mathbf{r}_{\mathrm{u}}\|} \\ \|\mathbf{r}_1^{\mathrm{t}} - \mathbf{r}_{\mathrm{u}}\| \\ \vdots \\ \|\mathbf{r}_{n_{\mathrm{t}}}^{\mathrm{t}} - \mathbf{r}_{\mathrm{u}}\| \end{bmatrix} \tag{4.40}$$

komponenttien Hessen matriisit. Muuttujana $\mathbf{x}$ on käyttäjän tila (4.1). Merkitään vektorin $\check{\mathbf{h}}(\mathbf{x})$ i. komponentin Hessen matriisia $\mathrm{H}^{e_i}_{\check{\mathbf{h}}(\mathbf{x})}$. Vektorin alku- ja loppupään etäisyysmittauksien Hessen matriisit voidaan laskea suoraan käyttäen apulausetta 4.2 (katso myös kaava (4.37)), jolloin saadaan

$$\mathrm{H}^{e_i}_{\check{\mathbf{h}}(\mathbf{x})} = \begin{bmatrix} \mathrm{H}^{e_i}_{\|\mathbf{r}_i^{\mathrm{s}}-\mathbf{r}_{\mathrm{u}}\|} & 0_{3\times 3} \\ 0_{3\times 3} & 0_{3\times 3} \end{bmatrix}, \text{ kun } i = 1, \ldots, n_{\mathrm{s}}, \tag{4.41}$$

$$\mathrm{H}^{e_i}_{\check{\mathbf{h}}(\mathbf{x})} = \begin{bmatrix} \mathrm{H}^{e_i}_{\|\mathbf{r}_i^{\mathrm{t}}-\mathbf{r}_{\mathrm{u}}\|} & 0_{3\times 3} \\ 0_{3\times 3} & 0_{3\times 3} \end{bmatrix}, \text{ kun } i - 2n_{\mathrm{s}} = 1, \ldots, n_{\mathrm{t}}, \tag{4.42}$$

missä $\mathrm{H}^{e_i}_{\|\mathbf{r}_i^{\mathrm{s}}-\mathbf{r}_{\mathrm{u}}\|}$ on normin $\|\mathbf{r}_i^{\mathrm{s}} - \mathbf{r}_{\mathrm{u}}\|$ Hessen matriisi paikan $\mathbf{r}_{\mathrm{u}}$ suhteen (4.37) ja $\mathrm{H}^{e_i}_{\|\mathbf{r}_i^{\mathrm{t}}-\mathbf{r}_{\mathrm{u}}\|}$ on normin $\|\mathbf{r}_i^{\mathrm{t}} - \mathbf{r}_{\mathrm{u}}\|$ Hessen matriisi paikan $\mathbf{r}_{\mathrm{u}}$ suhteen. Keskivaiheen pseudoetäisyyksien derivaattamittauksien Hessen matriisista voidaan laskea vastaavasti kuin yllä kaikki muut paitsi kyseisten mittauksien Hessen matriisia paikan suhteen, joka on annettu kaavassa (4.45),

$$\mathrm{H}^{e_i}_{\check{\mathbf{h}}(\mathbf{x})} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_{\mathrm{u}}}\left(\mathrm{H}^{e_i}_{\|\mathbf{r}_i^{\mathrm{s}}-\mathbf{r}_{\mathrm{u}}\|}(\mathbf{v}_{\mathrm{u}} - \mathbf{v}_i^{\mathrm{s}})\right) & \mathrm{H}^{e_i}_{\|\mathbf{r}_i^{\mathrm{s}}-\mathbf{r}_{\mathrm{u}}\|} \\ \mathrm{H}^{e_i}_{\|\mathbf{r}_i^{\mathrm{s}}-\mathbf{r}_{\mathrm{u}}\|} & 0_{3\times 3} \end{bmatrix}, \text{ kun } i - n_{\mathrm{s}} = 1, \ldots, n_{\mathrm{s}}. \tag{4.43}$$

Pseudoetäisyyksien derivaattamittauksien Hessen matriisi paikan suhteen $\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_\mathrm{u}}\big(\mathrm{H}^{e_i}_{\|\mathbf{r}^\mathrm{s}_i-\mathbf{r}_\mathrm{u}\|}(\mathbf{v}_\mathrm{u} - \mathbf{v}^\mathrm{s}_i)\big)$ voidaan laskea käyttäen apuna derivaattaoperaattorin lineaarisuutta, apulausetta 4.2, ketjusääntöä ja etäisyysmittauksen käänteisluvun derivaattaa

$$\frac{d}{d\mathbf{x}}\frac{1}{\|\mathbf{a}-\mathbf{x}\|} = -\frac{1}{\|\mathbf{a}-\mathbf{x}\|^2}\frac{(\mathbf{x}-\mathbf{a})^T}{\|\mathbf{a}-\mathbf{x}\|} = \frac{(\mathbf{a}-\mathbf{x})^T}{\|\mathbf{a}-\mathbf{x}\|^3}. \tag{4.44}$$

Etäisyysmittauksen käänteisluvun derivaatan laskemisessa käytettiin hyväksi yhdistetyn funktion derivaattaa ja apulausetta 4.2. Kyseinen Hessen matriisi on

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_\mathrm{u}}\big(\mathrm{H}^{e_i}_{\|\mathbf{r}^\mathrm{s}_i-\mathbf{r}_\mathrm{u}\|}(\mathbf{v}_\mathrm{u} - \mathbf{v}^\mathrm{s}_i)\big) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_\mathrm{u}}\left(\frac{1}{\|\mathbf{r}^\mathrm{s}_i-\mathbf{r}_\mathrm{u}\|}\left(\mathrm{I} - \frac{(\mathbf{r}^\mathrm{s}_i-\mathbf{r}_\mathrm{u})}{\|\mathbf{r}^\mathrm{s}_i-\mathbf{r}_\mathrm{u}\|}\frac{(\mathbf{r}^\mathrm{s}_i-\mathbf{r}_\mathrm{u})^T}{\|\mathbf{r}^\mathrm{s}_i-\mathbf{r}_\mathrm{u}\|}\right)(\mathbf{v}_\mathrm{u} - \mathbf{v}^\mathrm{s}_i)\right)\\
&= \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_\mathrm{u}}\left(\frac{\mathbf{v}_\mathrm{u} - \mathbf{v}^\mathrm{s}_i}{\|\mathbf{r}^\mathrm{s}_i-\mathbf{r}_\mathrm{u}\|} - \frac{(\mathbf{r}^\mathrm{s}_i-\mathbf{r}_\mathrm{u})}{\|\mathbf{r}^\mathrm{s}_i-\mathbf{r}_\mathrm{u}\|}\frac{(\mathbf{v}_\mathrm{u} - \mathbf{v}^\mathrm{s}_i)^T(\mathbf{r}^\mathrm{s}_i-\mathbf{r}_\mathrm{u})}{\|\mathbf{r}^\mathrm{s}_i-\mathbf{r}_\mathrm{u}\|^2}\right)\\
&= \frac{\mathbf{v}_{\mathrm{u}-i^\mathrm{s}}\mathbf{u}^{\mathrm{s}T}_i}{\|\mathbf{r}^\mathrm{s}_i-\mathbf{r}_\mathrm{u}\|^2} + \mathrm{H}^{e_i}_{\|\mathbf{r}^\mathrm{s}_i-\mathbf{r}_\mathrm{u}\|}\frac{\mathbf{v}^T_{\mathrm{u}-i^\mathrm{s}}\mathbf{u}^\mathrm{s}_i}{\|\mathbf{r}^\mathrm{s}_i-\mathbf{r}_\mathrm{u}\|} - \mathbf{u}^\mathrm{s}_i\mathbf{v}^T_{\mathrm{u}-i^\mathrm{s}}\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_\mathrm{u}}\left(\frac{\mathbf{r}^\mathrm{s}_i-\mathbf{r}_\mathrm{u}}{\|\mathbf{r}^\mathrm{s}_i-\mathbf{r}_\mathrm{u}\|}\frac{1}{\|\mathbf{r}^\mathrm{s}_i-\mathbf{r}_\mathrm{u}\|}\right)\\
&= \frac{\mathbf{v}_{\mathrm{u}-i^\mathrm{s}}\mathbf{u}^{\mathrm{s}T}_i}{\|\mathbf{r}^\mathrm{s}_i-\mathbf{r}_\mathrm{u}\|^2} + \mathrm{H}^{e_i}_{\|\mathbf{r}^\mathrm{s}_i-\mathbf{r}_\mathrm{u}\|}\frac{\mathbf{v}^T_{\mathrm{u}-i^\mathrm{s}}\mathbf{u}^\mathrm{s}_i}{\|\mathbf{r}^\mathrm{s}_i-\mathbf{r}_\mathrm{u}\|} + \mathbf{u}^\mathrm{s}_i\mathbf{v}^T_{\mathrm{u}-i^\mathrm{s}}\left(\mathrm{H}^{e_i}_{\|\mathbf{r}^\mathrm{s}_i-\mathbf{r}_\mathrm{u}\|}\frac{1}{\|\mathbf{r}^\mathrm{s}_i-\mathbf{r}_\mathrm{u}\|} - \frac{\mathbf{u}^\mathrm{s}_i\mathbf{u}^{\mathrm{s}T}_i}{\|\mathbf{r}^\mathrm{s}_i-\mathbf{r}_\mathrm{u}\|^2}\right)\\
&= \frac{\mathbf{v}_{\mathrm{u}-i^\mathrm{s}}\mathbf{u}^{\mathrm{s}T}_i + (\mathrm{I} - \mathbf{u}^\mathrm{s}_i\mathbf{u}^{\mathrm{s}T}_i)\mathbf{v}^T_{\mathrm{u}-i^\mathrm{s}}\mathbf{u}^\mathrm{s}_i + \mathbf{u}^\mathrm{s}_i\mathbf{v}^T_{\mathrm{u}-i^\mathrm{s}}(\mathrm{I} - 2\mathbf{u}^\mathrm{s}_i\mathbf{u}^{\mathrm{s}T}_i)}{\|\mathbf{r}^\mathrm{s}_i-\mathbf{r}_\mathrm{u}\|^2},
\end{aligned} \tag{4.45}$$

missä käyttäjän ja i. satelliitin nopeuksien erotus on $\mathbf{v}_\mathrm{u} - \mathbf{v}^\mathrm{s}_i \overset{merk.}{=} \mathbf{v}_{\mathrm{u}-i^\mathrm{s}}$ ja yksikkövektori käyttäjästä i. satellittiin on $\mathbf{u}^\mathrm{s}_i$ (kaava (4.16)).

Näin ollen on saatu laskettua vektorin $\check{\mathbf{h}}(\mathbf{x})$ komponenttien Hessen matriisit (kaavat (4.41), (4.42) ja (4.43)). Nämä kaikki Hessen matriisit lasketaan prioritilan odotusarvossa, tällöin $\mathbf{r}_\mathrm{u}$ on prioripaikan odotusarvo ja $\mathbf{v}_\mathrm{u}$ on priorinopeuden odotusarvo. Näiden avulla voidaan laskea mittausfunktion (4.25) komponenttien Hessen matriisit laskemalla yllä olevia Hessen matriiseja yhteen painottamalla niitä määräytyvillä kertoimilla.

4.3.1 Epälineaarisuus satelliittimittauksissa

Tarkastellaan, milloin tämän työn sovelluksessa tulisi käyttää EKF2:ta eikä EKF:ta satelliittimittausten tapauksessa. Tässä työssä vain mittausmalli on epälineaarinen, jonka vuoksi riittää testata milloin kaava (2.78) toteutuu. Tarkastellaan aluksi tilannetta, jossa on vain yksi mittaus, tällöin kaava (2.78) tulee muotoon

$$\mathrm{tr}(\mathrm{H}^{e_i}\hat{\mathrm{P}}^-\mathrm{H}^{e_i}\hat{\mathrm{P}}^-) \gtrsim \mathrm{R}, \tag{4.46}$$

missä H^{e_i} on kyseisen mittauksen Hessen matriisi, $\hat{\mathrm{P}}^-$ on priori-tilan kovarianssimatriisi ja R on mittauksen varianssi (skalaari). Näytetään ensin tietyin oletuksin, että satelliittimittausten tapauksessa kaava (4.46) ei toteudu ja edelleen myöskään kaava (2.78) ei toteudu, vaikka mittauksia olisi enemmän kuin yksi. Näyttämisessä

käytetään differenssikuvausmatriisia $\mathrm{D}_1 = \begin{bmatrix} \mathrm{I} & -\mathbf{1} \end{bmatrix}$, jota käytetään myös työn simulaatioissa. Arvioidaan yhden satelliittimittauksen tapauksessa kaavan (4.46) vasemman puolen itseisarvoa. Jälki-operaattorin (tr) lineaarisuuden [Hubbard&Hubbard 1999, s.418], kolmioepäyhtälön ja ominaisuuden $\mathrm{tr}(\mathrm{AB}) = \mathrm{tr}(\mathrm{BA})$ [Hubbard&Hubbard 1999, s.420] mukaan

$$|\mathrm{tr}(\mathrm{H}^{e_i}\hat{\mathrm{P}}^{-}\mathrm{H}^{e_i}\hat{\mathrm{P}}^{-})| \leq 4|\mathrm{tr}(\mathrm{H}^{e_i}_{\check{\mathbf{h}}(\mathbf{x})}\hat{\mathrm{P}}^{-}\mathrm{H}^{e_j}_{\check{\mathbf{h}}(\mathbf{x})}\hat{\mathrm{P}}^{-})|, \tag{4.47}$$

missä $\mathrm{H}^{e_i}_{\check{\mathbf{h}}(\mathbf{x})}$ on vektorin $\check{\mathbf{h}}(\mathbf{x})$ (4.40) i. komponentin Hessen matriisi ja molemmat komponentit i ja j esittävät joko satelliittien etäisyysmittauksia tai satelliittien etäisyyksien derivaattamittauksia. Arvioidaan kaavan (4.47) oikeata puolta ylöspäin matriisin normin avulla. Matriisin A normi on $\|A\| = \max_{\|\mathbf{x}\|=1}\|\mathrm{A}\mathbf{x}\|$, missä oikealla puolella on tavallinen vektorinormi. Kun valitaan $\mathbf{x} = \mathbf{e}_i$, niin $\mathrm{A}_{ii} \leq \|\mathrm{A}\mathbf{e}_i\| \leq \|A\|$, missä A_{ii} on matriisin A i. diagonaalialkio. Tällöin

$$4|\mathrm{tr}(\mathrm{H}^{e_i}_{\check{\mathbf{h}}(\mathbf{x})}\hat{\mathrm{P}}^{-}\mathrm{H}^{e_j}_{\check{\mathbf{h}}(\mathbf{x})}\hat{\mathrm{P}}^{-})| \leq 24\|\mathrm{H}^{e_i}_{\check{\mathbf{h}}(\mathbf{x})}\hat{\mathrm{P}}^{-}\mathrm{H}^{e_j}_{\check{\mathbf{h}}(\mathbf{x})}\hat{\mathrm{P}}^{-}\|. \tag{4.48}$$

Matriisinormilla on ominaisuus $\|\mathrm{AB}\| \leq \|\mathrm{A}\|\|\mathrm{B}\|$, lisäksi symmetrisen matriisin normi on suurin sen ominaisarvojen itseisarvoista [Perttula 1999b, s.109]. Olkoon kovarianssimatriisin $\hat{\mathrm{P}}^{-}$ suurin ominaisarvo $\lambda^{\hat{\mathrm{P}}^{-}}_{\max}$, joka on myös ominaisarvojen suurin itseisarvo, koska matriisi $\hat{\mathrm{P}}^{-}$ on positiivisesti semidefiniitti. Näiden perusteella voidaan arvioida

$$24\|\mathrm{H}^{e_i}_{\check{\mathbf{h}}(\mathbf{x})}\hat{\mathrm{P}}^{-}\mathrm{H}^{e_j}_{\check{\mathbf{h}}(\mathbf{x})}\hat{\mathrm{P}}^{-}\| \leq 24(\lambda^{\hat{\mathrm{P}}^{-}}_{\max})^2\|\mathrm{H}^{e_i}_{\check{\mathbf{h}}(\mathbf{x})}\|\|\mathrm{H}^{e_j}_{\check{\mathbf{h}}(\mathbf{x})}\|. \tag{4.49}$$

Tehtävänä on vielä arvioida Hessen matriisin $\mathrm{H}^{e_i}_{\check{\mathbf{h}}(\mathbf{x})}$ ominaisarvoja satelliittimittauksilla ($i = 1, \ldots, 2n_\mathrm{s}$).

Satelliitin pseudoetäisyysmittaus

Jos kyseessä on satelliitin pseudoetäisyysmittaus niin $\mathrm{H}^{e_i}_{\check{\mathbf{h}}(\mathbf{x})}$, kun $i = 1, \ldots, n_\mathrm{s}$, on annettu kaavassa (4.41). Koska matriisin $\mathbf{u}^\mathrm{s}_i\mathbf{u}^{\mathrm{s}T}_i$ pystyriviavaruuden dimensio on yksi niin $\frac{1}{\|\mathbf{r}^\mathrm{s}_i - \mathbf{r}_\mathrm{u}\|}$ on ainakin kaksinkertainen ominaisarvo matriisille $\mathrm{H}^{e_i}_{\check{\mathbf{h}}(\mathbf{x})}$, kun $i = 1, \ldots, n_\mathrm{s}$. Toisaalta nolla on selvästi ainakin kolmen kertainen ominaisarvo matriisille $\mathrm{H}^{e_i}_{\check{\mathbf{h}}(\mathbf{x})}$, kun $i = 1, \ldots, n_\mathrm{s}$. Koska lisäksi ominaisarvojen summa on $\mathrm{tr}(\mathrm{H}^{e_i}_{\check{\mathbf{h}}(\mathbf{x})}) = \frac{2}{\|\mathbf{r}^\mathrm{s}_i - \mathbf{r}_\mathrm{u}\|}$ [Perttula 1999b, s.90], niin matriisin $\mathrm{H}^{e_i}_{\check{\mathbf{h}}(\mathbf{x})}$, kun $i = 1, \ldots, n_\mathrm{s}$, ominaisarvot ovat

$$\left\{ \frac{1}{\|\mathbf{r}^\mathrm{s}_i - \mathbf{r}_\mathrm{u}\|} \quad \frac{1}{\|\mathbf{r}^\mathrm{s}_i - \mathbf{r}_\mathrm{u}\|} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \right\}. \tag{4.50}$$

Tällöin kaavojen (4.47), (4.48) ja (4.49) mukaan

$$|\mathrm{tr}(\mathrm{H}^{e_i}\hat{\mathrm{P}}^{-}\mathrm{H}^{e_i}\hat{\mathrm{P}}^{-})| \leq 24\frac{(\lambda^{\hat{\mathrm{P}}^{-}}_{\max})^2}{\|\mathbf{r}^\mathrm{s}_i - \mathbf{r}_\mathrm{u}\|^2}, \quad \text{kun } i = 1, \ldots, n_\mathrm{s}. \tag{4.51}$$

Tällöin kyseessä on satelliittien pseudoetäisyysmittaukset. Satelliittien etäisyys on ainakin $2 \cdot 10^7$ (kappale 3.1, käsiteltävät suureet ovat SI-yksiköissä) ja paikannuksessa

$\hat{\mathrm{P}}^-$ suurin ominaisarvo $\lambda_{\max}^{\hat{\mathrm{P}}^-}$ on yleensä alle 100^2. Oletetaan, että $\lambda_{\max}^{\hat{\mathrm{P}}^-} \leq 1 \cdot 10^5$, tällöin kaava (4.51) tulee muotoon

$$|\mathrm{tr}(\mathrm{H}^{e_i}\hat{\mathrm{P}}^-\mathrm{H}^{e_i}\hat{\mathrm{P}}^-)| \leq 24\frac{(1 \cdot 10^5)^2}{(2 \cdot 10^7)^2} = 6 \cdot 10^{-4}, \quad \text{kun } i = 1, \ldots, n_\mathrm{s}. \tag{4.52}$$

Koska R on vähintään 5^2 (kappale 3.1.2) niin kaava (4.46) ei toteudu, joten yhdessä satelliittien pseudoetäisyyksien differenssimittauksessa epälineaarisuus on niin pientä, ettei EKF2:n tulokset juurikaan poikkea EKF:n tuloksista. Arvioidaan seuraavaksi yhden pseudoetäisyysderivaatan differenssimittauksen epälineaarisuutta.

Apulause 4.3. *Olkoon* $\mathbf{e}_i^T\mathrm{A}\mathbf{e}_j = \mathrm{A}_{ij}$ *symmetrisen matriisin* $\mathrm{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *alkio. Oletetaan, että* $|\mathrm{A}_{ij}| \leq c$ *kaikilla indekseillä* i *ja* j*. Tällöin matriisin* A *ominaisarvot* $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ *ovat itseisarvoltaan pienempiä tai yhtäsuuria kuin* nc*.*

Todistus. Käytetään hyväksi tietoa, että $\mathbf{x}_i^T\mathrm{A}\mathbf{x}_i = \lambda_i$, missä $\mathbf{x}_i$ on ominaisarvoa λ_i vastaava normalisoitu ominaisvektori [Perttula 1999b, s.101]. Nyt riittää näyttää, että $|\mathbf{x}^T\mathrm{A}\mathbf{x}| \leq nc$, mielivaltaiselle yksikkövektorille $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ (symmetrisen reaalimatriisin ominaisvektorit voidaan valita reaalisiksi [Perttula 1999b, s.94]). Mielivaltainen $\mathbf{x}$ voidaan kirjoittaa karteesisten kantavektoreiden avulla

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i\mathbf{e}_i. \tag{4.53}$$

Tällöin kolmioepäyhtälön ja Schwarzin [Hubbard&Hubbard 1999, s.62] epäyhtälön mukaan

$$\begin{aligned} |\mathbf{x}^T\mathrm{A}\mathbf{x}| &= |\Big(\sum_{i=1}^{n} x_i\mathbf{e}_i\Big)^T\mathrm{A}\Big(\sum_{j=1}^{n} x_j\mathbf{e}_j\Big)| = |\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\Big(x_ix_j\mathrm{A}_{ij}\Big)| \\ &\leq \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\Big(|x_i||x_j||\mathrm{A}_{ij}|\Big) \leq c\Big(\sum_{i=1}^{n}|x_i|\Big)\Big(\sum_{j=1}^{n}|x_j|\Big) \\ &\leq c(\mathbf{1}_\pm^T\mathbf{x})^2 \leq c\|\mathbf{1}_\pm\|^2\|\mathbf{x}\|^2 \leq nc, \end{aligned} \tag{4.54}$$

missä vektorin $\mathbf{1}_\pm \in \mathbb{R}^n$ i. alkio on $+1$ jos $x_i \geq 0$ muutoin i. alkio on -1. □

Apulause 4.3 ei anna aivan tarkkaa ylärajaa matriisin normille mikäli matriisissa on erikokoisia alkioita, mutta kertaluokka on oikea ja tässä työssä kyseinen raja on aivan riittävä (eräs tarkempi raja on $\|\mathrm{A}\| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\mathrm{A}_{ij}^2}$ [Hubbard&Hubbard 1999, s.214]).

Satelliitin pseudoetäisyyden derivaattamittaus

Kun kyseessä on satelliitin pseudoetäisyyden derivaattamittaus niin $\mathrm{H}^{e_i}_{\check{\mathbf{h}}(\mathbf{x})}$, kun $i - n_\mathrm{s} = 1, \ldots, n_\mathrm{s}$, on annettu kaavassa (4.43). Matriisin $\mathrm{H}^{e_i}_{\|\mathbf{r}_i^\mathrm{s}-\mathbf{r}_\mathrm{u}\|}$ (4.37) jokainen alkio

on itseisarvoltaan pienempi tai yhtäsuuri kolmioepäyhtälön mukaan kuin $\frac{2}{\|\mathbf{r}_i^{\mathrm{s}}-\mathbf{r}_{\mathrm{u}}\|}$. Vastaavasti matriisin $\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_{\mathrm{u}}}\big(\mathrm{H}^{e_i}_{\|\mathbf{r}_i^{\mathrm{s}}-\mathbf{r}_{\mathrm{u}}\|}(\mathbf{v}_{\mathrm{u}}-\mathbf{v}_i^{\mathrm{s}})\big)$ (4.45) jokainen alkio on itseisarvoltaan pienempi tai yhtäsuuri kuin $\frac{12(\|\mathbf{v}_{\mathrm{u}}\|+\|\mathbf{v}^{\mathrm{s}}_{\max}\|)}{\|\mathbf{r}_i^{\mathrm{s}}-\mathbf{r}_{\mathrm{u}}\|^2}$, missä $\|\mathbf{v}^{\mathrm{s}}_{\max}\|$ on satelliittien maksiminopeus. $\|\mathbf{v}^{\mathrm{s}}_{\max}\| \approx 4\,000$ (kappale 3.1, käsiteltävät suureet SI-yksiköissä) ja käyttäjän nopeus oletetaan tätä pienemmäksi, joten matriisin $\mathrm{H}^{e_i}_{\check{\mathbf{h}}(\mathbf{x})}$, kun $i-n_{\mathrm{s}}=1,\ldots,n_{\mathrm{s}}$, jokainen alkio on itseisarvoltaan pienempi tai yhtäsuuri kuin $\frac{2}{\|\mathbf{r}_i^{\mathrm{s}}-\mathbf{r}_{\mathrm{u}}\|}$, apulauseen 4.3 ja kaavojen (4.47), (4.48), (4.49) mukaan ($i-n_{\mathrm{s}}=1,\ldots,n_{\mathrm{s}}$, jolloin kyseessä on yhdestä pseudoetäisyyksien derivaattojen differenssimittauksesta)

$$|\mathrm{tr}(\mathrm{H}^{e_i}\hat{\mathrm{P}}^{-}\mathrm{H}^{e_i}\hat{\mathrm{P}}^{-})| \leq 3456\frac{(\lambda^{\hat{\mathrm{P}}^-}_{\max})^2}{\|\mathbf{r}_i^{\mathrm{s}}-\mathbf{r}_{\mathrm{u}}\|^2} = \begin{cases} 8{,}6\cdot 10^{-4}, & \text{kun } \lambda^{\hat{\mathrm{P}}^-}_{\max}=100^2 \\ 8{,}6\cdot 10^{-2}, & \text{kun } \lambda^{\hat{\mathrm{P}}^-}_{\max}=316^2 \end{cases}. \tag{4.55}$$

Koska R on noin 10^{-2} (kappale 3.1.2) niin kaava (4.46) ei toteudu, jos $\lambda^{\hat{\mathrm{P}}^-}_{\max} \lesssim 100^2$. Tämä tilanne on erittäin yleinen mikäli lyhyellä aikavälillä (esimerkiksi kymmenen sekunnin sisällä) on saatu neljältä eri satelliittilta mittauksia. Tällöin epälineaarisuus on niin pientä myös pseudoetäisyyksien derivaattojen differenssimittauksessa, ettei EKF2:n tulokset juurikaan poikkea EKF:n tuloksista. Toisaalta kaava (4.46) toteutuu, jos $\lambda^{\hat{\mathrm{P}}^-}_{\max} \gtrsim 316^2$. Tälläinen tilanne on mahdollinen, mikäli esimerkiksi suodattimen priori-tila muodostuu pelkästään tukiaseman solutunnisteen perusteella. Tällöin epälineaarisuus on huomattavaa ja EKF2:n tulokset ovat luotettavampia kuin EKF:n.

Nyt on käsitelty satelliittidifferenssimittauksien epälineaarisuutta yhden satelliittin differenssimittauksessa yhdellä ajanhetkellä. Laajennus useampiin satelliittidifferenssimittauksiin on suoraviivainen apulauseen 4.3 mukaan. Tarkoitus on arvioida matriisin

$$\sum_{i=1}^{n_y}\sum_{j=1}^{n_y}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j^T\,\mathrm{tr}(\mathrm{H}_k^{e_i}\hat{\mathrm{P}}_k^{-}\mathrm{H}_k^{e_j}\hat{\mathrm{P}}_k^{-}) \tag{4.56}$$

ominaisarvoja (n_y on mittauksien lukumäärä). Matriisin jokainen ominaisarvo on itseisarvoltaan pienempi tai yhtäsuuri kuin $n_y 3456\frac{(\lambda^{\hat{\mathrm{P}}^-}_{\max})^2}{\|\mathbf{r}_i^{\mathrm{s}}-\mathbf{r}_{\mathrm{u}}\|^2}$ (apulauseen 4.3 ja kaavojen (4.51), (4.55) mukaan). Tässä työssä mittauksia on lähes poikkeuksetta alle kymmenen, jolloin EKF2:n tarvetta arvioitaessa päästään samoihin lopputuloksiin kuin kaavan (4.55) perusteella. Yhteenvetona EKF2:n käyttämisessä satelliittimittauksilla voidaan todeta, että EKF2:n tulokset eivät poikkea huomattavasti EKF:n tuloksista, mikäli priori-tilan kovarianssimatriisin ominaisarvojen neliöjuuret ovat alle 100. Toisaalta mikäli nämä arvot ovat selvästi yli 200 niin EKF2:n voisi tuottaa parempia tuloksia tarkkojen pseudoetäisyyksien derivaattamittausten kanssa. Tässä työssä ei tutkita EKF2:ta simulaatioilla satelliittimittauksien osalta, vaan satelliittimittausten mittausfunktiot käsitellään kuten EKF:ssa, myös simulaatioiden EKF2:ssa (luku 5).

4.3.2 Epälineaarisuus tukiasemamittauksissa

Tarkastellaan, milloin tämän työn sovelluksessa tulisi käyttää EKF2:ta eikä EKF:ta, tukiasemamittausten tapauksessa. Havaitaan, että lähes poikkeuksetta tuki-

asemamittauksissa on huomattavaa epälineaarisuutta. Edellisen kohdan, erityisesti kaavojen (4.48), (4.49) ja (4.51) mukaan

$$|\mathrm{tr}(\mathrm{H}^{e_i}_{\check{\mathbf{h}}(\mathbf{x})}\hat{\mathrm{P}}^{-}\mathrm{H}^{e_i}_{\check{\mathbf{h}}(\mathbf{x})}\hat{\mathrm{P}}^{-})| \leq 6\frac{(\lambda^{\hat{\mathrm{P}}^{-}}_{\max})^2}{\|\mathbf{r}^{\mathrm{t}}_i - \mathbf{r}_{\mathrm{u}}\|^2}, \quad \text{kun } i - 2n_{\mathrm{s}} = 1, \ldots, n_{\mathrm{t}}. \tag{4.57}$$

Jos $\hat{\mathrm{P}}^{-} = \lambda^{\hat{\mathrm{P}}^{-}}_{\max}\mathrm{I}$ (riittää, kun prioripaikan kovarianssimatriisi on kyseisen muotoinen) niin kaavalle (4.57) saadaan alaraja jälki-operaattorin ominaisuuksien, matriisin $\mathrm{H}^{e_i}_{\check{\mathbf{h}}(\mathbf{x})}$ ominaisarvojen (4.50) ja soveltamalla Schurin lausetta matriisiin $\mathrm{H}^{e_i}_{\check{\mathbf{h}}(\mathbf{x})}$ (sivu 26)

$$2\frac{(\lambda^{\hat{\mathrm{P}}^{-}}_{\max})^2}{\|\mathbf{r}^{\mathrm{t}}_i - \mathbf{r}_{\mathrm{u}}\|^2} \leq |\mathrm{tr}(\mathrm{H}^{e_i}_{\check{\mathbf{h}}(\mathbf{x})}\hat{\mathrm{P}}^{-}\mathrm{H}^{e_i}_{\check{\mathbf{h}}(\mathbf{x})}\hat{\mathrm{P}}^{-})| \leq 6\frac{(\lambda^{\hat{\mathrm{P}}^{-}}_{\max})^2}{\|\mathbf{r}^{\mathrm{t}}_i - \mathbf{r}_{\mathrm{u}}\|^2}, \quad \text{kun } i - 2n_{\mathrm{s}} = 1, \ldots, n_{\mathrm{t}}. \tag{4.58}$$

Kaupunkialueella ollaan usein alle 500 metrin päässä tukiasemasta (kappale 3.2) ja mikäli mittauksien sigmat ovat 80 metriä, alimäärätyssä tapauksessa on yleistä, että priorin kovarianssimatrisin ominaisarvot ovat $(\lambda^{\hat{\mathrm{P}}^{-}}_{\max}) = (200\mathrm{m})^2$. Näillä arvoilla kaavan (4.58) alaraja tulee muotoon (SI-yksiköissä)

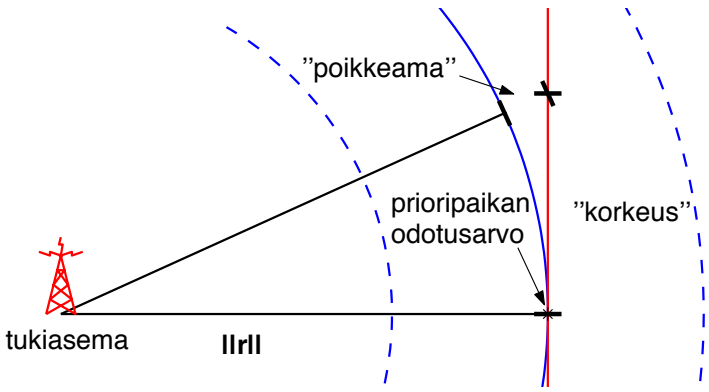
$$80^2 \leq 12800 = 2\frac{(\lambda^{\hat{\mathrm{P}}^{-}}_{\max})^2}{\|\mathbf{r}^{\mathrm{t}}_i - \mathbf{r}_{\mathrm{u}}\|^2} \leq |\mathrm{tr}(\mathrm{H}^{e_i}_{\check{\mathbf{h}}(\mathbf{x})}\hat{\mathrm{P}}^{-}\mathrm{H}^{e_i}_{\check{\mathbf{h}}(\mathbf{x})}\hat{\mathrm{P}}^{-})|, \quad i - 2n_{\mathrm{s}} = 1, \ldots, n_{\mathrm{t}}. \tag{4.59}$$

Näin ollen kaava (4.46) toteutuu hyvin usein tukiasemapaikannuksessa. EKF2:lta voidaan siis hyvin usein olettaa luotettavampia tuloksia kuin EKF:lta, mikäli kyseessä on yksi tukiasemamittaus. Jos tukiasemamittauksia olisi enemmän kuin yksi niin apulauseesta 4.3 seuraa suoraan, että tukiasemamittausten perusteella kootun matriisin (4.56) itseisarvoltaan suurin ominaisarvo on vähintään itseisarvoltaan suurimman diagonaalialkion suuruinen. Diagonaalialkioitten alaraja on annettu kaavassa (4.59). Toisin sanoen EKF2:lta voidaan hyvin olettaa luotettavampia tuloksia kuin EKF:lta, silloinkin kun kyseessä on useampia tukiasemamittauksia. Toisaalta on hyvä huomata, että tilanteissa, joissa on paljon satelliittimittauksia käytettävissä niin priori-tilan kovarianssimatriisin suurin ominaisarvo voi olla luokkaa 10^2. Tällöin kaava (4.46) ei useinkaan toteudu edes tukiasemienetäisyysmittauksien osalta ja kyseisiä mittauksia voi huoletta käyttää EKF:ssa. Tosin näin tarkkaa priori-tilaa epätarkat tukiasemaetäisyysmittaukset eivät juurikaan tarkenna.

Simulaatioissa luvussa 5 verrataan muun muassa EKF:ta ja EKF2:ta. Simulaatioiden EKF2 eroaa EKF:sta vain tukiasemamittausten käsittelyn osalta, joka tehdään kuten edellä esitetyssä EKF2:ssa koska on syytä olettaa, että näin saadaan luotettavampia tuloksia.

4.3.3 Vertailu EKF2 vs. EKF

Vertaillaan EKF2:n ja EKF:n toimintaa kun mittauksena on vain yksi tukiaseman etäisyysmittaus. Kuvassa 4.1 on havainnollistettu kyseinen tilanne. Kuvassa $\|\mathbf{r}\|$ on prioripaikan odotusarvon etäisyys tukiasemasta, yhtenäisen ympyrän säde on $\|\mathbf{r}\|$, katkoviivalla piirretyt ympyröiden säteet ovat $\|\mathbf{r}\| \pm \sqrt{\mathrm{R}}$, missä R on mittausvirheen varianssi



Kuva 4.1: EKF:n ja EKF2:n vertailu

(skalaari), ympyröistä vain osa on näkyvissä. Pystysuora jana kuvaa tasoa, jonka EKF ”muodostaa” linearisoidessa etäisyysmittauksen (kutsutaan tätä mittaustasoksi). EKF:ssa priori-tilan päivitys lasketaan siten, että innovaatiota (mittauksen ja priori-mittauksen erotusta) pidetään suunnistettuna etäisyytenä mittaustasolta. Positiiviset innovaatiot oletetaan sijaitsevan tason oikealla puolella ja negatiiviset tason vasemmalla puolella. Todellisuudessa innovaatio on suunnistettu etäisyys etäisyysmittauksen virittämään palloon, joka on positiivinen pallon ulkopuolella ja negatiivinen pallon sisällä. Ajatellaan, että realisoituneen mittauksen virhe on nolla. Kuvasta huomataan, että EKF:n laskema innovaatio on aina yhtäsuuri tai suurempi kuin paikan todellinen etäisyys mittaustasosta. EKF2:ssa tämä otetaan huomioon siten, että kaikista innovaatioista vähennetään (2.74)

$$\frac{1}{2}\,\mathrm{tr}(\mathrm{H}^{e_1}_{\check{\mathbf{h}}(\mathbf{x})}\hat{\mathrm{P}}^{-}_{k+1}). \tag{4.60}$$

Kuvassa ”korkeus” kuvaa priori-paikan keskimääräistä etäisyyttä priori-paikan odotusarvosta mittaustasolla, arvioidaan tämä arvoksi $\sqrt{2\lambda^{\hat{\mathrm{P}}^-}}$ olettaen, että priori-paikan kovarianssimatriisi on $\lambda^{\hat{\mathrm{P}}^-}\mathrm{I}_{3\times 3}$. Tällöin kaava (4.60) voidaan laskea vastaavasti kuin kaava (4.58) ja saadaan

$$\frac{1}{2}\,\mathrm{tr}(\mathrm{H}^{e_1}_{\check{\mathbf{h}}(\mathbf{x})}\hat{\mathrm{P}}^{-}_{k+1}) = \frac{\lambda^{\hat{\mathrm{P}}^-}}{\|\mathbf{r}\|}. \tag{4.61}$$

Kuvassa oleva ”poikkeama” on suunnilleen kaavan (4.61) suuruinen, koska

$$\text{”poikkeama”} = \sqrt{\|r\|^2 + \sqrt{2\lambda^{\hat{\mathrm{P}}^-}}^{\,2}} - \|r\| \approx \|r\| + \frac{2\lambda^{\hat{\mathrm{P}}^-}}{2\|r\|} - \|r\| = \frac{\lambda^{\hat{\mathrm{P}}^-}}{\|r\|}. \tag{4.62}$$

Toisaalta voidaan ajatella, että mittaustason tulisi kuvastaa pallon pintaa tietyllä alueella (priori-paikassa). EKF käyttää mittaustasona pallon tangenttitasoa ja EKF2 siirtää mittaustasoa hieman (noin ”poikkeaman” verran) pallon sisälle. Tämä kuvastaa pallon pintaa keskimäärin paremmin kuin tangenttitaso. Lisäksi EKF2 kasvattaa mittausvirheen kovarianssimatriisia siten, että se ottaa huomioon linearisoinnista aiheutuvaa virhettä (2.77). Tämä osaltaan auttaa EKF2:sta pysymään konsistenttina (katso sivu 26).

4.4 Paikkaratkaisun Kalmanin suodatin

Paikkaratkaisun Kalmanin suodatin (PKF, Position Kalman Filter) on kaksivaiheisen algoritmin soveltamisen tulos paikannukseen, jonka nimi ja lyhenne on kehitetty tässä työssä. Kaksivaiheista algoritmia on käsitelty sivulla 30. Ideana on ratkaista ensin paikka ja sen jälkeen suodattaa paikkaratkaisua tavallisella Kalmanin suodattimella, jota on käsitelty kappaleessa 2.2. Kalmanin suodattimen algoritmi on annettu kompaktissa muodossa liitteessä B.

PKF:n algoritmin ensimmäinen vaihe ratkaisee ensin tasanmäärätystä systeemistä paikat. Mikäli systeemi on ylimäärätty, algoritmi hylkää geometrialtaan huonot mittaukset. Ratkaistuja paikkoja käytetään Gauss-Newtonin algoritmin alkupaikkoina (kappale 3.3). Gauss-Newtonin algoritmissä käytetään kaikkia saatavissa olevia mittauksia. Usein ylimäärätyssä systeemissä eri alkupaikat tuottavat saman ratkaisun. Gauss-Newtonin algoritmin tuottamista ratkaisuista valitaan ne jotka toteuttavat lisätiedot, tässä tapauksessa mahdolliset sektoritiedot. Jos tämän jälkeen on jäljellä tasan yksi ratkaisu, se syötetään algoritmin toisessa vaiheessa olevaan Kalmanin suodattimeen.

Paikkaratkaisun mittausvirheenä käytetään Gauss-Newtonin algorimin antamaa arviota paikkaratkaisun kovarianssimatriisille. Mikäli ratkaisuja ei ole tasan yhtä tai kyseessä on alimäärätty systeemi, PKF ”unohtaa” kaikki sen hetkiset mittaukset ja käyttää tilan estimoinnissa tilamallia. Tarkemmin paikkaratkaisun laskemista on käsitelty kappaleessa 3.3. Tämän työn simulaatioissa käytetään Niilo Sirolan toteuttamaa algoritmia paikkaratkaisun laskemisessa.

Mikäli satelliittimittauksia on tarpeeksi monesta (vähintään neljästä) satelliitista, voidaan myös nopeus ratkaista kaavan (3.2) avulla. Tällöin ratkaistaan ensin paikka, mikä on mahdollista koska satelliittimittauksia on tarpeeksi monesta satelliitista. Ratkaistu paikka sijoitetaan kaavaan (3.2), jonka jälkeen nopeus voidaan ratkaista lineaarisesta yhtälöryhmästä (tämä vastaa ensimmäistä askelta Gauss-Newtonin iteraatiossa). Myös mahdollista nopeusratkaisua käytetään PKF:n toisen vaiheen suodattimen mittauksena.

PKF:n toisessa vaiheessa on tavallinen Kalmanin suodatin. Kalmanin suodattimen tilamallina käytetään samaa tilamallia kuin muissakin tämän työn suodattimissa. Tilamallia on käsitelty kappaleessa 4.1 kaava (4.6). Kalmanin suodattimen mittausmallina käytetään (2.13)

$$\mathbf{y}_k = \mathrm{H}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k, \tag{4.63}$$

missä $\mathbf{x}_k$ on Kalmanin suodattimen tila, $\mathbf{y}_k$ on mittaukset, joko paikkaratkaisu tai sekä paikka- että nopeusratkaisu. Vastaavasti vektorin $\mathbf{v}_k$ kovarianssimatriisina käytetään Gauss-Newtonin algoritmin tuottamaa arviota paikkaratkaisun kovarianssimatriisista, pelkän paikkaratkaisun tapauksessa tai lohko-matriisia jossa on Gauss-Newtonin algoritmin tuottamaa arvio sekä paikka- että nopeusratkaisun kovarianssimatriisista, kun on kyseessä sekä paikka- että nopeusratkaisu. Tässä on tehty oletus, että paikka- ja

nopeusratkaisu ovat korreloimattomia. Tämä ei aivan pidä paikkansa. Kaavan (4.35) avulla kuitenkin huomataan, että korrelaatio on vähäistä (koska $\dot{\mathrm{U}}^{\mathrm{s}}_{\mathrm{V}^{\mathrm{s}}} - \dot{\mathrm{U}}^{\mathrm{s}}_{\mathbf{v}_{\mathrm{u}}}$ ovat selvästi pienempää kertaluokkaa kuin diagonaalilla olevat matriisit $-\mathrm{U}^{\mathrm{s}}$). Jos mittauksina on pelkkä paikkaratkaisu niin mittausmatriisi on

$$\mathrm{H}_k = \begin{bmatrix} \mathrm{I}_{3\times3} & 0_{3\times3} \end{bmatrix}. \tag{4.64}$$

Jos mittauksina on sekä paikka- että nopeusratkaisu niin mittausmatriisi on

$$\mathrm{H}_k = \mathrm{I}_{6\times6} \tag{4.65}$$

4.4.1 Epävarmuus PKF:ssa

Tässä kappaleessa on tarkoitus soveltaa paikkaratkaisun Kalmanin suodattimeen kappaleen 2.2.6 alussa ollutta lausetta 2.15. Lause antaa rajat tilan kovarianssimatriisille $\hat{\mathrm{P}}_k$. Sovelletaan lausetta muutamaan tukiasemapaikannuksessa esiin tulevaan tilanteeseen, missä on saatu ratkaistua vain paikka eikä nopeutta. Lauseen soveltamiseen tarvitaan ohjattavuus- ja tarkkailtavuusmatriisit (määritelmä 2.13). Ohjattavuusmatriisin laskemiseen tarvitaan tilamallin virheen kovarianssimatriisi (4.8) ja tilansiirtomatriisi (2.34). Tilansiirtomatriisi tulee muotoon (F on annettu kaavassa (4.3))

$$\Phi(t_{k+1}, t_k) = e^{(t_{k+1}-t_k)\mathrm{F}} = \begin{bmatrix} \mathrm{I}_{3\times3} & (t_{k+1}-t_k)\mathrm{I}_{3\times3} \\ 0_{3\times3} & \mathrm{I}_{3\times3} \end{bmatrix}. \tag{4.66}$$

Tarkkailtavuusmatriisin laskemiseen tarvitaan tilansiirtomatriisin lisäksi mittausmatriisi (4.64) ja paikkaratkaisun kovarianssimatriisi (3.9). Paikkaratkaisun kovarianssimatriisin laskemiseksi tarvitaan kaavassa (3.9) oleva mittausvirheen kovarianssimatriisi $\Sigma = (\sigma_{\mathrm{R}})^2\mathrm{I}_{3\times3}$, jossa σ_{R} on mittausvirheen sigma. Lisäksi tarvitaan mittausfunktion derivaatta $\mathbf{h}'(\mathbf{x})$. Tukiasemapaikannuksessa mittausfunktion derivaatta on $-\mathrm{U}^{\mathrm{t}}$ (4.35), missä matriisissa U^{t} on yksikkövektorit käyttäjästä tukiasemiin. Ohjattavuus- ja tarkkailtavuusmatriisien pienin ominaiarvo vastaa lauseessa 2.15 olevaa muuttujaa α ja suurin ominaisarvo vastaa lauseen muuttujaa β.

Tutkitaan aluksi tilannetta, jossa on kaksi tukiasemaa käyttäjästä katsottuna 90° kulmassa ja korkeusmittaus. Tällöin geometria on hyvä, kuten tullaan huomaamaan tarkempien ratkaisujen muodossa. Oletetaan, että aina saadaan ratkaistua yksikäsitteinen paikkaratkaisu. Tällöin paikkaratkaisun kovarianssimatriisi on $(\sigma_{\mathrm{R}})^2\mathrm{I}_{3\times3}$. Alla olevaan taulukkoon (taulukko 4.1) on koottu 3G- ja GSM-verkon sigmojen (σ_{R}) arvoilla lauseen 2.15 antama yläraja suodatetun ratkaisun virheen sigmalle $\sigma_{\mathrm{suod}} = \sqrt{\frac{1+\alpha\beta}{\alpha}}$ ja aika (t_{suod}) jonka jälkeen suodattimen epävarmuus on viimeistään päässyt tämän rajan alle. Kyseinen aika vastaa lauseen 2.15 aika-askelien lukumäärää ($n_{\mathrm{o}} = n_{\mathrm{t}}$). Tässä työssä 3G-verkossa etäisyysmittauksen sigmana käytetään 80 metriä ja GSM-verkossa sigmana käytetään 550 metriä. Lisäksi taulukossa on vertailun vuoksi suodatettavan ratkaisun (WLS-ratkaisun) suurin sigma σ_{ratk} (paikkaratkaisun kovarianssimatriisin suurimman ominaisarvon neliöjuuri). Taulukon laskut ovat suoritettu

Taulukko 4.1: Suodatettavan ratkaisun virheen sigma ja suodatetun ratkaisun virheen sigman yläraja kahdella tukiaseman etäisyysmittauksella ja korkeusmittauksella (SI-yksiköissä).

	WLS	PKF	
Verkko	σ_{ratk}	σ_{suod}	t_{suod}
3G	80	53	9
GSM	550	233	27

Maple-ohjelmistolla. Taulukon tuloksia on myös testattu simulaatioiden avulla kappaleessa 5.2.

Tutkitaan seuraavaksi tilannetta, missä on kolme tukiasemaa. Oletetaan, että aina saadaan ratkaistua yksikäsitteinen paikkaratkaisu. Käyttäjän ajatellaan olevan origossa ja tukiasemien ENU-koordinaatit ovat $\mathbf{r}_1^{\text{t}} = [200, 0, 20]$, $\mathbf{r}_2^{\text{t}} = [0, 200, 20]$ ja $\mathbf{r}_3^{\text{t}} = [-100, -100, 20]$. Tässä tapauksessa geometria on huono, koska tukiasemat ja käyttäjä ovat lähes samassa tasossa. Laaditaan tilanteesta taulukko 4.2, joka vastaa taulukkoa 4.1.

Taulukko 4.2: Suodatettavan ratkaisun virheen sigma ja suodatetun ratkaisun virheen sigman yläraja kolmella tukiaseman etäisyysmittauksella, korkeusmittausta ei ole käytössä (SI-yksiköissä).

	WLS	PKF	
Verkko	σ_{ratk}	σ_{suod}	t_{suod}
3G	403	184	23
GSM	2 771	797	61

Taulukkoja 4.1 ja 4.2 tulkittaessa on hyvä pitää mielessä, että taulukoissa on yläraja suodatetun ratkaisun virheen sigmalle. Tämä ei ole pienin yläraja, kuten simulaatiosta kappaleessa 5.2 havaitaan. Tästä huolimatta huomataan, että suodatuksella saadaan selvästi tarkempi estimaatti tilalle kuin ilman suodatusta. Taulukoista havaitaan muun muassa, että suodatus tuottaa entistä parempia tuloksia, mikäli tilamallin virhe on pieni suhteessa mittausvirheeseen. Toisaalta taulukkoja vertaamalla havaitaan, että korkeusmittaus on erittäin tärkeä kolmiulotteisessa tukiasemapaikannuksessa, koska tukiasemat ja käyttäjä ovat lähes tulkoon samalla tasolla. Kolmen tukiaseman tapauksessa paikkaratkaisun epämääräisyydestä vain korkeuden epämääräisyys on taulukossa 4.2 annettua kertaluokkaa. Toki usein on kiinnostuttu vain kaksiulotteisesta paikasta, mutta luotettava ja optimaalinen suodatus vaatii hybridipaikannuksessa toimiakseen myös korkeustiedon ja sen epämääräisyyden, varsinkin silloin kun mittauksia tulee myös satelliiteista. Varoituksen sanana täytyy todeta, että ylärajat ovat absoluuttisia vain jos systeemi on mallinnettu oikein, esimerkiksi GSM-verkon

TA-mittauksissa olevien virheiden normaalisuus- ja riippumattomuusoletukset ovat hyvin kyseenalaisia (kappale 3.2).

Tarkastelun sivutuotteena havaitaan, että esimerkkitapaukset ovat täydellisesti ohjattavissa ja tarkkailtavissa. Tällöin muun muassa lause 2.16 on voimassa kyseisissä systeemeissä. Tarkemman kuvan suodatuksen ”tehosta” saa luvun 5 simulaatioista. Myös mikäli systeemin matriisit ovat vakioita, kuten esimerkeissä oli, voidaan laskea mitä matriisia tilan kovarianssimatriisi lähestyy, kun annetaan ajan kulua. Tämä voidaan laskea diskreetin algebrallisen Riccati-yhtälön (Discrete Algebraic Riccati Equation) avulla, jota ei käsitellä tarkemmin tässä työssä. Asiaa on käsitelty muun muassa lähteissä [Grewal&Andrews 1993] ja [Mäkilä 2004].

Luku 5

Simulaatiot ja testaus

Tässä luvussa testataan ja vertaillaan simulaatioiden avulla työssä esitettyjä suodattimia: PKF:ta (kappale 4.4), EKF:ta (kappale 4.2) ja EKF2:ta (kappale 4.3). Simulaatioiden EKF2 eroaa EKF:sta vain tukiasemamittausten käsittelyn osalta, kuten kappaleessa 4.3.2 todettiin. Suodattimia vertaillaan myös WLS-ratkaisun (kappale 3.3) kanssa. WLS-ratkaisu on sama jota PKF käyttää mittauksena, joten tukiasemien sektoritietoja on käytetty hyväksi ratkaisun valinnassa (katso kappale 4.4). Sektoritietoja on käytetty siten, että ratkaisu on hylätty, mikäli sen etäisyys sektoriin on enemmän kuin tukiasemaetäisyysmittauksen virheen sigma.

Tasan- ja ylimäärättyjä systeemejä on vertailtu kappaleessa 5.1.1. Vertailussa tasan- ja ylimäärätyissä systeemeissä on jokaisena ajanhetkenä vakiomäärä mittauksia, jotka tulevat aina samoista lähteistä. Alimäärätyn systeemin tapauksessa on vertailtu EKF:ta ja EKF2:ta kappaleessa 5.1.2. Alimäärätyssä tapauksessa simulaatioissa on jokaisena ajanhetkenä vakiomäärä mittauksia, mutta ne tulevat vuorotellen eri tukiasemista tai satelliiteista. Kappaleessa 5.2 on testattu kappaleessa 4.4.1 esitettyjä tuloksia PKF:lle simulaation avulla. Kappaleessa 5.3 on keskitytty EKF:n ja EKF2:n hairahtumisilmiöön. Kappaleessa 5.3.1 on esitetty tasanmäärätty systeemi, joissa EKF:n ja EKF2:n on havaittu hairahtuvan helposti. Kappeleessa myös vertaillaan kyseisellä reitillä EKF:n ja EKF2:n hairahtumista, tarkemmin sanottuna tutkitaan koska suodattimet eivät ole konsistentteja. Kappaleessa 5.3.2 puolestaan on vertailtu kyseisten suodattimien hairahtumista alimäärätyssä systeemissä. Luvun lopussa (kappale 5.4) on esitetty suodattimien toimintaa oikealla reitillä, jonka tekijä

on kävellyt Tampereen teknillisen yliopiston kampusalueella kesällä 2003. Simulaatiot on toteutettu Matlab-ohjelmalla.

Simulaatioissa tukiasemien (BS, Base Station) etäisyysmittauksien virheen sigma on $\sigma_{\rho^{\mathrm{t}}} = 80$ m, jota on käytetty myös korkeusmittauksen sigmana. Satelliittien (SV, Space Vehicle) pseudoetäisyysmittauksien virheen sigma on $\sigma_{\rho^{\mathrm{s}}} = 10$ m ja pseudoetäisyyksien derivaattamittauksien virheen sigma on $\sigma_{\dot{\rho}^{\mathrm{s}}} = 0{,}1\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ (vertaa luku 3). Kaikissa simulaatioissa satelliittimittaukset esiintyvät pareittain, eli satelliitista on aina sekä pseudoetäisyysmittaus että pseudoetäisyyden derivaattamittaus tai ei kumpaakaan mittausta. Simulaatioissa käytetyt reitit on simuloitu kappaleessa 4.1 olevan tilamallin mukaan. Käytettyjen tukiasemien paikkavektorit on annettu kyseisten simulaatioiden kohdalla. Satelliittien paikat on simuloitu navigointiviestin avulla, jonka tekijä on mitannut 18.6.2003 noin kello 15:00 Tampereen teknillisen yliopiston kampusalueella.

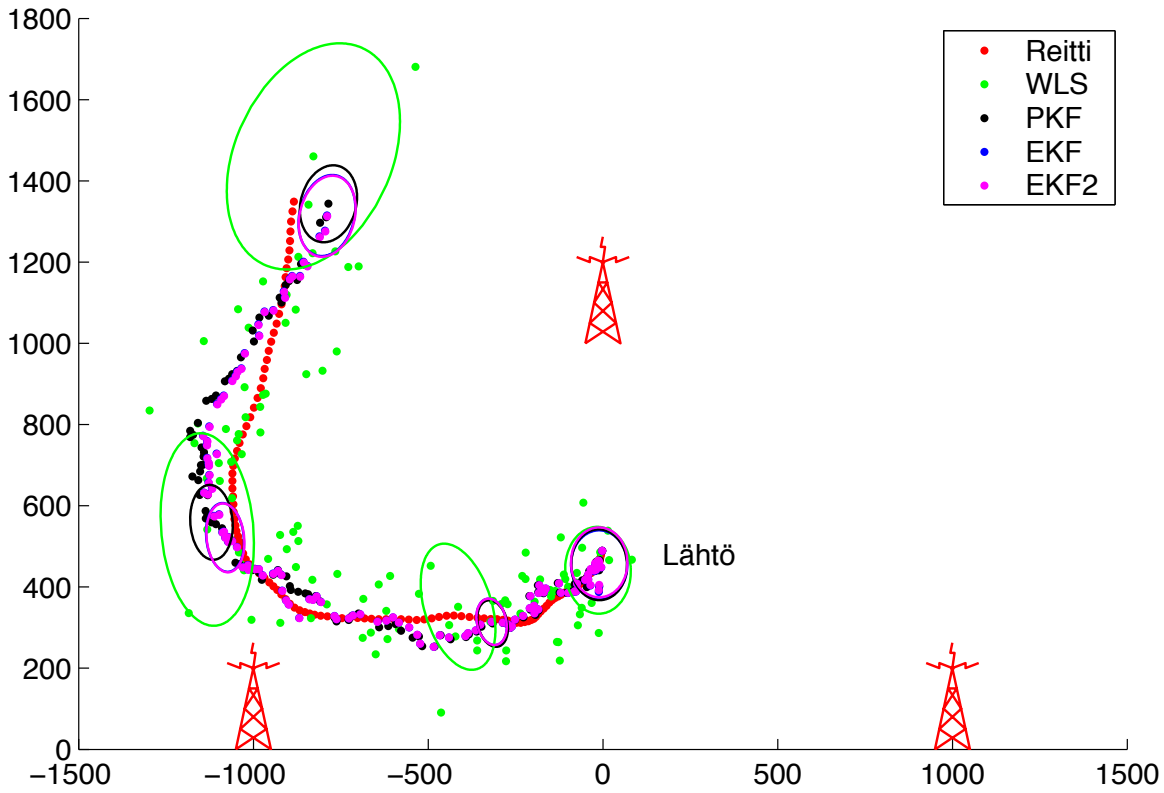
5.1 Suodattimien vertailu

5.1.1 Tasan- ja ylimäärätty systeemi

Tutkitaan tasan- ja ylimäärättyjä systeemejä simulaatioiden avulla. Kuvassa 5.1 on esitetty eräs simuloitu reitti. Reitin kesto (pituus) on 120 sekuntia ja reitin normaalijakautuneen alkuehdon (lähdön) odotusarvo on $x_0 = [0, 500, 0, 0, 0, 0]$ ja kovarianssimatriisi on $\mathrm{P}_0 = \mathrm{Diag}([1\ 000, 1\ 000, 1\ 000, 100, 100, 100])$, missä Diag on operaattori, joka tekee vektorista diagonaalimatriisin. Kuvassa on myös esitetty suodattimien antamat reitit ja WLS-ratkaisut. Mittauksia on tullut jokaisena ajanhetkenä kolmesta tukiasemasta, jotka on piirretty kuvaan. Jokaisena ajanhetkenä on ollut käytössä myös korkeusmittaus.

Tukiasemien paikkavektorit ovat $\mathbf{r}_1^{\mathrm{t}} = [1\ 000, 0, 0]$, $\mathbf{r}_2^{\mathrm{t}} = [-1\ 000, 0, 0]$ ja $\mathbf{r}_3^{\mathrm{t}} = [0, 1\ 000, 0]$. Seuraavissa simulaatioissa, joissa ei ole etäisyysmittauksia kaikkista kolmesta tukiasemasta, tukiasemat ovat mukana tässä järjestyksessä. Esimerkiksi, jos simulaatiossa on mukana vain yksi tukiasema niin sen paikkavektori on $\mathbf{r}_1^{\mathrm{t}}$. Kuvaan on lisäksi piirretty ajanhetkillä t_1, t_{40}, t_{80} ja t_{120} suodattimien ja WLS-ratkaisijan antamat kovarianssimatriiseja vastaavat 68% ellipsit itä-pohjoistasossa (kovarianssimatriisia vastaavan neliömuodon tasa-arvopinta, jonka sisällä on 68% paikan ehdollisen tiheysfunktion todennäköisyysmassasta). Tämän työn simulaatioissa oletetaan tietyn prosenttista ellipsiä laskettaessa hieman virheellisesti, että kaikki jakaumat ovat normaaleja. Laskut osoittavat suodattimien ja WLS-ratkaisun osalta, että koko reitin 68% ellipsien sisällä oli noin 68% oikeita reittipisteitä.

Kuvasta 5.1 huomataan, että kyseisessä tapauksessa EKF ja EKF2 toimivat lähes samalla tavalla. Tämän takia EKF:n reittiä on vaikea havaita EKF2:n reitin alta. Myöskään paikkaratkaisun Kalmanin suodatin ei juurikaan poikkea toisista suodattimista. Kuvasta voidaan havaita, kuinka selvästi suodatus parantaa paikkaesti-



Kuva 5.1: Suodattimien ja WLS-ratkaisun vertailu. Mittaukset tulevat joka hetki kolmesta tukiasemasta, lisäksi korkeusmittaus on käytössä.

maattia verrattuna WLS-ratkaisuun. Toisaalta havaitaan myös vakionopeusmallin (kappale 4.1) suodattimille hyvin tyypillinen ominaisuus: mutkat tahtovat mennä pitkäksi. Vakionopeusmallissa oletetaan, että kiihtyvyys on valkoinen prosessi. Tosin mutkien kohdalla tämä valkoisuusoletus on kyseenalainen, koska kiihtyvyydet eri ajanhetkillä ovat toisistaan riippuvia, kun käännytään samaan suuntaan koko ajan.

Suodattimien ja WLS-ratkaisun virheet vaihtelevat reitin ja mittausten mukaan. Tämän vuoksi tutkitaan suodattimia ja WLS-ratkaisijaa useammilla reiteillä ja mittauksilla. Taulukossa 5.1 on esitetty viidenkymmenen eri reitin tuloksia eri määrällä mittauksia (eri kombinaatioilla). Reitit on simuloitu tilamallin mukaan (kappale 4.1) ja alkuehtona on käytetty samaa kuin edellisessä esimerkissä. Eri kombinaatioissa olevien satelliittien, joista saadaan sekä pseudoetäisyysmittauksia että pseudoetäisyyden derivaattamittauksia, lukumäärä on annettu sarakkeessa SV. Kombinaatioissa olevien tukiasemien etäisyysmittauksien lukumäärä on annettu sarakkeessa BS. Kaikissa eri kombinaatioissa on mukana myös korkeusmittaus lukuunottamatta yhdeksättä kombinaatiota, jonka BS-sarakkeessa on $\otimes$. Tässä kombinaatiossa on siis vain neljän satelliitin mittaukset, ei korkeusmittausta eikä tukiasemien etäisyysmittauksia. Kyseisille viidellekymmenelle reitille on simuloitu kymmenet eri mittaukset ja tuloksista on laskettu kolmiulotteiset 68%- ja 95%-virherajat metreissä, jotka on esitetty taulukossa 5.1. 68%-virherajalla tarkoitetaan seuraavaa: lasketaan kaikkien estimaattien

virheet estimoitavasta paikasta kolmiulotteisesti, 68% tapauksista tämä virhe on pienempi kuin 68%-virheraja. Vastaavasti 95% virheistä on pienempiä kuin 95%-virheraja. Virheraja on ∞ mikäli ratkaisuja ei ole saatu edes virherajan prosenttimäärää vastavaa lukumäärää. Taulukkoon on myös WLS-ratkaisun kohdalla sarake $\varnothing$. Kyseisessä sarakkeessa on ilmoitettu prosenttiosuus tapauksista, joilla ei ole saatu yksikäsitteistä paikkaratkaisua. Tämä voi johtua siitä, että WLS-ratkaisut ovat konvergoineet eri arvoihin tai mikään WLS-ratkaisu ei ole täyttänyt tukiasemien sektoriehtoja (katso kappale 4.4). On hyvä pitää mielessä, että suodattimet antavat jokaisena ajanhetkenä tilaestimaatin riippumatta mittauksien lukumäärästä.

Taulukko 5.1: Suodattimien ja WLS-ratkaisun vertailua eri määrällä mittauksia.

Mittauksia		WLS			PKF		EKF		EKF2	
SV	BS	68%	95%	$\varnothing$	68%	95%	68%	95%	68%	95%
0	3	160	∞	6%	66	113	63	101	63	101
2	1	∞	∞	34%	222	1032	77	206	77	203
2	2	122	212	1%	51	85	50	84	50	84
2	3	114	214	3%	49	82	47	80	47	80
3	0	88	172	0%	36	68	34	67	34	67
3	1	82	160	1%	34	65	32	64	32	64
3	2	76	149	1%	33	62	31	61	31	61
3	3	72	148	2%	31	60	28	57	28	57
4	$\otimes$	35	58	0%	7	14	7	14	7	14
4	0	34	56	0%	7	13	7	13	7	13
4	1	34	56	0%	6	13	6	13	6	13
4	2	34	55	0%	7	13	7	13	7	13
4	3	33	55	0%	6	13	6	13	6	13

Taulukosta 5.1 voidaan päätellä: ensinnäkin, että kyseisissä tilanteissa kaikki suodattimet pienentävät virhettä huomattavasti (jopa 80%) verrattuna WLS-ratkaisuun. Toisaalta EKF:n ja EKF2:n välillä ei ole tämän perusteella huomattavaa eroa. Myöskään PKF:lla ei ole huomattavaa eroa muihin suodattimiin kuin tapauksissa, joissa ei ole yksikäsitteistä WLS-ratkaisua, eli pääasiassa ensimmäisessä (SV = 0 ja BS = 3) ja toisessa (SV = 2 ja BS = 1) mittauskombinaatiossa. Mikäli mittauksia on neljästä satelliitista, havaitaan etteivät tukiasemien etäisyysmittaukset enää paranna paikkaestimaattia. Ainoastaan korkeusmittauksella saattaa olla pieni paikkaestimaattin virhettä vähentävä vaikutus.

5.1.2 Alimäärätty systeemi

Kappaleessa 5.1.1 tutkittiin tilannetta, jolloin systeemi on tasan- tai ylimäärätty. Kuitenkin systeemi saattaa usein olla alimäärätty. Tällöin ei luonnollisesti voida ratkaista paikkaestimaattia WLS-ratkaisijalla, koska mittauksia on liian vähän. Näin ollen myöskään PKF suodatin ei toimi optimaalisesti, koska se ei käytä kaikkia saatavilla olevia mittauksia hyödyksi. Toisaalta EKF ja EKF2 voivat toimia varsin

hyvin, vaikka systeemi olisi aina alimäärätty. Seuraavaksi tutkitaan EKF:n ja EKF2:n toimintaa alimäärätyissä tilanteissa.

Taulukossa 5.2 on esitetty EKF:n ja EKF2:n suodattimien toimintaa samalla tavalla kuin taulukossa 5.1. Erona on vain se, että nyt mittaukset tulevat vuorotellen eri tukiasemista ja satelliiteista, siten että jokaisena ajanhetkenä on sarakkeen SV ilmoittama määrä eri sateliitteista tulevia mittauksia ja sarakkeen BS ilmoittava määrä tukiasemien etäisyysmittauksia. Näiden lisäksi korkeusmittaus on käytössä lukuunottamatta kolmatta ja viimeistä kombinaatiota, joiden BS-sarakkeessa on $\otimes$. Taulukossa 5.2 on esitetty viidenkymmenen reitin tulokset, joille jokaiselle on simuloitu kymmenet eri mittaukset. Reitit on simuloitu samalla tavalla kuin kappaleessa 5.1.1.

Taulukko 5.2: EKF:n ja EKF2:n vertailu alimäärätyissä systeemeissä eri määrällä mittauksia.

Mittauksia		EKF		EKF2	
SV	BS	68%	95%	68%	95%
0	1	88	148	87	148
0	2	72	119	72	119
2	$\otimes$	15	27	15	27
2	0	15	26	15	26
2	1	14	26	14	26
3	$\otimes$	9	17	9	17

Taulukosta 5.2 havaitaan jälleen, ettei kyseisissäkään tapauksissa EKF:n ja EKF2:n välillä ole huomattavaa eroa. Tulokset ovat EKF:n ja EKF2:n osalta hyvin mairittelevia, mikäli niitä verrataan taulukossa 5.1 esitettyihin WLS-ratkaisijan tuloksiin. Esimerkiksi EKF:n ja EKF2:n tuottavat huomattavasti paremman paikkaestimaatin, mikäli jokaisena ajanhetkenä on vain yhden tukiaseman etäisyysmittaus ja korkeusmittaus, kuin WLS-ratkaisu kolmesta tukiaseman etäisyysmittauksesta ja korkeusmittauksesta. Toisena esimerkkinä voisi verrata keskenään tilannetta, joissa suodattimilla on jokaisena ajanhetkenä mittauksia vain kahdesta satelliitista ja WLS-ratkaisu on peräisin neljän satelliitin mittauksista, kolmesta tukiaseman etäisyysmittauksesta ja korkeusmittauksesta. Tällöin kyseiset suodattimet tuottavat huomattavasti paremman paikkaestimaatin kuin WLS-ratkaisu.

Tämän ja edellisen kappaleen tuloksien pohjalta havaitaan, että kyseisissä tilanteissa EKF ja EKF2 eivät juurikaan eroa toisistaan, mikä oli odotettua, koska priori-tilan suurin sigma oli samaa kertaluokkaa kuin 10 (priori-nopeuden suurin sigma oli simulaatioissa aina pienempi kuin priori-paikan suurin sigma), jolloin mittauksissa ei ollut huomattavaa epälineaarisuutta. Tarkemmin asiaa on analysoitu kappaleessa 4.3.2.

Kysymykseen toimivatko suodattimet edellä esitetyissä systeemeissä oikein, on huomattavasti vaikeampi vastata. Suodattimen oikein toimiminen tarkoittaa sitä, että suodattimen antamat tilan ehdolliset tiheysfunktiot vastaavat yleisen suodatusongelman tarkkaa ratkaisua (kappale 2.1). Kappaleen 2.2.4 pohjalta tiedetään, että PKF on ainakin BLUE-estimaattori kyseisille systeemeille, kun ehdollistavina mittauk-

sina on PKF:lle syötetyt mittaukset, olettaen, että lasketut paikka- ja nopeusratkaisujen virheiden kovarianssit ovat oikein. Tosin vaikka ne eivät olisi oikein, niin kappaleen 2.2.6 perusteella tiedetään, että PKF:n antama estimaattori on ainakin konsistentti, jos mittausvirheet on mallinnettu todellisia virheitä suuremmiksi. Teorian mukaan PKF:n tiedetään siis toimivan lähes oikein, kun ehdollistavana mittauksina on PKF:lle syötetyt mittaukset. Systeemeissä, joissa PKF, EKF ja EKF2 toimivat lähes samalla tavalla taulukon 5.1 mukaan, voidaan PKF:n avulla päätellä, että myös EKF ja EKF2 toimivat näissä systeemeissä lähes oikein.

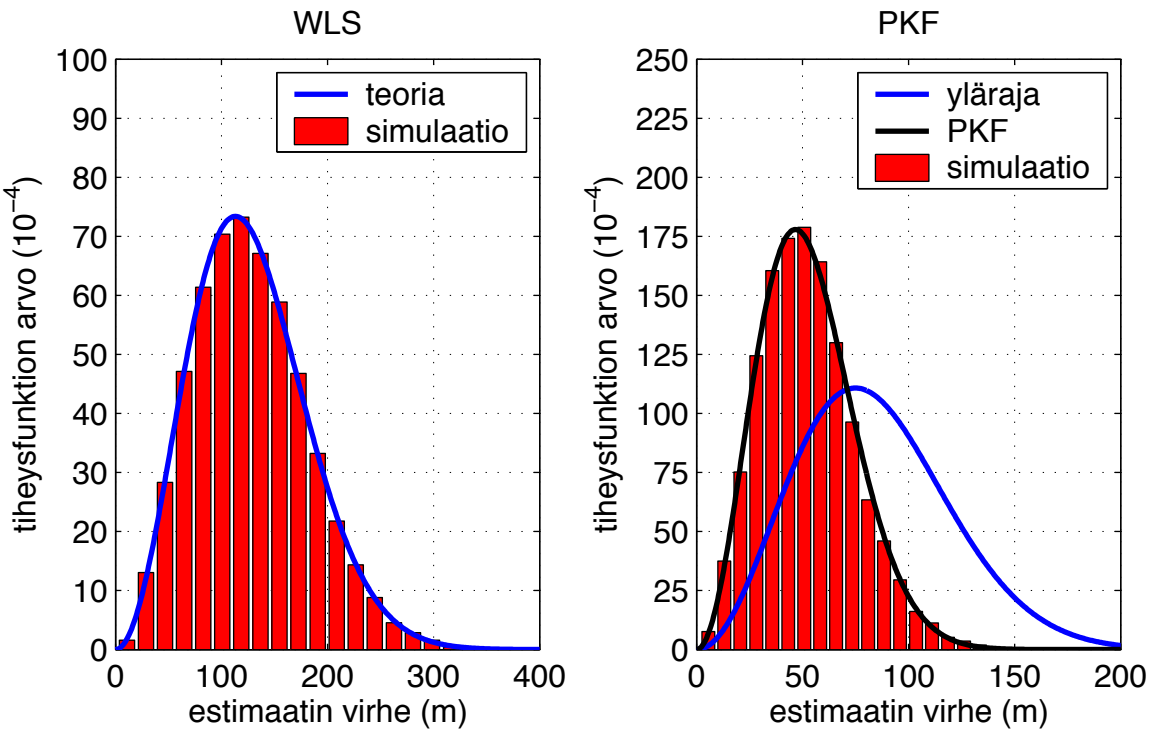
Toimivatko EKF ja EKF2 oikein taulukossa 5.2 esitetyissä tilanteissa? Tiedetään, että virhejakaumat ovat normaaleja, mittausfunktioiden epälineaarisuus ei ole huomattavaa ja systeemit ovat täydellisesti tarkailtavissa lyhyellä aikavälillä. (Lineaariselle suodattimelle kyseinen ominaisuus on määritelty määritelmässä 2.14. Epälineaarisessa tapauksessa aikavälin pituus vastaa likimain sitä kuinka pitkältä ajalta tarvittaisiin tarkkoja mittauksia, että tila saataisiin ratkaistua yksikäsitteisesti.) Näiden perusteella tilan ehdolliset tiheysfunktiot muistuttavat normaalijakaumaa ja EKF2:n tulisi toimia lähes oikein (kappale 2.3.1). Näin ollen myös EKF toimisi lähes oikein. Kuitenkin kappaleessa 5.3 esitetään systeemejä, jotka EKF2:n mielestä eivät ole huomattavasti epälineaarisia ja joiden virhejakaumat ovat normaaleja. Näistä huolimatta EKF2 ja EKF saattavat toimia kyseisissä systeemeissä täysin väärin. Pohjimmaisena ongelmana on se, ettei EKF:lle ja EKF2:lle ole todistettu niiden oikein toimimista yleisessä tapauksessa. Syy tähän on tietenkin selvä kappaleen 5.3 perusteella, jossa näytetään etteivät kyseiset suodattimet toimi aina yleisessä tapauksessa oikein.

5.2 PKF:n epävarmuus

Tässä kappaleessa testataan kappaleessa 4.4.1 esitettyjä tuloksia PKF:n epävarmuudesta. Tässä keskitytään ensimmäiseen tilanteeseen eli taulukon 4.1 tuloksiin. Kyseisessä systeemissä kaksi tukiasemaa on käyttäjästä katsottuna 90° kulmassa. Simulaatiossa systeemi rakennetaan siten, että ensimmäinen tukiasema on origosta katsottuna idässä ja toinen pohjoisessa. Tukiasemien pysyminen käyttäjästä katsottuna 90° kulmassa varmistetaan sillä, että etäisyys origosta tukiasemiin on yhtä suuri kuin maapallon säde. Systeemissä on käytettävissä myös korkeusmittaus. Korkeusmittaus ajatellaan maapallon keskipisteessä olevan tukiaseman etäisyysmittaukseksi. Näin ollen kuvitteellisessa systeemissä on kolme tukiasemaa ja kaikki ovat yhtä kaukana origosta.

Simuloidaan tilamallin mukainen reitti, jonka alkuehto on normaalijakautunut odotusarvolla $x_0 = [0, 0, 0, 0, 0, 0]$ ja kovarianssimatriisilla $\mathrm{P}_0 = \mathrm{Diag}([1\ 000, 1\ 000, 1\ 000, 100, 100, 100])$. Simuloidaan kyseiselle reitille sadat mittaukset ja ratkaistaan paikkaestimaatit sekä WLS-ratkaisijalla että PKF:lla. Kuvassa 5.2 on punaisilla palkeilla simulaation paikkaestimaatin virheiden normien tiheysfunktiot molemmille tapauksille. Lisäksi WLS-ratkaisun kuvaan on piirretty

sinisellä taulukossa 4.1 olevaa teoreettista sigmaa ($\sigma_{\text{ratk}} = 80$ m) vastaava virheen normin tiheysfunktio. PKF:n kuvaan on piirretty sinisellä edellä mainitussa taulukossa löytyvän ylärajaa ($\sigma_{\text{suod}} = 53$ m) vastaava virheen normin tiheysfunktio. PKF:n kuvaan on mustalla piirretty PKF:n simulaatioissa antaman ehdollisen jakauman avulla laskettu virheen normin tiheysfunktio. Tapauksissa on oletettu, että kovarianssimatriisit ovat muotoa vakio kertaa yksikkömatriisi.



Kuva 5.2: Teorian, WLS-ratkaisun epävarmuuden ja PKF:n epävarmuuden vertailu.

Kuvasta 5.2 voidaan päätellä, että WLS-ratkaisija toimii tässä tapauksessa kuten teoria olettaakin. Havaitaan myös, että kappaleessa 4.4.1 annettu yläraja PKF:n ratkaisun virheen sigmalle on selvästi yläraja ja vielä aika löysä sellainen. Lisäksi havaitaan, että PKF:n antaman ehdollisen jakauman avulla laskettu tiheysfunktio virheen normille vastaa hyvin tarkasti realisoituneita virheitä. Kyseisissä tapauksissa myös EKF ja EKF2 toimivat vastaavalla tavalla kuin PKF.

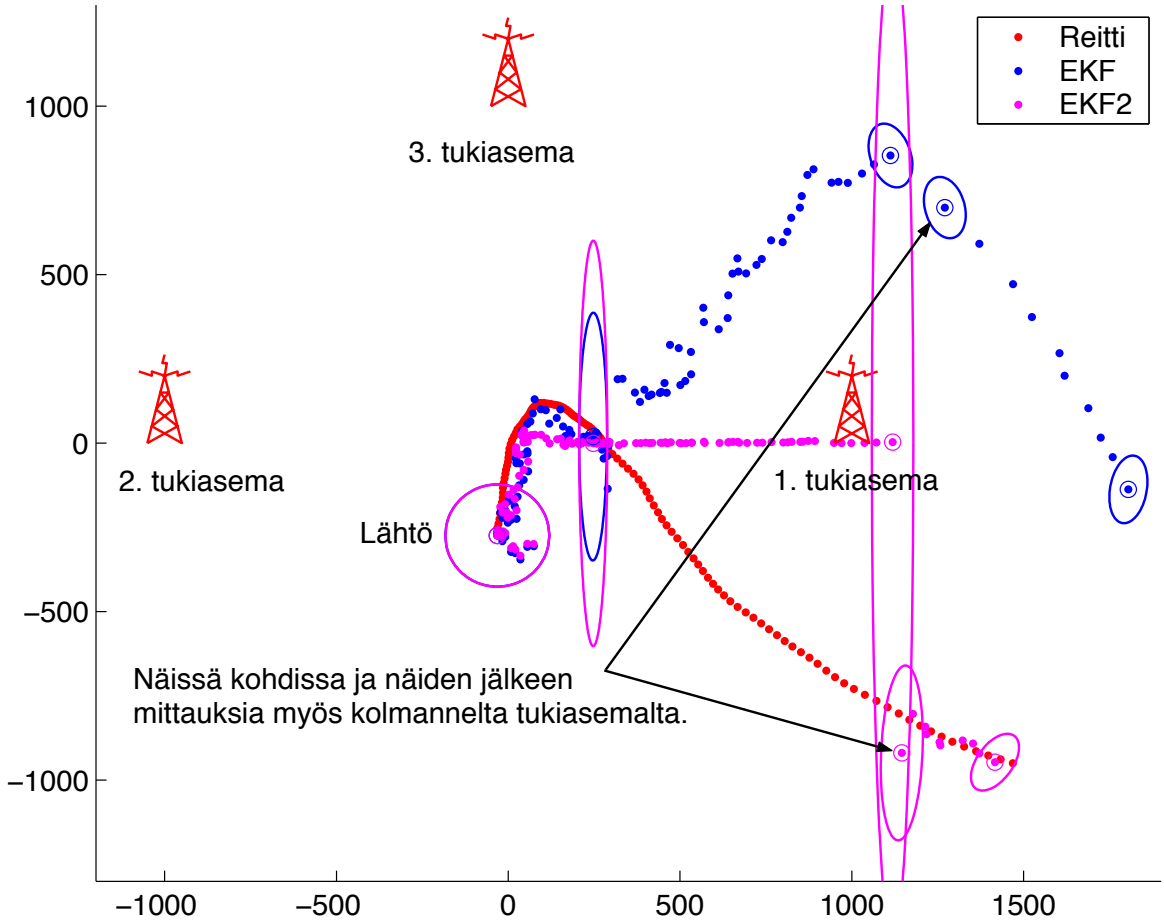
5.3 EKF:n ja EKF2:n hairahtuminen

Kappaleessa 2.3.1 mainittiin, että EKF:n eräs heikkous tasan- ja alimäärätyissä systeemeissä on hairahtumisilmiö, jossa suodatin aliarvioi estimaattorin virhettä, eikä näin ollen ole konsistentti. Tälläistä tapahtuu esimerkiksi tilanteissa, joissa WLS-ratkaisu ei ole yksikäsitteinen ja eri ratkaisut ovat suhteellisen lähellä toisiaan. Tälläinen tapaus on esitelty kappaleessa 5.3.1. Toisaalta hairahtumista esiintyy usein myös alimäärätyissä

systeemeissä, jotka ovat täydellisesti tarkkailtavissa vain pitkällä aikavälillä. Tälläistä tapausta on käsitelty kappaleessa 5.3.2. Yhteistä näille tilanteille on se, etteivät tilan ehdolliset tiheysfunktiot muistuta normaalijakaumaa.

5.3.1 Tasanmäärätty systeemi

Kuvassa 5.3 on esitetty tilanne, jossa EKF on hairahtunut. Kuvassa on 120 sekunnin mittainen tilamallin mukaan simuloitu reitti. Mittauksia on ensimmäisten 110 sekunnin aikana ensimmäisestä ja toisesta tukiasemasta, viimeiset kymmenen sekuntia mittauksia tulee myös kolmannesta tukiasemasta. Näiden lisäksi korkeusmittaus on jokaisena ajanhetkenä käytössä. Kuvaan on merkitty kohdat, jolloin kolmannesta tukiasemasta alkaa tulla mittauksia. Kuvaan on myös piirretty kovarianssimatriiseja vastaavat 68% ellipsit itä-pohjoistasossa. Ellipsit on piirretty alkuehdossa ja ajanhetkillä t_{60}, t_{110}, t_{111} ja t_{120}. Ellipsijä vastaavien odotusarvojen ympärille on hahmottamisen helpottamiseksi piirretty pienet ympyrät.



Kuva 5.3: EKF:n hairahtuminen ja EKF2:n kovarianssimatriisin kasvattaminen.

Kuvasta 5.3 huomataan, että EKF on hairahtunut keskivaiheilla todellisen reitin peilikuvareitille ensimmäisen ja toisen tukiaseman kautta kulkevan suoran suhteen. EKF

ei tämän takia ole konsistentti, koska on erittäin epätodennäköistä, että todelliset virheet olisivat peräisin EKF:n antamista virhejakaumista. Tämän havaitsee helposti muun muassa ajanhetkellä t_{110} kuvaan piirretystä EKF:n ellipsistä. Kuvan tapauksessa EKF2 on puolestaan kasvattanut kovarianssimatriisia ja näin pysynyt konsistenttina. Kuvasta havaitaan, että mikäli EKF hairahtuu, sen palaaminen oikealle reitille kestää suhteellisen pitkän aikaa vaikka olisi käytössä kolmannen tukiaseman etäisyysmittaus. Toisaalta EKF2 ”löytää” oikean reitin lähes välittömästi kolmannen tukiaseman etäisyysmittauksen avulla. Kyseisten suodattimien konsistenttiutta ja hairahtumista on käsitelty tarkemmin seuraavan simulaation yhteydessä.

Kuvassa 5.3 olevalle reitille on generoitu yllä esitetyt mittaukset tuhat kertaa ja ne on suodatettu sekä EKF:lla, että EKF2:lla. Tuloksena saatiin, että

EKF oli konsistentti 277 kertaa ja
EKF2 oli konsistentti 892 kertaa.

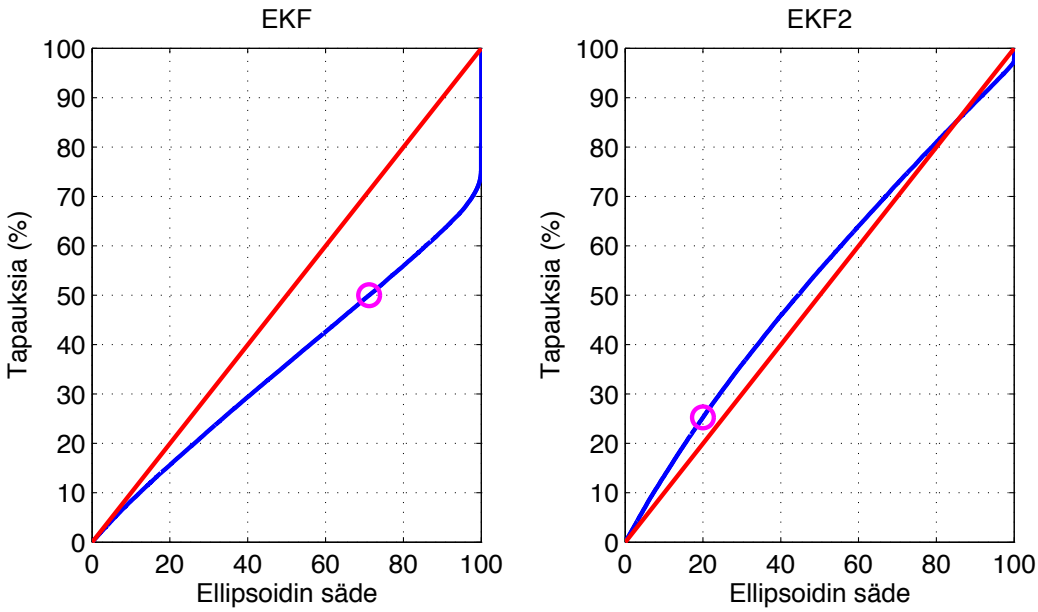
Tässä suodatinta on pidetty konsistenttina, mikäli realisoituneita virheitä suurempia virheitä realisoituisi jokaisena ajanhetkenä suodattimen antamista virhejakaumista vähintään todennäköisyydellä 10^{-10}. Virheet on laskettu kolmiulotteisesti. Kaikissa simulaatioissa, joissa suodattimet eivät olleet konsistentteja suurimmat virheet olivat yli 1 300 metriä. Suodattimien reitit keskivaiheilla vastasivat siis todellisen reitin peilikuvaa ensimmäisen ja toisen tukiaseman kautta kulkevan suoran suhteen. Silloin kun EKF oli konsistentti, sen antama reitti kulki lähellä todellista reittiä (suurin virhe oli alle 650 metriä). Silloin taas kun EKF2 oli konsistentti, vain 37 kertaa EKF2 oli lähellä todellista reittiä (suurin virhe oli alle 650 metriä). Muulloin (855 kerralla) EKF2 toimi kuten kuvassa 5.3 eli kasvatti kovarianssimatriisia ja niin pysyi konsistenttina.

Todellisuudessa tilan ehdollisten tiheysfunktioiden jakaumat suurimmassa osassa tapauksista ovat kaksihuippuisia reitin keskivaiheilla. Jakaumien huiput sijaitsevat oikealla reitillä ja reitillä, johon EKF hairahtui kuvassa 5.3. Tälläisen kaksihuippuisen jakauman odotusarvon ja kovarianssimatriisin EKF2 antaa lähes oikein silloin kun se kasvattaa kovarianssimatriisia kuten edellä kerrottiin. Näissä tapauksissa EKF2 toimi siis ”oikein” eli EKF2:n antamat ehdolliset odotusarvot ja kovarianssimatriisit vastasivat hyvin todellisuutta. Lainausmerkit ovat siksi, että kyseisessä tapauksessa tilan ehdollista tiheysfunktiota ei voi esittää pelkkien kahden ensimmäisen tilastollisen momentin avulla. Kuten kappaleessa 2.3 todettiin, tiheysfunktion ollessa kaksihuippuinen tiheysfunktion odotusarvo ja kovarianssimatriisi kertovat tiheysfunktiosta suhteellisen vähän, kuten kuvasta 5.3 havaitaan.

Sellaisia kertoja, jolloin EKF oli konsistentti ja EKF2 ei ollut, oli 24. On vaikea sanoa toimiko EKF tällöin ”oikein” vai ei. Mikäli todellinen ehdollinen tiheysfunktio olisi mittausten perusteella kaksihuippuinen, EKF ei toimisi ”oikein”. Näissä tilanteissa EKF saattaisi antaa paremman estimaatin todelliselle reitille. Koska ehdollinen tiheysfunktio on kaksihuippuinen, EKF:n antama ratkaisu ei olisi ”oikein”. Tämä sen takia, koska mittauksien perusteella ei voitaisi oikeasti päätellä kummalla reitillä käyttäjä on. Näissä tapauksissa EKF olisi vain sattunut arvaamaan oikean reitin.

Tämä sama problematiikka on esillä usein kun suodattimia vertaillaan, koska useinkaan ei tiedetä mitkä ovat oikeat ehdolliset tiheysfunktiot. Ehdollisten tiheysfunktioiden sijasta yleensä tiedetään vain todellinen reitti, jonka tilapisteitä voidaan pitää ehdollisten tiheysfunktioiden realisaatioina. Toisin sanoen, suodattimet antavat satunnaismuuttujan odotusarvon ja kovarianssimatriisin, joiden perusteella pitäisi päätellä minkä suodattimen antamat arvot vastaavat parhaiten tilan oikeata ehdollista tiheysfunktiota. Oikeasta ehdollisesta tiheysfunktiosta tiedetään vain yksi realisaatio.

Kuvassa 5.4 on esitetty EKF:n ja EKF2:n antamien estimaattien kovarianssimatriisien ja realisoituneiden kolmiulotteisten paikkavirheiden välistä yhteyttä tämän kappaleen simulaatioille. Kuvassa on piirretty kuinka monta prosenttia realisoituneista virheistä on tietyn suuruisen ellipsoidin sisällä. Ellipsoidit vastaavat suodattimien antamia estimaattien kovarianssimatriisien neliömuotojen tasa-arvopintoja. Ellipsoidin säteellä tarkoitetaan estimaatin todennäköisyysmassan osuutta, joka sijaitsee edellä mainittujen ellipsoidien sisällä. Kuvassa punaiset viivat vastaavat oikein toimivaa konsistenttia suodatinta ja siniset viivat vastaavat otsikon mukaisia suodattimia. Seuraavassa kappaleessa on annettu esimerkki kuinka kuvaa tulkitaan.



Kuva 5.4: EKF:n ja EKF2:n antamien estimaattien kovarianssimatriisien ja realisoituneiden kolmiulotteisten paikkavirheiden välinen yhteys.

EKF:n tapauksessa ympyröity kohta tarkoittaa, että EKF:n antamien kovarianssimatriiseja vastaavien 70% ellipsoidien sisällä on vain 50% realisoituneista virheistä (tapauksista). Tämä tarkoittaa sitä, että EKF aliarvioi estimaatin virhettä, joka on todettu myös kappaleessa 2.3.1. EKF2:n tapauksessa ympyröity kohta tarkoittaa, että EKF2:n antamien kovarianssimatriiseja vastaavien 20% ellipsoidien sisällä on 25% realisoituneista virheistä (tapauksista). Tämä tarkoittaa sitä, että EKF2 yliarvioi tässä kohden estimaatin virhettä. Näin ollen EKF2 ei toimi optimaalisesti kyseisessä systeemissä.

Lisäksi kuvasta huomataan, että EKF hairahtuu myös useammalla ajanhetkellä kuin EKF2. Tosin kuvan perusteella myös EKF2 hairahtuu joissakin tapauksissa. Kuvan perusteella voidaan sanoa, että EKF2 toimii paremmin kuin EKF kyseisessä systeemissä, tosin kumpikaan suodatin ei toimi täysin oikein kyseisessä systeemissä.

5.3.2 Alimäärätty systeemi

Tutkitaan seuraavaksi EKF:n ja EKF2:n konsistenttiutta alimäärätyssä systeemissä, jossa suodattimilla on jokaisella ajanhetkellä käytössä vain yksi tukiaseman etäisyysmittaus ja korkeusmittaus. Tukiaseman etäisyysmittaus tulee aina samasta tukiasemasta, joten ajan mittaan paikan ehdollisten tiheysfunktioiden tasa-arvopinnat alkavat muistuttamaan ”donitsia”, jonka säde on käyttäjän etäisyys tukiasemasta. Myös tässä tapauksessa on oletettavaa, ettei EKF toimi aina konsistenttisesti.

Simuloidaan tuhannelle eri reitille kymmenet mittaukset ja nämä kaikki on suodatettu sekä EKF:lla että EKF2:lla. Jokaisen reitin kesto oli 120 sekuntia. Jokaisella kerralla määritettiin pysyivätkö kyseiset suodattimet konsistentteina samalla kriteerillä kuin kappaleessa 5.3.1. Tuloksena saatiin, että

EKF oli konsistentti 3 362 kertaa ja
EKF2 oli konsistentti 8 949 kertaa.

Simulaatiossa käytetyn tukiaseman paikkavektori oli $\mathbf{r}^{\mathrm{t}} = [1\,000, 0, 0]$. Simulaatioiden reittien alkuehtojen kovarianssimatriisit olivat kaikilla samat $\mathrm{P}_0 = \mathrm{Diag}([1\,000, 1\,000, 1\,000, 100, 100, 100])$, mutta alkuehtojen odotusarvot olivat muotoa $x_0 = [e_0, 0, 0, 0, 0, 0]$, missä e_0 sai 200 metrin välein arvoja väliltä $[-800, 1\,000]$. Jokaisen arvon e_0 sai siis sata kertaa. Simulaation tuloksien perusteella alkuehdon odotusarvolla ja EKF2:n konsistenttiudella ei ollut korrelaatiota. EKF:n konsistenttiudella ja alkuehdon odotusarvolla oli korrelaatiota. Mikäli alkuehdon odotusarvon e_0 oli pieni, eli kaukana tukiasemasta, niin EKF ei ollut konsistentti noin $50 - 60$ prosentin todennäköisyydellä. Toisaalta, mikäli alkuehdon odotusarvo oli lähellä tukiasemaa (e_0 oli suuri) niin EKF ei ollut konsistentti lähes 80 prosentin todennäköisyydellä. Tämä oli odotettu tulos, koska tukiaseman etäisyysmittauksen epälineaarisuus on suurta lähellä tukiasemaa. EKF ei ota huomioon epälineaarisuuden aiheuttamaa virhettä, toisin kuin EKF2.

Tämän kappaleen yhteenvetona voidaan todeta, että EKF:lla esiintyvää hairahtumisilmiötä esiintyy myös EKF2:lla, tosin selvästi vähemmän kuin EKF:lla. Käytännön tilanteissa hairahtumisilmiö on erittäin kiusallinen, koska suodatin ”luulee antavansa” hyvän estimaatin, joka todellisuudessa on pahasti pielessä. Lisäksi suodatin käyttää tätä pahasti pielessä olevaa, ”omasta mielestään” tarkkaa, estimaattia estimoidessa seuraavaa tilaa ja näin virhe säilyy aikasarjassa suhteellisen pitkän ajan. Yhtenä perussyynä ongelmaan on epälineaarisuuden lisäksi se, että EKF ja EKF2 käyttävät edellistä tilaestimaattia mittausmallin tekemisessä. Näin ollen pienet virheet saat-

tavat kasaantua ajan myötä suureksi virheeksi, kuten tässä kappaleessa on esitetty. Ratkaisun kehittäminen tähän ongelmaan jätetään jatkotutkimusaiheeksi.

Toisaalta on hyvä pitää mielessä, että vaikka PKF ei ole aina optimaalinen niin sillä ei esiinny vastaavanlaista virheiden kertymisilmiötä. Tämä johtuu siitä, että PKF:n mittausmalli ei riipu tilaestimaatista. Lisäksi PKF:lle on kehitetty teoria, jonka avulla PKF saadan pysymään konsistenttina.

5.4 Suodattimien toiminta oikealla reitillä

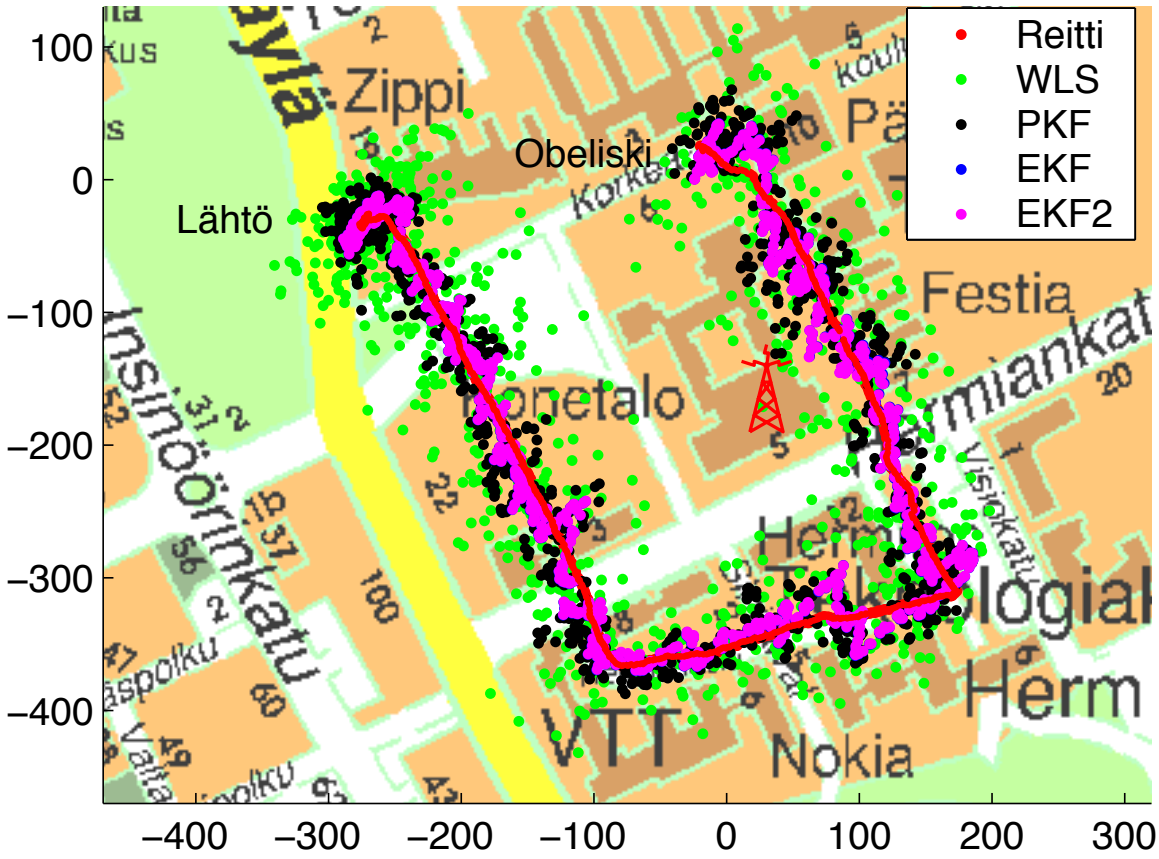
Viimeisessä simulaatiossa näytetään esimerkinomaisesti, miltä WLS-ratkaisut ja suodattimien antamat ratkaisut näyttävät kartalla. Simulaation pohjana käytetään reittiä, jonka tekijä on mitannut 18.6.2003 Tampereen teknillisen yliopiston kampusalueella. Samoista mittauksista on myös peräisin simulaatioissa käytetty navigointiviesti. Simulaatioon otettu reitti on 1 116 sekuntia pitkä ja mittauksia on tullut 1 093 eri ajanhetkenä. Simulaation pohjana käytetty reitti on laskettu joka hetki noin kuuden eri satelliitin mittauksien pohjalta ja on näin ollen hyvin tarkka. Kyseiselle reitille on simuloitu mittaukset kolmesta satelliittista, yksi tukiaseman etäisyysmittaus ja korkeusmittaus. Mittauksien perusteella on laskettu WLS-ratkaisut ja suodatettu mittauksia PKF:lla, EKF:lla ja EKF2:lla. Tulokset on esitetty kuvassa 5.5. Kuvaan on myös piirretty tukiasema, josta simuloidut mittaukset ovat tulleet. Kuva on ENU-koordinaateissa, siten että origo on Obeliskin kohdalla. Reitti myös päättyy Obeliskille. Reitin lähtö ja päättyminen (Obeliski) ovat merkitty kuvaan. Obeliski on maamerkki Tampereen teknillisen yliopiston kampusalueella.

Kuvassa 5.5 olevalle simulaatiolle on laskettu tunnuslukuja taulukkoon 5.3. Taulukossa olevat tiedot on esitetty samalla tavalla kuin taulukossa 5.1, jonka yhteydessä eri sarakkeiden merkitys on myös selitetty. Kuvasta ja taulukon perusteella huomataan, että EKF ja EKF2 toimivat tässäkin tilanteessa lähes samalla tavalla. PKF:n virhe on selvästi suurempi kuin EKF:n ja EKF2:n. Tämä johtuu siitä, että WLS-ratkaisija ei saa ratkaistua yksikäsitteistä paikkaa kuin noin 80% tapauksista ja näin ollen PKF ei käytä huomattavaa määrää mittauksia hyödyksi.

Taulukko 5.3: WLS-ratkaisun ja suodattimien vertailu oikealla reitillä.

Mittauksia		WLS			PKF		EKF		EKF2	
SV	BS	68%	95%	∅	68%	95%	68%	95%	68%	95%
3	1	132	∞	20	44	82	29	63	29	62

Mikäli suodattimien toimintaa kyseisessä simulaatiossa vertaillaan kuten EKF:ta ja EKF2:ta on vertailtu kuvassa 5.4, havaitaan, että EKF ja EKF2 yliarvioivat estimaatin virhettä. WLS-ratkaisun ja PKF:n odotusarvon virheet puolestaan vastaavat sitä mitä WLS-ratkaisija ja PKF ennustavat virheiden kovarianssimatriisien muodossa.



Kuva 5.5: WLS-ratkaisut ja suodattimien toiminta oikealla reitillä. Taustakuvan osalta © Tampereen kaupunkimittausyksikkö 2004.

Tietenkään yhden simulaation ja reitin perusteella ei voida vetää merkittäviä johtopäätöksiä puoleen tai toiseen. Huomionarvoista kuitenkin on, mikäli kuvassa 5.5 olevaa reittiä verrataan kuvissa 5.1 ja 5.3 oleviin reitteihin, että työssä käytetty tilamalli ei tässä tapauksessa vastaa todellista tilamallia. Ensinnäkin kuvan 5.5 reitissä nopeus pysyy pitkiäkin aikoja lähes vakiona ja ennen kaikkea rajoitettuna. Tämän työn tilamallin mukaan nopeus yleensä muuttuu nopeammin kuin kyseessä olevalla reitillä ja tilamallin nopeuden ei tarvitse pysyä rajoitettuna. Kuitenkin tiedetään, että nopeus on aina rajoitettu. Toisin sanoen työssä esitetty tilamalli ei kuvaa todellista tilannetta tarkasti. Suodattimet toimisivat paremmin sovelluksessa, mikäli tilamalli olisi realistisempi. Tämä, kuten aikaisemmin todettiin, jätetään jatkotutkimusaiheeksi.

Luku 6

Yhteenveto ja jatkotutkimus

Tässä työssä tutkittiin Kalmanin suodattimen ja sen laajennuksien soveltamista hybridipaikannukseen. Työssä perehdyttiin suodatuksen matemaattisiin perusteisiin laajasti. Suodattimien soveltamisessa paikannukseen keskityttiin laajennettuun Kalmanin suodattimeen (EKF, Extended Kalman Filter), toisen asteen laajennettuun Kalmanin suodattimeen (EKF2, Second Order Extended Kalman Filter) ja paikkaratkaisun Kalmanin suodattimeen (PKF, Position Kalman Filter) sen vuoksi, että nämä suodattimet edustavat laajasti (hybridi)paikannussovellukseen sopivia erilaisia Kalmanin suodattimen laajennuksia. Työssä Kalmanin suodattimen laajennukset on rajattu suodattimiin, jotka pitävät kirjaa vain ehdollisten tiheysfunktioiden odotusarvoista ja kovarianssimatriiseista.

Työssä havaittiin, että Kalmanin suodattimen antama estimaatti on optimaalinen monessa eri mielessä. Kalmanin suodatin on myös yksinkertainen ja nopea laskea. Lisäksi Kalmanin suodatinta on tutkittu paljon ja sille on näytetty monia hyödyllisiä ominaisuuksia sovellusten kannalta. Esimerkiksi Kalmanin suodatin saadaan pysymään konsistenttina, mikäli virheiden kovarianssimatriisit on arvioitu yläkanttiin. Tämä on erityisen hyödyllinen ominaisuus, koska useinkaan virheiden todellisia kovarianssimatriiseja ei tiedetä. Kalmanin suodatin toimii myös BLUE-estimaattorina, vaikka virheiden jakaumat eivät olisikaan normaaleja. Kuitenkaan Kalmanin suodatinta ei voida suoraan soveltaa paikannukseen, koska mittausfunktiot eivät ole lineaarisia. Tämän vuoksi tarvitaan erilaisia Kalmanin suodattimen laajennuksia, jotta Kalmanin suodatinta voitaisiin soveltaa paikannukseen.

PKF on työssä esitetyistä suodattimista lähinnä Kalmanin suodatinta. Tosin PKF:ssa virheiden jakaumat eivät aivan ole normaaleja, joten tarkasti ottaen joudutaan tyytymään BLUE-estimaattoriin. Lisäksi PKF:ssa ei käytetä hyväksi kaikkia mittauksia. Muun muassa niiden ajanhetkien mittauksia, joina ei saada ratkaistua yksikäsitteistä paikkaa, ei käytetä ollenkaan PKF:ssa hyödyksi. PKF on BLUE-estimaattori vain kun ehdollistavina mittauksina on PKF:lle syötetyt mittaukset. Oikein toteutetussa PKF:ssa ei esiinny hairahtumisilmiötä kuten EKF:ssa ja EKF2:ssa.

EKF ja EKF2 ovat hyvin yleisiä epälineaarisessa suodatuksessa. Niillä ei kuitenkaan ole läheskään yhtä vankkaa teoriaa takana kuin varsinaisella Kalmanin suodattimella. Simulaatioissa kuitenkin todettiin, että EKF ja EKF2 toimivat lähes oikein silloin, kun yksikäsitteinen paikkaratkaisu on lähes aina saatavilla. Tällöin myöskään EKF2:n antamat ehdolliset odotusarvot ja kovarianssimatriisit eivät juurikaan eronneet EKF:n vastaavista arvoista. Simulaatioissa havaittiin myös, että joissakin tasanmäärätyissä ja alimäärätyissä systeemeissä EKF hairahtuu hyvin helposti eikä ole konsistentti. Toisin sanoen se ei toimi oikein. Yhteistä näille systeemeille on, että ehdolliset tiheysfunktiot eivät muistuta normaalijakaumaa. Myöskään EKF2 ei kyseisissä tilanteissa aina ole konsistentti, mutta on useammin konsistentti kuin EKF. Toisaalta EKF2 yliarvioi helposti virhettä, eikä näin ollen ole optimaalinen. Kuitenkin hairahtuminen on niin suuri ja suhteellisen usein ali- ja tasanmäärätyissä systeemeissä tapahtuva virhe, että se kannattaa ottaa sovelluksissa huomioon.

Jatkotutkimuksessa olisi tärkeätä rakentaa suodatin, joka olisi konsistentti, mahdollisimman optimaalinen ja nopea toteuttaa käytännössä. Myöskään pelkkiin Kalmanin suodattimen laajennuksiin ei tulisi keskittyä vaan tarkastella myös erilaisia suodattimia, jotka huomioivat korkeampiakin tilastollisia momentteja. Esimerkiksi partikkelisuodattimet ja ruudukkomenetelmät vaikuttavat lupaavilta tutkimussuunnilta. Menestyksekäs soveltaminen käytäntöön vaatii mahdollisimman oikean tilamallin ja mittausmallin, joten sen puolen tutkimustakaan ei sovi unohtaa. Käytännön kannalta erittäin mielenkiintoisilta vaikuttavat suodattimet, jotka adaptiivisesti innovaatioiden perusteella sopeuttavat ”tilamallia” ja/tai ”mittausmallia” kyseiseen tilanteeseen. Esimerkiksi tilamallin sigma, mittausvirheen sigma ja monitieheijastus voisivat olla mukana tilavektorissa. Tosin tällöin yhä useammin kysymykseen tulee alimäärätty systeemi, jolloin on tärkeätä, että käytettävä suodatin toimii oikein myös alimäärätyissä systeemeissä.

Lähdeluettelo

[Arulampalam et al. 2002] Arulampalam, Sanjeev M.; Maskell, Simon; Gordon, Neil ja Clapp, Tim 2002. *A Tutorial on Particle Filters for Online Nonlinear/Non-Gaussian Bayesian Tracking.* IEEE Transactions on Signal Processing, Vol. 50, No. 2, helmikuu 2002.

[Athans et al. 1968] Athans, Michael; Wishner, Richard P. & Bertolini, Anthony 1968. *Suboptimal State Estimation for Continuous-Time Nonlinear Systems from Discrete Noisy Measurements.* IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. AC-13, No. 5, lokakuu 1968.

[Bar-Shalom et al. 2001] Bar-Shalom, Yaakov; Li, Rong X. & Kirubarajan, Thiagalingam 2001. *Estimation with Applications to Tracking and Navigation, Theory Algorithms and Software* John Wiley & Sons. 558 s.

[Boutayeb et al. 1995] Boutayeb, M.; Rafaralahy H. & Darouach M. 1995. *Convergence Analysis of the Extended Kalman Filter as an Observer for Non-linear Discrete-Time Systems.* Proceedings of the 34th Conference on Decision & Control, New Orleans, LA- joulukuu 1995.

[Boutayeb et al. 1997] Boutayeb, M.; Rafaralahy H. & Darouach M. 1997. *Convergence Analysis of the Extended Kalman Filter Used as an Observer for Nonlinear Deterministic Discrete-Time Systems.* IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 42, No. 4, huhtikuu 1997.

[Brown 1983] Brown, Robert Grover 1983. *Introduction to Random Signal Analysis and Kalman Filtering.* John Wiley & Sons. 347 s.

[Caffery&Stüber 1998] Caffery, James J. Jr. & Stüber, Gordon L. 1998. *Overview of Radiolocation in CDMA Cellular Systems.* IEEE Communications Magazine, Vol. 36, No. 4, sivut.38-45, huhtikuu 1998.

[Candy 1986] Candy, James V. 1986. *Signal Processing The Model-Based Approach.* McGraw-Hill Book Company. 240 s.

[Chaffee&Abel 1992] Chaffee, James W. & Abel, Jonathan S. 1992. *The GPS Filtering Problem.* IEEE Position Location and Navigation Symposium, Monterey, CA, 1992.

[Clinton 2000] Clinton, Bill 2000. *Statement by the President Regarding the United States' Decision to Stop Degrading Global Positioning System Accuracy.* The White House, Office of the Press Secretary toukokuu 2000. http://clinton4.nara.gov/textonly/WH/EOP/OSTP/html/0053_2.html (viitattu 23.9.2004)

[Drane et al. 1998] Drane, Christopher; Macnaughtan, Malcolm & Scott, Craig 1998. *Positioning GSM Telephones.* IEEE Communications Magazine, huhtikuu 1998, sivut 46-59.

[Evans 2002] Evans, Lawrence C. 2002. *An Introduction to Stochastic Differential Equations, version 1.2.* UC Berkeley, Matematiikan laitoksen opintomoniste. 139 s. http://math.berkeley.edu/∼Eevans/SDE.course.pdf (viitattu 3.9.2004)

[Farrell&Barth 1999] Farrell, Jay A.; Barth, Matthew 1999. *The Global Positioning System & Inertial Navigation.* McGraw-Hill. 340 s.

[Grewal&Andrews 1993] Grewal, Mohinder S. & Andrews, Angus P. 1993. *Kalman Filtering, Theory and Practice.* Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey. 381 s.

[Heinrichs et al. 2004] Heinrichs, Günter; Dovis, Fabio; Gianola Manuela & Mulassano, Paolo 2004. *Navigation and Communication Hybrid Positioning with a Common Receiver Architecture.* The European Navigation Conference, GNSS 2004.

[Hakamata et al. 2002] Hakamata, Tomohiro; Konishi, Yusuke; Suh, Yong-Cheol & Shibasaki, Ryosuke 2002. *Development of a Simulation System to Delineate Availability of GNSS with 3-D Digital Map.* http://www.gisdevelopment.net/aars/acrs/2002/gis/137.pdf

[Hubbard&Hubbard 1999] Hubbard, John H. & Hubbard, Barbara Burke 1999. *Vector Calculus, Linear Algebra, and Differential Forms, A Unified Approach.* Upper Saddle River, New Jersey. Prentice-Hall, Inc. 687 s.

[Ilmavirta 2002] Ilmavirta, Heidi 2002. *Kalman Filters in Passive Tracking.* Diplomityö, Tampereen teknillinen yliopisto 2002.

[Jazwinski 1970] Jazwinski, Andrew H. 1970. *Stochastic Processes and Filtering Theory.* Mathematics in Science and Engineering, Vol. 64. Academic Press. 378 s.

[Julier et al. 2000] Julier, Simon; Uhlmann Jeffrey & Durrant-Whyte, Hugh F. 2000. *A New Method for the Nonlinear Transformation of Means and Covariances in Filters and Estimators.* IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 45, No. 3, maaliskuu 2000.

[Julier&Uhlmann 2002] Julier, Simon & Uhlmann Jeffrey 2002. *Authors' Reply* IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 47, No. 8, elokuu 2002.

[Julier&Uhlmann 2004] Julier, Simon & Uhlmann Jeffrey 2004. *Unscented Filtering and Nonlinear Estimation.* Proceedings of the IEEE, Vol. 92, No. 3, maaliskuu 2003.

[Julier&Durrant-Whyte 2003] Julier, Simon J. & Durrant-Whyte, Hugh F. 2003. *On The Role of Process Models in Autonomous Land Vehicle Navigation Systems.* IEEE Transactions on Robotics and Automation, Vol. 19, No. 1, helmikuu 2003.

[Kalman 1960] Kalman, Rudolf E. 1960. *A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems.* Transactions of the ASME-Journal of Basic Engineering, 82: 35-45. 1960

[Kaplan 1996] Kaplan, Elliot D. (ed.) 1996. *Understanding GPS: Principles and Applications.* Norwood, Artech House. 629 s.

[Kaleva 2003a] Kaleva, Osmo 2003. *Stokastiset Prosessit.* Tampereen teknillinen yliopisto, opintomoniste. 116 s.
http://butler.cc.tut.fi/∼kaleva/Stokastiset.pdf (viitattu 6.9.2004)

[Kaleva 2003b] Kaleva, Osmo 2003. *Matemaattinen optimointi 1.* Tampereen teknillinen yliopisto, opintomoniste. 166 s.
http://butler.cc.tut.fi/∼kaleva/Mot1.pdf (viitattu 6.9.2004)

[Le et al. 2003] Le, Bao Long; Ahmed, Kazi & Tsuji, Hiroyuki 2003. *Mobile Location Estimator with NLOS Mitigation Using Kalman Filtering.* IEEE Wireless Communications and Networking 2003, Vol. 3, sivut 1969 - 1973.

[Lefebvre et al. 2002] Lefebvre, Tine; Bruyninckx, Herman & De Schutter, Joris 2002. *Comment on "A New Method for the Nonlinear Transformation of Means and Covariances in Filters and Estimators".* IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 47, No. 8, elokuu 2002.

[Lefebvre et al. 2004] Lefebvre, Tine; Bruyninckx, Herman & De Schutter, Joris 2004. *Kalman Filters for Non-linear Systems: a Comparison of Performance.* International Journal of Control, Vol. 77, No. 7, toukokuu 2004.

[Ljung 1979] Ljung, Lennart 1979. *Asymptotic Behavior of the Extended Kalman Filter as a Parameter Estimator for Linear Systems.* IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. AC-24, No. 1, lokakuu 1979.

[Ma 2003] Ma, Changlin 2003. *Integration of GPS and Cellular Networks to Improve Wireless Location Performance.* ION GPS/GNSS 2003 julkaisuissa, sivut 1585-1596.

[Mardia et al. 1979] Mardia, K. V.; Kent, J. T. & Bibby, J. M. 1979. *Multivariate Analysis.* Academic Press. 518 s.

[Maybeck 1979] Maybeck, Peter S. 1979. *Stochastic Models, Estimation, and Control, Vol. 1.* Mathematics in Science and Engineering, Vol. 141. Academic Press. 432 s.

[Maybeck 1982] Maybeck, Peter S. 1982. *Stochastic Models, Estimation, and Control, Vol. 2.* Mathematics in Science and Engineering, Vol. 141-2. Academic Press. 289 s.

[Moraal&Grizzle 1995] Moraal, P. E. & Grizzle, J. W. 1995. *Observer Design for Nonlinear Systems with Discrete-Time Measurements.* IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 40, No. 3, maaliskuu 1995.

[Mäkilä 2004] Mäkilä, P. M. 2004. *Kalman Filtering and Linear Quadratic Gaussian Control, Part I-Kalman Filtering.* Tampereen teknillinen yliopisto, opintomoniste kurssille 7604120, syksy 2004.
http://www.ac.tut.fi/aci/courses/7604120/stoch04oct06.pdf
(viitattu 21.10.2004)

[Nájar&Vidal 2003] Nájar, Montse & Nidal, Josep 2003. *Kalman Tracking For Mobile Location In NLOS Situations.* 14th IEEE Personal, Indoor and Mobile Radio Communications 2003 julkaisuissa, Vol. 3, sivut 2203 - 2207.

[Nørgaard et al. 2000] Nørgaard, Magnus; Poulsen, Niels K. & Ravn, Ole 2000. *New Develpoments in State Estimation for Nonlinear Systems.* Automatica, Vol. 36, No. 11, 2000.

[Parkinson&Spilker 1996] Parkinson, B. (toim.) & Spilker, J. (toim.) 1996. *Global Positioning System: Theory and Applications Volume I.* Cambridge, Charles Stark Draper Laboratory, Inc., 804 s.

[Perttula 1999a] Perttula, Antti 1999. *Vektoreita ja vektorimuuttujan funktioiden teoriaa.* Lectre, Opintomoniste.

[Perttula 1999b] Perttula, Antti 1999. *Lineaarialgebraa.* Lectre, Opintomoniste.

[Pohjavirta&Ruohonen 2004] Pohjavirta, Armo & Ruohonen, Keijo 2004. *Laaja tilastomatematiikka.* Tampereen teknillinen yliopisto, opintomoniste. 136 s.
http://math.tut.fi/∼ruohonen/LTM.pdf (viitattu 6.9.2004)

[Pohjavirta&Ruohonen 2003] Pohjavirta, Armo & Ruohonen, Keijo 2003. *Laaja vektorianalyysi.* Tampereen teknillinen yliopisto, opintomoniste. 135 s.
http://math.tut.fi/∼ruohonen/LVA.pdf (viitattu 6.9.2004)

[Poutanen 1998] Poutanen, Markku 1998. *GPS-paikanmääritys.* Tähtitieteellinen yhdistys Ursa, Helsingissä 1998.

[Reif et al. 1999] Reif, Konrad; Günther, Stefan; Yaz, Engin & Unbehauen, Rolf 1999. *Stochastic Stability of the Discrete-Time Extended Kalman Filter.* IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 44, No. 4, huhtikuu 1999.

[Ristic et al. 2004] Ristic, Branko; Arulampalam, Sanjeev & Gordon, Neil 2004. *Beyond the Kalman Filter, Particle Filters for Tracking Applications.* Boston, London, Artech House. 299 s.

[Robert&Casella 1999] Robert, Christian P. & Casella, George 1999. *Monte Carlo Statistical Methods.* Springer. 507 s.

[Sage&Melsa 1971] Sage, Andrew P. & Melsa, James L. 1971. *Estimation Theory with Applications to Communications and Control.* McGraw-Hill Book Company. 529 s.

[Schei 1997] Schei, Tor Steinar 1997. *A Finite-Difference Method for Linearization in Nonlinear Estimation Algorithms.* Automatica, Vol. 33, No. 11, 1997.

[Sherman 1955] Sherman, S. 1955. *A Theorem on Convex Sets with Applications.* The Annals of Mathematical Statistics, Vol. 26, No. 4 (Dec., 1955), 763-767.

[Sirola et al. 2003] Sirola, Niilo; Piché, Robert & Syrjärinne, Jari 2003. *Closed-Form Solutions for Hybrid Cellular/GPS Positioning.* ION GPS/GNSS 2003 julkaisuissa, sivut 1613-1619.

[Sorenson&Stubberud 1968] Sorenson, H. W. & Stubberud, A. R. 1968. *Recursive Filtering for Systems with Small but Non-negligible Non-linearities* International Journal of Control, Vol. 7, No. 3, 1968.

[Spirito et al. 2001] Spirito, Maurizio A.; Pöykkö, Sami & Knuuttila, Olli 2001. *Experimental Performance of Methods to Estimate the Location of Legacy Handsets in GSM.* IEEE Vehicular Technology Conference, 2001, sivut 2716-2720.

[Suh et al. 2003] Suh, TongCheol; Konishi, Yusuke; Hakamata, Tomohiro & Shibasaki Ryosuke 2003. *Evaluation of Positioning Service Level for Intelligent Transportation Systems in Urban Area using a Simulation Tool.* ION GPS/GNSS 2003 julkaisuissa, sivut 206-212.

[Syrjärinne 2001] Syrjärinne Jari 2001. *Studies of modern techniques for personal positioning.* Tampere, Tampere teknillinen korkeakoulu, Julkaisuja 319. 180 s.

[Vossiek et al. 2003] Vossiek, Martin; Wiebking, Leif; Gulden, Peter; Wieghardt, Jan; Hoffmann, Clemens & Heide, Patric 2003. *Wireless Local Positioning.* IEEE microwave magazine, joulukuu 2003, sivut 77-86.

[Wishner et al. 1969] Wishner, R. P.; Tabaczynski, J. A. & Athans, M. 1969. *A Comparison of Three Non-Linear Filters.* Automatica, Vol. 5, 1969.

Liite A

Kalmanin suodattimen johto

Lause A.1. *Oletetaan, että on seuraavanlainen dynaaminen systeemi*

Alkuehto	$\mathbf{x}_0 \sim \mathrm{N}_{n_x}(x_0, \mathrm{P}_0)$
Tilamalli	$\mathbf{x}_k = \Phi_{k-1}\mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{w}_{k-1}, \quad \mathbf{w}_{k-1} \sim \mathrm{N}_{n_x}(\mathbf{0}, \mathrm{Q}_{k-1})$
Mittausmalli	$\mathbf{y}_k = \mathrm{H}_k\mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k, \quad \mathbf{v}_k \sim \mathrm{N}_{n_y}(\mathbf{0}, \mathrm{R}_k)$

missä tilamallin virheet ($\mathbf{w}_{k-1}$) oletetaan valkoiseksi ja riippumattomaksi alkuehdosta $\mathbf{x}_0$ ja mittausvirheet ($\mathbf{v}_k$) oletetaan valkoiseksi ja riippumattomaksi prosessin $\mathbf{w}_k$ kanssa. Matriisit P_0 ja R_k:t oletetaan positiivi definiittisiksi. Tiheysfunktioita $f(x_{k+1}|y_{1:k})$ ja $f(x_k|y_{1:k})$ ($k \in \mathbb{N}$) kutsutaan priori- ja posteriori-tilojen tiheysfunktioiksi tässä järjestyksessä. Tiheysfunktio $f(x_0|y_{1:0})$ vastaa alkuehdon $\mathbf{x}_0$ tiheysfunktiota. Tällöin yllä olevan dynaamisen systeemin priori- ja posteriori-tilat ovat normaalisti jakautuneita ja niiden odotusarvot ja kovarianssimatriisit ovat

Priori-tilan odotusarvo	$\hat{x}_k^- = \Phi_{k-1}\hat{x}_{k-1}$
Priori-tilan kovarianssimatriisi	$\hat{\mathrm{P}}_k^- = \Phi_{k-1}\hat{\mathrm{P}}_{k-1}\Phi_{k-1}^T + \mathrm{Q}_{k-1}$
Posteriori-tilan odotusarvo	$\hat{x}_k = \hat{x}_k^- + \mathrm{K}_k(y_k - \mathrm{H}_k\hat{x}_k^-)$
Posteriori-tilan kovarianssimatriisi	$\hat{\mathrm{P}}_k = (\mathrm{I} - \mathrm{K}_k\mathrm{H}_k)\hat{\mathrm{P}}_k^-$
Kalmanin vahvistus	$\mathrm{K}_k = \hat{\mathrm{P}}_k^-\mathrm{H}_k^T(\mathrm{H}_k\hat{\mathrm{P}}_k^-\mathrm{H}_k^T + \mathrm{R}_k)^{-1}$

kun $k \geq 1$, kun $k = 0$ niin $\hat{x}_0 = x_0$ ja $\hat{\mathrm{P}}_0 = \mathrm{P}_0$. Kyseiset kovarianssimatriisit ovat positiivisestidefiniittejä.

Todistus. Todistetaan induktiolla, että posteriori-tiloilla on lauseen mainitsemat ominaisuudet ja että siitä seuraa myös lauseen ominaisuudet priori-tiloille.

Induktioalku: Induktioalku on selvä, koska tiheysfunktio $f(x_0|y_{1:0})$ on normaalisti jakautunut ja P_0 on positiivisesti definiitti.

Induktioaskel: Näytetään, että jos $\mathbf{x}_{k-1}|y_{1:k-1} \sim \mathrm{N}_{n_x}(\hat{x}_{k-1}, \hat{\mathrm{P}}_{k-1})$ ja kovarianssimatriisi $\hat{\mathrm{P}}_{k-1}$ on positiivisesti definiitti, niin $\mathbf{x}_k|y_{1:k} \sim \mathrm{N}_{n_x}(\hat{x}_k, \hat{\mathrm{P}}_k)$ ja kovarianssimatriisi $\hat{\mathrm{P}}_k$ on positiivisesti definiitti. Näytetään ensin, että priori-tilalla $\hat{\mathbf{x}}_k^- = \mathbf{x}_k|y_{1:k-1}$ on lauseessa olevat ominaisuudet. Riippumattomuus oletusten mukaan $\mathbf{w}_{k-1}|y_{1:k-1} = \mathbf{w}_{k-1}$. Tilamallin mukaan

$$\hat{\mathbf{x}}_k^- = \begin{bmatrix} \Phi_{k-1} & \mathrm{I}_{n_x \times n_x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{k-1} \\ \mathbf{w}_{k-1} \end{bmatrix}, \tag{A.1}$$

missä oletusten mukaan

$$\mathrm{E}\left(\begin{bmatrix} \mathbf{x}_{k-1} \\ \mathbf{w}_{k-1} \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} \hat{x}_{k-1} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \mathrm{V}\left(\begin{bmatrix} \mathbf{x}_{k-1} \\ \mathbf{w}_{k-1} \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} \hat{\mathrm{P}}_{k-1} & 0_{n_x \times n_x} \\ 0_{n_x \times n_x} & \mathrm{Q}_{k-1} \end{bmatrix}. \tag{A.2}$$

Koska priori-tila on lineaarinen kuvaus normaalisti jakautuneesta satunnaismuuttujasta on se myös itse normaalisti jakautunut odotusarvolla $\hat{x}_k^-$ ja kovarianssimatriisilla $\hat{\mathrm{P}}_k^-$ [Mardia et al. 1979, s.62]

$$\begin{aligned} \hat{x}_k^- &= \mathrm{E}(\hat{\mathbf{x}}_k^-) = \mathrm{E}\left(\begin{bmatrix} \Phi_{k-1} & \mathrm{I}_{n_x \times n_x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{k-1} \\ \mathbf{w}_{k-1} \end{bmatrix} \right) \\ &= \begin{bmatrix} \Phi_{k-1} & \mathrm{I}_{n_x \times n_x} \end{bmatrix} \mathrm{E}\left(\begin{bmatrix} \mathbf{x}_{k-1} \\ \mathbf{w}_{k-1} \end{bmatrix} \right) = \Phi_{k-1}\hat{x}_{k-1} \end{aligned} \tag{A.3}$$

$$\begin{aligned} \hat{\mathrm{P}}_k^- &= \mathrm{V}(\hat{\mathbf{x}}_k^-) = \mathrm{V}\left(\begin{bmatrix} \Phi_{k-1} & \mathrm{I}_{n_x \times n_x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{k-1} \\ \mathbf{w}_{k-1} \end{bmatrix} \right) \\ &= \begin{bmatrix} \Phi_{k-1} & \mathrm{I}_{n_x \times n_x} \end{bmatrix} \mathrm{V}\left(\begin{bmatrix} \mathbf{x}_{k-1} \\ \mathbf{w}_{k-1} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \Phi_{k-1}^T \\ \mathrm{I}_{n_x \times n_x} \end{bmatrix} = \Phi_{k-1}\hat{\mathrm{P}}_{k-1}\Phi_{k-1}^T + \mathrm{Q}_{k-1}. \end{aligned} \tag{A.4}$$

Huom: tulos pitää paikkansa myös vaikka satunnaismuuttuja noudattaisi singulaarista normaalijakaumaa. Tälläinen tilanne syntyy silloin, kun Q_{k-1} on singulaarinen. Tässä työssä singulaarista normaalijakaumaa ei käsitellä tämän tarkemmin.

Koska $\hat{\mathrm{P}}_{k-1}$ on positiivisesti definiitti ja Q_{k-1} on positiivisesti semidefiniitti niin $\hat{\mathrm{P}}_k^-$ on positiivisesti definiitti. Näin ollen priori-tilan tiheysfunktio on (2.10)

$$f(x_k|y_{1:k-1}) = \frac{1}{\sqrt{\det(2\pi\hat{\mathrm{P}}_k^-)}} \exp\left(-\frac{1}{2}(x_k - \hat{x}_k^-)^T(\hat{\mathrm{P}}_k^-)^{-1}(x_k - \hat{x}_k^-) \right). \tag{A.5}$$

Bayesin säännön ja kohinoiden valkoisuuden avulla saadaan posteriori-tilan tiheysfunktiolle kaava (2.8)

$$f(x_k|y_{1:k}) = \frac{f(y_k|x_k)f(x_k|y_{1:k-1})}{f(y_k|y_{1:k-1})}. \tag{A.6}$$

$f(x_k|y_{1:k-1})$ on annettu kaavassa (A.5), joten ratkaistaan seuraavaksi kaksi muuta kaavassa esiintyvää tiheysfunktiota. Vastaavasti kuin saatiin ratkaistua priori-tilan tiheysfunktio, saadaan ratkaistua tiheysfunktio $f(y_k|y_{1:k-1})$, koska

$$\mathbf{y}_k = \begin{bmatrix} \mathrm{H}_k & \mathrm{I}_{n_y \times n_y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_k \\ \mathbf{v}_k \end{bmatrix}. \tag{A.7}$$

Näin ollen

$$f(y_k|y_{1:k-1}) = \frac{\exp\Big(-\frac{1}{2}(y_k - \mathrm{H}_k\hat{x}_k^-)^T(\mathrm{H}_k\hat{\mathrm{P}}_k^-\mathrm{H}_k^T + \mathrm{R}_k)^{-1}(y_k - \mathrm{H}_k\hat{x}_k^-)\Big)}{\sqrt{\det(2\pi(\mathrm{H}_k\hat{\mathrm{P}}_k^-\mathrm{H}_k^T + \mathrm{R}_k))}}. \tag{A.8}$$

Ratkaistaan sitten tiheysfunktio $f(y_k|x_k)$. Mittausmallin mukaan tiedetään

$$\mathbf{v}_k = (\mathbf{y}_k - \mathrm{H}_k\mathbf{x}_k) \sim \mathrm{N}_{n_y}(\mathbf{0}, \mathrm{R}_k), \tag{A.9}$$

joten

$$f(y_k|x_k) = \frac{1}{\sqrt{\det(2\pi\mathrm{R}_k)}} \exp\left(-\frac{1}{2}(y_k - \mathrm{H}_k x_k)^T\mathrm{R}_k^{-1}(y_k - \mathrm{H}_k x_k)\right). \tag{A.10}$$

Sijoittamalla kaavat (A.5), (A.8) ja (A.10) yhtälöön (A.6) saadaan

$$f(x_k|y_{1:k}) = \sqrt{\frac{\det(2\pi(\mathrm{H}_k\hat{\mathrm{P}}_k^-\mathrm{H}_k^T + \mathrm{R}_k))}{\det(2\pi\mathrm{R}_k)\det(2\pi\hat{\mathrm{P}}_k^-)}} \exp(-\frac{1}{2}\star), \tag{A.11}$$

missä

$$\begin{aligned} \star =& (y_k - \mathrm{H}_k x_k)^T\mathrm{R}_k^{-1}(y_k - \mathrm{H}_k x_k) + (x_k - \hat{x}_k^-)^T(\hat{\mathrm{P}}_k^-)^{-1}(x_k - \hat{x}_k^-) \\ &- (y_k - \mathrm{H}_k\hat{x}_k^-)^T(\mathrm{H}_k\hat{\mathrm{P}}_k^-\mathrm{H}_k^T + \mathrm{R}_k)^{-1}(y_k - \mathrm{H}_k\hat{x}_k^-) \end{aligned} \tag{A.12}$$

Tutkitaan ensin eksponenttifunktion kerrointa. Aluksi havaitaan, että

$$\sqrt{\frac{\det(2\pi(\mathrm{H}_k\hat{\mathrm{P}}_k^-\mathrm{H}_k^T + \mathrm{R}_k))}{\det(2\pi\mathrm{R}_k)\det(2\pi\hat{\mathrm{P}}_k^-)}} = \sqrt{\frac{1}{(2\pi)^{n_x}\frac{\det(\mathrm{R}_k)\det(\hat{\mathrm{P}}_k^-)}{\det(\mathrm{H}_k\hat{\mathrm{P}}_k^-\mathrm{H}_k^T+\mathrm{R}_k)}}}. \tag{A.13}$$

Näytetään, että $\det(\hat{\mathrm{P}}_k) = \frac{\det(\mathrm{R}_k)\det(\hat{\mathrm{P}}_k^-)}{\det(\mathrm{H}_k\hat{\mathrm{P}}_k^-\mathrm{H}_k^T+\mathrm{R}_k)}$, missä $\hat{\mathrm{P}}_k = (\mathrm{I} - \mathrm{K}_k\mathrm{H}_k)\hat{\mathrm{P}}_k^-$. Tämä on ekvivalentti väitteelle $\det(\hat{\mathrm{P}}_k)\det(\mathrm{H}_k\hat{\mathrm{P}}_k^-\mathrm{H}_k^T + \mathrm{R}_k) = \det(\mathrm{R}_k)\det(\hat{\mathrm{P}}_k^-)$. Tämä siksi, että $\mathrm{H}_k\hat{\mathrm{P}}_k^-\mathrm{H}_k^T + \mathrm{R}_k$ on positiivisesti definiitti, jolloin $\det(\mathrm{H}_k\hat{\mathrm{P}}_k^-\mathrm{H}_k^T + \mathrm{R}_k) \neq 0$. Käytetään väitteen näyttämiseen determinantin ominaisuuksia, olkoon A, B reaalisia neliömatriiseja ja C mielivaltainen reaalimatriisi:

$$\det(\mathrm{AB}) = \det(\mathrm{A})\det(\mathrm{B}), \quad [\text{Perttula 1999b, s.30}] \tag{A.14}$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{C} \\ 0 & \mathrm{B} \end{bmatrix}\right) = \det(\mathrm{A})\det(\mathrm{B}), \quad \text{apulause } A.2 \tag{A.15}$$

Muodostetaan matriisi-identiteetti ($\hat{\mathrm{P}}_k = \hat{\mathrm{P}}_k^-(\mathrm{I} - \mathrm{H}_k^T\mathrm{K}^T)$, kovarianssimatriisien symmetrisyyden johdosta)

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} \mathrm{I} & 0 \\ \mathrm{H}_k & \mathrm{I} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \hat{\mathrm{P}}_k^- & 0 \\ 0 & \mathrm{R}_k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathrm{I} & \mathrm{H}_k^T \\ 0 & \mathrm{I} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \hat{\mathrm{P}}_k^- & \hat{\mathrm{P}}_k^-\mathrm{H}_k^T \\ \mathrm{H}_k\hat{\mathrm{P}}_k^- & \mathrm{H}_k\hat{\mathrm{P}}_k^-\mathrm{H}_k^T + \mathrm{R}_k \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \hat{\mathrm{P}}_k & \hat{\mathrm{P}}_k^-\mathrm{H}_k^T \\ 0 & \mathrm{H}_k\hat{\mathrm{P}}_k^-\mathrm{H}_k^T + \mathrm{R}_k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathrm{I} & 0 \\ \mathrm{K}^T & \mathrm{I} \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{A.16}$$

Kaavojen (A.14), (A.15) ja (A.16) perusteella $\det(\hat{\mathrm{P}}_k)\det(\mathrm{H}_k\hat{\mathrm{P}}_k^-\mathrm{H}_k^T + \mathrm{R}_k) = \det(\mathrm{R}_k)\det(\hat{\mathrm{P}}_k^-)$, joten kaavan (A.13) mukaan kaavan (A.11) eksponenttifunktion kerroin on

$$\sqrt{\frac{\det(2\pi(\mathrm{H}_k\hat{\mathrm{P}}_k^-\mathrm{H}_k^T + \mathrm{R}_k))}{\det(2\pi\mathrm{R}_k)\det(2\pi\hat{\mathrm{P}}_k^-)}} = \frac{1}{\sqrt{\det(2\pi\hat{\mathrm{P}}_k)}}. \tag{A.17}$$

Tutkitaan seuraavaksi kaavan (A.12) neliömuotojen summaa. Tarkoituksena on kirjoittaa sulut auki ja pyrkiä rakentamaan kaava yhdeksi neliömuodoksi. Laskemisessa käytetään hyvin paljon kaavaa (A.18), missä A on mielivaltainen neliömatriisi ja $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ sopivan kokoisia vektoreita.

$$(\mathbf{a} \pm \mathbf{b})^T\mathrm{A}(\mathbf{a} \pm \mathbf{b}) = \mathbf{a}^T\mathrm{A}\mathbf{a} \pm 2\mathbf{a}^T\mathrm{A}\mathbf{b} + \mathbf{b}^T\mathrm{A}\mathbf{b} \tag{A.18}$$

$$\begin{aligned} \star &= (y_k - \mathrm{H}_k x_k)^T\mathrm{R}_k^{-1}(y_k - \mathrm{H}_k x_k) + (x_k - \hat{x}_k^-)^T(\hat{\mathrm{P}}_k^-)^{-1}(x_k - \hat{x}_k^-) \\ &\quad - (y_k - \mathrm{H}_k\hat{x}_k^-)^T(\mathrm{H}_k\hat{\mathrm{P}}_k^-\mathrm{H}_k^T + \mathrm{R}_k)^{-1}(y_k - \mathrm{H}_k\hat{x}_k^-) \\ &= x_k^T\left[(\hat{\mathrm{P}}_k^-)^{-1} + \mathrm{H}_k^T\mathrm{R}_k^{-1}\mathrm{H}_k\right]x_k - 2x_k^T\left[(\hat{\mathrm{P}}_k^-)^{-1}\hat{x}_k^- + \mathrm{H}_k^T\mathrm{R}_k^{-1}y_k\right] \\ &\quad + y_k^T\left[\mathrm{R}_k^{-1} - (\mathrm{H}_k\hat{\mathrm{P}}_k^-\mathrm{H}_k^T + \mathrm{R}_k)^{-1}\right]y_k + 2(\hat{x}_k^-)^T\mathrm{H}^T(\mathrm{H}_k\hat{\mathrm{P}}_k^-\mathrm{H}_k^T + \mathrm{R}_k)^{-1}y_k \\ &\quad + (\hat{x}_k^-)^T\left[(\hat{\mathrm{P}}_k^-)^{-1} + \mathrm{H}_k^T(\mathrm{H}_k\hat{\mathrm{P}}_k^-\mathrm{H}_k^T + \mathrm{R}_k)^{-1}\mathrm{H}_k\right]\hat{x}_k^- \\ &= x_k^T\Sigma_k x_k - 2x_k^T\mathbf{z}_k + y_k^T\left[\mathrm{R}_k^{-1} - (\mathrm{H}_k\hat{\mathrm{P}}_k^-\mathrm{H}_k^T + \mathrm{R}_k)^{-1}\right]y_k \\ &\quad + 2(\hat{x}_k^-)^T\mathrm{H}^T(\mathrm{H}_k\hat{\mathrm{P}}_k^-\mathrm{H}_k^T + \mathrm{R}_k)^{-1}y_k \\ &\quad + (\hat{x}_k^-)^T\left[(\hat{\mathrm{P}}_k^-)^{-1} + \mathrm{H}_k^T(\mathrm{H}_k\hat{\mathrm{P}}_k^-\mathrm{H}_k^T + \mathrm{R}_k)^{-1}\mathrm{H}_k\right]\hat{x}_k^-, \end{aligned} \tag{A.19}$$

missä on otettu käyttöön merkinnät

$$\Sigma_k = (\hat{\mathrm{P}}_k^-)^{-1} + \mathrm{H}_k^T\mathrm{R}_k^{-1}\mathrm{H}_k \text{ ja } \mathbf{z}_k = (\hat{\mathrm{P}}_k^-)^{-1}\hat{x}_k^- + \mathrm{H}_k^T\mathrm{R}_k^{-1}y_k. \tag{A.20}$$

Apulauseen A.3 kaavojen (A.32), (A.33) ja (A.34) mukaan kaava (A.19) saadaan muotoon

$$\begin{aligned}
\star &= x_k^T \Sigma_k x_k - 2x_k^T \mathbf{z}_k + y_k^T \big[\mathrm{R}_k^{-1} - (\mathrm{H}_k \hat{\mathrm{P}}_k^- \mathrm{H}_k^T + \mathrm{R}_k)^{-1}\big] y_k \\
&\quad + 2(\hat{x}_k^-)^T \mathrm{H}^T (\mathrm{H}_k \hat{\mathrm{P}}_k^- \mathrm{H}_k^T + \mathrm{R}_k)^{-1} y_k \\
&\quad + (\hat{x}_k^-)^T \big[(\hat{\mathrm{P}}_k^-)^{-1} + \mathrm{H}_k^T (\mathrm{H}_k \hat{\mathrm{P}}_k^- \mathrm{H}_k^T + \mathrm{R}_k)^{-1} \mathrm{H}_k\big] \hat{x}_k^- \\
&= x_k^T \Sigma_k x_k - 2x_k^T \mathbf{z}_k + y_k^T \big[\mathrm{R}_k^{-1} \mathrm{H}_k \Sigma_k^{-1} \mathrm{H}_k^T \mathrm{R}_k^{-1}\big] y_k \\
&\quad + 2(\hat{x}_k^-)^T (\hat{\mathrm{P}}_k^-)^{-1} \Sigma_k^{-1} \mathrm{H}_k^T \mathrm{R}_k^{-1} y_k + (\hat{x}_k^-)^T \big[(\hat{\mathrm{P}}_k^-)^{-1} \Sigma_k^{-1} (\hat{\mathrm{P}}_k^-)^{-1}\big] \hat{x}_k^- \\
&= x_k^T \Sigma_k x_k - 2x_k^T \mathbf{z}_k + \big[(\hat{\mathrm{P}}_k^-)^{-1} \hat{x}_k^- + \mathrm{H}_k^T \mathrm{R}_k^{-1} y_k\big]^T \Sigma_k^{-1} \big[(\hat{\mathrm{P}}_k^-)^{-1} \hat{x}_k^- + \mathrm{H}_k^T \mathrm{R}_k^{-1} y_k\big] \\
&= x_k^T \Sigma_k x_k - 2x_k^T \Sigma_k \Sigma_k^{-1} \mathbf{z}_k + \mathbf{z}_k^T \Sigma_k^{-1} \Sigma_k \Sigma_k^{-1} \mathbf{z}_k \\
&= \big[x_k - \Sigma_k^{-1} \mathbf{z}_k\big]^T \Sigma_k \big[x_k - \Sigma_k^{-1} \mathbf{z}_k\big]
\end{aligned} \tag{A.21}$$

Apulauseen A.3 kaavan (A.34) mukaan, kertomalla se oikealta ja vasemmalta matriisilla $\hat{\mathrm{P}}_k^-$, saadaan

$$\begin{aligned}
\Sigma_k^{-1} &= \big[(\hat{\mathrm{P}}_k^-)^{-1} + \mathrm{H}_k^T \mathrm{R}_k^{-1} \mathrm{H}_k\big]^{-1} = \hat{\mathrm{P}}_k^- - \hat{\mathrm{P}}_k^- \mathrm{H}_k^T \big[\mathrm{H}_k \hat{\mathrm{P}}_k^- \mathrm{H}_k^T + \mathrm{R}_k\big]^{-1} \mathrm{H}_k \hat{\mathrm{P}}_k^- \\
&= (\mathrm{I} - \mathrm{K}_k \mathrm{H}_k) \hat{\mathrm{P}}_k^-,
\end{aligned} \tag{A.22}$$

kun $\mathrm{K}_k = \hat{\mathrm{P}}_k^- \mathrm{H}_k^T (\mathrm{H}_k \hat{\mathrm{P}}_k^- \mathrm{H}_k^T + \mathrm{R}_k)^{-1}$, joten huomataan, että $\hat{\mathrm{P}}_k = \Sigma_k^{-1}$. Edellä olevasta kaavasta huomataan myös, koska $\hat{\mathrm{P}}_k^-$ ja R_k on positiivi definiittejä ja positiividefiniitti matriisin käänteismatriisi on positiivi definiitti [Perttula 1999b, s.101], että $\hat{\mathrm{P}}_k$ on positiivi definiitti.

Kootaan palaset yhteen, kaavojen (A.11), (A.17), (A.21) ja (A.22) mukaan

$$f(x_k|y_{1:k}) = \frac{1}{\sqrt{\det(2\pi \hat{\mathrm{P}}_k)}} \exp\bigg(-\frac{1}{2} \big[x_k - \hat{\mathrm{P}}_k \mathbf{z}_k\big]^T \hat{\mathrm{P}}_k^{-1} \big[x_k - \hat{\mathrm{P}}_k \mathbf{z}_k\big] \bigg). \tag{A.23}$$

Tästä seuraa, että posteriori-tila on normaalisti jakautunut (määritelmä 2.6) odotusarvolla $\hat{\mathrm{P}}_k \mathbf{z}_k$ ja kovarianssimatriisilla $\hat{\mathrm{P}}_k = (\mathrm{I} - \mathrm{K}_k \mathrm{H}_k) \hat{\mathrm{P}}_k^-$, joka tiedetään positiividefiniitiksi. Näytetään vielä, että odotusarvo on lauseessa annettua muotoa

$$\begin{aligned}
\hat{\mathrm{P}}_k \mathbf{z}_k &= (\mathrm{I} - \mathrm{K}_k \mathrm{H}_k) \hat{\mathrm{P}}_k^- \big[(\hat{\mathrm{P}}_k^-)^{-1} \hat{x}_k^- + \mathrm{H}_k^T \mathrm{R}_k^{-1} y_k\big] \\
&= \hat{x}_k^- - \mathrm{K}_k \mathrm{H}_k \hat{x}_k^- + \big[\hat{\mathrm{P}}_k^- \mathrm{H}_k^T \mathrm{R}_k^{-1} - \mathrm{K}_k \mathrm{H}_k \hat{\mathrm{P}}_k^- \mathrm{H}_k^T \mathrm{R}_k^{-1}\big] y_k \\
&= \hat{x}_k^- - \mathrm{K}_k \mathrm{H}_k \hat{x}_k^- + \big[\hat{\mathrm{P}}_k^- \mathrm{H}_k^T \mathrm{R}_k^{-1} - \mathrm{K}_k (\mathrm{H}_k \hat{\mathrm{P}}_k^- \mathrm{H}_k^T + \mathrm{R}_k - \mathrm{R}_k) \mathrm{R}_k^{-1}\big] y_k \\
&= \hat{x}_k^- + \mathrm{K}_k (y_k - \mathrm{H}_k \hat{x}_k^-) \\
&= \hat{x}_k
\end{aligned} \tag{A.24}$$

Joten

$$\mathbf{x}_k | y_{1:k} \sim \mathrm{N}_{n_x}(\hat{x}_k, \hat{\mathrm{P}}_k), \tag{A.25}$$

missä $\hat{\mathrm{P}}_k$ on positiividefiniitti. Näin ollen induktioperiaatteen nojalla lause on todistettu kaikille $k \in \mathbb{N}$. □

Apulause A.2. *Jos* $\mathrm{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\mathrm{B} \in \mathbb{R}^{m\times m}$, $\mathrm{C} \in \mathbb{R}^{n\times m}$ *ja*

$$\mathrm{D} = \begin{bmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{C} \\ 0 & \mathrm{B} \end{bmatrix}, \tag{A.26}$$

niin

$$\det(\mathrm{D}) = \det(\mathrm{A})\det(\mathrm{B}) \tag{A.27}$$

Todistus. Todistetaan lause soveltamalla Hubbardin antamaa laskukaavaa determinantille [Hubbard&Hubbard 1999, s.416]

$$\det(\mathrm{D}) = \sum_{\sigma_\mathrm{D}} \Big(\mathrm{sgn}(\sigma_\mathrm{D}) \prod_{i=1}^{n+m} d_{i,\sigma_\mathrm{D}(i)} \Big), \tag{A.28}$$

missä σ_D on jokin lukujen $(1,\ldots,n+m)$ permutaatio, $\mathrm{sgn}(\sigma_\mathrm{D})$ on $+1$, jos permutaatio σ_D on parillinen ja -1 jos permutaatio σ_D on pariton. $d_{i,\sigma_\mathrm{D}(i)}$ on matriisin D $(i,\sigma_\mathrm{D}(i))$ alkio. Kaikilla permutaatioilla, joissa $\sigma_\mathrm{D}(i) \leq n$, kun $i > n$, kaavassa (A.28) oleva tulo menee nollaksi. Jos $\sigma_\mathrm{D}(i) > n$, kun $i > n$ niin $\sigma_\mathrm{D}(i) \leq n$, kun $i \leq n$. Olkoon σ_A jokin lukujen $(1,\ldots,n)$ permutaatio ja σ_B jokin lukujen $(1,\ldots,m)$ permutaatio. Tällöin permutaatiot σ_D joita vastaava tulo kaavassa (A.28) ei mene nollaksi voidaan esittää permutaatioiden σ_A, σ_B avulla

$$\sigma_\mathrm{D}(i) = \begin{cases} \sigma_\mathrm{A}(i), & \text{kun } i \leq n \\ \sigma_\mathrm{B}(i-n)+n, & \text{kun } i > n \end{cases} \tag{A.29}$$

Permutaatioiden merkkien tulo $\mathrm{sgn}(\sigma_\mathrm{A})\,\mathrm{sgn}(\sigma_\mathrm{B}) = \mathrm{sgn}(\sigma_\mathrm{D})$. Tällöin kaava (A.28) voidaan kirjoittaa muotoon

$$\det(\mathrm{D}) = \sum_{\sigma_\mathrm{A},\sigma_\mathrm{B}} \left(\Big(\mathrm{sgn}(\sigma_\mathrm{A}) \prod_{i=1}^{n} d_{i,\sigma_\mathrm{A}(i)} \Big) \Big(\mathrm{sgn}(\sigma_\mathrm{B}) \prod_{i=n+1}^{n+m} d_{i,\sigma_\mathrm{B}(i-n)+n} \Big) \right). \tag{A.30}$$

Vaihtamalla summausjärjestystä, saadaan kaava (A.30) muotoon

$$\begin{aligned} \det(\mathrm{D}) &= \left(\sum_{\sigma_\mathrm{A}} \Big(\mathrm{sgn}(\sigma_\mathrm{A}) \prod_{i=1}^{n} d_{i,\sigma_\mathrm{A}(i)} \Big) \right) \left(\sum_{\sigma_\mathrm{B}} \Big(\mathrm{sgn}(\sigma_\mathrm{B}) \prod_{i=n+1}^{n+m} d_{i,\sigma_\mathrm{B}(i-n)+n} \Big) \right) \\ &= \det(\mathrm{A})\det(\mathrm{B}). \end{aligned} \tag{A.31}$$

□

Apulause A.3. *Käytetään samoja merkintöjä kuin lauseessa A.1. Tällöin seuraavat matriisi-identiteetit ovat voimassa:*

$$\mathrm{R}_k^{-1} - \big[\mathrm{H}_k \hat{\mathrm{P}}_k^- \mathrm{H}_k^T + \mathrm{R}_k\big]^{-1} = \mathrm{R}_k^{-1}\mathrm{H}_k \big[(\hat{\mathrm{P}}_k^-)^{-1} + \mathrm{H}_k^T \mathrm{R}_k^{-1} \mathrm{H}_k\big]^{-1} \mathrm{H}_k^T \mathrm{R}_k^{-1} \tag{A.32}$$

$$\mathrm{H}_k^T \big[\mathrm{H}_k \hat{\mathrm{P}}_k^- \mathrm{H}_k^T + \mathrm{R}_k\big]^{-1} = (\hat{\mathrm{P}}_k^-)^{-1} \big[(\hat{\mathrm{P}}_k^-)^{-1} + \mathrm{H}_k^T \mathrm{R}_k^{-1} \mathrm{H}_k\big]^{-1} \mathrm{H}_k^T \mathrm{R}_k^{-1} \tag{A.33}$$

$$(\hat{\mathrm{P}}_k^-)^{-1} - \mathrm{H}_k^T \big[\mathrm{H}_k \hat{\mathrm{P}}_k^- \mathrm{H}_k^T + \mathrm{R}_k\big]^{-1} \mathrm{H}_k = (\hat{\mathrm{P}}_k^-)^{-1} \big[(\hat{\mathrm{P}}_k^-)^{-1} + \mathrm{H}_k^T \mathrm{R}_k^{-1} \mathrm{H}_k\big]^{-1} (\hat{\mathrm{P}}_k^-)^{-1} \tag{A.34}$$

Todistus. Olkoon matriisit A ja B

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} (\hat{\mathrm{P}}_k^-)^{-1} & \mathrm{H}_k^T \\ \mathrm{H}_k & -\mathrm{R}_k \end{bmatrix}, \tag{A.35}$$

$$\mathrm{B} = \begin{bmatrix} \left[(\hat{\mathrm{P}}_k^-)^{-1} + \mathrm{H}_k^T\mathrm{R}_k^{-1}\mathrm{H}_k\right]^{-1} & \hat{\mathrm{P}}_k^-\mathrm{H}_k^T\left[\mathrm{H}_k\hat{\mathrm{P}}_k^-\mathrm{H}_k^T + \mathrm{R}_k\right]^{-1} \\ \mathrm{R}_k^{-1}\mathrm{H}_k\left[(\hat{\mathrm{P}}_k^-)^{-1} + \mathrm{H}_k^T\mathrm{R}_k^{-1}\mathrm{H}_k\right]^{-1} & -\left[\mathrm{H}_k\hat{\mathrm{P}}_k^-\mathrm{H}_k^T + \mathrm{R}_k\right]^{-1} \end{bmatrix} \tag{A.36}$$

Kaikki esiintyvät käänteismatriisit ovat olemassa, koska R_k ja $\hat{\mathrm{P}}_k^-$ ovat positiivisesti definiittejä. Tällöin

$$\mathrm{AB} = \begin{bmatrix} \mathrm{I} & 0 \\ 0 & \mathrm{I} \end{bmatrix} \tag{A.37}$$

Näin ollen $\mathrm{B} = \mathrm{A}^{-1}$ [Perttula 1999b, s.21]. Lisäksi

$$\mathrm{B}^T = (\mathrm{A}^{-1})^T = (\mathrm{A}^T)^{-1} = \mathrm{A}^{-1} = \mathrm{B}, \tag{A.38}$$

koska käänteismatriisin transpoosi on sama kuin transpoosin käänteismatriisi [Perttula 1999b, s.15] ja A on symmetrinen. Joten B on symmetrinen ja

$$\hat{\mathrm{P}}_k^-\mathrm{H}_k^T\left[\mathrm{H}_k\hat{\mathrm{P}}_k^-\mathrm{H}_k^T + \mathrm{R}_k\right]^{-1} = \left[(\hat{\mathrm{P}}_k^-)^{-1} + \mathrm{H}_k^T\mathrm{R}_k^{-1}\mathrm{H}_k\right]^{-1}\mathrm{H}_k^T\mathrm{R}_k^{-1} \tag{A.39}$$

Kertomalla (A.39) vasemmalta puolelta matriisilla $(\hat{\mathrm{P}}_k^-)^{-1}$ saadaan kaava (A.33). Toisaalta myös

$$\mathrm{R}_k^{-1}\mathrm{H}_k\left[(\hat{\mathrm{P}}_k^-)^{-1} + \mathrm{H}_k^T\mathrm{R}_k^{-1}\mathrm{H}_k\right]^{-1} = \left[\mathrm{H}_k\hat{\mathrm{P}}_k^-\mathrm{H}_k^T + \mathrm{R}_k\right]^{-1}\mathrm{H}_k\hat{\mathrm{P}}_k^- \tag{A.40}$$

Kertomalla (A.40) oikealta puolelta matriisilla H_k^T saadaan

$$\begin{aligned} &\mathrm{R}_k^{-1}\mathrm{H}_k\left[(\hat{\mathrm{P}}_k^-)^{-1} + \mathrm{H}_k^T\mathrm{R}_k^{-1}\mathrm{H}_k\right]^{-1}\mathrm{H}_k^T = \left[\mathrm{H}_k\hat{\mathrm{P}}_k^-\mathrm{H}_k^T + \mathrm{R}_k\right]^{-1}\mathrm{H}_k\hat{\mathrm{P}}_k^-\mathrm{H}_k^T \\ &= \left[\mathrm{H}_k\hat{\mathrm{P}}_k^-\mathrm{H}_k^T + \mathrm{R}_k\right]^{-1}(\mathrm{H}_k\hat{\mathrm{P}}_k^-\mathrm{H}_k^T + \mathrm{R}_k - \mathrm{R}_k) \\ &= \mathrm{I} - \left[\mathrm{H}_k\hat{\mathrm{P}}_k^-\mathrm{H}_k^T + \mathrm{R}_k\right]^{-1}\mathrm{R}_k \end{aligned} \tag{A.41}$$

Kertomalla (A.41) oikealta puolelta matriisilla R_k^{-1} saadaan johdettua kaava (A.32). Kertomalla kaava (A.40) vasemmalta puolelta matriisilla $\hat{\mathrm{P}}_k^-\mathrm{H}_k^T$ saadaan

$$\begin{aligned} &\hat{\mathrm{P}}_k^-\mathrm{H}_k^T\left[\mathrm{H}_k\hat{\mathrm{P}}_k^-\mathrm{H}_k^T + \mathrm{R}_k\right]^{-1}\mathrm{H}_k\hat{\mathrm{P}}_k^- = \hat{\mathrm{P}}_k^-\mathrm{H}_k^T\mathrm{R}_k^{-1}\mathrm{H}_k\left[(\hat{\mathrm{P}}_k^-)^{-1} + \mathrm{H}_k^T\mathrm{R}_k^{-1}\mathrm{H}_k\right]^{-1} \\ &= \hat{\mathrm{P}}_k^-\left[-(\hat{\mathrm{P}}_k^-)^{-1} + (\hat{\mathrm{P}}_k^-)^{-1} + \mathrm{H}_k^T\mathrm{R}_k^{-1}\mathrm{H}_k\right]\left[(\hat{\mathrm{P}}_k^-)^{-1} + \mathrm{H}_k^T\mathrm{R}_k^{-1}\mathrm{H}_k\right]^{-1} \\ &= \hat{\mathrm{P}}_k^- - \left[(\hat{\mathrm{P}}_k^-)^{-1} + \mathrm{H}_k^T\mathrm{R}_k^{-1}\mathrm{H}_k\right]^{-1} \end{aligned} \tag{A.42}$$

Kertomalla (A.42) oikealta ja vasemmalta puolelta matriisilla $(\hat{\mathrm{P}}_k^-)^{-1}$ saadaan johdettua kaava (A.34). □

Liite B

Algoritmeja

Algoritmi B.1 (Kalmanin suodatin).

Alkuehto	$\mathbf{x}_0 \sim \mathrm{N}_{n_x}(x_0, \mathrm{P}_0)$
Tilamalli	$\mathbf{x}_{k+1} = \Phi_k \mathbf{x}_k + \mathbf{w}_k, \quad \mathbf{w}_k \sim \mathrm{N}_{n_x}(\mathbf{0}, \mathrm{Q}_k)$
Mittausmalli	$\mathbf{y}_k = \mathrm{H}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k, \quad \mathbf{v}_k \sim \mathrm{N}_{n_y}(\mathbf{0}, \mathrm{R}_k)$
Priori-tilan odotusarvo	$\hat{x}_k^- = \Phi_{k-1} \hat{x}_{k-1}$
Priori-tilan kovarianssimatriisi	$\hat{\mathrm{P}}_k^- = \Phi_{k-1} \hat{\mathrm{P}}_{k-1} \Phi_{k-1}^T + \mathrm{Q}_{k-1}$
Posteriori-tilan odotusarvo	$\hat{x}_k = \hat{x}_k^- + \mathrm{K}_k (y_k - \mathrm{H}_k \hat{x}_k^-)$
Posteriori-tilan kovarianssimatriisi	$\hat{\mathrm{P}}_k = (\mathrm{I} - \mathrm{K}_k \mathrm{H}_k) \hat{\mathrm{P}}_k^-$
Kalmanin vahvistus	$\mathrm{K}_k = \hat{\mathrm{P}}_k^- \mathrm{H}_k^T (\mathrm{H}_k \hat{\mathrm{P}}_k^- \mathrm{H}_k^T + \mathrm{R}_k)^{-1}$

Algoritmi B.2 (Laajennettu Kalmanin suodatin).

Alkuehto	$\mathrm{E}(\mathbf{x}_0) = x_0, \mathrm{V}(\mathbf{x}_0) = \mathrm{P}_0$
Tilamalli	$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{f}_k(\mathbf{x}_k) + \mathbf{w}_k$
	$\mathrm{E}(\mathbf{w}_k) = \mathbf{0}, \mathrm{V}(\mathbf{w}_k) = \mathrm{Q}_k$
Mittausmalli	$\mathbf{y}_k = \mathbf{h}_k(\mathbf{x}_k) + \mathbf{v}_k$
	$\mathrm{E}(\mathbf{v}_k) = \mathbf{0}, \mathrm{V}(\mathbf{v}_k) = \mathrm{R}_k$
Priori-tilan odotusarvo	$\hat{x}_k^- = \mathbf{f}_{k-1}(\hat{x}_{k-1})$
Priori-tilan kovarianssimatriisi	$\hat{\mathrm{P}}_k^- = \Phi_{k-1}\hat{\mathrm{P}}_{k-1}\Phi_{k-1}^T + \mathrm{Q}_{k-1}$
	$\Phi_{k-1} = \left.\frac{\partial \mathbf{f}_{k-1}(\mathbf{x}_{k-1})}{\partial \mathbf{x}_{k-1}}\right\rvert_{\mathbf{x}_{k-1}=\hat{x}_{k-1}}$
Posteriori-tilan odotusarvo	$\hat{x}_k = \hat{x}_k^- + \mathrm{K}_k(y_k - \mathbf{h}_k(\hat{x}_k^-))$
Posteriori-tilan kovarianssimatriisi	$\hat{\mathrm{P}}_k = (\mathrm{I} - \mathrm{K}_k\mathrm{H}_k)\hat{\mathrm{P}}_k^-$
	$\mathrm{H}_k = \left.\frac{\partial \mathbf{h}_k(\mathbf{x}_k)}{\partial \mathbf{x}_k}\right\rvert_{\mathbf{x}_k=\hat{x}_k^-}$
Kalmanin vahvistus	$\mathrm{K}_k = \hat{\mathrm{P}}_k^-\mathrm{H}_k^T(\mathrm{H}_k\hat{\mathrm{P}}_k^-\mathrm{H}_k^T + \mathrm{R}_k)^{-1}$

Algoritmi B.3 (Toisen asteen laajennettu Kalmanin suodatin).

Alkuehto	$\mathrm{E}(\mathbf{x}_0) = x_0, \mathrm{V}(\mathbf{x}_0) = \mathrm{P}_0$
Tilamalli	$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{f}_k(\mathbf{x}_k) + \mathbf{w}_k$
	$\mathrm{E}(\mathbf{w}_k) = \mathbf{0}, \mathrm{V}(\mathbf{w}_k) = \mathrm{Q}_k$
Mittausmalli	$\mathbf{y}_k = \mathbf{h}_k(\mathbf{x}_k) + \mathbf{v}_k$
	$\mathrm{E}(\mathbf{v}_k) = \mathbf{0}, \mathrm{V}(\mathbf{v}_k) = \mathrm{R}_k$
Priori-tilan odotusarvo	$\hat{x}_{k+1}^- = \mathbf{f}_k(\hat{x}_k) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n_x} \mathbf{e}_i \operatorname{tr}(\Phi_k^{e_i}\hat{\mathrm{P}}_k)$
	$\Phi_k^{e_l} = \left.\left(\frac{\partial^2(\mathbf{f}_k(\mathbf{x}_k))_l}{\partial x_j \partial x_i}\right)\right\rvert_{\mathbf{x}_k=\hat{x}_k}$
Priori-tilan kovarianssimatriisi	$\hat{\mathrm{P}}_k^- = \Phi_{k-1}\hat{\mathrm{P}}_{k-1}\Phi_{k-1}^T + \mathrm{Q}_{k-1} + \mathrm{Q}_{extra}$
	$\mathrm{Q}_{extra} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n_x}\sum_{j=1}^{n_x} \mathbf{e}_i\mathbf{e}_j^T \operatorname{tr}(\Phi_k^{e_i}\hat{\mathrm{P}}_k\Phi_k^{e_j}\hat{\mathrm{P}}_k)$
	$\Phi_{k-1} = \left.\frac{\partial \mathbf{f}_{k-1}(\mathbf{x}_{k-1})}{\partial \mathbf{x}_{k-1}}\right\rvert_{\mathbf{x}_{k-1}=\hat{x}_{k-1}}$
Priori-mittaus	$\hat{y}_k^- = \mathbf{h}_k(\hat{x}_k^-) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n_y} \mathbf{e}_i \operatorname{tr}(\mathrm{H}_k^{e_i}\hat{\mathrm{P}}_k^-)$
	$\mathrm{H}_k^{e_l} = \left.\left(\frac{\partial^2(\mathbf{h}_k(\mathbf{x}_k))_l}{\partial x_j \partial x_i}\right)\right\rvert_{\mathbf{x}_k=\hat{x}_k^-}$
Posteriori-tilan odotusarvo	$\hat{x}_k = \hat{x}_k^- + \mathrm{K}_k(y_k - \hat{y}_k^-)$
Posteriori-tilan kovarianssimatriisi	$\hat{\mathrm{P}}_k = (\mathrm{I} - \mathrm{K}_k\mathrm{H}_k)\hat{\mathrm{P}}_k^-$
	$\mathrm{H}_k = \left.\frac{\partial \mathbf{h}_k(\mathbf{x}_k)}{\partial \mathbf{x}_k}\right\rvert_{\mathbf{x}_k=\hat{x}_k^-}$
Kalmanin vahvistus	$\mathrm{K}_k = \hat{\mathrm{P}}_k^-\mathrm{H}_k^T(\mathrm{H}_k\hat{\mathrm{P}}_k^-\mathrm{H}_k^T + \mathrm{R}_k + \mathrm{R}_{extra})^{-1}$
	$\mathrm{R}_{extra} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n_y}\sum_{j=1}^{n_y} \mathbf{e}_i\mathbf{e}_j^T \operatorname{tr}(\mathrm{H}_k^{e_i}\hat{\mathrm{P}}_k^-\mathrm{H}_k^{e_j}\hat{\mathrm{P}}_k^-)$