Tampereen yliopisto

Paavo Ronni

LINEAARISET DIFFERENSSIYHTÄLÖT

Tekniikan ja luonnontieteiden tiedekunta
Kandidaatintyö
Toukokuu 2019

TIIVISTELMÄ

Paavo Ronni: Lineaariset Differenssiyhtälöt
Kandidaatintyö
Tampereen yliopisto
Matematiikka
Toukokuu 2019

Työn aiheena on lineaariset differenssiyhtälöt. Niiden voidaan sanoa olevan differentiaaliyhtälöiden diskreetti analogia. Yhtälön arvo riippuu edellisten arvojen perusteella. Yksinkertainen esimerkki differenssiyhtälöstä on Fibonaccin lukujono, jonka seuraava arvo riippuu kahdesta edellisestä arvosta. Differenssiyhtälöille on sovelluskohteita monella eri tieteenalalla, kuten biologiassa, tietojenkäsittelytieteessä, singnaalinkäsittelyssä ja taloustieteessä.

Ennen yhtälöitä työssä käydään perusteellisesti läpi tärkeimmät asiat differenssilaskennasta määritelmien ja lauseiden avulla, joihin on esitetty myös todistuksia. Tarkoituksena on luoda lukijalle alaan hyvä pohjatieto ennen kuin siirrytään yhtälöihin. Yhtälöiden käsittely on rajattu ensimmäisen kertaluvun lineaarisiin yhtälöihin sekä lineaarisiin vakiokertoimisiin homogeenisiin yhtälöihin.

Työn tarkoituksena on tutustua alan kirjallisuuteen ja koota tärkeimpiä tuloksia yhteen. Kokonaisuutena työ antaa hyvän pohjan differenssilaskentaan sekä tutustuttaa lukijan kahteen yksinkertaisimpaan yhtälömuotoon.

Avainsanat: lineaariset differenssiyhtälöt, differenssilaskenta

SISÄLLYSLUETTELO

LYHENTEET JA MERKINNÄT

Δ^{-1}	antidifferenssioperaatio
$\mathbb{C}$	kompleksiluvut
Δ	differenssioperaatio
Δ_n	differenssi muuttujan n mukaan
I	identiteettioperaatio
Δ^n	kertaluvun n differenssi
$t^{(n)}$	kertomafunktio
$\binom{n}{k}$	kombinaatio
$\mathbb{N}$	luonnolliset luvut
$\mathbb{R}$	reaaliluvut
E	siirto-operaatio
$\sum_{i=t_0}^{n-1}$	summa
$\prod_{i=t_0}^{n-1}$	tulo
$\mathbb{Z}$	kokonaisluvut

1 JOHDANTO

Differenssiyhtälöt ovat differentiaaliyhtälöiden diskreetti analogia. Yhtälö määritellään niin, että sen seuraava arvo riippuu edellisistä arvoista. Yhtälölle on annettu alkuratkaisu, ja loput arvot määritellään rekursiivisesti. Määrittelyjoukko on diskreetti. Differenssiyhtälöille on sovelluskohteita monella eri tieteenalalla, kuten biologiassa, tietojenkäsittelytieteessä, signaalinkäsittelyssä ja taloustieteessä.

Ensimmäisessä luvussa esitellään differenssilaskentaa. Määritellään differenssi- sekä siirto-operaatio. Käydään kertomafunktion määritelmä, joka tulee olemaan hyödyllinen differenssilaskennasssa. Luvun lopussa määritellään differenssin käänteisoperaatio antidifferenssi ja katsotaan miten sitä voidaan hyödyntää äärellisten summien ratkaisemiseen.

Toisessa luvussa kerrotaan lineaarisista differenssiyhtälöistä. Aivan ensiksi määritellään mitä lineaarisuus tarkoittaa, jonka jälkeen siirytään differenssiyhtälöiden yksinkertaisimpaan muotoon, ensimmäisen kertaluvun yhtälöihin. Lopussa kerrotaan toisesta yksinkertaisesta tapauksesta liittyen differenssiyhtälöihin, lineaarisista vakiokertoimisista homogeenisistä yhtälöistä.

Työn tavoitteena on tutustuttaa lukija differenssilaskentaan ja yksinkertaisimpiin lineaarisiin differenssiyhtälöihin. Työ nojautuu vahvasti aiheeseen liittyvään kirjallisuuteen ja aikaisempiin tuloksiin.

2 DIFFERENSSILASKENTAA

Tässä luvussa tutustutaan differenssilaskentaan ja käydään läpi operaatiot differenssi- ja vaihto-operaatio. Myöhemmin käydään läpi kertomafunktion määritelmä kokonaisluvuilla sekä antidifferenssi, joka on differenssin käänteisoperaatio. Tutustutaan myös siihen, miten antidifferenssiä voidaan hyödyntää äärellisten summien ratkaisun etsimisessä.

2.1 Differenssioperaatio

Aloitetaan tutkimalla differenssin käsitettä. Suoraan englannista käännettynä sana "difference" tarkoittaa erotusta. Differenssilaskennassa termi differenssi kuvaa funktion arvon muutosta, kun siirrytään arvosta $y(t)$ arvoon $y(t+1)$.

Määritelmä 2.1.1. [5, s.15] Differenssi Δ funktiolle $y(t)$ on

$$\Delta y(t) = y(t+1) - y(t), \tag{2.1}$$

kun $t \in \mathbb{R}$.

Määritelmässä 2.1.1 muuttujan t alskelpituus on 1. Merkitään funktion $z(s)$ askelpituutta muuttujalla $h > 0$ ja olkoon $y(t) = z(th)$. Tällöin

$$\begin{aligned} z(s+h) - z(s) &= z(th+h) - z(th) \\ &= y(t+1) - y(t) \\ &= \Delta y(t). \end{aligned}$$

Huomataan, että askelpituudella ei ole mitään rajoitetta [5, s.15]. Sovitaan kuitenkin, että käytetään määritelmän 2.1.1 mukaista askelpituutta $h = 1$.

Lause 2.1.1. *Olkoon f ja g funktioita. Differennsioperaatio Δ on lineaarinen, eli*

$$\Delta(ay(t) + bg(t)) = a\Delta y(t) + b\Delta g(t),$$

kun $a, b \in \mathbb{R}$.

Todistus. Voidaan kirjoittaa, että

$$\begin{aligned}\Delta(ay(t)+bg(t)) &= (ay(t+1)+bg(t+1))-(ay(t)+bg(t))\\ &= (ay(t+1)-ay(t))+(bg(t+1)-bg(t))\\ &= a(y(t+1)-y(t))+b(g(t+1)-g(t))\\ &= a\Delta y(t)+b\Delta g(t).\end{aligned}$$

Täten lause 2.1.1 lineaarisuudelle on voimassa. □

Käydään läpi yksinkertainen esimerkki, jossa lasketaan funktion differenssi.

Esimerkki 2.1.1. Olkoon $y(t) = 2t^2 + 4t - 3$. Lasketaan differenssi funktiolle $y(t)$. Lineaarisuuden avulla

$$\begin{aligned}\Delta y(t) &= \Delta(2t^2+4t-3)\\ &= \Delta 2t^2+\Delta 4t-\Delta 3\\ &= 2\Delta t^2+4\Delta t-\Delta 3\\ &= 2((t+1)^2-t^2)+4(t+1-t)+3-3\\ &= 4t+2+4\\ &= 4t+6.\end{aligned}$$

Korkeamman kertaluvun differenssi määritellään rekursiivisesti.

Määritelmä 2.1.2. [3, s. 19] Kertaluvun n differenssi on

$$\Delta^n y = \Delta(\Delta^{n-1} y). \tag{2.2}$$

Pannaan merkille, että $\Delta^1 y = \Delta y$ ja $\Delta^0 y = Iy = y$.

Katsotaan esimerkki korkeamman kertaluvun differenssistä.

Esimerkki 2.1.2. Kolmannen kertaluvun differenssi on

$$\begin{aligned}\Delta^3 y(t) &= \Delta\left[\Delta(\Delta y(t))\right]\\ &= \Delta\left[\Delta(y(t+1)-y(t))\right]\\ &= \Delta\left[y(t+2)-2y(t+1)+y(t)\right]\\ &= y(t+3)-y(t+2)-2(y(t+2)-y(t+1))+y(t+1)-y(t)\\ &= y(t+3)-3y(t+2)+3y(t+1)-y(t).\end{aligned}$$

Kelleyn ja Petersonin kirjassa [5, s.16] on esitetty tapa laskea suuremman kertaluvun differensssejä funktiolle. Katsotaan tätä lausetta tarkemmin.

Lause 2.1.2. *Kertaluvun $n \in \mathbb{N}$ differenssi on*

$$\Delta^n y(t) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} y(t+n-k). \tag{2.3}$$

Todistus. Todistetaan lause induktiolla. Valitaan $n = 1$, jolloin

$$\Delta^1 y(t) = \sum_{k=0}^{1} (-1)^k \binom{1}{k} y(t+1-k) = y(t+1) - y(t).$$

Saadaan differenssin määritelmän 2.1.1 mukainen tulos. Oletetaan, että jollain $n = s \geq 1$

$$\Delta^s y(t) = \sum_{k=0}^{s} (-1)^k \binom{s}{k} y(t+s-k).$$

Väitetään, että

$$\Delta^{s+1} y(t) = \sum_{k=0}^{s+1} (-1)^k \binom{s+1}{k} y(t+(s+1)-k). \tag{2.4}$$

Lineaarisuuden lause 2.1.1 nojalla voidaan kirjoittaa, että

$$\begin{aligned}
\Delta^{s+1} y(t) = \Delta\left[\Delta^s y(t)\right] &= \sum_{k=0}^{s} (-1)^k \binom{s}{k} \Delta y(t+s-k) \\
&= \sum_{k=0}^{s} (-1)^k \binom{s}{k} \left[y(t+(s+1)-k) - y(t+s-k)\right] \\
&= \sum_{k=0}^{s} (-1)^k \binom{s}{k} y(t+(s+1)-k) + \sum_{k=0}^{s} (-1)^{k+1} \binom{s}{k} y(t+s-k).
\end{aligned}$$

Oikean puoleisessa summassa voidaan vaihtaa summan menemään $k = 1$ lukuun $s + 1$ asti. Vaihdetaan lausekkeessa luvun k arvoksi $k - 1$. Koko lauseke saadaan muotoon

$$\Delta^{s+1} y(t) = \sum_{k=0}^{s} (-1)^k \binom{s}{k} y(t+(s+1)-k) + \sum_{k=1}^{s+1} (-1)^k \binom{s}{k-1} y(t+(s+1)-k).$$

Huomataan, että $\binom{s}{s+1} = 0$ ja $\binom{s}{0-1} = 0$, jolloin vasemman puoleinen summa voi mennä arvoon $s+1$ asti ja oikean puoleinen alkaa arvosta $k = 0$ muuttamatta lausekkeen arvoa. Yhdistämällä summat yhdeksi saadaan, että

$$\Delta^{s+1} y(t) = \sum_{k=0}^{s+1} (-1)^k \left[\binom{s}{k-1} + \binom{s}{k}\right] y(t+(s+1)-k).$$

Pascalin sääntö [6, s.65] sanoo, että $\binom{s}{k-1} + \binom{s}{k} = \binom{s+1}{k}$, jolloin lause voidaan kirjoittaa lopulliseen muotoon, mikä on

$$\Delta^{s+1} y(t) = \sum_{k=0}^{s+1} (-1)^k \binom{s+1}{k} y(t+(s+1)-k).$$

Iduktiotodistuksen nojalla lause 2.1.2 pätee. $\square$

2.2 Siirto-operaatio

Differenssilaskenanssa on tapana käyttää siirto-operaatiota E kuvaamaan arvoa askeleen jälkeen.
Määritelmä 2.2.1. [5, s.17] Siirto E funktiolle $y(t)$ on

$$Ey(t) = y(t+1). \tag{2.5}$$

Olkoon I identiteettioperaatio, toisin sanoen $Iy(t) = y(t)$, jolloin differenssi voidaan kirjoittaa $\Delta = E - I$. Useissa tapauksissa siirto-operaatio selkeyttää merkintöjä ja tekee tekstistä helpommin luettavaa. Korkeamman kertaluvun siirto on

$$E^n y(t) = E(E^{n-1}y(t)) = y(t+n).$$

Esimerkki 2.2.1. Olkoon $y(t) = t^2 - 5t + 4$. Lasketaan $Ey(t)$ ja $E^3y(t)$.

$$\begin{aligned} Ey(t) &= (t+1)^2 - 5(t+1) + 4 \\ &= t^2 + 2t + 1 - 5t - 5 + 4 \\ &= t^2 - 3t \end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned} E^3y(t) &= (t+3)^2 - 5(t+3) + 4 \\ &= t^2 + 6t + 9 - 5t - 15 + 4 \\ &= t^2 + t - 2. \end{aligned}$$

Lause 2.2.1. *Olkoon f ja g funktioita. Siirto-operaatio E on lineaarinen, eli*

$$E(ay(t) + bg(t)) = aEy(t) + bEg(t), \tag{2.6}$$

kun $a, b \in \mathbb{R}$.

Todistus. Siirto-operaation määritelmän mukaan voidaan kirjoittaa, että

$$\begin{aligned} E(ay(t) + bg(t)) &= ay(t+1) + bg(t+1) \\ &= aEy(t) + bEy(t). \end{aligned}$$

Täten lause 2.2.1, eli lineaarisuus on voimassa operaatiolle E. □

Kommutatiivisuus eli vaihdannaisuus on algebrallinen käsite. Se tarkoittaa, että muutettaessa operaatioiden järjestystä, tulos ei muutu.
Lause 2.2.2. *Operaatiot E ja Δ ovat vaihdannaisia, eli kaikilla $y(t)$*

$$\Delta Ey(t) = E\Delta y(t). \tag{2.7}$$

Todistus.

$$\begin{aligned}\Delta E y(t) &= \Delta y(t+1)\\ &= y(t+2) - y(t+1)\\ &= E(y(t+1) - y(t))\\ &= E\Delta y(t).\end{aligned}$$

□

2.3 Kertomafunktio

Differentiaalilaskennassa potenssifunktion derivaatta on yksinkertaisesti

$$\frac{d}{dt}t^n = nt^{n-1},$$

missä $n \in \mathbb{R}$. Potenssifunktion differenssi ei ole niin yksinkertainen. Kelleyn ja Petersonin [5, s. 20] mukaan se voidaan kirjoittaa muotoon

$$\Delta_t t^n = (t+1)^n - t^n,$$

ja binomikavalla saadaan, että

$$\begin{aligned}&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} t^k - t^n\\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} t^k.\end{aligned}$$

Tulos on monimutkainen, eikä kovin käyttökelpoinen. Kuitenkin kertomafunktio antaa samantapaisen ratkaisun differenssille, kuin potenssifunktion derivaatta differentiaalilaskennassa. Kertomafunktio määritellään seuraavasti.

Määritelmä 2.3.1. [1, s.20] Olkoon $n \in \mathbb{Z}$. Kertomafunktio $t^{(n)}$ on

$$t^{(n)} = \begin{cases} t(t-1)(t-2)\cdots(t-n+1), & n > 0\\ 1, & n = 0\\ \dfrac{1}{(t+1)(t+2)\cdots(t-n)}, & n < 0 \end{cases}. \tag{2.8}$$

Kertomafunktiolle on määritelmä myös tapauksille, kun n ei ole kokonaisluku. Se löytyy esimerkiksi Kelleyn ja Petersonin kirjasta [5, s. 21]. Se perustuu gamma-funktion käyttöön ja ratkaisu voidaan yleistää myös kokonaisluvuille. Ei kuitenkaan käydä sitä tässä läpi.

Lause 2.3.1. *[5, s. 22] Olkoon $t^{(n)}$ määritelty, jolloin*

$$\Delta t^{(n)} = nt^{(n-1)}.$$

Todistus. Tarkastellaan ensin tapaus $n = 0$.

$$\Delta 1 = 1 - 1 = 0 = 0t^{(0-1)}.$$

Olkoon $n > 0$. Suoraviivainen todistus tapaukselle löytyy lähteestä [5, s.22]. Käydään se hieman tarkemmin läpi.

$$\Delta_t t^n = (t+1)^{(n)} - t^{(n)}.$$

Kirjoitetaan kertomafunktiot auki määritelmän 2.3.1 mukaan, saadaan

$$= (t+1)(t)\cdots(t-n+2) - t(t-1)\cdots(t-n+1).$$

Otetaan $t^{(n-1)} = t(t-1)\cdots(t-n+2)$ tekijäksi.

$$\begin{aligned} &= t(t-1)\cdots(t-n+2)[(t+1)-(t-n+1)] \\ &= nt^{(n-1)}. \end{aligned}$$

Lopuksi tarkastellaan tapaus $n < 0$.

$$\begin{aligned} \Delta_t t^{(n)} &= (t+1)^{(n)} - t^{(n)} \\ &= \frac{1}{(t+2)(t+3)\cdots(t+1-n)} - \frac{1}{(t+1)(t+2)\cdots(t-n)} \\ &= \frac{1}{(t+1)(t+2)\cdots(t-(n-1))}\,[(t+1)-(t-n+1)] \\ &= t^{(n-1)}\,[(t+1)-(t-n+1)] \\ &= nt^{(n-1)}. \end{aligned}$$

□

Seuraavaksi esitellään kaksi lausetta, jotka toteavat, että kertomafunktio voidaan aina esittää polynomifunktiona ja samoin toiseen suuntaan. Kahden esitysmuodon yhteyteen liittyy Stirlingin numerot. Stirlingin numeroista voi lukea enemmän lähteestä [1, s.22]. Jätetään lauseiden todistus pois niiden monimutkaisuuden vuoksi.

Lause 2.3.2. *[1, s.22] Jokainen asteen n kertomafunktio voidaan kirjoittaa asteen n polynomifunktiona, niin että*

$$t^{(n)} = \sum_{i=0}^{n} s_{n,i} t^i,$$

missä $s_{n,i}$ on ensimmäisen lajin Stirlingin numero.

Esimerkki 2.3.1. Esitetään kertomafunktio $y(t) = 2t^{(4)} + t^{(3)}$ polynomifunktiona. Ei ole tarvetta selvittää kyseisiä Stirlingin numeroita, vaan voimme kertomafunktion määritelmän 2.3.1 avulla laskea lausekkeen auki polynomifunktioiksi. Tällöin

$$\begin{aligned} y(t) &= 2t(t-1)(t-2)(t-3) + t(t-1)(t-2) \\ &= 2t^4 - 12t^3 + 22t^2 - 12t + t^3 - 3t^2 + 2t \\ &= 2t^4 - 11t^3 + 19t^2 - 10t. \end{aligned}$$

Kertomafunktion esittäminen polynomifunktiona onnistuu helposti sen määritelmästä 2.3.1. Kuitenkin toiseen suuntaan, kun polynomifunktio halutaan esittää kertomafunktiona on asia vaikeampi.

Lause 2.3.3. *[1, s.22] Jokainen asteen n polynomifunktio voidaan kirjoittaa asteen n kertomafunktiona, niin että*

$$t^n = \sum_{i=0}^{n} r_{n,i} t^{(i)},$$

missä $r_{n,i}$ on toisen lajin Stirlingin numero.

Toinen tapa polynomifunktion esitykselle kertomafunktiona löytyy Kelleyn ja Petersonin kirjasta [5, s. 46], joka esitetään seuraavassa lauseessa. Se ei ole riippuvainen Stirlingin numeroista.

Lause 2.3.4. *Olkoon $y(t)$ asteen n polynomifunktio, tällöin*

$$y(t) = y(0) + \frac{\Delta y(0)}{1!} t^{(1)} + \cdots + \frac{\Delta^n y(0)}{n!} t^{(n)}. \tag{2.9}$$

Todistus. [4, s. 9] Lauseen 2.3.3 mukaan voidaan kirjoittaa, että

$$y(t) = r_0 + r_1 t^{(1)} + \cdots r_k t^{(k)} + \cdots + r_n t^{(n)}.$$

Ratkaistaan tästä kerroin r_k. Lasketaan puolittain kertaluvun k differenssi. Lauseen 2.3.1 mukaan

$$\Delta^k r_i t^{(i)} = \begin{cases} 0 & , i < k \\ r_i k! & , i = k \\ r_i k! t^{(i-k)} & , i > k. \end{cases}$$

Tällöin, kun otetaan kertaluvun k differenssi puolittain, niin

$$\Delta^k y(t) = 0 + r_k k! + r_{k+1} k! t^{(1)} + \cdots + r_n k! t^{(n-k)}.$$

Asetetaan $t = 0$, tällöin saadaan, että

$$\Delta^k y(0) = r_k k!$$

ja edelleen

$$r_k = \frac{\Delta^k y(0)}{k!}.$$

Saadaan lopullinen muoto lauseelle.

$$y(t) = y(0) + \frac{\Delta y(0)}{1!} t^{(1)} + \cdots + \frac{\Delta^n y(0)}{n!} t^{(n)}.$$

□

Katsotaan erilainen tapa todistaa lause 2.3.4.

Todistus. Lähdetään liikkelle siitä, että siirto E voidaan ilmaista identiteetin ja differenssin avulla

$$E = I + \Delta.$$

Korotetaan molemmat puolet potenssiin t, jolloin

$$E^t = (I + \Delta)^t.$$

Otetaan funktiosta $y(s)$ kertaluvun t siirto. Käytetään avuksi Goldbergin [3, s. 37] kirjasta löytyvää binomikaavaa. Saadaan

$$\begin{aligned} E^t y(s) &= (I + \Delta)^t y(s) \\ &= \sum_{n=o}^{t} \binom{t}{n} I^{t-n} \Delta^n y(s). \end{aligned}$$

Merkitään $s = 0$. Identiteettioperaatiolla I ei ole vaikutusta lopputulokseen, joten se voidaan jättää kirjoittamatta. Saadaan

$$E^t y(0) = \sum_{n=o}^{t} \binom{t}{n} \Delta^n y(0).$$

Määritelmän 2.2.1 perusteella $E^t y(0) = y(t)$, joten merkitään

$$y(t) = \sum_{n=o}^{t} \binom{t}{n} \Delta^n y(0).$$

Binomikerroin $\binom{t}{n}$ voidaan ilmaista kertomafunktion 2.3.1 avulla niin, että $\binom{t}{n} = \frac{t^{(n)}}{n!}$. Lauseke saadaan muotoon

$$y(t) = \sum_{n=o}^{t} \frac{\Delta^n y(0)}{n!} t^{(n)}.$$

Jos funktiosta $y(s)$ otetaan suuremman kertaluvun differenssi, kuin sen aste, niin saadaan tulokseksi 0. Todistus tälle löytyy Goldbergin kirjasta [3, s. 28]. Näiden perusteella summasta tarvitsee ottaa vain funktion $y(s)$ asteen verran alkioita. Tällöin

$$y(t) = y(0) + \frac{\Delta y(0)}{1!} t^{(1)} + \cdots + \frac{\Delta^n y(0)}{n!} t^{(n)}.$$

$\square$

Esimerkki 2.3.2. Esitetään $y(t) = 3t^2 - 5t - 4$ kertomafunktiona. Käytetään lausetta 2.3.4. Funktion arvo nollassa

$$y(0) = -4.$$

Lasketaan ensimmäinen differenssi.

$$\Delta y(t) = 3((t+1)^2 - t^2) - 5(t + 1 - t) = 6t - 2.$$

Saadaan, että

$$\frac{\Delta y(0)}{1!} t^{(1)} = -2t^{(1)}. \tag{2.10}$$

Toinen differenssi

$$\Delta^2 y(t) = 6(t+1) - 2 - (6t - 2) = 6.$$

Saadaan, että

$$\frac{\Delta^2 y(0)}{2!} t^{(2)} = 3t^{(2)}.$$

Tällöin

$$y(t) = 3t^{(2)} - 2t^{(1)} - 4.$$

2.4 Antidifferenssi

Seuraaavaksi määritellään differenssin käänteisoperaatio antidifferenssi. Differentiaalilaskennan puolella funktiolle $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ on olemassa antiderivaatta $F : [a, b] \to \mathbb{R}$, jos $F' = f$. Antiderivaattaa F kutsutaan usein myös funktion f integraaliksi tai intergaalifunktioksi. Erilaisiin tapoihin löytää funktion antiderivaatta voi tutustua esimerkiksi Paul J. Nahinin kirjasta [7]. Samaan tapaan määritellään antidifferenssi differenssilaskennassa. Antidifferenssiä merkitään Δ^{-1} ja sillä on ominaisuus

$$\Delta[\Delta^{-1} y(t)] = \Delta^{1-1} y(t) = \Delta^0 y(t) = y(t). \tag{2.11}$$

Tarkoituksena on löytää funktiolle y funktio Y, jonka differenssi on funktio y, eli $\Delta Y = y$.
Määritelmä 2.4.1. [3, s. 41] Jos funktion Y differenssi on funktio f, niin funktiota Y kutsutaan funktion y antidifferenssiksi, eli

$$\text{Jos } \Delta Y(t) = y(t), \text{ niin } \Delta^{-1} y(t) = Y(t). \tag{2.12}$$

Katsotaan integraalia

$$\int 2x = x^2 + C. \tag{2.13}$$

Huomataan, että funktion $2x$ integraalifunktio ei ole uniikki, vaan se sisältää vakion C. Samaan tapaan jonkin funktion antidifferenssi ei ole uniikki. Katsotaan esimerkin avulla.

Etsitään funktion $y(t) = 3$ antidifferenssi. Tiedetään, että $\Delta 3t = 3t + 3 - 3t = 3$, joten tämä käy ratkaisuksi. Ratkaisuja löytyy kuitenkin enemmän. Esimerkiksi funktion $3t + 5$ differenssi on $\Delta(3t+5) = 3(t+1)+5-(3t+5) = 3$. Tällöin siis $\Delta^{-1}3 = 3t+5$. Huomataan, että itse asiassa kaikki funktiot

$$\Delta(3t + C) = 3, \tag{2.14}$$

missä C on jokin vakio. Tämän lisäksi on olemassa jaksollisia funktioita, joiden jakso on 1 ja niillä sama määrittelyjoukko kuin funktiolla $y(t)$, eli

$$\Delta C(t) = C(t + 1) - C(t) = 0. \tag{2.15}$$

Tällöin

$$\Delta[3t + C(t)] = \Delta 3t + \Delta C(t) = \Delta 3t = 3. \tag{2.16}$$

Lause 2.4.1. *[5, s. 25] Jos funktio $z(t)$ on funktion $y(t)$ antidifferenssi, niin funktion $y(t)$ jokainen antidifferenssi voidaan ilmaista*

$$\Delta^{-1}y(t) = z(t) + C(t), \tag{2.17}$$

missä funktiolla $C(t)$ on sama määrittelyjoukko, kuin funktiolla $y(t)$ sekä $\Delta C(t) = 0$.

Miten löytää funktion antidifferenssi? Yksi tapa on muuttaa funktio kertomafunktioksi ja niille pätee yksinkertainen laskukaava antidifferenssiin. Aikaisemmin todettiin, että kertomafunktion differenssi on lauseen 2.3.1 mukaan $\Delta t^{(n)} = nt^{(n-1)}$.
Lause 2.4.2. *[2, s. 52] Olkoon kertomafunktio $t^{(n)}$ määritelty, jolloin*

$$\Delta^{-1}t^{(n)} = \frac{t^{(n+1)}}{n+1} + C(t) \tag{2.18}$$

Todistus. Lauseen 2.3.1 mukaan $\Delta t^{(n)} = nt^{(n-1)}$. Tällöin pätee, että

$$\Delta t^{(n+1)} = (n + 1)t^{(n)}$$

ja, että

$$\Delta \frac{t^{(n+1)}}{n+1} = t^{(n)}.$$

Antidifferenssin määritelmän 2.4.1 mukaan

$$\Delta^{-1}t^{(n)} = \frac{t^{(n+1)}}{n+1}$$

ja lauseen 2.4.1 mukaan jokainen kertomafunktion antidifferenssi voidaan ilmaista muodossa

$$\Delta^{-1}t^{(n)} = \frac{t^{(n+1)}}{n+1} + C(t).$$

□

Kelleyn ja Petersonin kirjassa [5, s. 26, 29] on enemmänkin laskusääntöjä antidifferensseille. Tarkastellaan yhtä, joka myöhemmin tulee tarpeeseen.

Lause 2.4.3. *Olkoon a vakio. Tällöin*

$$\Delta^{-1}a^t = \frac{a^t}{a-1} + C(t), \tag{2.19}$$

missä $a \neq 1$ ja $\Delta C(t) = 0$.

Todistus. Lasketaan suoraan

$$\begin{aligned}\Delta\left[\frac{a^t}{a-1} + C(t)\right] &= \frac{a^{t+1}}{a-1} - \frac{a^t}{a-1} \\ &= \frac{a^{t+1}-a^t}{a-1}. \\ &= \frac{a^t(a-1)}{a-1} \\ &= a^t.\end{aligned}$$

Tällöin lause 2.4.3 on voimassa. □

Aiemmin todettiin, että differenssioperaatio on lineaarinen. Todetaan sama ominaisuus antidifferenssille.

Lause 2.4.4. *[3, s. 43] Olkoon g ja f funktioita. Antidifferenssi on lineaarinen, eli*

$$\Delta^{-1}(ag(t) + by(t)) = a\Delta^{-1}g(t) + b\Delta^{-1}y(t), \tag{2.20}$$

missä a ja b vakioita.

Todistus. [3, s. 43] Olkoon $\Delta Y(t) = y(t)$ ja $\Delta G(t) = g(t)$. Differenssin lineaarisuuden mukaan

$$\Delta(aG(t) + bY(t)) = a\Delta G(t) + b\Delta Y(t) = ag(t) + by(t). \tag{2.21}$$

Tästä saadaan, että

$$\Delta^{-1}(ag(t) + by(t)) = aG(t) + bY(t) = a\Delta^{-1}g(t) + b\Delta^{-1}y(t). \tag{2.22}$$

□

Katsotaan esimerkin avulla miten funktiolle voidaan löytää antidifferenssi.

Esimerkki 2.4.1. Lasketaan funktion $y(t) = t^4$ antidifferenssi. Ilmaistaan funktio kertomafunktioiden avulla käytämällä lauseen 2.3.4 tulosta. Saadaan, että

$$t^4 = t^{(4)} + 6t^{(3)} + 7t^{(2)} + t^{(1)}.$$

Nyt lineaarisuuden lause 2.4.4 ja kertomafunktion antidifferenssin lause 2.4.2 avulla

$$\begin{aligned}\Delta^{-1}t^4 &= \Delta^{-1}t^{(4)} + 6\Delta^{-1}t^{(3)} + 7\Delta^{-1}t^{(2)} + \Delta^{-1}t^{(1)} \\ &= \frac{t^{(5)}}{5} + \frac{3t^{(4)}}{2} + \frac{7t^{(3)}}{3} + \frac{t^{(2)}}{2} + C(t).\end{aligned}$$

Katsotaan vielä muutama laskusääntö antidifferenssille.

Lause 2.4.5. *[5, s. 29]*

(a) $\Delta^{-1}(y(t)\Delta z(t)) = y(t)z(t) - \Delta^{-1}Ez(t)\Delta y(t)$,

(b) $\Delta^{-1}(Ey(t)\Delta z(t)) = y(t)z(t) - \Delta^{-1}z(t)\Delta y(t)$.

Todistus. Sivutetaan todistus, mutta sen voi löytää Kelleyn ja Petersonin kirjasta [5, s. 29]. □

Antidifferenssiä voi hyödyntää, kun on etsitään äärellisten summien ratkaisua.

Lause 2.4.6. *[5, s. 32] Olkoon funktio Y funktion y antidifferenssi. Tällöin*

$$\sum_{k=a}^{n} y(k) = Y(n+1) - Y(a). \tag{2.23}$$

Todistus. Tarkastellaan summaa osissa, eli kun $k = a, a+1, a+2, a+3, \cdots, n-1, n$.

$$\begin{aligned} y(a) &= Y(a+1) - Y(a), \\ y(a+1) &= Y(a+2) - Y(a+1), \\ y(a+2) &= Y(a+3) - Y(a+2), \\ &\vdots \\ y(n-1) &= Y(n) - Y(n-1), \\ y(n) &= Y(n+1) - Y(n). \end{aligned}$$

Summataan yhteen $y(a) + \cdots + y(n)$. Saadaan, että

$$\sum_{k=a}^{n} y(k) = Y(n+1) - Y(a). \tag{2.24}$$

□

Todistetaan geometrisen summan yleinen ratkaisu käyttäen lausetta 2.4.6.

Lause 2.4.7. *[3, s. 46] Geometriselle summalle on voimassa*

$$\sum_{k=1}^{n} ar^{k-1} = \frac{a - ar^n}{1-r}, \qquad (r \neq 1). \tag{2.25}$$

Todistus. Etsitään ensin funktiolle ar^{k-1} antidifferenssi. Käytetään apuna lausetta 2.4.3.

Saadaan, että

$$\begin{aligned}\Delta^{-1}ar^{k-1} &= a\Delta^{-1}r^{k-1}\\ &= \frac{ar^{k-1}}{r-1}+C(t).\end{aligned}$$

Valitaan niin, että $C(t)=0$. Summa voidaan nyt kirjoittaa antidifferenssin avulla.

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} ar^{k-1} &= \frac{ar^n}{r-1}-\frac{ar^0}{r-1}\\ &= \frac{a-ar^n}{1-r} \qquad (r\neq 1).\end{aligned}$$

□

Katsotaan seuraavaksi lausetta, joka antaa uuden työkalun äärellisten summien ratkaisuun. Lauseen osa (a) tunnetaan myös nimellä Abelin summakaava.

Lause 2.4.8. *[5, s. 33]*

(a) Jos $m<n$*, niin*

$$\sum_{k=m}^{n-1} y(k)z(k) = z(n)\sum_{k=m}^{n-1} y(k) - \sum_{k=m}^{n-1}\left(\sum_{i=m}^{k} y(i)\right)\Delta z(k).$$

(b) Jos $p\geq n$*, niin*

$$\sum_{k=n}^{p} y(k)z(k) = z(n-1)\sum_{k=n}^{p} y(k) + \sum_{k=n}^{p}\left(\sum_{i=k}^{p} y(i)\right)\Delta z(k-1).$$

Todistus. [5, s. 33] Todistetaan (a) kohta. Etsitään $y(n)z(n)$ antidifferenssi. Huomataan, että

$$\Delta_n\left(\sum_{k=m}^{n-1} y(k)\right) = \sum_{k=m}^{n} y(k) - \sum_{k=m}^{n-1} y(k) = y(n). \tag{2.26}$$

Käytetään lauseen 2.4.5 tulosta, jolloin antidifferenssi voidaan kirjoittaa muotoon

$$\Delta^{-1}\left(y(n)z(n)\right) = z(n)\sum_{k=m}^{n-1} y(k) - \Delta^{-1}\left(\sum_{i=m}^{n} y(i)\right)\Delta z(n).$$

Tuloksen 2.26 perusteella

$$\Delta^{-1}y(n) = \sum_{k=m}^{n-1} y(k) + C. \tag{2.27}$$

Voidaan kirjoittaa, että

$$\sum_{k=m}^{n-1}\left(y(k)z(k)\right) = z(n)\sum_{k=m}^{n-1} y(k) - \sum_{k=m}^{n-1}\left(\sum_{i=m}^{n} y(i)\right)\Delta z(k) + C. \tag{2.28}$$

Valitaan $C=0$, niin saadaan, että lause 2.4.8 (a) on voimassa.

Todistetaan kohta (b). Huomataan, että

$$\Delta_n \left(\sum_{k=n}^{p} y(k) \right) = \sum_{k=n+1}^{p} y(k) - \sum_{k=n}^{p} y(k) = -y(n). \tag{2.29}$$

Ratkaistaan funktion $-z(n)y(n)$ antidifferenssi, johon käytetään lauseen 2.4.5 kohtaa (b). Tällöin

$$\Delta^{-1} \left(-z(n)y(n) \right) = z(n-1) \sum_{k=n}^{p} y(k) - \Delta^{-1} \left(\sum_{i=n}^{p} y(i) \right) \Delta z(n-1). \tag{2.30}$$

Tuloksen 2.29 perusteella

$$\sum_{k=n}^{p} y(k)z(k) = z(n-1) \sum_{k=n}^{p} y(k) + \sum_{k=n}^{p} \left(\sum_{i=k}^{p} y(i) \right) \Delta z(k-1) + C_1. \tag{2.31}$$

Valitaan $C_1 = 0$, niin saadaan, että lause 2.4.8 (b) on voimassa. □

Etsitään seuraavaksi hieman monimutkaisemmalle summalle yleinen ratkaisu käytämällä hyväksi juuri todettua tulosta.

Esimerkki 2.4.2. Ratkaistaan

$$\sum_{k=1}^{n-1} k3^k. \tag{2.32}$$

Lauseen 2.4.8 (a) mukaan, kun $y(k) = 3^k$ ja $z(k) = k$ niin

$$\sum_{k=1}^{n-1} k3^k = n \sum_{k=1}^{n-1} 3^k - \sum_{k=1}^{n-1} \left(\sum_{i=1}^{k} 3^i \right). \tag{2.33}$$

Ratkaistaan ensin

$$\sum_{k=1}^{n-1} 3^k. \tag{2.34}$$

Lauseiden 2.4.3 ja 2.4.6 avulla

$$\sum_{k=1}^{n-1} 3^k = \frac{3^n}{2} - \frac{3}{2}. \tag{2.35}$$

Koko lauseke saadaan muotoon

$$\sum_{k=1}^{n-1} k3^k = n \left(\frac{3^n}{2} - \frac{3}{2} \right) - \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{3^{k+1}}{2} - \frac{3}{2} \right). \tag{2.36}$$

Ratkaistaan viimeinen summa auki, saadaan

$$\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{3^{k+1}}{2}-\frac{3}{2}\right)=\frac{3^{n+1}}{4}-\frac{3^2}{4}-\frac{3}{2}(n-1) \tag{2.37}$$

$$=\frac{3^{n+1}}{4}-\frac{3n}{2}-\frac{3}{4}. \tag{2.38}$$

Koko lauseke saadaan muotoon

$$\sum_{k=1}^{n-1}k3^k=n\left(\frac{3^n}{2}-\frac{3}{2}\right)-\left(\frac{3^{n+1}}{4}-\frac{3n}{2}-\frac{3}{4}\right) \tag{2.39}$$

$$=\frac{3^n n}{2}-\frac{3^{n+1}}{4}+\frac{3}{4}. \tag{2.40}$$

3 LINEAARISET DIFFERENSSIYHTÄLÖT

Tässä luvussa käydään läpi lineaarisia differenssiyhtälöitä, jotka kuuluvat differenssiyhtälöiden suurempaan joukkoon. Aluksi tutkitaan ensimmäisen kertaluvun differenssiyhtälöitä, jonka jälkeen tutkitaan lineaarisia vakiokertoimisia homogeenisiä differenssiyhtälöitä. Käydään läpi yhtälöiden määritelmä sekä tapa löytää ratkaisu.

3.1 Ensimmäisen kertaluvun lineaariset differenssiyhtälöt

Katsotaan ensin differenssiyhtälöinen yksinkertaisnta aluetta, lineaarisia ensimmäisen kertaluvun yhtälöitä. Määritellään lineaarinen differenssiyhtälö.

Määritelmä 3.1.1. [3, s. 53] Differenssiyhtälö yli joukon S on lineaarinen jos se on muotoa

$$p(t)_0 y(t+n) + p(t)_1 y(t+n-1) + \cdots + p(t)_{n-1} y(t+1) + p(t)_n y(t) = r(t), \tag{3.1}$$

missä funktiot $p(t)_k$ on määritelty joukossa S.

Määritelmä 3.1.2. [2, s. 2] Olkoon $p(t)$ ja $r(t)$ reaaliarvoisia funktioita, kun $t \geq t_0 \geq 0$ ja $p(t) \neq 0$ kaikilla t. Ensimmäisen kertaluvun *homogeeninen* differenssiyhtälö on

$$u(t+1) - p(t)u(t) = 0, \qquad u(t_0) = u_0, \qquad t \geq t_0 \geq 0, \tag{3.2}$$

ja siihen liittyvä *epähomogeeninen* yhtälö on

$$y(t+1) - p(t)y(t) = r(t), \qquad y(t_0) = y_0, \qquad t \geq t_0 \geq 0. \tag{3.3}$$

Yhtälön sanotaan olevan ensimmäistä kertaluokkaa, kun se sisältää y:n arvoja $t+1$ ja t, aivan kuten ensimmäisen kertaluvun differenssi on $\Delta y(t) = y(t+1) - y(t)$.

Oletetaan, että funktion määrittelyjoukko on diskreetti, eli $t = t_0, t_0+1, \cdots t_0+n$. Homogeenisen 3.2 yhtälön ratkaisu [2, s. 3] saadaan iteroimalla

$$\begin{aligned}
u(t_0+1) &= p(t_0)u(t_0) = p(t_0)u_0, \\
u(t_0+2) &= p(t_0+1)p(t_0)u(t_0) = p(t_0+1)p(t_0)u_o, \\
&\vdots \\
u(t_0+n) &= u(t_0)\prod_{i=0}^{n-1} p(t_0+i) = u_0 \prod_{i=0}^{n-1} p(t_0+i).
\end{aligned}$$

Tällöin voidaan kirjoittaa, että

$$u(t) = u_0 \prod_{i=t_0}^{t-1} p(i). \tag{3.4}$$

Epähomogeenisen yhtälön 3.3 ratkaisu [2, s. 3] on muotoa

$$y(t) = \left[\prod_{i=t_0}^{t-1} p(i)\right] y_0 + \sum_{s=t_0}^{t-1} \left[\prod_{i=s+1}^{t-1} p(i)\right] r(s). \tag{3.5}$$

Todistus. [2, s. 3] Ratkaisu voidaan todistaa induktiolla. Olkoon $t = t_0 + 1$. Tällöin

$$\begin{aligned} y(t_0+1) &= \left[\prod_{i=t_0}^{t-0} p(i)\right] y_0 + \sum_{s=t_0}^{t_0} \left[\prod_{i=s+1}^{t_0} p(i)\right] r(s) \\ &= p(t_0) y_0 + r(t_0). \end{aligned}$$

Oletetaan, että yhtälö 3.5 pitää, kun $t = k$. Oletuksen nojalla todistetaan, että $t = k+1$ pitää.

$$y(k+1) = p(k) \left[\prod_{i=t_0}^{k-1} p(i)\right] y_0 + \sum_{s=t_0}^{k-1} \left[p(k) \prod_{i=s+1}^{k-1} p(i)\right] r(s) + r(k)$$

Huomaa, että

$$\left[\prod_{i=k+1}^{k} p(i)\right] = 1,$$

jolloin

$$\begin{aligned} y(k+1) &= \left[\prod_{i=t_0}^{k} p(i)\right] y_0 + \sum_{s=t_0}^{k-1} \left[\prod_{i=s+1}^{k} p(i)\right] r(s) + \left[\prod_{i=k+1}^{k} p(i)\right] r(k) \\ &= \left[\prod_{i=t_0}^{t} p(i)\right] y_0 + \sum_{s=t_0}^{t} \left[\prod_{i=s+1}^{t} p(i)\right] r(s). \end{aligned}$$

Induktiotodistuksen nojalla kaava 3.5 pitää kaikilla t $\in \mathbb{Z}_+$. □

Käydään läpi kaksi erikoistapausta ensimmäisen kertaluvun yhtälöistä. Ensimmäinen tapaus on, kun funktio $p(t)$ on vakio ja alkuratakaisu $t_0 = 0$ tiedetään, eli

$$y(t+1) - ay(t) = r(t), \qquad y(0) = y_0. \tag{3.6}$$

Ratkaisu saadaan kaavalla 3.5.

$$\begin{aligned} y(t) &= \left[\prod_{i=0}^{t-1} a\right] y_0 + \sum_{s=0}^{t-1}\left[\prod_{i=s+1}^{t-1} a\right] r(s) \\ &= a^t y_0 + \sum_{s=0}^{t-1} a^{t-1-(s+2)} r(s) \\ &= a^t y_0 + \sum_{s=0}^{t-1} a^{t-s-1} r(s). \end{aligned}$$

Toinen erikoistapaus on, kun $r(t)$ on vakio, eli

$$y(t+1) - ay(t) = b, \qquad y(0) = y_0. \tag{3.7}$$

Tällöin ratkaisu on muotoa

$$y(t) = a^t y_0 + b\sum_{s=0}^{t-1} a^{t-s-1}. \tag{3.8}$$

Äärelliselle summalle löytyy ratkaisu lauseen 2.4.6 avulla. Ratkaistaan ensin antidifferenssi

$$\begin{aligned} \Delta_s^{-1} a^{t-s-1} &= a^{t-1}\Delta_s^{-1} a^{-s} \\ &= a^{t-1}\Delta_s^{-1}\left(\frac{1}{a}\right)^s \\ &= a^{t-1}\frac{(1/a)^s}{1/a-1}. \end{aligned}$$

Tällöin summa saadaan muotoon

$$\begin{aligned} \sum_{s=0}^{t-1} a^{t-s-1} &= a^{t-1}\frac{(1/a)^t}{1/a-1} - a^{t-1}\frac{(1/a)^0}{1/a-1} \\ &= \frac{1}{1-a} - \frac{a^t}{1-a} \\ &= \frac{a^t-1}{a-1}. \end{aligned}$$

Nyt tapauksen 3.8 ratkaisu voidaan kirjoittaa

$$y(t) = \begin{cases} y_0 + bt, & a = 1 \\ a^t y_0 + b\left[\dfrac{a^t-1}{a-1}\right], & a \neq 1 \end{cases}. \tag{3.9}$$

Katsotaan yksinkertainen esimerkki homogeenisen yhtälön ratkaisemisesta.

Esimerkki 3.1.1. Etsitään ratkaisu yhtälölle

$$u(t+1) - (t+1)u(t) = 0, \qquad u(0) = c.$$

Ratkaisu löydetään suoraan kaavalla 3.4.

$$u(t) = c\prod_{i=0}^{t-1}(i+1) = ct!.$$

Katsotaan hieman haastavampi esimerkki homogeenisen yhtälön ratkaisemisesta.
Esimerkki 3.1.2. Etsitään ratkaisu yhtälölle

$$u(t+1) - e^{2t}u(t) = 0, \qquad u(0) = c.$$

Ratkaisu löydetään kaavalla 3.4.

$$u(t) = c\prod_{i=0}^{t-1} e^{2i}. \tag{3.10}$$

Tulon ratkaisu tulee muotoon

$$\prod_{i=0}^{t-1} e^{2i} = e^{\sum_{i=0}^{t-1} 2i}.$$

Summa voidaan ratkaista lauseen 2.4.6 avulla. Ensin etsimme yhtälön $2i$ antidifferenssin, joka on ratkaistavissa lauseella 2.4.2.

$$\Delta^{-1}2i = \Delta^{-1}2i^{(1)} = i^{(2)} + C(i).$$

Käytetään nyt lausetta 2.4.6.

$$\sum_{i=0}^{t-1} 2i = t^{(2)} - 0^{(2)} = t(t-1).$$

Alkuperäisen tehtävän ratkaisu 3.10 saadaan muotoon

$$u(t) = ce^{t(t-1)}.$$

Katsotaan esimerkkejä epähomogeenisen yhtälön ratkaisemisesta. Lähdetään liikkelle yksinkertaisimmasta tapauksesta, joka käytiin läpi erikoistapauksena.
Esimerkki 3.1.3. Etsitään ratkaisu yhtälölle

$$y(t+1) - \frac{1}{2}y(t) = 2, \qquad y(0) = c.$$

Ratkaisu saadaan kaavalla 3.9. Tällöin $a = \dfrac{1}{2}$ ja $b = 2$. Saadaan, että

$$y(t) = \left(\frac{1}{2}\right)^t c + 2\left[\frac{(1/2)^t - 1}{1/2 - 1}\right].$$

Ratkaisua voidaan edelleen yksinkertaistaa, jolloin

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{c}{2^t} - \frac{2\left(1/2^t - 1\right)}{1/2} \\ &= \frac{c}{2^t} - 4\left(\frac{1}{2^t} - 1\right) \\ &= \frac{1}{2^t}(c-4) + 4. \end{aligned}$$

Katsotaan mutkikkaampaa epähomogeenistä yhtälöä ja etsitään sille ratkaisu.

Esimerkki 3.1.4. Etsitään ratkaisu yhtälölle

$$y(t+1) - (t+1)y(t) = 2^t(t+1)!, \qquad y(0) = c. \tag{3.11}$$

Esimerkissä 3.1.1 löydettiin ratkaisu vastaavalle homogeeniselle yhtälölle. Epähomogeenisen yhtälön ratkaisun yksi osa koostuu vastaavan homogeenisen yhtälön ratkaisusta. Jäljelle jää ratkaistavaksi osa

$$\sum_{s=t_0}^{t-1} \left[\prod_{i=s+1}^{t-1} p(i)\right] r(s),$$

joka tässä tehtävässä on

$$\sum_{s=0}^{t-1} \left[\prod_{i=s+1}^{t-1} (i+1)\right] 2^s (s+1)!. \tag{3.12}$$

Ratkaistaan summan sisällä oleva tulo ensin ja se voidaan kirjoittaa muotoon

$$\frac{\prod_{i=1}^{t-1}(i+1)}{\prod_{i=1}^{s}(i+1)} = \frac{t!}{(s+1)!}. \tag{3.13}$$

Tällöin summa on

$$\sum_{s=0}^{t-1} t!2^s = t! \sum_{s=0}^{t-1} 2^s$$

ja se voidaan ratkaista etsimällä antidifferenssi funktiolle 2^s, joka on lauseen 2.4.3 mukaan

$$\Delta^{-1} 2^s = 2^s + C(t).$$

Nyt antidifferenssiä voidaan käyttää summan ratkaisun etsimiseen. Lauseen 2.4.6 mukaan summa

$$\sum_{s=0}^{t-1} 2^s = 2^t - 1.$$

Kootaan tulokset yhteen, homogeenisen yhtälön ratkaisu sekä äskettäin ratkaistu osa. Saadaan, että

$$y(t) = ct! + t!(2^t - 1) = t!(2^t + c - 1).$$

3.2 Lineaariset vakiokertoimiset homogeeniset differenssiyhtälöt

Aiemmin määriteltiin mitä tarkoittaa, että differenssiyhtälö on lineaarinen ja homogeeninen. Tässä aliluvussa käsitellään lineaarisia vakiokertoimisia homogeenisia differenssiyhtälöitä. Katsotaan kertaluvun n differenssiyhtälöä joka on muotoa [2, s. 63]

$$y(t+k) + p_1 y(t+k-1) + \cdots + p_k y(t) = 0, \tag{3.14}$$

missä p_i ovat vakiokertoimia ja $p_k \neq 0$. Jos yhtälö on tällaista muotoa, niin sitä voidaan kutsua lineaariseksi vakiokertoimiseksi homogeeniseksi differenssiyhtälöksi. Tavoitteena on löytää tälle yhtälölle kantaratkaisujen joukko ja niiden avulla yleinen ratkaisu. Oletetaan, että yhtälön 3.14 ratkaisut ovat muotoa λ^n, missä λ on kompleksiluku. Sijoittamalla oletettu ratkaisu yhtälöön saadaan niin kutsuttu karteesinen yhtälö

$$\lambda^k + p_1 \lambda^{k-1} + \cdots p_k = 0. \tag{3.15}$$

Yhtälön 3.15 juuria sanotaan karteesisiksi juuriksi. Jos juuret ovat yksinkertaisia, eli

$$\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \cdots \neq \lambda_k,$$

niin ratkaisun kanta on joukko $\{\lambda_1^t, \lambda_2^t, \cdots, \lambda_k^t\}$ ja yleinen ratkaisu [2, s. 64] on muotoa

$$y(t) = \sum_{i=1}^{k} a_i \lambda_i^t, \tag{3.16}$$

missä $a_i \in \mathbb{C}$.

Jos karteesisen yhtälön vastaava juuri λ_i on m_i-kertainen, niin ratkaisun kanta ei ole enää niin yksinkertainen. Yhtälö 3.14 voidaan kirjoittaa muodossa

$$(E^k + p_1 E^{k-1} + \cdots + p_k) y(t) = 0 \tag{3.17}$$

ja edelleen

$$(E-\lambda_1)^{m_1} (E-\lambda_2)^{m_2} \cdots (E-\lambda_r)^{m_r} y(t) = 0. \tag{3.18}$$

Katsotaan yhtälöä

$$(E-\lambda_i)^{m_i} y(t) = 0. \tag{3.19}$$

Sen ratkaisut ovat käypiä myös yhtälölle 3.18. Ei käydä läpi ratkaisua sen monimutkaisuuden vuoksi, mutta siihen voi tutustua esimerkiksi Kelleyn ja Petersonin kirjassa [5, s. 71]. Ratkaisuksi saadaan joukko $G_i = \{\lambda_i^t, t\lambda_i^t, t^2\lambda_i^t, , \cdots, t^{m_i-1}\lambda_i^t\}$. Yhtälön 3.18 ratkaisujoukoksi saadaan $G = \cup_{i=1}^r G_i$.

Yleinen ratkaisu saadaan muotoon

$$y(t) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i^t (a_{i0} + a_{i1}t + a_{i2}t^2 + \cdots + a_{im_i-1}t^{m_i-1}). \tag{3.20}$$

Esimerkki 3.2.1. Etsitään yleinen ratkaisu yhtälölle

$$y(t+2) - 16y(t) = 0. \tag{3.21}$$

Ensin ratkaistaan karteesinen yhtälö, joka on

$$\lambda^2 - 16 = 0. \tag{3.22}$$

Saadaan, että $\lambda_1 = 4$ ja $\lambda_2 = -4$. Juuret ovat yksinkertaisia joten yhtälön ratkaisu saadaan yksinkertaisesti muotoon

$$y(t) = a_1 4^t + a_2(-4)^t. \tag{3.23}$$

Katsotaan esimerkki, jossa juuri on kompleksinen pari $\lambda = a \pm ib$. Tällöin reaaliarvoiset ratkaisut yhtälölle saadaan napakoordinaatistoesityksen avulla. Kompleksiluku λ napakoordinaatistossa on

$$\lambda = re^{\pm i\theta} = r(\cos(\theta) \pm i\sin(\theta)), \tag{3.24}$$

missä $a^2 + b^2 = r^2$ ja $\tan(\theta) = b/a$. Korotetaan λ potenssiin t, jolloin

$$\lambda^t = r^t e^{\pm i\theta t} = r^t(\cos(\theta t) \pm i\sin(\theta t)). \tag{3.25}$$

Riippumattomat reaaliset ratkaisut [5, s. 72] saadaan muotoon $r^t \sin(\theta t)$ ja $r^t \cos(\theta t)$.
Esimerkki 3.2.2. Etsitään ratkaisu yhtälölle

$$(E-3)^2(E^2+4)y(t) = 0. \tag{3.26}$$

Ei ole tarvetta muodostaa karteesista yhtälöä, vaan juuret voidaan suoraan päätellä yhtälöstä. Selvästi $\lambda_1 = 3$ on kaksinkertainen juuri. Huomataan, että $E^2+4 = (E+2i)(E-2i)$, jolloin $\lambda_2 = 2i$ ja $\lambda_3 = -2i$ voidaan päätellä. Yleinen ratkaisu on

$$y(t) = 3^t a_1 + t3^t a_2 + a_3 2^t \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + a_4 2^t \sin\left(\frac{\pi}{2}\right). \tag{3.27}$$

Lucasin numerot on määritelty differenssiyhtälöllä

$$L(n+2) = L(n+1) + L(n), \quad n \geq 0, \quad L(0) = 2, \quad L(1) = 1. \tag{3.28}$$

Numerot on määritelty samaan tapaan, kuin Fibonaccin numerot, seuraavan alkion arvo saadaan summaamalla kaksi edellistä alkiota. Ero Fibonaccin numeroihin on aloitusarvoissa. Ratkaistaan $L(n)$. Karteesinen yhtälö on

$$\lambda^2 - \lambda - 1 = 0.$$

Juuriksi saadaan $\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ja $\lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Yleinen ratkaisu on

$$L(n) = a_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + a_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Aloitusarvojen $L(0) = 2$ ja $L(1) = 1$ avulla saadaan yhtälöpari

$$\begin{cases} a_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^0 + a_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^0 = 2 \\ a_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1 + a_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1 = 1 \end{cases}.$$

Saadaan, että $a_1 = 1$ ja $a_2 = 1$. Tällöin yhtälön ratkaisu on

$$L(n) = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n. \tag{3.29}$$

4 YHTEENVETO

Ensimmäisessä luvussa käytiin läpi differenssilaskentaa, sen tärkeimmät operaatiot differenssi- ja siirto-operaatio. Todettiin, että molemmat operaatiot ovat lineaarisia sekä ne ovat vaihdannaisia keskenään. Esimerkkien avulla näytettiin, miten funktion siirto tai differenssi lasketaan. Sen jälkeen määriteltiin kertomafunktio, joka todettiin hyödylliseksi funktion differenssiä etsiessä. Saatiin tulos, että jokainen polynomifunktio voidaan ilmaista kertomafunktiona ja jokainen kertomafunktio voidaan ilmaista polynomifunktiona. Työssä käytiin läpi tapoja ilmaista polynomifunktio kertomafunktiona, ja todettiin, että muutokseen liittyy Stirlingin numerot. Luvun lopussa määriteltiin differenssin käänteisoperaatio antidifferenssi ja todistettiin, että sekin on lineaarinen. Työssä käytiin läpi tapoja ratkaista äärellisiä summia antidifferenssin avulla, ja ominaisuus tuli tarpeelliseksi myöhemmin, kun etsittiin ratkaisuja differenssiyhtälöille. Usein ratkaisun etsimiseen liittyi äärellisen summan ratkaisu.

Toisessa luvussa käytiin läpi differenssiyhtälöitä ja aihe oli rajattu kahteen yksinkertaiseen tapaukseen. Ensin määriteltiin yhtälön lineaarisuus sekä mitä homogeenisyys ja epähomogeenisyys tarkoittavat. Sen jälkeen esitettiin ratkaisu ensimmäisen kertaluvun lineaarisille differenssiyhtälöille ja käytiin esimerkkien avulla muutaman yhtälön ratkaisu läpi. Sitten siirryttiin lineaarisiin vakiokertoimisiin yhtälöihin ja käytiin läpi niiden ratkaisutapa. Todettiin, että ratkaisu perustuu karteesisen yhtälön ratkaisuun ja sen juuriin. Käytiin läpi myös tapaus, kun juureksi tulee kompleksiluku.

Differenssiyhtälöille on sovelluskohteita monella eri tieteenalalla. Taloustieteessä aikariippuvaiset diskreetisti mitattavat ilmiöt voidaan joskus ilmaista differenssiyhtälöiden avulla, kuten esimerkiksi investoinnin korkotuotto tietyllä aikavälillä. Fysiikassa radioaktiivinen hajoaminen voidaan ilmaista differenssiyhtälön avulla. Biologiassa evoluution kehitystä ajan suhteen voidaan mallintaa differenssiyhtälöllä. Nämä olivat vain yksinkertaisimpia esimerkkejä yhtälöiden sovelluksista. Differenssiyhtälöiden tutkiminen onkin tärkeää, ei vain sen takia, että se olisi hauskaa, vaan yhtälöille löytyy suuri kirjo eri sovelluskohteita.

LÄHDELUETTELO

[1] E. J. Cogan ja R. Z. Norman. *Handbook of calculus, difference and differential equations*. English. 2d ed. Englewood Cliffs, N. J. : Prentice-Hall, 1963.

[2] S. Elaydi. *An Introduction to Difference Equations*. Undergraduate texts in mathematics. Springer, 1999. ISBN: 9780387988306. URL: https://books.google.de/books?id=CHgpAQAAMAAJ.

[3] S. Goldberg. *Introduction to Difference Equations: With Illustrative Examples from Economics, Psychology, and Sociology*. 3d ed. JOHN WILEY ja SONS INC., 1963.

[4] P. Haukkanen. *Differenssiyhtälöt*. Differenssiyhtälöt kurssin opintomoniste. Tampereen yliopisto. URL: http://www.uta.fi/sis/mtt/mttma7/Diffs_pohja.pdf.

[5] W. Kelley ja A. Peterson. *Difference Equations: An Introduction with Applications*. Academic Press, 1991. ISBN: 9780124033306.

[6] R. McEliece, R. Ash ja C. Ash. *Introduction to Discrete Mathematics*. Random House, 1989. ISBN: 9780394358192. URL: https://books.google.fi/books?id=KUYZAQAAIAAJ.

[7] P. Nahin. *Inside Interesting Integrals: A Collection of Sneaky Tricks, Sly Substitutions, and Numerous Other Stupendously Clever, Awesomely Wicked, and Devilishly Seductive Maneuvers for Computing Nearly 200 Perplexing Definite Integrals From Physics, Engineering, and Mathematics (Plus 60 Challenge Problems with Complete, Detailed Solutions)*. Undergraduate Lecture Notes in Physics. Springer New York, 2014. ISBN: 9781493912766. URL: https://books.google.fi/books?id=P919oAEACAAJ.