

Aino Heino

TARJOUSKIRJAMARKKINOIDEN MATE- MAATTISET MALLIT

Dynaamiset rationaalisten sijoittajien mallit

Tekniikan ja luonnontieteiden tiedekunta
Kandidaatintyö
Toukokuu 2019

TIIVISTELMÄ

Aino Heino: Tarjouskirjamarkkinoiden matemaattiset mallit: dynaamiset rationaalisten sijoittajien mallit
Kandidaatintyö
Tampereen yliopisto
Tuotantotalouden kandidaatin tutkinto-ohjelma
Pääaine: Tuotantotalous
Tarkastaja: Tuomas Korhonen
Huhtikuu 2019

Tämä kandidaatintyö käsittelee dynaamisia rationaalisten sijoittajien matemaattisia malleja, jotka mallintavat tarjouskirjan toimintaa. Työn tavoitteena on perehtyä näihin malleihin ja luoda näkemys siitä, ovatko ne uskottavia todellisten tarjouskirjamarkkinoiden näkökulmasta. Työ toteutettiin kirjallisuuskatsauksena, ja tarkempaan käsittelyyn valikoitui neljä dynaamista rationaalisten sijoittajien mallia. Tarkemmassa analyysissä keskityttiin erityisesti malleissa tehtäviin oletuksiin ja johtopäätöksiin. Oletuksia verrattiin todellisiin markkinoihin, ja johtopäätöksiä pyrittiin arvioimaan alan empiirisen tutkimuksen avulla. Näiden perusteella tehtiin päätelmiä siitä, ovatko mallit ristiriidassa todellisten markkinoiden kanssa. Samalla arvioitiin sitä, miten mallit ovat kehittyneet noin kymmenen vuoden tarkastelujakson aikana, jolle mallien julkaisuajat jakautuvat.

Työn tulosten perusteella dynaamiset rationaalisten sijoittajien mallit keskittyvät rationaalisten sijoittajien päätöksentekoon. Tarjouskirjan toimintaa mallinnetaan usean tapahtuman pelinä, jossa jokainen sijoittaja pyrkii maksimoimaan odotetun hyödyn. Tarjouskirja saavuttaa tasapainotilan, jonka perusteella tehdään johtopäätöksiä tarjouskirjamarkkinoiden piirteistä. Malleissa tehdään useita oletuksia, jotka ovat ristiriidassa todellisiin markkinoihin verrattuna. Oletukset ovat kehittyneet realistisempaan suuntaan, mutta uusimmatkaan tässä työssä käsiteltävät mallit eivät huomioi esimerkiksi markkinoiden informaation epäsymmetriaa. Empiiriset tutkimukset eivät antaneet selvää näyttöä siitä, että malleissa tehtävät johtopäätökset olisivat luotettavia. Erityisesti vanhin malli on voimakkaasti ristiriidassa empiirisen tutkimuksen kanssa. Uudempien mallien kohdalla ristiriitaisuuksien määrä väheni, mutta uudemmissa malleissa tehdään paljon sellaisia johtopäätöksiä, joille ei löydetty minkäänlaista empiiristä todistusaineistoa. Sen vuoksi niiden luotettavuutta on hankala todentaa. Malleissa on selvää kehitystä havaittavissa, kun siirrytään vanhimmasta mallista uusimpaan. On todennäköistä, että tulevaisuudessa julkaistaan yhä realistisempia dynaamisten rationaalisten sijoittajien malleja.

Avainsanat: dynaamiset rationaalisten sijoittajien mallit, tarjouskirja, rajahintatarjous, matemaattinen mallintaminen

Tämän julkaisun alkuperäisyys on tarkastettu Turnitin OriginalityCheck –ohjelmalla.

ABSTRACT

Aino Heino: Mathematical Models of Limit order Markets: Dynamic Models of Perfectly Rational Traders
Bachelor of Science Thesis
Tampere University
Bachelor's Degree Programme in Industrial Engineering and Management
Major: Industrial Engineering and Management
Examiner: Tuomas Korhonen
April 2019

This thesis deals with mathematical limit order book models that are dynamic and are based on perfectly rational traders. The main goal is to get familiar with these models and understand how realistically they model the real limit order book markets. This study was done as a literature review and four models were chosen for more detailed analysis. The analysis concentrated especially on the assumptions and conclusions of the models. Assumptions were compared to the real markets and conclusions were evaluated against empirical literature. Based on the analysis, it was concluded whether the models lead to contradictions with the real limit order markets. In addition, some conclusions were drawn about the evolution of the models.

This study shows that dynamic perfect-rationality models are based on the decision-making of the traders. The market is formalized as a sequential game in which every trader tries to maximize the expected utility. The game leads to an equilibrium that gives insights about the characteristics of the limit order book. The models have several unrealistic assumptions. The assumptions have become more realistic but even the newest analyzed models don't pay attention for example to asymmetric information. Empirical literature didn't provide clear evidence that the conclusions of the models are reliable. Especially the oldest model is strongly in conflict with empirical research. For newer models, the number of contradictions declined but there are many conclusions that are not addressed by empirical literature at all. Therefore, the reliability is difficult to verify. However, when the oldest and the newest models are compared, it's clear that the models have developed a lot. It seems likely that more and more realistic models will be published in the future.

Keywords: dynamic models of perfectly rational traders, limit order book, mathematical modeling

The originality of this thesis has been checked using the Turnitin OriginalityCheck service.

ALKUSANAT

Valitsin tarkoituksella haastavan aiheen, ja tiesin, ettei kirjoitusprosessi olisi helppo. Rahoituksen opintoja oli takana vain yhden opintojakson verran, mutta se riitti synnyttämään pohjattoman tiedonjanon matemaattista rahoitusta kohtaan. Tutkimustyötäni ei helpottanut se, etten löytänyt aiheesta ainuttakaan suomenkielistä julkaisua. Siitä huolimatta uskon edelleen, että tutun ja turvallisen aiheen valitseminen olisi ollut hukkaan heitetty mahdollisuus. Minun näkökulmastani tämän työn merkittävin tulos on kaikkea muuta kuin noin 30-sivuinen tutkimuspaperi. Merkittävintä on se, että kävin läpi ainutlaatuisen oppimisprosessin, jonka ansiosta mielenkiintoni alaa kohtaan kasvoi entisestään. Uskon, että tämä työ toimii tulevaisuuden suunnannäyttäjänä niin opinnoilleni kuin uranäkymilleni.

Haluan kiittää Juho Kanniaista siitä, että hän ehdotti minulle juuri tätä aihetta ja antoi asiantuntevia ohjeita koko prosessin ajan. Haluan kiittää myös Tuomas Korhosta erinomaisesta ohjauksesta. Lisäksi olen syvästi kiitollinen kaikesta vertaistuesta, jota sain opiskelutovereiltani. Tästä on hyvä jatkaa.

Tampereella, 3.5.2019

Aino Heino

SISÄLLYSLUETTELO

1. JOHDANTO	1
1.1 Työn tausta ja tavoitteet.....	1
1.2 Tutkimusmenetelmä	2
1.3 Tutkielman rakenne	3
2. TARJOUSKIRJAMARKKINOIDEN MALLINTAMINEN	4
2.1 Tarjouskirjamarkkinoiden toiminta.....	4
2.2 Matemaattisen mallintamisen lähestymistapoja	6
3. DYNAAMISET RATIONAALISTEN SIJOITTAJIEN MATEMAATTISET MALLIT ...	8
3.1 Työssä analysoidtavat mallit	8
3.2 Price Dynamics in Limit Order Markets - Parlour 1998.....	9
3.3 Order flow composition and trading costs in a dynamic limit order market – Foucault 1999.....	13
3.4 Limit Order Book as a Market for Liquidity – Foucault et al. 2005	16
3.5 A Dynamic Model of the Limit Order Book – Ioanid Rosu 2009.....	19
3.6 Mallien yhteenveto.....	21
4. PÄÄTELMÄT	26
LÄHTEET	29

1. JOHDANTO

1.1 Työn tausta ja tavoitteet

Tarjouskirjamarkkinat mahdollistavat yhden yleisimmistä keinoista käydä kauppaa rahoitusinstrumenteilla, ja tarjouskirjojen ansiosta kaupankävijät ja alan asiantuntijat pääsevät käsiksi ajankohtaiseen markkinadataan (Cont 2010). Tarjouskirjan toiminnan mallintaminen on tärkeää saatavilla olevan datan ymmärtämiseksi: jotta datasta voidaan tunnistaa epänormaalit poikkeamat, on tiedettävä, miten tarjouskirja toimii tavanomaisen kaupankäynnin seurauksena (Parlour 1998). Gouldin et al. (2013) mukaan tarjouskirjojen matemaattisen mallintamisen tutkimus on kasvanut viime aikoina nopeasti ja tuonut uusia näkemyksiä jo pitkään tutkittuihin kysymyksiin markkinoiden tehokkuudesta, hinnoittelusta ja kaupankävijöiden rationaalisuudesta.

Tarjouskirjojen mallintaminen on monimutkaista, sillä sijoittajat voivat käydä kauppaa useilla erilaisilla tarjouksilla, jotka vuorovaikuttavat keskenään eri tavoin. Markkinadatasta nousee monia empiirisiä säännönmukaisuuksia, eikä yksikään matemaattinen malli ole onnistunut toisintamaan niitä kaikkia (Gould et al. 2013). Alan tutkijoilla on siis edelleen ongelmia ratkaistavanaan, vaikka he ovatkin jo onnistuneet kehittämään useita matemaattisia malleja. Matemaattisten mallien kehittämisen onnistuminen ja toisaalta mallien keskeneräisyys tekevät tarjouskirjamarkkinoiden mallintamisesta varsin mielenkiintoisen tutkimuskohteen.

Tämän kandidaatintyön tavoitteena on esitellä ja analysoida keskeisiä tarjouskirjamarkkinoiden matemaattisia malleja ja arvioida, miten mallit suhtautuvat toisiinsa ja ovatko ne uskottavia todellisten tarjouskirjamarkkinoiden näkökulmasta. Tarjouskirjat ovat laajasti käytössä osakemarkkinoilla, joten työssä käytetään osakekaupoille tyypillistä käsitteistöä. Työ keskittyy malleihin, jotka ovat dynaamisia ja perustuvat rationaalisten sijoittajien vuorovaikutukseen. Tarkoituksena on syventyä erityisesti malleissa tehtäviin oletuksiin ja johtopäätöksiin sekä siihen, millaisia yhtäläisyyksiä ja eroavaisuuksia mallien ja todellisten tarjouskirjamarkkinoiden välillä on. Tarkasteltavien mallien perusteella pyritään tekemään johtopäätöksiä siitä, mihin suuntaan mallit ovat kehittyneet ja mitä ne kertovat dynaamisista rationaalisten sijoittajien malleista yleisesti. Tutkimuskysymys voidaan muotoilla seuraavasti: Millaisia dynaamiset rationaalisten sijoittajien mallit ovat, ja mallintavatko ne todellisia tarjouskirjamarkkinoita uskottavasti?

1.2 Tutkimusmenetelmä

Työ on toteutettu kirjallisuuskatsauksena, joten tutkimuskysymykseen pyrittiin vastaamaan ulkoisen aineiston keskeisiä löydöksiä yhdistelemällä ja analysoimalla. Tutkimuksessa tutustuttiin korkeatasoisiin tieteellisiin artikkeleihin ja muihin aineistoihin. Kirjallisuushauissa hyödynnettiin Google Scholaria ja Andoria, joiden avulla pyrittiin löytämään mahdollisimman laadukasta ja tähän tutkimukseen soveltuvaa aineistoa. Hauissa keskityttiin vertaisarvioituihin ja useasti siteerattuihin tieteellisiin artikkeleihin, jotka on julkaistu alan merkittävässä lehdissä. Lehtien arviointiin hyödynnettiin Julkaisuforumin asiantuntijapaneelia. Lisäksi keskityttiin erityisesti alan merkittävien tutkijoiden julkaisemiin aineistoihin.

Tutkimuksessa tutustuttiin alan uusimpiin julkaisuihin sekä vanhempiin, jopa ennen 2000-lukua julkaistuihin aineistoihin. Vanhemman aineiston hyödyntäminen on perusteltua aiheen matemaattisuuden nojalla, sillä osa merkittävistä malleista on julkaistu yli kymmenen vuotta sitten. Alan käsitteisiin ei liity merkittäviä ristiriitoja, joten sopivat käsitteet kirjallisuushakuihin muotoutuivat helposti. Suomenkielistä tutkimusta on tarjolla niukasti, joten hauissa käytettiin muun muassa hakusanoja *limit order books*, *order book models*, *dynamic*, *perfect rationality model* ja *intelligence model*. Kaksi viimeisintä hakusanaa viittaavat mallintamisen näkökulman rajaamiseen, sillä tässä työssä keskitytään nimenomaan rationaalisten sijoittajien malleihin, jotka tunnetaan myös älykkäinä malleina. Hakusanojen yhdistelyssä hyödynnettiin Boolean operaattoreita.

Alan tutkimus vaikuttaisi keskittyvän muutamiin merkittäviin tutkimuksiin, joten lähdeaineiston rajaaminen oli aluksi suhteellisen helppoa. Tarkempaan analyysiin valittiin kuitenkin vain neljä matemaattista mallia, joten osa keskeisistä malleista täytyi rajata pois. Tarkemmat kriteerit mallien valitsemiseen esitellään työn kolmannessa luvussa. Neljään malliin keskittyminen poikkeaa tyypillisen tuotantotalouden kandidaatintyön tutkimusmenetelmästä: tämän työn merkittävin ansio ei ole useiden lähteiden yhdisteleminen, vaan ennemminkin neljän julkaisun syvempi esittely ja analysointi. Tämä toteutettiin tietenkin osittain muiden julkaisujen avulla. Kun keskeisimmät julkaisut olivat löytyneet, pyrittiin etsimään tutkimuksia, jotka arvioivat valittuja malleja. Kirjallisuushakuja tehtiin pääasiassa niiden julkaisujen keskuudessa, jotka viittaavat valittuihin julkaisuihin tai joihin valitut julkaisut viittaavat. Lisäksi haettiin tutkimuksia, jotka perehtyvät malleissa esiteltyihin ilmiöihin.

1.3 Tutkielman rakenne

Työn toisessa luvussa tutustutaan tarjouskirjamarkkinoiden toimintaan ja alan keskeisiin käsitteisiin. Lisäksi perehdytään tarjouskirjojen matemaattisen mallintamisen käsitteistöön ja siihen, miten dynaamiset rationaalisten sijoittajien mallit vertautuvat muihin mallintamisen lähestymistapoihin. Tämä antaa tarvittavan pohjan seuraaville luvuille, joissa syvennyttään dynaamisiin rationaalisten sijoittajien matemaattisiin malleihin tarkemmin.

Kolmannessa luvussa tutustutaan neljään dynaamiseen rationaalisten sijoittajien malliin. Aluksi perustellaan, miten tietyt mallit valikoituivat tarkemman tutkimuksen kohteeksi, minkä jälkeen tutustutaan jokaiseen malliin yksi kerrallaan. Pääpaino on mallien oletuksissa ja johtopäätöksissä. Oletuksia verrataan todellisiin tarjouskirjamarkkinoihin, ja mallien keskeisimpiä tuloksia arvioidaan alan empiirisen tutkimuksen avulla. Viimeisessä alaluvussa muodostetaan näkemys siitä, miten esitellyt neljä mallia vertautuvat toisiinsa ja todellisiin tarjouskirjamarkkinoihin, ja mitä ne kertovat dynaamisista rationaalisten sijoittajien malleista yleisesti. Neljännessä luvussa kootaan yhteen työn keskeisiä tuloksia, ja esitellään tulosten perusteella tehtyjä johtopäätöksiä.

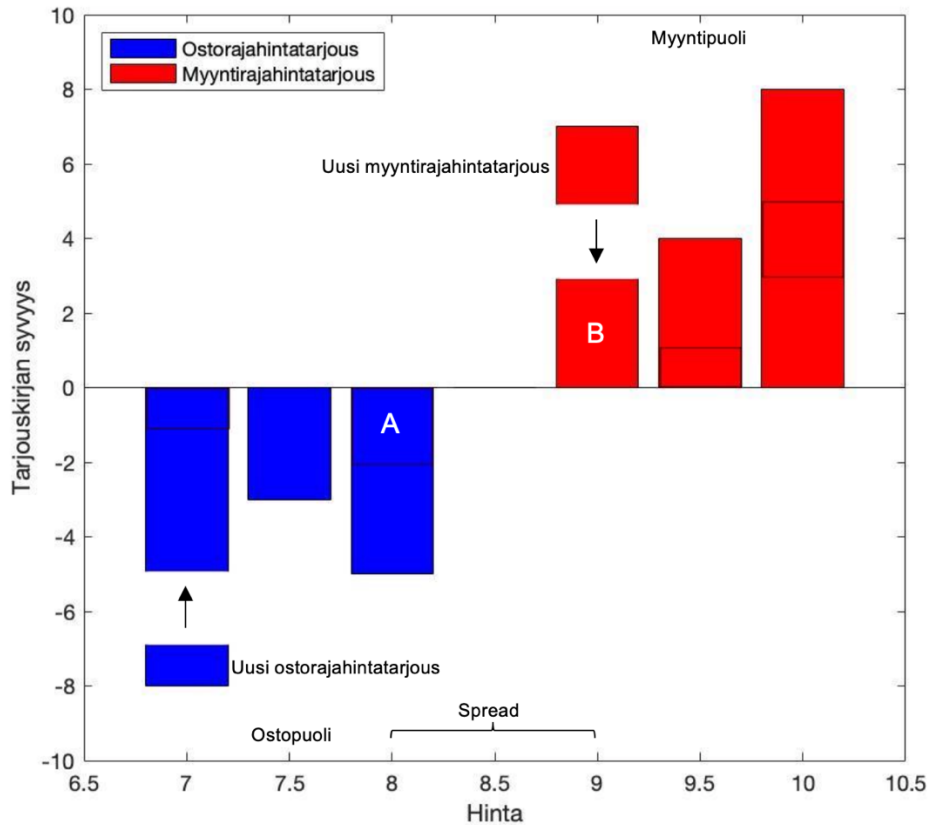
2. TARJOUSKIRJAMARKKINOIDEN MALLINTAMINEN

2.1 Tarjouskirjamarkkinoiden toiminta

Osakemarkkinoilla tarkoitetaan markkinoita, joilla ostetaan ja myydään julkisten osakeyhtiöiden osuuksia. Osakemarkkinat tarjoavat lukuisille kaupankävijöille keskitetyn kohtaamispaikan, jossa rahoitusinstrumentit vaihtavat omistajaa. Kaupat syntyvät pörssin ylläpitämän järjestelmän avulla. Contin et al. (2010) mukaan osakkeiden hintakehitys perustuu osto- ja myyntitarjousten väliseen vuorovaikutukseen. Aiemmin markkinatakkajien ja asiantuntijoiden ylläpitämät keskitetyt tarjoukset mahdollistivat likvidit rahoitusmarkkinat. Nykyisin kaupankäynti perustuu yhä enenevässä määrin vaihtoehtoiseen malliin, jossa kaikki voimassaolevat rajahintatarjoukset on koottu tarjouskirjaan. (Cont et al. 2010) Tarjouskirjan toimintaan perustuvia markkinoita voidaan kutsua tarjouskirjamarkkinoiksi. Tarjouskirjoja hyödynnetään laajasti osakemarkkinoilla, mutta myös muiden rahoitusinstrumenttien yhteydessä.

Tarjouskirjamarkkinoilla kaupankävijät voivat asettaa markkinatarjouksia ja rajahintatarjouksia tai perua voimassaolevan rajahintatarjouksensa (Abergel & Jedidi 2013). Markkinatarjous on toimeksianto käydä kauppaa välittömästi markkinoiden parhaaseen hintaan, ja rajahintatarjous (t, j, x, p) on etukäteen ajanhetkellä t tehty sitoumus käydä kauppaa rahoitusinstrumentilla j määrällä x rajahintaan p (Parlour & Seppi 2007). Toisin sanoen rajahintatarjous voi toteutua vain hinnan p suuruisella tai sitä paremmalla hinnalla (Madhavan 2000). Kuten aiemmin todettiin, avoimet rajahintatarjoukset on koottu tarjouskirjaan odottamaan toimeenpanoa.

Kuva 1 havainnollistaa tarjouskirjan toimintaperiaatetta ja täsmentää tässä työssä käytettävää käsitteistöä. Pystyakseli, tarjouskirjan syvyys, kuvaa avointen tarjousten sisältämien kaupattavien yksiköiden lukumäärää. Vaaka-akselilla on yhtä kaupattavaa yksikköä vastaava hinta. Ostorajahintatarjoukset ovat tarjouskirjan ostopuolella ja myyntirajahintatarjoukset myyntipuolella. Parhaan myynti- ja ostotarjouksen erotukselle ei ole vakiintunutta suomenkielistä käsitettä, joten työssä käytetään englanninkielistä termiä *spread*.



Kuva 1. Tarjouskirjan toimintaperiaate (mukailtu lähteestä Bonart & Lillo 2013).

Rajahintatarjousten toteutuminen noudattaa tyypillisesti hinta- ja aikaprioriteettisääntöjä. Hinprioriteetilla tarkoitetaan sitä, että hinnaltaan paremmat tarjoukset toteutuvat ennen huonompia. Aikaprioriteetilla tarkoitetaan sitä, että samanhintaisista tarjouksista aiemmin asetettu toteutuu ennen myöhemmin asetettua. (Parlour & Seppi 2007) Näin ollen kuvan 1 tilanteessa ostotarjous A ja myyntitarjous B toteutuvat ennen muita saman puolen tarjouksia. Mikäli seuraava saapuva tarjous on ostomarkkinatarjous, syntyy kauppa tarjouskirjan myyntipuolella ja myyntirajahintatarjouksien määrä vähenee (Parlour 1998). Markkinatarjous johtaa siis prioriteetiltaan suurimman rajahintatarjouksen toimeenpääntöön tarjouskirjan vastakkaisella puolella. Aina kun uusi tarjous asetetaan, kaupankäyntialgoritmi tarkistaa, johtaako se toteutuvaan kauppaan, vai jääkö se avoimeksi tarjouskirjaan (Bonart & Lillo 2018).

Rajahintatarjous on voimassa siihen asti, kunnes kauppa syntyy tai tarjous perutaan (Hollifield et al. 2004). Kuten jo mainittiin, markkinatarjous toteutuu välittömästi. Toisin kuin rajahintatarjoukselle, ei markkinatarjoukselle voi asettaa haluttua hintaa. Ahnin et al. (2001) mukaan rajahintatarjous mahdollistaa markkinatarjousta paremman hinnan, mutta on olemassa riski, ettei rajahintatarjous ikinä toteudu. Heidän mukaansa toinen rajahintatarjouksien riski on se, että tarjous saattaa osoittautua väärinhinnoitelluksi, jolloin informoidut sijoittajat voivat käyttää tarjousta hyväkseen. Siten rajahintatarjouksella

on sekä hyviä että huonoja ominaisuuksia markkinatarjoukseen verrattuna. Foucault et al. (2005) mukaan tarjouskirjamarkkinoiden kasvava suosio osoittaa, että kaupankävijät arvostavat mahdollisuuttaan valita markkinatarjouksen ja rajahintatarjouksen väliltä.

2.2 Matemaattisen mallintamisen lähestymistapoja

Tarjouskirjamarkkinat muodostavat mielenkiintoisen ympäristön matemaattiselle mallintamiselle. Tarjouskirja on kaikkien markkinoiden kaupankävijöiden saatavilla ja tarjoaa uudenlaista dataa markkinoiden toiminnasta (Cont et al. 2010). Toisaalta rajahintatarjoukset johtavat epälineaarisiin kaupankäynnin lopputuloksiin, sillä joissain tilanteissa tarjoukset toteutuvat ja joissain eivät (Parlour & Seppi 2007). Siten saatavilla oleva markkinadata luo hyvät lähtökohdat mallien kehittämiseksi, mutta markkinatarjouksien ja rajahintatarjouksien vuorovaikutus tekee tarjouskirjamarkkinoiden toiminnan määrittämisestä monitahoisen ongelman.

Tarjouskirjamarkkinoiden mallintamiseen on kaksi varsin erilaista lähestymistapaa, jotka ovat ainakin osittain onnistuneet mallintamaan tarjouskirjamarkkinoiden keskeisiä piirteitä. Abergelin ja Jedidin (2013) mukaan ensimmäinen, niin sanottu tilastollinen lähestymistapa, on suosittu fyysikoiden keskuudessa. Siinä oletetaan, että sijoittajien käyttäytyminen on satunnaista. Siten myös tarjoukset tehdään satunnaisesti. Toinen lähestymistapa on suosittu taloustieteilijöiden keskuudessa ja perustuu rationaalisten sijoittajien vuorovaikutukseen. Sijoittajat tekevät päätöksensä strategisesti, ja heidän tekemänsä valinnat tähtäävät henkilökohtaisen hyödyn optimointiin. (Abergel & Jedidi 2013) Tässä työssä syvennyttään tarkemmin näistä jälkimmäisiin malleihin, joita kutsuttakoon selkeyden vuoksi rationaalisten sijoittajien malleiksi.

Rationaalisten sijoittajien tarjouskirjamallit voidaan edelleen jakaa ainakin kahteen alaluokkaan. Rationaalisten sijoittajien mallit ovat perinteisesti olleet staattisia ja perustuneet epäsymmetriseen informaatioon (Rosu 2009). Staattiset mallit keskittyvät ensisijaisesti tarjouskirjan kokonaisuuteen: niissä useiden kaupankävijöiden tarjoukset kootaan yhteen ja toteutetaan samanaikaisesti yhden kaupankäyntikierron jälkeen (Parlour & Seppi 2007). Tarjouskirjamarkkinoilla on kuitenkin useita piirteitä, joita staattiset mallit eivät pysty selittämään. Esimerkiksi Parlourin et al. (1998) mukaan staattiset mallit eivät tarjoa tietoa siitä, miten tarjouksien saapuminen ja poistuminen riippuu tarjouskirjan tämänhetkisestä tilasta, eikä aikaprioriteettisääntöä voida käsitellä täsmällisesti. Lisäksi Foucaultin et al. (2005) mukaan staattinen luonne ei mahdollista markkinoiden palautuvuuden (*engl. resiliency*) tarkastelua. Markkinoiden palautuvuudella tarkoitetaan sitä, kuinka nopeasti markkinat toipuvat hetkellisistä hinnanmuutoksista eli kuinka nopeasti spread palautuu ennalleen. (Foucault et al. 2005)

Viime aikoina teoreettinen tutkimus on keskittynyt tarjouskirjan dynaamisiin piirteisiin (Rosu 2009). Toisin kuin staattiset mallit, dynaamiset mallit syventyvät ensisijaisesti sijoittajien kaupankäyntistrategioihin. Sijoittajien strategiat ovat mielenkiintoisia ainakin kahdesta syystä: markkinoiden tarjouskanta on seurausta yksittäisten sijoittajien tarjouksista, minkä lisäksi algoritmikaupankäynnin kasvu on lisännyt kiinnostusta tarjousten optimointiin. (Parlour & Seppi 2007) Tässä työssä keskitytään dynaamisiin rationaalisten sijoittajien malleihin.

Dynaamisissa malleissa ei tyypillisesti ole huomioitu markkinoiden epäsymmetristä informaatiota (Rosu 2009). Tällaisia malleja ovat esimerkiksi Parlourin (1998), Foucaultin (1999), Goettlerin et al. (2005) ja Rosun (2009) mallit. Suhteellisen tuoreiden mallien joukossa on myös sellaisia rationaalisten sijoittajien malleja, jotka ovat dynaamisia ja huomioivat epäsymmetrisen informaation. Tällaisiin malleihin lukeutuvat esimerkiksi Goettlerin et al. (2009) malli sekä Rosun (2018) malli.

Matemaattinen mallintaminen edellyttää tarjouskirjamarkkinoiden rakenteen ja toiminnan tarkkaa määrittelyä. Tarjouskirjamarkkinoiden matemaattisissa malleissa on tehtävä useita oletuksia mallintamisen helpottamiseksi, mutta monet oletuksista ovat niin yksityiskohtaisia ja epärealistisia, että mallien johtopäätöksiä on lähes mahdotonta yhdistää todellisiin markkinoihin (Gould et al. 2013). Dynaamisissa rationaalisten sijoittajien malleissa on esimerkiksi määriteltävä, millaisia toimintavaihtoehtoja markkinoille saapuvalla sijoittajalla on ja mitkä tekijät vaikuttavat sijoittajan kokemaan hyötyyn.

Erilaiset oletukset johtavat toisistaan poikkeaviin matemaattisiin yhtälöihin, jotka puolestaan johtavat erilaisiin tuloksiin. Tässä työssä keskitytään erityisesti dynaamisten rationaalisten sijoittajien mallien oletuksiin ja johtopäätöksiin, sillä alan tutkimuksen perusteella vaikuttaa siltä, että kehitettyjen mallien suurimmat ongelmat liittyvät oletusten ja johtopäätösten vaihtelevaan laatuun. Seuraavassa luvussa esitellään ja analysoidaan tarkemmin neljää dynaamista rationaalisten sijoittajien mallia ja kootaan yhteen keskeisimmät esiin nousseet havainnot.

3. DYNAAMISET RATIONAALISTEN SIOITTAJIIEN MATEMAATTISET MALLIT

3.1 Työssä analysoitavat mallit

Tässä työssä tutustutaan tarkemmin neljään dynaamiseen rationaalisten sijoittajien malliin. Mallien valinnassa painotettiin julkaisufoorumien ja tutkijoiden luotettavuutta sekä sitä, kuinka useasti alkuperäiseen julkaisuun on viitattu. Tutkijoiden luotettavuutta perusteltiin esimerkiksi sillä, millaisia muita alan merkittäviä tutkimuksia he ovat julkaisseet. Lisäksi pyrittiin valitsemaan sekä hieman vanhempia että uudempia malleja. Kirjallisuushakujen perusteella vaikuttaisi siltä, että valtaosa merkittävistä malleista on julkaistu ennen 2010-lukua. Uudempia malleja kehitetään jatkuvasti, ja potentiaalisia työpapereita on tarjolla runsaasti. Tällaisia ovat esimerkiksi Brolleyn ja Malinovan (2017) malli sekä Rosun (2019) malli.

On siis hyvin mahdollista, että varsinaisten tieteellisten julkaisujen joukkoon liittyy ansiokkaita malleja lähitulevaisuudessa. Neljän mallin otos on kuitenkin niin pieni, että valinnassa keskityttiin mahdollisimman luotettavaan ja viimeistelyihin aineistoihin. Siten työpaperit rajattiin pois. Lisäksi dynaamisia rationaalisten sijoittajien malleja arvioiva kirjallisuus osoittautui suhteellisen vähäiseksi, mikä saattaisi aiheuttaa ongelmia etenkin tuoreimpien mallien analysoimisen yhteydessä. Näin ollen on perusteltua, että uusinkin työhön valikoitunut malli on julkaistu ennen 2010-lukua.

Kuten jo mainittiin, ainoastaan tuoreimmat dynaamiset rationaalisten sijoittajien mallit käsittelevät epäsymmetristä informaatiota, joten rajauksen vuoksi työssä käsiteltävät mallit eivät ota siihen kantaa. Rosun (2009) mukaan markkinoiden epäsymmetrisen informaation mittaaminen on haastavaa, eikä se yleensä ole havaittavissa, joten sen eliminointi voidaan jopa katsoa eduksi. Rajaus on hyödyksi myös kandidaatintyön laajuuden kannalta, sillä mallien esittelyssä ja vertailussa päästään syvemmälle, kun mallien lähestymistavat ovat samankaltaisia.

Työhön valikoitui Parlourin (1998), Foucaultin (1999), Foucaultin, Kadanin ja Kandelin (2005) sekä Rosun (2009) mallit. Seuraavissa alaluvuissa esitellään nämä neljä mallia. Mallit esitellään kronologisessa järjestyksessä mallin julkaisuajan perusteella. Tutkimuksessa hyödynnetään mallien alkuperäisiä julkaisuja ja myöhemmin julkaistuja, malleja arvioivia tutkimuksia. Lisäksi perehdytään alan empiriseen tutkimukseen, jotta teoret-

tisten mallien johtopäätöksiä voidaan verrata todellisiin tarjouskirjamarkkinoihin. Viimeisessä alaluvussa kootaan yhteen mallien keskeiset piirteet ja arvioidaan, miten esitellyt mallit vertautuvat toisiinsa ja todellisiin tarjouskirjamarkkinoihin.

3.2 Price Dynamics in Limit Order Markets - Parlour 1998

Ensimmäinen malli on Parlourin artikkelissa *Price Dynamics in Limit Order Markets* (1998) esiteltävä malli, jonka keskeinen periaate on se, että jokainen sijoittaja huomioi päätöksentekotilanteessa tarjouksen vaikutuksen tuleviin tarjouksiin. Sijoittajan päätöstä määritettäessä tarkastellaan tarjouskirjan molempia puolia. Optimaalisten strategioiden noudattaminen johtaa tasapainotilaan, jossa tarjouskirjaan saapuvat ja sieltä poistuvat tarjoukset käyttäytyvät tietyllä tavalla. (Parlour 1998) Parlourin ja Sepin (2007) mukaan tämä on ensimmäisiä malleja, jotka tarkastelevat tarjouksien vaikutuksia tulevaisuuden kaupankäyntiin.

Mallissa kauppaa käydään yhtenä päivänä, ja rahoitusinstrumentin arvo realisoituu seuraavana päivänä. Kauppapäivä jakautuu diskreetisti aikaperiodeihin, ja markkinoille saapuu yksi ostajaksi, myyjäksi tai ei kummaksikaan määritelty kaupankävijä jokaisella periodilla. Kaupankävijät asettavat välittömästi markkinatarjouksen tai rajahintatarjouksen tai vaihtoehtoisesti poistuvat, eivätkä jätä lainkaan tarjousta. Yksittäinen kaupankävijä saapuu markkinoille ainoastaan kerran, joten tarjouksen asettamiseen on vain yksi mahdollisuus, eikä tarjousta voi muokata tai perua. Jotta asetettu rajahintatarjous voisi toteutua, täytyy markkinoille saapua niin monta markkinatarjousta kuluvan kauppapäivän aikana, että myös edeltävät rajahintatarjoukset toteutuvat. Muutoin rajahintatarjous on voimassa toistaiseksi. Näin ollen rajahintatarjouksen toteutumistodennäköisyys riippuu tarjouskirjan tilasta, tarjouksen asettamisen ajankohdasta ja siitä, kuinka monta markkinatarjousta markkinoille uskotaan saapuvan kuluvan päivän aikana. (Parlour 1998)

Kaupankävijää kuvataan muuttujilla β , π_s ja π_b . β kuvastaa kaupankävijän aikapreferenssiä meneillään olevan kauppapäivän ja seuraavan päivän välillä, π_s todennäköisyyttä, jolla kaupankävijä on myyjä ja π_b todennäköisyyttä, jolla kaupankävijä on ostaja. Mallissa markkinoiden toiminta rajataan siten, että on olemassa vain yksi mahdollinen myyntihinta ja yksi ostohinta. Tietyn ajanhetken markkinoita mallinnetaan muuttujilla A , B ja b_t , jotka kuvaavat tarjouskirjan myyntipuolen hintaa, ostopuolen hintaa sekä tarjouskirjan tilaa. b_t voidaan jakaa kahteen muuttujaan, b_t^A ja b_t^B , jotka kuvaavat voimassaolevien myynti- ja ostorajahintatarjouksien määriä. Mallissa oletetaan, että markkinatarjoukset voivat toteutua, vaikka b_t^A ja b_t^B olisivat nolliä. Tarjouskirja ei siis ole koskaan tyhjä. (Parlour 1998)

Kaupankävijöiden strategiat ovat aikariippuvaisia. Kun kaupankävijä tekee päätöksen markkinatarjouksen ja rajahintatarjouksen välillä, hän vertailee vaihtoehtojen odotettuja hyötyjä. Myyntitilanteessa rajahintatarjouksen odotettu hyöty määritellään $p_t^S[B - \beta V]$, jossa p_t^S on todennäköisyys, jolla tarjous toteutuu kuluvan päivän aikana, ja V on kaupattavan instrumentin arvo. Markkinatarjouksen hyöty on $[B - \beta V]$. Markkinat nähdään stokastisena usean tapahtuman pelinä, jossa markkinoille saapuvat kaupankävijät havaitsevat tarjouskirjan hetkellisen tilan ja tekevät tarjouksensa optimaalisen strategian perusteella. Pelin rekursiivisen rakenteen ansiosta tarjouskirjan tasapainotila on aina saavutettavissa. Tasapainotilan avulla voidaan tehdä johtopäätöksiä tarjouskirjan tapahtumien todennäköisyyksistä. (Parlour 1998)

Kuten edellä käy ilmi, mallissa tehdään useita oletuksia tarjouskirjamarkkinoiden toiminnasta, ja osa oletuksista vastaa todellisia markkinoita kehnosti. Hollifield et al. (2006) kritisoivat mallia siitä, ettei kaupankävijä voi valita rajahintatarjouksen hinnan suuruutta. Kritiikki on ymmärrettävää, sillä todellisilla markkinoilla yksi merkittävistä rajahintatarjouksen eduista verrattuna markkinatarjoukseen on se, että kaupankävijä voi vaikuttaa tarjouksen hintaan. Parlour (1998) perustelee rajaustaan sillä, että mallissa halutaan painottaa aikaprioriteettisäännön tärkeyttä hintaprioriteetin sijaan, kun määritellään optimaalista strategiaa.

Contin (2006) mukaan Parlourin mallia on hankala arvioida tai soveltaa, sillä se sisältää parametreja, joiden arvojen määrittäminen ei ole täysin selvää. Kritiikki on aiheellista. Mallissa ei esimerkiksi oteta kantaa siihen, miten rahoitusinstrumentin todellinen arvo tulisi määrittää. Cont (2006) kuitenkin yleistää epäuskottavat parametrit useisiin muihinkin dynaamisiin rationaalisten sijoittajien malleihin. On syytä huomata, että Parlourin mallissa rahoitusinstrumentin todelliseen arvoon liittyy muitakin ongelmia: Goettler et al. (2005) huomauttavat, ettei Parlourin mallissa huomioida todellisen arvon volatiliteettia. On totta, ettei arvoon liity satunnaista. Tämä on raju yksinkertaistus, joka epäilemättä vaikuttaa mallin uskottavuuteen.

Parlour (1998) tekee mallin avulla neljä keskeistä johtopäätöstä, jotka liittyvät asetettavien tarjousten tai toteutuvien kauppojen todennäköisyyksiin edeltävän tapahtuman ehdolla. Ensinnäkin todennäköisyys, jolla seuraava toteutuva kauppa tapahtuu tarjouskirjan myyntipuolella, on suurempi, mikäli myös edeltävä kauppa on tapahtunut myyntipuolella kuin jos se olisi tapahtunut ostopuolella. Toisekseen, mikäli edeltävä tarjous on ollut ostorajahintatarjous, ostorajahintatarjouksen asettamisen todennäköisyys on pienempi kuin jos edeltävä tarjous tai tapahtuma olisi ollut jokin muu. Kolmanneksi myyntirajahintatarjouksen asettamisen todennäköisyys on suurempi, jos edeltävä toteutunut kauppa on syntynyt tarjouskirjan myyntipuolella kuin jos edeltävä kauppa tai tarjous olisi ollut

jonkin muunlainen. Neljänneksi, jos edeltävä tarjous on ollut myyntirajahintatarjous, myyntirajahintatarjouksen asettamisen todennäköisyys pienempi kuin myyntirajahintatarjouksen asettamisen todennäköisyys ostopuolella tapahtuneen kaupan jälkeen. Tämän todennäköisyys on puolestaan pienempi kuin myyntirajahintatarjouksen asettaminen ostopuolella tapahtuneen kaupan jälkeen, minkä todennäköisyys on puolestaan pienempi kuin todennäköisyys, jolla myyntirajahintatarjous asetetaan myyntipuolen kaupan toteutumisen jälkeen. Johtopäätökset pätevät symmetrisesti myös tarjouskirjan toisella puolella. (Parlour 1998)

Taulukkoon 1 on koottu tuloksia Ranaldon (2004) ja Biaisin et al. (1995) empiirisistä tutkimuksista, joiden avulla pyritään arvioimaan Parlourin (1998) johtopäätöksiä. Ranaldon tutkimusdata perustuu Sveitsin pörssin 15:n osakkeen kehitykseen maaliskuun ja huhtikuun aikana vuonna 1997. Biais et al. data perustuu CAC 40 -indeksin liikkeisiin kahden kuukauden aikana vuonna 1991. Kummassakin empiirisessä tutkimuksessa on syvennytty siihen, millaisia tapahtumia tarjouskirjassa havaitaan, kun edeltävä tapahtuma on tunnettu. Taulukkoon 1 on koottu tietyn tarjoustyyppin suhteellinen frekvenssi edellisen tapahtuman ehdolla. Viimeisessä sarakkeessa esitetään, miten suhteellisten frekvenssien tulisi vertautua toisiinsa Parlourin johtopäätösten perusteella. Toista ja kolmatta johtopäätöstä ei mainita taulukossa, sillä ne sisältyvät neljänteen johtopäätökseen.

Biaisin et al. (1995) tutkimuksessa markkinatarjoukset jaotellaan niiden suuruuden perusteella ja rajahintatarjoukset jaotellaan sen perusteella, miten niiden hinnat suhtautuvat aiempiin rajahintatarjouksiin. Taulukossa on huomioitu ainoastaan pienet markkinatarjoukset ja edeltävää parasta hintaa vastaavat rajahintatarjoukset. Rajaukset on tehty siksi, että eri luokkien yhdistäminen on perusteetonta suhteellisen frekvenssin vuoksi. Toisaalta Parlour (1998) itse toteaa, että on sopimatonta verrata johtopäätöksiä suuriin tarjouksiin. Lisäksi taulukkoon on koottu vain ne tarjouskombinaatiot, jotka ovat relevantteja Parlourin mallin johtopäätösten näkökulmasta. Ranaldon (2004) mallissa ei ole tällaista luokittelua, joten taulukossa on mukana kaikenkokoiset ja -hintaist tarjoukset. Näin ollen suhteellisia frekvenssejä ei voi vertailla empiiristen tutkimusten välillä.

Taulukossa käytetään lyhenteitä, joista SMO viittaa myyntimarkkinatarjoukseen, BMO ostomarkkinatarjoukseen, SLO myyntirajahintatarjoukseen ja BLO ostopuolella tapahtuneeseen. Rivit 1-4 viittaavat markkinatarjouksiin. Huomattakoon, että ostomarkkinatarjous voidaan ajatella toteutuvana kauppana tarjouskirjan myyntipuolella ja myyntimarkkinatarjous kauppana ostopuolella. Rivit 5-8 viittaavat myyntirajahintatarjouksien esiintymiseen, kun edeltävä tarjous tunnetaan. Rivit 9-12 viittaavat ostopuolella tapahtuneisiin. Vih-

reä värikoodi merkitsee sitä, että molemmat empiiriset tutkimukset tukevat Parlourin mallia, keltainen sitä, että ainoastaan toinen tutkimuksista tukee mallia ja punainen sitä, ettei malli saa tukea kummaltakaan tutkimukselta.

Taulukko 1. Tarjouksen suhteellinen frekvenssi edellisen tarjouksen ehdolla (mukailtu lähteistä Ranaldo 2004 ja Biais et al. 1994).

Rivinumero	Tarkasteltava tilanne	Suhteellinen frekvenssi, Ranaldo (2004)	Suhteellinen frekvenssi, Biais et al. (1994)	Parlourin (1998) mallin johtopäätökset
1	$SMO_t SMO_{t-1}$	0,219	0,339	
2	$SMO_t BMO_{t-1}$	0,215	0,198	1 > 2 (jp. 1)
3	$BMO_t BMO_{t-1}$	0,358	0,205	
4	$BMO_t SMO_{t-1}$	0,208	0,103	3 > 4 (jp. 1)
5	$SLO_t SLO_{t-1}$	0,187	0,067	
6	$SLO_t SMO_{t-1}$	0,312	0,040	5 < 6 (jp. 4)
7	$SLO_t BLO_{t-1}$	0,151	0,038	6 < 7 (jp. 4)
8	$SLO_t BMO_{t-1}$	0,35	0,045	7 < 8 (jp. 4)
9	$BLO_t BLO_{t-1}$	0,195	0,069	
10	$BLO_t BMO_{t-1}$	0,383	0,053	9 < 10 (jp. 4)
11	$BLO_t SLO_{t-1}$	0,138	0,048	10 < 11 (jp. 4)
12	$BLO_t SMO_{t-1}$	0,284	0,048	11 < 12 (jp. 4)

Kuten taulukosta 1 voi havaita, Ranaldon (2004) ja Biaisin et al. (1994) tutkimukset tukevat johtopäätöksiä vain osittain. Ainoastaan ensimmäinen johtopäätös on linjassa molempien empiiristen tutkimusten kanssa. Neljännen johtopäätöksen perusteella rivien 5-8 ja 9-12 suhteellisten frekvenssien tulisi olla kasvavassa suuruusjärjestyksessä. Näin ei selvästi ole, eli kokonaisuudessaan neljäs johtopäätös ei saa tukea kummaltakaan empiiriseltä tutkimukselta. Toinen ja kolmas johtopäätös eivät ole yhtä tarkkoja suuruusjärjestyksen suhteen kuin neljäs johtopäätös. Toisen johtopäätöksen perusteella rivin 5 tulisi olla pienempi kuin rivit 6-8 ja rivin 9 pienempi kuin rivit 10-12, mutta tämäkään ei ole linjassa tutkimusten kanssa. Myös Ellul et al. (2007) tarkastelevat Parlourin toista johtopäätöstä empiirisessä tutkimuksessaan, joka perustuu New Yorkin pörssin dataan. Hekin päätyvät ristiriitaan. Kolmannen johtopäätöksen perusteella rivin 8 tulisi olla suurempi kuin rivit 5-7 ja rivin 12 tulisi olla suurempi kuin rivit 9-11. Kolmas johtopäätös on myyntipuolen osalta yhtäläinen Ranaldon (2004) tulosten kanssa. Muutoin tulokset ovat ristiriidassa.

Empiiriset tutkimukset osoittavat, että edeltävällä tarjouskirjan tapahtumalla on vaikutusta seuraavan tapahtuman tyyppiin, joten Parlourin (1998) tutkimuksen näkökulma on perusteltu. Kokonaisuudessaan johtopäätökset eivät kuitenkaan saa vahvaa tukea empiirisiltä tutkimuksilta. Tulosten perusteella ei voi kuitenkaan sanoa, mistä ristiriidat johtuvat. Parlourin mukaan johtopäätöksiä ei tulisi verrata suuriin kauppoihin, sillä ne on rajattu pois mallin oletuksissa. Näitä kauppoja ei voida erotella Ranaldon (2004) tulok-

sista. Toisaalta Biais et al. (1994) tutkimuksessa mainitaan, etteivät he pystyneet havaitsemaan piilotettuja tarjouksia suoraan datasta. Nämä ja monet muut seikat tekevät vertailusta epävarmaa. Kaikki epävarmuutta aiheuttavat tekijät eivät johdu Parlourin mallista, mutta on selvää, että mallin oletukset heikentävät sen uskottavuutta ja hankaloittavat sen soveltamista todellisissa olosuhteissa.

Epärealistisista oletuksista huolimatta mallissa on paljon hyvää. Parlour (1998) kertoo, että tarjouskirjan staattisia malleja on kehitetty useampia, mutta dynaamisia ominaisuuksia on tutkittu varsin vähän. Kuten aiemmin on mainittu, staattiset mallit eivät ota kantaa siihen, miten tarjouskirjan toiminta riippuu sen nykyisestä tilasta. On selvää, että todellisilla markkinoilla rationaalisen kaupankävijän on pohdittava sekä tarjouskirjan nykyistä tilaa että tulevaisuudentilaa. Se, että Parlourin malli huomioi tarjouksen vaikutuksen tuleviin tarjouksiin, on valtava edistysaskel alan aiempiin, ennen vuotta 1998 julkaistuihin tutkimuksiin verrattuna. Mallin ongelmakohtat ovat puolestaan tarjonneet mielenkiintoisia mahdollisuuksia alan myöhemmille tutkimuksille, joista osaan päästään tutustumaan seuraavissa alaluvuissa.

3.3 Order flow composition and trading costs in a dynamic limit order market – Foucault 1999

Tässä alaluvussa tutustutaan Foucaultin artikkelissa *Order flow composition and trading costs in a dynamic limit order market* (1999) julkaistuun matemaattiseen malliin. Foucaultin mallin keskeisin ero alan aiempaan tutkimukseen verrattuna on se, että Foucaultin mallissa kaupankävijöiden vuorovaikutus perustuu pohjimmiltaan eri tarjoustyyppeihin liittyviin riskeihin. Esimerkiksi edellä esitellyssä Parlourin mallissa riskiä ei mallinneta. Foucaultin mallissa keskeiset riskitekijät ovat jo aiemminkin huomioitua voittajan kirousongelma ja se, että rajahintatarjoukset saattavat jäädä toteutumatta. Voittajan kirouksella viitataan siihen, että rajahintatarjoukset saattavat muuttua väärinhinnoitelluiksi ja toteutua epäedullisilla hinnoilla tarjouksen asettajan näkökulmasta. (Foucault 1999)

Mallissa optimaaliset rajahintatarjouksien hinnat ja optimaalinen valinta rajahintatarjouksen ja markkinatarjouksen välillä riippuu siitä, millaisia tarjousvaihtoehtoja tulevilla kaupankävijöillä on. Malli on Foucaultin mukaan ensimmäinen, joka tarjoaa suljetun ratkaisun sekä tarjouksille että kaupankävijöiden päätöksille dynaamisilla tarjouskirjamarkkinoilla. (Foucault 1999) Huomattakoon, että myös aiemmassa luvussa esitelty Parlourin (1998) malli tarjoaa suljetun ratkaisun. Joka tapauksessa Foucaultin malli on yksi ensimmäisistä malleista, joilla on tämä ominaisuus.

Myös Foucaultin mallissa kaupankäyntipäivä jaetaan diskreetisti aikaperiodeihin. Uusi kaupankävijä saapuu markkinoille jokaisella periodilla, kunnes kaupankäynti päättyy, ja

rahoitusinstrumentin arvo realisoituu. Kaupankäynti voi päättyä tietyllä todennäköisyydellä millä tahansa periodilla. Kaupankävijä voi jättää joko osto- tai myyntimarkkinatarjouksen tai rajahintatarjouksen tarjouskirjan kummallekin puolelle. Kaikki tarjoukset ovat yhden yksikön kokoisia. Oletuksena on, että rajahintatarjoukset ovat voimassa ainoastaan yhden aikaperiodin, eikä tarjouksia voi muokata tai perua jälkikäteen. (Foucault 1999)

Kaikki kaupankävijät pyrkivät maksimoimaan odotetun hyödyn ja ovat riskineutraaleja. Kaupankävijän kokema hyöty on $U(y) = (V_T + y - P)q$, jossa V_T on rahoitusinstrumentin lopullinen arvo, y kaupankävijän tyyppi, P kaupan alkuperäinen hinta ja q saa arvon $+1$ tai -1 riippuen siitä, onko kyseessä osto- vai myyntitarjous. Kaupankävijän tyyppi voi saada kaksi eri arvoa tietyillä todennäköisyyksillä. (Foucault 1999) Toisin kuin edellä esitellyssä Parlourin mallissa, Foucaultin mallissa rahoitusinstrumentin lopulliseen arvoon liittyy satunnaishajontaa. Nimenomaan mahdollisuus arvon muutoksille johtaa voittajan kirous -riskiin. Jos esimerkiksi todellinen arvo laskee, voi aiemmin asetetun ostorajahintatarjouksen hinta olla rahoitusinstrumentin arvoa suurempi.

Kaupankävijän keskeiset strategiset päätökset liittyvät tarjouksen tyyppiin ja rajahintatarjouksen hintaan. Foucault määrittelee kaupankäyntistrategian, joka ratkaisee optimaalisen tarjouksen kaikille mahdollisille markkinoiden tiloille. Markkinoiden tilaa ajankohdalla t merkitään $S_t = (v_t, y_t, s_t)$, jossa $s_t = (A_t^m, B_t^m)$. A_t^m ja B_t^m ovat parhaat avoinna olevat myynti- ja ostorajahintatarjoukset. Mikäli kaikki kaupankävijät noudattavat määritettyä strategiaa, ja strategia maksimoi odotetun hyödyn, tarjouskirjamarkkinat ovat tasapainossa. (Foucault 1999)

Foucaultin mallin piirteistä voi havaita, ettei malli vastaa täysin todellisia tarjouskirjamarkkinoita. Gouldin et al. (2009) mukaan esimerkiksi rajahintatarjousten yhden periodin voimassaoloaika ja satunnainen kaupankäynnin päättymishetki rajoittavat Foucaultin mallin kykyä ennustaa tarjouskirjamarkkinoita realistisesti. Foucault (1999) perustelee oletuksia sillä, että yhden periodin voimassaoloaika helpottaa mallin käsiteltävyyttä ja satunnainen kaupankäynnin päättymishetki mahdollistaa staattisen tasapainon määrittämisen ja yksinkertaistaa tulosten esittelyä. Pyrkimys yksinkertaisuuteen on ymmärrettävää. Yhden periodin voimassaoloaika johtaa kuitenkin siihen, että asetettu rajahintatarjous voi toteutua ainoastaan silloin, kun seuraava tarjous on sopiva kaupan syntymiseksi. Aiemmin esitellyssä Parlourin mallissa ei ole tällaista oletusta, mutta toisaalta Parlourin mallissa tarjousten hinnat ja rahoitusinstrumentin todellinen arvo on määritetty ennalta. Foucaultin mallissa hinnat ja arvo vaihtelevat, joten niiden puolesta malli vastaa todellisia tarjouskirjamarkkinoita Parlourin mallia paremmin.

Foucault tekee mallin avulla viisi johtopäätöstä. Ensimmäinen rajahintatarjouksien osuus kaikista tarjouksista korreloi positiivisesti volatilitietin kanssa. Toiseksi toteutuneiden rajahintatarjouksien osuus kaikista rajahintatarjouksista korreloi volatilitietin kanssa negatiivisesti. Kolmanneksi rajahintatarjouksien osuus korreloi positiivisesti spreadin kanssa. Neljänneksi kaupankäyntikustannusten kasvu kaupankäyntipäivän lopulla korreloi negatiivisesti kilpailun tasoon rajahintatarjouksia jättävien kaupankävijöiden välillä. Viidenneksi osto- ja myyntitarjousten yhteenlasketut kaupankäyntikustannukset ovat suurimmillaan, kun osto- ja myyntitarjouksien välinen suhde on yksi. Mallissa kustannuksilla viitataan poikkeuksellisesti spreadin sijasta rahoitusinstrumentin arvon ja markkinatarjouksen toteutumishinnan väliseen eroon. (Foucault et al. 1999)

Bae et al. (2003) tarkastelevat empiirisessä tutkimuksessaan volatilitietin, spreadin ja tarjoustyyppien suhdetta. He ovat löytäneet viitteitä siitä, että rajahintatarjouksien osuus korreloi positiivisesti epärationaalisten sijoittajien aiheuttaman volatilitietin kanssa. He tarkastelevat erikseen informaatiopohjaista volatilitietia, eivätkä havaitse korrelaatiota sen yhteydessä. Foucault mallintaa ainoastaan rationaalisia sijoittajia, joten empiirinen tutkimus on ristiriidassa Foucaultin ensimmäisen johtopäätöksen kanssa. On kuitenkin syytä huomata, että Bae et al. myöntävät informaatiopohjaisen volatilitietin mittarit epä-tarkoiksi. Heidän mukaansa tarkemmat mittarit olisivat saattaneet johtaa toisenlaisiin tuloksiin.

Toisaalta Bae et al. ovat havainneet, että rajahintatarjouksien osuus korreloi positiivisesti spreadin kanssa, mikä tukee Foucaultin kolmatta johtopäätöstä. Randalon (2004) empiirisen tutkimuksen mukaan volatilitietin kasvu laajentaa spreadia. Tämä yhdistää ensimmäisen ja kolmannen yllä esitetyn johtopäätöksen ja on siten linjassa Foucaultin tulosten kanssa. Näin ollen ainakin osa Foucaultin johtopäätöksistä saa tukea alan empiirisestä tutkimuksesta. Kaupankäyntikustannusten suhdetta tarjouskilpailuun ja tarjousten osuuksiin on tutkittu empiirisesti melko vähän, minkä vuoksi neljännelle ja viidennelle johtopäätökselle on hankala löytää relevanttia vertailuaineistoa.

Foucaultin malli on ensimmäisiä dynaamisia rationaalisten sijoittajien malleja, ja puutteista huolimatta mallia voidaan pitää merkittävänä. Kaupankävijät voivat valita rajahintatarjouksen hinnan suuruuden, mikä on valtava edistysaskel Parlourin malliin verrattuna. Lisäksi riskeihin keskittyminen tuo uusia näkemyksiä siitä, miksi kaupankävijät asettavat tietyn tyyppisiä tarjouksia. Mallin epärealistiset oletukset antavat kuitenkin syyn epäillä, ovatko tulokset linjassa empiirisen tutkimuksen kanssa vain sattumalta, vai ovatko ne todella seurausta Foucaultin määrittelemistä strategioista. Mikäli empiiristä

tutkimusta olisi tarjolla enemmän, voisi johtopäätösten realistisuutta arvioida varmemmin. Joka tapauksessa epärealistiset oletukset kannustavat jatkotutkimuksille ja uusien mallien kehittämiseksi.

3.4 Limit Order Book as a Market for Liquidity – Foucault et al. 2005

Foucaultin, Kadanin ja Kandelin (2005) artikkelissa *Limit Order Book as a Market for Liquidity* esiteltävässä mallissa sijoittajat jaetaan kärsivällisiin ja kärsimättömiin yksilöihin. Keskeisimmät tekijät, joiden avulla tarjouskirjan toimintaa määritellään, ovat kärsivällisten sijoittajien osuus kaikista sijoittajista sekä intensiteetti, jolla sijoittajat tekevät tarjouksia. Kärsivällisyydellä viitataan siihen, että kaupankävijöille kertyy kustannuksia odottamisesta. Tämä on keskeisimpiä eroja aiemmin kehitettyihin dynaamisiin rationaalisten sijoittajien malleihin verrattuna. Foucault et al. huomauttavat, että vaikka Parlourin (1998) mallissa käsitellään aikapreferenssiä kuluvan ja seuraavan päivän välillä, sijoittajan hyöty ei ole riippuvainen kaupan toteutumisen ajankohdasta saman päivän sisällä. (Foucault et al. 2005)

Mallissa rahoitusinstrumentin hinta on välillä $[B, A]$, jossa B on tarjouskirjan pienin mahdollinen ostotarjous ja A suurin mahdollinen myyntitarjous. Rajahintatarjouksia on avoinna ääretön määrä näillä hinnoilla. Parhaita voimassaolevia rajahintatarjouksia merkitään a ja b , ja luonnollisesti $a \leq A$ ja $b \geq B$. Spreadia merkitään $s \equiv a - b$. Kaikki hinnat jakautuvat diskreetisti, ja pienintä mahdollista hintojen välimatkaa merkitään Δ . Mallin aikaikkuna on ääretön ja aika on jatkuvasti jakautunut. Kaupankävijät saapuvat markkinoille noudattaen Poissonin jakaumaa parametrilla λ , jolloin markkinoille saapuvien kaupankävijöiden määrä ajassa τ on $\lambda\tau$. Näin ollen saapumisajat jakautuvat eksponentiaalisesti ja odotettu saapumisten välinen aika on $\frac{1}{\lambda}$. (Foucault et al. 2005)

Mallissa kaupankävijät ovat riskineutraaleja, ja ovat joko ostajia tai myyjiä. Kaupankävijän on pakko asettaa yhden kaupattavan yksikön suuruinen tarjous, joka on joko välittömästi toteutuva markkinatarjous tai rajahintatarjous. Kaupankävijä saapuu markkinoille vain kerran, eikä tarjousta voi jälkikäteen muokata tai perua. Rajahintatarjouksen on oltava edeltäviä rajahintatarjouksia parempi. Ostajat ja myyjät vuorottelevat, eli ostajan jälkeinen kaupankävijä on aina myyjä ja päinvastoin. (Foucault et al. 2005)

Kaupankävijän valinta tarjousten välillä perustuu siihen, millaisia kustannuksia odottamisesta syntyy. Tyypin P kaupankävijät ovat kärsivällisiä, ja heidän odotuskustannuksensa ovat suuruudeltaan δ_p aikayksikössä. Tyypin I kaupankävijät ovat kärsimättömiä, ja heidän odotuskustannuksensa ovat suuruudeltaan δ_I aikayksikössä. On selvää, että $\delta_I \geq$

$\delta_P (\geq 0)$. Kärsivällisten sijoittajien osuus populaatiosta on θ_P ja kärsimättömien $\theta_I = 1 - \theta_P$. Nämä säilyvät muuttumattomina koko mallinnuksen ajan. (Foucault et al. 2005)

Kaupankävijä valitsee optimaalisesti sen tarjouksen, joka toteuttaa yhtälön

$$\max \pi_i(j) \equiv j\Delta - \delta_i T(j),$$

jossa j määrittellään siten, kuinka paljon tarjous parantaa spreadia. Siis $j = 0$ markkinatarjoukselle ja $j \in \{1, \dots, s - 1\}$ rajahintatarjoukselle, $i \in \{P, I\}$ ja $T(j)$ on odotusarvoinen aika tarjouksen toteutumiseksi. Markkinatarjoukselle $T(j) = 0$, ja rajahintatarjoukselle

- $T(j) = \frac{1}{\lambda}$, jos $j = 1$,
- $T(j) = +\infty$, jos $\alpha_0(j) = 0$ ja $j \in \{2, \dots, A - B - 1\}$,
- $T(j) = \frac{1}{\alpha_0(j)} \left[\frac{1}{\lambda} + \sum_{k=1}^{j-1} \alpha_k(j) T(k) \right]$, jos $\alpha_0(j) > 0$ ja $j \in \{2, \dots, A - B - 1\}$,

jossa $\alpha_k(j)$ on todennäköisyys, jolla seuraava kaupankävijä vastaa rajahintatarjouksella $k \in \{0, 1, \dots, j - 1\}$ (markkinatarjoukselle $k = 0$).

Tässäkin mallissa on useita piirteitä, jotka eivät vastaa täysin todellisia tarjouskirjamarkkinoita. Parlour ja Seppi (2007) kritisoivat sitä, että kaikki tarjoukset ovat yhden yksikön suuruisia ja että rajahintatarjouksen on aina oltava edeltäviä tarjouksia parempi. Lisäksi he nostavat esille sen, että ostajat ja myyjät vuorottelevat markkinoilla. Foucault et al. (2005) perustelevat näitä oletuksia sillä, että niiden ansiosta $T(j)$ on rekursiivinen, kun $\alpha_0(j) > 0$, mikä mahdollistaa tasapainotilan ratkaisemisen induktiolla. Oletukset johtavat myös siihen, etteivät kaupankävijöiden strategiat ole riippuvaisia kaikista tarjouskirjan tarjouksista, vaan ainoastaan spreadista. (Foucault et al. 2005) On selvää, etteivät nämä oletukset päde todellisilla markkinoilla. Mallissa on kuitenkin onnistuttu luopumaan muutamista edellä esiteltyjen mallien rajoituksista. Tässä mallissa tarjouskirjassa voi olla useita rajahintatarjouksia samaan aikaan useilla eri hinnoilla. Parlourin (1998) mallissa saman puolen rajahintatarjoukset ovat hinnaltaan aina yhtä suuria, ja Foucaultin (1999) mallissa tarjouskirjan kummallakin puolella on kerrallaan enintään yhden tarjoukset, jotka ovat voimassa ainoastaan yhden periodin ajan.

Foucaultin et al. (2005) mukaan mallin merkittävä löydös on se, että kärsivällisten sijoittajien osuus ja tarjouksien saapumisintensiteetti ovat keskeisimpiä tarjouskirjan toimintaa määrittäviä tekijöitä. Heidän analyysinsä johtaa neljään johtopäätökseen. Mallin perusteella peräkkäisten kauppajen aikaväli korreloi positiivisesti markkinoiden palautuvuuteen. Tarjouksien saapumisintensiteetti puolestaan korreloi negatiivisesti markkinoiden palautuvuuteen. Sekä palautuvuus että rajahintatarjouksien aggressiivisuus vähenevät kaupankäyntipäivän lopussa. Lisäksi kaupankävijät asettavat enemmän aggressiivisia

rajahintatarjouksia, kun spread on suuri, mikäli suurin osa populaatiosta on kärsivällisiä sijoittajia. Aggressiivisuudella viitataan siihen, kuinka paljon rajahintatarjoukset pienentävät spreadia. (Foucault et al. 2005)

Vaikuttaisi siltä, että Foucaultin et al. mallin johtopäätöksiä on arvioitu toistaiseksi vähän. Todellisilla markkinoilla on hankala luokitella sijoittajia tarkasti kärsivällisiin ja kärsimättömiin yksilöihin, mikä todennäköisesti rajoittaa mallin testaamista. Ainsworth ja Lee (2014) ovat kuitenkin onnistuneet arvioimaan empiirisessä tutkimuksessaan joitain Foucaultin et al. mallin piirteitä ja tuloksia. Ainsworthin ja Leen tutkimus tarkastelee tarjouskirjamarkkinoiden toimintaa osingon irtoamispäivän ympärillä. Heidän mukaansa osingon irtoamispäivä vaikuttaa kärsivällisten ja kärsimättömien sijoittajien osuuksiin ennustettavasti, mikä mahdollistaa Foucaultin et al. tulosten arvioimisen. Ainsworthin ja Leen tulokset ovat linjassa Foucaultin et al. mallin kanssa.

Ainsworthin ja Leen (2014) mukaan spread on pienempi, mikäli odottamisen kustannukset ovat suuret, sillä tällöin markkinat ovat palautuvammat. Tämä löydös ei ole suoraan yhteydessä pääjohtopäätöksiin, mutta Foucault et al. (2005) laajentavat toista johtopäätöstään, siten, että rajahintatarjouksien aggressiivisuutta lisäävät tekijät vaikuttavat palautuvuuteen positiivisesti. Siten heidän mukaansa odottamisen kustannusten noustessa rajahintatarjoukset ovat aggressiivisempia ja markkinat ovat palautuvampia. Lisäksi he toteavat pääjohtopäätösten ohella, että palautuvat markkinat johtavat pienempiin spreadeihin.

Ainsworth ja Lee ovat myös löytäneet viitteitä siitä, että kärsimättömien sijoittajien osuuden kasvaessa rajahintatarjoukset toteutuvat nopeammin. Tämä tukee Foucaultin et al. mallissa esiteltävää funktiota, jolla määritetään rajahintatarjouksen odotusarvoinen toteutumisaika. Lisäksi Ainsworth ja Lee ovat havainneet, että kärsimättömien kaupankävijöiden osuuden kasvaessa markkinatarjouksien todennäköisyys kasvaa, mikä lyhentää syntyvien kauppojen aikaväliä. Tämä on yhtäläinen Foucaultin et al. mallin kanssa: myös siinä toteutuvien kauppojen aikaväli lyhenee, mikäli kärsimättömien sijoittajien osuus kasvaa.

Empiiristä tutkimusta on tarjolla vähän. Siksi mallin pätevyyttä on vaikea arvioida kattavasti, mutta ainakin Ainsworthin ja Leen tutkimuksen perusteella malli vaikuttaa uskottavalta. Foucaultin et al. mallissa tehdään edelleen joukko epärealistisia oletuksia, mutta toisaalta se tuo myös mielenkiintoisia näkemyksiä tarjouskirjamarkkinoiden toiminnasta, joita aiempina esitellyt mallit eivät pysty selittämään. Esimerkiksi markkinoiden palautuvuuden tarkastelu ei ole mahdollista Parlourin (1998) mallissa, sillä siinä spread on aina yhtä suuri, eikä myöskään Foucaultin (1999) mallissa, sillä siinä tarjouskirjan samalla

puolella voi olla ainoastaan yksi rajahintatarjous. Lisäksi odottamisesta syntyvien kustannusten mallintaminen on mielenkiintoinen näkökulma, vaikka kärsivällisten ja kärsimättömien sijoittajien luokittelu saattaakin olla hankalaa. Tkatch ja Kandel (2008) ovat osoittaneet, että tarjouksen toteutumisen ajankohta on informatiivisempi mittari kuin yleisemmin kirjallisuudessa tarkasteltu toimeenpanon todennäköisyys, kun arvioidaan sijoittajan päätöksentekoa.

3.5 A Dynamic Model of the Limit Order Book – Ioanid Rosu 2009

Tässä alaluvussa tutustutaan uusimpaan tässä työssä esiteltävään malliin, Rosun (2009) artikkelissa *A Dynamic Model of the Limit Order Book* julkaistuun dynaamiseen rationaalisten sijoittajien malliin. Myös Rosun malli perustuu kärsivällisiin ja kärsimättömiin sijoittajiin, joiden kokema hyöty riippuu odottamisesta aiheutuvista kustannuksista. Tasapainotilassa osto- ja myyntihinnat riippuvat ainoastaan tarjouskirjassa olevien tarjousten määrästä. Edeltäviin malleihin verrattuna Rosun malli tarjoaa kaupankävijöille mahdollisuuden muokata ja perua rajahintatarjouksiaan vapaasti. Rosun mukaan malli on ensimmäinen dynaaminen malli, joka käsittelee myös näitä ominaisuuksia. (Rosu 2009) Tätä voidaan pitää merkittävänä edistysaskeleena, sillä todellisilla tarjouskirjamarkkinoilla kaupankävijä voi perua tai muokata rajahintatarjouksiaan. Parlourin ja Sepin (2007) mukaan askel on merkittävä myös siksi, että sen ansiosta markkinoilla olevien sijoittajien määrä vaihtelee satunnaisesti, ja markkinoilla voi ylipäänsä olla useampi sijoittaja samanaikaisesti. Gouldin et al. (2009) mukaan Rosun malli onkin ensimmäinen dynaaminen rationaalisten sijoittajien tarjouskirjamalli, joka sallii kaikki samat toimintavaihtoehdot kuin todelliset tarjouskirjamarkkinat.

Rosun mallissa tarjouskirjan tarjousten hinnat sijoittuvat aina välille $A > B$, jossa A on suurin mahdollinen myyntihinta ja B pienin mahdollinen ostohinta. Oletuksena on, että mallinnuksen ulkopuoliset agentit ovat asettaneet rajattoman määrän myyntirajahintatarjouksia hintaan A ja ostorajahintatarjouksia hintaan B . Kaupankävijöiden asettamien tarjousten hinnat voivat saada mitä tahansa arvoja tällä välillä. Mallin aikahorisontti on ääretön ja kaupankäynti on jatkuvaa. Markkinat sallivat ainoastaan markkinatarjoukset ja rajahintatarjoukset, joista rajahintatarjoukset noudattavat ensisijaisesti hintaprioriteettisääntöä ja toissijaisesti aikaprioriteettisääntöä. Jos markkinatarjouksia asetetaan useita samalla ajanhetkellä, vain yksi tarjouksista toteutuu ja loput perutaan. Kuten jo aiemmin todettiin, rajahintatarjoukset voidaan perua millä ajanhetkellä hyvänsä, eikä tästä aiheudu lisäkustannuksia. (Rosu 2009)

Kaupankävijä on tyypiltään joko kärsivällinen ostaja PB , kärsivällinen myyjä PS , kärsimätön ostaja IB tai kärsimätön myyjä IS , eikä tyyppiä voi vaihtaa jälkikäteen. Jokaista tyyppiä mallinnetaan itsenäisellä Poissonin jakaumalla. Saapumisintensiteetit ovat $\lambda_{PB}, \lambda_{PS}, \lambda_{IB}$ ja λ_{IS} . Kaupankävijät valitsevat strategisesti tarjousten välillä. Kauppaa käydään enintään yhdellä yksiköllä kaupattavaa rahoitusinstrumenttia, ja kun kauppa on toteutunut, kaupankävijä poistuu mallista ikuisesti. Kaupankävijät ovat riskineutraaleja, ja he menettävät hyötyä kertyvien odotuskustannusten myötä. Mallissa kaikki markkinatieto, mukaan lukien kaupankävijöiden strategiat, on yleisesti tunnettua. (Rosu 2009)

Myyjän odotettua hyötyä kuvataan funktiolla $f_t = E_t\{P_\tau - r(\tau - t)\}$, jossa t on tarjouksen asettamisen ajankohta, τ on satunnainen tarjouksen toteutumisen ajankohta, P_τ asetettu hinta ja r kärsivällisyyskerroin. Kärsivällisyyskerroin voi saada kaksi eri arvoa, joista pienemmäksi määritelty kuvaa kärsivällistä sijoittajaa ja suurempi kärsimätöntä. Yksinkertaisuuden vuoksi oletetaan, että kärsimättömien sijoittajien kerroin on niin paljon suurempi kuin kärsivällisten, että kärsimättömät sijoittajat asettavat aina markkinatarjouksia. Vastaavasti ostajan hyötyä mallinnetaan funktiolla $g_t = E_t\{P_\tau + r(\tau - t)\}$. Rosun mallissa tasapainotila perustuu siihen, että kaikilla kaupankävijöillä on oltava sama odotettu hyöty, ja tila määritellään osapelin täydellisen tasapainon (*engl. subgame perfect equilibrium*) ja Markovin täydellisen tasapainon menetelmillä. Tasapainotilassa parhaat ostaja- ja myyntihinnat riippuvat ainoastaan tarjouskirjan osto- ja myyntitarjousten lukumäärästä. (Rosu 2009)

Rosun mallissa on onnistuttu luopumaan joistain oletuksista, jotka rajoittavat esimerkiksi Foucault et al. (2005) mallia. Rosun mallissa ostajat ja myyjät noudattavat itsenäisiä Poissonin jakaumia, ja näin ollen kaupankävijän tyyppi vaihtelee satunnaisesti. Merkittävään edistysaskel lienee se, että tarjouksia voi perua ja muokata reaaliajassa: Parlourin ja Sepin (2007) mukaan tämä johtaa siihen, että markkinoilla voi olla useampia aktiivisia sijoittajia samanaikaisesti. Lisäksi Rosun (2009) mukaan tarjouksien perumisen ja muokkaamisen mahdollistaminen tekee yllättäen mallintamisesta yksinkertaisempaa. Jos markkinoille saapuvan sijoittaja asettaa tarjouksen, jonka odotettu hyöty on edeltäviä tarjouksia parempi, muut kaupankävijät muokkaavat tarjouksiaan, kunnes hyödyt ovat yhtä suuret. Malli ei tällaisenaan mahdollista usean yksikön suuruisia kauppia, ja myös Rosu myöntää tämän olevan vahva oletus. Malli on kuitenkin laajennettavissa useampankin yksikköön. Kuten muissakin tässä työssä esitellyissä malleissa, Rosun malli rajoittuu tilanteeseen, jossa markkinoilla ei ole epäsymmetristä informaatiota.

Rosu tekee viisi pääjohtopäätöstä tarjouskirjamarkkinoiden toiminnasta. Ensinnäkin tiheämpi kaupankäynti ja suurempi kilpailu johtavat pienempiin spreadeihin ja pienempiin

hinnanmuutoksiin. Toiseksi hintavaihtelu perustuu erityisesti erikokoisten markkinatarjousten saapumisintensiteetteihin, ja väliaikaiset hintamuutokset ovat suurempia kuin pitkäaikaiset. Kolmanneksi osto- ja myyntitarjoukset voivat kasaantua etäälle parhaista tarjouksista. Neljänneksi rajahintatarjousten hinnat riippuvat toisistaan siten, että mikäli esimerkiksi myyntimarkkinatarjous laskee ostopuolen hintoja, myös myyntipuolen hinnat laskevat, mutta aavistuksen vähemmän, joten spread kasvaa. Viimeinen pääjohtopäätös on se, että kaupankävijät asettavat lyhytaikaisia rajahintatarjouksia, kun tarjouskirja on täysi. (Rosu 2009)

George ja Longstaff (1993) ovat tutkineet empiirisesti spreadia ja kaupankäynnin aktiivisuutta S&P 500 -listalla. He ovat havainneet spreadin ja aktiivisuuden välillä negatiivisen korrelaation, mikä tukee Rosun ensimmäistä johtopäätöstä. Linnainmaa ja Rosu (2009) ovat jopa havainneet kausaliteetin: heidän mukaansa tiheämpi kaupankäynti aiheuttaa pienempiä spreadeja. Toinen johtopäätös on linjassa Pottersin ja Bouchaudin (2003) tutkimustulosten kanssa, sillä niiden perusteella toteutuvat kaupat vaikuttavat keskeisesti hintamuutoksiin. Lisäksi Rosun havainto siitä, että tarjoukset voivat kasaantua etäälle parhaista tarjouksista, saa empiiristä tukea. Bouchaud et al. (2002) mukaan tarjoukset kasaantuvat symmetrisesti tarjouskirjan kummallekin puolelle, ja suurimmat volyymit todellakin ovat etäällä parhaista tarjouksista.

Joitakin pääjohtopäätöksiä on hankala arvioida, sillä kaikista yksityiskohdista ei löydy empiiristä tutkimusta. Myös Rosu (2009) toteaa, että toiset johtopäätöksistä liittyvät empiirisessä tutkimuksessa jo aiemmin havaittuihin ilmiöihin ja toiset taas ovat uusia. Uusien johtopäätösten luotettavuuteen vaikuttaa luonnollisesti se, kuinka uskottavasti Rosun mallin peruseriaatteet vastaavat todellisia tarjouskirjamarkkinoita. Kuten edellä todettiin, oletukset ovat realistisempia kuin aiemmissä esitellyissä malleissa. Lisäksi empiiriset tutkimukset eivät antaneet viitteitä siitä, että johtopäätökset olisivat ristiriidassa todellisten markkinoiden kanssa. Nämä eivät ole riittäviä perusteita todistamaan Rosun johtopäätöksiä oikeiksi, mutta ne lisäävät mallin uskottavuutta. Mallissa on kuitenkin edelleen piirteitä, jotka poikkeavat todellisista markkinoista.

3.6 Mallien yhteenveto

Edellisissä alaluvuissa esiteltiin neljä dynaamista rationaalisten sijoittajien mallia kronologisessa järjestyksessä julkaisuajan perusteella. Tässä alaluvussa kootaan yhteen mallien keskeisimpiä piirteitä ja arvioidaan tarkemmin mallien välisiä yhtäläisyyksiä ja eroavaisuuksia sekä vertautuvuutta todellisiin tarjouskirjamarkkinoihin. Kronologinen järjestys mahdollistaa myös mallien kehittymisen tarkastelun. Lisäksi arvioidaan, voiko näiden mallien perusteella tehdä päätelmiä alan tutkimuksen kehittymisestä.

Kaikki esiteltyt mallit voi luokitella dynaamisiin rationaalisten sijoittajien malleihin, joten on ymmärrettävää, että mallit noudattavat pitkälti samaa rakennetta. Jokainen edellä esitelty malli perustuu pohjimmiltaan rationaalisiiin riskineutraaleihin sijoittajiin, jotka pyrkivät maksimoimaan odotetun hyödyn. Voidaan havaita, että kaikkien esiteltyjen mallien hyötyfunktioissa on mukana sijoittajan tyyppiin viittaava kerroin. Malleissa tehdään joukko oletuksia, jotka yhdessä hyötyfunktion kanssa johtavat tiettyihin, tasapainotilassa tunnetuihin kaupankäyntistrategioihin. Tasapainotilojen avulla tehdään erilaisia johtopäätöksiä tarjouskirjamarkkinoiden toiminnasta.

Alla olevaan taulukkoon 2 on koottu Parlourin (1998), Foucaultin (1999), Foucaultin et al. (2005) ja Rosun (2009) mallien keskeisiä oletuksia. Taulukko osoittaa, että mallien välillä on useita eroavaisuuksia. Mallien piirteistä voi havaita, että rajoittavat oletukset ovat kehittyneet ainakin osittain realistisempaan suuntaan. Hyötyfunktion kerroin viittaa Foucaultin (1999) mallia lukuun ottamatta sijoittajan aikapreferenssiin. Kertoimen määritelmä on kehittynyt, sillä Parlourin (1998) mallissa kaupan ajankohdalla tietyn päivän sisällä ei ole merkitystä, kun taas Foucaultin et al. (2005) ja Rosun (2009) malleissa odottamisesta syntyy kustannuksia jatkuvasti. Kuten jo mainittiin, Tkatch ja Kandel (2008) puoltavat sitä, että kaupan toteutumisen aika on merkittävä mittari, kun arvioidaan sijoittajien päätöksentekoa.

Ajan ja rahoitusinstrumentin piilevän arvon suhteen on myös havaittavissa edistystä. Parlourin (1998) ja Foucaultin (1999) mallien diskreetisti jakautuneet rajalliset aikaikkunat ja piilevät arvot ovat kyseenalaisia. Parlourin mallissa piilevä arvo on vakio. Foucaultin mallissa arvoon liittyy satunnaisuutta, mutta arvo ei määräydy uskottavasti: piilevä arvo realisoituu tietyllä satunnaisella ajanhetkellä, jolla kaupankäynti päättyy. Foucaultin et al. (2005) ja Rosun (2009) malleissa piilevää arvoa ei mallinneta. Heidän malliensa hyötyfunktiot riippuvat ainoastaan tarjouksen hinnasta ja odotuksesta syntyvistä kustannuksista. Parlourin (1998) mallissa tämä ei ole mahdollista, sillä rajahintatarjouksen hinta on aina sama. Tämä ei onnistu myöskään Foucaultin (1999) mallissa, sillä rajahintatarjoukset ovat voimassa vain yhden periodin.

Kaupankävijän tyyppi on jokaisessa mallissa määritetty, kun kaupankävijä saapuu markkinoille, eikä sitä voi jälkikäteen muuttaa. Foucaultin (1999) mallissa oletetaan, että rajahintatarjouksen yhteydessä kaupankävijä on sekä ostaja että myyjä. Foucault huomauttaa, ettei tämä vaikuta mallin tarkkuuteen, sillä kaupankävijä voi aina asettaa toisen tarjouksen siten, että sen toteutumistodennäköisyys on nolla. Varsinkin Foucaultin et al. (2005) mallin oletus vuorottelevista ostajista ja myyjistä on epärealistinen, ja tästä rajoitteesta onkin päästy eroon Rosun (2009) mallissa. Myös kaupankävijöiden saapumisen mallintaminen on kehittynyt diskreetistä jakaumasta Poissonin jakaumaan. Foucaultin et

al. (2005) mallissa saapumista mallinnetaan yhdellä Poissonin jakaumalla, kun taas Rosun (2009) mallissa eri kaupankävijätyypit noudattavat itsenäisiä Poissonin jakaumia. Tämä lienee syynä sille, miksi myös edellä käsitelty kaupankävijöiden tyyppin määräytyminen on realistisempaa Rosun mallissa.

Tarjouksen koko rajoittuu kaikissa malleissa yhteen yksikköön, joskin Parlourin (1998) ja Rosun (2009) mallit voi laajentaa useampaan yksikköön. Tämä kuitenkin tekee mallinuksesta monimutkaisempaa. Rajahintatarjouksien hinnoittelussa on sen sijaan havaittavissa useita ratkaisuja. Parlourin (1998) mallin oletus vakiohinnoista lienee yksinkertaistetuin versio. Foucaultin (1999) mallissa hinta määräytyy vapaasti tasapainotilan mukaan, mutta tässä on hyvä muistaa, että hänen mallissaan tarjouskirjassa voi olla kerrallaan vain yhdet tarjoukset kummallakin puolella. Foucaultin et al. (2005) mallissa rajahintatarjoukset ovat aina edeltävää tarjousta parempia, ja Rosun (2009) mallissa päästään vihdoin tästäkin rajoituksesta eroon. Tarjousvaihtoehdoissa ei ole havaittavissa suurta muutosta ennen Rosun (2009) mallia, joka mahdollistaa tarjousten asettamisen lisäksi myös tarjousten perumisen ja muokkaamisen. Tarjouksen perumisen ja muokkaamisen mahdollistaminen vaikuttaisikin olevan Rosun merkittävimpiä oivalluksia.

Taulukko 2. Matemaattisten mallien keskeisiä oletuksia.

	Parlour (1998)	Foucault (1999)	Foucault et al. (2005)	Rosu (2009)
hyötöfunktion kerroin	aikapreferenssi kahden päivän välillä, jatkuvasti jakautunut	kerroin voi saada negatiivisen tai positiivisen arvon, ja nämä ovat itseisarvoltaan yhtä suuret	odottamisesta syntyvät kustannukset aikayksikössä, kaksi mahdollista arvoa, joista toinen kuvaa kärsivällistä ja toinen kärsimätöntä sijoittajaa	odottamisesta syntyvät kustannukset aikayksikössä, kaksi mahdollista arvoa, joista toinen kuvaa kärsivällistä ja toinen kärsimätöntä sijoittajaa
aikaikkuna	yksi päivä, diskreetisti jakautunut	rajallinen, keskeytyy satunnaisesti määräytyväällä hetkellä, diskreetisti jakautunut	ääretön, jatkuvasti jakautunut	ääretön, jatkuvasti jakautunut
rahoitusinstrumentin piilevä arvo	vakio, määritellään alussa	seuraa satunnaiskulkua	ei mallinnetta	ei mallinnetta
kaupankävijän tyyppin määrittäminen	ostaja, myyjä tai ei kumpikaan, määritellään alussa	markkinatarjouksen yhteydessä ostaja tai myyjä, tahaintatarjouksen yhteydessä kumpikin	joka toinen ostaja ja joka toinen myyjä	markkinoille saavutaan ostajana tai myyjänä
saapuminen markkinoille	yksi kaupankävijä saapuu jokaisella aikaperiodilla	yksi kaupankävijä saapuu jokaisella aikaperiodilla	saapumista mallinnetaan yhdellä poissonin jakaumalla	saapumista mallinnetaan neljällä poissonin jakaumalla (kärsivälliset ja kärsimättömät ostajat sekä kärsivälliset ja kärsimättömät myyjät
mahdolliset tarjous- ja toimintavaihtoehdot	markkinatarjous tai rajahintatarjous, tyyppin mukaisesti osto tai myynti	osto- tai myyntimarkkinatarjous tai rajahintatarjoukset kummallekin puolelle	markkinatarjous tai rajahintatarjous, tyyppin mukaisesti osto tai myynti	markkinatarjous tai rajahintatarjous, tyyppin mukaisesti osto tai myynti, lisäksi mahdollisuus perua tarjous tai muokata sitä
tarjouksen koko	oletusarvoisesti yksi yksikkö, laajennettavissa useampaan yksikköön	yhden yksikön suurinen	yhden yksikön suurinen	oletusarvoisesti yksi yksikkö, laajennettavissa useampaan yksikköön
rajahintatarjouksen hinta	hinnat ennalta määritetty, myyntitarjous aina hintaan A ja ostotarjous hintaan B	määräytyy tasapainotilan mukaan	osuu ennalta määrätyle välille, seuraava tarjous on aina edeltävää tarjousta parempi	hinta osuu ennalta määrätyle välille, määräytyy tasapainotilan mukaan

Taulukon perusteella vaikuttaisi siltä, että uudemmat mallit ovat vanhoja malleja kehittyneempiä, mikä on täysin luonnollista. Rosun (2009) malli on analyysin perusteella realistisin, sillä siinä on luovuttu useista aiempien mallien rajoittavista oletuksista, ja se tarjoaa myös kattavammat toimintavaihtoehdot. Käsiteltyjen mallien perusteella dynaamisissa rationaalisten sijoittajien malleissa pyritään löytämään optimi rajoittavien oletusten

ja mallintamisen monimutkaisuuden välillä. Rosun mallia voidaankin pitää erityisen ansiokkaana, tarjouksien perumisen ja muokkaamisen mahdollistaminen tekee yllättäen mallintamisesta yksinkertaisempaa.

Kaikissa malleissa esitellään useampia johtopäätöksiä, jotka ottavat kantaa varsin erilaisiin markkinoiden piirteisiin. Keskeisimpiä johtopäätöksiä on koottu taulukkoon 3. Lisäksi taulukkoon on kerätty empiirisiä tutkimuksia, jotka ottavat kantaa johtopäätöksiin liittyviin ilmiöihin. Parlourin (1998) johtopäätökset liittyvät siihen, valitseeko kaupankävijä markkinatarjouksen vai rajahintatarjouksen. Foucaultin (1999) johtopäätökset liittyvät useampiin markkinoiden piirteisiin, mutta keskittyvät erityisesti rajahintatarjoukseen liittyviin riskeihin. Foucaultin et al. (2005) johtopäätökset ovat yhä monipuolisempia ja keskittyvät esimerkiksi markkinoiden palautuvuuteen sekä siihen, miten aika vaikuttaa tarjouskirjamarkkinoihin. Myös Rosun (2009) johtopäätökset liittyvät useisiin ilmiöihin, jotka liittyvät esimerkiksi tarjouskirjan muotoon.

Kuten taulukko osoittaa, ei empiirinen tutkimus anna erityisen vahvaa tukea mallien johtopäätöksille. Parlourin (1998) johtopäätökset ovat ristiriidassa useampien empiiristen tutkimusten kanssa. Hänen mukaansa toisia johtopäätöksiä on perusteetonta verrata suuriin tarjouskokoihin ja toisia taas hankala arvioida sen vuoksi, että todellisilla markkinoilla hinnat vaihtelevat. Toteamukset ovat järkeviä, mutta osoittavat, ettei tuloksia voi luotettavasti yhdistää todellisiin tarjouskirjamarkkinoihin. Mitä uudempaa mallia tarkastellaan, sitä vähemmän ristiriitaisuuksia esiintyy. Tämä ei kuitenkaan takaa uusimpien mallien luotettavuutta, sillä monet johtopäätökset jäävät kokonaan ilman empiirisen tutkimuksen kannanottoa. Toisaalta empiirisen aineiston puute voi olla tarkoituksellista: esimerkiksi Rosu (2009) toteaa, että osa hänen mallinsa johtopäätöksistä on täysin uusia. Se, että teoreettiset mallit pystyisivät tunnistamaan täysin uusia markkinoiden piirteitä, voisi edistää tarjouskirjamarkkinoiden ymmärtämistä valtavasti. Rosun mallissa on kuitenkin edelleen rajoitteita, joiden vuoksi ei voida varmuudella todeta, että kaikki johtopäätökset pätsivät myös todellisilla markkinoilla.

Taulukko 3. Mallien keskeisiä johtopäätöksiä.

Malli	Johtopäätös	Aiheen empiirinen tutkimus
Parlour (1998)	Todennäköisyys, jolla seuraava toteutuva kauppa tapahtuu tarjouskirjan myyntipuolella, on suurempi, mikäli myös edeltävä kauppa on tapahtunut myyntipuolella kuin jos se olisi tapahtunut ostopuolella (pätee symmetrisesti myös toisella puolella).	Rinaldo (2004) tukee Biais et al. (1994) tukevat
	Mikäli edeltävä tarjous on ollut ostarajahintatarjous, ostarajahintatarjouksen asettamisen todennäköisyys on pienempi kuin jos edeltävä tarjous tai tapahtuma olisi ollut jokin muu (pätee symmetrisesti myös toisella puolella).	Rinaldo (2004) ristiriidassa Biais et al. (1994) ristiriidassa Ellul et al. (2007) ristiriidassa
	Myyntirajahintatarjouksen asettamisen todennäköisyys on suurempi, jos edeltävä toteutunut kauppa on syntynyt tarjouskirjan myyntipuolella kuin jos edeltävä kauppa tai tarjous olisi ollut jonkin muunlainen (pätee symmetrisesti myös toisella puolella).	Rinaldo (2004) tukee osittain Biais et al. (1994) ristiriidassa
	Jos edeltävä tarjous on ollut myyntirajahintatarjous, myyntirajahintatarjouksen asettamisen todennäköisyys pienempi kuin myyntirajahintatarjouksen asettamisen todennäköisyys ostopuolella tapahtuneen kaupan jälkeen. Tämän todennäköisyys on puolestaan pienempi kuin myyntirajahintatarjouksen asettaminen ostarajahintatarjouksen jälkeen, minkä todennäköisyys on puolestaan pienempi kuin todennäköisyys, jolla myyntirajahintatarjous asetetaan myyntipuolen kaupan toteutumisen jälkeen (pätee symmetrisesti myös toisella puolella).	Rinaldo (2004) ristiriidassa Biais et al. (1994) ristiriidassa
Foucault (1999)	Rajahintatarjouksien osuus kaikista tarjouksista korreloi positiivisesti volatiliiteetin kanssa.	Bae et al. (2003) osittain ristiriidassa Rinaldo (2004) tukee osittain*
	Toteutuneiden rajahintatarjouksien osuus kaikista rajahintatarjouksista korreloi volatiliiteetin kanssa negatiivisesti.	-
	Rajahintatarjouksien osuus korreloi positiivisesti spreadin kanssa.	Bae et al. (2003) tukevat Rinaldo (2004) tukee osittain*
	Kaupankäyntikustannusten kasvu kaupankäyntipäivän lopulla korreloi negatiivisesti kilpailun tasoon rajahintatarjouksia jättävien kaupankävijöiden välillä.	-
Foucault et al. (2005)	Osto- ja myyntitarjousten yhteenlasketut kaupankäyntikustannukset ovat suurimmillaan, kun osto- ja myyntitarjouksien välinen suhde on yksi.	-
	peräkkäisten kauppajen aikaväli korreloi positiivisesti markkinoiden palautuvuuteen.	-
	Tarjouksien saapumisintensiteetti korreloi negatiivisesti markkinoiden palautuvuuteen.	Ainsworth ja Lee (2014) tukevat osittain
	Sekä palautuvuus että rajahintatarjouksien aggressiivisuus vähenevät kaupankäyntipäivän lopussa.	-
Rosu (2009)	Kaupankävijät asettavat enemmän aggressiivisia rajahintatarjouksia, kun spread on suuri, mikäli suurin osa populaatiosta on kärsivällisiä sijoittajia.	-
	Tiheimpi kaupankäynti ja suurempi kilpailu johtavat pienempiin spreadeihin ja pienempiin hinnannuutoksiin.	George ja Longstaff (1993) tukevat Linnainmaa ja Rosu (2009) tukevat
	hintavaihtelu perustuu erityisesti erikoisten markkinatarjousten saapumisintensiteetteihin, ja väliaikaiset hintamuutokset ovat suurempia kuin pitkäaikaiset.	Potters ja Bouchaud (2003) tukevat
	Osto- ja myyntitarjoukset voivat kasaantua etäälle parhaista tarjouksista.	Bouchaud et al. (2002) tukevat
Rajahintatarjousten hinnat riippuvat toisistaan siten, että mikäli esimerkiksi myyntimarkkinatarjous laskee ostopuolen hintoja, myös myyntipuolen hinnat laskevat, mutta aavistuksen vähemmän, joten spread kasvaa.	-	
Kaupankävijät asettavat lyhytaikaisia rajahintatarjouksia, kun tarjouskirja on täysi.	-	

*Rinaldon mukaan volatiliiteetin kasvu laajentaa spreadia.

Lopuksi on hyvä palauttaa mieleen, että kaikki neljä mallia ovat dynaamisia rationaalisten sijoittajien malleja. Pelkästään se, että sijoittajat nähdään täydellisen rationaalisina, erottaa mallit todellisista tarjouskirjamarkkinoista. Tämän työn laajuuden puitteissa ei voida sanoa, tekisikö kohinasijoittajien huomioiminen sijoittajien päätöksentekoon perustuvista malleista luotettavampia. Siitä huolimatta on hyvä tiedostaa, että mallit todellakin perustuvat ainoastaan rationaalisiiin sijoittajiin. Kuten työn alussa mainittiin, tarjouskirjoja mallinnetaan myös tilastollisesti, jolloin rationaalisuuteen liittyvä ongelma poistuu. Lisäksi yksikään neljästä mallista ei ottanut kantaa epäsymmetriseen informaatioon. Aiemmin todettiin, että ainakin osa uusimmista dynaamisista rationaalisten sijoittajien malleista huomioi epäsymmetrisen informaation. Tämä saattaakin olla keskeinen piirre lähitulevaisuudessa julkaistavissa malleissa.

4. PÄÄTELMÄT

Tämän työn tarkoituksena oli selvittää, millaisia dynaamiset rationaalisten sijoittajien mallit ovat, ja mallintavatko ne todellisia tarjouskirjamarkkinoita uskottavasti. Tutkimuskysymykseen pyrittiin löytämään vastaus analysoimalla neljää keskeistä dynaamista rationaalisten sijoittajien mallia. Tarkemman analyysin kohteeksi valittiin Parlourin (1998), Foucaultin (1999), Foucaultin, Kadanin ja Kandelin (2005) sekä Rosun (2009) mallit. Tämän luvun tarkoituksena on muodostaa tiivistetty vastaus tutkimuskysymykseen. Lisäksi käsitellään sitä, miten vastaus vertautuu aiempaan tutkimukseen, ja mitä se voisi kertoa alan tulevasta tutkimuksesta.

Esitelyjen neljän mallin perusteella vaikuttaa siltä, että dynaamiset rationaalisten sijoittajien mallit keskittyvät rationaalisten sijoittajien päätöksentekoon. Mallinnus toteutetaan usean tapahtuman pelinä, jossa riskineutraalit sijoittajat saapuvat markkinoille ja tekevät tarjouksen, joka maksimoi odotetun hyödyn. Peli on rakenteeltaan rekursiivinen, ja siten tarjouskirja päättyy tasapainotilaan. Malleissa määritellään kaupankäyntistrategiat, jotka maksimoivat odotetun hyödyn tasapainotilassa. Tasapainotilan perusteella tehdään erilaisia johtopäätöksiä tarjouskirjamarkkinoiden piirteistä. Tämän työn pääpaino oli mallien oletuksissa ja johtopäätöksissä. Jotta tarjouskirjamarkkinoita ylipäänsä pystytään mallintamaan päätöksenteon näkökulmasta, on tarjouskirjamarkkinoiden toiminnalle määriteltävä säännöt. Nämä säännöt ovat mallien oletuksia, jotka määrittelevät pelin etenemisen ja edelleen lopullisen tasapainotilan ja tasapainostrategioiden rakenteet.

Työn edetessä havaittiin, että mallien oletukset ovat osittain hyvinkin ristiriitaisia todellisiin tarjouskirjamarkkinoihin verrattuna. Näin ollen malleja on hankala soveltaa todellisilla markkinoilla luotettavasti. Oletukset kehittyivät realistisemmiksi, kun siirryttiin vanhimmasta, Parlourin (1998), mallista kohti uusinta, Rosun (2009) mallia. Oletuksia perustellaan malleissa sillä, että ne mahdollistavat pelin rekursiivisen luonteen ja yksinkertaistavat mallintamista. Mallien haasteena on tehdä niin paljon oletuksia, ettei mallintaminen ole liian monimutkaista, mutta kuitenkin niin vähän, että mallia voidaan soveltaa todellisiin tarjouskirjamarkkinoihin. Rosun (2009) mallissa on tehty tämän suhteen ansiokas innovaatio. Malli on ensimmäinen, joka mahdollistaa rajahintatarjouksien perumisen ja muokkaamisen. Perumisen ja muokkaamisen mahdollistaminen ei kuitenkaan tehnyt mallintamisesta monimutkaisempaa, vaan yksinkertaisempaa. Siitä huolimatta edes Rosun mallissa ei päästä eroon kaikista rajoittavista oletuksista. Jokainen käsitelty malli perustuu täydellisen rationaalisiin ja riskineutraaleihin sijoittajiin, vaikka todellisilla mark-

kinoilla sijoittajien suhtautuminen riskeihin on vaihtelevaa ja päätöksenteko voi olla hyvinkin epärationaalista. Lisäksi mallit eivät huomioi markkinoiden epäsymmetristä informaatiota, vaan malleissa oletetaan, että jokaisella sijoittajalla on sama tieto käytettävissä.

Malleissa tehdään useita johtopäätöksiä tarjouskirjamarkkinoista. Oletukset määrittävät pitkälti sen, millaisia johtopäätöksiä malleissa tehdään. Esimerkiksi Parlourin (1998) mallissa rajahintatarjousten hinnat säilyvät vakioina, joten johtopäätökset eivät ota kantaa hintaliikkeisiin. Oletukset poikkeavat mallien välillä, ja myös johtopäätökset keskittyvät eri asioihin. Näiden mallien perusteella dynaamiset rationaalisten sijoittajien mallit muodostavat näkemyksiä esimerkiksi tarjouskirjan muotoon, markkinoiden palautuvuuteen, eri tarjoustyyppien todennäköisyyksiin ja rajahintatarjouksien riskeihin. Johtopäätösten vertailu empiiriseen tutkimukseen ei antanut viitteitä siitä, että mallit olisivat luotettavia. Suurin osa Parlourin (1998) mallin johtopäätöksistä on ristiriidassa empiirisen tutkimuksen kanssa. Uudempien mallien kohdalla ristiriitaisuuksien määrä väheni. Uudemmissa malleissa on kuitenkin paljon sellaisia johtopäätöksiä, joille ei löydetty minkäänlaista empiiristä todistusaineistoa. Sen vuoksi niiden luotettavuutta on hankala todentaa.

Parlourin (1998) mukaan markkinadatan ymmärtäminen edellyttää tarjouskirjamarkkinoiden toiminnan mallintamista ja tavanomaisen toiminnan määrittämistä. Hän toteaa, että hänen mallinsa voi toimia vertailukohtana todelliselle markkinadatalle. Vaikuttaakin siltä, että dynaamisten rationaalisten mallien tavoite on muodostaa johtopäätöksiä, joiden avulla voidaan määrittellä todellisten tarjouskirjamarkkinoiden tavanomainen toiminta. Ideaalisessa tilanteessa teoreettiset mallit pystyisivät selittämään säännönmukaisuuksia, joita ei havaita suoraan markkinadatasta. Esimerkiksi Rosun (2009) mukaan hänen tekemänsä johtopäätökset ovat osittain täysin uusia. Epärealistiset oletukset ja empiirisen tutkimuksen puute johtavat kuitenkin siihen, etteivät johtopäätökset vaikuta täysin luotettavilta. Alan tutkimus vaikuttaisi olevan siinä vaiheessa, etteivät mallit ole suoranaisesti estimoitavissa, vaan keskittyvät ennemminkin teoreettisten säännönmukaisuuksien selittämiseen. Näin ollen lienee todennäköistä, että dynaamisia rationaalisten sijoittajien malleja on kehitettävä edelleen, jotta ne voisivat saavuttaa tavoitteensa ja soveltaminen todellisiin markkinoihin johtaisi luotettaviin tuloksiin.

Kirjallisuushaut osoittivat, että tarjouskirjamarkkinoiden toiminta on ollut suosittu tutkimuskohde kuluneina vuosikymmeninä, ja erilaisia malleja kehitetään jatkuvasti. Siitä huolimatta useita eri malleja käsittelevä ja vertaileva aineisto osoittautui vähäiseksi. Parlour ja Seppi (2007) sekä Gould et al. (2013) ovat tutkineet tarjouskirjamarkkinoiden mallintamista laajemmin. Heidän tutkimuksensa käsittelevät osittain myös dynaamisia ratio-

naalisten sijoittajien malleja: tutkimuksissa avataan lyhyesti mallien yleisiä piirteitä ja tuodaan esille oletusten epärealistisuus. Niiltä osin tutkimus on yhteisymmärryksessä tämän työn kanssa. Tutkimuksissa käsitellään kuitenkin monia muitakin tarjouskirjamarkkinoiden ominaisuuksia, eivätkä dynaamiset rationaalisten sijoittajien mallit saa yhtä suurta huomiota kuin ne saavat tässä työssä. Malleja voisi tietenkin analysoida tätäkin syvemmin, mikäli analyysiä ei tarvitsisi toteuttaa kandidaatintyön rajoissa. Joka tapauksessa kapeaan alueeseen keskittyminen mahdollisti aiempaa tutkimusta perusteellisemman dynaamisten rationaalisten sijoittajien mallien rakenteen, oletusten, johtopäätösten ja kehityksen arvioimisen.

Neljään malliin perehtyminen osoitti, että dynaamiset rationaalisten sijoittajien mallit ovat kehittyneet huomattavasti kymmenessä vuodessa. Jokaista käsiteltyä mallia voidaan pitää ansiokkaana, sillä ne edistivät alan tutkimusta poikkeuksetta. Neljän mallin otoksen perusteella vaikuttaa siltä, että esimerkiksi Poissonin jakaumaan perustuva saapumistensiteetti, hyötyfunktion arvon riippuvuus sijoittajan kärsivällisyydestä ja mahdollisuus rajahintatarjouksen perumiseen ovat olleet merkittäviä edistysaskeleita, joita hyödynnetään mahdollisesti myös tulevissa tutkimuksissa. Uusimman käsitellyn mallin julkaisusta on kulunut toiset kymmenen vuotta, joten tarjouskirjamarkkinoiden matemaattinen mallintaminen on mitä luultavimmin kehittynyt tähän päivään mennessä entisestään. Tätä puoltavat ainakin epäsymmetrisen informaation mallintamiseen keskittyvät työpaperit. Dynaamisten rationaalisten sijoittajien mallit kehittyvät todennäköisesti edelleen kohti realistisempia oletuksia ja johtopäätöksiä. Tämän työn näkökulmasta tutkimusta voisi jatkaa useampien ja uudempien rationaalisten sijoittajien mallien analysointiin sekä tilastollisten mallien tarkasteluun. Näin voitaisiin luoda nykyistä kattavampi käsitys siitä, kuinka luotettavasti tarjouskirjamarkkinoita kyetään mallintamaan matemaattisesti ja onko jompikumpi mallintamisen näkökulma tarkempi.

LÄHTEET

- Abergel, F. & Jedidi, A. (2013). A mathematical approach to order book modeling. *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, 16(05), 1350025.
- Ahn, H. J., Bae, K. H. & Chan, K. (2001). Limit orders, depth, and volatility: Evidence from the stock exchange of Hong Kong. *The Journal of finance*, 56(2), 767-788.
- Ainsworth, A. & Lee, A. D. (2014). Waiting costs and limit order book liquidity: Evidence from the ex-dividend deadline in Australia. *Journal of Financial Markets*, 20, 101-128.
- Bae, K. H., Jang, H. & Park, K. S. (2003). Traders' choice between limit and market orders: evidence from NYSE stocks. *Journal of Financial Markets*, 6(4), 517-538.
- Biais, B., Hillion, P. & Spatt, C. (1995). An empirical analysis of the limit order book and the order flow in the Paris Bourse. *the Journal of Finance*, 50(5), 1655-1689.
- Bonart, J., & Lillo, F. (2018). A continuous and efficient fundamental price on the discrete order book grid. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 503, 698-713.
- Bouchaud, J. P. Mézard, M., & Potters, M. (2002). Statistical properties of stock order books: empirical results and models. *Quantitative finance*, 2(4), 251-256.
- Brolley, M. & Malinova, K. (2017). Informed Trading in a Low-Latency Limit Order Market. Working Paper. SSRN 3095649.
- Cont, R., Stoikov, S. & Talreja, R. (2010). A stochastic model for order book dynamics. *Operations research*, 58(3), 549-563.
- Ellul, A., Holden, C. W., Jain, P. & Jennings, R. (2007). Order dynamics: Recent evidence from the NYSE. *Journal of Empirical Finance*, 14(5), 636-661.
- Foucault, T. (1999). Order flow composition and trading costs in a dynamic limit order market¹. *Journal of Financial markets*, 2(2), 99-134.
- Foucault, T., Kadan, O. & Kandel, E. (2005). Limit order book as a market for liquidity. *The review of financial studies*, 18(4), 1171-1217.
- George, T. J. & Longstaff, F. A. (1993). Bid-ask spreads and trading activity in the S&P 100 index options market. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 28(3), 381-397
- Goettler, R. L., Parlour, C. A. & Rajan, U. (2005). Equilibrium in a dynamic limit order market. *The Journal of Finance*, 60(5), 2149-2192.
- Goettler, R. L., Parlour, C. A. & Rajan, U. (2009). Informed traders and limit order markets. *Journal of Financial Economics*, 93(1), 67-87.
- Gould, M. D., Porter, M. A., Williams, S., McDonald, M., Fenn, D. J. & Howison, S. D. (2013). Limit order books. *Quantitative Finance*, 13(11), 1709-1742.
- Hollifield, B., Miller, R. A. & Sandås, P. (2004). Empirical analysis of limit order markets. *The Review of Economic Studies*, 71(4), 1027-1063.

- Hollifield, B., Miller, R. A., Sandås, P. & Slive, J. (2006). Estimating the Gains from Trade in Limit-Order Markets. *The Journal of Finance*, 61(6), 2753-2804.
- Kyle, A. S. (1985). Continuous auctions and insider trading. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, 53(6) 1315-1335.
- Linnainmaa, J. T. & Rosu, I. (2009). Weather and time series determinants of liquidity in a limit order market. AFA 2009 San Francisco Meetings Paper.
- Parlour, C. A. (1998). Price dynamics in limit order markets. *The Review of Financial Studies*, 11(4), 789-816.
- Parlour, C. A. & Seppi, D. J. (2007). Limit order markets: A survey. *Handbook of financial intermediation and banking*, 5, 63-95.
- Potters, M. & Bouchaud, J. P. (2003). More statistical properties of order books and price impact. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 324(1-2), 133-140.
- Ranaldo, A. (2004). Order aggressiveness in limit order book markets. *Journal of Financial Markets*, 7(1), 53-74.
- Roşu, I. (2009). A dynamic model of the limit order book. *The Review of Financial Studies*, 22(11), 4601-4641.
- Rosu, I. (2019) Liquidity and Information in Limit Order Markets. Working paper. SSRN 1286193.
- Tkatch, I. & Kandel, E. (2008). Demand for the immediacy of execution: time is money. Working paper. SSRN 685944.