

**SANTTU SÖDERHOLM
GIBBS–WILBRAHAMIN ILMIÖ**

Kandidaatintyö

Tarkastaja: Merja Laaksonen
3.3.2019

Tiivistelmä

SANTTU SÖDERHOLM: Gibbs–Wilbrahamin ilmiö

Tampereen yliopisto

Kandidaatintyö, 29 sivua, 0 liitesivua

helmikuu 2019

Tekniikan ja luonnontieteiden koulutusohjelma

Pääaine: Matematiikka

Tarkastaja: Lehtori Merja Laaksonen

Avainsanat: Fourier-analyysi, Gibbsin ilmiö, kompleksianalyysi, reaalianalyysi, suodatusmenetelmät, tasainen suppeneminen

Tässä kandidaatintyössä käydään läpi todistus Gibbs–Wilbrahamin ilmiön esiintymisestä mielivaltaiselle hyppäysepäjatkuvuuskohdan omaavalle jaksolliselle funktiolle. Todistuksessa huomataan, että jaettuna hyppäysepäjatkuvuuskohdan molemmin puolin, ilmiöön liittyvän Fourier'n sarjakehitelmän osasumman poikkeama osasumman approksimoiman funktion arvosta on likimain 9% funktion vasemman- ja oikeanpuoleisten raja-arvojen erotuksen itseisarvon suuruudesta. Lopuksi esitellään vielä muutama suodatusmenetelmä, joilla Gibbsin ilmiön vaikutuksia voidaan lieventää.

Alkusanat

Tuuka Kekin muistolle.

Tampere, 2. maaliskuuta 2019

Santtu Söderholm

SISÄLLYS

| | |
|---|----|
| 1. Johdanto | 1 |
| 2. Teorian kertausta ja muutamia avustavia tuloksia | 2 |
| 2.1 Peruskäsitteitä Fourier-analyysistä | 2 |
| 2.2 Dirichlet'n ydin | 3 |
| 2.3 Dirichlet'n lause | 8 |
| 3. Gibbs–Wilbrahamin ilmiö | 16 |
| 3.1 Ramppifunktio ja Gibbsin ilmiö | 17 |
| 3.2 Gibbsin ilmiön yleistys kaikkiin hyppäsepäjatkuviin funktioihin | 22 |
| 3.3 Epäjatkuvuuskohta yleisessä pisteessä | 23 |
| 3.4 Menetelmiä Gibbsin ilmiön suodattamiseksi | 24 |
| 4. Yhteenveto | 26 |
| 5. Lähteet | 28 |

Kuvaluettelo

| | | |
|-----|---|----|
| 2.1 | Dirichlet'n ytimen kuvaajia eri parametrin N arvoilla. Huomataan keskimmäisen piikin oheneminen ja kasvaminen, kun N kasvaa. . . . | 4 |
| 2.2 | Esimerkki paraabelin $f(t) = (t - 2)^2$, $f(t + 2\pi m) = f(t)$ Fourier'n kertoimien a_n ja b_n suppenemisesta, kun $n \rightarrow \infty$ | 10 |
| 3.1 | Ramppifunktion ja sen Fourier'n osasummien kuvaajia välillä $[-\pi, \pi]$. | 17 |
| 3.2 | Kanttiaalto f , sen Fourier'n osasumma $S_{40}f$, σ -approksimaatio $\mathcal{S}_{40}f$ ja Cesàron osasumma $\mathcal{C}_{40}f$ | 25 |

Lyhenteet ja merkinnät

| | |
|--------------|--|
| \mathbb{N} | Luonnollisten lukujen joukko $\{1, 2, 3, \dots\}$. |
| \mathbb{Z} | Kokonaislukujen joukko. |
| \mathbb{R} | Reaalilukujen joukko. |
| \square | Todistuksen loppu. |
| $f \sim g$ | Funktio $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ on <i>ekvivalentti</i> funktion $g : A \rightarrow \mathbb{R}$ kanssa, missä $A \subseteq \mathbb{R}$. Toisin sanoen funktiot ovat samat <i>melkein kaikkialla</i> , eli jos $B \subset A$ on nollamittainen joukko, on $f = g$ joukossa $A \setminus B$. |

1

Johdanto

Tässä kandidaatintyössä käydään läpi eräs todistus Gibbsin ja Wilbrahamin ilmiön olemassaololle mielivaltaisen, vähintään yhden hyppäysepäjatkuvuuskohdan omaavan funktion $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tapauksessa. Työ alkaa vaadittavan teorian kertaamisella ja muutaman uuden määritelmän, kuten Dirichlet'n ytimen esittelyllä, jonka jälkeen itse todistus esitetään.

Gibbsin ja Wilbrahamin, Gibbs–Wilbrahamin tai vain Gibbsin ilmiössä on kyse siitä, että jos funktiolla f on hyppäysepäjatkuvuuskohta t_0 , esiintyy sen ympäristössä funktion Fourier'n sarjakehitelmässä värähtelyä, jota ei saada katoamaan vaikka sarjan osasummien termien määrän eli laskentatarkkuuden antaisi kasvaa rajatta. Ilmiön esiintyminen tullaan osoittamaan tarkastelemalla erään funktion f Fourier'n sarjakehitelmän tasaista suppenemista kohti tietyn apufunktion h Fourier'n sarjakehitelmää.

Ilmiö tunnetaan yleisesti nimellä ”Gibbsin ilmiö”, mutta kunnianosoituksena usein unohdetulle, vuonna 1948 ilmiön alun perin havainneelle Henry Wilbrahamille [1; viitattu 2, s. 20], on tässä työssä ilmiöstä käytetty myös yllä mainittuja nimiä. Varsinainen todistus ilmiölle tehtiin ensimmäistä kertaa vasta noin 60 vuotta sen alkuperäisen havaitsemisen jälkeen Maxime Bôcherin toimesta, vuonna 1906 [3; viitattu 2, s. 20].

2

Teorian kertausta ja muutamia avustavia tuloksia

Tässä luvussa käsitellään työn ymmärtämisen kannalta tärkeimpiä määritelmiä ja lauseita, erityisesti Fourier-analyysin puolelta. Luvun alkupuoli on omistettu peruskäsitteiden kertaamiselle, mutta myöhemmin esitetään kokemattomammalle matemaatikolle todennäköisesti vähemmän tuttuja käsitteitä ja tuloksia.

2.1 Peruskäsitteitä Fourier-analyysistä

Fourier-analyysin eräs perustavanlaatuinen pyrkimys on esittää jaksollisia funktioita sarjamuodossa. Vaikka tämä ei ole itse tutkitun aiheen kannalta keskeinen asia, on hyvä palauttaa mieleen mitä jaksollisuus ylipäätään tarkoittaa ja mitkä sen seuraukset ovat.

Määritelmä 2.1.1 (Jaksollinen funktio). Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sanotaan olevan *jaksollinen*, jos funktion arvot toistuvat säännöllisin välein [4, s. 282]. Toisin sanoen, jos funktion f jakso on T , on jokaisella muuttujan t arvolla voimassa yhtälö

$$f(t + mT) = f(t), \quad m \in \mathbb{Z}.$$

Määritelmä 2.1.2 (Funktion taajuus ja kulmataajuus). Määritelmän 2.1.1 mukaisen funktion f *taajuus* ν ilmaisee, kuinka monta kertaa funktio käy jaksonsa T läpi tietyn yksikön aikana. Määritellään siis taajuus ν osamääränä

$$\nu = \frac{1}{T}.$$

Fysikaalinen suure *kulmataajuus* ω taas kertoo, kuinka monta kertaa kappale pyörii pyörähdysakselinsa ympäri yhden jakson aikana [4, s. 282]. Toisin sanoen kulmataajuutta kuvaa yhtälö

$$\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}.$$

Kun funktioista ollaan muodostamassa Fourier'n sarjaesitystä, on tarpeellista laskea funktion niin kutsuttuja Fourier'n kertoimia.

Määritelmä 2.1.3 (Fourier'n kerroin). Olkoon funktio $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jakson $T = 2\pi$ omaava integroituva funktio. Tällöin sen *Fourier'n kerroin* $\hat{f}(n)$ määritellään

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int} dt.$$

Itse Fourier'n sarjaesitys muodostetaan alla esitetyllä tavalla.

Määritelmä 2.1.4 (Funktion Fourier'n sarja). Olkoon funktio f ja sen Fourier'n kerroin määritelty kuten määritelmässä 2.1.3. Tällöin funktion f *Fourier'n sarja* $S_{\infty}f \sim f$ määritellään sarjan *osasummien* $S_N f = \sum_{n=-N}^N f(t)e^{int}$ jonon $(S_N f)$ raja-arvona:

$$S_{\infty}f = \lim_{N \rightarrow \infty} S_N f = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n)e^{int} = \frac{a_0}{2} + \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N (a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)).$$

Tässä $N \in \mathbb{N}$ ja kertoimet [4, s. 286]

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(nt) dt \quad (2.1.1)$$

ja

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(nt) dt. \quad (2.1.2)$$

Seuraavaksi esitellään Gibbsin ilmiön ilmenemisen todistamisen kannalta erittäin tärkeä funktio ja tutkitaan sen ominaisuuksia.

2.2 Dirichlet'n ydin

Funktioiden f Fourier'n osasummien $S_N f$ termeissä esiintyy kerroin e^{-int} , joten on mielekästä tutkia näiden kertoimien summauksen seurauksia. Tätä varten tehdään seuraava määritelmä.

Määritelmä 2.2.1 (Dirichlet'n ydin). *Dirichlet'n ydin* $D_N : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ on N -asteinen trigonometrinen polynomi

$$D_N(t) = \sum_{n=-N}^N e^{int},$$

joka voidaan kirjoittaa myös muodossa

$$D_N(t) = 1 + 2 \sum_{n=1}^N \cos(nt) \quad (2.2.1)$$

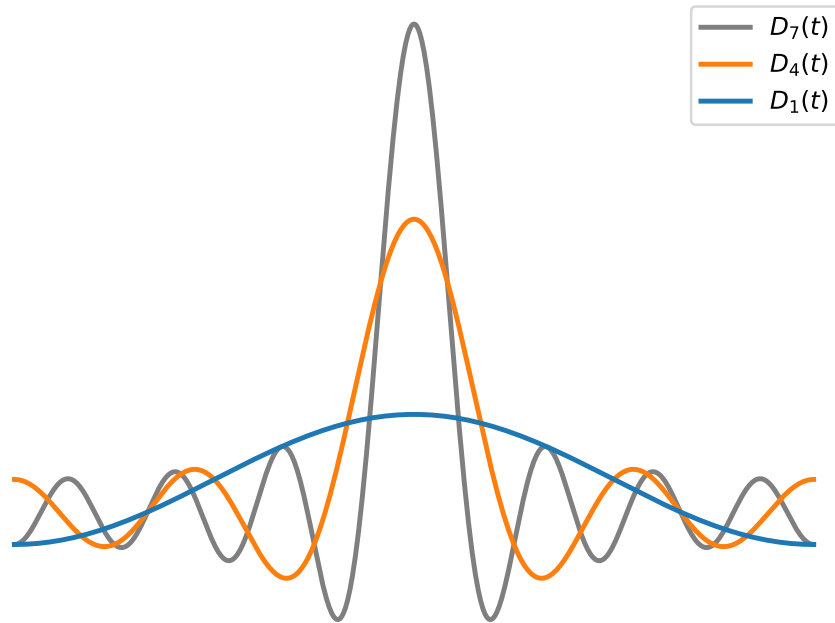
käyttämällä kosinin kompleksiseen esitystapaan perustuvaa yhtälöä

$$2 \cos(nt) = e^{int} + e^{-int}.$$

Seuraavan apulauseen mukaan Dirichlet'n ydin, jonka kuvaajia on esitetty kuvassa 2.1, on esitettävissä suljetussa muodossa.

Apulause 2.2.2 (Dirichlet'n ytimen suljettu muoto). Määritelmän 2.2.1 mukainen funktio voidaan esittää muodossa

$$D_N(t) = \frac{\sin\left(\frac{(2N+1)t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}. \quad (2.2.2)$$



Kuva 2.1 Dirichlet'n ytimen kuvaajia eri parametrin N arvoilla. Huomataan keskimmäisen piikin oheneminen ja kasvaminen, kun N kasvaa.

Todistus. Koska Dirichlet'n ydin on geometrisen sarjan osasumma suhdeluvulla $r = e^{it}$, tutkitaan yleistä geometrisen sarjan osasumman G_N lauseketta. Jos $a \in \mathbb{R}$ on summan ensimmäinen termi, lauseke on tunnetusti kirjoitettavissa muodossa

$$G_N = a \sum_{k=0}^N r^k = a \frac{1 - r^{N+1}}{1 - r}, \quad r \neq 1, \quad (2.2.3)$$

missä $N + 1$ on summan termien määrä.

Kun indeksijoukosta tehdään symmetrinen nollan suhteen ja huomataan ensimmäisen termin olevan r^{-N} sekä termien määrän $2N + 1$, saadaan nämä vastaavasti yhtälöön (2.2.3) sijoittamalla tulokseksi

$$G_N = a \sum_{k=-N}^N r^k = r^{-N} \frac{1 - r^{2N+1}}{1 - r}.$$

Kun tätä lauseketta lavennetaan tekijällä $r^{-1/2}$ ja sijoitetaan suhdeluku $r = e^{it}$, missä $t \neq 0$, saadaan lauseke muotoon

$$\begin{aligned} G_N &= \frac{r^{-1/2}}{r^{-1/2}} r^{-N} \frac{1 - r^{2N+1}}{1 - r} = \frac{r^{-N-1/2} - r^{N+1/2}}{r^{-1/2} - r^{1/2}} = \frac{(e^{it})^{-N-1/2} - (e^{it})^{N+1/2}}{(e^{it})^{-1/2} - (e^{it})^{1/2}} \\ &= \frac{e^{-it(N+1/2)} - e^{it(N+1/2)}}{e^{-it/2} - e^{it/2}} = \frac{2i e^{-it(N+1/2)} - e^{it(N+1/2)}}{2i e^{-it/2} - e^{it/2}} \\ &= \frac{\sin(t(N + 1/2))}{\sin(t/2)}. \end{aligned}$$

□

Seuraavassa lauseessa luetellaan muutamia Dirichlet'n ytimen ominaisuuksia, joita tullaan käyttämään Gibbsin ilmiön tarkastelun yhteydessä esiintyvien integraalien suppenemistarkasteluissa.

Lause 2.2.3 (Dirichlet'n ytimen ominaisuuksia). Olkoon $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ integroitava funktio. Tällöin

- (i) $S_N f(t) = (f * D_N)(t)$, missä $f * D_N$ viittaa funktion f ja Dirichlet'n ytimen konvoluutioon,
- (ii) D_N on parillinen funktio,
- (iii) $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_N(t) dt = 1$.

Todistus.

(i) Suoralla laskulla ja muuttujanvaihdoksella saadaan Fourier'n osasummaksi

$$\begin{aligned} S_N f(t) &= \sum_{n=-N}^N \widehat{f}(n) e^{int} = \sum_{n=-N}^N \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) e^{-iny} dy \right) e^{int} \\ &= \sum_{n=-N}^N \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) e^{int} e^{-iny} dy = \sum_{n=-N}^N \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) e^{in(t-y)} dy, \end{aligned}$$

missä integraali voidaan kirjoittaa Riemannin summan raja-arvona muodossa

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(y) e^{in(t-y)} dy = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^m f(y) e^{in(t-y)} \Delta y(m),$$

missä taas integroimisvälin tasaisen osituksen normi

$$\Delta y(m) = \frac{\pi - (-\pi)}{m} = \frac{2\pi}{m} \rightarrow 0, \text{ kun } m \rightarrow \infty.$$

Koska ulompi summaus on äärellinen ja näin ollen raja-arvojen summa on summien raja-arvo [5, s. 35], on osasumma

$$\begin{aligned} S_N f(t) &= \sum_{n=-N}^N \left(\frac{1}{2\pi} \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^m f(y) e^{in(t-y)} \frac{2\pi}{m} \right) = \frac{1}{2\pi} \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N \left(\sum_{j=1}^m f(y) e^{in(t-y)} \frac{2\pi}{m} \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^m \left(\sum_{n=-N}^N f(y) e^{in(t-y)} \frac{2\pi}{m} \right) = \frac{1}{2\pi} \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^m \left(f(y) \sum_{n=-N}^N e^{in(t-y)} \frac{2\pi}{m} \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^m \left(f(y) \sum_{n=-N}^N e^{in(t-y)} \Delta y(m) \right) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(f(y) \sum_{n=-N}^N e^{in(t-y)} \right) dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) D_N(t-y) dy = (f * D_N)(t), \end{aligned}$$

mikä on haluttu tulos.

(ii) Dirichlet'n ydin

$$D_N(-t) = \sum_{n=-N}^N e^{-int} = \sum_{n=N}^{-N} e^{int} = \sum_{n=-N}^N e^{int} = D_N(t),$$

eli se on parillinen parillisuuden määritelmän mukaisesti.

(iii) Tämä kohta toteutuu, jos integraali

$$\int_{-\pi}^{\pi} D_N(t) dt = 2\pi.$$

Kirjoitetaan ensin Dirichlet'n ydin yhtälön (2.2.1) avulla, minkä jälkeen suoran integroinnin tuloksena

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} D_N(t) dt &= \int_{-\pi}^{\pi} \left(1 + 2 \sum_{n=1}^N \cos(nt) \right) dt = \int_{-\pi}^{\pi} 1 dt + \int_{-\pi}^{\pi} 2 \sum_{n=1}^N \cos(nt) dt \\ &= 2\pi + \int_{-\pi}^{\pi} 2 \sum_{n=1}^N \cos(nt) dt, \end{aligned}$$

missä integraali

$$\int_{-\pi}^{\pi} 2 \sum_{n=1}^N \cos(nt) dt = 2 \sum_{n=1}^N \left(\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nt) dt \right) = 2 \sum_{n=1}^N \left(2 \frac{\sin(n\pi)}{n} \right) = 0$$

summan termeissä esiintyvien sinifunktioiden argumenttien ollessa luvun π monikertoja. \square

Lasketaan vielä lopuksi erään tärkeän määrätyn integraalin likiarvo.

Apulause 2.2.4 (Gibbsin vakion likiarvo). Funktion

$$\text{sinc}(t) = \begin{cases} 1 & , t = 0, \\ \frac{\sin(t)}{t} & , t \neq 0 \end{cases}$$

välin $[0, \pi]$ määrätyn integraalin likiarvo on

$$\text{Si}(\pi) = \int_0^{\pi} \text{sinc } t dt \approx 1,18 \cdot \frac{\pi}{2}.$$

Todistus. Sinifunktio voidaan esittää Taylorin sarjakehitelmänä

$$\sin(t) = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \frac{t^7}{7!} + \dots,$$

jolloin osamäärä

$$\frac{\sin(t)}{t} = 1 - \frac{t^2}{3!} + \frac{t^4}{5!} - \frac{t^6}{7!} + \dots.$$

Tästä edelleen seuraten integraali

$$\begin{aligned} \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin(t)}{t} dt &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left(1 - \frac{t^2}{3!} + \frac{t^4}{5!} - \frac{t^6}{7!} + \dots \right) dt \\ &= \frac{2}{\pi} \left(\pi - \frac{\pi^3}{18} + \frac{\pi^5}{600} - \frac{\pi^7}{35\,280} + \dots \right) \\ &= 2 - \frac{\pi^2}{9} + \frac{\pi^4}{300} - \frac{\pi^6}{17\,640} + \dots \approx 1,18. \end{aligned}$$

\square

2.3 Dirichlet'n lause

Jaksollisen funktion f Fourier'n kertoimien laskemisen mahdollistamiseksi täytyy funktion tietysti olla integroitava määrittelyjoukossaan. Fourier-analyysin ja tässäkin kandidaatintyössä esiintyvien todistusten kannalta eräs vielä oleellisempi seikka on funktion kuuluminen Lebesgue-integroituvien funktoiden avaruuteen $\mathbf{L}^1[-\pi, \pi]$. Lyhyesti sanottuna tämä tarkoittaa integraalin

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)| dt$$

olemassaoloa äärellisenä, sillä tämä takaa tutkittavan funktion rajoittuneisuuden [5, s. 119], sekä mahdollistaa sen Fourier'n kertoimien laskemisen. Tämän ehdon voimassaoloa edellyttää erityisesti seuraava määritelmä, jonka oletetaan täyttyvän kun Dirichlet'n lausetta lähdetään todistamaan.

Määritelmä 2.3.1 (Lipschitzin ehto). Olkoon f jakson 2π omaava funktio, jonka rajoittuma välille $(-\pi, \pi)$ on avaruudessa $\mathbf{L}^1(-\pi, \pi)$. Tällöin funktio f toteuttaa kertaluokkaa $\alpha : 0 < \alpha \leq 1$ olevan *Lipschitzin ehdon*, jos on olemassa vakio $C > 0$, jolla epäyhtälö

$$|f(t) - f(t_0)| \leq C|t - t_0|^\alpha$$

on voimassa pisteen t_0 ympäristössä. Jos ehto on voimassa jokaista tarkasteluvälin $(-\pi, \pi)$ pistettä t_0 kohti samalla vakiolla C , sanotaan funktion f täyttävän *tasaisen Lipschitzin ehdon*. Jos taas ehto toteutuu funktion f kohdan t_0 vasemman- tai oikeapuoleisten raja-arvojen $f(t_0^-)$ tai $f(t_0^+)$ tapauksessa, toteutuu *vasemman- tai oikeanpuoleinen Lipschitzin ehto*.

Lipschitzin ehto siis sanoo funktion f derivaatan olevan rajoitettu, joko kohdan t_0 molemmilla tai vain jommalla kummalla puolella, mikä taas estää liian nopean oskilloimisen ja täten takaa funktion sileyden. Dirichlet'n lauseen todistuksessa on myös erittäin oleellista, että suurilla indeksin n arvoilla funktion f Fourier'n kertoimet katoavat. Tätä varten esitetään Riemann-Lebesquen apulauseen todistus, mutta esitetään ensin kyseisen apulauseen todistuksessa esiintyvän hyödyllisen funktion määritelmä.

Määritelmä 2.3.2 (Karakteristinen funktio). Olkoon $A \subseteq X$ joukko. Joukon A *karakteristinen funktio* $\chi_A : X \rightarrow \{0, 1\}$ määritellään

$$\chi_A(t) = \begin{cases} 1, & t \in A, \\ 0, & t \notin A. \end{cases}$$

Apulause 2.3.3 (Riemann–Lebesquen apulause). Olkoon $A \subseteq \mathbb{R}$. Jos $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ on avaruuden $\mathbf{L}^1(-\pi, \pi)$ funktio, jonka jakso $T = 2\pi$, niin

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (|a_n| + |b_n|) = 0,$$

missä a_n ja b_n ovat määritelmän 2.1.4 yhtälöiden (2.1.1) ja (2.1.2) mukaisia funktion f trigonometrisia Fourier'n kertoimia.

Todistus. Oletetaan ensin, että tutkittava funktio olisi avoimen välin $(-\pi, \pi)$ karakteristinen funktio, eli $f(t) = \chi_{(-\pi, \pi)}(t)$. Tällöin funktion f kompleksinen Fourier'n kerroin

$$\hat{f}(n) = \frac{2}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt = \frac{2}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-int} dt = \frac{2(e^{in\pi} - e^{-in\pi})}{i\pi n} \rightarrow 0,$$

kun $n \rightarrow \infty$. Koska summan raja-arvo on raja-arvojen summa [5, s. 35], tapahtuu tämä suppeneminen myös mielivaltaisen *yksinkertaisen*, siis äärellisen määrän arvoja saavan funktion

$$g = \sum_{i=1}^N c_i \chi_i,$$

tapauksessa, missä jokainen $c_i \in \mathbb{R}$ on vakio ja $N \in \mathbb{N}$. Täten raja-arvo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) e^{-int} dt = 0,$$

eli jokaista lukua $\varepsilon > 0$ kohti on olemassa $N \in \mathbb{N}$, jolla itseisarvo

$$\left| \int_{-\pi}^{\pi} g(t) e^{-int} dt \right| < \varepsilon, \quad \text{kun } n \geq N. \quad (2.3.1)$$

Olkoon toiseksi funktio $h \in \mathbf{L}^1$ ja ε jokin positiivinen luku. Yksinkertaiset funktiot ovat tiheitä avaruudessa \mathbf{L}^1 [6, s. 94], eli oli $\varepsilon > 0$ miten pieni hyvänsä, on olemassa vastaava yksinkertaisten funktioiden jonon (g_n) jäsen g_n , jolle on voimassa epäyhtälö

$$\int_{-\pi}^{\pi} |h - g_n| dt < \varepsilon, \quad (2.3.2)$$

kunhan $n > N \in \mathbb{N}$. Näin voidaan integroinnin lineaarisuuden nojalla kirjoittaa

$$\int_{-\pi}^{\pi} h(t) e^{int} dt = \int_{-\pi}^{\pi} (h(t) - g_n(t)) e^{int} dt + \int_{-\pi}^{\pi} g_n(t) e^{int} dt.$$

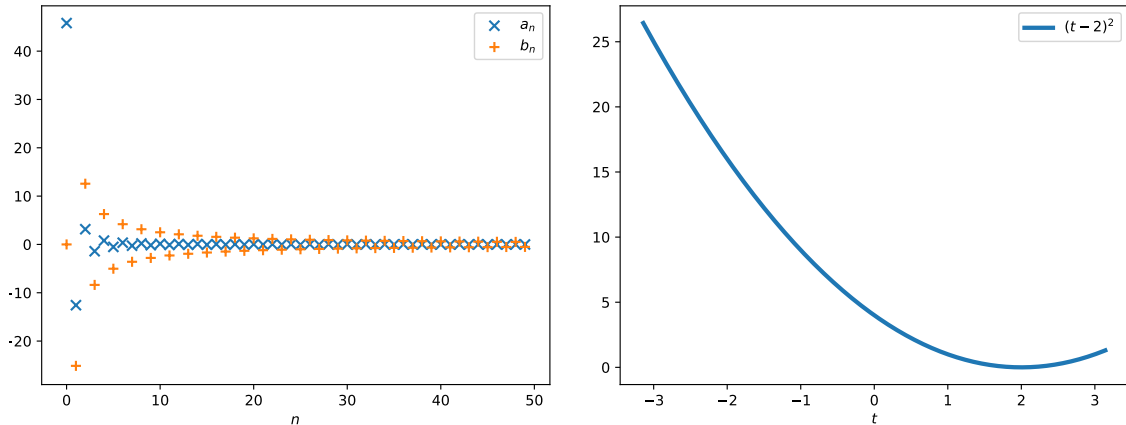
Tästä edelleen kolmioepäyhtälöä sekä yllä esitettyjä epäyhtälöitä (2.3.1) sekä (2.3.2) käyttämällä saadaan integraalin itseisarvoa arvioitua ylöspäin:

$$\left| \int_{-\pi}^{\pi} h(t) e^{int} dt \right| \leq \int_{-\pi}^{\pi} |h(t) - g_n(t)| \underbrace{|e^{int}|}_{=1} dt + \left| \int_{-\pi}^{\pi} g_n(t) e^{int} dt \right| < 2\varepsilon.$$

Huomattavaa on, että todistus tehtiin kompleksiselle Fourier'n kertoimelle $\hat{f}(n)$. Koska trigonometrisille Fourier'n kertoimille on tunnetusti voimassa

$$a_n = 2\operatorname{Re}(\hat{f}_n) \quad \text{sekä} \quad b_n = -2\operatorname{Im}(\hat{f}_n)$$

ja yleisesti $|\operatorname{Re}(z)|, |\operatorname{Im}(z)| \leq |z|$ jokaisella $z \in \mathbb{C}$, on väittämä osoitettu todeksi. \square



Kuva 2.2 Esimerkki paraabelin $f(t) = (t - 2)^2$, $f(t + 2\pi m) = f(t)$ Fourier'n kertoimien a_n ja b_n suppenemisesta, kun $n \rightarrow \infty$.

Esimerkkinä lauseen 2.3.3 toteutumisesta on kuvassa 2.2 esitetty oikealle siirretyn paraabelin $f(t) = (t - 2)^2$ Fourier'n kertoimien arvoja kasvavilla indeksin n arvoilla. Dirichlet'n lauseen todistuksessa tarvitaan myös seuraavaa versiota apulauseesta 2.3.3.

Apulause 2.3.4 (Riemann–Lebesquen apulauseen 2. muoto). Olkoon f jakson 2π omaava avaruuden $\mathbf{L}^1[-\pi, \pi]$ funktio, ja funktio h jatkuvasti derivoituvien funktioiden avaruudessa $\mathbf{C}^1[\alpha, \beta]$, missä $[\alpha, \beta] \subseteq [-\pi, \pi]$. Tällöin luvun $\lambda \in \mathbb{R}$ kasvaessa rajatta tapahtuu suppeneminen

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t - u)h(u) \sin(\lambda u) \, du \rightarrow 0$$

tasaisesti välillä $[\alpha, \beta]$.

Todistus. Axlerin [6, s. 96] mukaan jatkuvasti derivoituvien funktioiden avaruus $\mathbf{C}^1[-\pi, \pi]$ on tiheä avaruudessa $\mathbf{L}^1[-\pi, \pi]$. Täten voidaan löytää sellainen funktioiden $g_n \in \mathbf{C}^1[-\pi, \pi]$ jono $(g_n) \rightarrow g$, joka on lähellä funktiota f \mathbf{L}^1 -normin mielessä. Toisin sanoen jokaista positiivista lukua ε kohden on olemassa sellainen luonnollinen luku N , että epäyhtälö

$$\|f - g_n\|_{\mathbf{L}^1} = \int_{-\pi}^{\pi} |f(t) - g_n(t)| \, dt < \varepsilon$$

toteutuu, kunhan $n \geq N$.

Tutkitaan seuraavaksi integraalia

$$I = \int_{\alpha}^{\beta} g(t-u)h(u) \sin(\lambda u) du.$$

Se saadaan osittaisintegroimalla suppenemistarkastelujen kannalta kätevään muotoon:

$$I = \int_{\alpha}^{\beta} \left(-g(t-u)h(u) \frac{\cos(\lambda u)}{\lambda} \right) + \int_{\alpha}^{\beta} \frac{d}{du} \left(g(t-u)h(u) \right) \frac{\cos(\lambda u)}{\lambda} du.$$

Oletuksen perusteella h sekä g ovat jatkuvasti derivoituvia suljetulla välillä $[\alpha, \beta]$ ja täten myös rajoitettuja [5, s. 199] sekä jatkuvia [5, s. 76]. Täten tulo $g(t-u)h(u)$ ja derivaatta $\frac{d}{du} (g(t-u)h(u))$ ovat myös jatkuvia [5, s. 139] ja näin rajoitettuja koko tutkittavalla välillä, joten integraali $I \rightarrow 0$ tasaisesti, kun $\lambda \rightarrow \infty$.

Täten todistuksessa yleisesti tutkittavan integraalin itseisarvoa ylöspäin arvioiden:

$$\begin{aligned} \left| \int_{\alpha}^{\beta} f(t-u)h(u) \sin(\lambda u) du \right| &\leq \left| \int_{\alpha}^{\beta} (f(t-u) - g(t-u))h(u) \sin(\lambda u) du \right| + |I| \\ &\leq \max_{\alpha \leq u \leq \beta} |h(u)| \int_{\alpha}^{\beta} |f(t-u) - g(t-u)| du + |I| \\ &\leq \max_{\alpha \leq u \leq \beta} |h(u)| \varepsilon + |I|. \end{aligned}$$

Koska ε oli mielivaltaisen pieni positiivinen luku ja integraali I lähestyy nollaa, kun $\lambda \rightarrow \infty$, seuraa tästä tasainen suppeneminen. \square

Seuraavan keskeisen tuloksen todistamisen jälkeen tässä kandidaatintyössä osoitettavan tuloksen todentaminen helpottuu oleellisesti.

Lause 2.3.5 (Dirichlet'n lause). Olkoon f funktio, joka toteuttaa vasemman- ja oikeanpuoleiset Lipschitzin ehdot pisteen t_0 ympäristössä. Tällöin funktion f Fourier'n osasummien raja-arvo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_N f(t_0) = \frac{f(t_0^+) + f(t_0^-)}{2},$$

missä $f(t_0^-)$ ja $f(t_0^+)$ ovat funktion f vasemman- ja oikeanpuoleiset raja-arvot kohdassa t_0 .

Todistus. Oletetaan aluksi, että $t_0 \neq \pm\pi$. Lauseen 2.2.3 perusteella tiedetään, että

$$S_N f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t-u) D_N(u) du \quad \text{ja} \quad \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_N(u) du = 1.$$

Täten funktion f ja sen Fourier'n osasumman erotukseksi saadaan

$$S_N f(t) - f(t) = \int_{-\pi}^{\pi} (f(t_0 - u) - f(t_0)) D_N(u) du. \quad (2.3.3)$$

Olkoon nyt funktion f oikean- ja vasemmanpuoleisten raja-arvojen aritmeettinen keskiarvo kohdassa t_0

$$\bar{f}(t_0) = \frac{f(t_0^-) + f(t_0^+)}{2}. \quad (2.3.4)$$

Tällöin yhtälön (2.3.3) perusteella

$$S_N f(t_0) - \bar{f}(t_0) = \int_{-\pi}^{\pi} (f(t_0 - u) - \bar{f}(t_0)) D_N(u) du.$$

Sijoittamalla tähän lausekkeeseen yhtälön (2.3.4) oikea puoli, saadaan erotukseksi

$$\begin{aligned} & S_N f(t_0) - \bar{f}(t_0) \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \left(f(t_0 - u) - \frac{f(t_0^-)}{2} - \frac{f(t_0^+)}{2} \right) D_N(u) du \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \left(f(t_0 - u) - f(t_0^-) + f(t_0^-) - f(t_0^+) + f(t_0^+) - \frac{f(t_0^-)}{2} - \frac{f(t_0^+)}{2} \right) D_N(u) du \\ &= \int_0^{\pi} (f(t_0 - u) - f(t_0^-)) D_N(u) du + \int_0^{\pi} \frac{f(t_0^-)}{2} D_N(u) du \\ &\quad - \int_0^{\pi} \frac{f(t_0^+)}{2} D_N(u) du + \int_{-\pi}^0 (f(t_0 - u) - f(t_0^+)) D_N(u) du \\ &\quad - \int_{-\pi}^0 \frac{f(t_0^-)}{2} D_N(u) du + \int_{-\pi}^0 \frac{f(t_0^+)}{2} D_N(u) du \\ &= I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5 + I_6. \end{aligned}$$

Ryhmitellään nyt integraalit I_1 - I_6 sopivasti. Tällöin lauseen 2.2.3 kohdan **(ii)** nojalla summa

$$I_2 + I_5 = \frac{f(t_0^-)}{2} \left(\int_0^{\pi} D_N(u) du - \int_{-\pi}^0 D_N(u) du \right) = 0.$$

Toisaalta samoin perusteluin summa $I_3 + I_6 = 0$. Täten $I_2 + I_3 + I_5 + I_6 = 0$, ja erotus

$$S_N f(t_0) - \bar{f}(t_0) = \int_0^{\pi} (f(t_0 - u) - f(t_0^-)) D_N(u) du + \int_{-\pi}^0 (f(t_0 - u) - f(t_0^+)) D_N(u) du.$$

Valitaan nyt δ väliltä $(0, \pi)$, jolloin lauseke voidaan kirjoittaa muodossa

$$\begin{aligned} & S_N f(t_0) - \bar{f}(t_0) \\ &= \int_{-\pi}^{-\delta} (f(t_0 - u) - f(t_0^+)) D_N(u) du + \int_{-\delta}^0 (f(t_0 - u) - f(t_0^+)) D_N(u) du \\ &\quad + \int_0^{\delta} (f(t_0 - u) - f(t_0^-)) D_N(u) du + \int_{\delta}^{\pi} (f(t_0 - u) - f(t_0^-)) D_N(u) du \\ &= J_1 + J_2 + J_3 + J_4. \end{aligned}$$

Integraali J_1 voidaan kirjoittaa Dirichlet'n ytimen suljetun muodon (2.2.2) avulla muodossa

$$\begin{aligned}
J_1 &= \int_{-\pi}^{-\delta} (f(t_\circ - u) - f(t_\circ^+)) \frac{\sin\left(\frac{(2n+1)u}{2}\right)}{\sin\left(\frac{u}{2}\right)} du \\
&= \int_{-\pi}^{-\delta} (f(t_\circ - u) - f(t_\circ^+)) \frac{\sin(nu) \cos\left(\frac{u}{2}\right) + \sin\left(\frac{u}{2}\right) \cos(nu)}{\sin\left(\frac{u}{2}\right)} du \\
&= \int_{-\pi}^{-\delta} (f(t_\circ - u) - f(t_\circ^+)) \frac{\sin(nu) \cos\left(\frac{u}{2}\right)}{\sin\left(\frac{u}{2}\right)} du \\
&\quad + \int_{-\pi}^{-\delta} (f(t_\circ - u) - f(t_\circ^+)) \frac{\sin\left(\frac{u}{2}\right) \cos(nu)}{\sin\left(\frac{u}{2}\right)} du \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} (f(t_\circ - u) - f(t_\circ^+)) \frac{\sin(nu) \cos\left(\frac{u}{2}\right)}{\sin\left(\frac{u}{2}\right)} \chi_{[-\pi, -\delta]}(u) du \\
&\quad + \int_{-\pi}^{\pi} (f(t_\circ - u) - f(t_\circ^+)) \frac{\sin\left(\frac{u}{2}\right) \cos(nu)}{\sin\left(\frac{u}{2}\right)} \chi_{[-\pi, -\delta]}(u) du.
\end{aligned}$$

Määritellään nyt funktiot

$$g(t_\circ, u) = (f(t_\circ - u) - f(t_\circ^+)) \frac{\cos\left(\frac{u}{2}\right)}{\sin\left(\frac{u}{2}\right)} \chi_{[-\pi, -\delta]}(u)$$

ja

$$h(t_\circ, u) = (f(t_\circ - u) - f(t_\circ^+)) \chi_{[-\pi, -\delta]}(u),$$

jolloin integraali

$$J_1 = \int_{-\pi}^{\pi} g(t_\circ, u) \sin(nu) du + \int_{-\pi}^{\pi} h(t_\circ, u) \cos(nu) du = \pi(b_n + a_n),$$

missä a_n ja b_n ovat määritelmän 2.1.4 mukaisia funktioiden h ja g Fourier'n kertoimia, jotka suppenevat kohti nollaa apulauseen 2.3.3 nojalla. Lähdies vastaavalla tarkastelulla integraali J_4 suppenee kohti nollaa luvun n kasvaessa rajatta.

Sen sijaan integraaleja J_2 ja J_3 voidaan tarkastella seuraavasti. Arvioidaan itseisarvoa $|J_2|$ ylöspäin:

$$\begin{aligned}
|J_2| &= \left| \int_{-\delta}^0 (f(t_\circ - u) - f(t_\circ^+)) \frac{\sin\left(nu + \frac{u}{2}\right)}{\sin\left(\frac{u}{2}\right)} du \right| \\
&\leq \int_{-\delta}^0 \left| (f(t_\circ - u) - f(t_\circ^+)) \frac{\sin\left(nu + \frac{u}{2}\right)}{\sin\left(\frac{u}{2}\right)} \right| du.
\end{aligned}$$

Koska oletuksen mukaan funktio f toteuttaa Lipschitzin ehdot 2.3.1 kohdan t_0 molemmilla puolilla, on olemassa äärellinen vakio C_1 , joka toteuttaa epäyhtälön

$$|f(t_0 - u) - f(t_0^+)| \leq C_1 |t_0 - u - t_0|^\alpha = C_1 |u|^\alpha, \quad \text{kun} \quad -\delta < u < 0.$$

Koska lisäksi Dirichlet'n ytimen $D_N(u)$ suljetun muodon (2.2.2) avulla kirjoitetun integrandin tekijöille on tunnetusti voimassa

$$\left| \sin\left(nu + \frac{u}{2}\right) \right| \leq 1 \quad \text{ja} \quad \lim_{u \rightarrow 0} \frac{u/2}{\sin\left(\frac{u}{2}\right)} = 1,$$

löytyy sellainen vakio C_2 , joka toteuttaa epäyhtälön

$$\left| \frac{u}{\sin\left(\frac{u}{2}\right)} \right| \leq C_2.$$

Integraalin J_2 itseisarvoa saadaan siis arvioitua ylöspäin epäyhtälöllä

$$|J_2| \leq C_2 \int_{-\delta}^0 C_1 |u|^{\alpha-1} du \leq C_{21} \int_{-\delta}^0 |u|^{\alpha-1} du,$$

missä vakio $C_{21} = C_2 C_1$. Integraalin J_3 integrandin tekijälle voidaan taas samoin olettaen löytää vakio C_3 , joka toteuttaa epäyhtälön

$$|f(t_0 - u) - f(t_0^-)| \leq C_3 |t_0 - u - t_0|^\alpha = C_3 |u|^\alpha, \quad \text{kun} \quad 0 < u < \delta,$$

joten itseisarvoa $|J_3|$ saadaan myös arvioitua ylöspäin:

$$|J_3| = \left| \int_0^\delta \left(\frac{f(t_0 - u) - f(t_0^-)}{u} \right) u D_N(u) du \right| \leq C_2 \int_0^\delta C_3 |u|^{\alpha-1} du \leq C_{23} \int_0^\delta |u|^{\alpha-1} du,$$

missä vakio $C_{23} = C_2 C_3$.

Olkoon nyt $C = \max\{C_{21}, C_{23}\}$. Tällöin integraalien J_2 ja J_3 itseisarvojen summa

$$\begin{aligned} |J_2| + |J_3| &\leq C \int_{-\delta}^0 |u|^{\alpha-1} du + C \int_0^\delta |u|^{\alpha-1} du = C \int_{-\delta}^\delta |u|^{\alpha-1} du = 2C \int_0^\delta |u|^{\alpha-1} du \\ &= 2C \int_0^\delta \frac{|u|^\alpha}{\alpha} = 2 \frac{C \delta^\alpha}{\alpha}. \end{aligned}$$

Jos nyt valitaan sellaiset δ ja N , että tämä summa saadaan mielivaltaisen pieneksi, on väite osoitettu tapaukselle $t_0 \in (-\pi, \pi)$. Todistuksen alussa pois rajatussa tapauksessa $t_0 = \pm\pi$, siirtämällä tarkasteluväliä luvun π verran ja argumentoimalla samalla tavalla kuin yllä, saadaan osasumma suppenemaan kohti funktion f keskiarvoa \bar{f} myös pisteessä $t = 0$. Kaksipuoliselle Lipschitzin ehdolle saadaan väite todistettua korvaamalla raja-arvot $f(t_0^+)$ ja $f(t_0^-)$ arvolla $f(t_0)$ integraaleissa J_1 ja J_4 . [2, s. 41] Täten väittämä on osoitettu todeksi. \square

Seuraava lause takaa vielä tasaisen suppenemisen, jos tasainen Lipschitzin ehto täyttyy jollakin avoimella välillä.

Lause 2.3.6. Toteuttakoon funktio f tasaisen kaksipuoleisen Lipschitzin ehdon välillä (a, b) , kun $0 < \alpha \leq 1$. Tällöin $S_N f \rightarrow f$ tasaisesti kaikissa osaväleissä $[c, d] \subset (a, b)$.

Todistus. Olkoon $\delta < \min\{c - a, b - d\}$. Lauseen 2.3.5 todistuksen nojalla integraalien J_2 ja J_3 itseisarvojen summa

$$|J_2| + |J_3| \leq 2 \frac{C\delta^\alpha}{\alpha}.$$

Jos nyt kirjoitetaan samaisessa todistuksessa esiintynyt integraali J_1 erotuksena

$$J_1 = \int_{-\pi}^{-\delta} f(t_\circ - u) \frac{\sin(nu + u/2)}{\sin(u/2)} du - \int_{-\pi}^{-\delta} f(t_\circ) \frac{\sin(nu + u/2)}{\sin(u/2)} du$$

ja huomataan, että integrandien tekijä $\frac{1}{\sin(u/2)} \in \mathbf{C}^1(-\pi, -\delta)$, voidaan soveltaa apulausetta 2.3.4 arvoilla $\alpha = -\pi$, $\beta = -\delta$ ja $\lambda = n + \frac{1}{2}$, jotta integraalin J_1 ensimmäinen termi saataisiin suppenemaan tasaisesti:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{-\delta} f(t_\circ - u) \frac{\sin(\lambda u)}{\sin(u/2)} du \rightarrow 0, \quad \text{kun } \lambda \rightarrow \infty.$$

Myös toinen termi suppenee kohti nollaa tasaisesti samoin perusteluin. Täten $J_1 \rightarrow 0$, kun $n \rightarrow \infty$. Samaa lähestymistapaa voidaan soveltaa integraalin J_4 suppenemistarkasteluun, josta haluttu tulos seuraa. [2, s. 42] \square

3

Gibbs–Wilbrahamin ilmiö

Gibbs–Wilbrahamin ilmiössä on siis kyse hyppäysepäjatkuvuuskohdan omaavan funktion f ja sen Fourier'n sarjakehitelmän $S_\infty f$ välillä esiintyvistä poikkeamista. Käydään seuraavaksi läpi ilmiön määritelmä ja osoitetaan ilmiön olemassaolo eräälle erikoistapaukselle, josta tässä työssä etsitty tulos on yleistettävissä lauseiden 2.3.5 ja 2.3.6 avulla.

Määritelmä 3.1 (Gibbs–Wilbrahamin ilmiö). Olkoon funktiolla $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ hyppäysepäjatkuvuuskohta t_o , toisin sanoen olkoot funktion raja-arvot

$$f(t_o^+) = \lim_{t \rightarrow t_o^+} f(t) \quad \text{ja} \quad f(t_o^-) = \lim_{t \rightarrow t_o^-} f(t)$$

olemassa äärellisinä sekä eri suuret, siis $f(t_o^+) \neq f(t_o^-)$. Tällöin funktion f Fourier'n sarjakehitelmän osasumman $S_N f(t)$ sanotaan ilmentävän Gibbsin ilmiötä epäjatkuvuuskohdan $t = t_o$ oikealla puolella, jos on olemassa sellainen lukua t_o kohti suppeneva lukujono $(t_n)_{n=1}^\infty : t_n > t_o$, että

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_N f(t_n) > f(t_o^+), \quad \text{kun} \quad f(t_o^+) > f(t_o^-),$$

tai

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_N f(t_n) < f(t_o^+), \quad \text{kun} \quad f(t_o^+) < f(t_o^-).$$

Vastaavasti funktion f Fourier'n sarjan osasumman $S_N f(t)$ sanotaan ilmentävän Gibbsin ilmiötä epäjatkuvuuskohdan $t = t_o$ vasemmalla puolella, jos on olemassa sellainen lukua t_o kohti suppeneva lukujono $(t_n) : t_n < t_o$, että

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_N f(t_n) < f(t_o^+), \quad \text{kun} \quad f(t_o^+) > f(t_o^-),$$

tai

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_N f(t_n) > f(t_0^+), \quad \text{kun} \quad f(t_0^+) < f(t_0^-).$$

Määritelmästä 3.1 nähdään, että ilmiötä ei määritä pelkästään epäjatkuvuuskohdissa tapahtuvan värähtelyn olemassaolo, vaan sen katoamattomuus tapauksissa, joissa funktion Fourier'n osasummaan otetaan mukaan yhä enemmän termejä. Lähdetään seuraavaksi osoittamaan ilmiön esiintymistä eräässä erikoistapauksessa.

3.1 Ramppifunktio ja Gibbsin ilmiö

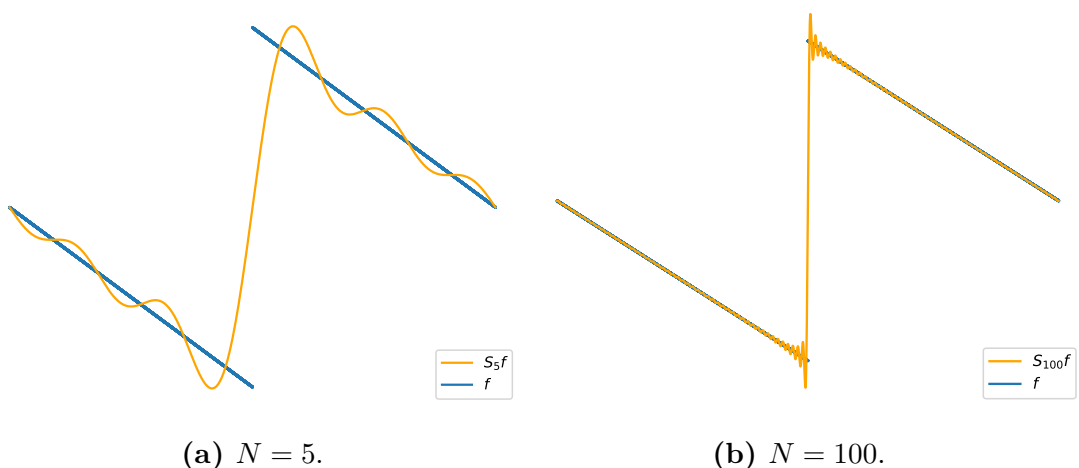
Etumerkkifunktion $\text{sgn} : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \{-1, 1\}$,

$$\text{sgn}(t) = \begin{cases} -1, & t < 0, \\ 1, & t > 0, \end{cases} \quad (3.1.1)$$

avulla on määriteltävissä *ramppifunktio* $f : \mathbb{R} \setminus \{2\pi m\} \rightarrow (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$,

$$f(t) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} \text{sgn}(t) - \frac{t}{2}, & -\pi \leq t < \pi, \\ f(t + mT), & m \in \mathbb{Z}, \end{cases} \quad (3.1.2)$$

jonka kuvaajia on kuvassa 3.1. Samassa kuvassa on myös funktion f Fourier'n osasummien $S_N f$ kuvaajia yhden jakson $T = 2\pi$ osalta. Alakuvasta **(b)** huomataan, että värähtelyä esiintyy vielä sadallakin termillä.



Kuva 3.1 Ramppifunktion ja sen Fourier'n osasummien kuvaajia välillä $[-\pi, \pi]$.

Lähimpänä epäjatkuvuuskohtaa oleva värähtelypiikki kyllä ohenee ohenemistaan, mutta se ei ainakaan vielä tässä vaiheessa ole kadonnut mihinkään. Osoitetaan seuraavaksi piikin katoamattomuus, kun $N \rightarrow \infty$.

Ääriarvokohdan olemassaolon todentaminen tulee etenemään tavalliseen tapaan. Ensin muodostetaan funktiolle (3.1.2) Fourier'n sarjakehitelmä, minkä jälkeen tutkitaan sarjakehitelmän ääriarvokohtien olemassaoloa funktion epäjatkuvuuskohdan molemmin puolin, derivoimalla sarjakehitelmää kahdesti ja tarkastelemalla onko mahdollisesti löytyvä paikallinen ääriarvo suurempi tai pienempi kuin funktion arvo.

Kuten kuvasta 3.1 voi päätellä, on funktiolla (3.1.2) hyppäysepäjatkuvuuskohta pisteessä $t = 0$. Lähdetään tutkimaan sen Fourier'n osasummia, kun $t \rightarrow 0^+$. Aloitetaan määrittämällä funktion Fourier'n kertoimet $\hat{f}(n)$ määritelmän 2.1.3 mukaisesti.

Koska funktio f on pariton, on $f(t) \cos(t)$ pariton ja $f(t) \sin(t)$ parillinen, jolloin tapauksessa $n \neq 0$ saadaan osittaisintegroimalla Fourier'n kertoimeksi

$$\begin{aligned}\hat{f}(n) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) (\cos(nt) - i \sin(nt)) dt \\ &= -\frac{i}{2\pi} \cdot 2 \int_0^{\pi} f(t) \sin(nt) dt = -\frac{i}{2\pi} \int_0^{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{t}{2}\right) \sin(nt) dt \\ &= -\frac{i}{\pi} \frac{\pi n - \sin(\pi n)}{2n^2} = -\frac{i}{2n}.\end{aligned}$$

Jos taas $n = 0$, muodostuu funktion f parittomuuden nojalla Fourier'n kertoimeksi

$$\hat{f}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt = 0.$$

Koska kompleksiselle Fourier'n kertoimelle on tunnetusti voimassa yhtälö

$$\hat{f}(n) = \frac{a_n - ib_n}{2} = -\frac{i}{2n},$$

ovat trigonometriset funktion f Fourier'n kertoimet $a_n = 0$ ja $b_n = \frac{1}{n}$. Näin ollen funktion Fourier'n sarja voidaan kirjoittaa muodossa

$$S_{\infty} f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin(nt).$$

Käyttämällä hyväksi analyysin peruslausetta ja integroinnin lineaarisuutta, voidaan sarja avata seuraavasti:

$$\begin{aligned} S_\infty f(t) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} \sin(nt) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \int_0^t \cos(nt) dt = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^t \sum_{n=1}^N \cos(nt) dt \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^t \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^N \cos(nt) - \frac{1}{2} dt = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^t \left(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^N \cos(nt) \right) dt - \frac{t}{2} \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \int_0^t D_N(t) dt - \frac{t}{2}. \end{aligned}$$

Tässä viimeisellä rivillä on sovellettu integrandiin yhtälöä (2.2.1). Kirjoittamalla Dirichlet'n ydin apulauseen 2.2.2 mukaisen suljetun muodon avulla sekä soveltamalla trigonometrista identiteettiä

$$\sin(u+v) = \sin(u) \cos(v) + \cos(u) \sin(v),$$

saadaan integraali kirjoitettua muotoon

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^t D_N(t) dt &= \frac{1}{2} \int_0^t \left(\frac{\sin\left(\frac{(2N+1)t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \right) dt \\ &= \int_0^t \left(\frac{\sin(Nt) \cos\left(\frac{t}{2}\right) + \cos(Nt) \sin\left(\frac{t}{2}\right)}{2 \sin\left(\frac{t}{2}\right)} \right) dt \\ &= \int_0^t \sin(Nt) \frac{\cos\left(\frac{t}{2}\right)}{2 \sin\left(\frac{t}{2}\right)} dt + \int_0^t \frac{\cos(Nt)}{2} dt \\ &= \int_0^t \sin(Nt) \left(\frac{\cos\left(\frac{t}{2}\right)}{2 \sin\left(\frac{t}{2}\right)} + \frac{1}{t} - \frac{1}{t} \right) dt + \int_0^t \frac{\cos(Nt)}{2} dt \\ &= \int_0^t \frac{\sin(Nt)}{t} dt + \int_0^t \sin(Nt) \left(\frac{\cos\left(\frac{t}{2}\right)}{2 \sin\left(\frac{t}{2}\right)} - \frac{1}{t} \right) dt + \int_0^t \frac{\cos(Nt)}{2} dt. \end{aligned}$$

Funktion f Fourier'n osasumma voidaan siis kirjoittaa muodossa

$$\begin{aligned} S_N f(t) &= \int_0^t \frac{\sin(Nt)}{t} dt + \int_0^t \sin(Nt) \left(\frac{\cos\left(\frac{t}{2}\right)}{2 \sin\left(\frac{t}{2}\right)} - \frac{1}{t} \right) dt + \int_0^t \frac{\cos(Nt)}{2} dt - \frac{t}{2} \\ &= I_1 + I_2 + I_3 - \frac{t}{2}. \end{aligned}$$

Tutkitaan nyt sarjakehitelmän osasummien muodostavien integraalien käyttäytymistä hyppäysepäjatkuvuuskohdan $t = 0$ oikealla puolella, määrittelemällä jono $(t_n)_{n=1}^\infty : t_n = \frac{\pi}{n}$ ja antamalla luvun n kasvaa rajatta. Tämän jonovalinnan seurauk-

sena integraali

$$\begin{aligned} I_2(t_n) &= \int_0^{\frac{\pi}{n}} \sin(Nt) \left(\frac{\cos\left(\frac{t}{2}\right)}{2 \sin\left(\frac{t}{2}\right)} - \frac{1}{t} \right) dt = \int_0^{\pi} \sin(Nt) \underbrace{\left(\frac{\cos\left(\frac{t}{2}\right)}{2 \sin\left(\frac{t}{2}\right)} - \frac{1}{t} \right) \chi_{[0,t_n]}(t)}_{=g_n(t)} dt \\ &= \int_0^{\pi} g_n(t) \sin(Nt) dt, \end{aligned}$$

missä funktiojonon $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ jäsenet ovat muotoa

$$g_n(t) = \left(\frac{\cos\left(\frac{t}{2}\right)}{2 \sin\left(\frac{t}{2}\right)} - \frac{1}{t} \right) \chi_{[0,t_n]}(t),$$

Tässä karakteristisen funktion tarkoitus on rajata integrointi halutulle välille [7, s. 46; 8], muutettiin integroimisrajoja miten hyvänsä.

Funktio g_n ei ole jatkuva kohdissa $t = 0$ ja $t = t_n$ välillä $[0, \pi]$, sillä ensimmäisessä tapauksessa sinin argumentti on suoraan nolla ja toisessa sen raja-arvoa ei olla nollalla jaon vuoksi määritelty, kun $n \rightarrow \infty$. Funktiojonon $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ jäsenille voidaan kuitenkin määrittellä jatkuva nollajatkke $G_n(t)$ välillä $[0, \pi]$:

$$G_n(t) = \begin{cases} g_n(t), & 0 < t \leq \pi \\ 0, & t = 0. \end{cases}$$

Kun nimittäin $t \rightarrow 0$, on g_n muotoa

$$\left(\frac{\cos\left(\frac{t}{2}\right)}{2 \sin\left(\frac{t}{2}\right)} - \frac{1}{t} \right) \chi_{[0,t_n]}(t) = \left(\frac{t \cos\left(\frac{t}{2}\right) - 2 \sin\left(\frac{t}{2}\right)}{2t \sin\left(\frac{t}{2}\right)} \right) \chi_{[0,t_n]}(t),$$

jolloin l'Hospitalin sääntöä kahdesti soveltamalla

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} g_n &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{d}{dt}(t \cos(t/2) - 2 \sin(t/2))}{\frac{d}{dt}(2t \sin(t/2))} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\left(-\frac{1}{2}t \sin(t/2) + \cos(t/2)\right) - \cos(t/2)}{t \cos(t/2) + 2 \sin(t/2)} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{2}t \sin(t/2)}{t \cos(t/2) + 2 \sin(t/2)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{d}{dt}\left(-\frac{1}{2}t \sin(t/2)\right)}{\frac{d}{dt}\left(t \cos(t/2) + 2 \sin(t/2)\right)} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{4}t \cos(t/2) - \frac{1}{2} \sin(t/2)}{-\frac{1}{2}t \sin(t/2) + \cos(t/2) + \cos(t/2)} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{4}t \cos(t/2) - \frac{1}{2} \sin(t/2)}{-\frac{1}{2}t \sin(t/2) + 2 \cos(t/2)} = \frac{0}{2} = 0. \end{aligned}$$

Vaikka G_n on edelleen määrittämätön kohdassa $t_n = \frac{\pi}{n}$, on se jatkuva määrittelyjoukossaan, kun $n = 1$, koostuessaan jatkuvien funktioiden tuloista ja summista. Ollessaan jatkuva, saavuttaa se jatkuvien funktioiden ääriarvolauseen nojalla maksiminsa M suljetulla välillä $[0, \pi]$ [5, s. 62]. Koska maksimi on olemassa ja luvun n kasvaessa se väli, jossa funktio G_n on nollostapoikkeava yksinkertaisesti lyhenee,

voidaan todeta, että

$$\max_{t \in [0, \pi]} G_n(t) \leq \max_{t \in [0, \pi]} G_1(t).$$

Merkitään nyt tätä maksimia $M = \max_{t \in [0, \pi]} G_1(t)$, jolloin reaalianalyysistä tunnettujen tuloksien nojalla voidaan todeta, että

$$\begin{aligned} |I_2(t_n)| &\leq \int_{-\pi}^{\pi} |G_n| |\sin(Nt)| dt && \text{(kolmioepäyhtälö)} \\ &\leq \max_{t \in [0, \pi]} G_1(t) \int_0^{t_n} 1 dt \\ &= Mt_n. \end{aligned}$$

Koska M oli äärellinen vakio ja integroimisvälin pituus t_n lähenee nollaa kun $n \rightarrow \infty$, suppenee tällöin myös integraali I_2 kohti nollaa.

Integraalin I_3 tapauksessa voidaan kirjoittaa

$$I_3(t_n) = \int_0^{t_n} \frac{\cos(Nt)}{2} dt = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} \chi_{[0, t_n]}(t) \cos(Nt) dt = \int_{-\pi}^{\pi} h_n(t) \cos(Nt) dt,$$

missä nyt $h_n = \frac{1}{2} \chi_{[0, t_n]}(t)$. Koska $\cos(Nt)$ on rajattu, suppenee I_3 kohti nollaa kertoimen $h_n(t)$ pakottamana, kun $n \rightarrow \infty$.

Nyt siis suurilla luvun n arvoilla sarjakehitelmän osasummassa $S_N f$ on jäljellä vain integraali I_1 , toisin sanoen

$$S_N f(t_n) \rightarrow \int_0^{t_n} \frac{\sin(Nt)}{t} dt - \frac{\pi}{2n} \rightarrow \int_0^{t_n} \frac{\sin(Nt)}{t} dt,$$

kun $n \rightarrow \infty$. Tutkitaan esiintyykö tällä funktiolla paikallinen maksimi hyppäseppä-jatkuvuuskohdan oikealla puolella kun $0 < t \leq t_n$. Ensinnäkin ääriarvokohdassa

$$\frac{d}{dt_n} \left(\int_0^{t_n} \frac{\sin(Nt)}{t} dt \right) = \frac{\sin(Nt_n)}{t_n} = 0,$$

eli derivaatan nollakohdissa $Nt_n = m\pi$, missä $m \in \mathbb{Z}$, joten $t_n = \frac{m\pi}{N}$. Ääriarvokohdian sijainti riippuu siis Fourier'n osasumman termien määrästä, kuten oli odotettavissa myös kuvan 3.1 perusteella. Erityisesti ensimmäisen ääriarvon tapauksessa on $m = 1$, jolloin $t_n = \frac{\pi}{N}$.

Integraalia I_1 toiseen kertaan derivoitaessa saadaan

$$\frac{d}{dt_n} \left(\frac{1}{t_n} \sin(Nt_n) \right) = -\frac{1}{t_n^2} \sin(Nt_n) + \frac{N}{t_n} \cos(Nt_n) = \frac{-\sin(Nt_n) + Nt_n \cos(Nt_n)}{t_n^2},$$

jonka osoittajan arvo kohdassa $t_n = \frac{\pi}{N}$ on

$$-\sin\left(N \frac{\pi}{N}\right) + N \frac{\pi}{N} \cos\left(N \frac{\pi}{N}\right) = -\sin(\pi) + \pi \cos(\pi) = -\pi < 0.$$

Sarjakehitelmän paikallinen ääriarvo on siis myös sen paikallinen maksimi.

Osoitetaan vielä, että sarjakehitelmän arvo tässä ääriarvokohdassa on suurempi kuin funktion arvo, mikä yhdessä aiempien tulosten kanssa osoittaa Gibbsin ilmiön esiintymisen. Tekemällä muuttujanvaihdos $u = Nt$, saadaan summa muotoon

$$\begin{aligned} S_N f(t_n) &= \int_0^{n\frac{\pi}{n}} \frac{\sin(u)}{u/N} du/N - \frac{\pi}{2n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_0^\pi \frac{\sin(u)}{u/N} du/N \\ &= \text{Si}(\pi) \approx 1,18 \cdot \frac{\pi}{2} > \frac{\pi}{2} = \sup_{t \in (0, \pi)} f(t), \end{aligned}$$

missä Wilbraham–Gibbsin vakion $\text{Si}(\pi)$ likiarvo laskettiin apulauseessa 2.2.4. Toisin sanoen hyppäsepäjatkuvuuskohdan oikealla puolella Fourier'n sarjakehitelmän arvo on suurempi kuin itse funktion. Täysin vastaavalla menettelyllä osoitettaisiin ilmiön olemassaolo hyppäsepäjatkuvuuskohdan vasemmalla puolella, määrittelemällä jono $(t_n) : t_n = -\frac{\pi}{n}$, antamalla luvun n kasvaa rajatta ja huomaamalla, että tällöin

$$S_N f(t_n) < \inf_{t \in (-\pi, 0)} f(t).$$

3.2 Gibbsin ilmiön yleistys kaikkiin hyppäsepäjatkuviin funktioihin

Tässä luvussa käytetään luvun 3.1 tulosta yleistämään Gibbsin ilmiö mielivaltaiselle, origossa hyppäsepäjatkuvalle funktiolle. Todistus perustuu loppujen lopuksi sopivan, yhtälön (3.1.2) ramppifunktiosta f sekä tutkittavasta mielivaltaisesta funktiosta g muodostetun apufunktion suppenemistarkasteluun lauseen 2.3.5 avulla.

Käyttämällä luvun 2.3 suppenemistuloksia, voidaan yleisen funktion g Gibbsin ilmiön olemassaolo osoittaa kohdassa $t = 0$, osoittamalla ramppifunktion (3.1.2) ilmentävän Gibbsin ilmiötä kyseisessä pisteessä, mikä onkin jo tehty. Jos nimittäin oletetaan, että $g(t)$ on kohdassa $t = 0$ hyppäsepäjatkuva, paloittain sileä funktio, jolle on voimassa

$$g(0^+) = \lim_{t \rightarrow 0^+} g(t) \neq \pm\infty \quad \text{ja} \quad g(0^-) = \lim_{t \rightarrow 0^-} g(t) \neq \pm\infty,$$

voidaan epäjatkuvuuskohta poistaa määrittelemällä funktiolle g nollajatkefunktio $h(t)$ seuraavasti:

$$h(t) = g(t) + \left(\frac{g(0^-) - g(0^+)}{\pi} \right) f(t), \quad t \neq 0,$$

missä f on mainittu ramppifunktio.

Jos nyt annetaan muuttujan t lähestyä origoa oikealta, on raja-arvo

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow 0^+} h(t) &= \lim_{t \rightarrow 0^+} g(t) + \left(\frac{g(0^-) - g(0^+)}{\pi} \right) \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) \\ &= g(0^+) + \left(\frac{g(0^-) - g(0^+)}{\pi} \right) \frac{\pi}{2} = \frac{g(0^-) + g(0^+)}{2},\end{aligned}$$

kun taas origoa vasemmalta lähestyttäessä raja-arvo

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow 0^-} h(t) &= \lim_{t \rightarrow 0^-} g(t) + \left(\frac{g(0^-) - g(0^+)}{\pi} \right) \lim_{t \rightarrow 0^-} f(t) \\ &= g(0^-) + \left(\frac{g(0^-) - g(0^+)}{\pi} \right) \frac{-\pi}{2} = \frac{g(0^-) + g(0^+)}{2}.\end{aligned}$$

Näin ollen on funktion g jatkuvan jatkeen määrittelemiseksi perusteltua määritellä lisäksi

$$h(0) = \frac{g(0^-) + g(0^+)}{2}.$$

Näin määriteltynä h on jatkuva pisteessä $t = 0$ ja täyttää lauseen 2.3.5 oletukset, jolloin $S_N h$ suppenee pisteessä $t = 0$. Itse asiassa lauseen 2.3.6 nojalla se suppenee tasaisesti origon ympäristössä, joten jos kumpikaan funktioista $S_N f$ tai $S_N g$ ilmentää Gibbsin ilmiötä origossa, niin tekee toinenkin. Näin siksi, että tasainen suppeneminen tarkoittaa funktioiden arvojen pysyvän koko tarkasteluvälillä luvun $\varepsilon > 0$ päässä toisistaan. Koska siis ramppfunktion f on jo osoitettu ilmentävän Gibbsin ilmiötä origossa ilmentää sitä myös mielivaltainen funktio g .

3.3 Epäjatkuvuuskohta yleisessä pisteessä

Edellä käytiin läpi todistus Gibbsin ilmiön olemassaololle origon ympäristössä, mutta yleistetään tämä vielä ensin pisteeseen $t = t_0$, ja tämän jälkeen numeroituvaan määrään epäjatkuvuuskohtia. Oletetaan, että paloittain sileällä funktiolla $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ on yksi hyppäysepäjatkuvuuskohta pisteessä $t = t_0$. Määritellään lisäksi funktio $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$h(t) = \begin{cases} g(t) + \left(\frac{g(t_0^-) - g(t_0^+)}{\pi} \right) f(t - t_0) & , \quad t \neq t_0, \\ \frac{g(t_0^-) + g(t_0^+)}{2} & , \quad t = t_0. \end{cases}$$

Tällöin raja-arvo

$$\lim_{t \rightarrow t_0^+} h(t) = \lim_{t \rightarrow t_0^-} h(t) = \frac{g(t_0^-) + g(t_0^+)}{2}$$

ja lauseiden 2.3.5 ja 2.3.6 nojalla Fourier'n osasumma $S_N h$ suppenee tasaisesti pisteen t_0 ympäristössä. Näin ollen funktio g ilmentää Gibbsin ilmiötä pisteessä $t = t_0$, sillä funktion $f(t - t_0)$ tiedetään sitä ilmentävän.

Jos taas paloittain sileällä funktiolla g on numeroituva määrä epäjatkuvuuskohtia pisteissä $t_j : j \in \{1, \dots, n\}$, voidaan määritellä funktio $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$h(t) = \begin{cases} g(t) + \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^n (g(t_0^-) - g(t_0^+)) f(t - t_j), & \text{jos } t \neq t_j, \\ \frac{g(t_j^-) + g(t_j^+)}{2}, & \text{jos } t = t_j. \end{cases}$$

Tällöin samanlaisella argumentoinnilla kuin yhden epäjatkuvuuskohdan tapauksessa, voidaan Gibbsin ilmiön olemassaolo osoittaa jokaisen pisteen t_j ympäristössä.

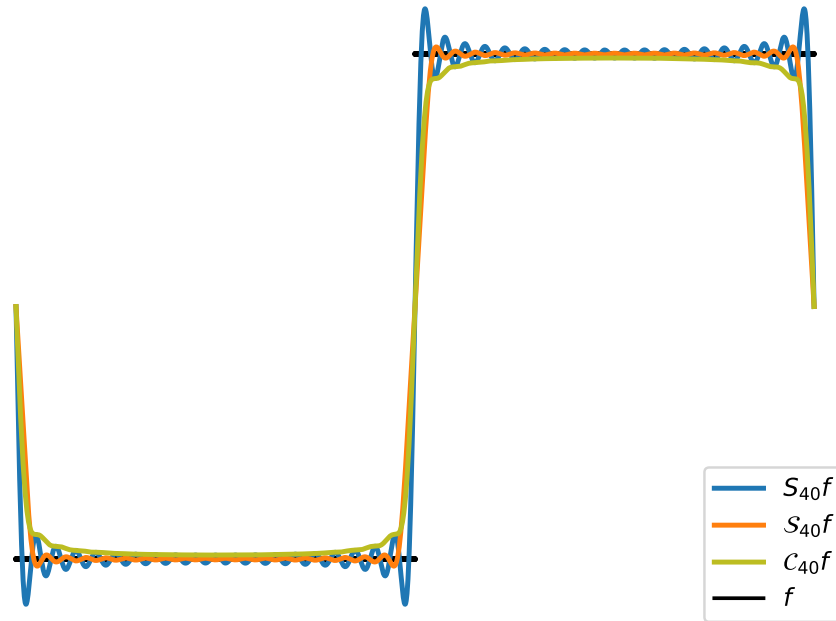
3.4 Menetelmiä Gibbsin ilmiön suodattamiseksi

Insinööriyön näkökulmasta sarjakehitelmien tarkoitus on mahdollistaa funktioiden tarkkojen arvojen approksimoiminen peruslaskutoimitusten avulla tapauksissa, joissa se ei olisi välttämättä muuten mahdollista. Tässä mielessä ongelmia tuottavat erityisesti transsendenttiset funktiot kuten e^x ja $\sin x$. Erilaisissa sarjakehitelmissä on kaikissa kuitenkin omat rajoitteensa, esimerkiksi Taylorin sarjakehitelmä on muodostettavissa vain funktioille, joita voidaan derivoida mielivaltaisen monta kertaa [5, s. 265]. Fourier'n sarjakehitelmä taas voidaan muodostaa varmasti vain jaksollisille funktioille, jotka täyttävät tässäkin työssä esiintyneet, mutta tähän mennessä nimeltä mainitsemattomat Dirichlet'n ehdot [9, s. 17; 4, s. 301]. Lisäksi hyppäysepäjatkuvien funktioiden tapauksessa Fourier'n sarjakehitelmä poikkeaa Gibbs–Wilbrahamin ilmiön vuoksi approksimoitavan funktion arvosta hyppäysepäjatkuvuuskohdan ympäristössä. Fourier'n sarjakehitelmän muodostamisen perusedellytyksiä, kuten funktion jaksollisuutta, paloittaista sileyttä ja integroituvuutta ei tietenkään voi kumota, mutta Gibbsin ilmiön vaikutuksia olisi kyllä paremman approksimoititarkkuuden nimissä mielekästä lieventää, jos vain mahdollista.

Ilmiön pois suodattamiseen voisivat sopia esimerkiksi niin kutsutut *positiiviset ytimet* [2, s. 44]. Siinä, missä Fourier'n sarjakehitelmän muodostamisen edellytykset täyttävän funktion f Fourier'n sarjakehitelmän osasumma $S_N f$ saatiin ilmaistua lauseen 2.2.3 mukaisesti sen ja Dirichlet'n ytimen konvoluutiona $f * D_N$, voidaan samaan tapaan muodostaa funktion f Cesàron osasumma [10, s. 26, 70]

$$\mathcal{C}_N f = \frac{S_0 f + S_1 f + \dots + S_{N-1} f}{N},$$

joka voidaan kirjoittaa positiivisen ytimen K_N ja funktion f konvoluutiona $f * K_N$ [2, s. 44]. Tässä summausmenetelmässä ei esiinny yhtään Gibbsin värähtelyä, mutta sen sijaan ongelmaksi muodostuu Cesàron summauksen pysyminen aina funktion Fourier'n sarjakehitelmän arvojen välissä, onhan kyseessä eräänlainen keskiarvon laskentomenetelmä [11]. Tämä poikkeama itse funktion arvosta nähdään kuvassa 3.2.



Kuva 3.2 Kanttiaalto f , sen Fourier'n osasumma $S_{40}f$, σ -aproksimaatio $\mathcal{S}_{40}f$ ja Cesàron osasumma $\mathcal{C}_{40}f$.

Toinen vaihtoehto Gibbsin värähtelyn pois suodattamiseksi olisi käyttää niin kutsuttua σ -aproksimaatiota [9, s. 35], joka näkyy myös kuvassa 3.2. Tätä menetelmää soveltaessa funktion f Fourier'n sarjakehitelmässä jokaista termiä kerrottaisiin niin kutsutulla *Lanczosin* σ -tekijällä, joka lähteestä riippuen määritellään joko

$$\sigma_n = \operatorname{sinc}\left(\frac{n\pi}{N}\right) \quad \text{tai} \quad \sigma_n = \operatorname{sinc}\left(\frac{n\pi}{2(N+1)}\right),$$

missä N on Fourier'n osasumman viimeinen indeksi [9; 12]. Tällöin kyseessä ei siis olisi alkuperäinen Fourier'n osasumma $S_N f$, vaan funktio $\mathcal{S}_N f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\mathcal{S}_N f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N \sigma_n (a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)).$$

Gibbsin värähtelyä kyllä esiintyy tämänkin funktion tapauksessa, mutta huomattavasti pienemmässä mittakaavassa.

4

Yhteenveto

Työn tavoitteena oli esittää todistus Gibbsin ja Wilbrahamin ilmiön olemassaololle mielivaltaisen hyppäysepäjätkuvuuskohtan omaavan jaksollisen funktion $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tapauksessa. Tavoitteessa myös onnistuttiin, vaikkakin käytettyä todistusmenetelmää voisi luonnehtia tietojenkäsittelytieteissä tunnetun *brute force*-käsitteen avulla. Todistus tehtiin nimittäin pitkälti suoraan Gibbsin ja Wilbrahamin ilmiön määritelmään nojaten, määrittelemällä ensin lukujono (t_n) ja tutkimalla tämän jälkeen funktion $f(t)$ Fourier'n sarjakehitelmän $S_\infty f(t_n)$ paikallisten ääriarvojen esiintymistä funktion g hyppäysepäjätkuvuuskohtien ympäristössä, antamalla jonon (t_n) lähestyä hyppäysepäjätkuvuuskohtaa vasemmalta ja oikealta.

Mainitsemisen arvoista on myös, että jaettuna hyppäysepäjätkuvuuskohtan molemmien puolin, saatiin implisiittisesti korkeimman värähtelypiikin ja itse funktion erotuksen itseisarvoksi likimain 9% hyppäysepäjätkuvuuskohtan korkeudesta. Tulos seuraa laskuissa ilmenneestä likiarvosta

$$\frac{2}{\pi} \text{Si}(\pi) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \text{sinc}(t) dt \approx 1,18,$$

sillä ramppifunktion f Fourier'n sarjakehitelmän osoitettiin suppenevan tasaisesti kohti mielivaltaisen hyppäysepäjätkuvan funktion g sarjakehitelmää, jolloin suhteessa samansuuruinen poikkeama esiintyy myös funktion g ja sen Fourier'n sarjakehitelmän tapauksessa.

Otettiin siis hyppäysepäjätkuvan funktion Fourier'n sarjakehitelmään miten monta termiä hyvänsä, ei värähtelyä saada katoamaan hyppäysepäjätkuvuuskohtan ympäristössä. Värähtelypiikkien hävittämiseksi täytyisi ottaa käyttöön jokin tätä varten kehitetty suodatusmenetelmä [4, s. 303], josta esimerkkeinä tässä tutkielmassa toimivat Cesàron summaus ja σ -approksimaatio.

Siinä, missä Cesàron summauksessa Gibbsin ilmiö saatiin suodatettua kokonaan pois pienin sivuvaikutuksin, σ -approksimaation tapauksessa Gibbsin värähtely ei katoa kokonaan, mutta se pienenee huomattavasti. Jatkotutkimuksena olisikin kiinnostavaa selvittää, olisiko olemassa muitakin Gibbsin ilmiön suodattamiseen soveltuvia menetelmiä, sillä molemmissa tässä esitetyissä menetelmissä on omat puutteensa.

5

Lähteet

- [1] Henry Wilbraham. "On a certain periodic function". *Cambridge & Dublin Math. J.* 3 (1848), s. 198–201.
- [2] Kourosch Raeen. "A Study of The Gibbs Phenomenon in Fourier Series and Wavelets". M.S. Thesis. The University of New Mexico, elokuu 2008.
- [3] Maxime Bôcher. "Introduction to the theory of Fourier's series". *Ann. of Math.* 7.3 (1906), s. 81–152.
- [4] Glyn James. *Modern Engineering Mathematics*. 2nd ed. Prentice-Hall, 2000.
- [5] William F. Trench. *Introduction to Real Analysis*. Faculty Authored and Edited Books & CDs. 7. Trinity University, 2013. URL: <https://digitalcommons.trinity.edu/mono/7>.
- [6] Sheldon Axler. *Measure, Integration & Real Analysis. preliminary edition*. Sheldon Axler, 2018. URL: <http://measure.axler.net/> (viitattu 28.04.2018).
- [7] Gerald B. Folland. *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications*. 2nd ed. Pure and Applied Mathematics: A Wiley-Interscience Series of Texts, Monographs and Tracts. Wiley-Interscience, 1999.
- [8] Reiner Martin. *What is the meaning of χ in this expression? Possibly the Legendre chi function?* 2017. URL: <https://math.stackexchange.com/questions/2539424/what-is-the-meaning-of-chi-in-this-expression-possibly-the-legendre-chi-func> (viitattu 27.11.2017).
- [9] Merja Laaksonen. *Fourier'n menetelmät*. Tampereen yliopisto, 2019.

- [10] Jouko Tervo. *Fourier analyysi*. Kuopion yliopisto, matematiikan ja tilastotieteen laitos, 2007.
- [11] I. I. Volkov. "Cesàro summation methods". Teoksessa: *Encyclopedia of mathematics*. Toim. Michiel Hazewinkel. Springer Science+Business Media B.V. / Kluwer Academic Publishers, 2001. URL: https://www.encyclopediaofmath.org/index.php/Ces%a0ro_summation_methods (viitattu 09.02.2019).
- [12] Eric W. Weisstein. *Lanczos sigma Factor*. MathWorld – A Wolfram Web Resource. URL: <http://mathworld.wolfram.com/LanczosSigmaFactor.html> (viitattu 09.02.2019).