TAMPEREEN TEKNILLINEN YLIOPISTO
TAMPERE UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

MILLA LOHIKAINEN
GEOGEBRA-OPPIMISAIHION KEHITTÄMINEN MONIKULMIOIDEN OPISKELUUN YLÄKOULUSSA

Diplomityö

Tarkastajat: dosentti Jorma Joutsenlahti, lehtori Terhi Kaarakka ja yliopistonlehtori Riikka Kangaslampi

Tarkastajat ja aihe hyväksytty 31. lokakuuta 2018

TIIVISTELMÄ

MILLA LOHIKAINEN: GeoGebra-oppimisaihion kehittäminen monikulmioiden opiskeluun yläkoulussa
Tampereen teknillinen yliopisto
Diplomityö, 80 sivua, 5 liitesivua
Lokakuu 2018
Teknis-luonnontieteellinen DI-tutkinto-ohjelma
Pääaine: Matematiikka
Tarkastajat: dosentti Jorma Joutsenlahti, lehtori Terhi Kaarakka ja yliopistonlehtori Riikka Kangaslampi

Avainsanat: GeoGebra, geometria, matematiikan opetus, kehittämistutkimus

Tieto- ja viestintäteknologian käyttö on yleistynyt niin viihdekäytössä kuin koulutuksessa ja työmaailmassakin. Tämän vuoksi jo peruskoululaisten tulisi harjoitella erilaisten ohjelmistojen käyttöä ja niiden käytön opettelua. Tässä diplomityössä kehitettiin yläkoulun geometrian opiskeluun oppimisaihio eli tehtäväkokoelma, joka toteutetaan kokonaan GeoGebralla. Oppimisaihion tehtävien aiheena on monikulmioiden geometria, sillä se on tärkeä geometrian osa-alue ja sopii erinomaisesti GeoGebralla toteutettavaksi. GeoGebra on erityisesti opetuskäyttöön suunniteltu dynaamisen matematiikan ohjelmisto, jossa on tarjolla työkaluja monille matematiikan osa-alueille.

Oppimisaihion kehittäminen tapahtui kehittämistutkimuksena. Kehittämistutkimus koostuu useista sykleistä, joissa kehittämistuotosta muokataan yhä paremmaksi. Yksi sykli koostuu yleensä seuraavista vaiheista: ongelma-analyysi, kehittämisprosessi, kehittämistuotos ja testaus. Ongelma-analyysissä käydään läpi tehtävien taustalla olevaa geometriaa ja erilaisia näkökulmia tehtävien kehittämiseen. Tärkeimpinä näkökulmina ovat hahmottavan geometrian opiskelu, oppilaiden motivointi, metakognitiivisten taitojen harjoittaminen, tutkiva ja yhteisöllinen oppiminen sekä perusopetuksen opetussuunnitelman noudattaminen. Perusopetuksen opetussuunnitelman yksi laaja-alaisista osaamisen kokonaisuuksista onkin tieto- ja viestintäteknologinen osaaminen.

Kehittämisprosessista kerrotaan ne teknologiset ja pedagogiset ratkaisut, joita tehtiin oppimisaihiota toteutettaessa. Oppimisaihion, eli kehittämistutkimuksen kontekstissa kehittämistuotoksen, valmistumisen jälkeen tehtävien toimivuutta testattiin Ylöjärven Yhtenäiskoulun yhdellä 7. luokalla ja yhdellä 8. luokalla. Oppilaat tekivät 12 oppitunnin aikana oppimisaihion tehtäviä ja täyttivät tehtävien käytettävyyteen liittyviä kyselyitä. Oppilaiden kyselyihin antamien vastausten, tunneilla tehtyjen havaintojen sekä oppilaiden tuottamien GeoGebra-tehtävien vastausten perusteella tehtäviä korjattiin muun muassa tarkentamalla tehtävänantoja ja korjaamalla virheitä.

Lopulta oppimisaihio viimeisteltiin ja se julkaistiin GeoGebran sivuilla osoitteessa https://ggbm.at/jephwdbr. Lisäksi Matemaattisten Aineiden Opettajien Liiton MAOL:n verkkosivuilla julkaistiin ohje oppimisaihion käyttämisestä.

ABSTRACT

MILLA LOHIKAINEN: Designing of GeoGebra Learning Object for Studying Polygons in Upper Comprehensive School
Tampere University of Technology
Master of Science Thesis, 80 pages, 5 Appendix pages
October 2018
Degree Programme in Science and Engineering
Major: Mathematics
Examiners: docent Jorma Joutsenlahti, lecturer Terhi Kaarakka and university lecturer Riikka Kangaslampi

Keywords: GeoGebra, geometry, teaching mathematics, design-based research

Information and communication technology have become an important part of both entertainment and education as well as working life. For this reason, students in comprehensive schools should practice using different systems and learning to use those systems. In this Master of Science Thesis, a learning object for upper comprehensive school was designed using GeoGebra software. The learning object's subject is polygons and their geometry because it is an important subsection of geometry and it is a good subject to execute using GeoGebra. GeoGebra is an interactive mathematics software intended for learning and teaching mathematics and it includes tools for various fields of mathematics.

The learning object was produced in a design-based research. A design-based research consists of multiple cycles in which the design solution is improved. Usually one cycle consists of following phases: problem analysis, design procedure, design solution and testing. The geometry behind the exercises and different points of view of designing them are introduced in problem analysis. The most important points of view are perceiving geometry, motivating students, teaching metacognitive skills, progressive inquiry, collaborative learning and obeying national core curriculum. There is a pervasive learning entity which emphasizes the importance of skills of using information and communication technology in national core curriculum for comprehensive school.

The technological and pedagogical decisions made while designing the learning object are described after the problem analysis. Once the learning object was completed it was tested in one 7th grade group and one 8th grade group in a comprehensive school (Ylöjärven Yhtenäiskoulu). The students used 12 lessons to complete the exercises in the learning object. They also answered questionnaires about the usability of the exercises. The learning object was further improved based on these answers, observations during the lessons and students' output on the exercises. These improvements were for example specifying the instructions and fixing errors.

Finally, the learning object was finalized and published on GeoGebra website on address https://ggbm.at/jephwdbr. Additionally, the learning object and instructions for its use were published in MAOL's (Union of Finnish Mathematics Teachers, Matemaattisten Aineiden Opettajien Liitto) website.

ALKUSANAT

Aina kannattaa avata suunsa, sillä koskaan ei tiedä mihin se johtaa. Tämän diplomityön syntyminen oli onnellisten sattumien summa, kun sain kesätyöpaikkani kautta yhteyden Tuula Havoseen, joka toimii Ylöjärven Yhtenäiskoulussa matemaattisten aineiden opettajana. Tämän lisäksi Tuula toimii aktiivisesti Matemaattisten Aineiden Opettajien Liitossa MAOL:ssa. Näistä lähtökohdista Tuula pystyi kertomaan minulle, millaiselle diplomityölle voisi matematiikan opettajien keskuudessa olla tarvetta. Päädyin itseäni kiinnostavaan aiheeseen eli geometriaan ja GeoGebran käyttöön opetuksessa. Suuret kiitokset Tuulalle diplomityön aiheesta, tehtävien testauspaikasta sekä kannustuksesta koko työn ajan.

Moni ihminen on lukenut tätä työtä ja antanut siitä palautetta, mikä on vain rikkaus. Olen saanut tarkastajiltani Jorma Joutsenlahdelta, Terhi Kaarakalta ja Riikka Kangaslammelta paljon vapautta tehdä työstä oman näköiseni sekä hyviä kommentteja työn parantamiseksi. Erityiskiitos Riikalle LaTeXin kiemuroiden ja matemaattisten todistusten kanssa auttamisesta. Lisäksi kiitos myös äidilleni, joka luki diplomityötäni sen eri vaiheissa ja antoi siitä erinomaista palautetta.

Lopuksi haluan vielä kiittää kaikkia niitä 38 oppilasta, jotka testasivat alusta asti itse tuottamiani GeoGebra-tehtäviä ja antoivat niistä rehellistä, osuvaa ja kannustavaa palautetta.

Tampereella, 21.12.2018

Milla Lohikainen

SISÄLLYSLUETTELO

LYHENTEET JA MERKINNÄT

AB	Jana, jonka päätepisteet ovat A ja B
$\triangle ABC$	Kolmio, jonka kärkipisteet ovat A, B ja C
$\angle A$	Kulma, jonka kärkipiste on A
$\angle ABC$	Kulma, jonka oikealla kyljellä on piste A, kärki on piste B ja vasemmalla kyljellä on piste C
$\square ABCD$	Nelikulmio, jonka kärkipisteet ovat A, B, C ja D
$A,B,C,\ldots$	Pisteitä
$a,b,c,\ldots$	Suoria
AB	Suora, joka kulkee pisteiden A ja B kautta
$AB \cong CD$	Yhtenevyysrelaation kahden janan, AB ja CD, välillä

1. JOHDANTO

”On hieman ongelmallista, kun opiskelijat jakavat matematiikan ‘oikeaan’ matematiikkaan ja tietotekniikkaan. Miten ne voidaan erottaa toisistaan? Tietotekniikka on myös osa matematiikkaa, sillä tietotekniikka on matematiikan keskeinen työväline.” toteaa ylioppilaskokeiden sähköistymisen projektipäällikkö Matti Lattu Ylen haastattelussa [18]. Tietotekniikan kehittyminen ja matematiikassa käytettävien ohjelmistojen yleistyminen on mahdollistanut jokaiselle pääsyn matematiikkaohjelmistoihin. Jotta ohjelmistojen käyttö onnistuisi myöhemmissä opinnoissa ja aikanaan työelämässä mahdollisimman luontevasti, olisi niiden käytön harjoittelu hyvä aloittaa jo peruskoulussa. Ohjelmistojen käyttö ei kuitenkaan ole itse tarkoitus, vaan niillä tulisi pystyä oppimaan uusia asioita mielekkäästi. Harvalla opettajalla on kuitenkaan arjessa mahdollisuuksia tehdä jokaiselle tunnille uusia digitaalisia materiaaleja, joiden pedagoginen mielekkyys olisi tarkoin mietitty. Yksi matematiikan sähköisissä ylioppilaskokeissa sallittu ohjelma on GeoGebra, joka on erityisesti opetuskäyttöön suunniteltu dynaaminen matematiikan ohjelmisto. Tässä diplomityössä kehitetään opettajien avuksi yläkouluun sopiva geometrian oppimisaihio, joka toteutetaan GeoGebralla. Oppimisaihio on yhden asiasisällön muodostama digitaalinen oppimateriaali, jota voidaan käyttää opetuksessa ja oppimisessa ja jota voidaan jakaa käyttäjien kesken [25, 29].

GeoGebra tarjoaa mahdollisuuksia havainnollistaa geometrisia käsitteitä uudella tavalla, ja sen dynaamisuus mahdollistaa interaktiivisten oppimateriaalien luomisen. GeoGebraa voi käyttää erilaisten pelien alustana ja sillä voi luoda valmiita pohjia, joita oppilas täydentää. Toisaalta oppilaiden on hyvä oppia myös itse luomaan sisältöä GeoGebralla aloittaen tyhjästä. Ohjelmisto perustuu pitkälti visuaaliseen käyttöliittymään, jolloin sen käytön opettelu on nopeaa ja helppoa. GeoGebran mahdollisuudet opetuskäytössä ovat lähes rajattomat. Lisäksi verkko-oppimateriaali tarjoaa hyviä mahdollisuuksia eriyttää opetusta. GeoGebraa voi käyttää lähes kaikkien matematiikan osa-alueiden opiskelussa, sillä siinä on toimintoja niin geometriaan, algebraan, kuvaajien piirtoon, taulukkolaskentaan ja tilastotieteeseen kuin analyysiinkin. Tässä kehittämistutkimuksessa keskitytään nimenomaan geometriaan, sillä se on peruskoulun päättävien oppilaiden heikoimmin osattu matematiikan osa-alue [16].

Tehtävien kehittäminen tapahtuu kehittämistutkimuksena, josta tässä diplomityössä toteutetaan vain ensimmäinen sykli. Kehittämistutkimuksessa käydään useita kertoja läpi sykli, joka koostuu ongelma-analyysista, kehittämisprosessista sekä kehittämistuotoksesta ja sen arvioinnista. Tuotoksen arvioinnin jälkeen siirrytään uudelleen ongelma-analyysiin ja aloitetaan sykli alusta. Kehittämistutkimus on erityisen käyttökelpoinen opetuksen ja oppimateriaalien kehittämisessä. Se yhdistää materiaalin tuottamisen käytännön puolen tutkimukseen, sillä kaikki materiaalin suhteen tehtävät päätökset on oltava perusteltavissa. Lisäksi kehittämistutkimuksiin kuuluu kehittämistuotoksen testaaminen autenttisessa ympäristössä, jolloin siitä saadaan osuvaa palautetta jatkokehittämistä varten.

Tässä työssä määritellään aluksi kehittämisen tavoite eli käydään läpi opetettavan geometrian luonnetta sekä aiheeseen liittyviä aiempia tutkimuksia ja kirjallisuutta. Tärkeimpinä näkökulmina oppimisaihion kehittämisessä ovat opetussuunnitelman mukainen tieto- ja viestintäteknologian järkevä käyttö osana opetusta, oppilaiden motivointi ja metakognitiivisten taitojen oppiminen sekä tutkiva ja yhteisöllinen oppiminen. Metakognitiiviset taidot tarkoittavat oppimaan oppimisen taitoja sekä kykyä tarkkailla omaa oppimista ja osaamisen taso. Lisäksi oppimisaihiossa korostetaan geometrian hahmottavaa oppimista laskennallisen osaamisen sijaan.

Edellä esitetyt näkökulmat huomioiden tuotetaan kehittämistuotos eli oppimisaihio, jonka onnistumista arvioidaan. Tässä diplomityössä arviointi tapahtui Ylöjärven Yhtenäiskoulun kahdella ryhmällä. Oppilaiden tekemät tehtävät jäivät tutkijalle nähtäväksi, ja lisäksi jokaiseen tehtävään liittyi oppilaan omaa kokemusta mittaava itsearviointikysymys. Kuuteen erityyppiseen tehtävään liittyi myös laajempi kysely, jossa oleviin avoimiin kysymyksiin oppilaat vastasivat. Vastaukset teemoiteltiin avainsanojen mukaan ja niiden sekä oppilailta tunneilla saadun palautteen ja havaintojen perusteella päätettiin, miten tehtäväkokonaisuutta kehitettiin vielä ennen julkaisua.

Oppilaat eivät olleet juurikaan käyttäneet GeoGebraa ennen tätä tutkimusta, joten varsinkin ensimmäisissä tehtävissä oppilaat kaipasivat tarkempia ohjeita. Tämän lisäksi suurimmat korjauksen aiheet monissa tehtävissä olivat yksinkertaisesti tehtävissä olleet virheet. Joissakin tehtävissä pisteitä pystyi raahaamaan sellaisiin paikkoihin, joihin niitä ei pitäisi raahata, ja joistakin tehtävistä puuttui tarvittavia työkaluja. Oppilaiden antamien huomioiden ja sekä tunneilla tehtyjen havaintojen että oppilaiden tuottamien vastausten perusteella tehtävänantoja tarkennettiin ja niiden virheitä korjattiin. Myös muutamien tehtävien paikkoja vaihdettiin keskenään. Lopuksi tehtävät julkaistiin kaikkien käytettäviksi GeoGebran materiaalisivuilla ja niiden käyttämiseksi kirjoitettiin ohjeet Matemaattisten Aineiden Opettajien Liiton eli MAOL:n verkkosivuille.

Tässä työssä määritellään aluksi kehittämistutkimus ja sen vaiheet (luku 2), jotta työn rakenne näyttäytyisi selkeämpänä. Tämän jälkeen käydään läpi matemaattista teoriaa geometriasta siltä osin kuin se liittyy kehitettävään oppimisaihioon (kappale 3.1). Kappaleessa 3.2 käydään läpi nimenomaan geometrian oppimiseen liittyviä näkökulmia ja kappaleessa 3.3 oppimisaihion kehittämiseen liittyviä näkökulmia. GeoGebraa ja sen toimintaa esitellään kappaleessa 3.4. Kehittämistutkimuksen vaiheista kehittämisprosessi kuvataan luvussa 4 ja kehittämistuotos luvussa 5. Luvussa 6 kerrotaan siitä, miten tehtävien toimivuutta testattiin oikeassa kouluympäristössä ja millaisia tuloksia testauksessa saatiin. Tutkimuksen tulosten perusteella oppimisaihiota paranneltiin julkaistavaan muotoon. Lopuksi käydään vielä läpi tämän työn tärkeimmät johtopäätökset kappaleessa 7.

2. KEHITTÄMISTUTKIMUS

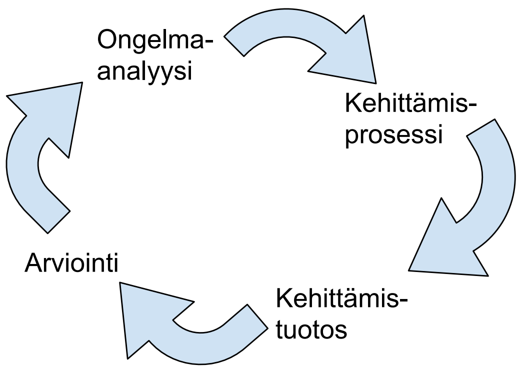
Kehittämistutkimus on melko uusi, 1990-luvulta lähtien kehittynyt tutkimusmenetelmä erityisesti opetuksen tutkimukseen. Se on kehittynyt pienentämään kuilua teoreettisen tutkimuksen ja jokapäiväisten opetustilanteiden välillä. Lisäksi kehittämistutkimuksella halutaan lisätä ”käyttökelpoisen tiedon” määrää opetuksesta. [66] Perinteisesti tutkimuksilla on testattu valmiin teorian toimivuutta käytännössä. Kehittämistutkimus tuo teorian kehittämisen osaksi tutkimusprosessia. [7] Koska kyseessä on niin uusi tutkimusmenetelmä, sen määritelmä ei ole vielä vakiintunut yksiselitteiseksi. Suomeksi siitä käytetään jopa useita eri nimiä, kuten kehittämistutkimus ja design-tutkimus, joista tässä diplomityössä käytetään kehittämistutkimusta. Kiinnostus kehittämistutkimusta kohtaan on kuitenkin melko suurta, ja kehittämistutkimusten vuosittainen julkaisumäärä onkin kasvanut koko 2000-luvun. [51] Kehittämistutkimusta käytetään erityisesti innovatiivisten oppimisympäristöjen ja oppimateriaalien luomiseen ja kehittämiseen [66].

Kehittämistutkimus syntyi 1990-luvulla vastaamaan kasvatustieteiden tutkimuksen ongelmiin. Toisaalta kasvatustieteen tutkimus oli vahvasti käytännönläheistä, jolloin sitä kritisoitiin liian epätieteellisenä, ja toisaalta taas liian tieteellistä irrotettuna kasvatuksen ja opetuksen luontaisesta ympäristöstä. Oppiminen on monimutkainen prosessi, ja sen irrottaminen ympäristöstään yksinkertaistaa ongelmia ja niiden vastauksia liikaa. [66] Kehittämistutkimuksen tärkeimpänä tavoitteena on kehittää opetusta paremmaksi [7]. Se yhdistää tutkijoita ja opettajia toimimaan yhdessä tämän suuremman tavoitteen saavuttamiseksi niin, että jokainen työskentelee vahvuusalueellaan mutta oppii muilta uutta. Toisaalta yhteistyössä eri alojen ammattilaisten välillä on aina väärinymmärryksen riski. [28]

Kehittämistutkimusta on vaikea määritellä sen takia, että menetelmänä se on hyvin rajoittamaton ja toisaalta se vaatii paljon luovuutta, mikä tekee jokaisesta tutkimuksesta hieman erilaisen [7]. Kehittämistutkimuksen määritelmiä yhdistää kuitenkin se, että kyseessä on iteratiivinen, syklinen prosessi. Tarkoituksena on siis kehittää tuotosta, tutkia sen soveltuvuutta ja tämän jälkeen tutkimusten perusteella parantaa sitä. Tuotoksena voi olla esimerkiksi fyysinen tai verkkopohjainen oppimateriaali, toimintamalli tai opetussuunnitelma. Lisäksi kehittämistutkimuksissa yhdistyy teoria ja käytäntö, tutkiminen ja kehittäminen. Teorian perusteella tehdään kehitystyötä, josta toivottavasti syntyy uutta teoriaa. Tarkoituksena on kehittää toimivia ratkaisuja todellisiin ongelmiin, tutkia ratkaisun toimivuutta pienessä mittakaavassa ja lopuksi yleistää ratkaisu suureen mittakaavaan. Kehittämistutkimus myös yhdistelee kvalitatiivista ja kvantitatiivista tutkimusotetta sekä erilaisia tutkimusmenetelmiä. Nimenomaan opetuksen kehittämistutkimuksessa on tarkoituksena ”kehittää opetusta todellisissa tilanteissa systemaattisesti, joustavasti ja iteratiivisesti” [51, s. 12]. Design-Based Research Collective puolestaan määrittelee laadukkaan kehittämistutkimuksen sykliseksi, jatkuvaa kehittymistä sisältäväksi, kentälle siirrettäviä teorioita luomaan pyrkiväksi ja tarkasti dokumentoiduksi tutkimukseksi. [51, 66]

Kehittämistutkimuksessa kehitettävää ilmiötä tutkitaan sen luonnollisessa ympäristössä, johon kuuluvat esimerkiksi fyysinen luokkatila ja oppilaat. Tutkimukseen osallistuvat henkilöt osallistuvat kehittämisprosessiin eivätkä ole perinteisessä mielessä koehenkilöitä. Kehittämistutkimuksen vaiheet ovat ongelma-analyysi, kehittämissuunnitelman laatiminen ja kehittämissyklit. Kehittämissykli koostuu kehittämis-, arviointi- ja raportointivaiheista, joita toistetaan tarvittava määrä. [51] Usein kehittämistutkimuksen toteuttamiseen osallistuu sekä opetushenkilökuntaa että tutkijoita, jolloin käytännön opetuksen ja tutkimuksen näkökulmat kohtaavat [66].

Vaikka Edelsonin [7] mukaan kehittämistutkimuksia on hyvin monenlaisia, kaikki koostuvat hänen mukaansa kuvan 2.1 mukaisista neljästä vaiheesta.



Kuva 2.1. *Kehittämistutkimuksen rakenne. Kuvassa oleva kierros voi toistua kehittämistutkimuksessa useita kertoja. [7]*

1. *Ongelma-analyysi* luonnehtii kehittämisen tavoitteet ja tarpeet sekä haasteet, joita kehittämisen asiayhteydessä voi ilmetä. Ongelma-analyysi on kehittämisen tarpeiden ilmaisemista.
2. *Kehittämisprosessissa* kuvataan ne henkilöt ja työvaiheet, joita tarvitaan työn tavoitteiden saavuttamiseksi.
3. *Kehittämistuotos* kuvaa lopullista ratkaisua, johon kehittämisessä päädytään.
4. *Arviointi* tehdään kehittämistuotoksen luonnollisessa käyttöympäristössä. Sen perusteella kehittämistuotosta lähdetään kehittämään edelleen paremmaksi.

Tämä diplomityö rakentuu näiden vaiheiden pohjalle. Myös diplomityön kirjallinen raportointi noudattaa näiden vaiheiden järjestystä.

Kehittämistutkimusten luotettavuudesta on keskusteltu paljon (muun muassa [7]). Yleensä kehittämistutkimusta verrataan perinteiseen teoriaa testaavaan tutkimukseen, jolloin kehittämistutkimus vaikuttaa yksittäistapaukseen keskittyvältä ja sen tulokset epävarmoilta. Teoriaa testaavissa tutkimuksissa on yleensä paljon tutkimusaineistoa, jota voidaan analysoida tilastollisilla menetelmillä. Kehittämistutkimuksissa tutkimusaineiston määrä on usein vähäisempi. Kehittämistutkimuksen vahvuuksia ovat kuitenkin uuden teorian kehittely sekä vahva pohjautuminen todellisiin tilanteisiin. Kehittämistutkimukset ovat kuvailevia, mutta tilanteesta riippuen niissä voidaan hyödyntää myös perinteisempien tutkimusmenetelmien keinoja. [7]

Kehittämistutkimus on opinnäytetyönä melko haastava mutta antoisa tutkimusmenetelmä. Opinnäytetyössä kehittämistutkimuksen pitää vastata sekä opinnäytetyön vaatimuksiin että luotettavan kehittämistutkimuksen vaatimuksiin. Opinnäytetöiden rajatun työmäärän vuoksi niissä tehdään yleensä yksi tai kaksi kehittämissykliä. Helsingin yliopiston kemian opettajankoulutusyksikössä tehdään paljon kehittämistutkimuksia pro gradu -tutkielmina, ja opiskelijat ovat pitävät kehittämistutkimusten tekemisestä. Niiden koetaan erityisesti tukevan ammatillista kehittymistä sekä ohjaavan tutkivaa opettamista kohti. Kehittämistutkimuksen tekeminen kehittää niin oppimateriaalin luomisen kykyä kuin tutkimustaitoja, jotka molemmat ovat tärkeitä taitoja tulevassa opettajan ammatissa. [2]

3. TEOREETTINEN VIITEKEHYS

Tässä luvussa kuvataan kehittämistyön taustoja kolmesta eri näkökulmasta. Aluksi käydään läpi Eukleideen tasogeometriaa siltä osin kuin se liittyy kehitettävän oppimisaihion aiheeseen eli monikulmioihin (kappale 3.1). Tämän jälkeen käsitellään oppimisen teoriaa ja nimenomaan geometrian oppimista (kappale 3.2). Lopuksi käydään läpi oppimisaihion kehittämiseen liittyviä näkökulmia edeten abstraktimmista näkökulmista kohti konkreettisempia (kappale 3.3). Erikseen käsitellään GeoGebraa, sen toimintaa ja sen käytöstä tehtyjä tutkimuksia (kappale 3.4). Tässä käytyjen teorioiden ja tutkimusten kautta määritellään kehittämistutkimuksen lopulliset tavoitteet ja keinot, joita tavoitteisiin pyrkimiseen käytetään.

3.1 Eukleideen tasogeometria

Geometria on matematiikan ala, joka tutkii kuvioita ja kappaleita sekä niiden ominaisuuksia. Geometria voidaan jakaa useisiin osa-alueisiin, mutta tässä diplomityössä keskitytään yläkoulussa opiskeltavaan euklidiseen geometriaan. Tämän luvun päälähteinä on käytetty Lehtisen, Merikosken ja Tossavaisen Johdatus tasogeometriaan -kirjaa [35] sekä Matti Lehtisen Geometrian perusteita -kurssimonistetta [34], eikä niitä näin ollen ole mainittu enää myöhemmin luvussa lähteinä.

Eukleideen tasogeometria on affiini järjestelmä, joka koostuu perusobjekteista ja näiden välisistä perussuhteista. Perusobjektit ja -suhteet noudattavat sääntöjä, joita kutsutaan *aksioomiksi*. Aksioomat ovat keskenään ristiriidattomia, toisistaan loogisesti riippumattomia ja lisäksi aksioomajärjestelmä on täydellinen. Viimeinen ehto tarkoittaa sitä, että aksioomat kuvaavat järjestelmän loogisen rakenteen yksiselitteisesti. [42]

3.1.1 Liittymisaksioomat

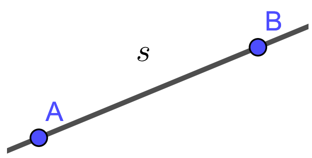
Eukleideen geometria esitetään tässä David Hilbertin (1862–1943) järjestelmän mukaisesti, sillä nykyaikaisesti aksiomatisoituna Eukleideen geometria on Hilbertin geometrian erikoistapaus. Määritellään aluksi muutamia peruskäsitteitä, joiden pohjalle Eukleideen geometrian aksioomat rakentavat. Nämä peruskäsitteet ovat *taso*, *piste* ja *suora*.

Määritelmä 3.1.

1. *Taso* on ominaisuudeton, struktuuriton ja epätyhjä perusjoukko.
2. *Pisteet* ovat tason alkioita. Pisteitä merkitään isoilla kirjaimilla $A, B, \ldots$.
3. *Suorat* ovat tason tiettyjä, epätyhjiä osajoukkoja. Suoria merkitään pienillä kirjaimilla $a, b, \ldots$.

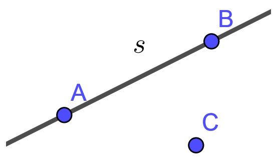
Pelkästään näistä joukoista ei vielä ole paljoa hyötyä. Tason, pisteiden ja suorien muodostaman järjestelmän rakennetta rajoitetaan kuitenkin säännöillä, jotka kuvaavat sitä, miten pisteet ja suorat liittyvät toisiinsa. [42] Kahden liittymisaksiooman sisältö kuvailee geometrian lähtökohtia. Kahden pisteen kautta kulkee aina yksi ja vain yksi suora. Lisäksi taso koostuu vähintään kolmesta pisteestä, jotka eivät ole samalla suoralla.

Aksiooma 1 (Ensimmäinen liittymisaksiooma): *Jokaista kahta tason pistettä A ja B kohti on olemassa täsmälleen yksi sellainen suora s, että* $A \in s$ *ja* $B \in s$. *Tällöin voidaan myös merkitä* $s = AB$. *(Kuva 3.1).*



Kuva 3.1. *Ensimmäinen liittymisaksiooma. Jokaista kahta pistettä yhdistää täsmälleen yksi suora.*

Aksiooma 2 (Toinen liittymisaksiooma): *a) Jokaisella suoralla on ainakin kaksi pistettä. b) Tasossa on ainakin kolme pistettä, jotka eivät ole samalla suoralla. (Kuva 3.2).*



Kuva 3.2. *Toinen liittymisaksiooma. On olemassa pisteet A ja B, jotka ovat samalla suoralla, ja kolmas piste C, joka ei ole samalla suoralla.*

Liittymisaksioomat kuvaavat pisteen, suoran ja tason välisiä yhteyksiä. Kahden suoran yhteistä pistettä kutsutaan *leikkauspisteeksi*. Aksioomista 1 ja 2 seuraa Lause 3.2, jonka mukaan suorien leikkauspiste on yksikäsitteinen.

Lause 3.2. *Tason kahdella eri suoralla on joko yksi leikkauspiste tai ei yhtään leikkauspistettä.*

Todistus. Olkoot suorat a ja b, $a \neq b$, ja olkoon niillä yhteinen piste A. Jos niillä on toinen yhteinen piste $B \neq A$, ne ovat Aksiooman 1 mukaan samat suorat. Koska suorat ovat eri suorat, niillä ei voi olla kahta tai enempää yhteisiä pisteitä, joten niillä on yksi yhteinen piste tai ei yhtään yhteistä pistettä. $\square$

3.1.2 Välissäoloaksioomat ja Paschin aksiooma

Kun pisteitä on useampi kuin kaksi, niiden välillä vallitsee relaatio *välissä*, jonka seuraavat aksioomat määrittelevät. Välissäoloaksioomista seuraa, että suora on päättymätön, sillä suoralla kahden pisteen muodostaman välin ulkopuolelta löytyy aina uusi piste (Aksiooma 5).

Aksiooma 3 (Ensimmäinen välissäoloaksiooma): *a) Jos piste B on pisteiden A ja C välissä, niin pisteet A, B ja C ovat suoran AC eri pisteitä. b) Tällöin pisteet A, B ja C ovat myös suoran CA eri pisteitä.*

Aksiooma 4 (Toinen välissäoloaksiooma): *Jos A ja B ovat eri pisteitä, niin suoralla AB on sellainen piste C, että piste B on pisteiden A ja C välissä.*

Aksiooma 5 (Kolmas välissäoloaksiooma): *Kolmesta saman suoran pisteestä enintään yksi on kahden muun välissä.*

Määritellään seuraavaksi muutama jatkon kannalta hyödyllinen käsite eli *jana*, *puolisuora* ja *kolmio*. Näihin käsitteisiin palataan tarkemmin osiossa 3.1.3, mutta niitä tarvitaan nyt jo lauseiden todistamisessa. Kaikki aksioomat lukuun ottamatta Aksioomaa 1 voidaan sovittaa koskemaan sekä janoja että suoria.

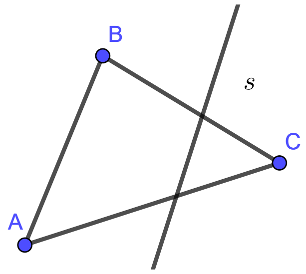
Määritelmä 3.3. Olkoot A ja B pisteitä.

1. Pisteiden A ja B välistä osuutta suorasta kutsutaan *janaksi* ja merkitään samoin kuin suoraa eli AB. Asiayhteydestä selviää, puhutaanko suorasta vai janasta. Pisteitä A ja B kutsutaan janan *päätepisteiksi*. Pisteiden A ja B välissä on piste C, joka on yhtä kaukana kummastakin päätepisteestä. Pistettä C kutsutaan janan *keskipisteeksi*.
2. *Puolisuora* tarkoittaa sitä pisteen A kautta kulkevaa suoran osaa, joka on toisella puolella pistettä A tämä piste mukaan luettuna. Pistettä A kutsutaan puolisuoran *päätepisteeksi*. [67]

Määritelmä 3.4. *Kolmio* muodostuu kolmesta pisteestä A, B ja C, jotka eivät ole samalla suoralla, sekä janoista, jotka yhdistävät nämä pisteet. Pisteet A, B ja C ovat kolmion *kärkiä* ja janat AB, BC ja CA ovat kolmion *sivuja*. Kolmiota voidaan merkitä sen kärkipisteiden mukaisesti $\triangle ABC$. [67]

Paschin aksiooma tarkoittaa käytännössä sitä, että suora leikkaa vähintään kahta kolmion sivua. Paschin aksiooman sisältämää tietoa käytettiin Eukleideen Alkeet-kirjassa, mutta sitä ei perusteltu mitenkään. Saksalainen Moritz Pasch (1843–1930) esitti seuraavan aksiooman korjaamaan tätä aukkoa.

Aksiooma 6 (Pasch): *Olkoot A, B ja C pisteitä, jotka eivät ole samalla suoralla ja olkoon s sellainen suora, että A, B, C $\notin$ s. Jos s leikkaa janan AB, niin se leikkaa ainakin toisen janoista AC ja BC. (Kuva 3.3).*



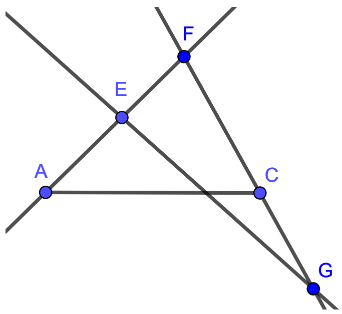
Kuva 3.3. *Paschin aksiooma. Suora s leikkaa janan AC, jolloin se leikkaa myös janan BC.*

Aiemmista aksioomista ja erityisesti Paschin aksioomasta 6 seuraa, että kahden pisteen välissä on ainakin yksi piste (Lause 3.6). Todistetaan myöhemmin myös Paschin aksioomaan liittyvä Lause 3.7, jonka mukaan suora leikkaa täsmälleen kahta kolmion sivua. Seuraavaksi käsitellään kuitenkin Aksioomaa 5 täydentäviä tuloksia, eli kolmesta suoran pisteestä täsmälleen yksi on kahden muun välissä (Lause 3.5) ja että kahden suoran pisteen välissä on ainakin yksi piste (Lause 3.6).

Lause 3.5. *Jos eri pisteet A, B ja C ovat samalla suoralla, niistä yksi on kahden muun välissä.*

Todistus. Katso [35, s. 16–17]. □

Lause 3.6. *Jos A $\neq$ C, on olemassa ainakin yksi piste, joka on pisteiden A ja C välissä.*



Kuva 3.4. *Pisteiden A ja C välissä on ainakin yksi piste (Lause 3.6).*

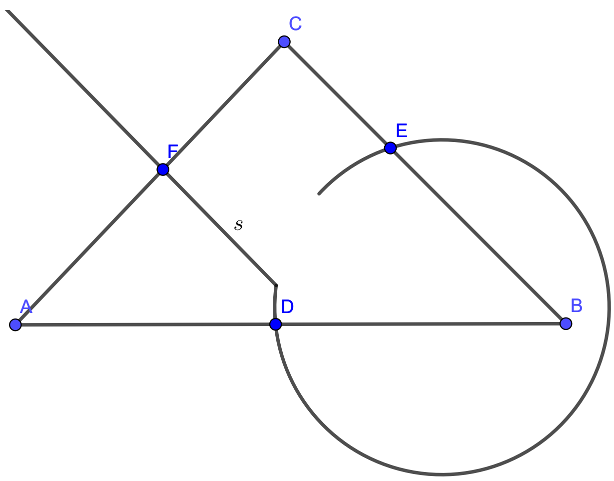
Todistus. Kuva 3.4 kuvaa todistuksessa valittavia pisteitä ja suoria. Aksiooman 2 mukaan on olemassa piste E, joka ei ole janalla AC. Koska $A \neq E$, Aksiooman 1 mukaan $AC \neq AE$. Nyt suoralla AE on Aksiooman 4 mukaan olemassa piste F. Edelleen, koska $F \neq C$, on Aksiooman 1 mukaan $AC \neq CF$. Nyt suoralla CF on Aksiooman 4 mukaan piste G. Koska piste F ei ole suoralla AC, nämä kolme pistettä muodostavat kolmion $\triangle ACF$. Suora GE leikkaa suoran AF. Nyt Aksiooman 6 mukaan suora GF leikkaa joko janan AC tai suoran CF. Jos suora GF leikkaisi suoran CF, ne olisivat samat suorat. Koska tilanne ei ole tämä, on suoran GF leikattava jana AC. Lauseen 3.2 mukaan kahdella suoralla on täsmälleen yksi leikkauspiste, ja nyt tämä leikkauspiste sijaitsee janalla AC pisteiden A ja C välissä. □

Lause 3.7. *Jos suora s leikkaa kolmion sivut AB ja BC, se ei leikkaa sivua CA.*

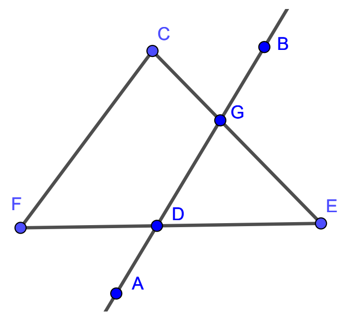
Todistus. Tehdään vastaoletus, että suora s leikkaa kaikkia kolmion sivuja AB, BC ja CA (kuva 3.5a). Olkoot suorien s ja AB leikkauspiste D, suorien s ja BC leikkauspiste E ja suorien s ja CA leikkauspiste F.

Nyt Lauseen 3.5 mukaan yksi näistä kolmesta pisteestä (D, E, F) on kahden muun välissä. Oletetaan, että piste D on pisteiden F ja E välissä. Koska suora EF leikkaa kolmion sivuja, piste C ei ole suoralla EF. Nämä kolme pistettä muodostavat siten kolmion $\triangle CEF$ (kuva 3.5b).

Koska piste D on suoralla EF ja toisaalta piste D on suoralla AB, suora AB leikkaa kolmion sivun EF. Aksiooman 6 mukaisesti suora AB leikkaa nyt myös ainakin toista kolmion sivua CE tai CF. Oletetaan, että suora AB leikkaa sivun CE pisteessä G. Pisteiden B ja G kautta kulkee Aksiooman 1 mukaan vain yksi suora, joka on suora AB. Nyt piste G on kolmion sivulla CE, joka on suoralla BC. Tällöin pisteiden B ja G välillä on siis suorat AB ja BC. Kolmiossa tämä ei ole mahdollista, joten vastaoletus on väärä ja alkuperäinen väite pitää paikkansa. □



(a) Lähtötilanteen kuvaus. Suora s ei juurikaan muistuta suoraa.



(b) Tarkennettu kuva vain kolmiosta $\triangle CEF$ ja sitä leikkaavasta suorasta AB.

Kuva 3.5. *Lauseen 3.7 todistuksen vaiheita.*

3.1.3 Janojen ja kulmien yhtenevyysaksioomat

Jana määriteltiin jo aiemmin, koska sen käsitettä tarvittiin lauseiden todistamisessa. Seuraavissa aksioomissa määritellään janojen yhtenevyyden käsite. Aksiooma 7 tarkoittaa arkikielellä sitä, että janat ovat ”yhtä pitkät”. Pituutta ei kuitenkaan tässä määritellä. Yhtenevät kuviot ovat ominaisuuksiltaan samanlaiset riippumatta siitä, missä kulmassa ne ovat toisiinsa nähden.

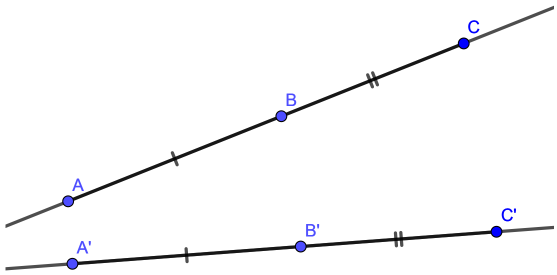
Aksiooma 7 (Janojen ensimmäinen yhtenevyysaksiooma): *Jos AB on jana ja CE puolisuora, niin on olemassa yksi ja vain yksi sellainen puolisuoran CE piste D niin, että $AB \cong CD$.*

Tässä merkintä $\cong$ tarkoittaa yhtenevyysrelaatiota. Yhteneviä janoja voidaan merkitä poikkiviivoilla (kuva 3.6). Jos kuviossa on useita yhteneviä janapareja, voidaan janojen keskinäinen erilaisuus osoittaa merkitsemällä toisia yhteneviä janoja yhdellä poikkiviivalla ja toisia kahdella poikkiviivalla.

Seuraavat aksioomat kuvaavat janojen yhtenevyyden ominaisuuksia. Aksiooma 8 tarkoittaa sitä, että jos kaksi janaa on yhteneviä kolmannen janan kanssa, nämä kaksi janaa ovat yhteneviä myös keskenään. Aksiooma 9 puolestaan tarkoittaa sitä, että jos kahdella eri suoralla olevat janat ovat yhteneviä, myös näiden janojen summat ovat yhtenevät.

Aksiooma 8 (Janojen toinen yhtenevyysaksiooma): *Jos janoille AB, CD ja EF on voimassa, että $AB \cong EF$ ja $CD \cong EF$, myös janat $AB \cong CD$, jos tämä luetaan, että janat AB ja CD ovat yhteneviä.*

Aksiooma 9 (Janojen kolmas yhtenevyysaksiooma): *Olkoot ABC ja $A'B'C'$ suoria. Jos janat $AB \cong A'B'$ ja $BC \cong B'C'$, niin janat $AC \cong A'C'$. (Kuva 3.6).*



Kuva 3.6. *Janojen kolmas yhtenevyysaksiooma.*

Määritellään seuraavaksi *kulman* käsite. Kulma on erityisen tärkeä, kun myöhemmin siirrytään tarkastelemaan kolmioiden ja muiden monikulmioiden ominaisuuksia. Kulma voidaan kuitenkin määritellä hyvin monilla eri tavoilla (katso esimerkiksi [62]), joista tässä on valittu vain yksi. Esimerkiksi Nevanlinna [42] määrittelee kulman konveksiksi pistejoukoksi. Konveksi eli kupera joukko tarkoittaa sellaista joukkoa, jossa kahden mielivaltaisen alkion yhdistävä jana kuuluu myös kokonaisuudessaan joukkoon [67, s. 223]. Tällöin kuitenkin esimerkiksi oikokulmaa suuremmat kulmat eivät olisi Nevanlinnan määritelmän mukaisia kulmia.

Määritelmä 3.8. *Kulma* muodostuu kahdesta puolisuorasta, jotka kulkevat saman pisteen A kautta, sekä näiden suorien väliin jäävästä alueesta. [67]

Pistettä A kutsutaan kulman *kärjeksi*. Kulmaa, jonka kärki on pisteessä A, merkitään tämän pisteen avulla kulmaksi $\angle A$. Kulmia merkitään myös kreikkalaisilla kirjaimilla $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$. Kulman vasen kylki on se, jonka oikealle puolelle kulma aukeaa, ja vastaavasti kulman oikea kylki on se, jonka vasemmalle puolelle kulma aukeaa. Jos kulman vasemmalla kyljellä on piste B ja kulman oikealla kyljellä piste C, kulmaa merkitään näiden avulla $\angle CAB$ niin, että järjestyksessä mainitaan oikean kyljen piste, kärkipiste ja vasemman kyljen piste. Koska puolisuorat rajaavat tasoon kaksi aluetta, tarkasteltavaa aluetta eli kulmaa merkitään kuvissa pienellä kaarella (esimerkiksi kuva 3.7).

Samoin kuin janoille, seuraavissa aksioomissa kuvataan kulmien yhtenevyyttä. Kulmat ovat yhtenevät, jos ne ovat "yhtä suuret". Sillä ei ole väliä, miten päin kulmat ovat tasossa tai ovatko ne edes keskenään samoin päin.

Aksiooma 10 (Kulmien ensimmäinen yhtenevyysaksiooma): *Olkoon $\angle BAC$ kulma ja $A'B'$ puolisuora sekä D piste, joka ei ole suoralla $A'B'$. Tällöin on olemassa yksi ja vain yksi sellainen puolisuora $A'C'$ samalla puolella suoraa $A'B'$ kuin D, että kulmat $\angle BAC \cong \angle B'A'C'$.*

Aksiooma 11 (Kulmien toinen yhtenevyysaksiooma): *Jos kulmille α, β ja γ on voimassa yhtenevyydet $\alpha \cong \gamma$ ja $\beta \cong \gamma$, niin $\alpha \cong \beta$.*

Aksiooma 10 tarkoittaa sitä, että yhtenevät kulmat ovat yksikäsitteiset. Lisäksi, jos kaksi kulmaa ovat erikseen yhteneviä kolmannen kulman kanssa, nämä kaksi kulmaa ovat silloin Aksiooman 11 mukaan yhtenevät myös keskenään. Kulmien yhtenevyysaksioomien perusteella voidaan todistaa lause kulmien yhteenlaskusta.

Lause 3.9. *Olkoon kulma $\angle BAC$ ja olkoon puolisuora AD kulman $\angle BAC$ aukeamassa. Oletetaan, että kulmat $\angle BAC$ ja $\angle B'A'C'$ ovat yhteneviä sekä kulmat $\angle DAC$ ja $\angle D'A'C'$ ovat yhteneviä. Oletetaan lisäksi, että puolisuorat $A'B'$ ja $A'C'$ ovat eri puolilla suoraa $A'D'$. Tällöin puolisuorat $A'B'$ ja $A'C'$ muodostavat kulman $\angle B'A'C'$, joka on yhtenevä kulman $\angle BAC$ kanssa ja puolisuora $A'D'$ on kulman $\angle B'A'C'$ aukeamassa.*

Todistus. Katso [68, s. 25]. □

3.1.4 Kulmien ominaisuuksia

Tässä osiossa esitellään uusia kulmiin liittyviä käsitteitä, kuten vieruskulma ja ristikulma, sekä todistetaan näihin liittyviä lauseita. Tähän tarvitaan kuitenkin kolmion käsitettä (katso Määritelmä 3.4) ja joitakin kolmioiden ominaisuuksia, jotka määritellään ensin (Aksiooma 12).

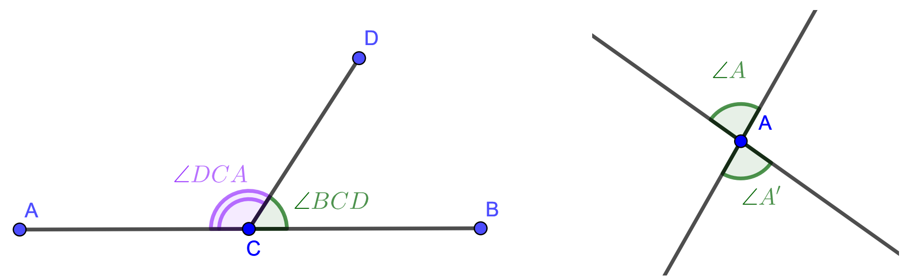
Kolmioiden yhtenevyyttä voidaan tutkia kahdella eri yhtenevyyskriteerillä. Aksioomassa 12 kolmioiden yhtenevyys määritellään kahden sivun ja niiden välisen kulman avulla ja lauseessa 3.16 kolmen sivun avulla.

Aksiooma 12 (Yhtenevyyskriteeri sks): *Jos kolmioissa $\triangle ABC$ ja $\triangle A'B'C'$ on voimassa seuraavat yhdenmuotoisuusrelaatiot $AB \cong A'B'$, $AC \cong A'C'$ ja $\angle A \cong \angle A'$, niin nämä kolmiot ovat yhtenevät.*

Määritellään seuraavaksi muutamia kulmiin liittyviä käsitteitä. Nämä ovat tärkeitä tutkittaessa esimerkiksi kolmioiden ominaisuuksia ja todistettaessa niihin liittyviä lauseita.

Määritelmä 3.10.

1. Kulman $\angle BCD$ oikea kylki ja sen *vieruskulman* $\angle DCA$ vasen kylki ovat samalla suoralla. Lisäksi kulman $\angle BCD$ vasen kylki on kulman $\angle DCA$ oikea kylki. (Kuva 3.7a).
2. *Ristikulmilla* $\angle A$ ja $\angle A'$ on sama kärki. Lisäksi kulman $\angle A$ oikean kyljen jatke on kulman $\angle A'$ oikea kylki sekä kulman $\angle A$ vasemman kyljen jatke on kulman $\angle A'$ vasen kylki. (Kuva 3.7b).
3. *Kulman puolittaja* on suora, joka jakaa kulman kahdeksi yhtä suureksi kulmaksi. [67]



(a) Vieruskulmat $\angle BCD$ ja $\angle DCA$. **(b)** Ristikulmat $\angle A$ ja $\angle A'$.

Kuva 3.7. *Esimerkit vieruskulmista ja ristikulmista.*

Vieruskulmiin ja ristikulmiin liittyy ominaisuuksia, joita hyödynnetään paljon erilaisia monikulmioita tutkittaessa. Tämän vuoksi seuraavaksi todistetaan, että yhtenevien kulmien vieruskulmat ovat yhtenevät sekä että ristikulmat ovat yhtenevät.

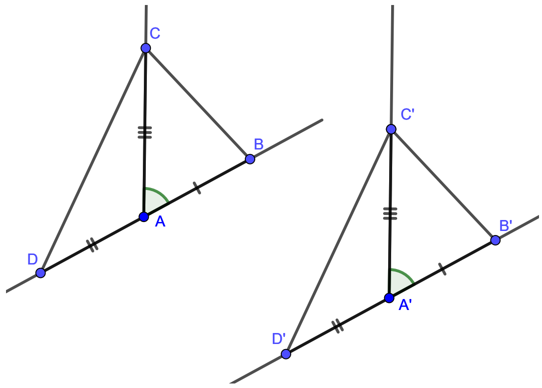
Lause 3.11. *(Vieruskulmalause). Yhtenevien kulmien vieruskulmat ovat yhteneviä.*

Todistus. Olkoot kulmat $\angle BAC$ ja $\angle B'A'C'$ yhteneviä, eli $\angle BAC \cong \angle B'A'C'$. Olkoon kulma $\angle CAD$ kulman $\angle BAC$ vieruskulma, ja samoin kulma $\angle C'A'D'$ kulman $\angle B'A'C'$ vieruskulma. Aksiooman 7 perusteella voidaan olettaa, että janat AB ja $A'B'$ ovat yhteneviä, samoin janat AD ja $A'D'$ sekä janat AC ja $A'C'$ (kuva 3.8).

Aksiooman 12 mukaan kolmiot $\triangle ABC$ ja $\triangle A'B'C'$ ovat tällöin yhteneviä. Tästä seuraa, että janat BC ja $B'C'$ ovat yhteneviä, sekä kulmat $\angle CBA$ ja $\angle C'B'A'$ ovat yhteneviä. Aksiooman 9 mukaan janat BD ja $B'D'$ ovat myös yhtenevät.

Jälleen Aksiooman 12 mukaan kolmiot $\triangle BCD$ ja $\triangle B'C'D'$ ovat yhteneviä. Tästä seuraa, että janat CD ja $C'D'$ ovat yhteneviä ja samoin kulmat $\angle BDC$ ja $\angle B'D'C'$ ovat yhteneviä.

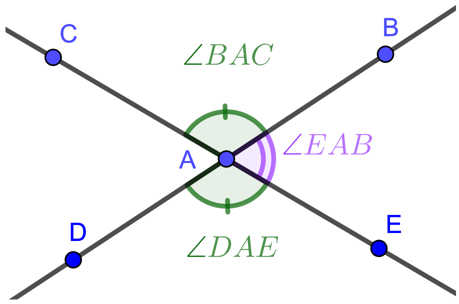
Aksiooman 12 mukaan kolmiot $\triangle ACD$ ja $\triangle A'C'D'$ ovat yhteneviä, mistä seuraa, että kulmat $\angle CAD$ ja $\angle C'A'D'$ ovat yhteneviä. □



Kuva 3.8. *Yhtenevien kulmien $\angle BAC$ ja $\angle B'A'C'$ vieruskulmat $\angle CAD$ ja $\angle C'A'D'$ ovat myös yhteneviä (Lause 3.11).*

Lause 3.12. *(Ristikulmalause). Ristikulmat ovat yhtenevät.*

Todistus. Olkoot ristikulmat $\angle BAC$ ja $\angle DAE$ (kuva 3.9). Molempien kulmien vieruskulma on kulma $\angle EAB$. Koska tämä kulma on yhtenevä itsensä kanssa, Lauseen 3.11 mukaisesti kulmat $\angle BAC$ ja $\angle DAE$ ovat yhteneviä. □



Kuva 3.9. *Ristikulmat $\angle BAC$ ja $\angle DAE$ ovat yhtenevät (Lause 3.12).*

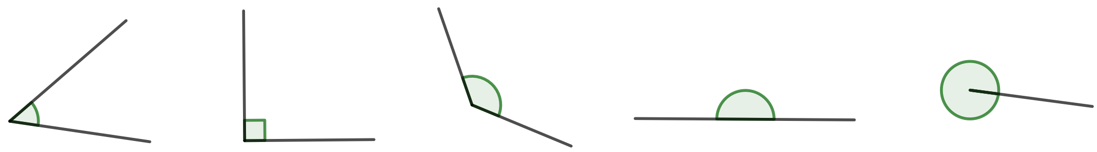
Määritellään seuraavaksi lisää kulmiin liittyviä käsitteitä eli *suora kulma*, *terävä kulma* sekä *tylppä kulma*. Nämä kulmien luokittelut ovat tarpeellisia, kun luokitellaan erilaisia kolmioita niiden kulmien ominaisuuksien mukaan.

Kulma suureena tarkoittaa sitä, kuinka paljon kulma aukeaa. Eukleides määrittelee kulman olevan ”kahden tosiaan leikkaavan viivan kaltevuus toisiinsa nähden.” [26, s. 225]

Käsitettä ”kaltevuus” ei kuitenkaan tämän tarkemmin määritellä. Eukleides ei myöskään tarkenna, että viivojen tulisi olla suoria, vaan tämän määritelmän mukaan myös kaarevat viivat voivat muodostaa kulmia.

Määritelmä 3.13. [67]

1. *Suora kulma* on sellainen kulma, joka on yhtä suuri vieruskulmansa kanssa. Kuvissa suoraa kulmaa merkitään tavallisen kulman kaaren sijaan neliöllä (kuva 3.10). Suoran kulman suuruudeksi määritellään $90°$ tai $\frac{\pi}{2}$.
2. *Oikokulma* on kulman ja sen vieruskulman yhdiste. Oikokulman suuruudeksi määritellään $180°$ tai π.
3. *Täysi kulma* tarkoittaa koko ympyrän keskuskulmaa. Sen suuruudeksi määritellään $360°$ tai 2π
4. *Terävä kulma* on suoraa kulmaa pienempi.
5. *Tylppä kulma* on suoraa kulmaa suurempi mutta oikokulmaa pienempi.



Kuva 3.10. *Vasemmalta oikealle: terävä kulma, suora kulma, tylppä kulma, oikokulma ja täysi kulma.*

Perinteisesti kulman mitta on määritelty suoran kulman avulla niin, että yksi aste on $\frac{1}{90}$ suorasta kulmasta [34, s. 63]. Tällöin kulmia voidaan vertailla, sillä suuremmassa kulmassa on enemmän asteita kuin pienemmässä.

Määritellään vielä lopuksi normaalin käsite, joka liittyy vahvasti suoran kulman käsitteeseen. Näitä käsitteitä tarvitaan erityisesti myöhemmin osiossa 3.1.6.

Määritelmä 3.14.

1. Suoran s *normaali* n on sellainen suora, joka on kohtisuorassa suoraa s vastaan. Suorien s ja n muodostamat kaikki neljä kulmaa ovat suoria.
2. Janan AB *keskinormaali* on suoran AB normaali, joka kulkee janan AB keskipisteen kautta.

3.1.5 Kolmioiden ominaisuuksia

Aiemmin Aksioomassa 12 määriteltiin, että kaksi kolmiota ovat yhtenevät, jos niillä on kaksi yhtenevää sivua ja yksi yhtenevä kulma. Tästä tulee myös aksiooman lyhenne sks:

sivu-kulma-sivu. Kirjainten järjestyksellä on väliä, sillä Aksiooman 12 mukaan nimenomaan kulman ja sen viereisten sivujen tulee olla yhteneviä kolmioissa. Seuraavaksi esitetään kolmioiden yhtenevyyskriteeri sss (lause 3.16), jonka mukaan kolmiot ovat yhtenevät, jos niiden kaikki sivut ovat yhtenevät (sivu-sivu-sivu). Ennen tätä määritellään eräitä kolmion erityistapauksia.

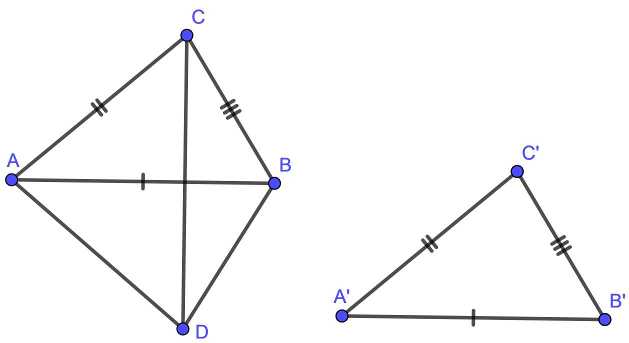
Määritelmä 3.15.

1. Jos kolmion kaksi sivua ovat yhtenevät keskenään, kolmio on *tasakylkinen*. Yhteneviä sivuja kutsutaan *kyljiksi* ja kolmatta sivua *kannaksi*. Ne kolmion kulmat, joiden toinen sivu on kolmion kanta, ovat *kantakulmia*. Kantakulmat ovat keskenään yhteneviä.
2. Jos kaikki kolmion sivut ovat yhteneviä keskenään, kolmiota kutsutaan *tasasivuiseksi*. Tasasivuisen kolmion kaikki kulmat ovat yhteneviä keskenään.

Lause 3.16. *(Yhtenevyyskriteeri sss). Jos kolmioissa $\triangle ABC$ ja $\triangle A'B'C'$ on voimassa, että $AB \cong A'B'$, $BC \cong B'C'$ ja $CA \cong C'A'$, niin nämä kolmiot ovat yhtenevät.*

Todistus. Valitaan sellainen piste D eri puolelta suoraa AB kuin piste C, että kulmat $\angle DAB$ ja $\angle B'A'C'$ ovat yhteneviä (Aksiooma 10) sekä janat AD ja $A'C'$ ovat yhteneviä (Aksiooma 7). Nyt kolmiot $\triangle ABD$ ja $\triangle A'B'C'$ ovat yhteneviä (yhtenevyyskriteeri sks eli Aksiooma 12). Yhdistetään pisteet C ja D janalla ja oletetaan, että tämä jana leikkaa suoran AB, kuten kuvassa 3.11 (tapaus, jossa suorat CD ja AB eivät leikkaa, todistetaan samalla periaatteella kuin tämäkin tapaus, joten se osuus sivuutetaan).

Koska janat AC, $A'C'$ ja AD ovat yhteneviä, on kolmio $\triangle ACD$ tasakylkinen. Samoin, koska janat BC, $B'C'$ ja BD ovat yhteneviä, on kolmio $\triangle BCD$ tasakylkinen. Tasakylkisten kolmioiden kantakulmat ovat yhtenevät, eli $\angle CDA \cong \angle ACD$ ja $\angle BDC \cong \angle DCB$. Tästä ja lauseesta 3.9 seuraa, että kulmat $\angle ACB$ ja $\angle BDA$ ovat yhteneviä. Nyt kulmat $\angle CBA$ ja $\angle ABD$ ovat yhteneviä. Kolmiot $\triangle ABC$ ja $\triangle ABD$ ovat siis yhtenevät (aksiooma 12), jolloin myös kolmiot $\triangle ABC$ ja $\triangle A'B'C'$ ovat yhtenevät. □



Kuva 3.11. *Jos kahden kolmion toisiaan vastaavat sivut ovat yhteneviä, ovat kolmiot Lauseen 3.16 mukaan yhteneviä.*

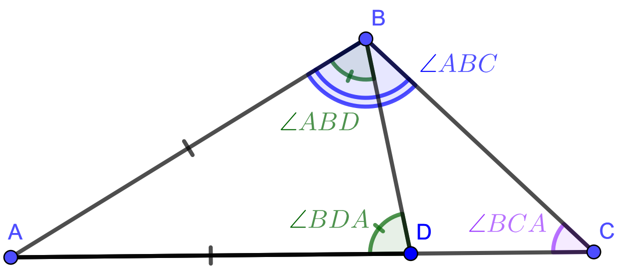
Kolmiossa $\triangle ABC$ kulmaa $\angle BAC$ *vastaa* sivu BC, joka on kulmasta katsottuna kolmion ”vastakkaisella puolella”. Kulmaa vastaava sivu on kolmion sivuista ainoa, joka ei ole kulman kylki. Samoin kulmaa $\angle CBA$ vastaa sivu AC ja kulmaa $\angle BCA$ vastaa sivu AB. Seuraavat lauseet kuvaavat kolmion kulmien sekä niitä vastaavien sivujen ominaisuuksia.

Lause 3.17. *Kolmion kulman vieruskulma on kolmion muita kulmia suurempi.*

Todistus. Katso [68, s. 28–29]. □

Lause 3.18. *Kolmiossa lyhyempää sivua vastaa pienempi kulma ja pienempää kulmaa lyhyempi sivu.*

Todistus. Olkoon kolmio $\triangle ABC$ sellainen, että sivu AB on lyhyempi tai yhtä pitkä kuin sivu AC. Tällöin Aksiooman 7 mukaan on olemassa sellainen piste D sivulla AC, että sivut AB ja AD ovat yhteneviä. Tämän perusteella kolmio $\triangle ABD$ on tasakylkinen, joten kulmat $\angle BDA$ ja $\angle ABD$ ovat yhteneviä. Jana BD on kulman $\angle ABC$ aukeamassa, joten kulma $\angle ABD$ on pienempi kuin kulma $\angle ABC$. Sovelletaan nyt Lausetta 3.17 kolmioon $\triangle BCD$. Kulman $\angle CDB$ vieruskulma on kulma $\angle BDA$, joka on suurempi kuin kulmat $\angle BCD$ ja $\angle DBC$. Nyt siis kulma $\angle BCD$ on pienempi kuin kulma $\angle ABD$, mistä seuraa, että kulma $\angle BCD$ on pienempi kuin kulma $\angle ABC$ (kuva 3.12). □



Kuva 3.12. *Kolmiossa lyhyempää sivua vastaa pienempi kulma Lauseen 3.18 mukaisesti.*

Määritellään seuraavaksi suorien yhdensuuntaisuus. Yhdensuuntaisuusaksiooma (Aksiooma 13) on tässä englantilaisen John Playfairin (1748–1819) kirjoittamassa muodossa. Sen jälkeen voimme määritellä samankohtaisten kulmien käsitteen. Nämä ovat tärkeitä käsitteitä tutkittaessa kolmioita ja erityisesti erilaisia monikulmioita.

Määritelmä 3.19. Kaksi suoraa ovat *yhdensuuntaiset*, jos ne ovat samat tai jos ne eivät leikkaa toisiaan. Yhdensuuntaisia suoria s ja m merkitään $s \parallel m$.

Aksiooma 13 (Playfairin aksiooma): *Olkoon piste A suoran s ulkopuolella. Tällöin on olemassa enintään yksi sellainen suora m, että piste A on suoralla m ja* $s \parallel m$.

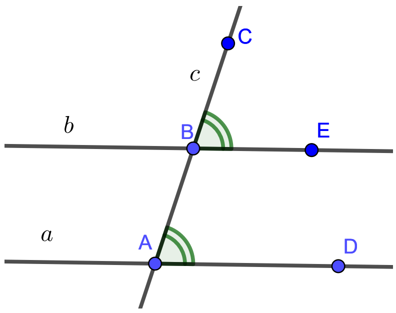
Määritelmä 3.20. *Samankohtaisten kulmien* vastaavat kyljet ovat samalla suoralla ja joko oikeat tai vasemmat kyljet yhdensuuntaisilla suorilla.

Todistetaan seuraavaksi muutamia samankohtaisiin kulmiin liittyviä lauseita. Näitä tarvitaan myöhemmissä todistuksissa, kuten kolmion kulman vieruskulmalauseen 3.11 todistuksessa.

Lause 3.21. *(Samankohtaisten kulmien lause). Olkoot a, b ja c eri suoria. Oletetaan, että suora c leikkaa suoran a pisteessä A ja suoran b pisteessä B. Olkoon piste C suoralla c niin, että piste B on pisteiden A ja C välissä. Olkoot vielä pisteet $D \in a$ ja $E \in b$ samalla puolella suoraa c. Jos kulmat $\angle DAB \cong \angle EBC$, niin $a \parallel b$.*

Todistus. Tehdään vastaoletus, että suorat a ja b leikkaavat toisensa pisteessä F, joka on samalla puolella suoraa c kuin pisteet D ja E. Tällöin muodostuva kolmio $\triangle ABF$ ei ole Lauseen 3.17 mukainen, sillä Lauseen 3.17 mukaan kulman $\angle ABF$ vieruskulman $\angle FBC$, joka on yhtenevä kulman $\angle EBC$ kanssa, tulisi olla suurempi kuin kolmion muut kulmat. Kuitenkin oletuksen perusteella kulma $\angle EBC$ ja kulma $\angle DAB$, joka on yhtenevä kulman $\angle FAB$ kanssa, ovat yhtenevät. Suorat a ja b eivät siis voi leikata pisteessä F.

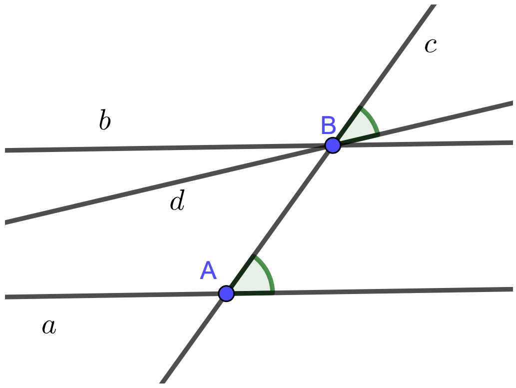
Todistus olisi täysin vastaava, jos tehtäisi vastaoletus, että suorat a ja b leikkaavat toisensa pisteessä F, joka on eri puolella suoraa c kuin pisteet D ja E. Suorat a ja b eivät voi leikata pisteessä F, mistä seuraa se, että ne ovat yhdensuuntaiset (kuva 3.13). □



Kuva 3.13. *Jos samankohtaiset kulmat ovat yhteneviä, niin Lauseen 3.21 mukaan suorat a ja b ovat yhdensuuntaisia.*

Lause 3.22. *Jos suora leikkaa kahta yhdensuuntaista suoraa, niin samankohtaiset kulmat ovat yhtä suuret.*

Todistus. Olkoot yhdensuuntaiset eri suorat a ja b. Olkoon vielä suora c, joka leikkaa suoran a pisteessä A ja suoran b pisteessä B. Aksiooman 10 mukaan on olemassa sellainen pisteen B kautta kulkeva suora d, joka yhdessä suoran c kanssa muodostaa yhtenevän kulman suorien a ja c muodostaman kulman kanssa (kuva 3.14). Nyt Lauseen 3.21 mukaan suorien a ja d on oltava yhdensuuntaiset. Oletuksen mukaan suorat a ja b ovat myös yhdensuuntaiset. Tällöin Aksiooman 13 mukaan suorien d ja b on oltava samat suorat. □

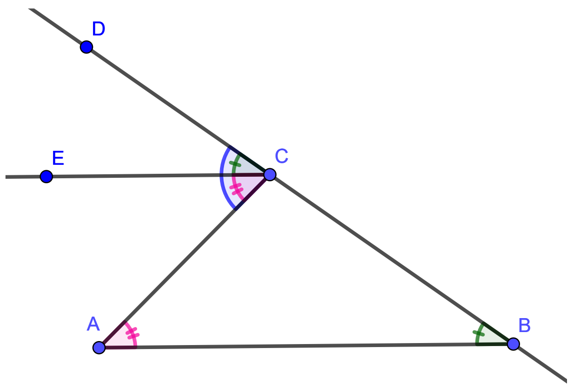


Kuva 3.14. *Yhdensuuntaisilla suorilla olevat samankohtaiset suorat ovat Lauseen 3.22 mukaan yhteneviä.*

Määritelmässä 3.13 määriteltiin, että oikokulman suuruus on 180°. Lauseen 3.11 todistamisessa osoitetaan myös, että kolmion kulmien summa on oikokulman suuruus eli 180°. Kolmion kulmien summa voitaisi todistaa monella muullakin tavalla (esimerkiksi [71, s. 23] ja [74, s. 3]), joista tässä esitetty on vain yksi vaihtoehto.

Lause 3.23. *(Kolmion kulman vieruskulmalause). Kolmion kahden kulman summa on yhtenevä kolmannen kulman vieruskulman kanssa.*

Todistus. Olkoon kolmio $\triangle ABC$ ja olkoon sellainen piste D suoralla BC, että piste C on pisteiden B ja D välissä. Nyt kulma $\angle DCA$ on kulman $\angle ACB$ vieruskulmana suurempi kuin kulma $\angle CBA$. Tällöin on olemassa sellainen puolisuora CE kulman $\angle DCA$ aukeamassa, että kulma $\angle DCE$ ja kulma $\angle CBA$ ovat yhteneviä. Nyt Määritelmän 3.20 mukaisesti kulmat $\angle DCE$ ja $\angle CBA$ ovat samankohtaiset, jolloin suorat AB ja CE ovat yhdensuuntaiset. Lauseen 3.22 mukaan kulmat $\angle ECA$ ja $\angle BAC$ ovat samankohtaiset ja tällöin yhtä suuret. □



Kuva 3.15. *Lauseen 3.23 mukaisesti kolmion kulman vieruskulma on yhtenevä kolmion kahden muun kulman summan kanssa.*

Kuvassa 3.15 kulmat $\angle DCE \cong \angle CBA$, $\angle ECA \cong \angle BAC$ ja $\angle ACB$ muodostavat oikokulman. Toisin sanoen kolmion kulmien summa on yhtä kuin oikokulma eli 180°.

3.1.6 Ympyrä

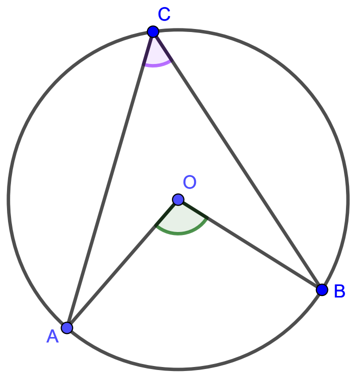
Tässä osiossa määritellään ympyrä sekä siihen liittyviä käsitteitä. Lisäksi todistetaan kehäkulmalause (Lause 3.26). Koska tämä diplomityö keskittyy pääasiassa monikulmioihin, ei ympyrän ominaisuuksia käsitellä kovinkaan laajasti.

Määritelmä 3.24. *Ympyrä* on tasolla oleva käyrä, joka on kaikkialla yhtä kaukana annetusta pisteestä. Tätä annettua keskipistettä kutsutaan ympyrän *keskipisteeksi* ja käyrän etäisyyttä keskipisteeseen *säteeksi*. [67]

Joskus ympyrän muodostavaa käyrää kutsutaan myös ympyrän kehäksi. Jos ympyrän keskipiste on piste O ja sen kehällä on piste B, on ympyrän säde OB. Tällöin ympyrää p merkitään $p(O,B)$. Seuraavaksi määritellään jatkon kannalta hyödyllisiä ympyrään liittyviä käsitteitä.

Määritelmä 3.25.

1. Ympyrän *jänne* on jana, joka yhdistää kaksi ympyrän kehällä olevaa pistettä.
2. *Kehäkulma* on kulma, jonka kärki on ympyrän kehällä ja kylkinä kaksi saman ympyrän jännettä (kuva 3.16).
3. *Keskuskulma* on kulma, jonka kärki on ympyrän keskipisteessä (kuva 3.16). [67]



Kuva 3.16. *Ympyrän kehäkulma $\angle ACB$ ja keskuskulma $\angle AOB$.*

Lause 3.26. *(Kehäkulmalause). Kehäkulma on puolet vastaavasta keskuskulmasta.*

Todistus. Olkoon ympyrä $p(O,A)$. Olkoot ympyrän kehällä myös pisteet B ja C. Tällöin muodostuu kehäkulma $\angle ACB$ ja keskuskulma $\angle AOB$.

1. Tarkastellaan ensin tapausta, jossa jänne BC kulkee ympyrän keskipisteen O kautta (kuva 3.17a). Tällöin muodostuu tasakylkinen kolmio $\triangle ACO$, jonka kyljet ovat ympyrän säteen mittaiset. Nyt kulmat $\angle ACB$ ja $\angle OAC$ ovat yhtä suuret. Keskuskulma $\angle AOB$ on kolmion $\triangle ACO$ kolmannen kulman vieruskulma. Lauseen 3.23 mukaan saadaan yhtälö

$$\angle ACB + \angle OAC = \angle AOB. \tag{3.1}$$

Koska $\angle ACB = \angle OAC$, yhtälö saadaan muotoon

$$2\angle ACB = \angle AOB. \tag{3.2}$$

Tästä seuraa, että kehäkulma $\angle ACB$ on puolet keskuskulmasta $\angle AOB$.

2. Tarkastellaan seuraavaksi tapausta, jossa ympyrän keskipiste O on kehäkulman $\angle ACB$ aukeamassa (kuva 3.17b). Jaetaan kehäkulma ja keskuskulma kumpikin kahdeksi kulmaksi janalla CD, joka kulkee ympyrän keskipisteen O kautta. Nyt voidaan edellisen kohdan perusteella kirjoittaa

$$\angle ACB = \angle ACD + \angle DCB = \frac{\angle AOD}{2} + \frac{\angle DOB}{2} = \frac{\angle AOB}{2}. \tag{3.3}$$

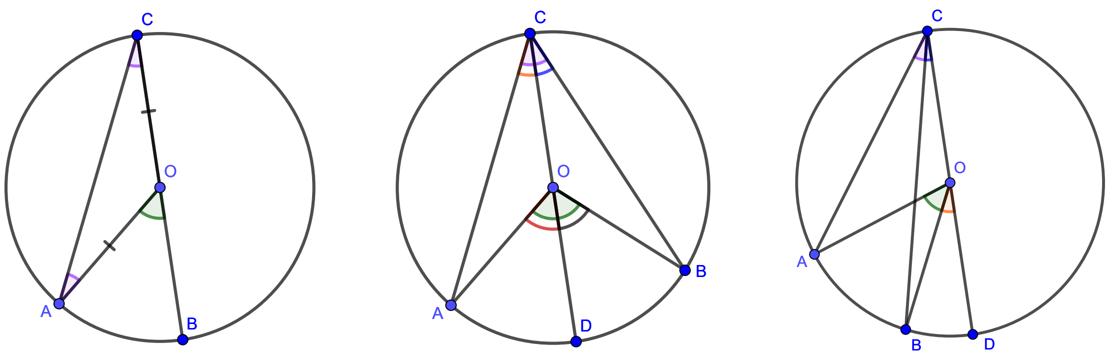
Tämän perusteella kehäkulma on puolet vastaavasta keskuskulmasta, kun ympyrän keskipiste O on kehäkulman aukeamassa.

3. Tarkastellaan lopuksi tapausta, jossa ympyrän keskipiste O on kehäkulman $\angle ACB$ aukeaman ulkopuolella (kuva 3.17c). Ensimmäisen kohdan perusteella voidaan kirjoittaa yhtälö

$$\angle ACB = \angle ACD - \angle BCD = \frac{\angle AOD}{2} - \frac{\angle BOD}{2} = \frac{\angle AOB}{2}. \tag{3.4}$$

Tämän perusteella kehäkulma on puolet vastaavasta keskuskulmasta, kun ympyrän keskipiste O on kehäkulman aukeaman ulkopuolella.

Nämä kolme tapausta kattavat kaikki mahdolliset tapaukset, joten väite on yleisesti voimassa. □



(a) Ensimmäinen kohta. **(b)** Toinen kohta. **(c)** Kolmas kohta.

Kuva 3.17. *Lauseen 3.26 todistus.*

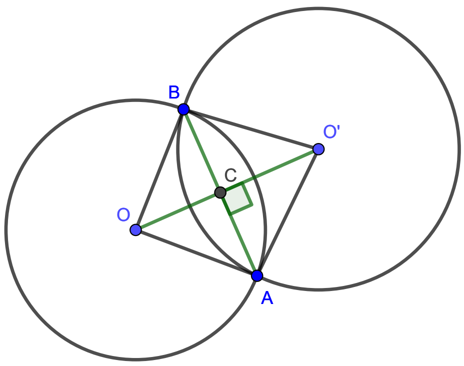
Lause 3.27. *Kahden leikkaavan ympyrän keskipisteiden välinen jana on ympyröiden leikkauspisteiden välisen janan keskinormaali.*

Todistus. Olkoot kaksi leikkaavaa ympyrää $p(O,A)$ ja $q(O',B)$ sellaisia, että niiden leikkauspisteet ovat A ja B. Tarkastellaan nyt kolmioita $\triangle AOO'$ ja $\triangle BOO'$. Sivut BO' ja AO'

ovat yhteneviä, sillä molemmat ovat saman ympyrän säteitä. Samoin sivut BO ja AO ovat yhteneviä, sillä molemmat ovat saman ympyrän säteitä. Lisäksi sivu OO' on yhteinen molemmille kolmioille. Koska kolmioissa $\triangle AOO'$ ja $\triangle BOO'$ on kolme yhtenevää sivua, ne ovat Lauseen 3.16 mukaan yhteneviä. Tästä seuraa, että myös kulmat $\angle O'OB$ ja $\angle AOO'$ ovat yhteneviä. Olkoon janojen AB ja OO' leikkauspiste C. Tällöin voidaan merkitä, että kulmat $\angle COB$ ja $\angle AOC$ ovat yhteneviä.

Tarkastellaan seuraavaksi kolmioita $\triangle BCO$ ja $\triangle ACO$. Sivut BO ja AO ovat yhteneviä, sillä ne ovat saman ympyrän säteitä. Sivu OC on molemmille kolmioille yhteinen ja lisäksi kulmat $\angle COB$ ja $\angle AOC$ ovat yhteneviä. Koska kolmioissa $\triangle BCO$ ja $\triangle ACO$ on kaksi yhtenevää sivua ja yksi yhtenevä kulma, nämä ovat Aksiooman 12 mukaan yhteneviä.

Koska kolmiot $\triangle BCO$ ja $\triangle ACO$ ovat yhteneviä, ovat myös sivut AC ja BC yhteneviä, jolloin jana OO' puolittaa janan AB. Lisäksi kulmat $\angle BCO$ ja $\angle OCA$ ovat yhteneviä ja muodostavat oikokulman. Tästä seuraa, että kulmat $\angle BCO$ ja OCA ovat suoria kulmia, jolloin jana OO' on janan AB keskinormaali. $\square$



Kuva 3.18. *Ympyröiden keskipisteitä yhdistävä jana OO' on ympyröiden leikkauspisteitä yhdistävän janan AB keskinormaali (Lause 3.27).*

Jokaisen kolmion sisään voi piirtää ympyrän. Suurimman mahdollisen kolmion sisällä olevan ympyrän keskipiste on kolmion kulmien kulman puolittajien leikkauspiste [71, s. 79]. Samoin jokaisen kolmion ulkopuolelle voi piirtää ympyrän, jonka kehällä ympyrän kärjet ovat. Tällöin ympyrän keskipiste on kolmion sivujen keskinormaalien leikkauspiste [71, s. 77].

3.1.7 Monikulmiot

Aiemmin määritelty kolmio on erityistapaus monikulmiosta. Toinen huomattava erityistapaus monikulmiosta on nelikulmio. Määritellään seuraavaksi murtoviiva ja monikulmio sekä nelikulmioon liittyviä käsitteitä.

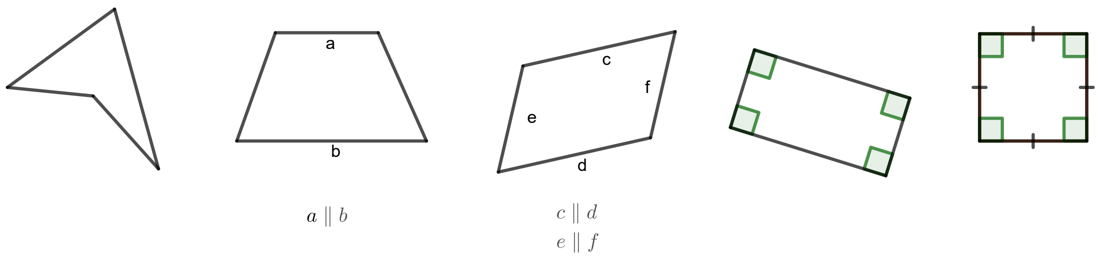
Määritelmä 3.28. Pisteet A_1 ja A_n yhdistävä *murtoviiva* $A_1A_2 \ldots A_n$ on jono janoja $A_1A_2, A_2A_3, \ldots, A_{n-1}A_n$, joista mitkään kaksi peräkkäistä janaa eivät ole samalla suoralla.

Murtoviivan *kärkiä* ovat pisteet $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ja *sivuja* janat $A_1A_2, A_2A_3, \ldots, A_{n-1}A_n$. Jos $A_1 = A_n$, niin murtoviiva on *monikulmio*.

Määritelmä 3.29. *Nelikulmio* on monikulmio, jolla on neljä kulmaa.

1. Jos nelikulmion kaksi sivua ovat yhdensuuntaiset, sitä kutsutaan *puolisuunnikkaaksi*.
2. Jos nelikulmion molemmat vastakkaiset sivut ovat yhdensuuntaiset, sitä kutsutaan *suunnikkaaksi*.
3. Jos suunnikkaan kaikki sivut ovat yhtä pitkiä, sitä kutsutaan *neljäkkääksi*.
4. Jos kaikki nelikulmion kulmat ovat yhtä suuret, sitä kutsutaan *suorakulmioksi*.
5. Jos suorakulmion kaikki sivut ovat yhtä pitkät ja kaikki kulmat yhtä suuria, sitä kutsutaan *neliöksi.* [67]

Kuvassa 3.19 on kuvattu esimerkit erilaisista nelikulmioista.



Kuva 3.19. *Vasemmalta oikealle: nelikulmio, puolisuunnikas, suunnikas, suorakulmio ja neliö.*

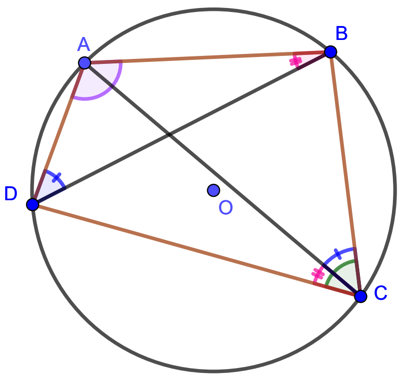
Todistetaan seuraavaksi lause nelikulmion kulmien summasta. Samalla periaatteella voidaan määrittää myös muiden monikulmioiden kulmien summa. Monikulmioiden käsittely palaakin lopulta lähes aina kolmioiden tutkimiseen.

Lause 3.30. *Nelikulmion kulmien summa on 360°.*

Todistus. Olkoon nelikulmio $ABCD$ ja sen lävistävä suora AC. Kuvioon muodostuu nyt kaksi kolmiota $\triangle ABC$ ja $\triangle ACD$. Kummankin kolmion kulmien summa on Lauseen 3.23 mukaisesti 180°. Yhteensä näiden kahden kolmion kulmien summa eli nelikulmion $ABCD$ kulmien summa on siis 360°. $\square$

Lause 3.31. *Nelikulmio on ympyrän* jännenelikulmio*, jos sen kaikki kärjet ovat tämän ympyrän kehällä. Jännenelikulmion vastakkaisten kulmien summa on 180°.*

Todistus. Olkoon ympyrä $p(O,A)$. Olkoon ympyrän kehällä myös pisteet B, C ja D. Ympyrän kehällä olevat pisteet muodostavat jännenelikulmion $\square ABCD$ (kuva 3.20). Pitää siis osoittaa, että kulman $\angle DAB$ vieruskulma on yhtä suuri kuin kulma $\angle BCD$, jolloin näiden kulmien summa olisi 180°. Lauseen 3.23 mukaan kulman $\angle DAB$ vieruskulma on yhtä suuri kuin kulmien $\angle ABD$ ja $\angle BDA$ summa.



Kuva 3.20. *Jännenelikulmion □ABCD vastakkaisten kulmien summa on 180° (Lause 3.31).*

Kehäkulmalauseen 3.26 mukaan kulmat $\angle ABD$ ja $\angle ACD$ ovat yhtä suuret, sillä niitä vastaa sama jänne. Samoin kulmat $\angle BDA$ ja $\angle BCA$ ovat yhtä suuret. Nyt kulman $\angle DAB$ vieruskulma on yhtä suuri kuin kulmien $\angle ACD$ ja $\angle BCA$ summa. Tämä summa on kulma $\angle BCD$. Jännenelikulmion vastakkaisten kulmien summa on siis 180°. □

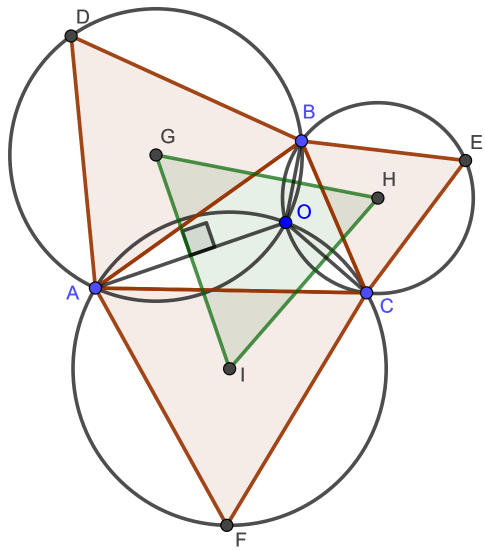
3.1.8 Napoleonin lause

Napoleonin lause on kolmioista muodostuvaan kuvioon liittyvä lause, joka on saanut nimensä ranskalaiselta hallitsijalta Napoleon Bonapartelta. Napoleon oli läheisissä väleissä monien aikansa kuuluisien matemaatikkojen kanssa, mutta todennäköisesti hän ei kuitenkaan keksinyt lausetta, joka kantaa hänen nimeään. Ensimmäinen maininta lauseesta on vasta Napoleonin kuoleman jälkeen, ja ensimmäisen kerran Napoleonin nimi liitettiin siihen vasta 90 vuotta myöhemmin. Nimi Napoleonin lause on kuitenkin vakiintunut käyttöön. [10] Napoleonin lauseen voi todistaa usealla eri tavalla, kuten trigonometriaa (esimerkiksi [6]) tai kompleksilukualgebraa käyttäen (esimerkiksi [9, 31]). Tässä lause todistetaan kuitenkin euklidisen geometrian keinoin.

Lause 3.32. *(Napoleonin lause). Kolmion sivut kantoina piirrettyjen tasasivuisten kolmioiden keskipisteet ovat tasasivuisen kolmion kärjet.*

Todistus. Olkoon kolmio $\triangle ABC$ ja olkoot kolmiot $\triangle ABD$, $\triangle BCE$ ja $\triangle ACF$ tasasivuisia (kuva 3.21). Piirretään jokaisen tasasivuisen kolmion ympäri ympyrä. Kolmioiden $\triangle ABD$ ja $\triangle BCE$ ympäri piirretyt ympyrät leikkaavat pisteissä B ja O. Nyt jännenelikulmion $\square AOBD$ kulma $\triangle BOA$ on Lauseen 3.31 mukaan 120°, sillä sen vastainen kulma $\angle ACB$ on tasasivuisen kolmion kulmana 60°. Samanlaisella päättelyllä saadaan selville, että myös kulma $\angle COB$ on 120°. Koska kulmat $\angle BOA$, $\angle COB$ ja $\angle AOC$ muodostavat täyden kulman, on kulman $\angle AOC$ oltava myös 120°. Tästä seuraa, että piste O on myös kolmion $\triangle ACF$ ympäri piirretyn ympyrän kehällä.

Lauseen 3.27 mukaan tasakylkisten kolmioiden ympäri piirrettyjen ympyröiden keskipisteitä yhdistävä jana GH on kohtisuorassa ympyröiden leikkauspisteitä yhdistävän janan



Kuva 3.21. *Napoleonin lauseen (Lause 3.32) todistus. Kuvaan muodostuva vihreä kolmio $\triangle GHI$ on aina tasasivuinen.*

BO kanssa. Sama pätee muillekin tasakylkisten kolmioiden ympäri piirrettyjen ympyröiden keskipisteitä yhdistäville janoille ja ympyröiden leikkauspisteitä yhdistäville janoille. Janat GH. HI, BO ja CO rajaavat nelikulmion, jonka kaksi kulmaa ovat suoria kulmia. Näiden lisäksi kulma $\angle COB$ on 120°. Tällöin kulman $\angle GHI$ suuruudeksi jää Lauseen 3.30 mukaan 60°. Samanlainen tarkastelu tehdään kaikille tasasivuisten kolmioiden ympäri piirrettyjen ympyröiden keskipisteitä yhdistäville janoille, jolloin saadaan, että myös kulmat $\angle HIG$ ja $\angle IGH$ ovat suuruudeltaan 60°. Koska kolmion $\triangle GHI$ jokainen kulma on yhtä suuri, on kyseessä tasasivuinen kolmio. □

3.2 Geometrian oppiminen

Didaktiikka vastaa opetuksessa tärkeään kysymykseen, millaista on hyvä opetus. Se ei kaikkina aikoina ole samanlaista, sillä esimerkiksi nykyään laskimet ja muut tietotekniset laitteet tuovat oman lisänsä matematiikan didaktiikkaan verrattuna muutaman vuosikymmenen takaiseen. Voidaan pohtia esimerkiksi, tarvitaanko mekaanista laskutaidon harjoittelua mihinkään, kun koneet laskevat monimutkaisiakin laskuja silmänräpäyksessä. Perustaitojen harjoittelu on kuitenkin tärkeää ennen siirtymistä vaikeampiin aiheisiin [39]. Vaikka opetussuunnitelmassa korostuvat yhä enemmän matematiikan käytännön sovellukset oppilaiden mielenkiinnon ylläpitämiseksi, on matematiikka tieteenä kuitenkin ensisijaisesti abstraktia ja loogis-deduktiivista teoriaa, mikä voisi näkyä enemmän myös koulussa opetettavassa matematiikassa [68].

Geometria on yksi niistä koulumatematiikan aiheista, joista keksitään helposti sovelluksia ja erilaisia arkielämän tilanteita, joissa aiheen osaamisesta on hyötyä. Geometrian osaamisesta on kuitenkin muutakin hyötyä kuin välitön hyöty esimerkiksi pinta-alojen ja pituuksien laskemisessa. Näitä laskennallisia taitoja korostetaan geometrian opiskelussa välillä liikaakin [26]. Kuitenkin geometrian, kuten matematiikan yleensäkin, tulisi opettaa myös loogisen ajattelun taitoja ja ongelmanratkaisua, niitä kuitenkaan korostamatta. Didaktinen matematiikka korostaa käsitteiden tarkkaa määrittelyä ja niiden ymmärtämistä [68]. Varsinkin geometriassa ymmärrystä edeltää usein hahmottaminen [26].

Tässä luvussa käydään aluksi läpi geometrian ja sen opetuksen historiaa (osio 3.2.1), sillä se vaikuttaa paljon siihen, millaista geometrian opetus on nykyään. Sitä taas käsitellään osiossa 3.2.2, jossa käydään läpi geometrian oppisisällöt peruskoulussa peruskoulun opetussuunnitelman [49] mukaisesti. Tämän jälkeen osiossa 3.2.3 käsitellään hahmottavaa geometriaa. Osittain geometrista hahmottamista kuvaa hollantilaisten Pierre van Hielen ja Dina van Hiele-Geldofin kehittämä teoria, joka kuvailee sitä, miten geometriaa opitaan. Van Hielen tasojen avulla voidaan ymmärtää oppilaiden ajattelussa tapahtuvia muutoksia, kun he opiskelevat ja oppivat geometriaa. [59] Tätä käsitellään osiossa 3.2.4.

3.2.1 Geometrian ja sen opetuksen historia

Geometrian nykyisestäkin, melko käytännönläheisestä olemuksesta voidaan päätellä, että geometria on saanut alkunsa jostakin konkreettisesta ongelmasta. Jo muinaiset babylonialaiset ja egyptiläiset (jopa noin 3000 eaa.) mittasivat maata ja muuta elinympäristöään. Vasta antiikin Kreikassa (noin 700–0 eaa.) geometriasta kehittyi oma tieteenalansa. Antiikin kreikkalaiset eivät tyytyneet enää olemassa olevien asioiden mittaamiseen vaan he halusivat kuvailla maailmaa käsitteellisesti todistamalla geometrisia käsitteitä. [35, s. 7]

Eukleides Aleksandrialainen (n. 325–n. 265 eaa.) kokosi kaiken saatavilla olevan tiedon geometriasta noin 300 eaa. Tällöin geometria oli yksi kehittyneimmistä matematiikan aloista. Antiikin jälkeen geometria kehittyi merkittävästi vasta 1600-luvulla. Tämän ajan jälkeen alkoi syntyä myös uusia geometrian aloja, kuten analyyttinen ja deskriptiivinen geometria. Myös Eukleideen esityksessä huomattiin puutteita ja epäjohdonmukaisuuksia. Siinä esimerkiksi pisteen määritelmä on ”se, jolla ei ole osaa”. Tästä herää kysymys, mikä on osa. Myöhemmin geometriaa on kehitetty siten, että peruskäsitteitä ei määritellä vaan niiden väliset suhteet esitetään aksioomilla. [35, s. 7]

Suomessa oli rinnakkaiskoulujärjestelmä aina 1970-luvulle asti. Kaikille yhteisessä kansakoulussa opiskeltiin matematiikkaa vain hyvin suppeasti, mitä kuvastaa jo oppiaineen sen aikainen nimi ”laskento ja mittausoppi”. Keskikoulusta ja lukiosta koostuvassa oppikoulussa matematiikka oli jaettu kahteen osa-alueeseen: ”aritmetiikka ja algebra” sekä ”geometria ja trigonometria”. [35, s. 135]

Geometrian oppikirjat sisälsivät 1900-luvun alussa vielä huomattavan paljon pitkiä todistuksia, joiden ymmärtämiseen oppilaat eivät siinä opintojensa vaiheessa vielä kyenneet. Sotien jälkeen 1940- ja 1950-luvuilla Kalle Väisälä julkaisi kuuluisan geometrian oppikirjansa [71], joka nojasi enemmän oppilaiden omiin havaintoihin ja vain arkijärjellä epäselvät asiat todistettiin. [35, s. 136–137]

Koulumatematiikkaa alkoivat hallita 1960-luvun jälkeen nopeasti muuttuvat ja eri suuntiin tempoilevat opetussuunnitelmat. Niissä opetettavia aiheita oli aivan liikaa käytettävissä olevaan aikaan nähden. Samaan aikaan matematiikan opetusta muutettiin niin kutsutun Bourbaki-ryhmän ajatusten pohjalle. Näitä perusajatuksia olivat muun muassa algebrallinen näkökulma ja joukko-opin tärkeys. Tällaisessa ajatusmaailmassa geometrialle ei juuri ollut sijaa. Geometrian asema parani kuitenkin jonkin verran 1980-luvun alussa, kun tästä ”uudesta matematiikasta” luovuttiin. [35, s. 137]

3.2.2 Geometrian oppisisällöt peruskoulussa

Alakoulun ensimmäisillä luokilla (vuosiluokat 1–2) oppilaat harjoittelevat suunta- ja sijaintikäsitteitä, sekä mittaamisen periaatteita. Heitä opastetaan havaitsemaan ja nimeämään tasokuvioita ja kappaleita ympäristössä. Matematiikan opiskelu perustuu hyvin paljon konkreettisiin esimerkkeihin ja arkielämän havaintoihin. [49, s. 129]

Alakoulun myöhemmillä luokilla (vuosiluokat 3–6) näitä tietoja tarkennetaan: kappaleita ja kuvioita luokitellaan tarkemmin, ja oppilaat tutustuvat muun muassa lieriöiden ja kartioiden ominaisuuksiin. Oppilaat perehtyvät tarkemmin kolmioihin, nelikulmioihin ja ympyrään. Lisäksi oppilaat perehtyvät sellaisiin käsitteisiin kuin piste, jana, suora ja kulma. Oppilaat tutustuvat symmetrian käsitteeseen, sekä opettelevat käyttämään koordinaatistoa. Lisäksi oppilaat tarkentavat mittaamisen taitojaan ja kiinnittävät huomiota mittaustarkkuuteen. [49, s. 236]

Yläkoulussa, eli vuosiluokilla 7–9, geometrian opiskelu muuttuu alakoulua analyyttisemmaksi, kun kuvioiden ja kappaleiden tunnistamisen ja luokittelun lisäksi opiskellaan laskemaan niiden ominaisuuksia, kuten pinta-aloja ja tilavuuksia. Oppilaat laajentavat ymmärrystään pisteen, janan ja suoran käsitteistä, sekä opiskelevat viivan ja puolisuoran käsitteitä. Oppilaiden tulee vahvistaa olemassa olevia taitojaan muun muassa. yhdenmuotoisuuden ja yhtenevyyden käsitteiden ymmärryksessä. Eräänä tärkeänä osana yläkoulun geometrian opiskelua ovat suorakulmaiseen kolmioon liittyvät ominaisuudet: Pythagoraan lause ja sen käänteislause sekä trigonometriset funktiot. [49, s. 376]

Yläkoulussa oppilaat tutustuvat tarkemmin kulman käsitteeseen ja oppivat, mitä tarkoittaa kehä- ja keskuskulma. Lisäksi Thaleen lause mainitaan yhtenä opiskeltavana lauseena. Oppilaat perehtyvät tarkemmin ympyrään ja sen ominaisuuksiin. Oppilaat harjoittelevat ympyrän pinta-alan sekä sektorin alan laskemista. Lisäksi he harjoittelevat kehän ja kaaren pituuksien laskemista. Ympyrän lisäksi oppilaat harjoittelevat monikulmioiden pinta-alojen ja piirien laskemista. Mittaamisen osaamista laajennetaan mittayksiköiden ja yksikkömuunnosten opiskelulla. [49, s. 376]

Suoraan yläkoulun geometrian opetuksen tavoitteina perusopetuksen opetussuunnitelmassa luetellaan seuraavat:

- ”tukea oppilasta ymmärtämään geometrian käsitteitä ja niiden välisiä yhteyksiä (T16)

- ohjata oppilasta ymmärtämään ja hyödyntämään suorakulmaiseen kolmioon ja ympyrään liittyviä ominaisuuksia (T17)
- kannustaa oppilasta kehittämään taitoaan laskea pinta-aloja ja tilavuuksia (T18)" [49, s. 379]

Perusopetuksen opetussuunnitelman asettamat tavoitteet ja vaatimukset eivät ole siis kovin tarkkoja, varsinkin, kun ottaa huomioon, että edellä on esitetty käytännössä koko peruskoulun aikana opiskeltavat geometrian oppisisällöt. Jokaisen koulun tai kunnan tulisikin itse laatia opetussuunnitelman pohjalta oma, tarkempi opetussuunnitelma, jossa kerrotaan tarkasti, mitä milläkin vuosiluokalla tulee opiskella. Tämä tehtävä ei kuitenkaan ole helppo. Opetussuunnitelmassa käytetään usein muun muassa verbejä kannustaa, ohjata, tukea, tutkia, vahvistaa ja oppia. Nämä ovat melko laajasti ymmärrettävissä. Mitä esimerkiksi tarkoittaa "laajennetaan pisteen, janan, suoran ja kulman käsitteiden ymmärtämistä" [49, s. 376]? Kuinka laajasti oppilaiden tulee nämä asiat osata milläkin tasolla? Lopullisesti päätöksen opetuksen sisällöstä tekee aina kuitenkin opettaja, jolla on apunaan opetussuunnitelman pohjalta laaditut oppikirjat sekä koulu- tai kuntakohtainen opetussuunnitelma.

3.2.3 Hahmottavaa oppimista

Geometrisen käsitteen oppiminen eli käsitteenmuodostus on vaativa prosessi geometrian käsitteiden erityispiirteiden vuoksi. Geometrisiin käsitteisiin liittyy lähes erottamattomasti kuvioiden kautta syntyvä visuaalinen mielikuva, mihin liittyy joskus ongelmia. Esimerkiksi jotkin käsitteen tapaukset ovat tyypillisempiä kuin toiset. On myös tutkittu, että varsinkin ala- ja yläkouluikäisille oppilaille on tyypillistä hahmottaa geometrisia käsitteitä prototyyppien kautta. Oppilaalla on siis jokin prototyyppi siitä, miltä esimerkiksi kolmio näyttää. Oppilaalla on myös tietyt rajat, joiden puitteissa hän on valmis hyväksymään jonkin toisen kuvion kolmioksi, vaikka se ei olisikaan samanlainen kuin prototyyppi. [60]

Geometriseen käsitteenmuodostukseen liittyy kolme komponenttia, jotka voivat tapahtua hieman eri järjestyksissä. Hypoteesin testaus -teorian mukaan aluksi oppilaat analysoivat esimerkkitapauksia ja päätyvät näin esimerkkitapauksille yhteisiin ominaisuuksiin. Varsinainen käsite syntyy esimerkkitapausten ja niiden ominaisuuksien synteesinä. Sen sijaan prototyyppisessä käsitteenmuodostuksessa esikäsite muodostuu esimerkkien synteesinä ennen kuin esimerkkien ominaisuuksia on tietoisesti analysoitu. Usein nämä kaksi käsitteenmuodostusprosessia ohjaavat yhtä aikaa käsitteenmuodostusta, jolloin muodostuva käsite voi olla osalta hyvin määritelty ja toisaalta melko sumeakin. [60]

Geometrisessa hahmottamisessa on kyse siitä, että oppilas jäsentää spatiaalisia tilasuhteita vakiintuneiden käsitteiden kautta [60]. Jaakko Joki tutki väitöskirjassaan [26] alkeisgeometrian hahmottumista peruskoulun matematiikan opetuksessa. Väitöskirjassaan hän esittää tehtäviä geometrian osa-alueista, joissa ei tarvita ollenkaan laskemista. Lisäksi hän korostaa liiallisen "muodollisuuden" unohtamista peruskoulussa. Oppilaiden tulisi harpin ja viivaimen käytön opettelun sijaan saada piirtää vapaalla kädellä tai taitella muotoja paperista. Tällöin oppilaiden mahdollisesti heikko hienomotoriikka ei vaikeuta asioiden oppimista. [26] Joen väitöskirja on tehty yli 15 vuotta sitten, joten nykyään vapaalla kädellä piirtämisen ja paperin taittelun lisäksi listaan voisi lisätä dynaamisten geometriaohjelmistojen, kuten GeoGebran, käytön. Ohjelmisto piirtää kuviot valmiiksi, kunhan oppilas tietää, mitä ohjelmalla piirtää. Tällöin, kuten vapaalla kädellä piirrettäessä, oppilaan heikko hienomotoriikka ei vaikeuta asioiden oppimista. Kuvioiden piirtäminen GeoGebralla vaatii kuitenkin kuvioiden ominaisuuksien ymmärtämistä, sillä kuviot määritellään niiden ominaisuuksien avulla [60]. GeoGebrassa tätä on kuitenkin helpotettu sillä, että joissakin työkaluissa käsitteiden määritelmät ovat ”sisäänrakennettuja”, eli tietyllä työkalulla käsitteen määrittelemä kuvio syntyy aina oikein.

Joen mukaan peruskoulun geometria sisältää liikaa laskemista (pinta-aloja, tilavuuksia, pituuksia ja niin edelleen). Siteeraamansa Rolf Nevanlinnan mukaan matematiikan tulisi opettaa myös ajattelun ja itsensä ilmaisemisen taitoja. Geometrian opetus on oiva paikka opettaa juuri näitä taitoja. Kun oppilaat hahmottavat geometrian erilaisia tilanteita, heille tulee tarve määritellä niitä sekä kuvailla tilanteita toisille. Opettaja voi tällaisissa tilanteissa rohkaista oppilaita täsmällisen suullisen ja kirjallisen ilmaisun harjoitteluun. [26] Oppilaan ymmärtämisen kehittymisen kannalta on tärkeää, että oppilas kielentää matemaattisia käsitteitä eli kuvailee käsitteiden sisältöä omin sanoin. Tällöin oppilas joutuu miettimään, mitkä ovat käsitteen keskeisiä ominaisuuksia ja millä tavalla ne voisi ilmaista. Tämä palvelee sekä oppilasta itseään että hänen luokkatovereitaan, jotka voivat kehittää omaa ajatteluaan. Kielentämisen avulla oppilas voi tuoda omaa ajatteluaan näkyväksi. Tämä helpottaa opettajaa, sillä hän huomaa helpommin oppilaan onnistumiset ja vääristyneet uskomukset. [27]

Aiemmin geometrian opetuksessa Suomessa lähdettiin liikkeelle Eukleideen tasogeometria-järjestelmästä. Eukleideen järjestelmä on kuitenkin monimutkainen, ja vaatii erittäin paljon sekä aikaa että ymmärrystä opiskella se aksioomista lähtien. Lauseiden todistamisesta tulee pitkien ketjujen läpi käymistä, jotta lopulta päästään kiinni aksioomiin. Silti tietynlaista todistamista tulisi harjoitella jo peruskoulussa. Tällöin voidaan kuitenkin lähteä liikkeelle niin kutsutuista kvasiaksioomista. Voidaan esimerkiksi olettaa, että kolmion kulmien summa on 180°, ja tämän oletuksen perusteella todistaa muita lauseita. [26] Samoin teki jo Kalle Väisälä Geometria-teoksessaan, jossa otetaan kvasiaksioomaksi esimerkiksi suunnikkaan määritelmä, jonka jälkeen todistetaan suunnikkaaseen liittyviä lauseita tämän kvasiaksiooman pohjalta [71].

Myös oletetut ja valmiina annetut ”kvasiaksioomat” pitäisi pystyä todistamaan oppilaille. Suomalaisten koululaisten matematiikan taito on heikentynyt, kun sitä tarkkaillaan pitkällä aikavälillä. Laskimien käytön vuoksi yksinkertaiset numerolaskut eivät onnistu oppilailta yhtä hyvin kuin aiemmin. Myös erityisesti geometrian osaaminen on laskenut, sillä sitä opetetaan nykyään kuvailevammin ja vähemmän kuin aiemmin. [40] Vuonna 2012 julkaistussa arviointiraportissa peruskoulun päättävien oppilaiden geometrian osaaminen oli kaikista matematiikan osa-alueista kaikkein heikointa [16]. Muutamia vuosia sitten lyhyen matematiikan ylioppilaskokeessa tuli vastata kysymykseen, miksi kolmion kulmien summa on 180°. Käytännössä kukaan vastanneista ei osannut antaa oikeaa vastausta. Sen sijaan, että matemaattisia sääntöjä opetetaan annettuina tosiasioina, pitäisi oppilaiden matematiikan hahmottamista ja opittavien asioiden todellista ymmärtämistä parantaa. [40]

3.2.4 Van Hielen teoria

Van Hielen teoria selittää, kuinka geometriaa opitaan. Teorian kehittivät hollantilaiset Pierre Van Hiele ja Dina van Hiele-Geldof, ja se julkaistiin heidän väitöskirjassaan 1957. Van Hielen teoriaa on tämän jälkeen tutkittu melko paljon. Neuvostoliitossa kehitettiin 1960-luvulla geometrian opintojaksoja van Hielen teoriaan perustuen. Samoin Yhdysvalloissa ja Suomessakin van Hielen teoriaa on tutkittu paljon. [70]

Van Hielen teorialla on muutamia keskeisiä ominaisuuksia. Opiskellessaan geometriaa, oppilaat käyvät läpi viisi tasoa (van Hielen tasot), jotka kuvaavat oppilaan geometrisen ajattelun kehitystä. Olennaista on se, että tasot käydään läpi tietyssä järjestyksessä. Oppilas ei siis voi olla kolmannella tasolla, jos hän ei ole käynyt läpi tasoja yksi ja kaksi. Se, mikä edellisellä tasolla oli implisiittistä eli epäsuoraa, muuttuu seuraavalla tasolla eksplisiittiseksi eli selkeäksi ja täsmälliseksi. Eri tasoilla olevien oppilaiden käyttämä kieli ja ymmärryksen taso ovat niin erilaisia, etteivät nämä oppilaat välttämättä ymmärrä toisiaan. Opettajan tulee huomioida tämä puhuessaan eri tasoilla oleville oppilaille. [59, 70]

Van Hielen tasot

Seuraavassa esitellään van Hielen teorian viisi tasoa. Niiden suomenkieliset nimet vastaavat Silfverbergin käyttämiä termejä [59]. Alkuperäisessä teoriassa tasot numeroitiin nollasta neljään, mutta tässä käytetään yleisemmin käytettyä numerointia yhdestä viiteen. [70]

1. Visualisoinnin taso
   Tällä tasolla geometrisiä kuvioita käsitellään kokonaisuuksina, ja niitä luokitellaan puhtaasti niiden ulkomuodon eikä esimerkiksi ominaisuuksien mukaan. Ajattelu on tällä tasolla hyvin konkreettista ja käytetty kieli yksinkertaista ja arkista.
2. Ominaisuuksien analysoinnin taso
   Tällä tasolla oppilaat alkavat analysoida ja nimetä geometristen kuvioiden ominaisuuksia. Oppilaat eivät osaa erottaa, mitkä ovat välttämättömiä ominaisuuksia tai ehtoja. Ominaisuudet nähdään erillisinä, eikä niiden välisiin riippuvuussuhteisiin kiinnitetä huomiota.
3. Ominaisuuksien järjestämisen taso
   Oppilaat ymmärtävät ominaisuuksien ja kuvioiden välisen yhteyden. He tunnistavat ominaisuuksista välttämättömät ja riittävät ominaisuudet. Lisäksi he osaavat perustella väittämiään.

4. Formaalin päättelyn taso
   Tällä tasolla oppilaat pystyvät annettujen tietojen perusteella päättelemään seurauksia sekä todistamaan geometrisia lauseita itsenäisesti. He ymmärtävät, mitkä ominaisuudet johtuvat toisistaan. Lisäksi oppilaat hallitsevat deduktiivisen geometrian edellyttämän ajattelutavan.

5. Aksiomisysteemin ymmärtämisen taso
   Oppilas ymmärtää geometrioiden aksiomaattisen luonteen ja osaa vertailla erilaisia geometrioita keskenään.

Van Hielen tasojen moninainen numerointi vaikeuttaa aiheesta tehtyjen tutkimusten vertailua keskenään. Lisäksi osa tutkijoista on sitä mieltä, että järjestelmään tulisi lisätä niin sanottu ”nollas” taso niille oppilaille, jotka eivät saavuta edes ensimmäistä van Hielen tasoa. Lisäksi on kritisoitu viidennen tason tarpeellisuutta puhuttaessa koulumatematiikasta. Tasojen nimeäminen niin englannissa kuin suomessakin on kirjavaa, eikä vakiintuneita nimiä oikeastaan ole. Aiemmista suomenkielisistä tasojen nimistä tässä esitetyt nimet poikkeavat vain ensimmäisen tason kohdalla. Aiemmin taso nimettiin tunnistamisen tasoksi, joka voitaisiin tulkita geometristen kuvioiden ja niiden erikoistapausten virheettömäksi tunnistamiseksi. Koska tämä ei kuitenkaan ole ensimmäisellä tasolla vaadittava taito, on visualisoinnin taso kuvaavampi nimitys. [59]

Siirtyminen tasolta toiselle

Pierre van Hiele ja Dina van Hiele-Geldof ehdottivat tutkimustensa perusteella opetusmenetelmää, jonka avulla oppilaan geometrista ajattelua voidaan nostaa tasolta seuraavalle. Näiden opetusmenetelmien tarkoitus on vähitellen lisätä oppilaan omaa ajattelua ja itsenäistä toimintaa. Silfverbergin [59] suomennoksia käyttäen siirtymät on kuvattu seuraavassa listassa.

1. Tutkiva kysely
   Opettaja keskustelee oppilaiden kanssa yrittäen saada selville oppilaiden ennakkotietoja opiskeltavasta aiheesta. Opettaja myös johdattelee oppilaita aiheeseen.

2. Suunnattu orientoituminen
   Oppilaat tekevät tehtäviä, joiden avulla he ymmärtävät, mihin opetuksella pyritään. Tässä vaiheessa monivaiheisia tehtäviä tulisi välttää. Oppilaat perehtyvät opiskeltavan aiheen ominaisuuksiin.

3. Tarkentaminen
   Oppilaita rohkaistaan kehittämään aiheeseen liittyvää sanastoa ja käyttämään sitä. Oppilaat kuvaavat löytämiään suhteita ja opettaja varmistaa, että käytetty kieli ja termit ovat oikeanlaisia.

4. Vapaa orientoituminen
   Oppilaat tekevät tehtäviä, joihin on monta erilaista ratkaisua tai jotka voidaan ratkaista monella eri tavalla. He etsivät ongelmiin omia ratkaisuja. Oppilaat ymmär-

tävät opiskeltavan aiheen ominaisuuksia, mutta heidän tulee vielä kehittää ominaisuuksien välisten suhteiden ymmärtämistä ja soveltamista.

5. Kokoaminen
   Opettaja kokoaa opiskellusta aiheesta yhteenvedon, jossa ei enää esiinny uusia tai toiseen aiheeseen liittyviä käsitteitä.

Nämä opetuksen metodit etenevät konkreettisesta ja johdattelevasta opetuksesta yhä abstraktimpaan ja oppilaiden omaa ymmärrystä korostavaan suuntaan. Vaiheet eivät kuitenkaan ole tarkasti järjestyksessä eteneviä kuten van Hielen tasot. Van Hielen mukaan tasolta toiselle siirtymisessä nimenomaan oppilaan saama ohjaus on tärkeää, eikä esimerkiksi se, kuinka vanha tai kypsä oppilas on. [70]

Van Hielen teoriaan liittyvä tutkimus

Usiskin tutki opiskelijoiden sijoittumista van Hielen tasoille ja tämän yhteyttä heidän koemenestykseensä Yhdysvalloissa 1980-luvulla. Tutkimuksen tarkoituksena oli erityisesti selvittää van Hielen tasojen mitattavuutta ja niiden ennustavuutta. Tutkimukseen osallistui 2699 opiskelijaa useasta eri ryhmästä, koulusta ja osavaltiosta. Kaikkia ryhmiä testattiin geometrian kurssin alussa ja sen lopussa. Kurssin alussa tehtiin geometrian taitoja mittaava testi sekä van Hielen tasojen testi. Kurssin lopuksi tehtiin standardoitu geometrian testi sekä uudelleen van Hielen tasojen testi. [69]

Ongelmaksi muodostui jo van Hielen tasojen määrittely. Tutkimuksessaan Usiskin päätyi siihen, että teorian alkuperäisessä muodossa van Hielen tasoa 5 ei joko ole olemassa tai sitten sitä ei voi mitata. Usiskin tutki opiskelijoiden sijoittumista van Hielen tasoille kyselyn perusteella. Kyselyssä oli viisi kysymystä jokaiselle van Hielen tasolle. Opiskelija päätyi tietylle tasolle, jos hän osasi vastata määrättyyn määrään kyseisen tason ja kaikkien alempien tasojen tehtävistä oikein. Usiskin analysoi aineistoa kahdella tavalla: joko opiskelijan piti osata kolme viidestä tehtävästä tai neljä viidestä tehtävästä. Usiskinin mukaan opiskelijoista yli kaksi kolmasosaa tai jopa yli 90 % oli helposti sijoitettavissa jollekin van Hielen tasolle. Osa opiskelijoista ei saavuttanut edes van Hielen tasoa 1, jolloin Usiskin sijoitti heidät tasolle 0. [69]

Koska Usiskin testasi samoja opiskelijoita sekä kurssin alussa että sen lopussa, hän tutki myös sitä, muuttuiko opiskelijoiden van Hielen taso geometrian kurssin seurauksena. Yllätykseksi opiskelijoiden van Hielen tason muutoksessa oli suurta vaihtelua. Noin kolmasosa opiskelijoista pysyi samalla tasolla tai jopa siirtyi alemmalle tasolle. Seuraava kolmannes pysyi samalla tasolla ja loput kolmasosa opiskelijoista kasvatti van Hielen tasoaan yhdellä tai useammalla tasolla. Lisäksi Usiskin havaitsi, että van Hielen taso ennustaa hyvin sitä, kuinka hyvin opiskelija menestyy muissa geometrian testeissä. [69]

Väitöskirjassaan [59] Harry Silfverberg testasi van Hielen teorian oleellisia hypoteeseja sekä tämän kautta muodostetun mallin toimivuutta geometrisen käsitetiedon kehittymisen kuvauksessa. Silfverberg päätyi lisäämään van Hielen tasojen 1 ja 2 väliin uuden välitason 1-2, jossa ”tarkasteltavat kuvioiden yhteiset geometriset ominaisuudet tulkittiin empiirisen abstraktion mukaan yleistyksiksi yli sen ja vain sen kuviojoukon, jota testiosion kuvat konkreetisti esittävät”. Tämän lisäyksen jälkeenkin Silfverberg on sitä mieltä, etteivät van Hielen tasot ole niin vahvasti hierarkkisia kuin alkuperäisessä teoriassa on esitetty. Oppilas voi olla joissakin taidoissa alemmalla tasolla samalla kun toiset taidot kehittyvät korkeammalla tasolla. [59]

Silfverbergin tutkimuksessa oli mukana noin 200 oppilasta yhdestä yläkoulusta. Tutkimuksensa perusteella Silfverberg huomasi jo aiemmissakin tutkimuksissa todetun asian, että jokaiselta yläkoulun luokka-asteelta löytyy huomattavasti oppilaita, jotka eivät saavuta mitään van Hielen tasoa. Lisäksi yleensä enintään 15 % luokkatason oppilaista sijoittuu van Hielen kolmannelle tai korkeammalle tasolle. Näistä voidaan päätellä, että enemmistö yläkoulun oppilaista sijoittuu van Hielen tasoille 1 ja 2. Oppilaista 50:lle saatiin määritettyä van Hielen taso yläkoulun alussa ja lopussa. Noin viidesosan van Hielen taso heikkeni, kun taas noin kolmasosan van Hielen taso kasvoi. Oppilaista 20 % sijoittui jo yläkoulun alussa korkeimmalle van Hielen tasolle, eikä heidän tasonsa laskenut yläkoulun aikana. Tämä ei kuitenkaan kerro heidän ajattelunsa kehittymisestä mitään. [59]

3.3 Oppimisaihioiden rakentamisen näkökulmia

Yksi tulevaisuuden taito on tietotekniikan käyttötaito, joka on tärkeä taito jo nyt sekä työelämässä että opiskelussa [5]. Oppilaiden tulee osata sekä oppia käyttämään erilaisia järjestelmiä että osata käyttää järjestelmiä tarkoituksenmukaisesti. Myös perusopetuksen opetussuunnitelmassa korostetaan erilaisten oppimisympäristöjen ja työskentelytapojen kuten tieto- ja viestintäteknologian käytön harjoittelua. Tämän vuoksi erilaisten ohjelmistojen tarkoituksenmukaista käyttöä tulee harjoitella jo peruskoulussa.

Ylioppilastutkinnon kokeet muuttuvat digitaalisiksi vaiheittain niin, että matematiikan koe digitalisoituu viimeisenä keväällä 2019 [72]. Noin puolet jokaisesta ikäluokasta suorittaa ylioppilastutkinnon, minkä vuoksi oppilaiden on hyvä opetella käyttämään sähköisiä työkaluja jo peruskoulussa. Kun sähköisten työkalujen käyttämistä harjoitellaan jo peruskoulussa, voidaan lukiossa keskittyä paremmin haastavien aiheiden opiskeluun työvälineiden käytön opiskelun sijaan. Myös ammatillisessa koulutuksessa, muissa jatko-opinnoissa ja työelämässä tarvitaan erilaisten ohjelmistojen ja sähköisten työkalujen käyttötaitoa.

Lukiolain mukaisesti Ylioppilastutkintolautakunta ”vastaa tutkinnon johtamisesta, järjestämisestä ja toimeenpanosta” [46, §18b]. Ylioppilastutkintolautakunta on antanut yleiset määräykset ja ohjeet, jotka sisältävät tietoa muun muassa osallistumisoikeudesta, digitaalisessa kokeessa tarvittavista välineistä sekä kokeiden käytännön järjestelystä. Lisäksi Ylioppilastutkintolautakunta on antanut osaan aineista ainekohtaisia määräyksiä. Matematiikan digitaalisesta kokeesta on esimerkiksi määrätty sen rakenne sekä kokeessa sallitut ohjelmistot [72]. Tämä poikkeaa opetussuunnitelmasta siinä, että käytettävät ohjelmistot todella mainitaan nimeltä. Ylioppilastutkinnossa ohjelmien ennalta määrääminen on kuitenkin välttämätöntä, sillä Abitti-koejärjestelmään, jolla tutkinto suoritetaan, asennetaan etukäteen vain nämä tietyt ohjelmat.

Erityisesti matematiikan ylioppilaskokeessa haasteeksi nousee matemaattisen tekstin kirjoittaminen tietokoneella. Monissa muissa oppiaineissa samaa ongelmaa ei ole, koska niiden materiaalit pohjautuvat lähinnä tekstiin ja kuviin tai videoihin. Matemaattisessa aineistossa on sekaisin niin tavallista tekstiä kuin matemaattisia merkintöjä, kaavoja ja kaavioita. Tavallisin tapa esittää matemaattista tekstiä tietokoneella on LaTeX-järjestelmä, mutta sen opiskelu vaatisi paljon aikaa, eikä sitä voida vaatia opiskelijoilta. [57] Kuitenkin tietyntasoisen matemaattisen sisällön esittäminen tietokoneella on tarpeen niin opinnoissa kuin työelämässäkin.

Ylioppilastutkintolautakunnan tiedotteen mukaan matematiikan kokeen tarkoituksena on edelleen saada selville, kuinka hyvin opiskelija on oppinut lukion opetussuunnitelman mukaiset oppisisällöt. Digitaalinen koe tarjoaa mahdollisuuden tuoda kokeeseen erilaista aineistoa sekä luoda erilaisia tehtäviä kuin aikaisemmin. Lisäksi tehtävien ratkaisutavat voivat olla uudenlaisia. Digitaalinen koe ei muuta monia kokeen järjestelyjä, vaan esimerkiksi kokeen moniosaisuus säilyy edelleen. Tiedotteessa sanotaankin, että ”parhaiten digitaaliseen kokeeseen voi valmistautua opiskelemalla monipuolisesti opetussuunnitelman mukaisia tietoja ja taitoja”. [73] Toisaalta matematiikan digitaalisen kokeen todellinen luonne selviää vasta sen jälkeen, kun digitaalisia kokeita on pidetty jo muutama. Digitaaliset aineistot ja työkalut tarjoavat jo peruskoulussakin oppilaille keinon osoittaa osaamistaan perinteisestä poikkeavilla tavoilla. Kuitenkin tärkeintä on oppiaineiden sisältöjen hallinta.

Tässä luvussa esitellään erilaisia näkökulmia oppimisaihion suunnitteluun. Aluksi käydään läpi peruskoulun opetussuunnitelman vaatimukset tieto- ja viestintäteknologian (TVT:n) käytölle sekä sitä, miten TVT:n opetuskäyttö on kehittynyt vuosien saatossa (osio 3.3.1). Opiskeluinnon ja oppimisen yhtenä tärkeimpänä tekijänä on oppilaan motivaatio. Oppilaiden tulisi myös oppia säätelemään omaa toimintaansa ja tunnistamaan omia ajatuksiaan eli oppia metakognitiivisia taitoja. Näitä näkökulmia käsitellään osiossa 3.3.2.

Tässä diplomityössä tausta-ajatuksena toimii tutkivan oppimisen lisääminen oppitunneille. Lisäksi nykyään korostetaan yhteisöllistä oppimista erityisesti työelämässä tarvittavien sosiaalisten taitojen kehittämiseksi. Näitä käsitellään osiossa 3.3.3. Näistä päästään lopulta tämän diplomityön pääaiheeseen eli erilaisten oppimisaihioiden kehittämiseen (osio 3.3.4).

3.3.1 Tieto- ja viestintäteknologia opetuksessa ja sen kehitys

Tieto- ja viestintäteknologian arkikäyttö on kasvanut suorastaan räjähdysmäisesti viimeisen 20 vuoden aikana. TVT:a on kuitenkin opetettu eri kouluasteilla jo 1980-luvulta lähtien. Aluksi opetus painottui ohjelmoinnin opiskeluun, josta pikkuhiljaa siirryttiin erilaisten ohjelmistojen käyttämiseen. Vuoden 1994 perusopetuksen opetussuunnitelmassa tavoitteena oli, että oppilaat oppivat peruskoulun aikana käyttämään tietotekniikkaa. [48, s. 8]

Tietokoneavusteisten opetusohjelmien kehitys alkoi 1990-luvulla. Tämä tarkoitti esimerkiksi CD-ROM-levyille tallennettuja opetuspelejä. Aluksi ohjelmat olivat pedagogisesti jopa melko edistyneitä, mutta niiden levittäminen laajalle oli vaikeaa. Kun CD-ROM:ien käyttö yleistyi, ohjelmien määrä kasvoi, mutta samalla niiden pedagoginen laatu heikkeni. Kun oppimisteoreettinen tutkimus alkoi painottaa tekemällä oppimista, nähtiin tietotekniikka hyvänä apuvälineenä uudenlaisen opetusmenetelmän käyttöön. Tutkimusta tietotekniikan opetuskäytöstä tehtiin niin Suomessa kuin ulkomaillakin. [48, s. 8–9]

Aiemmasta tietotekniikan erillisestä opetuksesta on 2000-luvulla siirrytty ajatukseen, jonka mukaan tietotekniikkaa opitaan parhaiten sisällyttämällä se osaksi muita oppiaineita. Tämä mainittiin vuoden 2004 opetussuunnitelman perusteissa, mutta tietotekniikan opetus jäi silti melko vähäiseksi. Internetin ja erilaisten online-palveluiden määrä kasvoi 2000-luvulla valtavasti ja tietotekniikka alkoi olla arkipäiväinen väline tiedonhakuun ja ihmisten väliseen kanssakäymiseen. Digitaalisen oppimateriaalin määrä on kasvanut ja sen interaktiivisuutta on lisätty. Lisäksi monet koulut ovat tehneet suuria investointeja TVT-laiteisiin: tietokoneisiin, älytauluihin ja kannettaviin mobiililaitteisiin. [48, s. 9–10]

Peruskouluissa otettiin vuonna 2014 käyttöön uusi opetussuunnitelma. Perusopetuksessa ei ole enää tärkeintä se, mitä opitaan, vaan ennemminkin se, miten opitaan. Vaikka jokaiselle aineelle on määritelty tiettyjä oppisisältöjä, jotka oppilaiden tulee kunkin vuosiluokan jälkeen hallita, opetussuunnitelmassa korostuu erilaisten oppimismenetelmien ja laaja-alaisen oppimisen korostaminen. Tärkeää on oppia oppimaan, eli oppia erilaisia opiskelutapoja. Myös erilaisten oppimisympäristöjen tärkeyttä korostetaan. Opiskelu ei enää ole kirjoista pänttäämistä pulpeteissa istuen. Sen sijaan oppilaiden tulee saada liikkua, tehdä töitä ryhmässä ja yksin sekä käyttää oppimisessa erilaisia apuvälineitä ja materiaaleja. [49]

Koulun arjessa tulee käyttää monipuolisesti ja suunnitelmallisesti erilaisia työskentelytapoja, joista tieto- ja viestintäteknologian (TVT:n) käyttö on yksi. Sen avulla voidaan toteuttaa moniaistista ja monikanavaista työskentelyä. TVT:a käytetään niin erilaisten omien tuotosten tekemiseen kuin verkostoitumiseen ja vuorovaikutukseen ihmisten kanssa yli kunta- tai valtiorajojen. [49, s. 27]

Uusi opetussuunnitelma korostaa laaja-alaisten osaamisen tärkeyttä, ja siinä on lueteltu seitsemän laaja-alaisen osaamisen kokonaisuutta, joiden toteutumista kouluissa tulee korostetusti valvoa. [49, s. 20] Yksi näistä kokonaisuuksista on tieto- ja viestintäteknologinen osaaminen (L5). TVT:a tulee käyttää niin oppimisen välineenä kuin sen kohteena. Oppilaiden tulee tutustua useisiin eri ohjelmistoihin ja pohtia niiden käyttökohteita. Oppilaiden tulee myös oppia tuottamaan omaa sisältöä useilla eri ohjelmistoilla. [49, s. 23]

Yläkoulussa eli vuosiluokilla 7-9 laaja-alaisen osaamisen tavoitteissa korostetaan TVT:n asemaa luonnollisena osana oppilaan oppimista ja toisaalta arkielämää. TVT:n osaamiseen liittyviä tavoitteita ovat käytännön taidot ja oma tuottaminen, vastuullinen ja turvallinen toiminta, tiedonhallinta sekä tutkiva ja luova työskentely sekä vuorovaikutus ja verkostoituminen. TVT:a tulee käyttää osana useita eri oppiaineita, ja sen kautta oppilaat oppivat muutakin kuin erilaisten ohjelmien käyttöä, kuten vuorovaikutustaitoja ja TVT:n merkitystä yhteiskunnalle. [49, s. 284]

Matematiikan opetusta käsittelevässä luvussa mainitaan TVT hyvin yleisluontoisesti: ”Oppimista tuetaan hyödyntämällä tieto- ja viestintäteknologiaa.” Yhtenä opetuksen tavoitteena mainitaan TVT:n käyttäminen matematiikan opiskelussa ja ongelmanratkaisussa. TVT nähdään yhtenä matematiikan oppimisympäristönä ja toisaalta myös työtapana. Erityisesti mainitaan taulukkolaskentaohjelmien ja dynaamisten geometriaohjelmistojen käyttö niin oppimisen kuin arvioinnin ja luovuudenkin välineenä. Huomioitavaa on, ettei opetussuunnitelmassa mainita tiettyjä ohjelmistoja, joiden osaaminen olisi oppilaille välttämätöntä. Tällainen lähestymistapa korostaa sitä, että samat taidot voi oppia monella eri tavalla. [49, s. 374–379]

Tampereen seudun esi- ja perusopetuksen TVT-suunnitelmassa vuosille 2016-2018 korostetaan tulevaisuuden taitojen laajamittaista opettelua kaikilla kouluasteilla. Tavoitteiksi mainitaan kansallisen opetussuunnitelman mukaisesti TVT:n käyttö laajasti ja monipuolisesti kaikilla vuosiluokilla ja kaikissa oppiaineissa. Yläkoululaisten tavoitetasolla oppilas osaa käyttää niin koulun tarjoamia laitteistoja ja palveluja kuin omia laitteita. Suunnitelmassa korostetaan myös opetustoimen, koulun johdon ja opettajien vastuuta näiden tavoitteiden toteutumisessa. Yhtenä oppimateriaaleihin liittyvänä tavoitteena on, että vuonna 2018 oppikirjoista 90 % olisi sähköisiä. [63]

Koska nykyinen tietokäsitys on hyvin laaja, tulee oppilaiden oppia koulussa enemmänkin oppimisen ja ajattelun taitoja kuin faktoja. Kansallisessa tieto- ja viestintätekniikan opetuskäytön suunnitelmassa kuvaillaan, millainen tulevaisuuden koulun tulisi asiantuntijaryhmän mielestä olla. Julkaisussa ylistetään TVT:n käyttöä melko varauksetta, mutta siinä korostetaan myös oppilaskeskeisten toimintatapojen käyttöönottoa ja opettajan roolin muutosta. [36]

TVT:n opetuskäytön vakiintumista estää työryhmän mukaan muun muassa kouluittain vaihteleva ja riittämätön tekninen infrastruktuuri, e-oppimateriaalin saatavuus, laatu ja levittäminen sekä koulun toimintakulttuurin haasteet. Julkaisussa on esitetty ratkaisuehdotuksia hankekoulujen tutkimusten ja Opetusteknologia koulun arjessa -hankkeen pohjalta. Yhtenä ehdotuksena on perustaa verkkoon kansallinen vuorovaikutteinen opetuksen tietopalvelu, josta löytyisivät esimerkiksi verkkopohjaiset oppimisympäristöt, opetussuunnitelmat sekä linkkejä materiaalipankkeihin. Lisäksi ehdotetaan kuitenkin melko yleisluontoisesti vahvistamaan yhteisöllisen oppimisen taitoja TVT:n avulla sekä ottamaan käyttöön henkilökohtaisia opintopolkuja. Työryhmän mukaan on tärkeää, että TVT:n avulla lisätään oppilaiden aktiivisuutta oppimisessa sekä yhteisöllisen oppimisen taitoja. [36]

Monet työryhmän esittämät ratkaisuehdotukset ovat yleisluontoisia ja sinällään käyttökelpoisia, mutta osa niistä vaatii selvästi enemmän rahaa kuin mitä oppilaitoksilla on käytettävissä. Esimerkiksi opettajankoulutuslaitosten tulisi hankkia ajanmukaiset välineet, jotka kuitenkin kehittyvät lähes vuosittain suurilla harppauksilla eteenpäin. Myös opettajilla ja oppilailla tulisi olla käytössä ajanmukaiset välineet ja pääsy verkkoon. [36]

Matematiikan opiskeluun uudet tietotekniset välineet tarjoavat esimerkiksi helppoja tapoja konkretisoida ja visualisoida matematiikan käsitteitä ja sääntöjä. Materiaalia on paljon valmiina ja opettajat voivat tuottaa sitä itse. Oppilaat käyttävät myös yhä kasvavassa määrin erilaisia ohjelmistoja matemaattisten ongelmien ratkaisussa. Tällaisia järjestelmiä ovat esimerkiksi CAS-laskimet, WolframAlpha-hakukone tai GeoGebra-ohjelmisto. Matematiikan opiskelu onkin muuttumassa yhä enemmän oppilaan ja koneen väliseksi vuorovaikutukseksi. Oppilaiden tulee osata kirjoittaa matematiikkaa siinä muodossa, että kone ymmärtää sitä. Toisaalta tällaisten järjestelmien ja ohjelmistojen käyttäminen väistämättä rajoittaa oppilaan matematiikkakäsitystä, sillä hän oppii hahmottamaan matematiikkaa ohjelmiston kautta. Onkin tärkeää pohtia, kuinka paljon esimerkiksi päässälaskutaitoa on harjoiteltava ja missä vaiheessa opetusta erilaiset matematiikkaohjelmistot otetaan käyttöön. Erilaisia ajattelun apuvälineitä (kuten helmitaulua, harppia ja viivainta) on käytetty jo vuosituhansia, ja teknologiset apuvälineet ovat osa tätä jatkumoa. [61]

3.3.2 Motivointi ja metakognitiivisten taitojen oppiminen

Sähköisiä oppimateriaaleja voidaan käyttää hyvin erilaisilla tavoilla, jolloin erilaisista asioista motivoituvat oppilaat saadaan opiskeltavan aiheen pariin. Oppilaiden motivointi on yksi kouluopetuksen suurimmista haasteista, ja siihen tulisi kiinnittää yhä enemmän huomiota nykymaailmassa, jossa sosiaalinen media ja muut digitaaliset palvelut vangitsevat oppilaiden huomion myös oppituntien aikana.

Motivaatio tarkoittaa jotakin sellaista, joka saa ihmiset toimimaan ja tekemään asioita. Se on tärkeä tekijä opiskelussa, sillä oppiminen vaatii jatkuvaa itsensä kehittämistä ja halua tietää ja osata enemmän. Motivaatio jaetaan usein sisäiseen ja ulkoiseen motivaatioon. Sisäinen motivaatio tarkoittaa sitä, että ihmisellä on sisäinen palo tehdä jotakin asiaa ja hän tekee sitä huolimatta siitä, mitä muut ajattelevat. Ulkoinen motivaatio tulee nimensä mukaisesti ihmisen ulkopuolelta, ja sellaista on esimerkiksi vanhempien toiveiden toteuttaminen tai hyvän arvosanan tavoittelu. Pelillistäminen on yksi tapa lisätä ulkoista motivaatiota. [38]

Tavoiteorientaatiot tarkoittavat eri tapoja asettaa tietoisia tai tiedostamattomia tavoitteita omalle toiminnalle. Motivaatio kuvastuu juuri näissä tavoitteissa. Tavoiteorientaatiot on yleensä tutkimuksessa jaoteltu neljään eri tyyppiin: oppimisorientaatio, suoritus-lähestymisorientaatio, suoritus-välttämisorientaatio sekä välttämisorientaatio. [38] Yleensä ne liittyvät juuri oppimisen motivaatioon. Oppimisorientoitunut oppilas haluaa oppia uusia asioita ja kehittää itseään. Hän haluaa ymmärtää asiat eikä vain opetella niitä ulkoa. Oppimisorientoituneet oppilaat ovat aktiivisia myös teknologisessa oppimisympäristössä [64]. Suoritus-lähestymisorientoitunut oppilas haluaa näyttää osaamisensa muille ja mahdollisesti miellyttää muita. Hän haluaa saada hyviä tuloksia vain välttääkseen huonojen tulosten saamisen. [38] Välttämisorientoitunut oppilas haluaa saada tarvittavat tehtävät tehtyä mahdollisimman vähällä työllä. Teknologiset oppimisympäristöt tarjoavat välttämis- ja suoritus-lähestymisorientoituneelle oppilaalle erilaisen, kenties kiinnostavamman tavan oppia ja osallistua opetukseen [64]. Tavoiteorientaatio ei siis suoraan ohjaa sitä, miten oppilas kiinnostuu teknologisesta oppimisympäristöstä tai itse opiskeltavasta aiheesta.

Motivaatioon liittyvällä pystyvyysuskolla on Banduran sosiokognitiivisessa teoriassa keskeinen rooli, ja se kuvaa ihmisen uskoa omiin kykyihin. Kyse ei ole ihmisen taidoista vaan nimenomaan siitä, kuinka ihminen uskoo selviytyvänsä jostakin tietystä tehtävästä tai tilanteesta. Pystyvyyskokemukset vaikuttavat muun muassa ihmisen sinnikkyyteen ja motivaatioon sekä siihen, kuinka tehokkaasti ihminen saa käytettyä hänellä olevia taitoja. Pystyvyysuskoa voidaan testata esimerkiksi Banduran kehittämällä testillä. [38]

Väitöskirjassaan [38] Tuija Lukin tutki yläkoulun oppilaiden matematiikan opiskelun motivaatiotekijöissä tapahtuvia muutoksia kolmen yläkouluvuoden aikana. Tutkimus toteutettiin neljänä eri kyselynä yläkoulun eri vaiheissa. Lukin havaitsi, että oppilailla esiintyi erilaisia tavoiteorientaatioita, ja että niistä yleisimpänä oppilailla oli välttämiseen painottuva orientaatio. Vähän yli puolella oppilaista tavoiteorientaatioprofiili ei juurikaan muuttunut yläkoulun aikana. Niillä, joilla profiili muuttui, se muuttui hieman useammin oppimisorientaatiota kuin välttämisorientaatiota kohti. Lukin huomasi myös, että kodin tuki on tärkeää oppilaan menestymisessä ja suotuisan tavoiteorientaation muodostamisessa. [38]

Usein ajatellaan, että tieto- ja viestintäteknologian käyttö motivoi oppilaita automaattisesti, jolloin oppilaat kiinnostuvat myös itse opiskeltavasta aiheesta. Tutkimusten mukaan TVT:n käyttö ei kuitenkaan itsessään motivoi oppilaita [64]. TVT:n uskotaan tukevan opittavan asian merkityksellisyyden kokemusta, jolloin oppilas sitoutuu opittavaan asiaan paremmin. TVT:n tehtävänä on tukea oppilaan itsesäätelykykyä ja yhteisöllisyyttä sekä samalla mahdollistaa kehittyneempien pedagogisten ajatusten toteuttaminen.

Motivaatio ei ilmiönä muuta muotoaan teknologisessa oppimisympäristössä, mutta se saattaa aiheuttaa oppilaille uudenlaisia mahdollisuuksia ja haasteita [64]. Motivaation herättäjänä voidaan pitää tehtävän tai aiheen kiinnostavuutta tai oppilaan kiinnostuneisuutta. Kiinnostuneisuus määritellään yleensä yksilön tai tilanteen pysyvään ominaisuuteen, kun taas kiinnostavuus on enemmän tilannesidonnainen. Tehtäviä suunnitellessa esimerkiksi teknologisessa oppimisympäristössä, tulisi huomioida muutamia universaalisti kiinnostavina pidettyjä ominaisuuksia. Suzanne Hidin mukaan tällaisina ominaisuuksina pidetään muun muassa tehtävän piirteiden yllätyksellisyyttä, konkreettisuutta, uutuutta ja intensiivisyyttä [14]. TVT:n avulla voidaan luoda oppimateriaaleja, joissa näitä piirteitä käytetään oppilaan mielenkiinnon herättämiseen. Oppimateriaalit voivat olla värikkäitä ja yllätyksellisiä ja kiinnittää näin oppilaan huomion. Yksilölliset oppimispolut lisäävät oppilaiden motivaatiota ja tukevat hänen luottamustaan omiin kykyihinsä. Tätä lisää myös tehtävänaikainen palaute, jota TVT:n avulla toteutetuissa oppimateriaaleissa on suhteellisen helppo antaa. Kun oppilas näkee, että on tehnyt esimerkiksi testauksia tai päätelmiä oikein, hän saa onnistumisen tunteita, joita ei ilman palautetta olisi saanut. [65]

Teknologisilla oppimisympäristöillä voidaan tukea yksilön metakognitiivisten taitojen oppimista. Metakognitiiviset taidot tarkoittavat yksilön kykyä tarkkailla ja ohjailla omaa toimintaa sekä ajatuksia, ja niiden avulla yksilö voi myös tunnistaa motivaatioon vaikuttavia tekijöitä. Teknologiset oppimisympäristöt toimivat erityisesti scaffoldingissa eli oppimisen ohjatussa tukemisessa. [19] Scaffolding liittyy Lev Vygotskyn kehittämään lähikehityksen vyöhykkeen käsitteeseen, joka tarkoittaa yksilön oppimista omien taitojensa ylärajoilla esimerkiksi opettajan tai vanhempien avustamana. Avustajan ei kuitenkaan välttämättä tarvitse olla ihminen, vaan se voi hyvin olla oikein suunniteltu teknologinen oppimisympäristö. Tällaisessa oppimisympäristössä tehtävät esimerkiksi kiinnittävät oppijan huomion ongelmanratkaisun kannalta oleellisiin kohtiin. Susanne Lajoien mukaan tieto- ja viestintäteknologia voi tukea yksilön oppimista ainakin kolmella tavalla. Ensinnäkin esimerkiksi simulaatioiden avulla voidaan tarjota välitön tuki ymmärtämiseen. Toiseksi teknologian avulla työskentely voi kehittää oppijan kognitiivisia taitoja. Kolmanneksi teknologia mahdollistaa yhteisöllisen tiedon tuottamisen. [21]

Azevedo yhdessä opiskelijoidensa kanssa on tutkinut vaativien ja monimutkaisten aiheiden opiskelua tietokonepohjaisten oppimisympäristöjen avulla. Hän esittää, että tietokonepohjaisen oppimisympäristön tulisi matkia aitoa opettajan tai tutorin ja oppilaan välistä vuorovaikutusta. [4] Tämän vuorovaikutuksen ensisijaisena tarkoituksena on kehittää oppilaan itsesäätelykykyä, joka on erittäin tärkeää opiskeltaessa monimutkaisia kokonaisuuksia. Tällöin tarvitaan metakognitiivisia taitoja kuten tavoitteiden asettamista, oman opiskelun suunnittelua ja tavoitteiden toteutumisen seurantaa. Yleensä monimutkaisiin kokonaisuuksiin liittyy ei-lineaarista tietoa monissa eri muodoissa, jolloin perinteiset opiskelumenetelmät ilman metakognitiivisten taitojen aktivointia eivät välttämättä toimi.

Metakognitiivisten taitojen oppimista voidaan tukea oppimisympäristöjen suunnittelulla. Oppimisympäristössä voidaan esimerkiksi kehottaa oppilasta asettamaan itselleen pieniä tavoitteita tulevan aiheen opiskelulle. Lisäksi oppilasta voi rohkaista pohtimaan, mitä hän tietää aiheesta ennestään ja miten uusi tieto suhtautuu tähän aiempaan tietoon. Samoin oppilas voi arvioida omien tavoitteidensa saavuttamista. [4] Metakognitiivisten taitojen oppimista voi auttaa myös kognitiivisten tukien avulla. Teknologisessa ympäristössä esimerkki tällaisesta tuesta on se, että oppilas saa itse valita tehtävien vaikeustason kuitenkin niin, että vaikeampia tehtäviä valitakseen tulee oppilaalla olla helpompia tehtäviä tehtynä.

Lisäksi kognitiivisia tukia voivat olla erilaiset vinkit ja neuvot, joita oppilas voi teknologisessa ympäristössä saada. [19]

Teknologisten ympäristöjen käyttö metakognitiivisten taitojen opettelussa ei sovi kaikille oppilaille yhtä hyvin. Osalla oppilaista metakognitiiviset taidot ovat niin rajoittuneita, ettei teknologisesta ympäristöstä ole heille hyötyä. Teknologisen ympäristön käyttö vaatii oppilaalta tietyn verran omaa aktiivisuutta ja motivaatiota sekä tietylle tasolle asti kehittyneet metakognitiiviset taidot. Opettaja tai ohjaaja voi kuitenkin ohjata enemmän tällaista heikkoa oppilasta, jolloin hänen metakognitiiviset taitonsa kehittyvät teknologisen ympäristön vaatimalle tasolle. [19]

Nykyään puhutaan usein ymmärtävän oppimisen puolesta. Se tarkoittaa sitä, että opitun tiedon määrän sijaan korostetaan tiedon ymmärtämistä ja kykyä soveltaa sitä. Tätä näkökulmaa ihmisen ajatteluun kuvaa konstruktivismi. Sen mukaan ihminen liittää uuden tiedon aina osaksi vanhoja tietorakenteita. Tällöin ratkaisevaksi tekijäksi nousee se, miten aiemmat tietorakenteet ovat jäsentyneet sisäisiksi malleiksi. Nämä sisäiset mallit ohjaavat ihmisten havaintoja niitä tukevaan suuntaan. Kuitenkin käsitteellisiä muutoksia tapahtuu silloin, kun opiskeltava asia on ristiriidassa aiempien tietorakenteiden kanssa ja ihminen joutuu järjestelmään tietoa uudelleen. [21] Uuden tiedon liittäminen osaksi aiempia tietoja on jo melko vaativa metakognitiivinen prosessi, mutta se on lähes välttämätön toimivan oppimisen kannalta.

3.3.3 Tutkiva ja yhteisöllinen oppiminen

Tutkivan oppimisen lähtökohtana on tieteen tekemisen prosessi. Tutkivassa oppimisessa tietoa ei omaksuta suoraan oppikirjasta, vaan se luodaan itse. [12, s. 7] Tutkivan oppimisen tarkoituksena on aktivoida oppilaita ja saada heitä asettamaan mielekkäitä tavoitteita oppimiselle. Tällöin oppiminen on motivoivampaa, ja asiat jäävät paremmin mieleen. Tutkiva oppiminen poikkeaa kuitenkin esimerkiksi projektioppimisesta siinä, että projektioppimisessa tutkittava aihe on yleensä annettu. Lisäksi projektioppimista käytetään usein kurssin vähemmän tärkeiden aiheiden opiskelussa, ja ydinaiheet opiskellaan opettajajohtoisesti. [12, s. 7–9] Tällöin tutkiva oppiminen ei tarjoa oppilaille tarpeeksi haasteita, eikä näin kehitä oppilaiden ajatteluakaan.

Hakkarainen et al. luettelevat tutkivan oppimisen perusperiaatteiksi ymmärtämiseen tähtäävän oppimisen, oppimisen ongelmanratkaisuna, omien ennakko- tai intuitiivisten käsitteiden esittäminen ja pohtiminen, huomion kohdistaminen keskeisiin käsitteisiin ja ”suuriin” ideoihin sekä pyrkimyksen selittää ilmiöitä [12, s. 11–12]. Tutkiva oppiminen pohjautuukin konstruktivistisen oppimiskäsityksen pohjalle. Kaikkien näiden perusperiaatteiden näkökulmasta tutkivan oppimisen päämääränä on se, että oppilas ymmärtää uuden asian ja osaa sijoittaa sen muiden osaamiensa asioiden joukkoon. Oppilas osaa tiedostaa omia ajatuksiaan ja korjata niitä sekä tunnistaa aiheen tärkeimpiä käsitteitä. Tärkeää jokaisessa tutkivan oppimisen vaiheessa on jaettu asiantuntijuus, eli esille nousevia asioita käsitellään ja vertaillaan yhdessä muiden kanssa [13].

Yhteisöllisen oppimisen tutkimuksesta on erotettavissa kaksi pääsuuntausta: sosio-kognitiivinen ja sosiokulttuurinen näkemys. Sosio-kognitiivinen näkemys korostaa osallistujien välisen vuorovaikutuksen ja yksilön oppimisen suhdetta. Yksilön oppiminen tapahtuu kognitiivisten konfliktien kautta, ja näitä konflikteja syntyy esimerkiksi silloin, kun oppilaat keskustelevat opittavasta asiasta yhdessä. Tällöin oppilaiden käsitykset voivat olla ristiriidassa keskenään tai oppilaat voivat tuoda keskusteluun toisilleen uusia näkökulmia. Näiden tietojen sovittaminen omaan ajatusrakenteeseen on reagoimista kognitiiviseen konfliktiin eli oppimista. Sosiokulttuurisen näkökulman mukaan oppimista ei koskaan voi tarkkailla irrallisena siitä ympäristöstä, jossa oppiminen tapahtuu. Ympäristö muodostuu aina oppimistilanteessa eikä siihen voi etukäteen vaikuttaa. Osallistujat luovat ympäristön omilla tiedoillaan ja taidoillaan. Oppimisen ympäristön lisäksi oppimisen välineet ja resurssit ovat peräisin kulttuurista, jolloin niitäkin tulisi tutkia osana oppimisen tutkimusta. [3]

Yhteistoiminnallisen oppimisen tavoitteena on, että oppilaat osallistuvat ryhmän toimintaan tasa-arvoisesti ja että kaikkien mielipiteitä kuunnellaan. Ryhmä toimii tarkoituksenmukaisesti yhteistä tavoitetta kohti. Tärkeää on, että oppilaat kuuntelevat toisiaan, haastavat toistensa näkemyksiä ja viittaavat toistensa puheisiin omassa puheessaan. Tällöin ryhmän toiminta on yleensä yhteydessä oppimiseen. Oppimista tapahtuu huomattavasti myös silloin, kun oppilaat vastaavat avoimiin kysymyksiin, jotka vaativat oman näkökulman perustelua. Pelkästään faktoihin liittyviin kysymyksiin vastaaminen ei lisää oppimista tai asian ymmärtämistä. [3] Yhdessä toimimalla oppilaat voivat pelkän yksinäisen tiedonhaun tai vanhan tiedon soveltamisen lisäksi tuottaa tietoa itse [13].

Erityisesti matematiikan opetuksessa tutkivaa oppimista käytetään melko vähän, sillä monet opettajatkin pitävät loogista ajattelua matematiikassa tärkeämpänä kuin luovuutta, jota tutkivassa oppimisessa tarvitaan. Kuitenkin matemaattista tietoa luovat ihmiset ovat hyvinkin luovia, ja heidän tulee ajatella asioita uudella tavalla. Myös perusopetuksen opetussuunnitelmassa sanotaan, että ”matematiikan opetuksen tehtävänä on kehittää oppilaiden loogista, täsmällistä ja luovaa matemaattista ajattelua” [49, s. 274]. Yksi erityisesti matematiikan opetukseen sopiva luovuutta vaativa tutkivan oppimisen tapa on avoimien ongelmien ratkaiseminen. Tällöin tehtävän alku- tai lopputilanne ei ole tarkasti määritelty. [50] Oppilas joutuu asettamaan omia alkuoletuksiaan ja tarkastelemaan lopputuloksen järkevyyttä yhden ainoan oikean vastauksen puuttuessa. Koska avoin tehtävä ei suoraan muistuta oppikirjan esimerkkitehtäviä, tulee oppilaan miettiä luovasti erilaisia mahdollisia ratkaisustrategioita ja niiden sopivuutta kyseisen ongelman ratkaisuun. Oppilas joutuu siis myös harjoittelemaan korkeampia kognitiivisia taitoja, kuten oman toiminnan ohjausta ja arviointia. Nämä taidot sekä ongelmanratkaisutaidot ovat sellaisia, joita oppilaat tarvitsevat tulevaisuudessa ja arkielämässään muissakin aiheissa kuin matematiikassa. Avoimia ongelmanratkaisutehtäviä tehdessä oppilaat oppivat siis tärkeitä taitoja, joilla on käyttöä matematiikan ulkopuolellakin. Tutkimuksessaan [20] Hähkiöniemi et al. ovat luoneet avoimen ongelmanratkaisun mallin. Heidän mukaansa ongelmanratkaisu koostuu seuraavista vaiheista: avoin ongelma, ongelman rajaaminen, ratkaisun etsiminen, hypoteesin muodostaminen ja hypoteesin perusteleminen tai sen tarkasteleminen. Ongelmanratkaisuprosessi ei aina etene suoraviivaisesti näiden vaiheiden kautta, vaan välillä oppilaat jättävät joitakin vaiheita välistä tai palaavat takaisin johonkin vaiheeseen.

Tutkivaan oppimiseen liittyy keskeisesti ongelman käsite ja sen suhteellisuus. Sellainen tehtävä, jonka nähdessään oppilas tietää sopivan ratkaisustrategian, ei ole ongelma. Kuitenkin jollekin toiselle oppilaalle sama tehtävä voi olla ongelma. Ongelman määrittely riippuu siis oppilaan taidoista ja osaamisesta. Ongelmaa ratkaistessaan oppilaan tulisi hyödyntää luovasti aiempia tietojaan ja osata yhdistellä niitä. [50] Tässä mielessä monet oppikirjojen ongelmatehtävät eivät ole todellisia ongelmia, sillä niille on yleensä esitetty jonkin yleinen ratkaisumetodi, jota soveltamalla tehtävät ratkeavat. Erilaisia ratkaisustrategioita on kuitenkin harjoiteltava, sillä voi olla, ettei oppilas edes tunnista ongelmatehtävää sellaisen kohdatessaan. Opettajan ei kuitenkaan tulisi antaa valmiita strategioita vaan tuoda esiin ongelmia ja opastaa tärkeissä vaiheissa. Myöhemmin opintojen edetessä opettajan rooli muuttuu yhä enemmän ongelmien esittäjäksi ja ongelmatilanteisiin provosoivaksi. [11]

Tieto- ja viestintäteknologia tarjoaa paljon mahdollisuuksia tutkivalle oppimiselle. TVT:n avulla koulussa opittavat taidot on helpompi asettaa kontekstiinsa, jolloin oppiminen muuttuu mielekkäämmäksi. Lisäksi TVT:n avulla on mahdollista tuoda omaa ajattelua näkyväksi kenties helpommin kuin perinteisillä oppimisvälineillä, ja TVT myös tukee metakognitiivisten taitojen oppimista esimerkiksi tavoitteiden asettelulla. Yhteisöllisen tiedon rakentaminen on usein helpompaa TVT:a käyttäen, kun kaikki tiedon luomisen vaiheet on tehty näkyviksi. Tämä mahdollistaa myös asioihin palaamisen myöhemmin, jolloin niistä voi saada uusia ideoita. [13] Opittava asia on monesti helppo visualisoida TVT:n avulla, jolloin voidaan muuttaa abstrakteja asioita helpommin lähestyttävään muotoon. [12] Erityisesti TVT tarjoaa mahdollisuuden nopeuttaa avoimen ongelman ratkaisua. Ongelman rajaaminen voi olla helpompaa, kun sitä pystyy hahmottelemaan ohjelmalla ja lisäksi erilaisten ratkaisuvaihtoehtojen kokeileminen on nopeampaa kuin kynällä ja paperilla. Myös hypoteesien tutkiminen ja niiden avulla ratkaisujen perustelu on vaivatonta TVT:a käyttäen. [20] Tietoa voidaan tuottaa monella eri tavalla kuten kirjoittamalla ja visualisoimalla [13]. Kuitenkin opettajalla on edelleen tärkeä rooli oppilaiden ohjaamisessa ja kuuntelemisessa. TVT tarjoaa vain yhden hyvän työkalun lisää tunneilla käytettäväksi.

3.3.4 Oppimisaihiot oppimisen tukena

Monet opettajat käyttävät teknologiaa vain vallitsevien pedagogisten käytäntöjen mukaisesti. Opettaja voi esimerkiksi siirtää opetusmateriaalinsa piirtoheitinkalvoilta suoraan sähköiseksi esitykseksi. Tällainen ei kuitenkaan hyödynnä teknologian tarjoamia uusia pedagogisia mahdollisuuksia. Monet uskovat siihen, että teknologia itsessään aiheuttaa muutoksen. Todellisuudessa teknologia tarjoaa mahdollisuuksia uudenlaisten pedagogisten käytäntöjen luomiseen ja hyödyntämiseen. Tämä kuitenkin vaatii opettajalta tietynlaisia oppimis- ja tietokäsityksiä. Jos opettaja uskoo, että paras tapa oppia on toistaa aiemmin hankittua tietoa, on hänen hyvin vaikea hyödyntää teknologian mahdollistamaa tutkimuksellisuutta, sillä se on täysin vastoin hänen oppimiskäsitystään. [22]

Tässä työssä kehitetään GeoGebraa käyttäen ”tehtäväpaketti” yläkoulun geometrian opiskeluun. Tällaista tehtäväpakettia kutsutaan myös oppimisaihioksi. Nurmi ja Jaakkola määrittelevät oppimisaihiot ”kaikenlaisiksi digitaalisiksi (oppi)materiaaleiksi ja sovelluksiksi, joita voidaan käyttää opetuksessa ja oppimisessa sekä jakaa jollain tavalla käyttäjien kesken” [25]. Oppimisaihiot voidaan määritellä myös yhden asiasisällön muodostamaksi oppimateriaalikokonaisuudeksi [29, s. 6]. Oppimisaihiot eivät itsessään ole hyviä tai huonoja, vaan se määräytyy niiden käytössä. Erilaisiin konteksteihin yhdistettynä tai erilaisten opettajien toteuttamana sama oppimisaihio voi olla hyvä tai huono. Tärkeää on liittää oppimisaihio osaksi muuta oppimisympäristöä ja omaa opetustapaa. [25]

Oppimisaihioita luodessa opettaja tai muu ammattilainen joutuu tasapainoilemaan monien erilaisten käsitysten välillä. Yleensä oppimisaihioista halutaan luoda mahdollisimman helposti muunneltavia ja sellaisia, että niistä voi helposti koota omanlaisen opetuskokonaisuuden. Tämä kuitenkin vaatii sitä, että opetusaihiot ovat melko pieniä ja keskittyvät vain yhteen aiheeseen. Tällöin kuitenkin asioiden yhdistelemisen harjoitteleminen ja laajojen kokonaisuuksien hallinnan taidon kehittäminen on haastavampaa. Kun oppimisaihioista yritetään tehdä mahdollisimman monikäyttöisiä, voi olla, että ne eivät lopulta sovi mihinkään opetustilanteeseen, koska ne ovat liian yleisiä. Lisäksi on tärkeää, että oppimisaihiot tukevat oppilaan tiedon rakennusta pelkän ulkoa opettelun sijaan. [25] Yleensä oppimisaihiot muuttavat oppilaan roolin passiivisesta tiedon vastaanottajasta sen aktiiviseksi rakentajaksi. Oppimisaihiot mahdollistavat opitun asian syventämisen, harjoittelun itsenäisesti ja eriyttämisen. [29]

3.3.5 Käytettävyys

Oppimisaihion kehittämisessä on otettava huomioon tehtävien sisällön lisäksi myös se, miten tehtäviä tehdään ja kuinka niihin päästään käsiksi. Jonkin järjestelmän tai apuvälineen käytettävyys tarkoittaa sitä, kuinka helposti käyttäjä voi saavuttaa tietyt tavoitteensa kyseisessä järjestelmässä tai käyttäen kyseistä apuvälinettä. Käytön tulee olla tehokasta ja käyttäjän tulee olla tyytyväinen käyttämäänsä tuotteeseen. [24] Oppimisaihion kehittämisessä käytettävyys on tärkeä tekijä, joka tulee ottaa huomioon.

Käytettävyys määritellään Nielsenin mukaan osaksi järjestelmän käyttökelpoisuutta, joka on osa järjestelmän hyväksyttävyyttä. Käytettävyys koskee kaikkia järjestelmän osia, joiden kanssa käyttäjä voi olla vuorovaikutuksessa. Käytettävyyden tutkimuksen perimmäisenä tarkoituksena on siis tutkia, täyttääkö järjestelmä sille asetetut vaatimukset. [43] Nokelaisen suomennoksia käyttäen Nielsenin määrittelemät käytettävyyden osatekijät ovat opittavuus, tehokkuus, muistettavuus, virheettömyys ja tyytyväisyys [44]. Opittavuus tarkoittaa sitä, kuinka nopeasti aloittelija oppii käyttämään järjestelmää oppimisen kannalta olennaisissa tapauksissa. Tehokkuus tarkoittaa puolestaan sitä, kuinka tehokkaasti kokenut käyttäjä voi käyttää järjestelmää tavoitteidensa saavuttamiseen. Muistettavuus kuvaa sitä, kuinka nopeasti käyttäjä voi palauttaa järjestelmän käytön mieleensä tauon jälkeen. Virheettömyys kuvaa itse järjestelmän toimintaa. Siinä ei pitäisi tapahtua virheitä, mutta järjestelmän tulisi selvitä tai ohjata käyttäjää selviämään mahdollisista virhetilanteista. Tyytyväisyys kuvaa käyttäjän omaa kokemusta järjestelmän käyttämisestä. Käytettävyyttä mitataan suhteessa tiettyyn tehtävään sekä tietyillä käyttäjillä. [43] Tässä tutkimuksessa ei tutkittu koko GeoGebran käytettävyyttä vaan tässä luodun oppimisaihion käytettävyyttä.

Opetushallituksen työryhmä on määritellyt verkko-oppimateriaaleille käytettävyyden laatukriteerit, jotka ovat seuraavat [47].

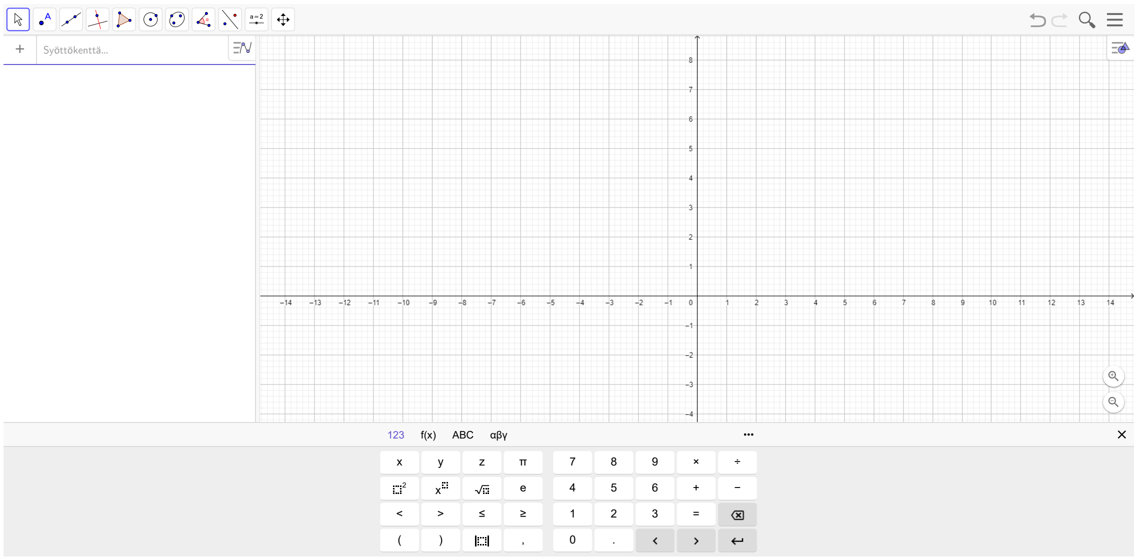
1. Verkko-oppimateriaali löytyy ja voidaan ottaa käyttöön helposti.
2. Verkko-oppimateriaalin käyttö on nopeaa ja tehokasta.
3. Verkko-oppimateriaali ohjaa käyttäjää toimimaan oikein.
4. Verkko-oppimateriaalin käyttöliittymä on selkeä ja innostava.

Käytettävyyden määritelmä on siis hyvin tilannesidonnainen, mutta annettujen kriteerien avulla voidaan valita ne näkökulmat, jotka kyseisessä järjestelmässä ovat tärkeitä. Samoin voidaan jättää huomiotta sellaisia näkökulmia, jotka eivät ole oleellisia tai joita ei mahdollisesti edes ole järjestelmässä. Käytettävyyttä testataan usein antamalla testikäyttäjien suorittaa testattavalla järjestelmällä tiettyjä toimintoja. Niiden suorittamisen jälkeen käyttäjä vastaa kyselyyn liittyen järjestelmän käyttämiseen. Tämän vuoksi olisi hyvä, että testikäyttäjät edustaisivat järjestelmän aiottuja käyttäjiä ja heidän suorittamansa toiminnot vastaisivat niitä toimintoja, joita varten järjestelmä on luotu. Näin testauksesta saadaan mahdollisimman hyödyllisiä tuloksia. [43]

3.4 GeoGebra

GeoGebra on erityisesti opetuskäyttöön suunniteltu dynaamisen matematiikan ohjelmisto. Se sisältää toimintoja niin geometriaan, algebraan, taulukkolaskentaan, tilastotieteeseen, kuvaajien piirtoon kuin analyysiinkin. GeoGebraa voi käyttää tietokoneella tai mobiililaitteella, ja molemmilla käyttö onnistuu verkkoselaimella tai lataamalla paikallinen ohjelmaversio. GeoGebra on käännetty useille eri kielille vapaaehtoisten kääntäjien voimin. Ohjelmisto ja siihen liittyvä verkkosivu ovat siis saatavilla suomenkielisenä, mikä on erittäin suuri hyöty, kun GeoGebraa käytetään nuorten oppilaiden kanssa. Lisäksi yksi GeoGebran etuja opetuskäytössä on sen ilmaisuus.

GeoGebran monien hyvien puolien ja ohjelman selkeyden vuoksi se on myös käytettävissä ylioppilaskirjoituksissa, kun ne muuttuvat sähköisiksi (matematiikka keväällä 2019) [72]. Vaikka kaikki peruskoululaiset eivät tietenkään jatka lukioon, on GeoGebran käyttöä hyödyllistä opiskella jo peruskoulussakin. Peruskouluille ei ole annettu ohjeita siitä, mitä ohjelmistoja käyttää opetuksessa. Ylioppilaskokeissa sallittujen ohjelmistojen lista



Kuva 3.22. *GeoGebran aloitusnäkymä.*

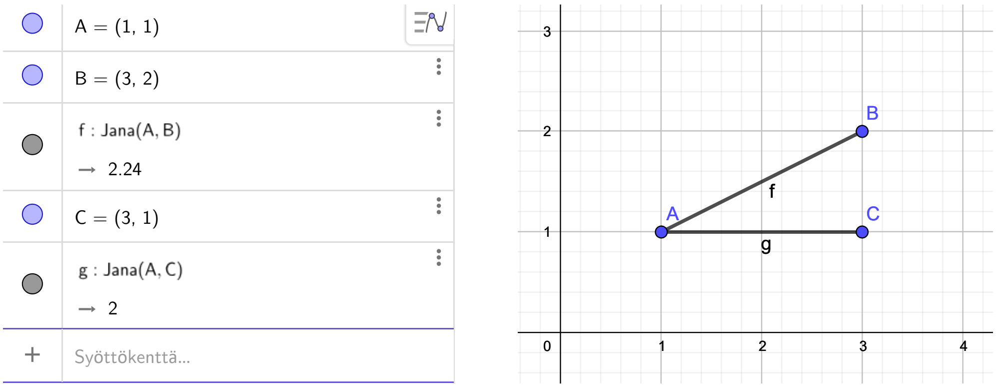
antaa kuitenkin hyviä ehdotuksia myös peruskoulussa käytettäväksi. Lisäksi GeoGebran suomenkielisyys ja käyttöliittymän visuaalisuus sopivat peruskouluikäisille oppilaille.

GeoGebran kehittämisen aloitti Markus Hohenwarter, mutta koska ohjelmisto on nykyään avoimen lähdekoodin ohjelmisto, siinä näkyvät monien kehittäjien kädenjäljet. Hohenwarter aloitti GeoGebran kehittämisen jo vuonna 2001 osana pro gradu -tutkielmaansa Salzburgin yliopistossa Itävallassa. Hän jatkoi GeoGebran kehittämistä väitöskirjassaan. Vuodesta 2006 lähtien Itävallan opetusministeriö on tukenut GeoGebraa, jotta se pysyisi jatkossakin ilmaisena. Samasta vuodesta lähtien GeoGebran kehitystyötä on jatkettu Yhdysvalloissa Florida Atlantic -yliopistossa. [17]

3.4.1 Ulkoasu ja toiminnot

GeoGebran perinteisen ohjelmiston saa verkkoversiona avattua osoitteesta https://www.geogebra.org/classic, jolloin avautuva näkymä on esitetty kuvassa 3.22. Eri päätelaitteilla avattuna sivusto näyttää pääpiirteissään samanlaiselta: toiminnoilla on samat kuvakkeet ja ne ovat samassa järjestyksessä. GeoGebrassa on kuusi eri työskentelyaluetta: kuvaajan piirtäminen, CAS, geometria, 3D-grafiikka, taulukkolaskenta, todennäköisyys ja koe. Näitä työskentelyalueita voi käyttää saumattomasti yhdessä työskentelyaluetta vaihtamalla tai avaamalla useamman työskentelyalueen näkyviin yhtä aikaa. Tämä tarkoittaa sitä, että esimerkiksi samat muuttujat ovat käytettävissä kaikilla työskentelyalueilla. Lisäksi voidaan näyttää konstruktion vaiheet, jolloin voidaan luoda esimerkiksi vaiheittain eteneviä animaatioita tai tarkkailla, missä järjestyksessä objektit on lisätty.

Sivun ylälaidassa ovat toiminnot ryhmiteltyinä valikoihin. Jokaisella toiminnolla on yksilöllinen kuvake, jonka avulla toiminnon tunnistaminen on helppoa. Sivun vasemmassa laidassa on tyhjä lista, johon kuvaan piirrettävät objektit (pisteet, viivat) ilmestyvät tekstimuodossa. Lisäksi objekteja tai niiden välisiä funktioita voi luoda suoraan tämän lis-



(a) Kirjoitettu syöte syöttökentässä. **(b)** Syötteen tulokset koordinaatistossa.

Kuva 3.23. *Samat toiminnot voi toteuttaa hiirellä osoittamalla koordinaatistossa tai sanallisesti syöttökentässä.*

tan yläosassa olevan syöttökentän avulla. Syöttökentän komennot ovat sillä kielellä, jolla GeoGebraa käytetään. Tämän hyvä puoli on se, että oppilaat oppivat suomenkieliset käsitteet sekä pääsevät käyttämään niitä työskentelyssä. Huonona puolena voidaan pitää sitä, että englanninkielisen dokumentaation seuraaminen on hyvin vaikeaa, kun ei tiedä, mitä suomenkielistä komentoa englanninkieliset komennot tarkoittavat. Syöttökentän ja koordinaatiston yhteyttä on havainnollistettu kuvassa 3.23.

GeoGebrassa toiminnot on jaettu useiden eri valikoiden alle (kuvassa 3.22 näkyvät yläreunan ”laatikot”). Kun napsauttaa valikon päällä, avautuvasta valikosta voi valita haluamansa toiminnon. Kun kohdistimen vie toiminnon päälle, ikkunan alareunaan aukeaa ohje toiminnon käyttämiseksi. Tämän vuoksi GeoGebran käytön voi aloittaa lukematta käyttöohjeita ja kokeilemalla, mitä mikin toiminto tekee.

GeoGebralla voi piirtää pisteitä ja näitä pisteitä voi yhdistää janoilla tai suorilla. Lisäksi janoista ja pisteistä voi muodostaa monikulmion. Näiden yksinkertaisten toimintojen lisäksi GeoGebrassa on paljon komentoja, joilla voi esimerkiksi määrittää janan keskinormaalin tai ympyrän tangentteja tai peilata pisteitä suoran tai pisteen suhteen. GeoGebran komentojen avulla voi myös mitata esimerkiksi kulman suuruutta, kahden pisteen välistä etäisyyttä tai monikulmion pinta-alaa.

Matemaattisten toimintojen lisäksi GeoGebraan pystyy lisäämään tekstiä ja kuvia esimerkiksi tehtävän ratkaisua selkeyttämään tai tehtävää elävöittämään. Lisäksi GeoGebrassa voi lisätä interaktiivisia toimintoja, kuten liukusäätimiä, painikkeita ja tekstikenttiä. Nämä objektit voi sitoa johonkin muuttujaan, ja niiden avulla voi havainnollistaa arvojen muuttumista.

3.4.2 Ohjelmointi

GeoGebralla on mahdollista luoda pieniä ohjelmia, joiden avulla GeoGebra-sovelmiin saadaan enemmän ja monimutkaisempaa vuorovaikutteisuutta. Yleensä ohjelmointia käy-

Kuva 3.24. *Esimerkki GeoGebraScriptillä tehdystä ohjelmoinnista.*

tetään esimerkiksi tarkistamaan oppilaan vastauksia, arpomaan uusia lukuja tehtävään tai paljastamaan uusia alueita sovelmassa. Periaatteessa monissa GeoGebran toiminnoissa on jo jonkin verran ohjelmointia taustalla, mutta suunnittelijan on mahdollista lisätä ohjelmoinnin avulla vuorovaikutteisia toimintoja sellaisille objekteille, joilla niitä ei oletusarvoisesti ole.

Ohjelmoida voi kahdella eri kielellä: GeoGebra Scriptillä tai JavaScriptillä. Periaatteessa sillä ei ole väliä, kumpaa kieltä käyttää, mutta ilmeisesti JavaScriptillä on mahdollista tehdä hieman monimutkaisempia ohjelmia. GeoGebran ohjelmointi-kurssilla kerrotaan kuitenkin, että GeoGebraScript on useimmiten tarpeeksi tehokas työkalu haluttujen ominaisuuksien ohjelmointiin. [23] GeoGebran wiki-sivuilta löytyy ohjesivut yli 500 komennolle, joita ohjelmoinnissa voi käyttää. Tämä tarjoaa siis huomattavan mahdollisuuden sovelmien kehittäjälle mukauttaa tekemiään sovelmia sekä osallistaa oppilasta sovelman käyttämiseen.

GeoGebraScript on GeoGebran ideologian mukaisesti saatavilla useilla eri kielillä, kuten suomeksi (kuva 3.24). Tämä tarkoittaa sitä, että ohjelmoinnissa käytettävät komennot on käännetty myös suomeksi. Jos GeoGebraa käyttää suomeksi, tulee myös ohjelmoida samalla kielellä. Suurin osa GeoGebran dokumentaatiosta on kuitenkin englanniksi, samoin komentojen nimet. Tähän on kuitenkin ratkaisuna ”GeoGebran oma kääntäjä”. Jos ohjelmointi-kenttään kirjoittaa jonkin komennon englanniksi, ohjelma kääntää sen automaattisesti suomeksi.

Objektille voidaan asettaa tietty komento, jonka se suorittaa, kun objektia klikataan tai kun se päivitetään. Päivittäminen tarkoittaa tässä sitä, että objektin ominaisuuksien arvot muuttuvat, mitä tapahtuu esimerkiksi, kun piste raahataan paikasta toiseen tai monikulmiota venytetään. Lisäksi päivitettäessä ajettava ohjelma on toimiva syöttökenttiä käytettäessä. Kun syöttökenttään syöttää jonkin arvon, päivitettäessä ajettava ohjelma aktivoituu. Klikattaessa aktivoituva ohjelma sopii esimerkiksi painikkeisiin, sillä painikkeessa itsessään ei ole mitään ohjelmointia. Ilman käyttäjän ohjelmointia painiketta painaessa ei tapahdu mitään. [23]

Ohjelmoinnin avulla objekteja voi liittää toisiinsa. Tämä tarkoittaa esimerkiksi sitä, että sovelmassa voi olla syöttökenttä suoran yhtälölle. Oppilas voi syöttää kenttään haluamansa kertoimen ja vakiotermin, jolloin sovelmassa näkyvä suora päivittyy oppilaan antamien lukujen perusteella. Oppilaan antamaa tekstiä voidaan siis muuttaa GeoGebra-objektien ominaisuuksiksi, jos syöttökenttä on linkitetty objekteihin.

Objekteihin voi siis liittää ohjelman, joka ajetaan joko kun objektia klikataan tai kun sen arvo päivittyy. Kolmas ohjelmointimahdollisuus on globaali JavaScript. Tähän kenttään syötetty ohjelma ei liity yhteen objektiin vaan koko GeoGebran käyttöön. Globaalin JavaScriptin ikkunassa voidaan luoda funktioita, kuten ilmoituksen antaminen joka kerta, kun oppilas lisää uuden objektin. Lisäksi siinä voidaan luoda erityinen ggbOnInit-funktio, jonka avulla voidaan määrittää, mitä tapahtuu, kun sovelma ladataan. Esimerkiksi ladattaessa voidaan asettaa kaikkien muuttujien arvot nollaan tai kutsua tiettyjä funktioita. [58]

3.4.3 Käyttö opetuksessa

Dynaamiset geometriaohjelmistot, kuten GeoGebra, tarjoavat mahdollisuuden rikastaa kouluopetusta ja oppilaiden käsitteenmuodostusprosesseja aivan uudella tavalla. GeoGebralla konstruoituja kuvioita voidaan muuttaa raahaamalla kuvion pisteitä ja sivuja, jolloin kuvio muuttuu sen määrittelyn antamissa rajoissa. Jos esimerkiksi kuvion kaksi sivua on alkujaan määritelty yhtä pitkiksi, muuttuu toisen sivun pituus ensimmäisen sivun pituutta muutettaessa. Tämä mahdollistaa kuvioiden muuttuvien ominaisuuksien tarkastelun havainnollisesti. [60]

Eveliina Hietakymi tutki pro gradu -tutkielmassaan [15], kuinka hyvin GeoGebra sopii matematiikan sähköiseen ylioppilaskokeen. Tarkemmin määritellen hän tutki GeoGebran sopivuutta tehtävien ratkaisemiseen sekä vastausten kirjoittamiseen. Hän käytti sopivuutta määrittäessään pohjana tanskalaisen Jakob Nielsenin käytettävyysteoriaa. [15]

Nielsenin mukaan käytettävyyteen liittyvät seuraavat käsitteet: opittavuus, tehokkuus, muistettavuus, virheettömyys sekä tyytyväisyys. Hietakymi suoritti GeoGebralle heuristisen eli kokemukseen perustuvan arvioinnin. Hietakymin arvion mukaan GeoGebran käytettävyys on moitteetonta ja erityisesti GeoGebran opittavuus ja tehokkuus ovat korkealla tasolla. Tämä johtuu varmasti siitä, että GeoGebra on kehitetty nimenomaan opetuskäyttöön, ja monia käytettävyyden ongelmia on pystytty ratkaisemaan jo kehitysvaiheessa. Hietakymin mukaan ohjelmisto ei kuitenkaan toimi moitteettomasti, sillä tehtyjä töitä on mahdollista menettää virhetoiminnan seurauksena. Tämä olisi tietysti kohtalokasta ylioppilaskokeessa. Kokonaisuutena Hietakymi arvioi GeoGebran käytettävyyden olevan kuitenkin moitteetonta, minkä vuoksi se soveltuu hyvin lukiolaisen käytettäväksi ylioppilaskokeessa. [15]

Elina Laine tutki pro gradu -tutkielmassaan [33] GeoGebran vaikutusta toisen asteen opiskelijoiden laskennallisen ajattelun oppimiseen ja sen ilmentämiseen. Laine määritteli laskennallisen ajattelun tarkoittavan muun muassa oppilaan kykyä muotoilla ongelma siten, että tietotekniikkaa voidaan käyttää ongelman ratkaisuna sekä oppilaan kykyä järjestellä tietoa loogisesti. Lisäksi Laine selvitti, mitä lisäarvoa GeoGebran käyttäminen oppitunneilla toi opetustilanteeseen ja oppimiseen. Osittain laskennalliseen ajatteluun liittyen Laine testasi opiskelijoiden ohjelmoinnillisen ajattelun kehitystä sitä varten kehitetyllä testillä. [33]

Laineen tutkimuksen mukaan tietotekniikan käyttö opetuksessa ei heikentänyt eikä parantanut opiskelijoiden tuloksia. Sen sijaan GeoGebraa käyttäneiden opiskelijoiden ohjelmoinnillinen ajattelu oli paremmalla tasolla kuin verrokkiryhmällä, joka ei käyttänyt GeoGebraa. Laskennallisen ajattelun tason muuttuminen oli vaikeammin mitattavissa, mutta vaikutti siltä, että GeoGebraa käyttäneet opiskelijat osoittivat viitteitä laskennallisen ajattelun kehittymisestä. Erityisesti Laine huomasi, että GeoGebran käyttö opiskelussa tuntui motivoivan heikomman lähtötason opiskelijoita. [33]

Nuutinen ja Paappanen [45] tutkivat Jyväskylän yliopiston matematiikan opetusharjoittelun pientutkimuksessa, voisiko tutkivasta matematiikasta ja GeoGebra-ohjelmistosta olla apua yhdenmuotoisiin kolmioihin liittyvien suhteiden tarkastelussa. Tutkimus toteutettiin kahdella matematiikan oppitunnilla, joilla oppilaille jaettiin aiheeseen liittyvät tehtävämonisteet. Tehtävämonisteet olivat vain vastausten kirjaamiseen, sillä tehtävät tehtiin GeoGebralla tuotetulla sovelmalla. Tehtävien tarkoituksena oli saada oppilaat ymmärtämään, että kolmioiden yhdenmuotoisuus voidaan ratkaista vertaamalla kolmion sivujen pituuksien suhteita kolmion sisällä. [45]

Nuutinen ja Paappanen päätyivät lopputulokseen, että GeoGebran käyttö yhdistettynä tutkivaan oppimiseen voi auttaa yhdenmuotoisten kolmioiden opiskelussa. GeoGebra auttoi oppilaita havaintojen varmistamisessa ja erityisesti väärien ratkaisujen pois sulkemisessa. Sen avulla tehtyjen empiiristen havaintojen pohjalta oppilaiden oli helpompi luoda ratkaisuja. Tutkimuksen yhtenä ongelmana ilmeni kuitenkin oppilaiden tottumattomuus tutkivaan oppimiseen, mikä näkyi oppilaiden epävarmuutena ja opettajan avun suurena tarpeena. [45]

Lähes kaikissa mainituissa tutkimuksissa on siis päädytty siihen, että itsessään GeoGebran käyttö tai sen kautta pelillisyyden luominen opetukseen ei lisää tai paranna oppilaiden oppimista tai motivaatiota [33, 45]. GeoGebra on kuitenkin loistava apuväline, ja oikein käytettynä siitä on hyötyä. Joillekin oppilaille GeoGebran käyttäminen on hyödyllisempää kuin toisille, mutta ainakaan toistaiseksi ei ole osoitettu, että GeoGebran käyttäminen haittaisi kenenkään oppimista. Jos mahdollista, GeoGebrasta eniten hyötyvät oppilaat voisivat työskennellä sillä, kun taas kynällä ja paperilla menestyvät oppilaat käyttäisivät niitä. Kuten monien muidenkin oppimisen apuvälineiden kanssa, GeoGebra tulee upottaa järkeväksi osaksi muuta opetusta, jolloin siitä mahdollisesti saatava hyöty pääsee parhaiten esille.

3.5 Yhteenveto teoreettisesta viitekehyksestä

Teoreettisen viitekehyksen pohjalta voidaan todeta, että opetussuunnitelman uudistumisen ja TVT:n käytön yleistymisen myötä uusien teknologioiden opiskelulle ja käytölle on tarvetta peruskoulussa. Tätä puoltavat myös sähköistyvä ylioppilastutkinto, vaikka kaikki peruskoulun oppilaat eivät lukioon jatkakaan, ja muiden jatko-opintojen sekä työelämän vaatimukset. Opetussuunnitelmassa mainitaan yhtenä laaja-alaisena tavoitteena tieto- ja viestintäteknologinen osaaminen, ja erilaisten ohjelmistojen käyttötaito on mainittu myös yhtenä tulevaisuuden taitona. TVT:n käytön avulla on mahdollista motivoida oppilaita, joita opiskelu ei muuten kiinnostaisi niin paljon, sillä TVT:n avulla luodut erilaiset oppimisympäristöt tarjoavat poikkeavia toimintatapoja ja aistiärsykkeitä paperisiin kirjoihin verrattuna. Lisäksi teknologisessa opetusympäristössä on mahdollista muuttaa tehtävien vaikeustasoa, jolloin oppilaita on helpompi eriyttää.

Geometria on peruskoulun päättävien oppilaiden heikoiten osattu matematiikan osa-alue. Vaikka geometrialla onkin paljon konkreettisia käyttökohteita, sen osaaminen auttaa oppilaita myös kehittämään korkeampia ajattelun taitojaan. Kun geometrisia kuvioita oppii hahmottamaan, se auttaa myös myöhemmissä opinnoissa. Hahmottava oppiminen tukee nimenomaan ymmärtävää oppimista. Kun asian ymmärtää eikä vain muista, se jää pysyvämmin mieleen. Geometrian oppimisessa tutkiva oppiminen toimii erityisen hyvin, sillä geometriset kuviot ja niiden ominaisuudet ovat näkyviä ja niitä voi tarkastella. Tällöin oppilaiden on helppo yksin tai ryhmissä tutkia geometrisia kuvioita.

Koska TVT:a voidaan käyttää opetuksen tukena hyvin monella tavalla, voi opettajilla olla vaikeuksia valita tai tuottaa juuri pedagogisesti parhaita oppimisaihioita. Oppimisaihioita suunnitellessa tulee ottaa monia asioita huomioon ja tasapainoilla erilaisten näkemysten välillä, ja lisäksi niiden luominen vaatii aikaa ja keskittymistä. Tämän vuoksi opetussuunnitelmaan perustuvilla valmiilla tehtävillä on kysyntää. Tehtävien toteutusalustana GeoGebra on mainio, sillä se on suunniteltu nimenomaan opetukseen ja se on käytettävissä myös sähköisissä ylioppilaskirjoituksissa. Tällöin oppilaille on hyötyä siitä, että he ovat harjoitelleet GeoGebran käyttöä jo peruskoulussa. Toisaalta nykyajan muuttuvissa oppimisympäristöissä jo uuden ympäristön käyttöönotto ja sen harjoittelu ovat tärkeitä taitoja, joita oppilaat tarvitsevat myöhemmin elämässään. GeoGebra on opettajankin näkökulmasta melko helppo ja turvallinen valinta, sillä sen käytön oppii nopeasti, mutta sillä voi kuitenkin tuottaa monipuolista ja monimutkaistakin materiaalia. Lisäksi GeoGebran dynaamisuus mahdollistaa ymmärtävän oppimisen, sillä oppilaat pystyvät sen avulla tutkimaan esimerkiksi geometrisia kuvioita ja sitä, miten niiden ominaisuudet muuttuvat kuviota muutettaessa.

Oppimisaihioita suunnitellessa tulee ottaa huomioon muun muassa tehtävien vaativuus, ja geometrian tapauksessa Van Hielen tasot tarjoavat hyvän viitekehyksen tehtävien vaativuuden määrittelylle. Tehtävien taustalla on myös hahmottava geometrian oppiminen sekä tutkiva oppiminen, joiden toteutustavoiksi ongelmatehtävät ja tutkimustehtävät sopivat erityisen hyvin. Oppilaat harjoittelevat siis geometrian sisältöjen lisäksi luovuutta, ongelmanratkaisua, yhdessä toimimista ja metakognitiivisia taitoja.

4. KEHITTÄMISPROSESSI

Tässä luvussa kuvataan kehittämisprosessin aikana tehtyjä päätöksiä, joilla pyritään pääsemään teoreettisessa ongelma-analyysissä määriteltyyn tavoitteeseen. Ratkaisut on luokiteltu sen mukaan, liittyvätkö ne käytettyyn teknologiaan (kappale 4.1) vai matemaattiseen sisältöön tai pedagogisiin ratkaisuihin (kappale 4.2). Tekstissä on viitattu aiemman luvun 3 niihin osioihin, joiden perusteella tässä esitellyt ratkaisut on tehty.

Tämän kehitystutkimuksen tarkoituksena oli kehittää noin kuuden oppitunnin mittainen oppimisaihio, joka toteutetaan GeoGebralla. Tehtävien aihepiiriksi valikoitui monikulmiot ja niiden luokittelu, joka kuuluu tärkeänä osana peruskoulun matematiikkaan. Monikulmioiden luokittelua harjoitellaan jo alakoulussa, mutta taitoa ja erityisesti ymmärrystä kehitetään edelleen yläkoulussa. Tehtävät on suunniteltu siten, että niitä voidaan käyttää 7.-luokkalaisten opetuksessa, jolloin monikulmioiden luokittelua opiskellaan ikään kuin uutena asiana. Tämän lisäksi materiaalia voi hyvin käyttää myös 8.- ja 9.-luokkalaisten opetuksessa kertaavana ja syventävänä materiaalina.

4.1 Teknologiset ratkaisut

Jaakko Joen mukaan vapaalla kädellä piirtäminen on hyvää harjoitusta geometriselle hahmotuskyvylle. Tällöin ei arvioida niinkään lopputuloksen siisteyttä kuin sitä, että lopputulos esittää sitä mitä pitääkin. Vapaalla kädellä piirrettäessä oppilaiden erilaiset motoriset taidot viivaimen ja harpin käytössä eivät vaikuta lopputulokseen. [26] GeoGebran käyttö geometrian opetuksessa toimii hieman samalla periaatteella. Tärkeintä on oppilaan ymmärrys, sillä lopputuotoksen siisti ulkoasu tulee itsestään tietokoneohjelmalla. Näin oppilaiden ei tarvitse keskittyä piirtämisen mekaanisiin puoliin.

Tehtävät toteutetaan täysin GeoGebralla niin, ettei oppilaiden tarvitse piirtää käsin vihkoon mitään. Kuitenkin on tärkeää, että oppilaat vastaavat kysymyksiin ja määrittelevät käsitteitä vihkoon. Parasta olisi, jos käytössä on jokin sähköinen alusta (kuten OneNote tai GeoGebran oma Ryhmät-toiminto), johon oppilaat voivat vastata kysymyksiin ja liittää kuvakaappauksia tehtävistä. Näin heille jää aiheesta laaja oppimisportfolio, johon voi helposti palata myöhemmin. Kun vihkotyöskentelyssä painotetaan oikeita käsitteitä, ne siirtyvät myös oppilaiden ajatteluun ja tätä kautta puheeseen (3.2.3).

Tässä tutkimuksessa oppilaat käyttävät vihkon sijaan GeoGebran omaa Ryhmät-toimintoa. Ryhmä on opettajan ja oppilaiden yhteinen oppimisympäristö, jossa opettaja voi jakaa oppilaille tehtäviä, antaa heille aikarajoja ja kommentoida ja pisteyttää oppilaiden tehtäviä. [8] Yleisesti GeoGebran huonona puolena on se, että jos oppilas tekee tehtäviä valmiiseen GeoGebra-työkirjaan, hänen tekemänsä muutokset ja vastaukset eivät tallennu mihinkään. Jos oppilas vahingossa sulkee selaimen tai siirtyy edelliselle sivulle, kaikki pitää aloittaa alusta. GeoGebra Ryhmän kautta tehtävissä työkirjoissa näin ei ole. Ohjelma tallentaa oppilaan työskentelyä automaattisesti, ja kaikki kysymysten vastaukset jäävät talteen. Lisäksi opettaja näkee jokaisen oppilaan tekemät tehtävät ja voi antaa heille palautetta Ryhmän kautta.

GeoGebran Ryhmä vaatii luomaan GeoGebra-tunnukset ja liittymään kyseisen kurssin Ryhmään. Tähän tutkimukseen osallistuvilla oppilailla ei valmiiksi ollut GeoGebra-tunnuksia, mutta heidän koulusähköpostiinsa sellainen on helppo liittää. Lisäksi tunnuksien avulla oppilaiden on helppo tallentaa myöhempiä töitään omalle tilille talteen.

Jokaiselle tehtävälle luotiin oma GeoGebra-työkirja, ja työkirjoista koottiin yksi GeoGebra-kirja, joka on kehitetty oppimisaihio. Työkirjoissa on GeoGebra-pohja sekä siihen liittyviä ohjeita ja kysymyksiä. Ohjeet ovat tekstinä sovelman ylä- tai alapuolella. Kysymykset ovat pääasiassa avoimia kysymyksiä, joiden vastaukset tallentuvat opettajan nähtäville. Osaan tehtävistä tehtiin valmis dynaaminen pohja, jota tutkimalla oppilaat tekevät päätelmiä kuvioista. Tällaisten tehtävien tarkoituksena on motivoida oppilaita kokeilemaan ja innostumaan aiheesta (katso osio 3.3.2). Toisissa tehtävissä GeoGebrassa on valmiina tehtävän pohja, jota oppilaan tulee jatkaa ohjeiden mukaan. Kolmas vaihtoehto on se, että oppilaalla on käytössä tyhjä GeoGebra-pohja, johon hän luo sisältöä ohjeiden mukaisesti.

Opetushallituksen työryhmä on asettanut laatukriteerejä verkko-oppimateriaaleille [47]. Näitä kriteerejä ovat pedagoginen laatu, käytettävyys, esteettömyys ja tuotannon laatu. Kriteereiden tarkoituksena on helpottaa verkko-oppimateriaalien arviointia niin tuotanto- kuin käyttövaiheessa. Kaikki laatukriteerit eivät voi päteä kaikille verkko-oppimateriaaleille, vaan niistä valitaan kyseiseen oppimateriaaliin sopivat kriteerit. Työryhmän määrittämät esteettömyyskriteerit ovat seuraavat [47].

1. Verkko-oppimateriaalin sisältö on kaikkien saavutettavissa.
2. Verkko-oppimateriaalin käyttöliittymä on kaikkien käytettävissä.
3. Verkko-oppimateriaalin sisältö ja käyttöliittymä ovat helppoja ymmärtää.
4. Käytetyt tekniikat toimivat luotettavasti mahdollisimman monissa käyttömuodoissa.

Nämä asiat ja oppimisaihion käytettävyys on otettu huomioon tehtäviä suunnitellessa (osio 3.3.5). Esimerkiksi ohjeissa on käytetty yksinkertaista mutta hyvää suomen kieltä sekä melko lyhyitä lauseita. Tämä helpottaa kaiken tasoisia oppilaita, mutta etenkin oppilaita, joille jo luetunymmärtäminen tuottaa vaikeuksia.Väreillä on pyritty havainnollistamaan erilaisia asioita, kuten eri kuvioita tai erisuuruisia kulmia, mutta erilaiset kuviot tai kulmat ovat erotettavissa myös muuten kuin väreistä. Lisäksi punaisen ja vihreän värin käyttämistä kuvioiden erottelussa on pyritty välttämään, sillä tällöin punavihersokeat eivät erota värejä toisistaan.

GeoGebran toteutuksen vuoksi GeoGebra ei ole aivan täysin esteetön. Siihen ei kuitenkaan voi vaikuttaa tehtäviä tehdessä. GeoGebra toimii verkossa, joten se toimii lähes kaikilla tietokoneilla. Hiiren käyttäminen ja tietyn tasoinen hienomotoriikka ovat GeoGebran perusajatuksen vuoksi kuitenkin vaadittuja. GeoGebran käyttöliittymä on intuitiivinen ja helppokäyttöinen, ja se toimii pääosin kuvakkeiden avulla, jolloin lukutaito ei ole välttämätön.

4.2 Matemaattiseen sisältöön ja pedagogiikkaan liittyvät ratkaisut

Vaikka GeoGebra-tehtävien matemaattinen sisältö ja laatu on hyvin tärkeää, niin on myös tehtävien pedagoginen laatu. Opetushallituksen työryhmän laatimat pedagogisen laadun kriteerit ovat seuraavat [47].

1. Verkko-oppimateriaalin tavoitteet ja opiskelun luonne ilmaistaan selkeästi.
2. Verkko-oppimateriaali tukee kehittyneitä opiskelukäytäntöjä.
3. Verkko-oppimateriaalin tieto on merkityksellistä, ja se esitetään oppimista tukevalla tavalla.
4. Verkko-oppimateriaali tukee monipuolista arviointia.

Oppimisaihion ensimmäisessä luvussa on kaksi työkirjaa, joissa ei ole tehtäviä vaan niiden tarkoitus on kuvata oppimateriaalin luomisen syitä ja sen oppimistavoitteita. Lisäksi GeoGebra-kirja on koottu niin, että sen rakenne tukee oppimista ja on looginen. Aluksi ohjeissa on annettu hyvin yksityiskohtaiset ohjeet, mitä painikkeita GeoGebrassa tulee painaa. Loppua kohden tehtävänannot muuttuvat hieman suurpiirteisemmiksi. Tehtävät etenevät järjestyksessä, mutta niitä on mahdollista käyttää yksittäisinäkin tehtävinä. Vaativammat tehtävät on sijoitettu muiden tehtävien joukkoon, mutta ne on merkitty tähdellä. Tietysti tehtävien tarkoituksena on myös aktivoida oppilaan ajattelua ja opettaa oman toiminnan säätelyä. Arviointi-näkökulmaa ei tässä kehittämistutkimuksessa ole juurikaan otettu huomioon. Tehtäväkokonaisuus sisältää kuitenkin monia erityyppisiä tehtäviä, joita voidaan käyttää formatiivisessa eli opintojen aikaisessa arvioinnissa.

Koulumatematiikan tulisi opettaa oppilaille sekä laskutaitoa että korkeamman ajattelun taitoja kuten luovuutta ja ongelmanratkaisutaitoja. Perinteiset mekaaniset ”toista esimerkkiä”-tehtävät harjaannuttavat nimenomaan laskutaitoa. Laskutaitoakin tarvitaan, joten mekaanisilla perustehtävillä on paikkansa matematiikan opetuksessa. Luovuutta ja ongelmanratkaisutaitoja tarvitaan myös, ja niitä voidaan kehittää muun muassa avoimilla ongelmilla ja tutkivilla tehtävillä. Avoimissa ongelmissa joko alkutilanne, lopputilanne tai molemmat ovat avoimia. Oppilas joutuu itse kehittämään ratkaisustrategioita ja niitä kokeilemalla todeta, mitkä toimivat ja mitkä eivät. Ongelmanratkaisutehtävien haasteena on se, että ne määritellään oppilaskohtaisesti. Jos oppilas tunnistaa heti tehtävän nähdessään, mitä hänen tulee tehdä, on tehtävä hänelle rutiinitehtävä. Sama tehtävä voi joltakin toiselta oppilaalta kuitenkin vaatia aiempien tietojen yhdistelyä uudella tavalla, jolloin kyse on ongelmasta. [50]

Tässä kehittämistutkimuksessa lähdettiin liikkeelle ajatuksesta luoda monen tasoisia ja monen tyyppisiä tehtäviä GeoGebralla. Mekaanisilla perustehtävillä kerrataan aiemmin opittuja käsitteitä ja palautetaan niitä mieleen sekä opetellaan GeoGebran käyttöä (osio 3.3.1). Lähtökohtana on, ettei oppilas aluksi osaa käyttää GeoGebraa ollenkaan. Hieman myöhemmin avoimemmilla ongelmanratkaisutehtävillä kehitetään oppilaan luovuutta ja päättelykykyä (osio 3.3.3). Yksi GeoGebran hyödyistä ongelmapohjaisissa tehtävissä on se, että sillä voi helposti kokeilla erilaisia ratkaisumalleja. Jos oppilas toteaa ratkaisumallin olevan sopimaton tähän tehtävään, ei hänen tarvitse pyyhkiä vihkosta kenties useita sivuja merkintöjä, vaan hän voi tallentaa yrityksensä mahdollista myöhempää tarvetta varten ja aloittaa uudelleen tyhjältä pohjalta.

Lisäksi luotavien tehtävien vaikeustasoa pohdittiin van Hielen tasoja käyttäen (osio 3.2.4). Vaikka tehtävässä tulisi ratkaista kuinka hieno ongelma tahansa, ei siitä ole oppilaille hyötyä, jos se on liian vaikea. Silfverbergin tutkimuksessa [59] suurin osa yläkoulun oppilaista oli van Hielen tasoilla 1-2. Vaikka kyseinen tutkimus on lähes 20 vuotta vanha, ei ole mitään syytä olettaa, etteivät oppilaat nykyään sijoittuisi samassa määrin tasoille 1-2. Tämän takia tehtävät eivät saa ainakaan alkaa liian monimutkaisista asioista. Niille muutamalle oppilaalle, jotka kenties ymmärtävät ominaisuuksien ja kuvioiden väliset yhteydet, suunnitellaan eriyttävää materiaalia. Toisaalta jos oppilaat työskentelevät pareittain, he voivat auttaa toinen toisiaan ja päästä eteenpäin vaikeissakin tehtävissä yhteistyön avulla (osio 3.3.3).

Van Hielen taso 1 on visualisoinnin taso, jolla oppilaat luokittelevat kuvioita puhtaasti niiden ulkomuodon perusteella. Tasolla 1 oppilas osaa siis tunnistaa kuviosta kolmion tai nelikulmion. Taso 2 on ominaisuuksien analysoinnin taso, jolla oppilaat alkavat nimetä ja analysoida geometristen kuvioiden ominaisuuksia. Tällöin oppilas osaa esimerkiksi määrittää, miksi jokin kuvio on kolmio tai nelikulmio. Tärkeää tehtävissä on siis se, että ne tukevat oppilaiden havainnointia ja toisaalta ohjaavat huomion kuvioiden ominaisuuksiin. Erilaisia ominaisuuksia voi korostaa esimerkiksi erilaisilla väreillä tai muodoilla.

Tehtävien suunnittelussa lähdettiin liikkeelle nimenomaan hahmottamisen kautta (osio 3.2.3). Osaan tehtävistä tehtiin valmis pohja, jossa oppilaat tutkivat jonkin ominaisuuden (esimerkiksi kulman suuruuden) muutosta dynaamisella materiaalilla. Materiaalin tutkimisen ja kuvion muuttumisen avulla oppilaat voivat esimerkiksi määritellä käsitteitä. Materiaaleista poistettiin kaikki mitat, sillä mittojen tietäminen ei ole hahmottamisen kannalta oleellista. Esimerkiksi kulmien tapauksessa tärkeintä on osata verrata kulmaa suoraan kulmaan ja oikokulmaan, jolloin kulmat saadaan luokiteltua tarpeeksi tarkasti. Tarkkaa astelukua ei ole yleensä tarpeen tietää. Toisaalta joissakin asioissa tarkat asteluvut ovat tärkeitä, kuten kolmion kulmien summassa.

Vaikka valmiissa GeoGebra-pohjissa pyrittiin välttämään liikaa tekstiä, niihin kirjoitettiin silti aina oleellisia käsitteitä. GeoGebran lisäksi materiaaliin kuuluu vihkoon (tai tämän tutkimuksen tapauksessa suoraan GeoGebra-työkirjaan) vastattavia kysymyksiä. Näissä kysymyksissä johdateltiin oppilaita määrittelemään tärkeitä käsitteitä. Määritellessään käsitteitä itse oppilas joutuu miettimään tarkasti, mitkä ovat juuri tämän käsitteen tärkeitä ominaisuuksia. Yleensä jo seuraavassa GeoGebra-pohjassa vielä varmennettiin käsitteiden oikea ymmärrys. Tehtävien tarkoituksena on myös johdatella oppilaita havainnoimaan muodostetun kuvion ominaisuuksia. Jotta oppilaiden kielentämisen taito pääsisi kehittymään paremmin, tehtävissä ei ole käytetty monivalintatehtäviä vaan kaikki tehtävät ovat avoimia tehtäviä, joissa pyydetään jatkamaan lausetta tai analysoimaan luotua kuviota (osio 3.2.3).

Tasakylkisen ja tasasivuisen kolmion käsitteet käydään tehtävissä läpi tutkivalla otteella. Perinteisesti oppikirjoissa esitellään ensin määritelmä, jota oppilaat tämän jälkeen soveltavat. Näissä GeoGebra-tehtävissä oppilaat kuitenkin ensin piirtävät tarkkojen ohjeiden mukaiset kolmiot, joiden ominaisuuksia he sitten tutkivat. Tällä tavalla oppilaat samalla oppivat seuraamaan ohjeita ja käyttämään GeoGebraa monipuolisesti (osio 3.3.1). Piirtämisen jälkeen oppilaat määrittelevät kolmioiden ominaisuudet vihkoon. Tässä kohdassa on tärkeää, että opettaja joko tarkistaa oppilaiden vastaukset tai rohkaisee oppilaita vertaamaan vastauksia toisen oppilaan kanssa ja pohtimaan vastausten mahdollisia eroja (osio 3.3.3). On tärkeää, että määritelmät tulevat muistiinpanoihin oikein, mutta on luultavaa, että tutkimalla kolmioiden ominaisuuksia ja vastaamalla hieman johdatteleviin kysymyksiin, oppilaat oivaltavat kolmioiden määritelmät itse.

Osa tehtävistä on selkeästi vaativampia tai avoimempia kuin muut tehtävät, ja näitä vaativia tehtäviä on merkitty tähdellä tehtävän nimen edessä. Oppilas voi itse valita, haluaako hän tehdä näitä tehtäviä vai ei. Tällöin hänen tulee arvioida omia kykyjään ja haluaan oppia uusia asioita eli käyttää metakognitiivisia taitojaan (osio 3.3.2). On tärkeää, että oppilaat uskaltavat kokeilla uutta ja yrittää tehtäviä, mutta jos heillä on haasteita jo perustehtävissä, tulisi heidän myös ymmärtää harjoitella perusasioita enemmän ennen soveltaviin tehtäviin siirtymistä.

5. KEHITTÄMISTUOTOS

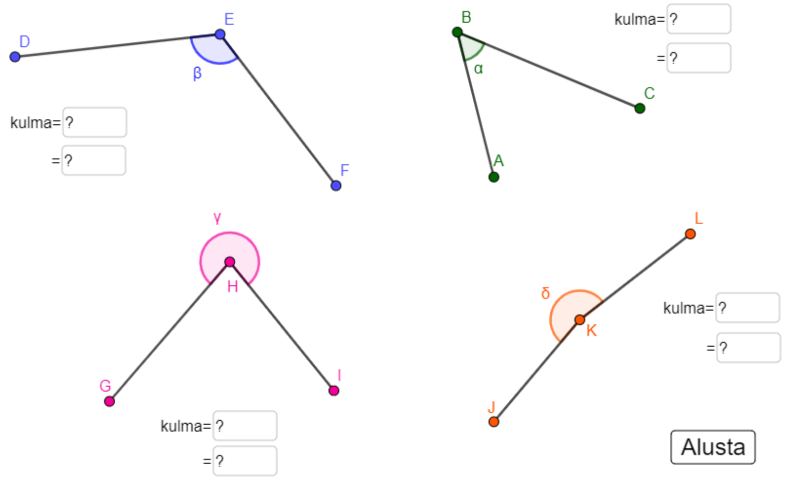
Tässä luvussa kuvataan kehittämisprosessin tuloksia eli kehittämistuotosta. Kehittämisprosessissa luotiin GeoGebralla suoritettava oppimisaihio, joka pohjautuu perusopetuksen opetussuunnitelmaan. Oppimisaihion tehtävät on julkaistu GeoGebra-kirjassa, joka on osoitteessa https://ggbm.at/jephwdbr. GeoGebra-kirja on jaettu lukuihin, joista jokaista käsitellään tässä luvussa omassa kappaleessaan: kulmat (kappale 5.1), kolmiot (kappale 5.2), nelikulmiot (kappale 5.3) sekä monikulmiot (kappale 5.4). GeoGebra-kirjan alussa on myös johdanto-kappale, jossa kerrotaan tämän oppimisaihion tarkoituksesta sekä annetaan muutamia pikaohjeita GeoGebran käyttöön. Tehtävien otsikot on lueteltu myös liitteessä A.

5.1 Kulmat

Vaikka tehtäväkokonaisuuden aiheena on monikulmiot, on ensin kerrattava kulmien luokittelua. Tämä on tärkeää myöhemmin, kun esimerkiksi kolmioita luokitellaan teräväkulmaisiin ja tylppäkulmaisiin kolmioihin. Luvun alussa kerrataan tehtävillä juurikin kulmien luokittelua. Ensimmäisessä työkirjassa (Kulmien luokittelua) oppilas voi dynaamisen opetusmateriaalin avulla muistella erilaisia kulmien luokittelutapoja. Dynaaminen materiaali mahdollistaa sen, että oppilas ymmärtää esimerkiksi teräviä kulmia olevan monia erilaisia. Usein oppikirjoissa esitetään vain yksi malliesimerkki terävästä kulmasta. Nyt oppilaan on mahdollista nähdä kaikki mahdollisuudet. Kulmien suuruudet -työkirjassa oppilaiden tulee edelleen kerrata kulmien luokittelua "pelin" avulla. Lopuksi oppilaan tulee määritellä kulmiin liittyviä käsitteitä kertauksen jälkeen. Lisäksi työkirjoissa Kulmien nimeäminen ja Kulmien piirtäminen oppilas harjoittelee kulman piirtämistä GeoGebralla sekä muistelee eri tapoja nimetä kulmia (kuva 5.1).

Kello-tehtävän tarkoitus on tuoda arkielämään liittyvä esimerkki mukaan melko abstraktien asioiden opiskeluun. Tehtävässä oppilas muodostaa kellotaululle jonkin kellonajan ja laskee viisarien välisen kulman. Todennäköisesti oppilaat laskevat tai mittaavat vain pienemmän kulman, mutta toisessa kysymyksessä pyydetään oppilaita huomaamaan myös janojen välinen suurempi kulma. Kellotauluesimerkin kautta päästään eksplementtikulmien käsitteeseen, vaikka käsitteen nimen muistaminen ei olekaan tärkeää. Tärkeää on huomata se, kuinka täysi kulma jakautuu kahdella janalla kahteen kulmaan, joiden summa on kuitenkin 360°.

Erityisesti suoran kulman merkitystä havainnollistetaan normaalin käsitteeseen tutustumisella. Aluksi oppilas tutkii itse GeoGebra-pohjaa, jossa on suora f, jolla on piste A, sekä piste C, joka ei ole suoralla f. Oppilas tutkii, mikä on janan AC ja suoran f välinen kulma



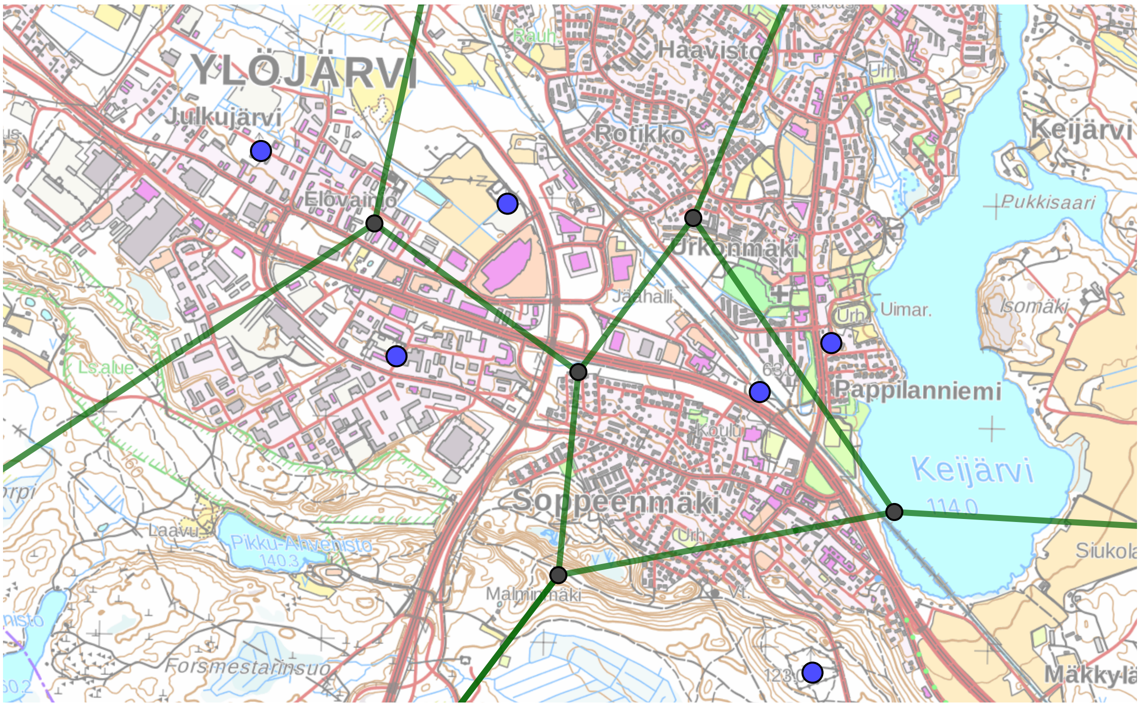
Kuva 5.1. *Kuvankaappaus tehtävästä, jossa oppilaan tulee nimetä kulmat sekä kreikkalaisin kirjaimin että kärkipisteiden avulla.*

silloin, kun janan *AC* pituus on pienin mahdollinen. Seuraavassa tehtävässä oppilas tutustuu normaalin käsitteeseen ja siihen, kuinka GeoGebralla piirretään normaaleja. Tämän jälkeen oppilas voi tehdä hyvinkin soveltavan ongelmatehtävän, jossa hän ratkaisee linkkimastojen kuuluvuusalueet (mukaillen lähdettä [52]). Tehtävän mielekkyyttä on lisätty asettamalla taustaksi Ylöjärven eli koulun lähialueiden kartta, johon on merkitty oikeiden linkkimastojen sijainti. Ratkaisussa oppilaan tulee piirtää linkkimastojen välisiä janoja, niiden keskinormaaleja ja päätellä, mitä suoria kuuluvuusrajat noudattavat. Työtavoiltaan tehtävä ei kenties ole erityisen haastava, mutta se vaatii todella pohdintaa alkuehtojen noudattamiseksi. Kuvassa 5.2 linkkimastot on merkitty sinisillä pisteillä ja niiden väliset kuuluvuusalueiden rajat vihreillä janoilla tai puolisuorilla. Vaikka tehtävä tässä muodossa onkin melko suljettu ongelmatehtävä, siitä saisi helposti avoimen esimerkiksi jättämällä alun kartan pois. Tällöin oppilas saisi itse etsiä sopivan kartan, piirtää siihen linkkimastot ja alkaa hahmotella niiden rajoja.

Kahdessa viimeisessä Kulmat-luvun työkirjassa (Vieruskulmat ja ristikulmat sekä samankohtaiset kulmat) oppilaat kertaavat kyseisiä käsitteitä dynaamisten GeoGebra-pohjien avulla. Lopuksi he vastaavat kysymyksiin aiheesta. Nämä kulmiin liittyvät käsitteet ovat tärkeitä myöhemmin, esimerkiksi kolmion kulmien summan todistuksessa, mutta ne eivät ole keskeisiä, joten ne käsitellään melko nopeasti muutamalla kysymyksellä.

5.2 Kolmiot

Ensimmäinen tehtävä kolmioista on Kolmio-työkirja. Siinä oppilaan tulee valita annetuista kuvioista ne, jotka ovat kolmioita. Kaikki kuviot muistuttavat kolmioita, mutta kaikki eivät ole kolmioita. Esimerkiksi yhdessä kuviossa on kaarevat sivut ja yhdessä kuviossa on kolmion sivuilla pienet kolmiot. Tarkoituksena on, että oppilas kykenisi jo hieman siirtymään van Hielen tasolta 1 (visualisoinnin taso) tasolle 2 (ominaisuuksien analysoinnin taso), jolloin hän ymmärtäisi, että jos kuvio näyttää kolmiolta mutta siinä ei ole kolmea



Kuva 5.2. *Ratkaisu Ylöjärven alueen linkkimastojen kuuluvuusalueiden määrittämiseen.*

kulmaa tai kolmea suoraa sivua, se ei ole kolmio. Tehtävä tarkistaa, onko oppilas vastannut oikein ja lopuksi oikeiden vastausten jälkeen oppilas määrittelee, mitkä ovat kaikille kolmioille yhteisiä ominaisuuksia.

Kolmioiden piirtäminen- ja Kolmion kulmien summa -työkirjoissa oppilas harjoittelee kolmioiden piirtämistä GeoGebralla ja kertaa myös aiemmin opittuja asioita, kuten kulmien mittaamista ja kolmion kulmien summaa. Sekä tasasivuinen että tasakylkinen kolmio opiskellaan materiaalissa samalla tavalla. Aluksi oppilaat piirtävät ohjeiden mukaisen kolmion. Ohjeissa on hyvin tarkasti kerrottu, millä työkalulla tehtävän eri vaiheet tehdään. Tämän jälkeen oppilaat tutkivat muodostamaansa kolmiota ja vastaavat annettuihin kysymyksiin. Kysymyksiin vastaamalla oppilaat oikeastaan määrittelevät tasasivuisen ja tasakylkisen kolmion sivujen pituuden ja kulmien suuruuden avulla.

Tähdellä merkittynä lisätehtävänä on tasasivuisen kolmion piirtäminen eri tavoilla käyttämättä GeoGebran valmista tasasivuinen monikulmio -työkalua. Ensimmäisessä tavassa oppilas piirtää kaksi ympyrää, joilla on sama säde ja joiden keskipisteet ovat säteen etäisyydellä toisistaan. Piirtämällä janat ympyröiden keskipisteiden ja ympyröiden toisen leikkauspisteen välille syntyy tasasivuinen kolmio. Tämä voi olla melko haastava tehtävä, sillä ympyröiden ominaisuuksia käsitellään yleensä vasta myöhemmin yläkoulussa. Joillekin oppilaille ne voivat kuitenkin olla tuttuja, jolloin tehtävään vastaaminen ei ole liian hankalaa. Toinen tapa liittyy säännölliseen kuusikulmioon ja sen sisään piirrettävään kolmioon. Näiden tehtävien tarkoitus on havainnollistaa, miten moniin eri aiheisiin tasapituiset janat liittyvät.

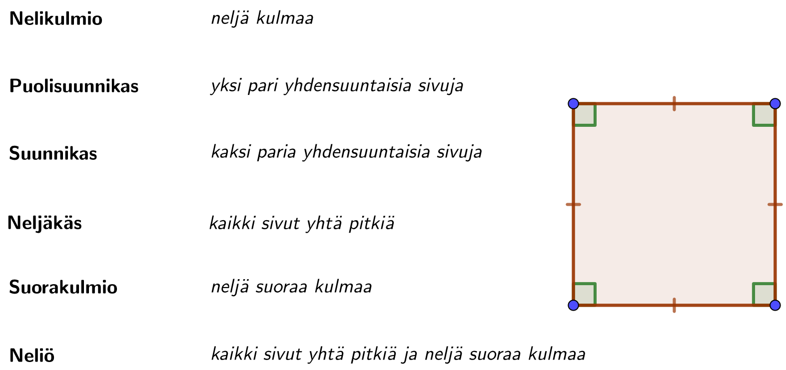
Kolmio-käsitteet -työkirjassa oppilas pääsee kertaamaan kolmioihin liittyviä käsitteitä ja niiden määritelmiä. GeoGebra-pohjassa on kolmio, jonka kulmia oppilas voi raahata. Kun kolmio on esimerkiksi suorakulmainen, siihen ilmestyy suoran kulman merkki ja kolmion vierelle ilmestyy teksti ”suorakulmainen kolmio” sekä sen määritelmä ”yksi suora kulma”. Jos kaksi sivua on yhtä pitkiä, niille ilmestyy pieni poikkiviiva kertomaan asiasta. GeoGebra-pohjassa pisteet on lukittu koordinaatistoon, mikä aiheutti hankaluuksia tasasivuisen kolmion luomisessa. Jos tasasivuisen kolmion kanta on kokonaisluku, sen korkeus ei ole kokonaisluku. Tasasivuisen kolmion GeoGebraScriptissä onkin pieni virhemarginaali, jolloin ohjelma näyttää ”tasasivuinen kolmio”-tekstin kun muodostuva kolmio näyttää tasasivuiselta, vaikka se ei aivan tarkalleen ole. GeoGebra-pohjan tutkimisen jälkeen oppilas määrittelee käsitteet ja vastaa kysymyksiin, kuten ”Voiko tasakylkinen kolmio olla myös suorakulmainen kolmio? Miksi/miksi ei?”.

Kolmioiden luokittelu taulukkoon -tehtävässä oppilaan tulee piirtää taulukkoon neljä erilaista kolmiota, jotka täyttävät taulukossa vasemmalla ja yläpuolella olevan kriteerin. Tehtävässä haastavana kohtana on viimeinen ruutu, johon pitäisi piirtää tasasivuinen kolmio, joka on samalla tylppäkulmainen. Jos oppilas on sisäistänyt tasasivuisen kolmion käsitteen oikein, hän huomaa melko nopeasti, ettei tällaista kolmiota ole mahdollista piirtää, sillä tasasivuisen kolmion kaikki kulmat ovat aina yhtä suuria eli 60°. Tällaisesta tehtävästä suoriutuminen kertoo, että oppilaan hahmotuskyky on jo melko korkealla tasolla, sillä hän osaa soveltaa oppimiaan kolmioiden ominaisuuksia uudenlaisessa tilanteessa, jossa yhdistetään tasasivuisuuden tai tasakylkisyyden ja teräväkulmaisuuden tai tylppäkulmaisuuden määritelmät.

Napoleonin lauseeseen liittyvässä tehtävässä oppilaan tehtävänä on ohjeita seuraamalla muodostaa jokin kolmio ja tämän kolmion sivuille tasasivuiset kolmiot. Tämän jälkeen edelleen ohjeiden mukaisesti oppilas määrittää jokaisen tasasivuisen kolmion keskipisteen ja yhdistää nämä keskipisteet janoilla. Lopuksi oppilaan tulee pohtia, millainen lause kuvassa voisi olla. Yläkoululaisen tasolle muutettuna tämä on kirjoitettu ”Mikä on aina tosi keskipisteiden muodostamalle kolmiolle?”. Tehtävä mukailee lähdettä [32]. Napoleonin lause on melko yllättäväkin tulos, ja tällaisen tehtävän avulla oppilas pääsee itse kokemaan oivalluksen tunteita sen sijaan, että tulos annettaisi hänelle suoraan.

5.3 Nelikulmiot

Oppilas harjoittelee nelikulmioihin liittyviä käsitteitä (kuva 5.3) samantyyppisellä GeoGebra-pohjalla kuin kolmio-käsitteitä. Monikulmioihin liittyviä käsitteitä lävistäjä ja piiri käsitellään seuraavissa työkirjoissa. Lävistäjiin liittyen kerrataan käsite ja tämän jälkeen oppilaan tulee piirtää erilaisia nelikulmioita, jotka toteuttavat annetut kriteerit. Vaikein kriteereistä on piirtää sellainen nelikulmio, jonka lävistäjä on nelikulmion ulkopuolella. Piiriin liittyen on tehtävä, jossa suorakulmion piiri on vakio ja oppilaan tulee tutkia, kuinka monilla erilaisilla sivujen pituuksilla tämä sama piiri saavutetaan. Lisäksi oppilaan tulee laskea suorakulmioiden pinta-ala ja pohtia, milloin pinta-ala on suurimmillaan ja milloin pienimmillään. Periaatteessa kokonaislukuratkaisukin riittää, mutta jotkut oppilaista varmasti miettivät myös reaalilukuvastauksia. Niiden pohtiminen onkin heille hyvä lisätehtävä. Tehtävässä on jo jonkin verran laskemista, mutta se on suorakulmion ominaisuuksien havainnointia tukevaa eikä tehtävän päätarkoitus.



Kuva 5.3. *Kuvankaappaus tehtävästä, jossa oppilas tutustuu erilaisiin nelikulmioiden käsitteisiin raahaamalla nelikulmion kärkipisteitä.*

Neliön jakaminen kahteen osaan -työkirjassa oppilaan tulee kärsivällisesti ja luovasti pohtia erilaisia ratkaisuvaihtoehtoja. Symmetriaa ja erityisesti symmetriaa pisteen suhteen on käsitelty jo alakoulussa, joten periaatteessa tämä tehtävä on vain kertaava tehtävä. Kuitenkin monelle oppilaalle tehtävä on varmasti haastava, sillä oikeita vastauksia on äärettömän monta. Myös käyräviivaisten ratkaisujen huomaaminen ja toteuttaminen GeoGebralla voi olla haastavaa.

Neliön jakaminen kolmeksi kolmioksi -tehtävässä oppilaalla ei kenties ole selkeää ajatusta siitä, miten tehtävää voisi lähestyä, jolloin tehtävästä tulee ongelma. Tehtävä mukailee lähdettä [1]. Oppilaan tulisi huomata, että neliön voi jakaa kolmioihin usealla eri tavalla. Tärkeää on, että jaossa todella syntyy kolmioita. Lisäksi oppilas voi huomata, kuinka vastauksia saadaan helposti äärettömästi lisää, kun jaossa syntyneen kolmion kulmaa siirretään neliön sivulla. Tehtävää vaatii oppilailta kärsivällisyyttä ja luovuutta, sillä pelkän yhden ratkaisun antamisen sijaan oppilaan tulee osata ajatella asiaa monella tavalla yhä uudelleen. Tehtävissä, joissa neliötä jaetaan erilaisiin osiin, oppilaat voivat vertailla tekemiään jakoja keskenään ja pohtia, miksi ne ovat kenties erilaisia. Pohtiessaan tätä, oppilaat joutuvat kielentämään ajatuksiaan ja puhumaan kuvioista oikeilla käsitteillä, jotta toisetkin oppilaat ymmärtävät heitä.

Puolisuunnikkaan pinta-ala johdetaan yksikkökolmioiden avulla tehtävässä Puolisuunnikkaan pinta-ala, joka on mukailtu London East Anglican Groupin tuottamasta arviointitehtävästä [41]. Tehtävässä päästään muutaman esimerkin ja kokeilun kautta johtamaan puolisuunnikkaan pinta-alan kaava. Tehtävä on kuitenkin haastava jo siinä mielessä, että isometrinen koordinaatisto on niin päin, että puolisuunnikas on piirrettävä eri asennossa kuin missä se yleensä piirretään.

Erikokoisia neliöitä -työkirjassa on seitsemän kertaa seitsemän pisteen geolauta, johon oppilaan tulee piirtää niin monta erikokoista neliötä kuin mahdollista. Geometria-näkymän lisäksi näkyvissä on Algebra-näkymä. Tällöin oppilaat näkevät listasta piirtämänsä neliöt, jotka nimetään juoksevalla numeroinnilla m1, m2 ja niin edelleen, sekä neliöiden pinta-alat. Näin oppilas voi tarkistaa, montako neliötä on piirtänyt ja että niillä kaikilla todella on eri pinta-alat. Tehtävä vaatii luovuutta, sillä osa neliöistä on kallellaan tai muuten oudossa asennossa, ja kärsivällisyyttä, sillä neliöitä pitää piirtää ”mahdollisimman monta”, jolloin kahden neliön jälkeen ei voi luovuttaa.

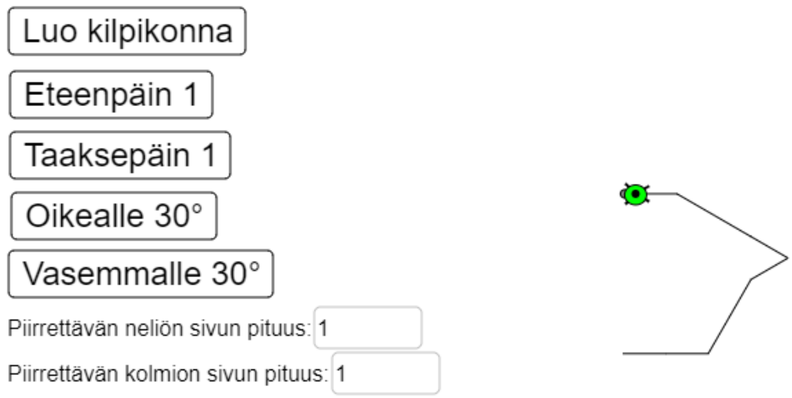
Huvipuisto-ongelmassa (mukaillen lähdettä [20]) oppilaan tulee tutkia, mikä paikka olisi paras neljän kaupungin yhdessä rakentamalle huvipuistolle. Ongelmaa ei tämän kummemmin ole rajattu, joten oppilaan täytyy itse määrittää, mitä tarkoittaa paras sijainti. Kyseessä on siis hyvin avoin ongelmanratkaisutehtävä. Kyseiseen tehtävään saa aikaa kulumaan paljonkin ja tuloksia voi tutkia tarkasti. Tässä tyydytään kuitenkin harjoittelemaan ongelmanratkaisua eli alkuehtojen asettamista sekä loppuratkaisun arviointia.

5.4 Monikulmiot

Monikulmion käsitettä oppilas opiskelee Monikulmio- ja Onko monikulmio? -työkirjoissa. Niissä oppilaan tulisi ymmärtää, mitä eroa on säännöllisellä ja ”epäsäännöllisellä” monikulmiolla sekä se, että monikulmion muodostavat janat eivät saa leikata toisiaan tai muuten ne muodostavat useamman monikulmion yhden monikulmion sijaan. Näiden asioiden ymmärtäminen on tärkeää, kun oppilas siirtyy van Hielen tasolta 1 tasolle 2. Lisäksi seuraavissa työkirjoissa oppilas harjoittelee GeoGebran käyttöä säännöllisten ja ”epäsäännöllisten” monikulmioiden piirtämisessä. Monikulmioiden kulmien summia ja lävistäjien määriä oppilas laskee työkirjassa Monikulmioiden ominaisuuksia. Aluksi oppilaan apuna on kuvat monikulmioista, mutta lopuksi oppilaan pitää pienempien monikulmioiden avulla päätellä, mitkä ovat kulmien summa ja lävistäjien määrä 10-kulmiolla ja 100-kulmiolla, jotka ovat liian suuria järkevästi piirrettäviksi.

Kuten aiemmin puolisuunnikasta jaettiin kolmioihin, seuraavaksi jaetaan säännöllistä kuusikulmiota kolmioista muodostuviin alueisiin. Tehtävässä on tarkoitus jakaa kuusikulmio kahdeksaan yhtä suureen osaan. Kyseisen kuusikulmion tapauksessa jako onnistuu, sillä kuusikulmio koostuu kahdeksalla jaollisesta määrästä kolmioita. Oppilaan tulisi huomata pinta-alan jaollisuuden yhteys mahdollisuuteen jakaa kuvio tiettyyn määrään osia, kun hän jakaa kuusikulmiota ja muita monikulmioita kahdeksaan tai kuuteen osaan.

GeoGebraan on sisäänrakennettu toiminnallisuus, jolla GeoGebran piste voidaan muuttaa kilpikonnan näköiseksi. Tämän jälkeen tuolle pisteelle voidaan antaa tiettyjä komentoja. Kyseinen kilpikonna-ohjelmointi perustuu jo vuonna 1967 kehitettyyn Logo-ohjelmointikieleen ja kilpikonnagrafiikkaan, joka käyttää sitä [30]. Kilpikonnalla on kolme ominaisuutta, joita voi hallita: sijainti, suunta ja kynän käyttö. GeoGebrassa kilpikonnan saa siirtymään esimerkiksi eteenpäin komennolla `KilpikonnaEteenpäin(<kilpikonna>, <etäisyys>)`. Komennossa nimetty kilpikonna kulkee siis annetun etäisyyden verran eteenpäin ja piirtää samalla jäljen kulkemalleen reitille. Tämä tarjoaa oivan mahdollisuuden harjoitella ohjelmointia ja samalla erilaisten monikulmioiden piirtoa. Ohjelmointi kuuluu tieto- ja viestintäteknologisen osaamisen laaja-alaiseen tavoitteeseen, jonka mukaan sitä tulee harjoitella osana eri aineiden opintoja [49, s. 284]. Lisäksi yksi matematiikan oppimistavoitteista (T20) on ”ohjata oppilasta kehittämään algoritmista ajatteluaan sekä taitoja soveltaa matematiikkaa ja ohjelmointia ongelmien ratkaisemiseen” [49, s. 375]. Ensimmäisessä kilpikonna-tehtävässä on valmiina painikkeet, joita painamalla kilpikonna liikkuu ja kääntyy (kuva 5.4). Näin oppilas saa käsityksen siitä, mitä kilpikonnalla voi tehdä. Tämän jälkeen oppilas luo oman tiedostonsa, johon hän luo ensin samanlaiset painikkeet kuin esimerkissä ja tämän jälkeen lähtee muokkaamaan niitä. Kilpikonnien ohjelmoinnissahan vain mielikuvitus on rajana. Tähdellä merkityssä lisätehtävässä luodaan erilaisia kolmioita. Tehtävää tehdessä oppilas saattaa huomata, että samat koodinpätkät toistuvat useissa komennoissa ja niitä voisi kenties lyhentää silmukoilla tai ehtolauseilla.



Kuva 5.4. *Kuvankaappaus tehtävästä, jossa oppilas tutustuu kilpikonna-ohjelmointiin ennen kuin harjoittelee itse ohjelmointia.*

Vaikka monissa tehtävissä oppilaat voivat verrata vastauksia keskenään ja keskustella niistä, on Robotti-tehtävä tämän oppimisaihion ainoa todellinen paritehtävä. Siinä molemmat oppilaista piirtävät jonkinlaisen monikulmion GeoGebralla. Tämän jälkeen he vuorotellen kuvailevat toisilleen oman monikulmionsa, jolloin parista toisen tulee piirtää se annettujen ohjeiden mukaisesti. Ihanteellisessa tilanteessa omaa kuviotaan selittävä oppilas ei katso piirtävän oppilaan näyttöä, jolloin hän joutuu antamaan tarkat ja täsmälliset ohjeet kuvion piirtämiseksi. Tässä oppilaat joutuvat kielentämään ja samalla tarkastelemaan piirtämänsä kuvion ominaisuuksia. Tästä tehtävästä selvitäkseen oppilaan geometrisen osaamisen tulee olla van Hielen tasolla 1 eli hänen tulee osata kuvailla monikulmion ominaisuuksia.

Viimeiset työkirjat, Taidetta! ja Kissa, haastavat oppilaiden luovuutta. Ensimmäisessä oppilaan tehtävänä on luoda monikulmioita ja värejä käyttäen taideteos ja lopuksi analysoida taideteosta. Oppilas voi esimerkiksi pohtia, onko siinä kolmioita ja millaisia kolmiot ovat. Kissa-tehtävässä on valmiiksi piirretty kissakuvio, joka oppilaan tulee jakaa erilaisiin kolmioihin. Lopuksi oppilaat vertailevat jakojaan keskenään ja luokittelevat piirtämiään kolmioita. Tarkoituksena on huomata, että kaikki monikulmiot voi jakaa kolmioihin ja että jaon voi tehdä monella eri tavalla. Lopuksi oppilaat saavat piirtää itse jonkin kuvion ja jakaa sen kolmioksi.

6. TUTKIMUKSEN TOTEUTUS

Kehittämistutkimuksessa oppimisaihion kehittämisen jälkeen eli kehittämistuotoksen valmistuttua sen toimivuutta testattiin todellisessa ympäristössä. Testauksen perusteella tuotosta paranneltiin ennen kuin se julkaistiin. Tässä luvussa kuvataan tutkimuksen kulku. Kappaleessa 6.1 kuvataan, mitä tässä tutkimuksessa tutkitaan. Tämän jälkeen kappaleessa 6.2 käydään läpi, miten näitä tutkimustehtäviä lähdetään toteuttamaan eli miten tutkitaan. Kappaleessa 6.3 käydään läpi tutkimuksessa saadut tulokset ja pohditaan tulosten luotettavuutta. Lopulta kappaleessa 6.4 päätetään, miten tutkimustuloksia käytetään tehtäväkokonaisuuden jatkokehittämisessä.

6.1 Tutkimustehtävät

Tieto- ja viestintäteknologioiden käyttö koulussa on yleistynyt räjähdysmäistä vauhtia. Erilaisia sovelluksia ja oppimisalustoja ilmestyy ja otetaan käyttöön enemmän kuin mihin opettajat ehtivät perehtyä. Tämän vuoksi opettajille tuotetaan materiaaleja, joiden avulla heidän on helpompi ottaa ohjelmia käyttöön joutumatta itse luomaan oppimateriaaleja uuteen ohjelmaan alusta alkaen.

GeoGebra on kouluissa melko paljon käytetty ohjelma, ja käyttäjät voivat helposti jakaa siellä materiaalia kaikkien käytettäväksi. Ongelmana useissa materiaaleissa on kuitenkin se, että ne on luotu johonkin tiettyyn opetustilanteeseen kenties mukaillen jotakin tiettyä tehtävää, jolloin niiden käyttäminen suoraan muissa opetustilanteissa ei kenties ole järkevää tai mahdollista. Lisäksi hyvin suuri osa materiaalista on jollakin muulla kuin suomen kielellä.

Geometrian aiheista tähän kehittämistutkimukseen valittiin monikulmiot ja niiden ominaisuudet aiheen tärkeyden perusteella. Monikulmioiden ominaisuuksien ymmärtäminen ja hahmottaminen on lähes välttämätöntä avaruuskappaleiden ominaisuuksien ymmärtämiselle, mutta kuitenkin monella oppilaalla yläkoulussa on vielä ongelmia monikulmioiden peruskäsitteidenkin ymmärtämisessä.

Näistä lähtökohdista on ilmeistä, että GeoGebraa Suomessa opetukseen käyttävillä on tarve suomenkieliselle opetussuunnitelman mukaiselle materiaalille, jonka voisi ottaa oppitunnilla käyttöön sellaisenaan. Tällaista monikulmioiden ominaisuuksiin keskittyvää materiaalia kehitettiin tässä kehittämistutkimuksessa. Toive materiaalin kehittämiseen tuli Matemaattisten Aineiden Opettajien Liitolta, MAOL:lta. MAOL kerää verkkosivuilleen laajaa materiaalipankkia opettajien vapaaseen käyttöön, ja siellä tässä kehitetty oppimisaihio julkaistaan.

Tässä tutkimuksessa kehitettiin oppilaita kiinnostavaa ja motivoivaa sekä toisaalta matemaattista ymmärrystä kasvattavaa geometrian materiaalia GeoGebralla. Tehtävät vaativat oppilailta luovuutta ja ongelmanratkaisukykyä, ja niitä tehdessä oppilaat harjoittelevat niin itse GeoGebran käyttöä kuin matemaattisia sisältöjäkin. Erityisen tärkeässä roolissa on kuvioiden ja niiden ominaisuuksien hahmottaminen ja syvällinen ymmärtäminen.

6.2 Tutkimusasetelma

Koska tässä kehittämistutkimuksessa kehitettiin GeoGebralla toimiva oppimisaihio, oli luontevaa tutkia tehtävien onnistumista. Tämä tapahtui kysymällä oppilailta ja luokan opettajalta tehtävien tekoon ja niiden ymmärtämiseen liittyvistä vaikeuksista ja ajatuksista. Tehtävien toimivuutta tutkittiin Ylöjärven Yhtenäiskoulun yhdellä 7. luokalla ja yhdellä 8. luokalla. Jotta tehtäviä voitiin kehittää eteenpäin, tehtäviin liitettiin nopeasti vastattavia itsearviointeja ja muutaman tehtävän onnistumista tutkittiin laajemmalla kyselyllä. Koska tehtävätyyppejä ei ole kovin montaa erilaista, riitti, että palautetta pyydettiin yhdestä tehtävästä yhdellä tunnilla ja nämä tehtävät valittiin niin, että ne edustavat eri tehtävätyyppejä. Tehtävät on listattu taulukkoon 6.1. Lisäksi oppilaita tarkkailtiin tunneilla, joilla he tekivät GeoGebra-tehtäviä. Heidän vastauksensa tehtäviin kerättiin, sillä niitä tutkimalla saatiin arvokasta tietoa oppilaiden taitotasosta ja tehtävien ymmärryksestä. Koska aineistoa kerättiin useilla eri menetelmillä, puhutaan aineistotriangulaatiosta, mikä lisää tutkimuksen luotettavuutta [55].

Tehtävien toimivuutta tutkittiin käytettävyyden kontekstissa (kappale 3.3.5). Opetushallituksen työryhmän verkko-oppimateriaalille asettamien käytettävyyden laatukriteerien ja Nielsenin käytettävyyden osa-alueiden avulla luotiin kysymykset, joiden kautta oppilailta pyydettiin palautetta oppimisaihiosta. Tehtäväkohtaiset kysymykset ovat liitteessä B. Koska tehtävät ovat erityyppisiä, on jokaiselle tyypille valittu parhaiten sitä tukevia kysymyksiä. Oppilaat eivät siis vastanneet jokaisesta tutkitusta tehtävästä samoihin kysymyksiin.

Jokaisen tehtävän lopussa oli itsearviointiosuus, jonka väite oli ”Onnistuin tässä tehtävässä hyvin.” (jos tehtävässä piti tehdä jotakin) tai ”Opin uutta tässä tehtävässä.” (jos tehtävä oli pelkästään GeoGebra-pohjan tutkimista). Itsearviointikysymyksiin oli viisi vastausvaihtoehtoa: täysin samaa mieltä, osittain samaa mieltä, ei samaa eikä eri mieltä, osittain eri mieltä ja täysin eri mieltä. Näiden tehtävien tarkoituksena oli saada jokaisesta tehtävästä vähän palautetta oppilaiden kokemuksista ja lisäksi pysäyttää oppilaat hetkeksi pohtimaan omaa oppimistaan sen sijaan, että he jatkaisivat suoraan mahdollisimman nopeasti seuraavaan tehtävään.

Käytettävissä oli kuusi oppituntia, joista jokainen oli kestoltaan 45 minuuttia. Taulukossa 6.1 on kuvattu tehtävien jakautuminen eri oppitunneille. Jokaisella oppitunnilla oli suunnilleen sama määrä tehtäviä ja jokaisella tunnilla oli myös soveltavampia ”tähtitehtäviä”, jotka osa oppilaista voi jättää välistä, mutta joihin jotkut varmasti ehtivät. Tarkoituksena oli, että oppilaat aloittavat joka tunti yhteisestä tehtävästä ja etenevät omaa tahtiaan. Toinen luokista oli 7. luokka ja toinen 8. luokka. Tämän tarkoituksena oli saada palautetta eri vaiheessa opintojaan olevilta oppilailta, sillä 7-luokkalaisille GeoGebra ja monikulmioiden geometria ovat uusia asioita, kun taas 8-luokkalaiset ovat jo hieman käyttäneet GeoGebraa sekä opiskelleet monikulmioiden geometriaa edellisenä lukuvuonna. Tehtäviä arvioivat kysymykset olivat kuitenkin samat molemmille luokille.

Taulukko 6.1. *Tehtävien jakautuminen oppitunneille sekä jokaisella oppitunnilla tarkemmin tutkittavat tehtävät. Tehtävien numerointi noudattaa liitteen A numerointia.*

oppitunnin järjestysnumero	oppitunnilla käsiteltävät tehtävät	tarkemmin tutkittavat tehtävät
1	2.1 – 2.5	2.1
2	2.6 – 3.4	3.3
3	3.5 – 3.13	3.6
4	4.1 – 4.6	4.1
5	4.7 – 5.5	4.7
6	5.6 – 5.11	5.9

6.3 Tulosten analysointi ja luotettavuus

Koska tässä tutkimuksessa mukana olleiden oppilaiden määrä oli niin pieni (17 seitsemäsluokkalaista ja 21 kahdeksasluokkalaista) ei aineistosta voida tehdä suuria yleistyksiä koko ikäluokkaan. Tutkitut oppilaat ovat kuitenkin tässä työssä kehitettyjen GeoGebra-tehtävien todellista kohdeyleisöä, joten heidän antamallaan palautteella on tärkeä merkitys tehtävien jatkokehittämisen kannalta.

Aineistona tutkimuksessa olivat siis oppilaiden tuottamat vastaukset tiettyihin tehtäviin liittyviin kysymyksiin (liite B), oppilaiden tehtäville antamat vapaaehtoiset kommentit sekä muistiinpanot tuntien seurannoista. Näitä aineistoja analysoitiin sisällönanalyysin keinoin. Tavoitteena oli siis etsiä aineistosta yhtäläisyyksiä ja eroja. Koska itse kysymykset ja oppilaiden vastaukset olivat hyvin monimuotoisia, ja toisaalta oppilaiden vastauksia oli suhteellisen vähän, vastaukset luettiin ja niistä muodostettiin kokonaiskuva ilman kvantitatiivista laskentaa. [54] Tämän analyysin pohjalta valittiin ne seikat, joita tehtävissä kehitettiin.

Oppilaat saivat kirjoittaa tehtävistä yksityisiä kommentteja tutkijalle, jos heillä oli tehtävästä jotakin sanottavaa. Näitä kommentteja tulikin paljon enemmän kuin oli odotettu. Oppilaat huomauttivat muun muassa kirjoitusvirheistä sekä GeoGebra-pohjiin jääneistä epäloogisuuksista. Useimmin oppilaat huomauttivat kuitenkin siitä, etteivät tehtävän ohjeet olleet heidän mielestään riittävän selkeitä.

Kuuden pidemmän kyselyn tulokset olivat hyvin samansuuntaisia kuin oppilaiden vapaiden kommenttien sisältö, mutta toisaalta tulokset olivat melko kaksijakoisia. Osalle oppilaista tehtävät tuntuivat olevan helppoja, ja he pitivät tehtävien tuomista haasteista. He halusivat oppia uutta ja olivat valmiita näkemään jonkin verran vaivaa sen eteen. Toisaalta osa oppilaista ei saanut tehtäviä ollenkaan tehtyä, koska he eivät ymmärtäneet tehtävänantoa. Yleisesti ottaen suurin kritiikki tulikin tehtävänantojen selkeydestä. Tämän huomasi myös oppilaiden tuotoksia tarkastellessa. Joidenkin sanallisten tehtävien vastaukset olivat epäloogisia, sillä oppilaat eivät olleet ymmärtäneet tehtävän tarkoitusta oikein. Myös GeoGebralla tehdyt piirrokset olivat välillä erilaisia kuin oli etukäteen ajateltu.

Kun oppilaat lähtivät tekemään tehtäviä, heillä oli pääasiassa kaksi tapaa aloittaa: he joko lukivat ohjeet läpi tai kokeilivat GeoGebra-pohjassa, mitkä osat siinä liikkuvat ja mitä sillä voisi tehdä. Tehtävät voivat hyvin palvella molempien tyyppisiä oppilaita. Ohjeiden lukeminen auttaa aloittamaan heti tarkoituksenmukaisen työskentelyn. Toisaalta GeoGebra-pohjissa on yritetty väreillä ja muodoilla ilmaista, mistä kannattaisi lähteä liikkeelle.

Suurin osa oppilaista piti tehtävien tekemistä kivana. Useisiin eri tehtäviin tuli mainintoja siitä, kuinka tietokoneella tehtävät tehtävät ovat mukavampia kuin vihkoon tehtävät tehtävät. Lisäksi oppilaat pitivät GeoGebralla tapahtuvasta kokeilusta, ja heidän mielestä oli kivaa, jos tehtävät onnistuivat tai olivat helppoja. Sen sijaan jälleen tehtävänannon ymmärtämättömyys aiheutti sitä, että oppilaat eivät pitäneet tehtävää kivana.

Kyselyissä oli kysymyksiä myös GeoGebra-pohjan toimivuudesta sekä tehtäväsivun ulkonäöstä. Näihin tavallisella opettajalla on melko vähän vaikutusvaltaa. Luultavasti suurin syy joidenkin GeoGebra-pohjien toimimattomuuteen oli vanha tai hidas selain. Tehtävänantojen ulkonäköön, tekstin kokoon ja väriin sekä kuvien kokoon ja ulkonäköön voisi vaikuttaa, mutta niistä ei oppilailta tullut juurikaan kritiikkiä.

Oppilaiden tehtäville antamat arvosanat painottuivat hyvän eli arvosanan 8 paremmalle puolelle, ja näitä oli selkeästi yli puolet kaikista vastauksista. Toisaalta sellaisilla oppilailla, jotka eivät muiden vastausten perusteella osanneet tehdä tehtävää, kokonaisarvosana saattoi olla reilustikin alle hyvän.

Tutkimustilanne ei ollut täysin todellista oppimistilannetta vastaava, sillä oppilaat olivat kuusi peräkkäistä oppituntia pelkästään tietokoneluokassa tekemässä vain näitä GeoGebra-tehtäviä. Näin intensiivisessä opetuksessa oli vaarana, että viimeisten tehtävien kohdalla oppilaat olivat jo kyllästyneet samanlaisena toistuviin tunteihin ja tehtäviin. Kuitenkin varsinkin tuntien ensimmäisten tehtävien kohdalla oppilaat vaikuttivat todella innokkailta ja keskittyivät vain käsillä olevaan tehtävään. He keskustelivat yhdessä tehtävistä ja käyttivät oikeita termejä. Esimerkiksi yhdellä tunnilla oppilaat väittelivät keskenään siitä, mitä eroa on nelikulmiolla ja neliöllä.

Joidenkin kyselyiden kohdalla huomasi, että oppilaat olivat jo hieman kyllästyneet sekä GeoGebraan että kyselyihin. Osa heistä sanoi sen suoraankin. Parhaimmillaan GeoGebra-materiaali onkin osana monipuolista opetusta. Lisäksi harvalle oppilaalle sopii näin itsenäinen opiskelu. Jotkut oppilaat pärjäsivät GeoGebra-tehtävissäkin hyvin, mutta osalle oppilaista olisi sopinut selkeästi opettajajohtoisempi toiminta.

Tehtäväsivujen lopussa olevien itsearviointikysymysten vastaukset olivat usein linjassa oppilaan kyseisen sivun tehtävien vastauksien kanssa. Jos oppilas oli osannut tehtävät edes suurimmaksi osaksi, hän oli usein väittämän kanssa osittain tai täysin samaa mieltä. Sen sijaan välillä oppilas oli selkeästi saanut vääriä vastauksia tai toteuttanut GeoGebra-osuuden väärin, mutta hän ei ollut sitä huomannut ja arvioi oman osaamisensa hyväksi. Tällaisten tapausten kohdalla olisi hyvä, että opettaja kävisi läpi tehtävien vastaukset tai muulla tavalla kontrolloisi, ettei oppilaille jäisi virhekäsityksiä.

Kehittämistutkimuksen luotettavuutta lisäävät työn järjestelmällinen dokumentointi, työn formatiivinen arviointi sekä tulosten yleistettävyys [7]. Näillä toimilla pyritään parantamaan työn validiteettia, jota on yleensä vaikea arvioida laadullisesta tutkimuksesta [56]. Tässä työssä kaikki kehittämistutkimuksen luotettavuutta lisäävät ominaisuudet on otettu huomioon. Kehittämisprosessia ja -tuotosta arvioitiin jo prosessin aikana ja huomatut virheet ja puutteet korjattiin heti. Lisäksi kehittämistuotos suunniteltiin alun perin niin, että se sopii käytettäväksi missä tahansa suomalaisessa yläkoulussa. Tutkimus toteutettiin tavallisessa yläkoulussa, jolloin sen oppilaat ovat hyviä edustajia kaikille Suomen yläkoululaisille.

Laadullisen tutkimuksen luotettavuutta voidaan arvioida kvantitatiivisesta tutkimuksesta tutuilla käsitteillä reliabiliteetti ja validiteetti. Reliabiliteetti kuvaa sitä, kuinka luotettavia tulokset ovat. Laadullisen tutkimuksen reliabiliteettia voidaan arvioida metodin reliaabeliuden, ajallisen reliaabeliuden sekä tulosten johdonmukaisuuden kautta. Metodin reliaabelius tarkoittaa tutkimustavan luotettavuutta tutkimusolosuhteissa. Tässä tutkimuksessa oppilaiden verkossa täyttämät kyselyt sekä oppilaiden tarkkailu oppitunneilla olivat toimivia metodeja. Oppilaat vastasivat verkkokyselyihin henkilökohtaisesti, jolloin he voivat antaa palautetta kaverien mielipiteistä huolimatta. Vastaukset näkyvät vain tutkijalle, jolloin matematiikan arvosanan puolestakaan ei tarvinnut pelätä. Ajallisesti tämä tutkimus ei ole kovin luotettava, sillä tutkimuksen tulokset olisivat todennäköisesti hyvin erilaisia, jos tutkimus olisi tehty kymmenen vuotta sitten tai kymmenen vuoden kuluttua. Oppilaiden taidot käyttää tietotekniikkaa kehittyvät koko ajan ja ne vaikuttavat suuresti tutkimuksen tuloksiin. Tulosten johdonmukaisuus tarkoittaa sitä, että eri tavoilla saadut tulokset ovat keskenään johdonmukaisia. Tämän tutkimuksen tapauksessa näin on, sillä oppilaiden itsearvioinnit, heidän tuottamansa vastaukset tehtäviin, heidän vastauksensa tutkimuskyselyihin ja tutkijan huomiot oppituntien seuraamisesta antoivat hyvin yhtenäisen kuvan tehtävien onnistumisesta. [53]

Laadullisen tutkimuksen luotettavuuden tarkastelussa voidaan käyttää myös seuraavaa luokittelua: uskottavuus, siirrettävyys, luotettavuus ja vahvistettavuus [37]. Tässä kehittämistutkimuksessa tuotettiin oppimisaihio kaikkien Suomen opettajien käyttöön, jolloin tutkimus on ollut uskottavaa. Tehtävät ovat helposti kaikkien saatavilla ja toimivat kaikilla laitteilla, eli ne ovat siirrettäviä. Kehittämistutkimuksen luotettavuutta lisää sen tarkka dokumentointi sekä syklittäinen työskentely. Vahvistettavuuden kannalta kehittämistuotosta testattiin autenttisessa ympäristössä ja paranneltiin tämän testauksen perusteella.

6.4 Jatkokehittäminen

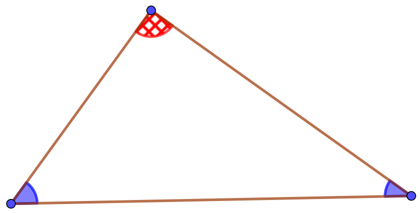
Oppilaiden huomautusten perusteella korjattiin välittömästi tehtävistä puuttuvia työkaluja ja kirjoitusvirheitä. Lisäksi Monikulmioiden ominaisuuksia -tehtävään oli jäänyt looginen virhe, kun tehtävän syöttökentät hyväksyivät vain lukua viisi pienemmät vastaukset. Tällaisten pienten virheiden korjaamisen lisäksi muokattiin useiden tehtävien tehtävänantoja. Tehtävänantoihin lisättiin sellaisia asioita, joita huomattiin oppilaiden kaipaavan. Esimerkiksi siirtotyökalun valitseminen pitää mainita ennen kuin pyytää oppilasta siirtelemään pisteitä. Toisaalta tehtävistä on tarkoitus tulla mahdollisimman monikäyttöisiä, jolloin turhan tarkka ohjeistaminen voi häiritä joidenkin oppilaiden toimintaa. Näissä tehtävissä ohjeistus tehtiin lopulta oppimisaihion sisällä loogiseksi, jolloin ensimmäisissä tehtävissä tehtävänanto on huomattavasti yksityiskohtaisempi kuin viimeisissä tehtävissä.

Suorakulmion piiri -tehtävässä oli hieman puutteellinen tehtävänanto, mutta kysymys, johon oppilaat vastasivat, oli kuitenkin erittäin hyvä. Ensimmäisessä tehtävässä oppilaiden tuli tutkia, millä erilaisilla sivujen pituuksilla suorakulmion piiri on 20. Tämän jälkeen seuraavissa tehtävissä kysyttiin, mikä on suurin ja pienin mahdollinen suorakulmio. Oletuksena oli, että edelleen puhutaan suorakulmioista, joiden piiri on 20 eikä suorakulmioista yleensä. Osa oppilaista oli kuitenkin ymmärtänyt tehtävät kirjaimellisesti ilman rajoitusta suorakulmion piiristä. Ilman piirin pituuden rajoitusta tehtävästä tulee kuitenkin hyvin filosofinen ja sen tarkastelu voi olla yläkouluikäiselle liian haastavaa. Tämän vuoksi tehtävää muokattiin niin, että siinä puhutaan selkeästi vain suorakulmioista, joiden piiri on 20.

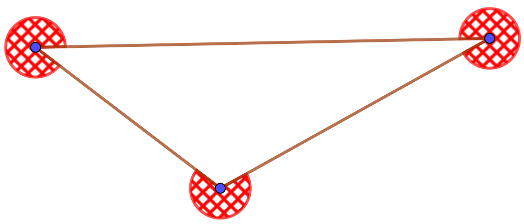
Tasasivuisen ja tasakylkisen kolmion opiskelussa oppilaat piirsivät aluksi kyseiset kolmiot GeoGebralla ja tämän jälkeen seuraavassa tehtävässä määrittelivät käsitteet tasasivuinen kolmio ja tasakylkinen kolmio. Tarkoituksena oli, että oppilaat tekevät määritelmän itse piirtämänsä GeoGebra-kuvion perusteella. Koska kysymykset eivät kuitenkaan olleet samalla sivulla, oppilaat tekivät määritelmät tehtäväsivulla olleen mallikuvan perusteella. Tällöin tasakylkisen kolmion huippukulma saatettiin määrittää teräväksi, koska huippukulma oli sellainen mallikuvassa. Toisaalta määrittelytehtäviä ei voi laittaa piirrostehtävän kanssa samalle sivulle, sillä on hyvin vaikeaa tarkistaa GeoGebralla, onko oppilaan tekemä kuva oikeanlainen kolmio, jonka perusteella määrittely kannattaa tehdä. Tämän vuoksi käsitteiden määrittelyn tehtäväsivulla korvattiin staattiset kuvat GeoGebra-pohjilla, joissa tasasivuista ja tasakylkistä kolmiota voi tutkia raahaamalla.

Useimmissa tehtävissä oppilaat kokeilivat raahata kaikkia mahdollisia GeoGebra-pohjassa olevia objekteja. Tämä onkin hyvä tapa lähteä tehtävissä liikkeelle, mutta monissa tehtävissä piti tehtävien kokeilun jälkeen vielä lisätä lukittujen objektien määrää. Esimerkiksi tehtävässä Pisteen ja suoran välinen etäisyys 1 oli tarkoitus, että piste C ja suora f pysyvät paikallaan, ja oppilaan tulee raahata pistettä A niin, että pisteiden A ja C välinen etäisyys on mahdollisimman pieni. Nyt kuitenkin piste C oli myös vapaasti liikuteltavissa, jolloin oppilas pystyi siirtämään pisteet A ja C päällekkäin, jolloin niiden välinen etäisyys luonnollisesti oli pienin mahdollinen mutta ei tehtävän tarkoittamalla tavalla.

Useissa kulmiin liittyvissä tehtävissä ei oltu otettu erikseen huomioon sitä, että oppilaat voivat raahata kuvion kärkipisteet niin, että mitattu kulma onkin eri puolella kuin oli tarkoitus (esimerkiksi kuva 6.1). Tämän korjaaminen onnistui mittaamalla myös kulmien eksplementtikulmat ja näyttämällä ne vain siinä tapauksessa, että niiden suuruudet muuttuvat tarpeeksi pieniksi. Vastaavasti näissä tilanteissa alkuperäiset kulmat piilotetaan. Näin näkyvissä pysyy koko ajan halutut kuvion sisäkulmat.



(a) Kolmiota on tarkoitus tarkastella tässä asennossa.



(b) Kolmion kulmat ”väärässä” järjestyksessä, jolloin kulmat mitataan kolmion ulkopuolelta.

Kuva 6.1. *Kuvan (a) kolmion ylin piste on raahattu sen kannan alapuolelle, jolloin saadaan kuvan (b) mukainen kolmio. Kulmat mitataan kolmion ulkopuolelta, mikä ei ole tarkoitus.*

Samankaltaisia ongelmia oli muissakin tehtävissä. Erityisesti ongelmia oli Samankohtaiset kulmat -tehtävässä. Siinä kulmien mittaamisessa tarvitut pisteet oli piilotettu, mutta ne olivat silti kuvan alueella. Tällöin oppilaan vetäessä suoran tämän pisteen yli kulma muuttui alkuperäisen kulman eksplementtikulmaksi oppilaalle näkymättömästä syystä. Tämä saattoi aiheuttaa virhekäsityksiä samankohtaisista kulmista. Ongelman korjaaminen onnistui siirtämällä kulmia mittaavat pisteet ulos oppilaan näkemästä kuvasta, jolloin hän ei mitenkään saanut suoria raahattua niin, että kulmia määrittävien pisteiden järjestys olisi muuttunut.

Oppilaiden vastauksia tutkittaessa havaittiin, että Kolmioiden luokittelu taulukkoon -tehtävässä oppilaat olivat monesti tehneet kolmiot hieman huolimattomasti. Tämän vuoksi tehtävää muutettiin hieman. Uudessa tehtävässä pisteet on valmiiksi yhdistetty kolmioksi. Tällöin tehtävään voitiin toteuttaa tarkistusmekanismi, joka auttaa oppilaita jatkamaan tehtävän parissa niin kauan, että he ovat saaneet oikean tuloksen. Lisäksi tehtävään lisättiin kulman mittaustyökalu sekä janan pituuden mittaustyökalu, jolloin oppilaat voivat analyyttisemmin arvioida kolmioidensa ominaisuuksia. Tällöin oppilaat myös huomaavat, ettei tasasivuista ja tylppäkulmaista kolmiota voi piirtää, ja osaavat vastata aiheeseen liittyvään kysymykseen.

Oppilaat vaikuttivat tunneilla olevan innoissaan tehtävistä, ja osa tehtävistä sai oppilaat yksin tai yhdessä parin kanssa pohtimaan todella syvällisiäkin aiheita. Lisäksi oppilaat arvioivat tehtävien olevan kivoja ja niiden tekemisen olevan hauskempaa kuin tavallisten vihkotehtävien. Näiden perusteella voidaan päätellä, että oppilaat motivoituivat tehtävien tekemisestä, mikä olikin yksi tehtävien tavoitteista. Tehtävät olivat siis pääosin onnistuneita, jolloin niihin tehtiin vain virheiden korjaamista sekä hienosäätöä ohjeiden tarkentamisessa ja GeoGebra-pohjien viimeistelyssä.

Tehtäviä voisi kuitenkin kehittää edelleen. Niissä käsiteltäviä aiheita voitaisi laajentaa sekä tuoda uusia aiheita, kuten ympyröiden käsittelyä. Näin tehtävät voisivat kattaa lähes koko yläkoulun geometrian osuuden. Toisaalta myös jo olemassa olevia aiheita voisi syventää niin, että yhdestä aiheesta voisi olla enemmänkin kuin vain yksi tai kaksi tehtävää. Syventävissä tehtävissä voisi harjoitella GeoGebran toimintojen käyttöä syvällisemmin sekä tietysti opiskella geometriaa syvällisemmin. Aiheita voitaisi tarkastella useasta eri näkökulmasta. Joillekin oppilaille yhden tehtävän tekeminen jostakin aiheesta ei riitä.

7. YHTEENVETO

Tässä diplomityössä oli tarkoituksena kehittää GeoGebralla toteutettava oppimisaihio yläkoulun geometrian opiskeluun. GeoGebra valikoitui tehtävien alustaksi siksi, että se on suunniteltu opetuskäyttöön, se on saatavilla suomeksi ja se on yksi matematiikan sähköisissä ylioppilaskirjoituksissa sallituista ohjelmistoista. Näin ollen GeoGebran käytön harjoittelu on perusteltua aloittaa ja yläkoulussa. GeoGebran käyttöliittymä on graafinen, jolloin se sopii erinomaisesti peruskouluikäisille oppilaille ensikosketukseksi matemaattisten ohjelmistojen maailmaan.

Aiheena yläkoulun geometriasta oli erityisesti monikulmiot ja niihin liittyen myös kulmien ominaisuudet. Monikulmiot ovat tärkeä osa geometrian opiskelua ja niitä opiskellaan jo alakoulussa. Kuitenkin monilla oppilailla on vaikeuksia nimenomaan monikulmioiden ominaisuuksien ymmärtämisessä. Tässä diplomityössä kehitettyjen tehtävien tarkoituksena on auttaa oppilaita syventämään ymmärtämistään monikulmioista ja niiden ominaisuuksista. Lisäksi monikulmiot ovat aiheena sellainen, joka sopii erityisen hyvin GeoGebralla toteutettavaksi.

Kehittämistutkimuksen rakenteen mukaisesti ensin tehtiin ongelma-analyysi eli tarkasteltiin tehtävissä käytettävää geometriaa ja geometrian oppimista sekä käytiin läpi erilaisia näkökulmia oppimisaihion rakentamisesta. Erityisen tärkeitä näkökulmia olivat hahmottava geometrian oppiminen, motivointi, metakognitiivisten taitojen oppiminen sekä tutkiva ja yhteisöllinen oppiminen. Ongelma-analyysin perusteella luotiin tavoitteet kehittämisprosessille. Tarkoituksena oli luoda monipuolinen tehtäväkokonaisuus, joka motivoisi oppilaita pohtimaan ja yrittämään ratkaisuja. Materiaalin kantavana ajatuksena on monikulmioiden ominaisuuksien hahmottaminen ja pohtiminen. Lisäksi monet tehtävistä vaativat oppilailta tutkivaa asennetta ja yhteistyötä muiden kanssa. Oppimisaihion kehittämisessä otettiin huomioon myös käytettävyyden näkökulma, joka auttoi tehtävien rakentamisessa ja arvioinnissa.

Materiaalin kehittäminen oli kehittämistutkimuksen seuraava vaihe eli kehittämisprosessi. Siinä tehdyt päätökset kuvattiin tässä työssä tarkasti ja päätökset perusteltiin ongelma-analyysin perusteella. Luotu materiaali eli oppimisaihio on kehittämistutkimuksen termein kehittämistuotos. Oppimisaihioon kuuluu yhteensä 42 tehtäväsivua, joista jokainen on oma GeoGebra-työkirjansa. Nämä työkirjat on koottu järjestykseen GeoGebra-kirjaan.

Kehittämistuotoksen valmistumisen jälkeen toteutettiin kehittämistutkimuksen yhden syklin viimeinen vaihe eli arviointi. Kehitettyä materiaalia siis testattiin yläkoulussa, minkä perusteella tehtävien toimivuutta arvioitiin. Tehtäviä testattiin Ylöjärven Yhtenäiskoulun yhdellä 7. luokalla ja yhdellä 8. luokalla. Tarkoituksena oli saada tehtävistä palautetta niin kokemattomilta GeoGebra-käyttäjiltä (7-luokkalaiset) kuin jonkin verran GeoGebraa käyttäneiltä oppilailta (8-luokkalaiset). Lisäksi oppilaiden matemaattisissa taidoissa oli eroja, sillä 8-luokkalaiset olivat opiskelleet monikulmioiden geometriaa edellisenä lukuvuonna, kun taas 7-luokkalaiset eivät.

Tehtävien onnistumista arvioitiin oppilaiden täyttämillä kyselyillä. Lisäksi tarkasteltiin oppilaiden vastauksia tehtäviin sekä seurattiin oppitunneilla oppilaiden työskentelyä. Kaikkien menetelmien kautta saatiin paljon palautetta tehtävien toimivuudesta niin teknisesti kuin pedagogisesti. Erityisen tärkeäksi nousi tehtävänantojen selkeys ja yksityiskohtaisuus. Oppilaat kaipasivat varsinkin oppimisaihion alussa hyvinkin tarkkoja ohjeita, joissa käytettävät työkalut on merkitty kuvilla. Oppilaiden GeoGebra-taidot kuitenkin kehittyivät tutkimuksen aikana niin paljon, että kokonaisuuden viimeisiin tehtäviin riitti hieman summittaisemmat ohjeet. Lisäksi testauksessa tuli ilmi tehtävien toimivuuteen liittyviä ongelmia, kuten työkalujen puuttumista tai syötekentän rajoituksia. Oppilaita oli niin monta, että kaikki tällaiset tekniset viat tulivat varmasti huomattua, ja ne kaikki saatiin korjattua.

Testauksen jälkeen materiaalia muokattiin ja kehitettiin oppilaiden ehdotusten ja heidän työskentelystään havaittujen seikkojen perusteella. Koska oppilaat kävivät tavallista suomalaista peruskoulua, heidän osaamisensa vastaa hyvin muiden Suomen yläkoululaisten osaamista. Voidaan siis olettaa, että jos testaus olisi tehty jossakin toisessa koulussa, tulokset olisivat olleet hyvin samansuuntaisia. Materiaalin korjailun ja viimeistelyn jälkeen se julkaistiin kaikkien saataville GeoGebran kautta. Tehtäväkokonaisuus on saatavissa osoitteessa https://ggbm.at/jephwdbr ja sen ylläpidosta ja opettajien ohjauksesta materiaalin pariin vastaa Matemaattisten Aineiden Opettajien Liitto MAOL. Kaikkien saatavilla olevan ja opetussuunnitelman pohjalta toteutetun laajan tehtäväkokonaisuuden tekeminen auttaa varmasti monia opettajia ottamaan tieto- ja viestintäteknologian järkevästi osaksi opetustaan, jolloin tehtäväkokonaisuuden kehittäminen on ollut yhteiskunnallisestikin merkittävää.

Materiaalin onnistumista tavoitteissaan on haastavaa mitata tarkasti, mutta onnistumista voidaan arvioida laadullisesti. Oppilaiden vastausten perusteella heidän geometrian hahmottamisensa oli varsinkin tehtävien alussa melko pinnallista, mutta se parani hieman tehtävien edetessä. Oppilaat oppivat käyttämään GeoGebraa eli itselleen vierasta ohjelmistoa, jolloin heidän oppimaan oppimisen taitonsa eli metakognitiiviset taitonsa paranivat. Oppitunneilla oppilaat työskentelivät keskittyneesti ja keskustelivat keskenään matemaattisista aiheista. Oppilaiden ongelmanratkaisutaidot kehittyivät tehtävissä, ja jos aikaa vain oli, oppilaat yrittivät tehtäviä pitkäjänteisesti ja kiinnostuneina. Jos viimeinen GeoGebraoppitunti loppui oppilaan huudahdukseen ”Ei kai me vielä jouduta lopettamaan!”, voidaan sanoa, että tehtävät olivat kaikkiaan onnistuneita myös oppilaiden mielestä.

LÄHTEET

[1] M. Ahtee, M. Hannula, A. Laine, L. Näveri, E. Pehkonen, P. Portaankorva-Koivisto, *Iloa ongelmanratkaisuun*, Otava, 2016, 136 s.

[2] M. Aksela, J. Pernaa, *Kehittämistutkimus pro gradu -tutkielman tutkimusmenetelmänä*, teoksessa: *Kehittämistutkimus opetusalalla*, PS-Kustannus, 2013, s. 181–200.

[3] M. Arvaja, K. Mäkitalo-Siegl, *Yhteisöllisen oppimisen kognitiiviset, sosiaaliset ja kontekstuaaliset tekijät: verkkovuorovaikutuksen näkökulma*, teoksessa: *Oppimisen teoria ja teknologian opetuskäyttö*, WSOY, 2006, s. 125–146.

[4] R. Azevedo, *Using Hypermedia as a Metacognitive Tool for Enhancing Student Learning? The Role of Self-Regulated Learning*, Educational Psychologist, Vol. 40, Iss. 4, 2005, pp. 199–209. Saatavissa (viitattu 7.9.2018): https://doi.org/10.1207/s15326985ep4004_2

[5] M. Binkley, O. Erstad, J. Herman, S. Raizen, M. Ripley, M. Miller-Ricci, M. Rumble, *Defining Twenty-First Century Skills*, in: *Assessment and Teaching of 21st Century Skills*, Springer, 2012, pp. 17–66. Saatavissa (viitattu 12.10.2018): https://doi.org/10.1007/978-94-007-2324-5_2

[6] S. Brodie, *Napoleon's Theorem, Two Simple Proofs - Cut the Knot*. Saatavissa (viitattu 17.10.2018): http://www.cut-the-knot.org/proofs/napoleon.shtml

[7] D.C. Edelson, *Design Research: What We Learn When We Engage in Design*, The Journal of the Learning Sciences, Vol. 11, Iss. 1, 2002, pp. 105–121. Saatavissa (viitattu 14.9.2018): https://www.cs.uic.edu/~i523/edelson.pdf

[8] *GeoGebra Groups -book*. Saatavissa (viitattu 18.10.2018): https://www.geogebra.org/m/rQrbooeq

[9] B. Grünbaum, *A Relative of "Napoleon's Theorem"*, Geombinatorics, Vol. 10, Iss. 3, 2001, pp. 116–121. Saatavissa (viitattu 17.10.2018): https://sites.math.washington.edu/~grunbaum/A%20Relative%20of%20Napoleons%20Theorem.pdf

[10] B. Grünbaum, *Is Napoleon's Theorem* Really *Napoleon's Theorem?*, The American Mathematical Monthly, Vol. 119, Iss. 6, 2012, pp. 495–501. Saatavissa (viitattu 17.10.2018): http://www.jstor.org/stable/10.4169/amer.math.monthly.119.06.495

[11] L. Haapasalo, *Ongelmanratkaisukulttuuri konstruktivismin peruselementtinä*, teoksessa: *Matematiikka – näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen*, Niilo Mäki Instituutti, 2004, s. 84–99.

[12] K. Hakkarainen, L. Lipponen, L. Ilomäki, S. Järvelä, M. Lakkala, H. Muukkonen, M. Rahikainen, E. Lehtinen, *Tieto- ja viestintätekniikka tutkivan oppimisen välineenä*, Helsingin kaupungin opetusvirasto, 1999, 60 s.

[13] K. Hakkarainen, S. Paavola, P. Seitamaa-Hakkarainen, *Tutkivan oppimisen periaatteita ja käytäntöjä: "trialoginen" tiedonluomisen malli*, teoksessa: *Oppimisen teoria ja teknologian opetuskäyttö*, WSOY, 2006, s. 147–166.

[14] S. Hidi, *Interest, Reading, and Learning: Theoretical and Practical Considerations*, Educational Psychology Review, Vol. 13, Iss. 3, 2001, pp. 191–209. Saatavissa (viitattu 12.10.2018): https://doi.org/10.1023/A:1016667621114

[15] E. Hietakymi, *Matematiikan sähköinen ylioppilaskoe ja GeoGebra sen työvälineenä*, pro gradu -tutkielma, Helsingin yliopisto, Matemaattis-luonnontieteellinen tiedekunta, Helsinki, 2014, 99 s. Saatavissa (viitattu 28.8.2018): http://urn.fi/URN:NBN:fi-fe2017112251364

[16] K. Hirvonen, *Onko laskutaito laskussa?*, Opetushallitus, Koulutuksen seurantaraportti 2012:4, 2012, 131 s. Saatavissa (viitattu 9.10.2018): https://karvi.fi/publication/onko-laskutaito-laskussa-matematiikan-oppimistulokset-peruskoulun-paattovaiheessa-2011/

[17] M. Hohenwarter, J. Preiner, *Dynamic Mathematics with GeoGebra*, Journal of Online Mathematics and Its Applications (JOMA), Vol. 7, 2007. Saatavissa (viitattu 1.8.2018): https://www.maa.org/external_archive/joma/Volume7/Hohenwarter/index.html

[18] J. Honkanen, *Matematiikan sähköistyminen herättää kritiikkiä – YTL vastaa useimmiten kysyttyihin kysymyksiin*, 2018. Saatavissa (viitattu 14.11.2018): https://yle.fi/aihe/artikkeli/2018/02/13/matematiikan-sahkoistyminen-herattaa-kritiikkia-ytl-vastaa-useimmiten

[19] T. R. Hurme, T. Iiskala, *Metakognitio teknologisissa oppimisympäristöissä*, teoksessa: *Oppimisen teoria ja teknologian opetuskäyttö*, WSOY, 2006, s. 40–60.

[20] M. Hähkiöniemi, H. Leppäaho, A. Viholainen, *Avoin ongelmanratkaisu teknologia-avusteisessa oppimisympäristössä*, teoksessa: *Matematiikan ja luonnontieteiden opetuksen ajankohtaista tutkimusta*, Helsingin yliopisto, Suomen ainedidaktisen tutkimusseuran julkaisuja. Ainedidaktisia tutkimuksia 2, 2012, s. 29–44. Saatavissa (viitattu 1.10.2018): https://helda.helsinki.fi/handle/10138/37755

[21] P. Häkkinen, S. Järvelä, E. Lehtinen, *Yksilön oppiminen ja teknologian tuki*, teoksessa: *Oppimisen teoria ja teknologian opetuskäyttö*, WSOY, 2006, s. 15–17.

[22] L. Ilomäki, M. Lakkala, *Tietokone opetuksessa: opettajan apu vai ongelma?*, teoksessa: *Oppimisen teoria ja teknologian opetuskäyttö*, WSOY, 2006, s. 184–212.

[23] *Introduction to GeoGebraScript*. Saatavissa (viitattu 8.9.2018): https://wiki.geogebra.org/en/Tutorial:Introduction_to_GeoGebraScript

[24] ISO, *Ergonomics of human-system interaction – Part 11: Usability: Definitions and concepts*, The International Organization for Standardization, ISO 9241-11, 2018. Saatavissa (viitattu 12.12.2018): https://www.iso.org/obp/ui/#iso:std:iso:9241:-11:ed-2:v1:en

[25] T. Jaakkola, S. Nurmi, *Oppimisaihiot oppimisympäristöjen osana*, teoksessa: *Oppimisen teoria ja teknologian opetuskäyttö*, WSOY, 2006, s. 213–229.

[26] J. Joki, *Ulkoluvusta hahmottavaan geometriaan. Aineksia geometrian opetukseen erityisesti peruskoulussa*, Joensuun yliopisto, 2002, 289 s.

[27] J. Joutsenlahti, *Kielentäminen matematiikan opetuksessa*, teoksessa: *Opettaja, asiantuntijuus ja yhteiskunta*, Turun opettajankoulutuslaitos, Turun yliopiston kasvatustieteiden tiedekunnan julkaisuja B:72, 2003, s. 188–196. Saatavissa (viitattu 1.10.2018): https://www.researchgate.net/publication/257067181_Kielentaminen_matematiikan_opiskelussa

[28] K. Juuti, J. Lavonen, *Design-Based Research in Science Education: One Step Towards Methodology*, Nordic Studies in Science Education, Vol. 2, Iss. 2, 2006, pp. 54–68. Saatavissa (viitattu 14.9.2018): http://dx.doi.org/10.5617/nordina.424

[29] V. Keränen, J. Penttinen, *Verkko-oppimateriaalin tuottajan opas*, WSOY, 2007, 293 s.

[30] *Kilpikonnagrafiikka - Wikipedia*. Saatavissa (viitattu 10.10.2018): https://fi.wikipedia.org/wiki/Kilpikonnagrafiikka

[31] S. Kivelä, *Geometriakulma: Algebran käyttö geometriassa eli Napoleonin lause uudelleen*, Matematiikkalehti Solmu, nro 3, 1997–1998. Saatavissa (viitattu 17.10.2018): https://matematiikkalehtisolmu.fi/1998/1/geomkulma/index.html

[32] S. Kivelä, *Geometriakulma: Napoleonin lause*, Matematiikkalehti Solmu, nro 1, 1997–1998. Saatavissa (viitattu 17.10.2018): https://matematiikkalehtisolmu.fi/1997/2/napoleon.html

[33] E. Laine, *Tietokoneavusteisen geometrian opetuksen vaikutuksia laskennallisen ajattelun kehittymiseen ja opiskelijoiden motivaatioon*, pro gradu -tutkielma,

Tampereen yliopisto, Kasvatustieteiden tiedekunta, Tampere, 2017, 59 s. Saatavissa (viitattu 28.8.2018): http://urn.fi/URN:NBN:fi:uta-201706162041

[34] M. Lehtinen, *Geometrian perusteita*, 2016, 145 s. Saatavissa (viitattu 8.9.2018): http://www.elisanet.fi/matti.t.lehtinen/Geom2016kaikki.pdf

[35] M. Lehtinen, J. Merikoski, T. Tossavainen, *Johdatus tasogeometriaan*, WSOY, 2007, 163 s. Saatavissa (viitattu 8.8.2018): https://www.researchgate.net/publication/288669104_Johdatus_tasogeometriaan

[36] Liikenne- ja viestintäministeriö, *Kansallinen tieto- ja viestintätekniikan opetuskäytön suunnitelma*, 2010. Saatavissa (viitattu 8.9.2018): https://julkaisut.valtioneuvosto.fi/handle/10024/78193

[37] Y.S. Lincoln, E.G. Guba, *Naturalistic Inquiry*, Sage Publication, 1985, 417 p.

[38] T. Lukin, *Motivaatio matematiikan opiskelussa – seurantatutkimus motivaatiotekijöistä ja niiden välisistä yhteyksistä yläkoulun aikana*, väitöskirja, Itä-Suomen yliopisto, Joensuu, 2013, 227 s. Saatavissa (viitattu 28.8.2018): http://urn.fi/URN:ISBN:978-952-61-1263-3

[39] O. Martio, *Didaktinen matematiikka?*, Tieteessä tapahtuu, vsk. 22, nro 2, 2004, s. 42–45. Saatavissa (viitattu 20.9.2018): https://journal.fi/tt/article/view/56898

[40] O. Martio, *Oppimäärien muutokset ja niiden vaikutukset matematiikan osaamiseen Suomessa*, Matematiikkalehti Solmu, Erikoisnumero, nro 2, 2006, s. 12–13. Saatavissa (viitattu 9.10.2018): https://matematiikkalehtisolmu.fi/2006/erik2/solmu33.pdf

[41] C. Morgan, *The institutionalisation of open-ended investigation: some lessons from the U.K. experience*, in: *Use of open-ended problems in mathematics classroom*, Helsingin yliopiston opettajankoulutuslaitos, Tutkimuksia n:o 176, 1997, pp. 49–62. Saatavissa (viitattu 9.10.2018): https://eric.ed.gov/?id=ED419714

[42] R. Nevanlinna, *Geometrian perusteet*, WSOY, 1973, 102 s.

[43] J. Nielsen, *Usability Engineering*, Academic Press, 1993, 362 p.

[44] P. Nokelainen, *Digitaalisen oppimateriaalin käytettävyyden arvioinnin kriteerit*, teoksessa: *eValuator : Digitaalisten oppimateriaalien, oppimisympäristöjen ja mobiilioppimisen menetelmien arvionti.*, Hämeen ammattikorkeakoulu, 2004, s. 39–86. Saatavissa (viitattu 23.10.2018): http://www.theseus.fi/handle/10024/96257

[45] J. Nuutinen, A. Paappanen, *Suorakulmaisten kolmioiden yhdenmuotoisuus Geogebran avulla*, teoksessa: *Geogebra-avusteinen tutkiva matematiikka opetushar-*

joittelussa. Tutkimuksia opettajan ja oppilaiden toiminnasta., Jyväskylän yliopisto, 2011, s. 60–65. Saatavissa (viitattu 28.8.2018): https://jyx.jyu.fi/handle/123456789/37131

[46] Oikeusministeriö, *Lukiolaki 1998/629*. Annettu 21.8.1998. Saatavissa (viitattu 3.9.2018): https://www.finlex.fi/fi/laki/ajantasa/1998/19980629

[47] Opetushallituksen työryhmä, *Verkko-oppimateriaalin laatukriteerit*, 2006, 37 s. Saatavissa (viitattu 23.10.2018): http://www.oph.fi/download/47132_verkko-oppimateriaalin_laatukriteerit.pdf

[48] Opetushallitus, *Tieto- ja viestintätekniikka opetuskäytössä*, 2011. Saatavissa (viitattu 8.8.2018): https://www.oph.fi/download/132877_Tieto-_ja_viestintatekniikka_opetuskaytossa.pdf

[49] Opetushallitus, *Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet 2014*, 2016. Saatavissa (viitattu 1.8.2018): https://www.oph.fi/download/163777_perusopetuksen_opetussuunnitelman_perusteet_2014.pdf

[50] E. Pehkonen, *Tutkiva matematiikan oppiminen peruskoulussa*, Tieteessä tapahtuu, vsk. 21, nro 6, 2003, s. 35–38. Saatavissa (viitattu 14.9.2018): https://journal.fi/tt/article/view/57322

[51] J. Pernaa, *Kehittämistutkimus tutkimusmenetelmänä*, teoksessa: *Kehittämistutkimus opetusalalla*, PS-Kustannus, 2013, s. 9–26.

[52] R. Piché, *Matkapuhelinverkon solujen geometriaa*, Matematiikkalehti Solmu, nro 1, 2003, s. 10–12. Saatavissa (viitattu 9.10.2018): https://matematiikkalehtisolmu.fi/2003/1/solmu23.pdf

[53] A. Saaranen-Kauppinen, A. Puusniekka, *KvaliMOTV – Menetelmäopetuksen tietovaranto. Reliabiliteetti*, 2006. Saatavissa (viitattu 4.12.2018): http://www.fsd.uta.fi/menetelmaopetus

[54] A. Saaranen-Kauppinen, A. Puusniekka, *KvaliMOTV – Menetelmäopetuksen tietovaranto. Sisällönanalyysi*, 2006. Saatavissa (viitattu 27.11.2018): http://www.fsd.uta.fi/menetelmaopetus

[55] A. Saaranen-Kauppinen, A. Puusniekka, *KvaliMOTV – Menetelmäopetuksen tietovaranto. Triangulaatio*, 2006. Saatavissa (viitattu 27.11.2018): http://www.fsd.uta.fi/menetelmaopetus

[56] A. Saaranen-Kauppinen, A. Puusniekka, *KvaliMOTV – Menetelmäopetuksen tietovaranto. Validiteetti*, 2006. Saatavissa (viitattu 4.12.2018): http://www.fsd.uta.fi/menetelmaopetus

[57] P. Sallasmaa, L. Mannila, M. Peltomäki, T. Salakoski, P. Salmela, R. J. Back, *Haasteet ja mahdollisuudet tietokonetuetussa matematiikan opetuksessa*, teoksessa: *Opetusteknologia koulun arjessa*, Jyväskylän yliopisto, Koulutuksen tutkimuslaitos, 2011, s. 125–140.

[58] *Scripting*. Saatavissa (viitattu 8.9.2018): https://wiki.geogebra.org/en/Scripting

[59] H. Silfverberg, *Peruskoulun yläasteen oppilaan geometrian käsitetieto*, väitöskirja, Tampereen yliopisto, Tampere, 1999, 254 s. Saatavissa (viitattu 5.9.2018): http://urn.fi/urn:isbn:951-44-4718-2

[60] H. Silfverberg, *Geometrinen käsitteenmuodostus oppimisen tutkimuksen kohteena*, teoksessa: *Matematiikan opetus ja oppiminen*, Niilo Mäki Instituutti, 2018, s. 86–109.

[61] H. Silfverberg, *Tieto- ja viestintätekniikka matematiikan oppimisessa*, teoksessa: *Matematiikan opetus ja oppiminen*, Niilo Mäki Instituutti, 2018, s. 394–409.

[62] H. Silfverberg, J. Joutsenlahti, *Prospective Teachers' Conceptions about a Plane Angle and the Context Dependency of the Conceptions*, in: *Proceedings of the Joint Meeting of PME 38 and PME-NA 36, Vancouver, Canada, July 15–20, 2014*, PME, pp. 185–192. Saatavissa (viitattu 16.10.2018): http://www.pmena.org/pmenaproceedings/PMENA%2036%20PME%2038%202014%20Proceedings%20Vol%205.pdf

[63] *Tampereen seudun esi- ja perusopetuksen TVT-suunnitelma 2016–2018*. Saatavissa (viitattu 8.8.2018): http://tvt.tampereenseutu.fi/suunnitelmat/tampereen-seudun-esi-ja-perusope/

[64] A. Tapola, M. Veermans, *Motivaatio ja kiinnostuneisuus*, teoksessa: *Oppimisen teoria ja teknologian opetuskäyttö*, WSOY, 2006, s. 65–84.

[65] A. Tapola, M. Veermans, *Herätä ja tue kiinnostusta ja motivaatiota*, teoksessa: *Laatua e-oppimateriaaleihin*, Opetushallitus, 2012, s. 74–81. Saatavissa (viitattu 23.10.2018): https://www.oph.fi/download/144415_Laatua_e-oppimateriaaleihin_2.pdf

[66] The Design-Based Research Collective, *Design-Based Research: An Emerging Paradigm for Educational Inquiry*, Educational Researcher, Vol. 32, Iss. 1, 2003, pp. 5–8. Saatavissa (viitattu 13.9.2018): https://doi.org/10.3102/0013189X032001005

[67] J. Thompson, T. Martinson, V. Kauko (toim.), *Matematiikan käsikirja*, kolmas p., Tammi, 1994, 436 s.

[68] T. Tossavainen, *Didaktista matematiikkaa – tai ainakin uusi näkökulma matematiikan aineenopettajakoulutukseen*, teoksessa: *Tutkiva opettajankoulutus – taitava opettaja*, Joensuun yliopisto, 2005, s. 118–127.

[69] Z. Usiskin, *Van Hiele Levels and Achievement in Secondary School Geometry. CDASSG Project.*, The University of Chicago Press, 1982, 231 p. Saatavissa (viitattu 5.9.2018): https://eric.ed.gov/?id=ED220288

[70] I. Vojkuvkova, *The van Hiele Model of Geometric Thinking*, in: *WDS'12 Proceedings of Contributed Papers: Part I – Mathematics and Computer Sciences*, Matfyzpress, Praha, 2012, pp. 72–75.

[71] K. Väisälä, *Geometria*, WSOY, 1959, 177 s. Saatavissa (viitattu 5.9.2018): https://matematiikkalehtisolmu.fi/2011/geometria.pdf

[72] Ylioppilastutkintolautakunta, *Koejärjestelmässä käytettävissä olevat ohjelmat*. Saatavissa (viitattu 8.8.2018): https://www.ylioppilastutkinto.fi/ylioppilastutkinto/digitaalinen-ylioppilastutkinto/koejarjestelman-ohjelmat

[73] Ylioppilastutkintolautakunta, *Tiedote matematiikan opettajille ja opiskelijoille (25.1.2018)*. Saatavissa (viitattu 3.9.2018): https://www.ylioppilastutkinto.fi/images/sivuston_tiedostot/Sahkoinen_tutkinto/matematiikka_tiedote_digitaalinen_koe.pdf

[74] *Yläkoulun geometriaa*. Saatavissa (viitattu 16.10.2018): https://matematiikkalehtisolmu.fi/2008/diplomi/ylakoulun_geometriaa.pdf

LIITE A: GEOGEBRA-TEHTÄVÄT

A.1 Johdanto

1. Tehtävistä
2. Pikaohjeet GeoGebran käyttöön

A.2 Kulmat

1. Kulmien luokittelua
2. Kulmien suuruudet
3. Kulmien nimeäminen
4. Kulmien piirtäminen
5. Kello
6. Pisteen ja suoran välinen etäisyys 1
7. Pisteen ja suoran välinen etäisyys 2
8. *Linkkitornit
9. Vieruskulmat ja ristikulmat
10. Samankohtaiset kulmat

A.3 Kolmiot

1. Kolmio
2. Kolmioiden piirtäminen
3. Kolmion kulmien summa
4. *Kolmion kulmien summan todistus
5. Tylppä- ja teräväkulmaiset kolmiot
6. Tasakylkisen kolmion piirtäminen
7. Tasakylkisen kolmion määritelmä
8. Tasasivuisen kolmion piirtäminen
9. Tasasivuisen kolmion määritelmä
10. *Erilaisia tapoja piirtää tasasivuinen kolmio
11. Kolmio-käsitteet
12. Kolmioiden luokittelu taulukkoon
13. *Napoleonin lause

A.4 Nelikulmiot

1. Nelikulmio-käsitteet
2. Nelikulmion lävistäjä
3. Suorakulmion piiri
4. Neliön jakaminen kahteen osaan
5. Neliön jakaminen kolmeksi kolmioksi
6. Puolisuunnikkaan pinta-ala
7. Erikokoisia neliöitä
8. *Huvipuisto-ongelma

A.5 Monikulmiot

1. Monikulmio
2. Onko monikulmio?
3. Säännöllisen monikulmion piirtäminen
4. Monikulmioiden piirtäminen
5. Monikulmioiden ominaisuuksia
6. Kuusikulmion jakaminen
7. Kilpikonna
8. *Lisää kilpikonnia
9. Paritehtävä: robotti
10. Taidetta!
11. Kissa

LIITE B: KYSELYT

Kyselyiden kaikki kysymykset olivat avoimia ja pakollisia.

B.1 Arviointi tehtävästä ”Kulmien suuruudet”

1. Oliko tehtävänanto selkeä? Jos ei ollut, mikä siinä jäi epäselväksi? Anna tehtävänannolle numeroarvosana (4-10).
2. Miten tehtävän aloittaminen sujui?
3. Toimiko GeoGebra-pohja hyvin vai oliko sen kanssa ongelmia? Jos oli ongelmia, millaisia ne olivat? Anna GeoGebra-pohjan toimivuudelle numeroarvosana (4-10).
4. Mitä mieltä olit koko tehtäväsivun ulkonäöstä?
5. Haluaisitko tehdä samantyyppisiä tehtäviä lisää eri aiheista? Perustele vastauksesi.
6. Miten parantaisit tehtävää? Minkä numeroarvosanan (4-10) antaisit tehtävälle kokonaisuudessa?

B.2 Arviointi tehtävästä ”Kolmion kulmien summa”

1. Oliko tehtävänanto selkeä? Jos ei ollut, mikä siinä jäi epäselväksi? Anna tehtävänannolle numeroarvosana (4-10).
2. Miten tehtävän aloittaminen sujui?
3. Oliko tehtävää kiva tehdä? Mikä siinä oli kivaa? Mikä ei ollut niin kivaa?
4. Mitä uutta opit GeoGebran käytöstä?
5. Toimiko GeoGebra-pohja hyvin vai oliko sen kanssa ongelmia? Jos oli, millaisia ongelmat olivat? Anna GeoGebra-pohjalle numeroarvosana (4-10).
6. Teitkö paljon virheitä ennen kuin ymmärsit, miten tehtävä tulee tehdä? Millaisia virheitä?
7. Miten parantaisit tehtävää? Minkä numeroarvosanan (4-10) antaisit tehtävälle kokonaisuudessa?

B.3 Arviointi tehtävästä ”Tasakylkisen kolmion piirtäminen”

1. Oliko tehtävänanto selkeä? Jos ei ollut, mikä siinä jäi epäselväksi? Anna tehtävänannolle numeroarvosana (4-10).
2. Miten tehtävän aloittaminen sujui?

3. Oliko tehtävää kiva tehdä? Mikä siinä oli kivaa? Mikä ei ollut niin kivaa?
4. Miten tehtävän ohjeiden noudattaminen sujui? Olivatko ohjeet tarpeeksi selkeät? Jos eivät olleet, mitä niihin pitäisi lisätä?
5. Mitä uutta opit GeoGebran käytöstä?
6. Teitkö paljon virheitä ennen kuin onnistuit tehtävän teossa? Millaisia virheitä teit?
7. Miten parantaisit tehtävää? Minkä numeroarvosanan (4-10) antaisit tehtävälle kokonaisuudessa?

B.4 Arviointi tehtävästä ”Nelikulmio-käsitteet”

1. Oliko tehtävänanto selkeä? Jos ei ollut, mikä siinä jäi epäselväksi? Anna tehtävänannolle numeroarvosana (4-10).
2. Miten tehtävän aloittaminen sujui? Mitä teit ensimmäiseksi?
3. Oliko tehtävää kiva tehdä? Mikä siinä oli kivaa? Mikä ei ollut niin kivaa?
4. Toimiko GeoGebra-pohja hyvin vai oliko sen kanssa ongelmia? Jos oli, millaisia ongelmat olivat? Anna GeoGebra-pohjalle numeroarvosana (4-10).
5. Mitä mieltä olet tehtävän mallivastauksista? Tarvitsitko niitä ollenkaan?
6. Mitä pidit tehtäväsivun ulkonäöstä kokonaisuutena?
7. Miten parantaisit tehtävää? Minkä numeroarvosanan (4-10) antaisit tehtävälle kokonaisuudessa?

B.5 Arviointi tehtävästä ”Robotti”

1. Oliko tehtävänanto selkeä? Jos ei ollut, mikä siinä jäi epäselväksi? Anna tehtävänannolle numeroarvosana (4-10).
2. Oliko tehtävää kiva tehdä? Mikä siinä oli kivaa? Mikä ei ollut niin kivaa?
3. Mikä parin kanssa työskentelyssä oli parasta ja huonointa?
4. Mitä uutta opit GeoGebran käytöstä?
5. Mitä mieltä olet tehtäväsivun ulkonäöstä ja selkeydestä kokonaisuutena?
6. Haluaisitko jatkossa tehdä samantyyppisiä paritehtäviä toisista aiheista? Miksi/miksi et?
7. Sopiko tällainen tehtävä GeoGebralla tehtäväksi? Miksi/miksi ei?
8. Miten parantaisit tehtävää? Minkä numeroarvosanan (4-10) antaisit tehtävälle kokonaisuudessa?

B.6 Arviointi tehtävästä ”Erikokoisia neliöitä”

1. Oliko tehtävänanto selkeä? Jos ei ollut, mikä siinä jäi epäselväksi? Anna tehtävänannolle numeroarvosana (4-10).
2. Miten tehtävän aloittaminen sujui? Mitä teit ensimmäiseksi?
3. Toimiko GeoGebra-pohja hyvin vai oliko sen kanssa ongelmia? Jos oli, millaisia ongelmat olivat? Anna GeoGebra-pohjalle numeroarvosana (4-10).
4. Teitkö paljon virheitä tehtävää tehdessä ennen kuin löysit oikean tavan työskennellä? Millaisia virheitä teit?
5. Haluaisitko tehdä jatkossa samantyyppisiä ongelmatehtäviä toisista aiheista? Miksi/miksi et?
6. Miten parantaisit tehtävää? Minkä numeroarvosanan (4-10) antaisit tehtävälle kokonaisuudessa?