TAMPEREEN TEKNILLINEN YLIOPISTO
TAMPERE UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

TUOMO HARTIKAINEN
PIETARIN PELI KÄYTÄNNÖSSÄ

Kandidaatintyö

Tarkastaja: Terhi Kaarakka
23.9.2018

TIIVISTELMÄ

TUOMO HARTIKAINEN: Pietarin peli käytännössä
Tampereen teknillinen yliopisto
Kandidaatintyö, 17 sivua, 2 liitesivua
syyskuu 2018
Teknis-luonnontieteellinen koulutusohjelma
Pääaine: Matematiikka
Tarkastajat: Lehtori Terhi Kaarakka

Pietarin paradoksi on klassinen todennäköisyyslaskennan ongelma, jossa teorian ja maalaisjärjen välillä on näennäinen ristiriita. Tässä työssä tutkitaan ensisilmäyksellä paradoksiselta vaikuttavaa uhkapeliä käytännönläheisesti sekä pelaajan että pelin tarjoajan näkökulmasta. Tavoitteena on laskea Pietarin pelille reilu panos, joka ei ole ristiriidassa tosielämän havaintojen kanssa.

Ensiksi tutustutaan todennäköisyyslaskennan teoriaan siltä osin, kun se on ongelman kannalta relevanttia. Perusteiden lisäksi kerrataan ehdollinen todennäköisyys, satunnaismuuttujan odotusarvo, momenttiemäfunktio ja keskeinen raja-arvolause. Teoriaosuuden jälkeen esitellään kaksi tapaa, joilla paradoksia on aiemmin yritetty ratkaista ottaen huomioon muutama käytännön kannalta tärkeä asia, jotka osaltaan muuttavat sitä, miten reilu panos lasketaan. Lopuksi verrataan tietokoneella suoritettujen simulaatioiden tuloksia teorian ennustamiin arvoihin. Seitsemän eri lähtöarvoilla suoritetun Pietarin pelin simuloinnit näyttävät, miten pelattujen pelien määrä vaikuttaa reilun panoksen suuruuteen.

Simulointien tulokset tukevat aiempien ratkaisujen ajatusta, jonka mukaan reilu panos Pietarin pelissä riippuu pelaajan käytettävissä olevasta ajasta ja varallisuudesta. Mitä pidempään pelaajalla on aikaa ja rahaa maksaa pelistä, sitä suurempi on todennäköisyys voittaa muutamalla kierroksella niin paljon, että pelaaja jää voitolle, vaikka suurin osa yksittäisistä pelikierroksista olisivatkin tappiollisia. Pelin tarjoajan kannalta keskeiset muuttujat aika ja raha ovat kuitenkin usein erisuuret kuin pelaajalla, mikä johtaa siihen, että tällöin pelaajan kannalta reilu panos ei olekaan reilu pelin tarjoajalle ja päinvastoin. Käytännössä molemmille osapuolille reilu panos saadaan laskettua vain, jos pelille asetetaan maksimivoitto. Mitä halvemmalla peliä halutaan tarjota, sitä pienempi maksimivoiton täytyy olla.

SISÄLLYS

1. Johdanto 1

2. Todennäköisyyslaskennan teoriaa 2

2.1 Perusteet 2

2.2 Ehdollinen todennäköisyys 3

2.3 Satunnaismuuttuja 5

2.3.1 Odotusarvo 5

2.3.2 Momenttiemäfunktio 6

2.3.3 Keskeinen raja-arvolause 7

2.4 Virhe Pietarin pelin odotusarvon laskennassa 9

2.5 Rahan hyötyyn perustuva ratkaisu 10

3. Pietarin pelin simulointi tietokoneella 12

4. Tietokonesimulointien tulokset 13

5. Yhteenveto 16

Lähteet 18

Liite A: Simulointiohjelman lähdekoodi

TAULUKKOLUETTELO

4.1 Pietarin pelejä simuloituna seitsemällä eri lähtöarvoparilla n ja c. . . 14

LYHENTEET JA MERKINNÄT

A, B	joukko
$\cup$	unioni
Ω	otosavaruus
ω	otosavaruuden alkio
P	todennäköisyysfunktio
p	pistetodennäköisyys
$\cap$	leikkaus
X	satunnaismuuttuja
I	satunnaismuuttujan arvojoukko
E, μ	odotusarvo
$M_X(t)$	satunnaismuuttujan X momenttiemäfunktio
Var, σ^2	varianssi
S	satunnaismuuttujien standardoitu summa
$u(w)$	omaisuuden w hyötyfunktio
Δu_B	hyötyarvon odotettu muutos

1. JOHDANTO

Noin 300 vuotta sitten sveitsiläinen matemaatikko Nicolas Bernoulli kehitti pelin, joka haastoi siihen aikaan yleisesti hyväksytyn idean. Kyseessä oli käsitys, jonka mukaan uhkapelit, joissa voiton odotusarvo on suurempi kuin panos, ovat pelaajalle kannattavia. Pelin säännöt ovat yksinkertaiset. Pelaaja heittää kolikkoa, kunnes tulee kruuna ja jokaisella peräkkäisellä klaavalla voitto kaksinkertaistuu. Peli nimettiin Pietarin peliksi (*St. Petersburg game*), kun Nicolaksen veli Daniel julkaisi pelin vuonna 1738 julkaisussa nimeltä *Papers of the Imperial Academy of the Sciences in Petersburg.* Voittojen koolla tai rahayksiköllä ei ole ongelman kannalta merkitystä, kunhan ne kaksinkertaistuvat jokaisen peräkkäisen klaavan jälkeen, joten yksinkertaisuuden ja ymmärrettävyyden takia käytetään tässä työssä ensimmäisenä voittona euroa.[1, 2] Jos pelaaja heittää yhden klaavan ennen ensimmäistä kruunaa, hän voittaa 2 euroa, kahdella klaavalla hän voittaa 4 euroa ja niin edespäin. Yleisesti, jos pelaaja heittää kruunan n:nnellä heitolla, hän voittaa 2^{n-1} euroa. Todennäköisyys, jolla pelaaja heittää kruunan n:nnellä heitolla on 2^{-n}. Yhden kierroksen voiton odotusarvoksi saadaan $\sum_{n=1}^{\infty} x_n p_n$, jossa $x_n = 2^{n-1}$ ja $p_n = 2^{-n}$, joten $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} 2^{n-1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + ... = \infty$. Harva olisi kuitenkaan valmis maksamaan pelistä edes kymmentä euroa, ja tätä eroa teorian ja käytännön välillä alettiin kutsua Pietarin paradoksiksi. Tässä työssä tutkitaan, miltä osin teoria ja käytännön tilanne eroavat toisistaan ja miten se vaikuttaa reiluun panokseen pelaajan ja pelin tarjoajan näkökulmasta. Tyydyttävää teoreettista tarkastelua varten käydään läpi todennäköisyyslaskennan perusteet ja käsitteitä kuten ehdollinen todennäköisyys ja satunnaismuuttuja. Teoriaosuuden lopussa esitellään kaksi mahdollista tunnettua ratkaisua ongelmalle. Lopuksi simuloidaan tietokoneella eri määriä peräkkäisiä Pietarin pelejä ja tuloksia verrataan teorian ennustamiin arvoihin. Tavoitteena on selvittää ovatko teoria ja käytännön havainnot ristiriidassa keskenään ja kuinka paljon.

2. TODENNÄKÖISYYSLASKENNAN TEORIAA

2.1 Perusteet

Ihmiset ovat yrityksen ja erehdyksen kautta pitkään rakentaneet matemaattista perustaa todennäköisyyslaskennalle. Ongelmaa on lähestytty jo Aristoteleen ajoista lähtien määrittelemällä todennäköisyydet tapahtumien esiintymistiheyksinä suuressa määrässä toistettavia kokeita. Se ei kuitenkaan johda täysin tyydyttävään teoriaan. Vuonna 1933 venäläinen matemaatikko Andrej Kolmogorov loi riittävän perustan todennäköisyyslaskennalle aksioomien avulla. Aksioomat ovat minimaalisia vaatimuksia teorian käsitteille, joista voidaan johtaa lisää tuloksia. Kun tehdään jotain sattumanvaraista, on olemassa joukko mahdollisia tapahtumia, jota kutsutaan *otosavaruudeksi*. Otosavaruus voidaan jakaa osajoukoiksi $A_1, A_2, ...$ tapahtumia. Osajoukkojen $A_1, A_2, ...$ *unioniksi* $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ kutsutaan kaikkien niiden tapahtumien joukkoa, jotka kuuluvat ainakin yhteen osajoukoista $A_1, A_2, ...$ Osajoukot $A_1, A_2, ...$ ovat *pareittain poissulkevia* (pairwise disjoint), jos missään kahdessa osajoukossa ei ole yhteisiä alkioita. Standardinotaatio otosavaruudelle on Ω. Yksittäistä otosavaruuden alkiota merkitään symbolilla ω. *Todennäköisyysfunktio* asettaa otosavaruuden osajoukoille arvoja väliltä 0...1, jotka kertovat kunkin tapahtuman todennäköisyyden.

Määritelmä 2.1.1. Olkoon A otosavaruuden Ω osajoukko. *Todennäköisyysfunktio* P määrää jokaiselle otosavaruuden osajoukolle A todennäköisyyden $P(A)$, jolla on seuraavat ominaisuudet:

Aksiooma 2.1.1. Jokaiselle joukon Ω osajoukolle $P(A) \geq 0$.

Aksiooma 2.1.2. Jos $A = \Omega$, niin $P(A) = 1$.

Aksiooma 2.1.3. Jokaiselle kokoelmalle pareittain poissulkevia osajoukkoja $A_1, A_2, \ldots$, $P\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\Big) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$.

Todennäköisyyslaskennan aksioomat ovat matemaattisia sääntöjä, joita todennäköisyysfunktion täytyy noudattaa. Otosavaruutta yhdistettynä joukkoon tapahtumia ja niitä vastaaviin todennäköisyyksiin kutsutaan *todennäköisyysavaruudeksi*.

Äärelliselle tai numeroituvasti äärettömälle otosavaruuden Ω yksittäiselle tapahtumalle $\omega \in \Omega$ riittää määrätä sellainen *pistetodennäköisyys* $p(\omega)$, että $p(\omega) \geq 0$ ja $\sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) = 1$. Osajoukon A todennäköisyys voidaan määritellä osajoukkoon A kuuluvien tapahtumien todennäköisyyksien summana

$$P(A) = \sum_{\omega \in A} p(\omega). \tag{2.1}$$

Todennäköisyysmallia rakentaessa tapahtumille voi määrätä todennäköisyyksiä mielivaltaisesti, kunhan aksioomat toteutuvat. Jotta mallista olisi hyötyä, täytyy näiden valintojen kuitenkin tuottaa malli, joka ei ole ristiriidassa tosielämän havaintojen kanssa. Sellaisissa kokeissa, joissa on äärellinen määrä mahdollisia tapahtumia, on usein luonnollista olettaa, että jokainen näistä tapahtumista on yhtä todennäköinen.[3] Silloin

$$p(\omega_i) = \frac{1}{N} \text{ jokaiselle } i = 1, \ldots, N, \tag{2.2}$$

missä N on mahdollisten tapahtumien määrä. Kolikolla on kaksi puolta, joten kunnolla heitettäessä sekä kruunan että klaavan esiintymistodennäköisyys on $\frac{1}{2}$. Nopassa on kuusi tahkoa, joten kunkin silmäluvun todennäköisyys on $\frac{1}{6}$. Nämä ovat monille itsestäänselvyyksiä, mutta ei ole ollenkaan varmaa, minkälaisissa tilanteissa voidaan olettaa jokaisen vaihtoehdon olevan yhtä todennäköinen. Kolikon- ja nopanheiton todennäköisyydet tunnetaan yleisesti, koska lähes kaikilla on niistä kokemuksia, jotka vahvistavat sen mitä teoria ennustaa. Vielä ei ole tehty koetta, joka todistaisi teorian vääräksi.

2.2 Ehdollinen todennäköisyys

Ehdollinen todennäköisyys on hyvin keskeinen konsepti todennäköisyyslaskennassa. Monen tapahtuman ketjussa aiemmat tapahtumat vaikuttavat usein seuraavien tapahtumien todennäköisyyksiin. Jos esimerkiksi halutaan laskea, millä todennäköisyydellä täydestä korttipakasta kaksi ensimmäisenä nostettua korttia on pataa, täytyy ottaa huomioon, että ensimmäisen noston jälkeen pakassa on yksi kortti vähemmän. Todennäköisyys saada pata ensimmäisellä nostolla on $\frac{13}{52}$. Jos ensimmäisellä kerralla nostettiin pata, todennäköisyys saada pata toisella nostolla on $\frac{12}{51}$ koska pakassa on yksi pata vähemmän. *Ehdollinen todennäköisyys* kertoo, millä todennäköisyydellä tapahtuma A tapahtuu jos B on jo tapahtunut.

Määritelmä 2.2.1. Olkoot A ja B tapahtumia ja $P(B) > 0$. Tällöin *ehdollinen* *todennäköisyys* $P(A \mid B)$ on

$$P(A \mid B) = \frac{P(AB)}{P(B)}, \tag{2.3}$$

missä AB on tapahtumien A ja B *leikkaus* $A \cap B$ joka tarkoittaa, että sekä A että B tapahtuu.

Kaavasta (2.3) seuraa

$$P(AB) = P(A \mid B)P(B), \text{ kun } P(B) > 0, \tag{2.4}$$

mitä kutsutaan todennäköisyyksien *kertolaskusäännöksi* ja sen avulla voidaan usein laskea todennäköisyyksiä otosavaruuden alkioille.[3] Sen avulla voidaan laskea aiempikin esimerkki kahden padan nostamisesta loppuun. Jos $B =$ "pata ensimmäisellä nostolla" ja $A =$ "pata toisella nostolla", niin $P(B) = \frac{13}{52}$, $P(A \mid B) = \frac{12}{51}$ ja todennäköisyys nostaa kaksi pataa peräkkäin täydestä pakasta on $\frac{13}{52} \times \frac{12}{51} = \frac{1}{17}$. Kertolaskusääntöä toistuvasti soveltamalla saadaan yleistetty lause

Lause 2.2.1. Olkoot $A_1, A_2, \ldots, A_n$ peräkkäisiä tapahtumia. Tällöin

$$P(A_1A_2 \ldots A_n) = P(A_1)P(A_2 \mid A_1)P(A_3 \mid A_1A_2) \ldots P(A_n \mid A_1A_2 \ldots A_{n-1}). \tag{2.5}$$

Todistus. Todistetaan Lause 2.2.1 induktiolla. Sijoitetaan $n = 2$. Nyt Lause 2.2.1 saadaan muotoon

$$P(A_1A_2) = P(A_2 \mid A_1)P(A_1),$$

joka toteutuu kaavan (2.4) perusteella.
Induktio-oletus: Oletetaan, että jollekin $k \in \mathbb{N}$ on voimassa, että tapahtuman $A_1 \ldots A_k$ todennäköisyys $P(A_1 \ldots A_k) = P(A_1)P(A_2 \mid A_1) \ldots P(A_k \mid A_1A_2 \ldots A_{k-1})$.
Induktioväite: Osoitetaan induktio-oletuksen perusteella, että väite $P(A_1A_2 \ldots A_{k+1}) = P(A_1)P(A_2 \mid A_1) \ldots P(A_{k+1} \mid A_1A_2 \ldots A_k)$ on voimassa myös tapahtumalle $A_1A_2 \ldots A_{k+1}$.
Voidaan ajatella tapahtumaa $A_1A_2 \ldots A_{k+1}$ kahtena peräkkäisenä tapahtumana $A_1A_2 \ldots A_k$ ja A_{k+1}, jolloin kaavan (2.4) mukaan

$$\begin{aligned} P(A_1A_2 \ldots A_{k+1}) &= P(A_1A_2 \ldots A_k)P(A_{k+1} \mid A_1A_2 \ldots A_k) \\ &= P(A_1)P(A_2 \mid A_1) \ldots P(A_{k+1} \mid A_1A_2 \ldots A_k), \end{aligned}$$

induktio-oletusta käyttäen. Koska Lause 2.2.1 on tosi, kun $n = 2$, ja induktio-oletuksesta seuraa induktioväite, on Lause 2.2.1 tosi kaikilla $n = \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$.$\square$
Lause 2.2.1 on voimassa riippumatta siitä, vaikuttavatko tapahtumat $A_1, A_2, \ldots, A_n$

toistensa todennäköisyyksiin. Esimerkiksi todennäköisyys heittää kruuna on aina $\frac{1}{2}$ riippumatta siitä, kuinka monta kruunaa tai klaavaa on aikaisemmin heitetty. Todennäköisyys heittää kolme kruunaa peräkkäin on $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$.

2.3 Satunnaismuuttuja

Todennäköisyyslaskennassa ollaan usein enemmän kiinnostuneita tiettyyn tapahtumaan liittyvästä numeerisesta arvosta kuin itse tapahtumasta. *Satunnaismuuttujaksi* kutsutaan mitä tahansa funktiota, joka määrää reaaliluvun jokaiselle otosavaruuden alkiolle. Satunnaismuuttujan arvo realisoituu kokeen tuloksena ja sen mahdollisille arvoille voidaan laskea todennäköisyyksiä. Jos esimerkiksi satunnaismuuttuja X on "suurin kahden heitetyn nopan silmäluvuista i ja j", niin se määrää numeerisen arvon $\max(i, j)$ kokeen tulokselle (i, j). Satunnaismuuttuja on *diskreetti*, jos sen mahdollisten arvojen joukko on äärellinen tai numeroituva. Tätä mahdollisten arvojen joukkoa kutsutaan satunnaismuuttujan *arvojoukoksi* ja sitä merkitään kirjaimella I. Todennäköisyysfunktio määrää arvojoukon alkioille todennäköisyydet.

Määritelmä 2.3.1. Olkoon X diskreetti satunnaismuuttuja. Tällöin *todennäköisyysfunktio* on

$$P(X = x) = P(\omega : X(\omega) = x), \text{ kun } x \in I. \tag{2.6}$$

Toisin sanoen $P(X = x)$ on todennäköisyys tapahtuma(jouko)lle ω, kun $X(\omega) = x$.[3]

2.3.1 Odotusarvo

Vaikka itse satunnaismuuttujalla ei ole kiinteää arvoa, sille voidaan laskea hyödyllisiä tunnuslukuja. Niistä tärkein on *odotusarvo*. Odotusarvo on diskreetin satunnaismuuttujan saamien mahdollisten arvojen painotettu keskiarvo. Todennäköisyysfunktio kertoo kuinka paljon kutakin arvoa painotetaan. Odotusarvo ei välttämättä ole sellainen, jota satunnaismuuttuja voi edes saada, mutta useiden toistojen jälkeen tulosten keskiarvo lähenee odotusarvoa. Se kertookin usein minkälaisia voittoja uhkapelaaja voi odottaa tietyssä pelissä, sitä tarkemmin mitä useammin peliä pelataan.

Määritelmä 2.3.2. Olkoon X diskreetti satunnaismuuttuja, jonka arvojoukko on I. Satunnaismuuttujan X *odotusarvo* on

$$E(X) = \sum_{x \in I} x P(X = x). \tag{2.7}$$

Odotusarvo on määritelty vain, kun summa $\sum_{x \in I} xP(X = x)$ on hyvin määritelty. Esimerkiksi numeroituvasti äärettömän termin sarjan summa ei ole aina hyvin määritelty, jos siinä on sekä positiivisia että negatiivisia termejä. Jos termejä on äärellinen määrä tai ne ovat kaikki epänegatiivisia, summa on hyvin määritelty ja ∞ on mahdollinen sarjan summa.[3] Ääretön on kuitenkin usein käytännön kannalta ongelmallinen ja epätarkka symboli, eikä kerro reilua panosta uhkapelissä. Pietarin pelissä sen huomaa hyvin, koska ääretön odotusarvo implikoisi käytännössä sitä, että peliä kannattaisi pelata millä tahansa äärellisellä panoksella. Pelatessa huomaa kuitenkin nopeasti, että tämä ei pidä paikkaansa, koska tosielämässä mikään resurssi - oli se sitten aika tai raha - ei riitä loputtomiin.

2.3.2 Momenttiemäfunktio

Momenttiemäfunktio on tärkeä ja hyödyllinen työkalu sekä todennäköisyyslaskennan teoriassa että käytännön laskuissa. Sen avulla voidaan todistaa toinen tärkeä tulos, *keskeinen raja-arvolause*, ja laskea esimerkiksi satunnaismuuttujan todennäköisyysfunktio ja odotusarvo.[3]

Määritelmä 2.3.3. Olkoon X ei-negatiivinen, kokonaislukuarvoinen satunnaismuuttuja. Tällöin sen *momenttiemäfunktio* on

$$M_X(t) = E(e^{tX}). \tag{2.8}$$

Lause 2.3.1. Satunnaismuuttujan X n:s momentti on

$$M_X^{(n)}(0) = E(X^n), \tag{2.9}$$

missä $M_X^{(n)}(t)$ on momenttiemäfunktion n:s derivaatta.

Todistus. Ottamalla Taylorin sarja funktiosta e^{tX} pisteessä $a = 0$ saadaan

$$M_X(t) = E\left(e^{ta} + \frac{te^{ta}}{1!}(X-a) + \frac{t^2e^{ta}}{2!}(X-a)^2 + \dots\right) = E\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(X-a)^n}{n!} t^n\right),$$

josta saadaan odotusarvon lineaarisuuden perusteella ja sijoittamalla $a = 0$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{E(X^n)}{n!} t^n,$$

jonka m:s derivaatta muuttujan t suhteen on

$$M_X^{(m)}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{E(X^n)}{n!} m! t^{n-m}.$$

Valitsemalla $t = 0$ saadaan sarja, jonka ainoa nollasta poikkeava termi saadaan, kun $n = m$ $(0^0 = 1)$. Nyt

$$M_X^{(n)}(0) = \frac{E(X^n)}{n!}n! = E(X^n).\square$$

Momenteista tärkein lienee odotusarvo, joka saadaan kerran ($n = 1$) derivoimalla. Jotta momenttiemäfunktio olisi olemassa, täytyy sarjan $E(e^{tX})$ supeta.

2.3.3 Keskeinen raja-arvolause

Kun heitetään kolikkoa useita kertoja, huomataan, että heitettyjen klaavojen lukumäärän todennäköisyys noudattaa niin sanottua *normaalijakaumaa.* Normaalijakauma on luonnontieteissä hyvin yleinen todennäköisyysjakauma, joka kertoo millä todennäköisyyksillä satunnaismuuttuja X saa eri arvoja. Normaalijakaumaa kutsutaan myös Gaussin kellokäyräksi, koska sen muoto muistuttaa kirkonkelloa. Käyrän huippu on satunnaismuuttujan X odotusarvon kohdalla ja huipun korkeuden sekä käyrän leveyden määrittää satunnaismuuttujan X *varianssi*, joka saadaan myös selville momenttiemäfunktion avulla. Satunnaismuuttujan X keskiarvon normaalijakautumista kuvaava todennäköisyyslaskennan tulos on nimeltään *keskeinen raja-arvolause*, ja sillä on tärkeä merkitys myös tilastotieteessä. Keskeisestä raja-arvolauseesta on olemassa monia variaatiota. Kolikonheiton todennäköisyysjakauma on aina sama ja riippumaton muiden heittojen tuloksista, joten tässä työssä edellytetään, että satunnaismuuttujat ovat toisistaan riippumattomia ja identtisesti jakautuneita. Joissain tapauksissa tätä ei vaadita, mutta sen tilalla on muita edellytyksiä.

Lause 2.3.2. Olkoot $X_1, \dots, X_n$ identtisesti jakautuneita toisistaan riippumattomia satunnaismuuttujia. Niiden summa suppenee kohti normaalijakaumaa, kun $n \to \infty$.

Todistus. Olkoot $X_1, \dots, X_n$ identtisesti jakautuneita toisistaan riippumattomia satunnaismuuttujia, joilla on odotusarvo $E(X_i) = \mu$ ja varianssi $Var(X_i) = \sigma^2$. Määritellään satunnaismuuttuja Y_i, joka on normalisoitu versio satunnaismuuttujasta X_i

$$Y_i = \frac{X_i - \mu}{\sigma}.$$

Satunnaismuuttujat Y_i ovat identtisesti jakautuneita ja toisistaan riippumattomia, ja niiden odotusarvo ja varianssi ovat

$$E(Y_i) = \mu_{Y_i} = 0, Var(Y_i) = \sigma_{Y_i}^2 = 1.$$

Satunnaismuuttujien $Y_1, \ldots, Y_n$ standardoitu summa on

$$S_n = \frac{\overline{Y} - \mu_{Y_i}}{\frac{\sigma_{Y_i}}{\sqrt{n}}} = \frac{Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_n - n\mu_{Y_i}}{\frac{n\sigma_{Y_i}}{\sqrt{n}}} = \frac{Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_n}{\sqrt{n}},$$

missä $\overline{Y}$ on satunnaismuuttujien $Y_1, \ldots, Y_n$ keskiarvo. Riippumattomuuden perusteella

$$M_{S_n}(t) = E\Big[e^{t\frac{Y_1+Y_2+\ldots+Y_n}{\sqrt{n}}}\Big] = E\Big[e^{t\frac{Y_1}{\sqrt{n}}}\Big] \cdot E\Big[e^{t\frac{Y_2}{\sqrt{n}}}\Big] \cdot \ldots \cdot E\Big[e^{t\frac{Y_n}{\sqrt{n}}}\Big] = \Big(M_{Y_1}\Big(\frac{t}{\sqrt{n}}\Big)\Big)^n.$$

Taylorin sarja funktiosta $M_{Y_1}(s)$ pisteessä $a = 0$ on

$$M_{Y_1}(s) = E[e^{sY_1}] = 1 + sE[Y_1] + \frac{s^2}{2}E[Y_1^2] + \frac{s^3}{6}E[Y_1^3] + \ldots, \tag{2.10}$$

jossa $E[Y_1] = 0$ ja $E[Y_1^2] = Var(Y_1) = 1$. Funktio voidaan nyt kirjoittaa muotoon

$$M_{Y_1}(s) = 1 + \frac{s^2}{2} + \mathcal{O}(t^3),$$

jossa termi $\mathcal{O}(t^3)$ sisältää kaikki sarjan (2.10) loput termit. Nyt

$$M_{Y_1}\Big(\frac{t}{\sqrt{n}}\Big) = 1 + \frac{1}{2}\Big(\frac{t}{\sqrt{n}}\Big)^2 + \mathcal{O}\Big(\frac{t}{\sqrt{n}}\Big)^3 = 1 + \frac{t^2}{2n} + \mathcal{O}\Big(\frac{t}{\sqrt{n}}\Big)^3,$$

ja

$$M_{S_n}(t) = \Big(M_{Y_1}\Big(\frac{t}{\sqrt{n}}\Big)\Big)^n = \Big(1 + \frac{t^2}{2n} + \mathcal{O}\Big(\frac{t}{\sqrt{n}}\Big)^3\Big)^n.$$

Kun $n \to \infty$, termin $\mathcal{O}\Big(\frac{t}{\sqrt{n}}\Big)^3$ suhde termiin $\frac{t^2}{2n}$ lähestyy nollaa. Merkitään termiä $\mathcal{O}\Big(\frac{t}{\sqrt{n}}\Big)^3$ lyhyemmin kirjaimella $\mathcal{O}'$. Nyt standardoidun summan momenttiemäfunktion luonnollinen logaritmi on

$$\ln(M_{S_n}(t)) = n \ln\Big(1 + \frac{t^2}{2n} + \mathcal{O}'\Big).$$

Toisaalta, Taylorin sarja pisteessä $a = 0$ luonnollisesta logaritmista

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots,$$

joten

$$\ln\Big(1 + \frac{t^2}{2n} + \mathcal{O}'\Big) = \frac{t^2}{2n} + \mathcal{O}' - \frac{\Big(\frac{t^2}{2n} + \mathcal{O}'\Big)^2}{2} + \frac{\Big(\frac{t^2}{2n} + \mathcal{O}'\Big)^3}{3} - \cdots.$$

Jälleen muuttujan n lähestyessä ääretöntä kaikki loput termit ovat pieniä ensimmäiseen verrattuna, ja tämä kaava voidaan yksinkertaistaa muotoon

$$\frac{t^2}{2n} + \mathcal{O}'',$$

jossa $\mathcal{O}''$ on pieni verrattuna termiin $\dfrac{t^2}{2n}$. Nyt

$$\ln(M_{S_n}(t)) = \frac{t^2}{2} + n\mathcal{O}'',$$

jossa $n\mathcal{O}''$ on pieni verrattuna termiin $\dfrac{t^2}{2}$, joten $\ln(M_{S_n}(t)) \to t^2/2$, kun $n \to \infty$ ja

$$M_{S_n}(t) \to e^{\frac{t^2}{2}},$$

kun $n \to \infty$. Funktio $e^{\frac{t^2}{2}}$ on standardinormaalijakauman emäfunktio. Summa S_n lähestyy siis normaalijakaumaa, kun $n \to \infty$.$\square$[4]

2.4 Virhe Pietarin pelin odotusarvon laskennassa

Daniel Bernoulli (Nicholaksen serkku, joka julkaisi pelin vuonna 1738) sanoo Pietarin pelistä julkaisussaan seuraavaa: "Mahdollisia tapauksia [M] pelissä on ääretön määrä: puolet niistä loppuvat ensimmäiseen heittoon, neljäsosa toiseen, kahdeksasosa kolmenteen ja niin edespäin...loputtomiin."[1, 2] Karl Menger, joka oli tekninen konsultti käännettäessä alkuperäistä julkaisua latinasta englanniksi, huomautti taas: "Koska mahdollisia tapauksia on ääretön määrä, on mahdotonta puhua puolista, neljäsosasta tapauksista jne., joten kirjain [M] Bernoullin argumentissa on merkityksetön."[1] Toden totta, ääretön jaettuna millä tahansa äärellisellä luvulla on vieläkin ääretön, eikä pelaajan kannalta ole järkevää ajatella mahdollisuutta, että peli kestää loputtomiin. Pelaamisen tarkoitushan on voittaa rahaa, jota pääsee vaihtamaan johonkin, jolla on pelaajalle käyttöarvoa. Jotta saadaan järkevä ratkaisu, annetaan mahdollisten tapausten määrälle M äärellinen arvo $M = 2^k$. Nyt ensimmäisen heiton jälkeen päättyy 2^{k-1} peliä, toisen heiton jälkeen 2^{k-2} peliä ja niin edespäin. Yleisesti, n:nnen heiton jälkeen päättyy 2^{k-n} peliä ja vastaavat voitot näistä peleistä ovat 2^{n-1}. Nyt yhden pelin voiton odotusarvo olisi

$$\mu = \sum_{n=1}^{k} \frac{2^{k-n}2^{n-1}}{2^k} = \sum_{n=1}^{k} \frac{2^{k-1}}{2^k} = \frac{k}{2} \tag{2.11}$$

Jäljelle jää tarkasteltavaksi, loppuvatko kaikki $M = 2^k$ peleistä ennen k:tta heittoa. Kaava (2.11) antaa voiton odotusarvon $\sum_{n=1}^{k} 2^{k-n}$ pelin ajalta. Muuttujan k ollessa ääretön kyseessä olisi geometrinen sarja, jonka suhdeluku $q = \frac{1}{2}$. Kaavan (2.11) sisältämien pelien määrä voidaan nyt laskea äärellisellä muuttujalla k geometrisen sarjan osasumman kaavasta:

$$S_k = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{2^{k-1}(1-(\frac{1}{2})^k)}{1-\frac{1}{2}} = \frac{2^{k-1}-2^{-1}}{\frac{1}{2}} = 2^k - 1, \tag{2.12}$$

eli yhden pelin odotetaan jatkuvan k:nnen heiton jälkeen. Tämä peli saattaa loppua koska tahansa k:nnen heiton jälkeen, jolloin se lisää laskettuun odotusarvoon sitä enemmän, mitä pidemmälle peli etenee.[1] Lisäyksen koko on

$$\lambda = 2^{n-1},$$

missä n on heittojen määrä k:nnen heiton jälkeen pelin loppuun saakka. Lisäyksen todennäköisyys on

$$p(\lambda) = 2^{-n}.$$

Lisätään tämä vielä kaavaan (2.11). Lauseke odotusarvolle, kun peliä pelataan $M = 2^k$ kertaa on nyt

$$\mu = \frac{k}{2} + \lambda. \tag{2.13}$$

Jos peliä pelataan esimerkiksi 2^{32} (= 4 294 967 296) kertaa, saadaan odotusarvoksi 50 prosentin varmuudella 17 euroa, joka on jo huomattavasti lähempänä järkevää panosta ja sopii paremmin tosielämän havaintoihin. Vaikka 17 euroa on edelleen enemmän kuin lähes kukaan olisi valmis pelistä maksamaan, huomataan myös se, että useimmilla ei ole aikaa pelata tätä peliä miljardeja kertoja, rahasta puhumattakaan. Koska odotusarvo μ on suoraan verrannollinen muuttujaan k, odotusarvo nousee, mitä enemmän pelejä pelataan. Siksi on loogista, että rikas on valmis maksamaan pelistä enemmän - varsinkin, jos aikaa riittää; mitä kauemmin peliä voi pelata ennen kuin rahat loppuu, sitä todennäköisemmin vastaan tulee niin suuri voitto, että se kattaa kaikki tappiot ja rahaa jää ylikin.

2.5 Rahan hyötyyn perustuva ratkaisu

Järkevä pelaaja ei mieti vain voiton rahallista arvoa, vaan myös sitä, mitä hyötyä hänelle siitä on. Tähän vaikuttaa tietysti pelaajan henkilökohtainen arvomaailma, mutta sitä on hyvin vaikeaa (ellei mahdotonta) sisällyttää matemaattiseen kaavaan. Pelaajan varallisuus vaikuttaa myös paljon siihen, kuinka arvokkaana hän pitää kutakin voittosummaa, ja se voidaan ilmaista yhtenä lukuna. Nicolas Bernoulli ja Gabriel Cramer tiesivät tämän, ja ehdottivatkin, että voittosumman rahallisen odotusarvon sijaan tulisi laskea voittosumman hyödyn odotusarvo. Tätä varten he keksivät hyötyfunktion $u(w)$, joka kertoo omaisuuden w hyödyn. Koska muutaman euron voitto on yleisesti ottaen köyhälle arvokkaampi kuin rikkaalle, tulisi hyötyfunktion olla konkaavi.[5] Toisin sanoen derivaatan $\dfrac{du(w)}{dw}$ tulisi olla aidosti vähenevä. Bernoulli ehdotti tähän tarkoitukseen logaritmista funktiota $u_B(w) = \ln(w)$ [5, 2]. Sijoittamalla tämä odotusarvon kaavaan saadaan pelaajan varallisuuden hyötyarvon odotettu muutos

$$\Delta u_B = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(\overbrace{\ln(w - c + 2^{n+1})}^{\text{hyötyarvo pelin jälkeen...}} - \overbrace{\ln(w)}^{\text{...ja ennen peliä}} \right), \tag{2.14}$$

jossa w on pelaajan varallisuus alussa ja c pelin hinta. Osamäärätestillä voidaan tutkia sarjan (2.14) suppenemista

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(\frac{1}{2})^{n+1}(\ln(w - c + 2^{n+2}) - \ln(w))}{(\frac{1}{2})^n(\ln(w - c + 2^{n+1}) - \ln(w))} \right| \\ &= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(\ln(w - c + 2^{n+2}) - \ln(w))}{2(\ln(w - c + 2^{n+1}) - \ln(w))} \right| = \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

kun w ja c ovat äärellisiä (kuten ne ovat kaikissa tosielämän tilanteissa), joten sarja (2.14) suppenee ja Δu_B on aina äärellinen. Matemaattisesti ongelmallista kaavassa (2.14) on se, että se nojaa keksittyyn funktioon $u(w)$, jota ei voi johtaa tai päätellä vakuuttavasti. Bernoulli ei esittänyt päteviä perusteita sille, miksi hyötyfunktiona $u_B(w)$ tulisi käyttää juuri luonnollista logaritmia $\ln(w)$. Sille on kuitenkin olemassa syy, joka selviää Ole Petersin artikkelista "The time resolution of the St Petersburg paradox".[5]

3. PIETARIN PELIN SIMULOINTI TIETOKONEELLA

Tieteellisestä vallankumouksesta lähtien luonnontieteissä perustavanlaatuinen idea on ollut, että tieteelliset tulokset perustuvat ihmisen havaintoihin luonnosta. Tulokset saavutetaan tai ne pitää vähintään pystyä todistamaan kokeellisesti havainnoimalla ja tulkitsemalla mittaustuloksia. Samojen luonnonlakien on tarkoitus olla voimassa kaikkialla, joten kokeet pitää myös voida toistaa ajasta, paikasta ja tekijästä riippumatta niin, että mittaustulokset eivät ole ristiriidassa teorian kanssa. Nykyään tietokoneilla voidaan simuloida tapahtumia, joihin kuluisi moninkertaisesti aikaa tosielämässä. Kolikonheitto ja Pietarin peli ovat hyviä esimerkkejä sellaisista tapahtumista. 2^{28} pelikierroksen simulointiin ja tilastoimiseen menee tietokoneelta aikaa muutama sekunti, kun taas nopeimmallakin kolikonheittäjällä kuluisi samaan tehtävään vuosia. Simulointikoodia kirjoittaessa täytyy kuitenkin olla tarkkana, koska tietokoneella ei pystytä ainakaan vielä tuottamaan mitään täysin satunnaista. Sen sijaan on olemassa paljon erilaisia pseudosatunnaisia vaihtoehtoja, jotka yrittävät mahdollisimman tarkasti jäljitellä todellista satunnaisuutta suorittamalla annetulle siemenluvulle joukon operaatioita. Eri satunnaislukugeneraattorien toteutuksiin on syytä tutustua ennen valintaa ja sen jälkeen vielä varmistaa, että mitattu satunnaismuuttuja X noudattaa odotettua jakaumaa. Tämän työn tutkimustulokset on saatu suorittamalla tietokoneohjelma, joka simuloi käyttäjän syöttämän määrän Pietarin pelin kierroksia (kierros päättyy, kun "pelaaja" heittää kruunan) käyttäjän määräämällä panoksella. Samalla ohjelma pitää kirjaa siitä, kuinka paljon pelaaja on voitolla tai tappiolla, ja monennenko heiton jälkeen kukin kierros päättyy. Lopuksi ohjelma tulostaa simuloinnin tulokset, jotka ovat taulukoituna seuraavassa luvussa. Niiden pohjalta on laskettu keskimääräinen voitto ja hyötymuutos, joita verrataan teorian ennustamiin arvoihin. Ohjelman lähdekoodi on liitteenä työn lopussa. Kokeen satunnaisuudesta johtuen tulokset ovat tuskin koskaan täysin samat kokeen eri suorituskerroilla, mutta niistä voitaneen löytää yhteneviä piirteitä joista päädytään teorian kanssa samoihin päätelmiin.

4. TIETOKONESIMULOINTIEN TULOKSET

Taulukossa 4.1 on esitelty seitsemän eri Pietarin pelin simuloinnin tulokset. Jokaisessa sarakkeessa on yhden simuloinnin tulokset. Ylimpänä on pelattujen kierrosten määrä n ja käytetty panos c, joka on laskettu pelattujen kierrosten perusteella kaavasta (2.13) 50 prosentin varmuudella ($\lambda = 1$). Niiden alla on pelatut kierrokset jaoteltuna sen mukaan, monennenko heiton jälkeen ne päättyivät. Alempana on vielä pelaajan pienin varallisuus (tai suurin velka) simuloinnin aikana w_{min} sekä pelaajan varallisuus simuloinnin lopussa w_{loppu}. Molemmat arvot on ilmoitettu suhteessa simuloinnin alkuun, jossa $w = 0$. Toisin sanoen $-w_{\text{min}}$ kertoo kuinka paljo rahaa olisi tarvinnut voidakseen pelata simuloinnin loppuun asti, ja w_{loppu} kertoo kuinka paljon pelaaja jäi simuloinnissa voitolle tai tappiolle. Niiden alle on laskettu muiden tulosten pohjalta vielä keskimääräinen voitto $\bar{x}$ ja keskimääräinen hyötyarvon muutos $\Delta \bar{u}_B$ kaavalla

$$\frac{\ln(w_{\text{loppu}} - w_{\text{min}}) - \ln(-w_{\text{min}})}{n}.$$

Kierrosten pituuksien jakautuma näyttää odotetulta. $N+1$:n peräkkäisen klaavan putkien määrä simuloinnin aikana on aina noin puolet N:n peräkkäisen klaavan putkien määrästä. Pientä vaihtelua on, mutta se johtunee kokeen satunnaisuudesta. Pidemmissä simulaatioissa pienemmillä N:n arvoilla (joissa otoskoko on suurempi) suhde on niin lähellä puolta, että voidaan luottaa siihen, että käytetty satunnaislukugeneraattori on tarpeeksi satunnainen. Varallisuuksien w_{min} ja w_{loppu} saamista arvoista huomataan, että suuria voittoja hakiessaan pelaajan on oltava valmis kestämään kasvavia tappioita ja pelaamaan tuhansia kierroksia saadakseen muutaman suuren voiton, jotka kattavat suurimman osan koko voittosummasta. Huomataan myös, että vaikka loppuvarallisuudessa oli simulointien välillä suuriakin eroja, voitolle tai tappiolle jääminen oli kaikissa paitsi yhdessä ($n = 2^{12}$) tapauksista yhden kolikonheiton päässä. Jos pisin peräkkäisten klaavojen putki olisi missä tahansa näistä tapauksista ollut yhden pidempi tai lyhyempi, tappiot olisivat kääntyneet voitoiksi ja päinvastoin. Seitsemän simuloinnin perusteella ei liene mahdollista kehittää luotettavaa, kaiken kattavaa yleistä kaavaa reilulle panokselle Pietarin pelissä, mutta keskimääräisistä voitoista huomataan ainakin, että reilu panos vaikuttaa riippuvan siitä, kuinka monta kierrosta pelataan. Kaikissa paitsi yhdessä ($n = 2^{12}$) tapauksista keskimääräinen voitto oli suhteellisen lähellä odotettua ($100 \pm 20\%$ kaavasta

(2.13) lasketusta odotusarvosta). Kolmas simulaatio ($n = 2^{12}$) on hyvä esimerkki siitä, kuinka paljon muutama onnekas kierros voi vaikuttaa lopullisiin voittoihin. Yksi 14:n ja kaksi 13:n klaavan putkea lisäävät voittoihin yhteensä 16384 ja kasvattavat keskimääräistä voittoa 4:llä.

Taulukko 4.1 *Pietarin pelejä simuloituna seitsemällä eri lähtöarvoparilla n ja c.*

n	2^4	2^8	2^{12}	2^{16}	2^{20}	2^{24}	2^{28}
c	3	5	7	9	11	13	15
1	8	128	1987	32885	523883	8389756	134221155
2	3	60	1034	16107	262478	4190990	67110339
3	3	36	539	8206	131299	2098684	33560381
4	2	15	275	4141	65456	1048371	16771160
5		9	114	2118	32637	524713	8387647
6		6	59	1046	16454	262288	4191203
7		1	40	538	8156	131362	2099020
8		1	20	238	4102	65350	1046468
9			11	123	2072	32867	524056
10			11	78	1007	16355	262147
11			2	30	508	8307	131296
12			1	11	278	4110	65455
13			2	6	117	1985	32649
14			1	6	60	1062	16156
15				2	34	537	8147
16				1	13	234	4127
17					13	131	2059
18					7	58	1031
19						29	479
20					1	14	242
21					1	7	124
22						2	51
23						2	34
24						2	16
25							5
26							5
27							3
28							1
w_{min}	-8	-258	-350	-66125	-1238469	-22863965	-381598405
w_{loppu}	-6	-240	17499	-62581	90787	-16152272	-257879059
$\bar{x}$	2.625	4.063	11.27	8.045	11.09	12.04	14.04
$\Delta \bar{u}_B$	-0.087	-0.010	$9.6 \cdot 10^{-4}$	$-4.5 \cdot 10^{-5}$	$6.7 \cdot 10^{-8}$	$-7.3 \cdot 10^{-8}$	$-4.2 \cdot 10^{-9}$

Keskimääräisen hyötymuutoksen arvoista huomataan vielä, että yhden kierroksen voiton hyöty (tai haitta) pelaajalle on keskimäärin sitä pienempi, mitä enemmän kierroksia pelataan. Vaikka kokonaishyötymuutoksen itseisarvo ($|\Delta \bar{u}_B * n|$) on kolmannen simulaation kohdalla suurempi kuin toisen, keskimääräinen hyötymuutoksen itseisarvo ($|\Delta\bar{u}_B|$) on alle kymmenesosa toisen simulaation keskimääräisen hyötymuutoksen itseisarvosta. Mitä suurempaa voittoa haetaan, sitä enemmän pelaamiselle on varattava aikaa. Pelaajan on syytä ottaa huomioon aika, joka pelaamiseen kuluu ja miettiä miten se vaikuttaa todelliseen hyötyyn, mitä pelaamalla saavutetaan. Tuskin kukaan haluaa pelata samaa peliä tuhansia kertoja vain voidakseen jäädä "nollille".

5. YHTEENVETO

Modernin tietokoneen avulla voidaan tehdä kokeita ja laskea asioita niin nopeasti ja tarkasti, että se on mahdollistanut monien vanhojen tieteellisten tulosten ja teorioiden testauksen ennennäkemättömissä mittakaavoissa. Joskus mittaustulokset vahvistavat teoriaa, toisinaan vanha teoria täytyy hylätä tai sitä joudutaan muuttamaan, koska havainnot eivät sovi siihen mitä teoria ennustaa. Pietarin paradoksin tapauksessa "paradoksille" oli jo aiemmin löydetty selityksiä ja esimerkiksi Luvuissa 2.4 ja 2.5 esitellyt ratkaisut ennustivat jo suhteellisen hyvällä tarkkuudella sitä, mitä ihmiset olisivat pelistä valmiita maksamaan. Tietokone mahdollistaa kuitenkin sen, että peliä voidaan testata riittävän kattavasti ja teorialle voidaan saada tukea tosielämän havainnoista. Tässä työssä tehtyjen simulointien tulokset vahvistavat Luvun 2.4 tuloksen, jonka mukaan reilu panos riippuu aina käytännössä siitä, kuinka monta kierrosta kyseisellä panoksella aiotaan pelata. Tosielämässä tätä rajoittaa useimmiten pelaajan tai pelin tarjoajan varallisuus ja (rikkaimpien pelaajien tapauksessa) aika. Pelaajan ei luonnollisesti kannata panosta laskiessaan ottaa huomioon ainakaan niitä mahdollisia voittoja, jotka ylittävät pelin tarjoajan maksukyvyn. Useimmiten pelaajan oma varallisuus ja aika ovat kuitenkin eniten rajoittavat tekijät järkevälle panokselle. Lienee perusteltua epäillä, että kovin moni jolla olisi varaa pelata esimerkiksi $2^{16} = 65536$ kierrosta (simuloinnin tulosten perusteella esimerkiksi 100000 euroa riittänee useimmiten) olisi valmis uhraamaan siihen keskimäärin $2 * 65536 = 131072$:n kolikonheiton verran aikaa varsinkin, jos todennäköisyydet voitolle ja tappiolle jäämiseen ovat yhtä suuret. Jos yhteen kolikonheittoon menee aikaa 3 sekuntia ja panosten ja voittojen maksu on välitöntä, 2^{16} kierrokseen menisi aikaa noin 109 tuntia. Mitä rikkaampi pelaaja, sitä enemmän on otettava myös huomioon kuinka paljon mahdollisia tuloja menetetään, kun rahat sijoitetaan Pietarin peliin jonkun muun asian sijasta. Multimiljonääriä voi olla vaikea saada pelaamaan edes kymmenen euron panoksella, vaikka hän jäisikin todennäköisesti mukavasti voitolle $2^{20} = 1048576$:n pelin jälkeen (joihin kuluisi 3 sekunnin kolikonheitolla aikaa noin 72.8 päivää). Kun rahaa on niin paljon, että voi käytännössä tehdä mitä haluaa loppuelämänsä, kolikon heittäminen miljoonia kertoja ei välttämättä houkuttele. Pelaajan henkilökohtaiset arvot - etenkin se, kuinka arvokkaana pitää aikaansa - vaikuttavat epäilemättä siihen, mitä hän on valmis pelistä maksamaan. Tämän kaiken jälkeen ei liene yllättävää, että hyvin harva maksaisi Pietarin pelistä yli kymmentä euroa. On myös selvää, että se mikä panos on reilu pelaajan näkökulmasta riippuu siitä keneltä kysytään ja mitä he odottavat pelaamiseen sijoitetulta ajalta. Tositilanteen rahallisten ja ajallisten rajoitteiden mukaan laskettu voiton odotusarvo on silti melko hyvä arvio siitä mitä järkevät pelaajat samassa tilanteessa keskimäärin maksaisivat pelistä. Pelaajan ja pelin tarjoajan voi kuitenkin olla vaikea päästä reilusta panoksesta yhteisymmärrykseen, koska rahalliset ja ajalliset rajoitteet ovat heillä niin erilaiset. Jos pelin tarjoaja on kasino, jonka tarkoitus on tarjota peliä samalla panoksella niin kauan kuin pelaajia riittää, sen täytyy varautua pelaamaan moninkertainen määrä kierroksia yksittäiseen pelaajaan verrattuna. Tämä tarkoittaa sitä, että kasinon täytyy varautua maksamaan joillekin pelaajille sellaisia voittoja, joiden mahdollisuutta useimpien yksittäisten pelaajien ei kannata edes ottaa huomioon. Kasinoilla on myös yleensä enemmän varallisuutta kuin pelaajilla, joten heidän maksukyky rajoittaa reilua panosta useimmiten vähemmän kuin pelaajan varallisuus. Esimerkiksi kasino, jolla on kykyä maksaa voittoja $2^{28} = 268435456$ euroon asti, saattaa muutamassa vuodessa pelata $2^{26} = 67108864$ kierrosta. Näiden tietojen perusteella reilu panos kasinon näkökulmasta olisi 14 euroa, mutta se tuskin saisi kovin montaa asiakasta, joka olisi kyseisen summan valmis pelistä maksamaan. Vaikka kukaan pelaajista ei ymmärrettävästi huomioisi häviävän pientä mahdollisuutta heittää 28 klaavaa putkeen, kasinon täytyy ottaa huomioon se hyvin todellinen mahdollisuus, että joku onnistuu siinä joskus. Kasinon laskuissa tämä mahdollisuus vaikuttaa reiluun panokseen yhtä paljon kuin muidenkin voittojen mahdollisuus huolimatta siitä, kuinka epätodennäköinen se on, koska voitto on niin suuri. Jos peliä pelattaisiin kasinolla 14 euron panoksella 2^{26} kertaa, kasinon voitot jäisivät todennäköisesti lähelle nollaa, ja suuri enemmistö pelaajista häviäisi sitä enemmän, mitä kauemmin he pelaavat, kun muutama onnekas saisi suurimman osan voitoista. Jos kasino haluaisi tarjota asiakkailleen mahdollisuuden pelata Pietarin peliä, sen pitäisi käytännössä asettaa rajoitus suurimmalle mahdolliselle voitolle, jotta sen olisi mahdollista tarjota peliä riittävän halvalla tekemättä tappiota pitkällä aikavälillä. Se, mikä päävoitoksi kannattaa valita, riippuu kasinon asiakaskunnasta. Jos asiakaskunta on keskimäärin köyhää, voi olla vaikea löytää pelaajia, jos panos on niin suuri, että suurin osa pelaajista häviäisi koko omaisuutensa nopeammin kuin saisi kunnollisen mahdollisuuden jäädä voitolle. Toisaalta jos asiakaskunta on keskimäärin rikasta, voi pelistä veloittaa enemmän, mutta silloin päävoitonkin täytyy olla suurempi.

LÄHTEET

[1] R.W. Vivian, Ending the myth of the St. Petersburg paradox, *South African journal of economic and management sciences*, Vol. 16, Iss. 3, 2013, pp. 347–362.

[2] D. Bernoulli, Specimen theoriae novae de mensura sortis, *Comm. Acad. Sci. Imp. Petrop.*, 1738, pp. 175–192

[3] H. Tijms, *Understanding Probability 3rd edition*, Cambridge University Press, 2012

[4] D. Joyce, Moments and the moment generating function, Probability and Statistics, Fall 2014. Saatavissa: https://mathcs.clarku.edu/∼djoyce/ma217/centralproof.pdf

[5] O. Peters, The time resolution of the St Petersburg paradox, *Philosophical Transactions: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, Vol. 369, Iss. 1956, 2010, pp. 4913–4931.

LIITE A: SIMULOINTIOHJELMAN LÄHDEKOODI

```
#include <iostream>
#include <cstdlib>
#include <ctime>
#include <map>
#include <math.h>

using namespace std;

struct Kierros {
    int heitot;
    unsigned long int voitto;
};

Kierros pelaaKierros()
{
    unsigned long int voitto = 1;
    int heitot = 0;

    while (true) {
        heitot += 1;
        if ((int) (2.0 * (rand()/(RAND_MAX + 1.0)))) {
            voitto *= 2;
        } else {
            break;
        }
    }
    Kierros kierros;
    kierros.voitto = voitto;
    kierros.heitot = heitot;
    return kierros;
}

int main()
{
    int kierrokset;
    int panos;
```

```
    map<int, unsigned long int> pelatutKierrokset;

    cout << "Aseta panos: ";
    cin >> panos;

    cout << "Kuinka monta kierrosta simuloidaan?" << endl;
    cin >> kierrokset;

    srand(time(NULL));
    long long int saldo = 0;
    long long int alinSaldo = 0;

    for (int i = 1; i <= kierrokset; ++i) {
        saldo -= panos;

        if (saldo < alinSaldo) {
            alinSaldo = saldo;
        }
        Kierros kierros = pelaaKierros();
        saldo += kierros.voitto;
        if (pelatutKierrokset.find(kierros.heitot) == pelatutKierrokset.end()) {
            pelatutKierrokset[kierros.heitot] = 1;
        } else {
            pelatutKierrokset.at(kierros.heitot) += 1;
        }
    }

    double hyotyarvon_muutos = log(saldo-alinSaldo) - log(-alinSaldo);
    cout << "Alin saldo: " << alinSaldo << ", Saldo: " << saldo << endl;
    cout << "Hyotyarvon keskimaarainen muutos: "
    << hyotyarvon_muutos/kierrokset << endl;
    map<int, unsigned long int>::iterator iter = pelatutKierrokset.begin();

    while (iter != pelatutKierrokset.end()) {
        cout << iter->second << " kierrosta paattyi "
             << iter->first << ". heiton jalkeen." << endl;
        ++iter;
    }
}
```