



TAMPEREEN TEKNILLINEN YLIOPISTO  
TAMPERE UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

**JUULIA AUVINEN**  
**KÄYRÄN KAAREVUUS JA EVOLUUTTA**

Kandidaatintyö

Tarkastaja: Merja Laaksonen  
6.9.2018

# TIIVISTELMÄ

**JUULIA AUVINEN:** Käyrän kaarevuus ja evoluutta

Tampereen teknillinen yliopisto

Kandidaatintyö, 20 sivua

Elokuu 2018

Teknis-luonnontieteellinen koulutusohjelma

Pääaine: Matematiikka

Tarkastaja: Lehtori Merja Laaksonen

Avainsanat: kaarevuus, kaarevuusympyrä, kaarevuussäde, kaarevuuskeskus, evoluutta

---

Tässä tutkielmassa käsitellään käyrän kaarevuutta sekä tasokäyrän että avaruuskäyrän tapauksissa. Tutkielmassa selvitetään lauseke käyrän hetkelliselle kaarevuudelle. Ongelmaa lähestytään tutkimalla käyrän tangenttivektorin suunnan muutosta. Tämän lisäksi tarkastellaan kaarevuusympyrää sekä siihen liittyviä kaarevuussädetä ja kaarevuuskeskusta.

Työssä tutustutaan myös evoluutan käsitteeseen. Evoluutta tarkoittaa käyrän kaarevuuskeskusten muodostamaa uraa. Kun käyrän parametrisointi on tiedossa, evoluutalle pystytään johtamaan lauseke.

Tutkielman lähteenä toimii Henry Edwardsin ja David Penneyn *Calculus, Early Transcendentals Matrix Version*.

# SISÄLLYS

1. Johdanto . . . . .	1
2. Esitietoja . . . . .	2
2.1 Käyrä . . . . .	2
2.2 Derivoimissääntöjä . . . . .	3
2.3 Nopeus, vauhti sekä kaaren pituus . . . . .	3
3. Taso- ja avaruuskäyrän kaarevuus . . . . .	5
3.1 Tasokäyrän kaarevuus . . . . .	5
3.1.1 Kaarevuus pisteessä . . . . .	7
3.1.2 Kaarevuusympyrä . . . . .	8
3.2 Avaruuskäyrän kaarevuus . . . . .	12
4. Evoluutta . . . . .	14
4.1 Evoluutan historia . . . . .	14
4.2 Parametrisoidun käyrän evoluutta . . . . .	15
5. Yhteenveto . . . . .	19
Lähteet . . . . .	20

## LYHENTEET JA MERKINNÄT

$\mathbf{a}$	kiihtyvyys
$a_N$	normaalikiihtyvyys
$a_T$	tangentiaalinen kiihtyvyys
$C$	käyrä
$\mathbf{E}$	evoluutta
$K$	kaarevuuskeskipiste
$\kappa$	kaarevuus
$\hat{\mathbf{N}}$	päyöksikönnormaalivektori
$\mathbf{r}$	paikkavektori
$\mathbf{r}_c$	kaarevuuskeskus ( <i>center of curvature</i> )
$\rho$	kaarevuussäde
$s$	kaarenpituus
$t$	aika
$\hat{\mathbf{T}}$	yksikkötangenttivektori
$\mathbf{v}$	nopeus
$v$	vauhti

# 1. JOHDANTO

Tämän tutkielman aiheena on käyrän kaarevuus. Matematiikan historiassa kaarevuutta on alettu tutkia jo varhain. 200-luvulla eaa. antiikin kreikkalainen matemaatikko Apollonios sivusi aihetta teoksessaan *Konika* tutkiessaan kartioleikkauksien (tunnetaan nykyään toisen asteen käyrinä) kaarevuutta [3, s. 117]. Tämän jälkeen monet tunnetut matemaatikot käsittelivät kaarevuutta tutkielmissaan, kunnes Christian Huygens löysi ensimmäisenä keinon laskea kaarevuuden yleisesti käyrille [5]. Huygensin merkittäviin löydöksiin tutustumme lisää luvussa 4.

Isaac Newton kehitti 1660-luvulla Huygensin ideoista uuden laskentamenetelmän käyrän hetkellisen kaarevuuden selvittämiseksi [3, s. 514]. Sen lähtökohtana oli kaksi käyrän pistettä, joiden kautta piirretty ympyrä sivusi käyrää kohdassa mahdollisimman tarkasti. Selvittämällä tämän ympyrän säde Newtonin onnistui laskea myös käyrän hetkellinen kaarevuus. Newtonin johtama lauseke kaarevuudelle on sama kuin myöhemmin tutkielmassa esille tuleva vaikkakin lähestymistapa on erilainen. Myöhemmin Leonard Euler laajensi tutkimuksia laskemalla kaarevuuden 3-ulotteiselle pinnalle vuonna 1760 julkaisemassaan artikkelissa [5].

Tutkielman tavoitteena on tutustuttaa lukija kaarevuuden matemaattisiin lähtökohtiin. Käsittelemme kaarevuutta sekä taso- että avaruuskäyrän tapauksissa, ja tutustumme evoluutan käsitteeseen. Tutkielman ymmärtämiseen lukijalla riittää alkeisgeometrian sekä differentiaalilaskennan perusteiden tuntemus.

Tutkielman alussa, luvussa 2, esittelemme määritelmiä ja lauseita, joita tarvitaan lähdetessä syventymään tarkemmin kaarevuuteen. Luvussa 3 selvitämme, miten laskea käyrän hetkellinen kaarevuus, sekä tutustumme kaarevuusympyrään. Luvussa 4 selviää, mitä tarkoitetaan käyrän evoluutalla ja miten heilurikellon keksiminen liittyi evoluutan historiaan.

Suurien matemaatikoiden jalanjäljissä lähdemme nyt matkalle kaarevuuden maailmaan. Tutkielman matemaattinen sisältö seuraa suurelta osin Edwardsia ja Penneytä [2], sekä historian osalta tärkeimmät lähteet ovat Katz [3] ja Lodder [5].

## 2. ESITIETOJA

Aluksi esitellään määritelmiä ja lauseita, joita tarvitaan pohjatiedoiksi ennen kuin voidaan lähteä määrittelemään itse kaarevuutta.

Tässä työssä tarkastellaan funktioita  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Kun  $m > 1$ , funktion sanotaan olevan *vektoriarvoinen funktio* [4, s. 5].

### 2.1 Käyrä

Tutkitaan yhden muuttujan vektoriarvoista funktiota  $\mathbf{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Seuraavat määritelmät ovat teoksesta [4, s. 5–11].

**Määritelmä 2.1.1.** Funktio  $\mathbf{r}(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$  on *jatkuva pisteessä*  $t_0$ , jos

$$\mathbf{r}(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{r}(t) = \left( \lim_{t \rightarrow t_0} x_1(t), \dots, \lim_{t \rightarrow t_0} x_n(t) \right).$$

Käyrä on *jatkuva*, jos se on jatkuva jokaisella  $t \in [a, b]$ .

**Määritelmä 2.1.2.** Jos funktio  $\mathbf{r}$  on jatkuva, sitä kutsutaan *parametrisoiduksi käyräksi*. Arvojoukko  $C = \mathbf{r}([a, b])$  on *käyrän jälki* tai lyhyesti *käyrä*. Kun  $n = 2$ , kyseessä on *tasokäyrä* ja kun  $n = 3$ , puhutaan *avaruuskäyrästä*. Pistettä  $\mathbf{r}(a)$  kutsutaan käyrän *alkupisteeksi* ja pistettä  $\mathbf{r}(b)$  käyrän *loppupisteeksi*.

**Määritelmä 2.1.3.** Käyrä  $\mathbf{r}$  on *derivoituva pisteessä*  $t$ , jos löytyy raja-arvo

$$\mathbf{r}'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}(t+h) - \mathbf{r}(t)}{h}.$$

Käyrä on *derivoituva*, jos se on derivoituva jokaisella  $t \in [a, b]$ .

**Määritelmä 2.1.4.** Käyrä  $\mathbf{r}$  on *sileä*, jos  $\mathbf{r}'$  on jatkuva ja  $\mathbf{r}'(t) \neq \mathbf{0}$  aina, kun  $t \in [a, b]$ .

## 2.2 Derivoimissääntöjä

Seuraavaksi käydään läpi derivoimissääntöjä, joita tarvitaan myöhemmin tässä tutkielmassa.

**Lause 2.2.1.** *Olkoon funktio  $g$  derivoituva pisteessä  $x$  ja funktio  $f$  derivoituva pisteessä  $g(x)$ . Kun merkitään funktioita  $y = f(u)$  ja  $u = g(x)$ , niin ketjusäännön perusteella funktion  $y$  derivaatta*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx}. \quad (2.1)$$

**Lause 2.2.2.** *Olkoon funktio  $f$  jatkuva välillä  $[a, b]$ . Tällöin analyysin peruslauseen perusteella*

$$\frac{d}{dx} \int_c^x f(t) dt = f(x), \quad (2.2)$$

missä  $c \in [a, b]$ .

**Lause 2.2.3.** *Arkustangenttifunktion derivaatta*

$$\frac{d}{dx} \arctan x = \frac{1}{1+x^2}. \quad (2.3)$$

Lauseiden todistukset löytyvät teoksesta [2, s. 126, 352–353, 468–469].

## 2.3 Nopeus, vauhti sekä kaaren pituus

Lopuksi ennen kuin pääsemme tutkimaan kaarevuutta, määritellään käyrää pitkin liikkuvan pisteen nopeus ja vauhti sekä käyrän kaaren pituus [2, s. 850, 860–861].

Usein parametrilla  $t$  merkitään aikaa ja vektori

$$\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

on pisteen paikka hetkellä  $t$ . Tällöin käyrä  $C = \mathbf{r}(t)$  kuvaa pisteen kulkemaa reittiä välillä  $t \in [a, b]$ .

Käyrää  $C$  pitkin liikkuvan pisteen *nopeus* hetkellä  $t$  saadaan sen paikkavektorin derivaattana eli

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t)). \quad (2.4)$$

Käyrää  $C$  pitkin liikkuvan pisteen *vauhti* hetkellä  $t$  on sen nopeusvektorin pituus eli

$$v(t) = \|\mathbf{v}(t)\| = \|\mathbf{r}'(t)\| = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}. \quad (2.5)$$

Välillä  $t \in [a, b]$  käyrän  $C$  kaarenpituus

$$s = \int_a^b \|\mathbf{r}'(t)\| dt = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} dt. \quad (2.6)$$

Kaavan (2.5) nojalla kaarenpituus on muotoa

$$s = \int_a^b v(t) dt. \quad (2.7)$$

Olkoon  $s(t)$  sileän käyrän kaarenpituus sen alkupisteestä  $\mathbf{r}(a)$  käyrän pisteeseen  $\mathbf{r}(t)$ . Tällöin käyrän kaarenpituuden funktio

$$s(t) = \int_a^t v(\tau) d\tau. \quad (2.8)$$

Analyysin peruslauseen nojalla

$$\frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt} \int_a^t v(\tau) d\tau = v(t). \quad (2.9)$$

Täten käyrää pitkin liikkuvan pisteen nopeus on käyrän kaarenpituuden muutos ajan suhteen.



### 3. TASO- JA AVARUUSKÄYRÄN KAAREVUUS

Jotta voitaisiin tutkia, kumpi kahdesta samasta pisteestä lähtevästä käyrästä on "suorempi", pitäisi käyrän kaareutumista pystyä mittaamaan jollain tavalla. Tähän kysymykseen on useampia eri lähestymistapoja.

Geometrisesti tarkasteltuna luontevinta olisi määrittää ensin tarkasteltavassa pisteessä mahdollisimman tarkasti käyrää sivuava ympyrä sekä sen säde, ja tämän säteen avulla tutkia kaareutumista pisteessä. Tämä oli Newtonin lähestymistapa ongelmaan, kuten johdannossa kävi esille. Intuitiivisesti voidaan ajatella, että pienisäteinen ympyrä kaareutuu enemmän suurempisäteiseen verrattuna. Koska kaarevuus liittyy käyrän suunnan muutosnopeuteen, lähestytään ongelmaa kuitenkin tangenttivektorin avulla. Tässä luvussa lähdeoteoksena toimii Edwardsin ja Penneyn *Calculus* [2, s. 861–867].

#### 3.1 Tasokäyrän kaarevuus

Tarkastellaan ensin tangenttivektorin suunnan muuttumista. Olkoon

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$$

derivoituvan sileän tasokäyrän paikkavektori. Tällöin nopeusvektori  $\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t)$  on aina nolasta poikkeava.

**Määritelmä 3.1.1.** Käyrän *yksikkötangenttivektori* pisteessä  $\mathbf{r}(t)$  määritellään vektorina

$$\hat{\mathbf{T}}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|} = \frac{\mathbf{v}(t)}{\|\mathbf{v}(t)\|}. \quad (3.1)$$

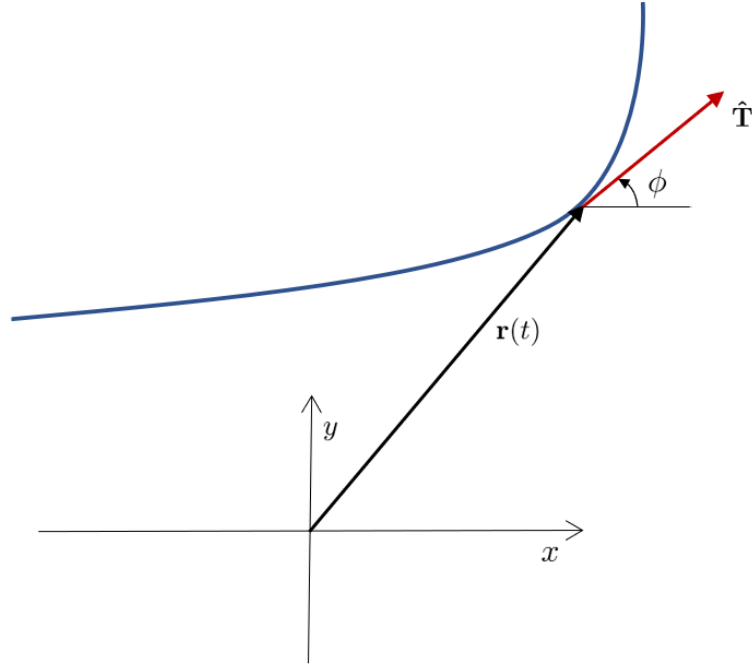
Koska kaavojen (2.5) ja (2.9) perusteella  $\|\mathbf{r}'(t)\| = v(t) = ds/dt$ , yksikkötangenttivektori

$$\hat{\mathbf{T}} = \frac{d\mathbf{r}}{ds}. \quad (3.2)$$

Toisaalta vektori voidaan myös esittää muodossa

$$\hat{\mathbf{T}} = \cos(\phi)\mathbf{i} + \sin(\phi)\mathbf{j}, \quad (3.3)$$

missä  $\phi$  on käyrän tangentin suuntakulma eli vektorin  $\hat{\mathbf{T}}$  ja  $x$ -akselin väliin jäävä kulma. Yksikkötangenttivektoria sekä kulmaa  $\phi$  on havainnollistettu kuvassa 3.1.



**Kuva 3.1** Yksikkötangenttivektori  $\hat{\mathbf{T}}$ .

Edetään käyrällä matka  $s$  ja tarkastellaan yksikkötangenttivektorin suunnan muutosta matkalla. Ketjusäännön perusteella yksikkötangenttivektorin  $\hat{\mathbf{T}}$  derivaataksi matkan  $s$  suhteen saadaan vektori

$$\frac{d\hat{\mathbf{T}}}{ds} = \frac{d\hat{\mathbf{T}}}{d\phi} \cdot \frac{d\phi}{ds} = (-\sin(\phi)\mathbf{i} + \cos(\phi)\mathbf{j}) \frac{d\phi}{ds} \quad (3.4)$$

Vektori  $-\sin(\phi)\mathbf{i} + \cos(\phi)\mathbf{j}$  yhtälön oikealla puolella on yksikkövektori, joten

$$\left\| \frac{d\hat{\mathbf{T}}}{ds} \right\| = \left| \frac{d\phi}{ds} \right|. \quad (3.5)$$

### 3.1.1 Kaarevuus pisteessä

Käyrän kaarevuus tietyssä pisteessä kuvaa, kuinka paljon käyrän suunta pisteessä muuttuu. Näin ollen kaarevuus on käyrän toisen derivaatan arvo kyseisessä pisteessä. Koska kaavan (3.2) mukaan  $\hat{\mathbf{T}} = d\mathbf{r}/ds$ , niin käyrän toisen derivaatan arvo pisteessä  $\mathbf{r}(t)$  on

$$\left| \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} \right| = \left\| \frac{d\hat{\mathbf{T}}}{ds} \right\|. \quad (3.6)$$

**Määritelmä 3.1.2.** Tasokäyrän *kaarevuus*, jota merkitään symbolilla  $\kappa$ , tietyssä pisteessä on

$$\kappa = \left| \frac{d\phi}{ds} \right| = \left\| \frac{d\hat{\mathbf{T}}}{ds} \right\|. \quad (3.7)$$

Toisin sanoen kaarevuus määritellään fysikaalisesti kulman  $\phi$  muutosnopeuden arvona suhteessa kaarenpituuteen  $s$ . Tästä seuraa kaarevuuden yksikölle luonteva esitysmuoto  $\text{rad/m} = 1/\text{m}$ . Voidaan päätellä, että käyrällä vakionopeudella liikkuvalla pisteelle kaarevuus on suurin pisteissä, joissa kulma  $\phi$  muuttuu nopeiten. Toisaalta suoralle kulma  $\phi$  on vakio, joten sen kaarevuus on nolla.

Seuraavaksi johdetaan yhtälö, jonka avulla on tehokkaampaa laskea kaarevuus suoraan tasokäyrälle, jonka parametrizointi on  $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$ . Kun  $x'(t) \neq 0$  ja  $-\pi/2 < \phi < \pi/2$ , kirjoitetaan kulma  $\phi$  muodossa

$$\phi_1 = \arctan\left(\frac{dy}{dx}\right) = \arctan\left(\frac{y'(t)}{x'(t)}\right).$$

Välillä  $\pi/2 < \phi < 3\pi/2$ , kulma saa muodon

$$\phi_2 = \arctan\left(\frac{dy}{dx}\right) + \pi = \arctan\left(\frac{y'(t)}{x'(t)}\right) + \pi.$$

Täten arkustangentin derivoimissäännön, kaava (2.3), avulla sekä kertomalla sisäfunktion derivaatalla kulmien  $\phi_1$  ja  $\phi_2$  aikaderivaataksi saadaan

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{y''(t)x'(t) - y'(t)x''(t)}{x'(t)^2} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{y'(t)}{x'(t)}\right)^2} = \frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{x'(t)^2 + y'(t)^2}.$$

Koska käyrän pituuden määritelmän mukaan sen derivaatta

$$s'(t) = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} > 0$$

ja nopeus  $v = ds/dt$ , kaava (3.7) antaa kaarevuudeksi

$$\kappa = \left| \frac{d\phi}{ds} \right| = \left| \frac{d\phi}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} \right| = \frac{1}{v} \left| \frac{d\phi}{dt} \right|. \quad (3.8)$$

Tästä saadaan yksinkertainen tapa laskea annetun käyrän kaarevuus.

**Huomautus 3.1.1.** Tasokäyrän, jonka parametrusointi on muotoa  $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$ , kaarevuus hetkellä  $t$  on

$$\kappa(t) = \frac{|x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)|}{(x'(t)^2 + y'(t)^2)^{3/2}} = \frac{|x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)|}{v(t)^3}, \quad (3.9)$$

missä  $v(t)$  on käyrää pitkin liikkuvan pisteen hetkellinen nopeus.

Erityisesti, jos käyrälle  $y = f(x)$  käytetään standardiparametrisointia  $\mathbf{r}(t) = (t, f(t))$ , niin  $\mathbf{r}'(t) = (1, f'(t))$  sekä  $\mathbf{r}''(t) = (0, f''(t))$ , ja kaarevuus hetkellä  $t$  on

$$\kappa(t) = \frac{f''(t)}{(1 + f'(t)^2)^{3/2}}. \quad (3.10)$$

### 3.1.2 Kaarevuusympyrä

Seuraavaksi lähdetään etsimään sellaista normaalivektoria, joka jollakin tavalla osoittaisi sen, minne käyrä on kääntymässä. Tämä vektori johdattaa määrittelemään kaarevuusympyrän, sekä muut siihen liittyvät käsitteet.

Yhtälöiden (3.3) ja (3.4) perusteella pistetulo

$$\hat{\mathbf{T}} \cdot \frac{d\hat{\mathbf{T}}}{ds} = \left( -\sin(\phi)\cos(\phi) + \sin(\phi)\cos(\phi) \right) \frac{d\phi}{ds} = 0,$$

joten yksikkötangenttivektori  $\hat{\mathbf{T}}$  sekä derivaattavektori  $d\hat{\mathbf{T}}/ds$  ovat toisiaan vastaan kohtisuorassa. Nyt määritellään yksikkövektori  $\hat{\mathbf{N}}$ , joka osoittaa samaan suuntaan derivaattavektorin  $d\hat{\mathbf{T}}/ds$  kanssa ja näin ollen on kohtisuorassa vektorin  $\hat{\mathbf{T}}$  kanssa. Kaarevuus  $\kappa$  kertoo vektorin  $d\hat{\mathbf{T}}/ds$  pituuden, joten vektori

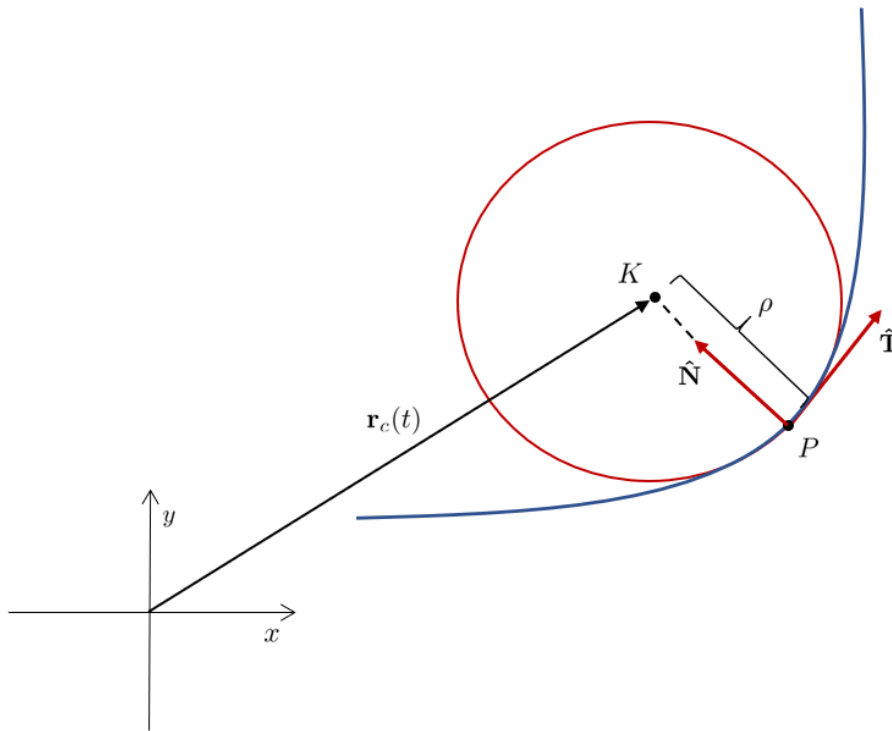
$$\frac{d\hat{\mathbf{T}}}{ds} = \kappa \hat{\mathbf{N}}. \quad (3.11)$$

Nähdään, että vektori  $\hat{\mathbf{N}}$  on etsitty normaalivektori, joka osoittaa suuntaan, johon käyrä on kääntymässä.

**Määritelmä 3.1.3.** Kun  $|d\hat{\mathbf{T}}/ds| \neq 0$ , *pääyksikkönormaalivektoriksi* sanotaan vektoria

$$\hat{\mathbf{N}} = \frac{1}{\kappa} \frac{d\hat{\mathbf{T}}}{ds}. \quad (3.12)$$

Olkoon  $P$  käyrän piste, jossa  $\kappa \neq 0$ . Kuvitellaan kuvan 3.2 mukainen ympyrä, joka mahdollisimman tarkasti sivuaa käyrää pisteessä  $P$ , ja näin ollen ympyrällä ja käyrällä on pisteessä  $P$  sama kaarevuus. Ympyrän keskipiste on käyrän koveralla puolella, joka on puoli, johon normaalivektori  $\hat{\mathbf{N}}$  osoittaa. Kyseistä ympyrää kutsutaan kaarevuusympyräksi.



**Kuva 3.2** Kaarevuusympyrä, kaarevuussäde sekä kaarevuuskeskipiste.

**Määritelmä 3.1.4.** Olkoon  $C$  sileä käyrä,  $P$  käyrän piste hetkellä  $t$  ja  $\kappa(t)$  käyrän kaarevuus pisteessä  $P$ . Käyrän *kaarevuusympyrä* pisteessä  $P$  on ympyrä, joka parhaiten approksimoi käyrää kyseissä pisteessä ja kaarevuusympyrälle on voimassa seuraavat ehdot:

1. Se sisältää pisteen  $P$ .
2. Pisteessä  $P$  sen kaarevuus on  $\kappa(t)$ .
3. Sillä on sama tangentti pisteessä  $P$  kuin käyrällä  $C$ .

Kaarevuusympyrää kutsutaan myös *oskuloivaksi ympyräksi*, sillä se koskettaa käyrää niin tiiviisti. (*Osculum* on latinankielinen sana suudelmalle.)

Seuraavaksi selvitetään kaarevuusympyrän säde sekä sen keskipiste. Origokeskisen  $a$ -säteisen ympyrän parametrisointi on muotoa  $\mathbf{r}(t) = (a \cos(t), a \sin(t))$ . Lasketaan ympyrän kaarevuus yhtälön (3.9) mukaan. Derivaatat muuttujan  $t$  suhteen ovat

$$\begin{aligned}\mathbf{r}'(t) &= (-a \sin(t), a \cos(t)), \\ \mathbf{r}''(t) &= (-a \cos(t), -a \sin(t)).\end{aligned}$$

Tällöin kaarevuus

$$\begin{aligned}\kappa(t) &= \frac{|(-a \sin(t))(-a \sin(t)) - (-a \cos(t))(a \cos(t))|}{(-a \sin^2(t) + a \cos^2(t))^{3/2}} \\ &= \frac{a^2 \sin^2(t) + a^2 \cos^2(t)}{(-a^2 \sin^2(t) + a^2 \cos^2(t))^{3/2}} = \frac{a^2}{a^3} = \frac{1}{a}.\end{aligned}$$

Ympyrän kaarevuus on siis kääntäen verrannollinen sen säteeseen. Tästä saadaan johdettua kaarevuusympyrän säde, jota sanotaan kaarevuussäteeksi ja merkitään symbolilla  $\rho$ .

**Määritelmä 3.1.5.** Käyrän *kaarevuussäde* hetkellä  $t$  on

$$\rho(t) = \frac{1}{\kappa(t)}. \quad (3.13)$$

Olkoon  $\mathbf{r}_c(t) = \overrightarrow{OK}$  paikkavektori kaarevuusympyrän keskipisteeseen  $K$  kuten kuvassa 3.2. Tätä vektoria kutsutaan kaarevuuskeskukseksi, ja se saavutetaan kulke-  
malla origosta vektorin  $\mathbf{r}(t)$  verran pisteeseen  $P$  ja siitä kaarevuussäteen  $\rho$  verran yksikkövektorin  $\hat{\mathbf{N}}$  suuntaan. Pistettä  $K$  kutsutaan käyrän kaarevuuskeskipisteeksi.

**Määritelmä 3.1.6.** Käyrän *kaarevuuskeskipiste* hetkellä  $t$  on käyrän kaarevuusympyrän keskipiste hetkellä  $t$ . *Kaarevuuskeskus*, joka on paikkavektori pisteeseen  $K$ , määritellään vektorina

$$\mathbf{r}_c(t) = \mathbf{r}(t) + \rho(t)\hat{\mathbf{N}}(t). \quad (3.14)$$

**Esimerkki 3.1.1.** Määritä vektorit  $\hat{\mathbf{T}}$  ja  $\hat{\mathbf{N}}$ , kaarevuus  $\kappa$ , kaarevuussäde  $\rho$ , kaarevuuskeskus sekä kaarevuusympyrän yhtälö käyrälle  $f(x) = x^2 + x$  pisteessä  $x = 1$ .

Parametrisoidaan käyrä  $\mathbf{r}(t) = (t, f(t)) = t\mathbf{i} + (t^2 + t)\mathbf{j}$ , jolloin sen nopeusvektori  $\mathbf{v}(t) = \mathbf{i} + (2t + 1)\mathbf{j}$  ja vauhti  $v(t) = \sqrt{1^2 + (2t + 1)^2} = \sqrt{4t^2 + 4t + 2}$ . Kaavan (3.2) mukaan yksikkötangenttivektori

$$\hat{\mathbf{T}}(t) = \frac{\mathbf{v}(t)}{v(t)} = \frac{\mathbf{i} + (2t + 1)\mathbf{j}}{\sqrt{4t^2 + 4t + 2}}.$$

Hetkellä  $t = 1$  yksikkötangenttivektori

$$\hat{\mathbf{T}} = \frac{1}{\sqrt{10}}\mathbf{i} + \frac{3}{\sqrt{10}}\mathbf{j}.$$

Koska käyrän toinen derivaatta  $f''(t) = 2 > 0$ , käyrä on aina ylöspäin kovera ja kaarevuuskeskipisteeseen osoittavaksi pääyksikkönormaalivektoriksi valitaan

$$\hat{\mathbf{N}} = -\frac{3}{\sqrt{10}}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{10}}\mathbf{j},$$

joka on kohtisuorassa vektorin  $\hat{\mathbf{T}}$  kanssa. Derivaatat  $f'(t) = 2t + 1$  ja  $f''(t) = 2$ , joten kaavan (3.10) nojalla kaarevuus

$$\kappa(t) = \frac{2}{(1 + (2t + 1)^2)^{3/2}}.$$

Hetkellä  $t = 1$  käyrän kaarevuus

$$\kappa(1) = \frac{2}{10\sqrt{10}} = \frac{1}{5\sqrt{10}}$$

sekä kaarevuussäde

$$\rho(1) = \frac{1}{\kappa(1)} = 5\sqrt{10}.$$

Kaarevuuskeskus kaavan (3.14) mukaan

$$\mathbf{r}_c(1) = (1, 2) + 5\sqrt{10} \left( -\frac{3}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}} \right) = (-14, 7).$$

Näin ollen käyrän kaarevuusympyrän yhtälö hetkellä  $t = 1$  on muotoa

$$(x + 14)^2 + (y - 7)^2 = \rho^2 = 250.$$

## 3.2 Avaruuskäyrän kaarevuus

Kuvitellaan avaruudessa liikkuva piste, jolla on kahdesti derivoituva paikkavektori  $\mathbf{r}(t)$ . Oletetaan myös, että nopeusvektori  $\mathbf{v}(t)$  on aina eri suuri kuin  $\mathbf{0}$ . Yksikkötangenttivektori avaruuskäyrälle hetkellä  $t$  on kuten aikaisemminkin vektori

$$\hat{\mathbf{T}}(t) = \frac{\mathbf{v}(t)}{\|\mathbf{v}(t)\|} = \frac{\mathbf{v}(t)}{v(t)}. \quad (3.15)$$

Tasokäyrän kaarevuus määriteltiin lukuarvona  $\kappa = |d\phi/ds|$ , missä kulma  $\phi$  oli vektorin  $\hat{\mathbf{T}}$  ja  $x$ -akselin väliin jäävä kulma. Avaruuskäyrälle ei ole olemassa tällaista yksittäistä kulmaa, joka määrittäisi vektorin  $\hat{\mathbf{T}}$  suunnan, joten käytetään kaarevuuden määrittämiseen seuraavaa lähetymistapaa. Derivoimalla pistetulo  $\hat{\mathbf{T}} \cdot \hat{\mathbf{T}} = 1$  kaarenpituuden  $s$  suhteen saadaan tulos

$$\hat{\mathbf{T}} \cdot \frac{d\hat{\mathbf{T}}}{ds} = 0.$$

Täten vektorit  $\hat{\mathbf{T}}$  ja  $d\hat{\mathbf{T}}/ds$  ovat aina toisiaan vastaan kohtisuorassa. Siis avaruuskäyrän kaarevuus pisteessä  $\mathbf{r}(t)$  on vektorin  $d\hat{\mathbf{T}}/ds$  pituus eli

$$\kappa = \left\| \frac{d\hat{\mathbf{T}}}{ds} \right\| = \left\| \frac{d\hat{\mathbf{T}}}{dt} \frac{dt}{ds} \right\| = \frac{1}{v} \left\| \frac{d\hat{\mathbf{T}}}{dt} \right\|. \quad (3.16)$$

Avaruuskäyrän pääyksikkönormaalivektori pisteessä, jossa  $\kappa \neq 0$ , on vektori

$$\hat{\mathbf{N}} = \frac{d\hat{\mathbf{T}}/ds}{\|d\hat{\mathbf{T}}/ds\|} = \frac{1}{\kappa} \frac{d\hat{\mathbf{T}}}{ds}, \quad (3.17)$$

joten

$$\frac{d\hat{\mathbf{T}}}{ds} = \kappa \hat{\mathbf{N}}. \quad (3.18)$$

Koska yhtälö (3.18) on sama kuin yhtälö (3.11), huomataan että kaarevuuden  $\kappa$  sekä vektorin  $\hat{\mathbf{N}}$  määritelmät ovat voimassa sekä taso- että avaruuskäyrälle.

Yhtälöstä (3.15) seuraa, että  $\mathbf{v} = v\hat{\mathbf{T}}$ , joten avaruuskäyrää pitkin liikkuvan pisteen kiihtyvyysektori

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{dv}{dt}\hat{\mathbf{T}} + v\frac{d\hat{\mathbf{T}}}{dt} = \frac{dv}{dt}\hat{\mathbf{T}} + v\frac{d\hat{\mathbf{T}}}{ds}\frac{ds}{dt}.$$

Koska  $ds/dt = v$ , yhtälön (3.18) nojalla kiihtyvyysektori

$$\mathbf{a} = \frac{dv}{dt}\hat{\mathbf{T}} + \kappa v^2\hat{\mathbf{N}}. \quad (3.19)$$



Tämä voidaan jakaa yksikkövektoreiden  $\hat{\mathbf{T}}$  ja  $\hat{\mathbf{N}}$  perusteella tangentialiseen kiihtyvyyteen

$$a_T = \frac{dv}{dt}$$

sekä normaalikihtyvyyteen

$$a_N = \kappa v^2 = \frac{v^2}{\rho}.$$

Ottamalla ristitulo nopeusvektorin  $\mathbf{v} = v\hat{\mathbf{T}}$  kanssa yhtälöstä (3.19), saadaan tulokseksi

$$\mathbf{v} \times \mathbf{a} = \left( v\hat{\mathbf{T}} \times \frac{dv}{dt}\hat{\mathbf{T}} \right) + (v\hat{\mathbf{T}} \times \kappa v^2\hat{\mathbf{N}}) = \kappa v^3(\hat{\mathbf{T}} \times \hat{\mathbf{N}}).$$

Koska kaarevuus  $\kappa$  ja vauhti  $v$  ovat positiivisia suureita, sekä  $\|\hat{\mathbf{T}} \times \hat{\mathbf{N}}\| = 1$ , avaruuskäyrän kaarevuus

$$\kappa = \frac{\|\mathbf{v} \times \mathbf{a}\|}{v^3} = \frac{\|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)\|}{\|\mathbf{r}'(t)\|^3}. \quad (3.20)$$

Avaruuskäyrän kaarevuuden laskeminen kaavasta (3.16) on usein hankalaa. Siksi yleisesti on sopivampaa käyttää viimeiseksi johdettua kaavaa.

## 4. EVOLUUTTA

Yksi käyrän kaarevuuteen olennaisesti liittyvä käsite on evoluutta. Tutustutaan ensin evoluutan historiaan seuraten Lodderin teosta [5], minkä jälkeen johdetaan käytökelpoinen yhtälö parametrisoidun käyrän evoluutan selvittämiseksi.

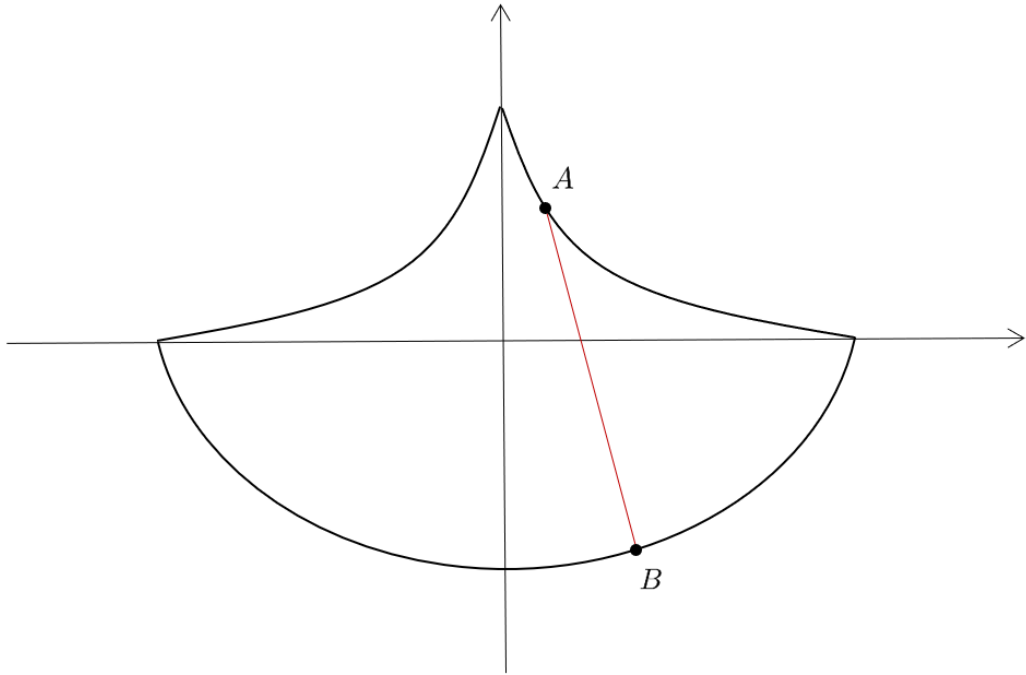
### 4.1 Evoluutan historia

Alankomaalainen fyysikko ja matemaatikko Christiaan Huygens kehitti 1650-luvulla ensimmäisen käyttökelpoisen heilurikellon, jonka avulla pystyttiin mittaamaan minutteja ja sekunteja. Ennen tätä merkittävää löytöä Huygens oli tutkinut yksinkertaista heiluria, joka koostui kiinteään pisteeseen kiinnitetyn langan päässä värähtelevästä painosta. Koska värähtelyyn kuluva aika riippui amplitudista, yksinkertainen heiluri ei ollut tarkka ajanottaja. Huygensin tavoitteena oli löytää käyrä, jolle värähtelyaika olisi riippumaton amplitudista. Tästä alkoivat Huygensin tutkimukset evoluutan parissa.

Käyrää, jolla heilurin paino saavuttaa alimman pisteensä amplitudista riippumatta, sanotaan isokroniseksi tai tautokroniseksi. Huygens osoitti, että tautokroninen ominaisuus saadaan käyrällä, jota kutsutaan sykloidiksi. Tarkastellaan pyörän pinnalla olevaa pistettä  $P$ , ja oletetaan, että pyörä alkaa rullata tasaisella alustalla. Pisteestä  $P$  muodostama käyrä on nimeltään sykloidi. Heilurissa langan päässä roikkuvan painon kulkema polku muodostaa ylösalaisin käännetyn sykloidin.

Seuraavaksi Huygensin täytyi keksiä, miten heilurin paino pakotetaan värähtelemään pitkin tällaista käyrää. Huygens ratkaisi ongelman asettamalla kaksi levyä heilurin tukipisteeseen. Painon heilahtaessa ylöspäin lanka kiertyi levyn ympärille pakottaen painon pois ympyräradalta, ja alaspäin heilahtaessa lanka purkautui. Ongelma levyjen muodon määrittämiseksi johti Huygensin tutkimaan yleisesti käyrien evoluuttia, ei vain sykloidin.

Evoluutan perusajatus on seuraava: Oletetaan kuvan 4.1 mukaisesti, että lanka lähtee levyn kohdasta  $A$  ja heiluri on pisteessä  $B$ . Vaikka piste  $B$  ei enää kulje ympyrää pitkin, heiluri pakotetaan hetkellisesti ympyräradalle, jonka keskipiste on  $A$



**Kuva 4.1** Isokroninen heiluri

ja säde jana  $AB$ . Selvittääkseen pisteen  $A$  ja janan  $AB$  Huygensin oli määritettävä ympyrä, joka parhaiten sivuaa sykloidia pisteessä  $B$ . Pisteiden  $A$  muodostamaa käyrää Huygens kutsui sykloidin evoluutaksi. Jana  $AB$  tuli myöhemmin tunnetuksi kaarevuussäteenä ja piste  $A$  kaarevuuskeskipisteenä.

## 4.2 Parametrisoidun käyrän evoluutta

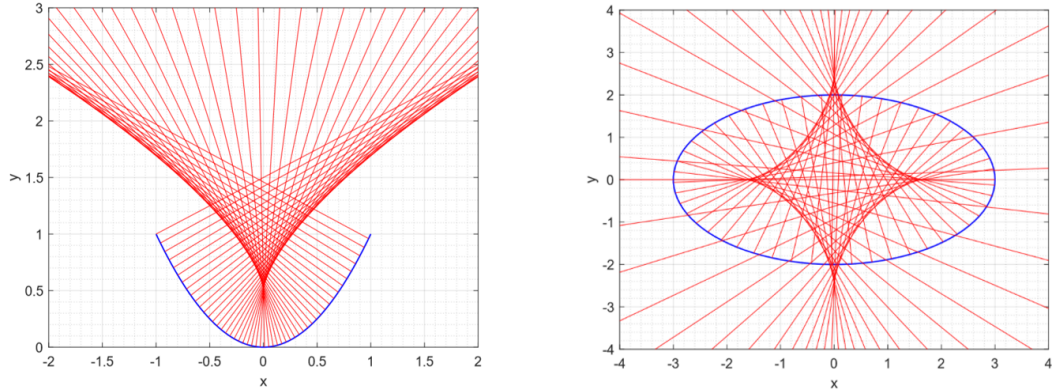
**Määritelmä 4.2.1.** Olkoon  $C$  sileä tasokäyrä. Tasokäyrän *evoluutta* on käyrän kaarevuuskeskipisteiden muodostama ura. Evoluutta voidaan määritellä myös sen normaalien muodostamana verhokäyränä. [1]

Jos  $\mathbf{r}(t)$  on käyrän paikkavektori välillä  $t \in [t_1, t_2]$ ,  $\rho(t)$  sen kaarevuussäde,  $\hat{\mathbf{N}}(t)$  yksikkötangenttivektori, joka osoittaa kaarevuuskeskipisteeseen, ja käyrän kaarevuus on erisuuri kuin nolla jokaisessa käyrän pisteessä, niin kaavan (3.14) nojalla vektori

$$\mathbf{E}(t) = \mathbf{r}_c(t) = \mathbf{r}(t) + \rho(t)\hat{\mathbf{N}}(t) \quad (4.1)$$

on käyrän evoluutan paikkavektori välillä  $t \in [t_1, t_2]$ .

Kuvassa 4.2 on havainnollistettu paraabelin sekä ellipsin evoluuttia piirtämällä käyrille normaaleja [6]. Kuvissa sininen kuvaa alkuperäistä käyrää ja punaisten normaalien verkokäyrä evoluuttaa. Ellipsin evoluutta on astroidi.



**Kuva 4.2** Paraabelin ja ellipsin evoluutat.

Evoluutat liittyvät läheisesti evolventteihin: Käyrä on jokaisen sen evolventin evoluutta. Evolventti annetusta käyrästä voidaan hahmottaa kuvittelemalla kireä lanka, joka kiinnitetään käyrään ja kierretään sen ympärille. Päästettäessä lanka purkautumaan vapaa pää piirtää käyrän evolventin. Evolventti ei ole yksikäsitteinen, sillä kuvitteellisen langan pituutta voi muuttaa. Kuvassa 4.2 siniset käyrät kuvaavat evolventteja. Täten ellipsi on astroidin evolventti. [1]

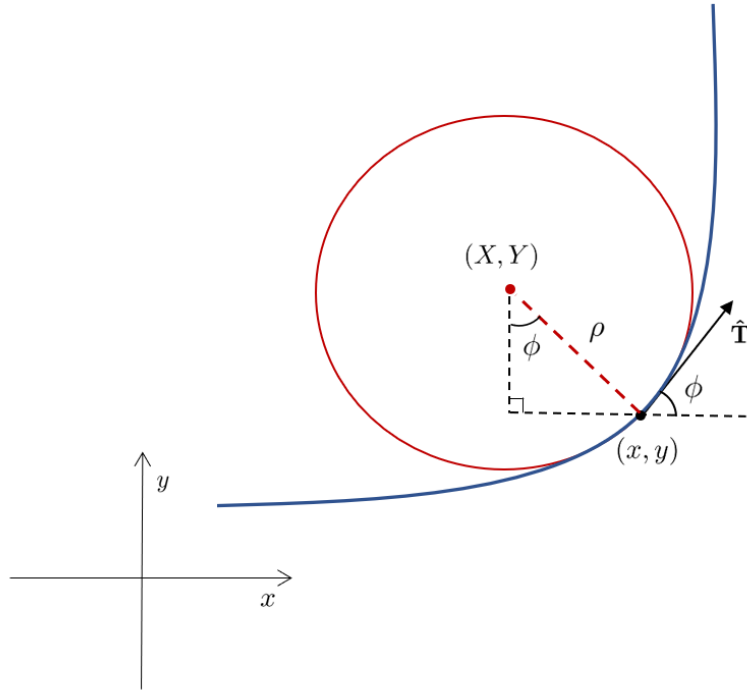
Johdetaan seuraavaksi evoluutan lauseke tasokäyrälle, jolle käytetään parametrisointia  $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$ . Merkitään evoluutan parametrisointia  $\mathbf{E}(t) = (X(t), Y(t))$ . Trigonometrian perusteella kuvan 4.3 suorakulmaisen kolmion kateettien pituudet ovat

$$\begin{aligned}x - X &= \pm \rho \sin(\phi), \\ Y - y &= \pm \rho \cos(\phi),\end{aligned}$$

missä  $\phi$  on käyrän tangentin ja  $x$ -akselin välinen kulma. Etumerkki riippuu siitä, onko käyrä kovera vai kupera.

Sijoitetaan lausekkeisiin kaarevuussäteeksi  $\rho = 1/\kappa$ . Tällöin

$$\begin{aligned}x - X &= \frac{1}{\kappa} \sin(\phi), \\ Y - y &= \frac{1}{\kappa} \cos(\phi).\end{aligned}$$



**Kuva 4.3** Evoluutan piste  $(X, Y)$ .

Koska  $ds/dt = v(t) = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}$ , sini- ja kosinitermit ovat muotoa

$$\sin \phi = \frac{dy}{ds} = \frac{y'(t)}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}},$$

$$\cos \phi = \frac{dx}{ds} = \frac{x'(t)}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}}.$$

Yhdistämällä edellä mainitut kaavat sekä kaarevuuden lauseke evoluutan komponentit ovat muotoa

$$X(t) = x(t) - \frac{y'(t)(x'(t)^2 + y'(t)^2)}{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}, \quad (4.2)$$

$$Y(t) = y(t) + \frac{x'(t)(x'(t)^2 + y'(t)^2)}{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}. \quad (4.3)$$

Standardiparametrisoidun käyrän, jolle käytetään parametrisointia  $\mathbf{r}(t) = (t, f(t))$ , evoluutta

$$\mathbf{E}(t) = \left( t - \frac{f'(t)(1 + f'(t))^2}{f''(t)}, f(t) + \frac{1 + f'(t)^2}{f''(t)} \right). \quad (4.4)$$

Evoluutta on aina paikallisesti kupera, eikä sillä ole sellaista pistettä, jossa sen kaarevuussuunta vaihtuu ja käyrän toinen derivaatta  $\mathbf{r}''(t) = \mathbf{0}$ , eli käännepistettä. Jos käyrällä  $C$  on käännepiste hetkellä  $t$ , niin  $\kappa(t) = 0$  ja evoluutta lähestyy äärettömyyttä. Evoluutan ominaisuuksiin kuuluu myös, että sen kuvaajassa on tyypillisesti kärkiä kuten kuvissa 4.1 ja 4.2. Evoluutan kärjet muodostuvat kohtiin, joissa alkuperäisen käyrän kaarevuus saa ääriarvonsa. [1]

Käyrän evoluutan fysikaaliset sovellukset liittyvät optiikkaan. Kun kuvitellaan käyrä valonlähteenä, evoluutta edustaa paikkaa, johon käyrän lähettämät säteet kohdistuvat.

## 5. YHTEENVETO

Tämän työn tarkoituksena oli esitellä lukijalle matemaattiset sekä historialliset näkökulmat käyrän kaarevuudesta sekä evoluutasta. Työssä pyrittiin etenemään johdonmukaisesti lähdeostosten pohjalta, jotta kaarevuudesta saisi kattavan ja selkeän kokonaiskuvan. Päädyimme määritelmään, että kaarevuus tietyssä pisteessä kuvaa sitä, kuinka paljon käyrän suunta pisteessä muuttuu. Fysikaalisesti kaarevuuden yksikölle löydettiin esitysmuodoksi rad/m. Käyrän kaarevuuden tärkeimmät fysikaaliset sovellutukset liittyvät kiihtyvyyteen, jota luvussa 3 lyhyesti sivuuttiin, sekä optikkaan.

Kaarevuusympyrä antaa tietoa käyrän kaarevuudesta. Käyrän kaarevuusympyrä tietyssä pisteessä on ympyrä, joka mahdollisimman tarkasti sivuaa käyrää pisteessä. Tämän ympyrän avulla saadaan selvitettyä myös käyrän kaarevuussäde sekä kaarevuuskeskipiste. Näiden käsitteiden avulla pystytään mittaamaan käyrien kaareutumista. Kaarevuuskeskipisteiden muodostamaa uraa kutsutaan evoluutaksi.

Työssä rajoituttiin käsittelemään kaarevuutta ainoastaan taso- ja avaruuskäyrän tapauksissa. Aiheen rajaamiseksi pinnan kaarevuus jätettiin käsittelemättä. Kiinnostuneet voivat tutustua Eulerin tutkimuksiin pinnan kaarevuuden parissa esimerkiksi Lodderin teoksesta [5].

## LÄHTEET

- [1] Arnold, M., Fuchs, D., Izmistiev, I., Tabachnikov, S., Tsukerman, E. *Iterating Evolutes and Involutives*, Discrete Comput Geom, Vol. 58 (2017). Saatavissa: <https://doi.org/10.1007/s00454-017-9890-y>. Viitattu 13.8.2018.
- [2] Edwards, C., Penney, D. *Calculus, Early transcendentals, Matrix version*, Prentice-Hall, Inc., Upper Saddle River, New Jersey 07258, 6th edition, 2002, pp. 850–865.
- [3] Katz, V. *History of Mathematics, An Introduction*, Addison-Wesley, 2nd edition, 1998
- [4] Kauhanen, J. *Usean muuttujan funktioiden differentiaali- ja integraalilaskentaa*, Luentomoniste. TTY, Matematiikan laitos, 2014.
- [5] Lodder, J. *Curvature in the calculus curriculum*, The American Mathematical Monthly, Washington, Vol. 110 (2003), pp. 593–605  
Saatavissa: <https://search-proquest-com.libproxy.tut.fi/docview/203741865?accountid=27303>. Viitattu 13.8.2018.
- [6] Peterson, M. *Curves and their Evolutes*, Mount Holyoke College, Massachusetts. Saatavissa: <https://www.mtholyoke.edu/courses/mpeterso/math251/evolutes/>. Viitattu 13.8.2018.