TAMPEREEN TEKNILLINEN YLIOPISTO
TAMPERE UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

MARJUKKA JOUTSENLAHTI

MATHCHECK-OHJELMISTO ITSENÄISEN OPISKELUN APU-VÄLINEENÄ PROPOSITIOLOGIIKAN OPETUSMODUULISSA

Diplomityö

Tarkastajat:
lehtori Terhi Kaarakka
professori Antti Valmari
Tarkastajat ja aihe hyväksytty
29.11.2017

TIIVISTELMÄ

MARJUKKA JOUTSENLAHTI: MathCheck-ohjelmisto itsenäisen opiskelun apuvälineenä propositiologiikan opetusmoduulissa
Tampereen teknillinen yliopisto
Diplomityö, 46 sivua, 9 liitesivua
Helmikuu 2018
Teknis-luonnontieteellinen koulutusohjelma
Pääaine: Matematiikka
Tarkastajat: lehtori Terhi Kaarakka, professori Antti Valmari
Avainsanat: sulautuva oppiminen, MathCheck -ohjelmisto, matemaattinen osaaminen

Tässä tutkimuksessa on tavoitteena luoda sähköinen opetusmoduuli itsenäisen opiskelun tarpeisiin käyttäen MathCheck -ohjelmistoa apuna harjoittelussa. Tutkimusta tarkastellaan kehittämistutkimuksena, ja tämä tutkimus käsittää yhden syklin.

Opetusmoduulin aiheena on propositiologiikka ja moduuli koostui teoria- ja harjoitustehtäväosioista. Harjoitustehtävien tarkastamisessa käytettiin MathCheck-ohjelmistoa. Tutkimus toteutettiin Tampereen teknillisessä yliopistossa keväällä 2017 osana Algoritmimatematiikan kurssia. Moduulin tekeminen oli opiskelijoille vapaaehtoista, mutta heitä motivoitiin kertomalla, että aiheesta tulee tenttiin kysymys. Opetuskokeilun jälkeen tehtiin kysely opetusmoduulin tehneille opiskelijoille. Kyselyssä haluttiin selvittää, miten opiskelijat kokivat tehtävien ratkaisemisen ja miten mainitut tehtävät tukivat omaa oppimisprosessia. Lisäksi kysyttiin käyttäjäkokemuksia opetusmoduulista ja itsenäisestä opiskelusta sähköisessä oppimisympäristössä.

Kyselyyn vastanneet opiskelijat (N=21) kokivat opetusmoduulin tehtävät vaikeustasoltaan sopiviksi ja sisältöjen oppimista tukeviksi. Suurin osa kyselyyn vastanneista opiskelijoista koki opetusmoduulin käytön positiivisena kokemuksena. Osa opiskelijoista esitti perusteltuja parannuksia alustaan, kuten ulkonäköön ja käyttöliittymään. Kyselyyn vastanneista opiskelijoista osallistui tenttiin 20 opiskelijaa. He menestyivät tilastollisesti merkitsevästi paremmin tentissä (p=0,004, yhden otoksen t-testi ja keskiarvo 17,5 pistettä) kuin kaikki tenttiin osallistuneet (N=134, keskiarvo 12,9 pistettä). Tosin tässä yhteydessä ei voi päätellä mikä osuus opetusmoduulin käytöllä on tenttimenestyksessä ja mikä esimerkiksi yleisesti motivaatiolla.

ABSTRACT

MARJUKKA JOUTSENLAHTI: MathCheck software as an auxiliary tool for independent study in the teaching module of propositional logic
Tampere University of Technology
Master's Thesis, 46 pages, 9 Appendix pages
February 2018
Master's Degree Programme in Science and Engineering
Major: Mathematics
Examiners: lecturer Terhi Kaarakka, professor Antti Valmari
Keywords: blended learning, MathCheck software, mathematical proficiency

The aim of this study is to create a teaching module for independent studying using MathCheck software for exercises. This study is design research and this consists of one cycle of research.

A teaching module was about propositional logic and it consist of theory and exercises. MathCheck software checked the answers immediately. The study was executed in the Tampere University of Technology in the spring of 2017 as a part of a course of algorithm mathematics. Studying with the module was voluntary, but students were motivated by telling that there will be a question in the exam about the modules' subjects. After completing the module, the students were asked six open questions. Questions tried to clarify how students experienced doing the exercises with MathCheck and did it help with their learning. Additionally questions about user experience of the teaching module were asked.

The students who answered the questions (N=21) experienced the module helped with their learning and majority of the answered students had positive experience with the module. Some of the students represented justified improvements in the platform, in example the user interface. From the students who answered the questionnaire participated in the exam 20 students. They succeeded statistically better in the exam (p = 0,004, t-test of one sample and average of 17,5 points) than all the participants of the exam (N=134, average of 12,9 points). However, we cannot make conclusions in this context that what part of the success is because of the teaching module and what part of it for example general motivation for mathematics.

ALKUSANAT

Tämä diplomityö on tehty Tampereen teknillisen yliopiston matematiikan laboratoriolle. Työn suunnittelu ja toteutus tapahtui keväällä 2017 ja hidas kirjoitusprosessi siitä seuraavan vuoden.

Tämän työn teko kuvastaa hyvin koko yliopisto-opiskelujani. Se on vaatinut paljon kyyneleitä, ahdistusta ja ja pohdintaa onko tämä kaikki tosiaan yhden tutkinnon arvoista. Sen varmasti tulevaisuus näyttää. Yksin tästä en olisi selvinnyt, ja tahtoisinkin kiittää lehtori Terhi Kaarakkaa hyvistä neuvoista ja kommenteista sekä uskosta diplomityötäni kohtaan. Kiitos myös professori Antti Valmarille varsinkin MathCheck-ohjelmistoon liittyvissä neuvoissa sekä tarkoista huomioista diplomityöstäni.

Kiitos kuuluu myös koulun ulkopuolisille ihmisille, jotka ovat jaksaneet ei-niin-hilpeää läsnäoloani ja yrittäneet kannustaa jaksamaan loppun asti (vaikka sanat “ei ole paljon jäljellä” on kuultu hieman turhan usein). Näihin ihmisiin kuuluu ensisijaisesti perhe, jossa Team Joutsenlahti täydentyy kolmannella matemaattisten aineiden opettajalla. Luistelu ja jäähalli on toiminut henkireikänä näiden kaikkien vuosien ajan ja siitä kiitos kaikille joukkuetovereille, valmennatteville lapsukaisille sekä erityisesti TapTL synchrocoaches, joiden seurassa elämän tärkeysjärjestys saa olla oikea. Viimeisenä haluan kiittää Juliusta, joka on ollut tukena koko prosessin ajan.

Tampereella, 21.2.2018

Marjukka Joutsenlahti

SISÄLLYS

LYHENTEET JA MERKINNÄT

HTML	Hypertext Markup Language
PDF	Portable Document Format
STACK	System for Teaching and Assessment using a Computer algebra Kernel
ASCII	American Standard Code for Information Interchange
TIM	The Interactive Material

1. JOHDANTO

Tämän tutkimuksen tavoitteena on luoda sähköinen opetusmoduuli, joka on osana kurssia perinteisen kontaktiopetuksen rinnalla kaikille opiskelijoille. Kokonaisuus nähdään sulautuvan oppimisen mallin mukaisena. Aiheena opetusmoduulissa on propositiologiikka, ja sitä varten rakennetaan teoriaosuudet ja harjoitustehtäväympäristöt, joissa sovelletaan monenlaisia tehtävätyyppejä sekä MathCheck-ohjelmistoa [2]. Opetusmoduulin rakentamista ja kokeilua tarkastellaan kehittämistutkimuksena ja tämä tutkimus käsitteleekin kyseisen kehittämistutkimuksen ensimmäistä sykliä.

1.1 Matematiikan opetuksen kehittämistarpeista yliopistossa

Yleissivistävän koulutuksen uusien opetussuunnitelmien myötä digitalisaatio tulee yhä keskeisemmäksi osaksi opetusta [27]. Matematiikan sähköiset ylioppilaskirjoitukset ohjaavat vuodesta 2019 eteenpäin lukion matematiikan opetusta sähköisiin oppimisympäristöihin, joissa symbolisen laskennan ohjelmat muuttavat entistä enemmän perinteisiä pedagogisia lähestymistapoja. Yliopistojen uudet opiskelijat ovat tottuneet lukioissa monimuotoiseen opetukseen; esimerkiksi verkkokursseihin ja itsenäiseen opiskeluun perinteisen kontaktiopetuksen lisäksi. Teknologian käytöstä on tullut kiinteä osa lukion opiskelijoiden arkipäivän opiskelua opetussuunnitelman perusteidenkin ohjaamana. Tämä luo tarvetta kehittää yliopistojen matematiikan opetusta samaan suuntaan ja näin hyödyntää uusien opiskelijoiden monipuolisia valmiuksia opiskella.

Yliopistojen näkökulmasta opiskelijoiden lähtötaso matematiikan osaamisessa on entistä heterogeenisempi. Tämä on jouduttu ottamaan huomioon esimerkiksi Tampereen teknillisessä yliopistossa tukikursseina ja muina tukipalveluina [34]. Eräs mahdollisuus edesauttaa matematiikan opiskelua on luoda opiskelijoille yksilöllisiä opintopolkuja. Verkko-opetuksen avulla on mahdollista luoda monipuolisia opintopolkuja.

Viime vuosien aikana yliopiston resursseja on yleisesti vähennetty, mikä näkyy opetushenkilökunnan ja kontaktiopetuksen tuntien vähenemisenä. Tämän vuoksi yliopistojen on täytynyt lähteä kehittämään opetusmalleja, joiden avulla kuitenkin opetuksen tavoitteet saavutetaan. Tämä on näkynyt muun muassa siten, että perinteisten luentokurssien yhteyteen on tehty verkko-opetusosuuksia. Näissä on hyödynnetty monipuolisesti esimerkiksi videoita ja animaatioita perinteisten tekstien lisäksi.

1.2 Aikaisemmat tutkimukset

Tampereen teknillisessä yliopistossa on tehty useita verkko-opetukseen liittyviä tutkimuksia. Vuosina 2015-2016 Tampereen teknillisessä yliopistossa oli pilottihanke MathCheckiin liittyen, jossa MathCheck-ohjelmistoa pyrittiin ottamaan aktiivisesti osaksi opetusta. MathCheck on myös osana käynnissä olevia tutkimuksia. [32]

Pilottihankkeen ensimmäisessä osassa MathCheck-ohjelmisto otettiin käyttöön syksyllä 2015 Insinöörimatematiikka 1 -kurssilla, jonka aihealueina olivat raja-arvo, jatkuvuus ja derivaatta. Tämä oli opiskelijoiden ensimmäinen yliopistotason matematiikan kurssi. Kokeilussa opiskelijoille annettiin viikoittain 1-2 tehtävää tarkastettavaksi MathCheck-ohjelmistolla. Opiskelijat tekivät tehtävät perinteisellä tavalla ja tämän jälkeen tarkastivat kotona tehtävän oikeellisuuden MathCheck-ohjelmistolla. Noin 150 opiskelijaa käytti MathCheck-ohjelmistoa ja 120 vastasi kyselyyn ohjelmiston käytöstä. Kyselystä selvisi, että 44% vastanneista opiskelijoista koki MathCheck-ohjelmiston hyödylliseksi, 40% koki sen hyödyttömäksi ja 16% totesi ettei ollut lainkaan käyttänyt kyseistä ohjelmistoa. Ensimmäisessä kokeilussa suurin osa opiskelijoista koki, että MathCheck-ohjelmisto on hyödyllinen matematiikan tehtävien tarkastamisessa. Kurssin opettaja huomioi kurssin aikana, että osa opiskelijoista ei ollut ymmärtänyt MathCheck-ohjelmiston käyttötarkoitusta tehtävien tarkastamisessa. Ongelmia oli ollut myös syöttökielen kanssa, sillä matematiikan tekstikielen syöttäminen oli opiskelijoille uusi asia. Osa tehtävistä oli opiskelijoille myös liian yksinkertaisia, sillä niiden ratkaiseminen ei vaatinut välttämättä edes välivaiheita. Tällöin MathCheck-ohjelmiston käytöstä tehtävien tarkastamisessa ei käytännössä ollut hyötyä. [35]

Pilottihankkeen toisessa osassa MathCheck-ohjelmistoa käytettiin osana Algoritmimatematiikka-kurssia keväällä 2016. Algoritmimatematiikan kurssin aihealueisiin sisältyy tietorakenteet, relaatiot ja funktiot, logiikka sekä induktio ja rekursio. Kokeilussa opiskelijoille annettiin muutamia kotitehtäviä, jotka oli tarkoitus tarkistaa MathCheck-ohjelmistolla ja lähettää siitä PDF -tiedosto opettajalle. Palautettujen PDF -tiedostojen määrästä opiskelijat saivat joko 0,1 tai 2 pistettä. Opiskelijoiden saamia pisteitä verrattiin tenttituloksiin. Huomattiin, että opiskelijoiden (N = 135) saamilla MathCheck-harjoitusten pisteillä ja tenttipisteillä oli positiivinen korrelaatio (r = 0,4845), mikä oli tilastollisesti merkitsevä ($p <$ 0,001). Tenttituloksiin luonnollisesti vaikuttavat muutkin seikat kuin MathCheck-tehtävien tekeminen, kuten yleinen motivaatio, aktiivisuus kurssin aikana sekä muutkin tehdyt tehtävät. Kurssin opettaja huomasi, että MathCheck-ohjelmistoa käyttäneiden opiskelijoiden oli helpompi tehdä arvioita aikakompleksisuudesta. [35]

Syksyllä 2016 tehtiin kokeilu yhdessä norjalaisen Norwegian Cyber Defence Academyn kanssa, jossa oli tarkoituksena verrata MathCheck- ja Wolphram Alpha [6]-ohjelmistoja tarkastusvälineinä. Tutkimukseen osallistui 106 Tampereen teknillisen yliopiston opiskelijaa ja 40 Norwegian Cyber Defence Academyn opiskelijaa. Kummassakin maassa opiskelijat jaettiin kahteen ryhmään, joista toisen ryhmän oli tarkoitus opiskella käyttäen MathCheck-ohjelmistoa ja toisen Wolphram Alpha -ohjelmistoa tehtävien tarkastamiseen. Kaikille opiskelijoille jaettiin sama harjoituspaketti, joka oli tarkoitus ratkaista kynän ja paperin avulla ja sitten tarkistaa saatu vastaus määrätyllä ohjelmalla. Tämän jälkeen kaikki opiskelijat osallistuivat kokeeseen, joka oli tarkoitus suorittaa ilman mitään apuohjelmia. Tenttituloksissa ei ollut tilastollisesti merkittäviä eroja käyttäjien välillä. [15]

Pilottihanketta voidaan pitää ikään kuin kehittämistutkimuksena, sillä jokaisen kokeilun jälkeen on tehty parannuksia ja uusia ominaisuuksia MathCheck-ohjelmistoon palautteiden ja käyttäjäkokemusten perusteella. Mainittua ohjelmaa on käytetty myös pienimuotoisesti osana muita kursseja, mutta niistä ei ole kerätty MathCheckin osalta virallista aineistoa.

Edellä kuvattujen tutkimuksien lisäksi Tampereen teknillisessä yliopistossa on tutkittu sähköisiä oppimateriaaleja ja tehtäviä. Seuraavaksi lyhyt katsaus näistä tutkimuksista viime vuosilta.

Syksyllä 2015 Tampereen teknillisessä yliopistossa pilotoitiin sähköinen oppimateriaali, jonka tavoitteena oli perehdyttää uudet opiskelijat MATLAB-ohjelmiston [3] perustoimintoihin. Sähköinen oppimateriaali koostui automaattisesti itsensä tarkastavista STACK-tehtävistä, opetusvideoista sekä ohjetiedostoista. Opetuskokeilu onnistui pääosin hyvin, sillä suurin osa noin 700 opiskelijasta läpäisi alkeet ja sähköinen oppimateriaali koettiin käyttökelpoiseksi. [29].

Ari-Mikko Mäkelän diplomityössä (2016) tutkittiin ensimmäisen vuoden matematiikan opiskelijoiden kokemuksia STACK- tehtävien ja vertaisarvioinnin vaikutuksista matematiikan oppimiseen. Tutkimuksen tulosten perusteella opiskelijat suhtautuivat STACK -tehtäviin positiivisesti ja pitivät erityisesti välittömästä sähköisestä palautteesta. Vertaisarvioinnin koettiin edesauttavan syvällisempää oppimista. [23]

Miika Huhtasen diplomityössä (2017) kehitettiin opetusmoduuli, jossa yhdistettiin matriisilaskennan opetus MATLABin opetukseen. Moduuli sisälsi ohjetekstejä, opetusvideoita ja vuorovaikutteisia opetusohjelmia. Tutkimuksessa havaittiin, että opetusmoduuli motivoi opiskelijoita ja syvensi heidän osaamistaan matriisilaskennasta. [17]

Sähköisillä oppimisalustoilla on käytetty uusia tehtävätyyppejä, joita voi myös käyttää perinteisinä paperiversioina. Näitä tehtäviä kehittävät diplomitöissään Hanna Sarikka (2014) ja Juuso Linnusmäki (2015). Mainituissa tutkimuksissa kehitettiin ja kokeiltiin noin kymmentä uutta tehtävätyyppiä. Tehtävien tarkoituksena oli muun muassa harjoitella todistustehtävien ratkaisua uusilla tavoilla. Tehtävät koettiin pääsääntöisesti onnistuneeksi. [33] [21]

Sähköisiä oppimisalustoja on tutkittu muissakin yliopistoissa sekä Suomessa että ulkomailla, mutta tämän tutkimuksen kannalta keskeisessä asemassa ovat Tampereen teknillisessä yliopistossa tehdyt tutkimukset. Tämä tutkimus rakentuu edellisten tutkimusten jatkoksi.

2. KEHITTÄMISKOHTEENA VERKKO-OPETUS

Verkkoympäristössä tapahtuva matematiikan opetus Suomessa on alkanut 1990-luvulla informaatioteknologian nopean kasvun johdosta. Jo silloin on ollut selvää, että moderni teknologia avaa uudenlaisia mahdollisuuksia matematiikan opetuksen kehitykseen esimerkiksi matematiikan oppimateriaalien luomisessa ja simulaatioissa. [34] Ensimmäisiä verkko-opetuksen projekteja Suomessa oli MatTa- projekti (Matematiikkaa Tietokone-avusteisesti). Projektissa tutkittiin ja arvioitiin erilaisten digitaalisten opiskelumateriaalien ja kokonaisuuksien toimivuutta. Projekti lopulta yhdistyi Suomen virtuaaliyliopisto -projektiin, joka lakkautettiin 2010. [4] Seuraavaksi esitellään kehittämistutkimuksen lähtökohtia ja tarkastellaan verkkoa oppimisympäristönä. Verkko-opetus on tässä tutkimuksessa osana sulautuvaa oppimista, jota käsitellään luvussa 2.3. Näiden lisäksi kuvataan matemaattinen osaaminen (luku 2.4) ja MathCheck-ohjelmiston rakennetta ja toimintaa (luku 2.5).

2.1 Kehittämistutkimus

Tutkimusmenetelmänä kehittämistutkimus on suhteellisen nuori. Ensimmäiset kansainväliset tutkimusjulkaisut on julkaistu vasta 1990-luvun alussa. Suomessa mainittu tutkimusmenetelmä yleistyi ainedidaktiikan tutkimuksissa 2000-luvulla. Englanninkielisessä kirjallisuudessa termiksi on vakiintunut *design-based research* tai *design research*. Kehittämistutkimus on osaltaan vastaus opetuksen tutkimuksen kritiikkiin siitä, että tutkimuksien tulokset eivät ole siirrettävissä suoraan käytäntöön. Sen sijaan kehittämistutkimus lähtee liikkeelle käytännöstä nousevien ongelmien ratkaisemiseksi. [18, s. 157 – 158] [20]

Kehittämistutkimukselle on ominaista, että se on sijoitettu todelliseen koulutuskontekstiin. Sen tarkoitus on merkittävän intervention kehittäminen ja testaaminen ja se käyttää monimuotoisia tutkimusmenetelmiä (*mixed methods*). Kehittämistutkimus sisältää useita kokeilusyklejä ja se sisältää yhteistyötä tutkijoiden ja toimijoiden välillä. Lisäksi mainittu tutkimusmetodi sisältää kehittämisperiaatteiden arvioinnin ja kehittämistyön käytäntöön soveltamisen. [8]

Kehittämistutkimukselle ei ole yksiselitteistä määritelmää, vaan kyseistä tutkimusmenetelmää voidaan tarkastella useammasta eri näkökulmasta. Kehittämistutkimuksen keskeisiä piirteitä ovat tutkimuslähtöisyys, systemaattinen dokumentointi, formatiivinen arviointi ja yleistäminen. Kehittämistyö perustuu aiempaan tutkimukseen ja tutkija dokumentoi tutkimuksen vaiheet siten, että ne ovat avoimia julkiselle keskustelulle. Formatiivisella arvioinnilla tunnistetaan design-prosessin vaiheiden puutteita ja voidaan muokata suunnitelmaa vastaamaan paremmin tutkimuksen tavoitteita. Yleistämisen yhteydessä tutkijan tehtävä on löytää ne konteksti, joihin tämäkin sopii. Kehittämistutkimus rakentuu aina kolmen kysymyksen ympärille: [11] [7]

1. Miten kehittämisessä edetään?
2. Mitä tarpeita ja mahdollisuuksia kehittämisellä on?
3. Millaiseen tuotokseen kehittäminen johtaa?

Näiden kysymysten avulla luodaan kehittämistutkimuksen sykli, joka ohjaa tutkimuksen etenemistä. Kehittämistutkimus etenee kolmessa eri vaiheessa. Ensimmäinen vaihe on ongelma-analyysi, missä selvitetään kehitettävän kohteen tarpeet, uhat ja mahdollisuudet. Kehittäminen lähtee liikkeelle käytännössä koetusta ongelmasta. Kehittämistutkimuksen tavoitteet selkiytyvät ja kehittämissuunnitelma on mahdollista luoda, kun tarpeet on selvitetty ja on tutustuttu aiheeseen liittyvään tutkimuskirjallisuuteen. Toisena vaiheena on käytännön toteutus eli kehittämisprosessi, joka koostuu kehittämissykleistä. Kehittämissykli koostuu kehittämis-, arviointi- ja raportointivaiheista. Siis ongelma-analyysin jälkeen laaditaan kehittämiskohteesta ensimmäinen versio, jota testataan ja arvioidaan käytännössä. Saadun palautteen jälkeen sitä kehitetään edelleen iteratiivisesti kohti sille asetettuja tavoitteita. Kun asetut tavoitteet on saavutettu, saadaan valmis kehittämistuotos. [30]

Kehittämistutkimus on luonteeltaan hyvin joustava, sillä se hyödyntää tutkimukseen osallistuvia henkilöitä kehittämisprosessissa ja muokkaa kehittämissuunnitelmaa uusien tarpeiden ja tavoitteiden mukaisesti. Nämä vaiheet saattavat toteutua kehittämistutkimuksessa joko isoina vaiheina, tai kehittämissyklejä saatetaan toteuttaa useampia tutkimuksen aikana.

Kehittämistutkimusta määrittävät seuraavat tekijät:

1. Kehittämisprosessi on luonteeltaan iteratiivinen.
2. Kehitetään artefakteja joiden avulla opettaja voi helpommin toimia älykkäästi tavoitteiden suunnasta.
3. Tuotetaan uutta tietoa opetus, opiskelu, oppiminen -prosesseista. [18, s. 166]

Edelsonin (2002) mukaan kehittämistutkimus tuottaa normatiivista tietoa itse menestyksekkään kehittämistutkimuksen piirteistä ja didaktisen kehittämiskohteen piirteistä sekä kuvailevaa tietoa opetus-opiskelu-oppimis -prosesseista. Kehittämistutkimuksen avulla voidaan laatia matematiikan opetukseen didaktinen malli. [20]

Edelson (2002) esittää kolme syytä, miksi kehittämistutkimusta on hyvä soveltaa opetuksen tutkimukseen:

1. Tarjoaa hyviä soveltamismahdollisuuksia teorioiden ja menetelmien kehittämiseen, koska kehittämistutkimus toteutetaan todellisissa olosuhteissa, niin tutkimuksen mahdolliset ristiriitaisuudet havaitaan nopeasti.
2. Saatujen hyödyllisten tulosten avulla tuotettu oppimateriaali on heti opettajien käytettävissä.
3. Tutkijat kehittävät käytännön kasvatustyötä ja siten heidän tuloksillaan on suoria vaikutusmahdollisuuksia käytäntöön. [11]

Kehittämistutkimusta on kritisoitu tutkimuksen luotettavuudesta ja yhtenäisten tutkimuskäytänteiden puutteesta. Pitkien tutkimusprojektien hallitseminen voi myös osoittautua haasteelliseksi tehtäväksi [30]. Edelsonin (2002) mukaan kehittämistutkimuksen luotettavuutta ei voida arvioida perinteisin menetelmin. Hän korostaa kahta näkökulmaa luotettavuuden arviointiin: uutuusarvoa ja hyödyllisyyttä. [11]

2.2 Verkko oppimisympäristönä

Oppimisympäristöllä tarkoitetaan kokonaisuutta, johon kuuluu opiskelun ja oppimisen henkiset, fyysiset ja oppimateriaalimuotoiset puitteet ja edellytykset sekä oppimista tukevia aktiviteetteja [28]. Oppimisympäristöllä on suuri vaikutus opiskelijan oppimiseen ja motivaatioon. Verkon suuri informaatiomäärä sekä lukuisat simulaatiot ja mediat saattavat tehdä oppimisympäristöstä opiskelijalle epämukavan ja sekavan. Siksi oppimisympäristöjen suunnittelu tulee tehdä huolellisesti, jotta oppiminen ja opiskelu olisivat mahdollisimman linjakasta ja mielekästä. Tällainen opetus ohjaa opiskelijoita opiskelemaan syväsuuntautuneemmin.

Linjakas opetus pyrkii siihen, että kaikki opetuksen ja oppimisympäristön osatekijät muodostavat johdonmukaisen kokonaisuuden ja tukevat toisiaan. Linjakkaassa opetuksessa lähdetään rakentamaan oppimisympäristöä tavoitteista käsin ja pyritään konstruktivistiseen oppimismalliin, jossa opiskelijat rakentavat itse tietoa aktiivisesti. [22] Tätä pyrkimystä tukevat verkkoalustojen monipuoliset mahdollisuudet ja tehtäväympäristöt, jotka mahdollistavat interaktiivisen toiminnan.

Mielekkäässä oppimisessa opiskelija on sitoutunut oppimiseen ja ottaa itse vastuuta opiskelustaan. Nevgi ja Tirri ovat tutkineet mielekästä oppimista verkossa ja he ovat listanneet kriteerejä miten niitä voi hyödyntää verkossa. Näiksi kriteereiksi he ovat luetelleet aktiivisuuden, intentionaalisuuden, konstruktiivisuuden, kollaboratiivisuuden, kontekstuaalisuuden, keskustelevuuden, reflektiivisyyden ja siirtovaikutteen. Verkko-opiskelu tarjoaa hyvän alustan kaikkien näiden kriteerien toteuttamiselle. [26]

Verkko oppimisympäristönä luo haasteita niin opiskelijalle kuin opettajallekin. Verkossa on useita eri alustoja, mille voi luoda oppimisympäristöjä. Tämä tuottaa pohdittavaa opettajalle, joka yrittää löytää omiin tarkoituksiinsa sopivan verkkoalustan. Useat verkkoalustat ovat haaste opiskelijalle, sillä pahimmillaan opiskelijalla menee runsaasti aikaa jokaisen kurssin alustan käytön opetteluun. Tämä vie aikaa varsinaiselta opiskelulta ja saattaa tuntua opiskelijasta raskaalta.

2.3 Sulautuva oppiminen

Nykyään lähes kaikilla yliopistokursseilla on sähköinen oppimisalusta, joka sisältää informaatio- ja viestintäsovelluksia. Nämä sovellukset mahdollistavat vuorovaikutuksen opiskelijan, kurssin muiden osallistujien, henkilökunnan ja opiskeltavien asioiden välillä. Perinteisen kontaktiopetuksen ja verkko-opetuksen yhdistelmää voidaan kutsua sulautuvaksi oppimiseksi *(blended learning)*. Garrison ja Vaughan (2008) kuvaavat sulautuvan oppimisen käsitteen käytännölliseksi yhdistelmäksi kontaktiopetusta ja verkko-opetusta, joista molempien osuudet opetuksessa on harkittu ja valittu huolella. [12]

Kontaktiopetuksen ja verkko-opetuksen määrien suhde ei ole kaikilla kursseilla vakio, vaan riippuu muun muassa opetettavasta sisällöstä. Sulautuvan oppimisen ympäristöt voidaan jakaa kolmeen luokkaan: 1. kontaktiopetus on vallitseva, 2. sähköinen opetus on pääosassa sekä 3. molemmat ovat lähes yhtä suuressa osassa. Yliopisto-opetuksessa esiintyvät kaikki edellä mainitut luokat.

Sulautuvalla oppimisella on todettu seuraavat hyödyt verrattuna perinteiseen kontaktiopetus [13]:

1. Tehokkaampi pedagogiikka
2. Lisääntynyt saavutettavuus ja joustavuus
3. Lisääntynyt kustannustehokkuus

Sulautuvan oppimisen keskeinen tarkoitus on lisätä opiskelijoiden omaa ajattelua ja keskinäistä vuorovaikutusta ajasta ja paikasta riippumatta. Lisäksi sulautuvan oppimisen ympäristö parantaa opiskelijoiden sitoutumista opiskeluunsa, sillä opiskelija voi vaikuttaa omaan opiskelutahtiinsa ja opiskelupolkunsa rakentamiseen. [36]

Sulautuva oppimista on määritelty myös muiden lähestymistapojen kautta. Draffan ja Raingerin (2006) mukaan sulautuvassa oppimisessa yhdistetään tehokkaasti erilaisia esitystapoja ja opetusmenetelmiä ja näihin liittyy avoin kommunikaatio kaikkien osallistujien kesken. Opetusta suunniteltaessa on otettava huomioon opiskelijoiden asenteet ja aikaisemmat tiedot, jotta voidaan saavuttaa asetetut tavoitteet. [10]

Sulautuvan oppimisen haasteita ovat muun muassa vuorovaikutuksen rooli kontaktiopetuksessa, opiskelijan omatoimisuuden määrä ja opiskelijalle tarjottavan tuen määrä ja laatu. Kursseilla, joissa käytetään sulautuvan oppimisen ympäristöjä, opiskelijat arvostavat ja korostavat kontaktiopetusta enemmän kuin verkko-opetusta. [13] Haasteita oppimiselle voivat aiheuttaa puutteet opiskelijan taidoissa (motorisissa, auditiivisissa, visuaalisissa, kielellisissä tai oppimisen taidoissa) ja omat uskomukset hyvästä vuorovaikutuksesta ja oppimisympäristöstä. [10]

Graham (2006) näkemyksen mukaan aikaisemmin kontaktiopetus ja verkko-opetus olivat täysin erillisiä, mutta nykyisin ne ovat yhdistyneet sulautuvan oppimisen ympäristössä yhtä vahvoina opetusmuotoina. Sulautuvassa oppimisessa tulevaisuudessa verkko-opetus suhteessa kontaktiopetukseen tulee kasvamaan merkittävästi. [13]

2.4 Matemaattinen osaaminen

Matemaattista osaamista *(mathematical proficiency)* voidaan esittää viidellä piirteellä, joilla kuvaataan matematiikan monipuolista hallintaa. Matemaattinen osaaminen koostuu seuraavista piirteistä [19]:

1. Käsitteellinen ymmärtäminen *(conseptual understanding)*. Opiskelija ymmärtää matemaattiset operaatiot ja matemaattiset käsitteet sekä niiden väliset suhteet.

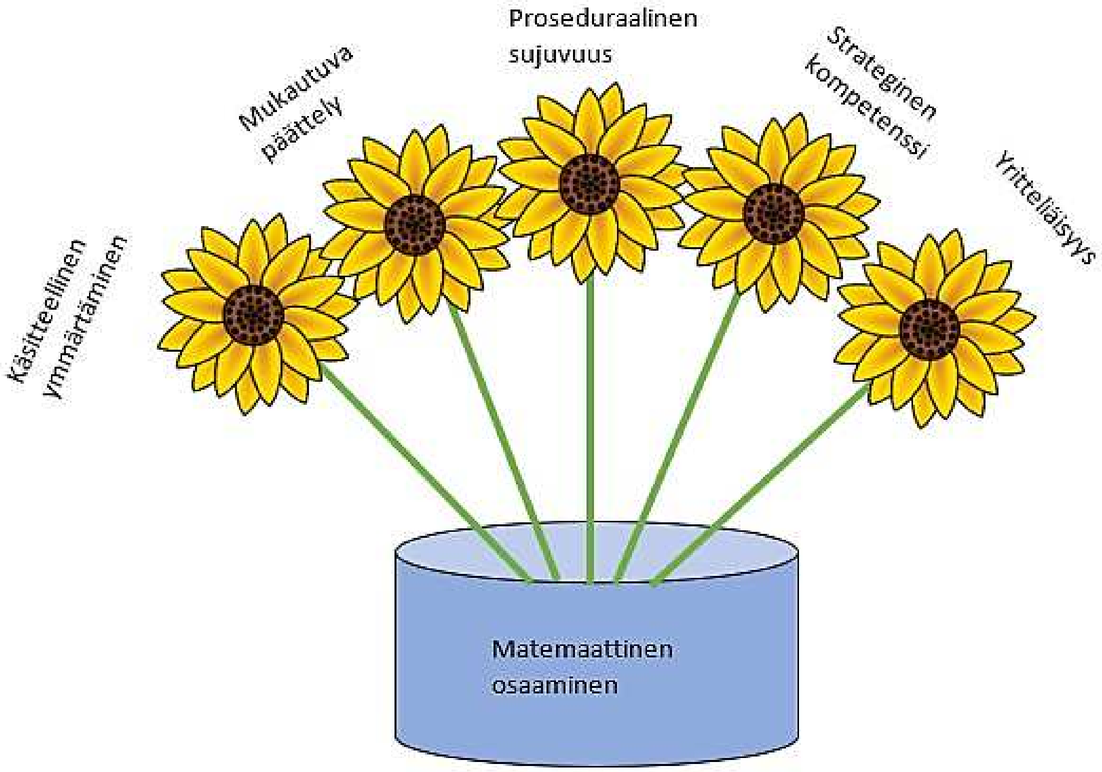
2. Mukautuva päättely *(adaptive reasoning)*. Opiskelija ratkaisee tehtäviä, joiden konteksti on tuttu. Opiskelijalla on riittävä tietopohja tehtävän ratkaisemiseksi.

3. Proseduraalinen sujuvuus *(procedural fluency)*. Opiskelija käyttää proseduureja sujuvasti ja tarkoituksenmukaisesti.

4. Strateginen kompetenssi *(strategic competence)*. Opiskelija osaa muodostaa matemaattisia ongelmia ja ratkaista ne (ongelmanratkaisutaito).

5. Yritteliäisyys *(productive disposition)*. Opiskelija näkee matematiikan hyödyllisenä ja arvokkaana sekä uskoo itseensä matematiikan osaajana.

Edellä kuvatut matemaattisen osaamisen piirteet ovat kuitenkin toisiinsa kietoutuneita ja toisistaan riippuvia (Kuva 2.1), mutta tunnistettavissa myös erillisinä. Kun arvioidaan opiskelijan matemaattista osaamista, niin voidaan usein tunnistaa kaksi tai useampi piirre. Neljä ensiksi mainittua piirrettä kuvaavat tiedollista osaamista ja viimeinen piirre kuvaa minäpystyvyyttä sekä matematiikkakuvaa.



Kuva 2.1 *Toisistaan eroteltavat piirteet, jotka yhdessä muodostavat matemaattisen osaamisen kimpun. [19]*

2.5 MathCheck-ohjelmisto

Tampereen teknillisessä yliopistossa MathCheck-ohjelmistoa on kehittänyt professori Antti Valmari. Kyseinen ohjelmisto tarkastaa siihen syötetyn lausekkeiden loogisen yhtäpitävyyden ja sillä voidaan kirjoittaa lausekkeiden sievennyksiä, manipulointia tai yhtälön ratkaisua kaikkine välivaiheineen. Ohjelmisto tarkastaa jokaisen välivaiheen ja kertoo mahdollisen virheen paikan. Saatuaan syötteen MathCheck-ohjelmisto käy lausekkeen läpi ensin todistuskoneella *(proof engine)*. Jos se pystyy todistamaan lauseen täydellisesti, niin se näyttää palautteessa vihreällä värillä lausekkeessa käytetyn yhtäsuuruus(=) -ja/tai erisuuruusmerkin (<,>,≠). Mikäli ohjelmisto ei pysty todistamaan lauseketta täydellisesti, se alkaa etsiä vastaesimerkkiä. Jos vastaesimerkki löytyy, niin se muuttaa välimerkin punaiseksi siinä kohdassa, jossa vastaesimerkki löytyy ja ilmoittaa sen. Jos vastaesimerkkiä ei löydy, niin MathCheck ilmoittaa ettei löydä virhettä, mutta ei voi olla täysin varma lausekkeen oikeellisuudesta ja maalaa merkin mustaksi. Ohjelmisto siis pystyy ilmaisemaan missä välivaiheessa virhe tapahtuu, mutta se ei ilmoita mikä virhe on. Tällöin opiskelijan täytyy itse reflektoida omaa vastaustaan. [35]

MathCheck-ohjelmisto on kaikkien vapaasti käytettävissä oleva ohjelmisto tehtävien tarkastamiseen ilman rajoituksia. Kun vastausta ei kerrota suoraan, niin opiskelijat joutuvat reflektoinnin kautta konstruoimaan itse tietoa. Näin MathCheck on konstruktivistinen oppimisympäristö, joka on yksi mielekkään verkko-opiskelun kriteereistä (vertaa luku 2.2). Edellä kuvattu toiminta-ajatus on erilainen kuin mitä muilla markkinoilla tarjolla olevilla matemaattisilla ohjelmistoilla on tarjota. Esimerkiksi Wolfram Alpha [6] tukee enemmän behavioristista oppimista, jonka periaatteena on keskittyä vain oikeisiin vastauksiin ja ohittaa nopeasti väärät vastaukset. MathCheck-ohjelmisto haluaa kiinnittää huomiota virheisiin ja laittaa opiskelijat itse korjaamaan ne. Virheet ovat voineet olla esimerkiksi ajatusvirheitä tai huolimattomuusvirheitä, jolloin niidenkin korjaaminen on hyödyllistä, sillä matematiikka vaati huolellisuutta. [35]

MathCheck-ohjelmisto toimii myös opettajan apuvälineenä kurssisisältöjä suunniteltaessa. Opettajat pystyvät luomaan sen avulla sähköiselle oppimisalustalle omia tehtäviään, joita opiskelijat pystyvät tekemään linkin kautta. Opiskelijat voivat lähettää opettajalle HTML-sivun koodin jossa on kaikki tehtävän tiedot sekä MathCheckin antama palaute. Ohjelmistolla voidaan rakentaa kokonaisia oppimismoduuleita. Tällöin voidaan luoda sivuja, jotka sisältävät teoriaa sekä tehtäviä, ja seuraavalle sivulle pääsee vasta kun on saanut edellisen sivun tehtävät oikein. [35]

Ohjelmistolla voidaan tällä hetkellä tarkastaa eri tyyppisiä tehtäviä. Se pystyy tarkastamaan aritmeettisen matematiikan vertailuketjuja (sisältää esimerkiksi logaritmeja, sinin ja kosinin, derivaatat, itseisarvot), logiikan lausekkeita, yhtälön ratkaisuja, sievennyksiä eri kunnissa, puulausekkeita sekä predikaattilogiikkaa. Ohjelmisto pystyy siis tarkastamaan useita tehtävätyyppejä. MathCheck-ohjelmisto vaatii myös opiskelijaa kertomaan ratkaisussaan määrittelyjoukot, tai muuten ohjelmisto ilmaisee virheen. Tarkemmin MathCheckin toimintalaajuudesta ja eri tehtävälajeista voit lukea MathCheckin kotisivuilta [2].

MathCheck-ohjelmistolla on paljon hyviä ominaisuuksia, mutta joitain puutteitakin löytyy. Opettajan antamiin tehtäviin ei välttämättä tule haluttua vastausta, sillä ohjelmisto tarkistaa vain välivaiheiden oikeellisuuden, mutta ei sitä onko tehtävän kysymykseen vastattu. Esimerkiksi jos opiskelijan tehtävä on sieventää lauseke, niin hän voi saada ohjelmistolta palautteen ettei virheitä ole, vaikka tehtävä ei olisikaan valmis. Lisäksi on pohdittu tarvitaanko muutosta tekstimuotoiseen syötteeseen. Uusille opiskelijoille matematiikan tekstimuotoinen syöttäminen on vielä uutta ja hankalaa. Tosin tähän saattaa tulla muutos, kun matematiikan ylioppilaskirjoitukset siirtyvät sähköisiksi 2019. Työelämässä ja muillakin yliopiston kursseilla tekstimuotoiseen syöttämiseen tulee tutustua, joten välitöntä muutostarvetta ohjelmistossa ei ole. [2]

3. PROPOSITIOLOGIIKKA

Tässä luvussa esitellään propositiologiikan perusteita, joihin tämän työn opetusmoduulin sisältö perustuu. Seuraava esitys on sisällöltään laajempi kuin opetusmoduulissa käytetty, ja tämä esitys perustuu pääosin seuraavaan kirjallisuuteen: Grassman, W.K. Trembley, Jean Paul: *Logic and Discrete mathematics* [14], Hirvonen, Åsa: *Johdatus logiikkaan 1* [16] ja Miettinen, Seppo: *Logiikan peruskurssi* [25].

3.1 Perusteet

Logiikka voidaan määritellä olevan formaalisten kielten eli logiikkojen teoriaa. Tällä halutaan osoittaa ero formaalien ja luonnollisten kielten välille. Formaali kieli voidaan jakaa syntaksiin (kielioppiin) ja semantiikkaan (merkitysteoriaan). Jokaisen logiikan syntaksissa määritellään sen aakkosto ja lauseenmuodostussäännöt sekä semantiikassa määritellään mallit, tulkintafunktio ja totuusmääritelmä. Mallit muodostuvat mahdollisista maailmoista, tulkintafunktiot määräävät kielen nimeävien symbolien tulkinnat malleissa ja totuusmääritelmät kuvaavat miten kieliopilliset määritelmät toimivat. [25]

Propositiologiikassa käsitellään väitteitä. Propositio on jokin väite, joka on joko totta tai epätotta. Esimerkiksi propositio *"ulkona tuulee"* on joko totta tai epätotta, sillä jompikumpi tila on voimassa. Propositiologiikassa huomioidaan vain nämä kaksi tilaa, ja sitä kutsutaan dikotomiaksi. [14]

Määritelmä 1. Propositioksi *kutsutaan mitä tahansa väitettä, joka on joko totta tai epätotta.*

Propositiologiikan aakkosto muodostuu propositiosymboleista, lausekonnektiiveista ja sulkumerkeistä. Propositiosymbolit nimeävät asiantiloja ja lausekonnektiivit ovat kieliopillisia operaattoreita. [16] Propositiolauseeksi kutsutaan myös propositiosymboleiden yhdistelmää (molekulaarinen lause), kuten esimerkiksi *"ulkona tuulee tai* *ulkona ei tuule".* Molekulaarisessa lauseessa propositiosymboleita yhdistää aina yksi tai useampi looginen konnektiivi. Yksittäistä propositiolausetta ilmaistaan yleensä jollain kirjaimella, esimerkiksi P, Q tai R. [14]

Määritelmä 2. Propositiolauseet *ovat äärellisiä propositiosymboleista* ($p_0, p_1, \ldots$)*, konnektiiveista* ($\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$) *ja sulkumerkeistä "("ja ")" muodostettuja merkkijonoja, jotka on muodostettu seuraavien sääntöjen mukaan: 1. Propositiosymbolit* $p_0, p_1, \ldots$ *ovat propositiolauseita 2. Jos* P *ja* Q *ovat propositiolauseita, niin myös merkkijonot* $\neg P, (P \wedge Q), (P \vee Q), (P \rightarrow Q), (P \leftrightarrow Q)$ *ovat propositiolauseita.*

Tarkastellaan seuraavaksi yksityiskohtaisemmin edellä esitettyjä konnektiiveja. Luonnollisen kielen ilmaisua "ei" vastaa *negaatio*: proposition P negaatio on $\neg P$ (lausutaan "ei P"). Lause $\neg P$ on tosi, jos P on epätosi ja $\neg P$ on epätosi, jos P on tosi. [14]

Seuraavat konnektiivit yhdistävät kaksi propositiota. Konjunktio vastaa luonnollisen kielen ilmaisua "ja". Propositiolausetta $P \wedge Q$ (lausutaan P ja Q) kutsutaan propositioiden P ja Q konjunktioksi. Lause $P \wedge Q$ on tosi jos ja vain jos molemmat P ja Q ovat tosia. [14]

Disjunktio vastaa luonnollisen kielen ilmaisua "tai", jota käytetään luonnollisessa kielessä kahdessa eri merkityksessä. Ne ovat sisältävä (inklusiivinen) tai poissulkeva (eksklusiivinen) merkitys. Sisältävässä merkityksessä ilmaistaan esimerkiksi "vähintään toinen lauseista P tai Q on tosi" ja poissulkevassa merkityksessä esimerkiksi "joko P tai Q". Logiikassa käytetään "tai" sanaa sisältävässä merkityksessä. [25] Lausetta $P \vee Q$ kutsutaan propositioiden P ja Q disjunktioksi (lausutaan P tai Q). Lause $P \vee Q$ on epätosi jos ja voin jos molemmat propositiot P ja Q ovat epätosia. Jos jompikumpi propositioista P tai Q on tosi, niin $P \vee Q$ on tosi. [14]

Luonnollisessa kielessä ilmaisua "jos P niin Q" käytetään useassa eri merkityksessä. Usein tarkoitetaan, että P on väitteen Q syy tai Q on jotenkin riippuvainen väitteestä P. Logiikassa ei ole tällaista syy-seuraus suhdetta, sillä väitteillä P ja Q ei tarvitse olla mitään sisällöllistä tekemistä keskenään. Sama toteamus on logiikassa voimassa myös luonnollisen kielen ilmaisuille "P jos ja vain jos Q" ja "P on yhtäpitävä väitteen Q kanssa". Lausetta $P \rightarrow Q$ (lausutaan "jos P niin Q") kutsutaan propositioiden P ja Q implikaatioksi. Lause $P \rightarrow Q$ on epätosi, jos propositio P on tosi ja propositio Q epätosi. Muulloin lause $P \rightarrow Q$ on tosi. [14]

Lausetta $P \leftrightarrow Q$ (lausutaan "P jos ja vain jos Q") kutsutaan propositioiden P

ja Q ekvivalenssiksi. Lause $P \leftrightarrow Q$ on tosi, jos propositioilla P ja Q on sama totuusarvo. Yhdistämällä ylläolevia konnektiiveja pystytään luomaan monenlaisia molekulaarisia lauseita.

Kaikki konnektiivit eivät ole yhdenveroisia, vaan niitä käsitellään sovitussa järjestyksessä. Järjestys ensin käsiteltävästä viimeiseen on: negaatio, konjunktio, disjunktio, implikaatio ja ekvivalenssi. Järjestystä noudattamalla pystytään sulkujen määrää vähentämään lausekkeissa. Muuten sulut vaihtavat evaluointijärjestystä suluille ominaiselle tavalla. [14]

3.2 Totuustaulut

Propositiologiikassa totuusarvoa *“ tosi”* ilmaistaan numerolla 1 ja *“epätotta”* totuusarvoa numerolla 0. *Totuusjakauma* voidaan määritellä funktiona:

$$v : \{p_n : n \in \mathbb{N}\} \mapsto \{0, 1\} \tag{3.1}$$

Funktion v määrittelyjoukko on luonnolliset luvut ja arvojoukko muodostuu alkioista $\{0,1\}$. Totuusjakauma v antaa propositiosymboleille p_n totuusarvon 0 tai 1. [16] Seuraavaksi voidaan määritellä propositiolauseen totuusarvo.

Määritelmä 3. *Olkoon P propositiolause ja olkoon v totuusjakauma. Totuusjakaumat $v(Q)$ ja $v(R)$ on määritelty. Propositiolauseen P totuusarvo $v(P)$ määritellään seuraavien sääntöjen mukaan*

1. *Jos P on propositiosymboli p_n, niin*

$$v(P) = \begin{cases} 0 & , \textit{jos } v(P) = 0 \\ 1 & , \textit{jos } v(P) = 1 \end{cases}$$

2. *Jos P on $\neg Q$, niin*

$$v(P) = \begin{cases} 0 & , \textit{jos } v(Q) = 1 \\ 1 & , \textit{jos } v(Q) = 0 \end{cases}$$

3. *Jos P on $(Q \wedge R)$, niin*

$$v(P) = \begin{cases} 1 & , \textit{jos } v(Q) = v(R) = 1 \\ 0 & , \textit{muulloin.} \end{cases}$$

4. Jos P on (Q ∨ R), niin

$$v(P) = \begin{cases} 0 & , \textit{jos } v(Q) = v(R) = 0 \\ 1 & , \textit{muulloin.} \end{cases}$$

5. Jos P on (Q → R), niin

$$v(P) = \begin{cases} 0 & , \textit{jos } v(Q) = 1 \textit{ ja } v(R) = 0 \\ 1 & , \textit{muulloin.} \end{cases}$$

6. Jos P on (Q ↔ R), niin

$$v(P) = \begin{cases} 1 & , \textit{jos } v(Q) = v(R) \\ 0 & , \textit{muulloin.} \end{cases}$$

[16]

Molekulaarisissa lauseissa totuusarvon löytäminen saattaa olla monimutkaista. Tällöin käytetään apuna totuustaulua, jossa taulukoidaan propositiosymboleiden kaikki eri totuusarvoyhdistelmät. Niiden avulla saadaan selville molekulaarisen lauseen totuusarvo. Seuraava esimerkki Taulukossa 3.1 havainnollistaa tätä.

Taulukko 3.1 *Propositiolauseen* $(\neg(p_0 \wedge p_1) \leftrightarrow (\neg p_0 \vee \neg p_1))$ *totuustaulu.*

p_0	p_1	$p_0 \wedge p_1$	$\neg(p_0 \wedge p_1)$	$\neg p_0$	$\neg p_1$	$\neg p_0 \vee \neg p_1$	$\neg(p_0 \wedge p_1) \leftrightarrow (\neg p_0 \vee \neg p_1)$
1	1	1	0	0	0	0	1
1	0	0	1	0	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1	1
0	0	0	1	1	1	1	1

Edellisessä esimerkissä todettiin, että annettu propositiolause on tosi kaikilla p_0 ja p_1 totuusarvoilla. Tällöin voidaan määritellä, että propositiolause P on *tautologia*, jos se on tosi kaikilla mahdollisilla totuusarvoyhdistelmillä. Toisin sanoen $v(P) = 1$ kaikilla totuusjakaumilla v. Tautologioita on helppo tutkia totuustaulujen avulla. Mikäli tutkittavan lauseen totuustauluun jokaiseen riviin tulee 1 niin silloin lause on tautologia. Tautologiat ovat tärkeitä logiikassa, koska tautologioiden avulla voidaan löytää annetun propositiolauseen kanssa loogisesti ekvivalentteja lauseita, jotka ovat sovellettavissa helpommin uuteen tilanteeseen. [16] [9].

Kaksi propositiota P ja Q ovat *loogisesti ekvivalentit* ($P \Leftrightarrow Q$), jos $v(P) = v(Q)$ kaikilla totuusjakaumilla v (eli jos $P \leftrightarrow Q$ on tautologia). Propositio Q on propositio P *looginen implikaatio* ($P \Rightarrow Q$), jos $v(Q) = 1$ aina kun $v(P) = 1$ (eli jos $P \rightarrow Q$ on tautologia). [16]

Jos propositio P on epätosi kaikilla mahdollisilla yhdistelmillä, niin se on *kontradiktio*. Sekä tautologioissa että kontradiktioissa on sallittua korvata mikä tahansa propositiomuuttuja propositiosymbolilla tai molekulaarisella lauseella, joka on vastaavasti tautologia tai kontradiktio. Propositiolause, joka ei ole tautologia eikä kontradiktio, kutsutaan *kontingenssiksi*. Kontingenssilause on joillakin totuusjakaumilla tosi ja muilla epätosi.

Propositiolause on *toteutuva*, jos se on tosi jollakin totuusarvolla. Tautologia ja kontingenssit ovat toteutuvia. Propositiolause on *kumoutuva*, jos se on epätosi jollakin totuusarvolla. Kontingenssit ja kontradiktio ovat kumoutuvia. Totuustaulun avulla voidaan selvittää kumpaan edellä esitettyyn kategoriaan (toteutuva vai kumoutuva) annettu propositiolause kuuluu. Jos lauseessa on n propositiosymbolia, niin totuustauluun tulee 2^n riviä. Toisin sanoen, propositiosymbolien määrän kasvaessa, taulukoiden laatimisesta tulee työlästä. Seuraavaksi tutkitaan voidaanko mielivaltaiselle totuustaululle muodostaa propositiolause. [16]

3.3 Totuusfunktiot

Totuusfunktio on funktio

$$f : \{0,1\}^n \mapsto \{0,1\}, (n \in \mathbb{N}). \tag{3.2}$$

Totuusfunktiot ovat yleistys tavallisille konnektiiveille ($\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$). Esimerkiksi kaksipaikkaisia totuusfunktioita on kuusitoista kappaletta, jotka sisältävät muun muassa edellä mainitut konnekiivit.

Määritelmä 4. *Propositiolauseen P, joka on muodostettu propositiosymboleista $p_0, \ldots, p_{n-1}$, n-paikkainen totuusfunktio $f_P : \{0,1\}^n \mapsto \{0,1\}, (n \in \mathbb{N})$ määritellään $f_P(x_0, \ldots, x_{n-1}) = v(P)$, missä*

$$v(P) = \begin{cases} x_i & \text{, jos } i < n, \\ 1 & \text{, muulloin.} \end{cases}$$

Seuraavaksi osoitetaan, että jokaista n-paikkaista totuusfunktiota f kohti voidaan löytää sellainen propositiolause P, että $f_P = f$ [16]

Lause 1. *Jos f on n-paikkainen totuusfunktio ($n \geq 1$), niin voidaan konstruoida propositiolause P, jossa esiintyy vain propositiosymboleja $p_0, \ldots, p_{n-1}$ ja konnektiiveja $\neg, \wedge$ ja $\vee$. Tällöin on $f_P = f$.*

Todistus.
Olkoon f n-paikkainen totuusfunktio ($n \geq 1$).
(1) Jos $f(x_0, \ldots, x_{n-1}) = 0$, $\forall (x_0, \ldots, x_{n-1}) \in \{0, 1\}$, niin voidaan valita propositiolauseeksi $P = P_0 \wedge \neg P_0$. Tämä on toisin sanoen epätosi.

(2) Jos f saa arvon 1, ainakin yhdellä n -jonolla $(x_0, \ldots, x_{n-1})$, niin voidaan määritellä jokaista n-jonoa $\overline{x} = x_0, \ldots, x_{n-1} \in \{0, 1\}^n$ kohti propositiolause
$P_{\overline{x}} = (q_0 \wedge \ldots \wedge q_{n-1})$, missä

$$q_i = \begin{cases} p_i & , jos\ x_i = 1, \\ \neg p_i & , jos\ x_i = 0. \end{cases}$$

Propositiolause $P_{\overline{x}}$ saa totuusarvon 1, täsmälleen niillä totuusjakaumilla, joilla propositiosymbolien $p_0, \ldots, p_{n-1}$ totuusarvot muodostavat n-jonon $\overline{x}$.

Olkoon X niiden n-jonojen $\overline{x}$ joukko, joilla $f(\overline{x}) = 1$ ainakin yhdellä n-jonolla $\overline{x}$ ($X \neq \varnothing$). Olkoon sitten P disjunktio niistä propositiolauseista $P_{\overline{x}}$, joilla
$\overline{x} \in X$: $P = P_{x_1} \vee \ldots \vee P_{x_m}$, missä $X = (\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_m})$
Osoitetaan vielä, että propositiolause P on sellainen, että $f_P = f$.
Olkoon $(d_0, \ldots, d_{n-1}) \in \{0, 1\}^n$ ja olkoon v totuusjakauma, jolla

$$v(p_i) = \begin{cases} d_i & , \text{jos } i < n, \\ 1 & , \text{muulloin}, \end{cases}$$

eli v vastaa edellä esitetyn määritelmän totuusjakaumaa, jolla
$f_P(d_0, \ldots, d_{n-1}) = v(P)$.
Jos $v(P) = 1$ eli $f_P(d_0, \ldots, d_{n-1}) = 1$, niin jonkun propositiolauseen P disjunktioista on oltava tosi. Siis jollakin $\overline{x} \in X$ on voimassa, että $v(P_{x_i}) = 1$. Mutta propositiolauseet $P_{\overline{x}}$ on määritelty niin, että ainoa $P_{\overline{x}}$, jonka v toteuttaa, on $P(d_0, \ldots, d_{n-1})$.

Täten on oltava $(d_0, \ldots, d_{n-1}) \in X$ ja jonka määritelmän nojalla tiedetään, että $f(d_0, \ldots, d_{n1}) = 1$.

Toisaalta jos $f(d_0, \ldots, d_{n-1}) = 1$, niin $(d_0, \ldots, d_{n-1}) \in X$ ja tällöin $P_{(d_0,\ldots,d_{n-1})}$ esiintyy propositiolauseen P disjunktiona. $P_{(d_0,\ldots,d_{n-1})}$ on tosi ainoastaan niillä totuusjakaumilla, jotka antavat propositiosymbolilla p_i totuusarvon d_i. Täten $v(P_{(d_0,\ldots,d_{n-1})}) = 1$ ja disjunktion totuusmääritelmän nojalla totuusjakauma $v(P) = 1$. Tämä tarkoittaa, että $f_P(d_0, \ldots, d_{n-1}) = 1$.
$\square$ [16]

Näin on todistettu, että mikä tahansa totuusfunktio voidaan esittää propositiolauseen avulla käyttäen vain konnektiiveja $(\neg, \wedge, \vee)$

3.4 Normaalimuodot

Propositiosymbolia tai sen negaatiota kutsutaan literaaliksi. Literaalia tai literaalien disjunktiota kutsutaan perusdisjunktioksi. Vastaavasti literaalia tai literaalien konjunktiota kutsutaan peruskonjunktioksi. Näiden avulla voidaan määritellä disjunktiivinen normaalimuoto ja konjunktiivinen normaalimuoto. [14]

Määritelmä 5. *Looginen lause on disjunktiivisessa normaalimuodossa (DNF), jos se on disjunktio, jossa kaikki termit ovat literaalien konjunktioita.*

Jos jokainen propositio esiintyy kaikissa peruskonjunktioissa, niin muotoa kutsutaan täydelliseksi disjunktiiviseksi normaalimuodoksi.
Esimerkiksi $(p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r)$ on täydellisessä disjunktiivisessa normaalimuodossa, koska sulkujen sisältä löytyy vain peruskonjunktioita ja sulkujen ulkopuolelta perusdisjunktioita. Lisäksi jokainen propositio p, q ja r esiintyy kaikissa peruskonjunktiossa, joka tekee lauseesta täydellisen. Seuraavaksi määritellään konjunktiivinen normaalimuoto (CNF).

Määritelmä 6. *Looginen lause on konjunktiivisessa normaalimuodossa (CNF), jos se on konjunktio, jossa kaikki termit ovat literaalien disjunktioita.*

Muotoa kutsutaan täydelliseksi konjunktiiviseksi normaalimuodoksi, jos jokainen propositio esiintyy kaikissa perusdisjunktioissa. Esimerkki tästä tapauksesta on $(p \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee q \vee r)$.

Lauseiden standardimuodot ovat yleisesti ottaen hyödyllisiä, koska niiden avulla kahden eri lauseen identifiointi ja vertailu on helpompaa. Edellä kuvattuja normaalimuotoja voidaan pitää standardimuotoina loogisille lauseille.

Luvussa 3.3 osoitettiin, että mitä tahansa totuusfunktiota voidaan esittää propositiolauseen avulla käyttäen vain konnektiiveja $\neg, \wedge, \vee$. Tämä tarkoittaa, että kaikki propositiolauseet voidaan aina kirjoittaa normaalimuodoissa (DNF tai CNF), sillä propositiolauseille voidaan aina kirjoittaa totuustaulu (katso luku 3.2).

4. TUTKIMUKSEN TOTEUTUS

Tutkimusta varten luotiin propositiologiikan opetusmoduuli, jossa oli mukana MathCheck-ohjelmisto. Tutkimus toteutettiin Tampereen teknillisessä yliopistossa keväällä 2017 neljännessä periodissa osana algoritmimatematiikan kurssia. Se koostui pääasiassa ensimmäisen vuosikurssin tietotekniikan opiskelijoista, mutta kurssilla oli myös muidenkin opintosuuntien opiskelijoita. Opetusmoduuli rakentui propositiologiikkaan kertaavasta osiosta, sillä aihealue oli käsitelty jo syksyllä Insinöörimatematiikka 1- kurssilla, sekä uudesta asiasta (normaalimuodot), joka käsiteltiin luennoilla lähinnä lyhyesti. Opiskelijoille kerrottiin, että moduulin aiheista tulee tenttikysymys. Kurssin opiskelijoille jaettiin Moodlessa linkki propositiologiikan opetusmoduuliin. Heillä oli noin kaksi viikkoa aikaa suorittaa opetusmoduuli, jonka jälkeen heitä pyydettiin täyttämään palautelomake Moodlessa.

4.1 Kehittämistutkimuksen toteutus ja tutkimuskysymykset

Tutkimuksen tarkoitus on kehittää sähköistä oppimateriaalia algoritmimatematiikan kurssiin hyödyntäen MathCheck-ohjelmistoa. Kurssin rakenne laadittiin sulautuvan oppimisen periaatteella (katso luku 2.3). Tämä tutkimus muodostaa kehittämistutkimuksen (katso luku 2.1) yhden syklin: ongelma-analyysin, oppimateriaalin laatimisen ja oppimateriaalin testaus.

Propositiologiikan opetusmoduulia ja sen käyttöä tutkittiin seuraavilla tutkimuskysymyksillä:

1. Minkälaisena opiskelijat kokivat laaditun opetusmoduulin?
2. Minkälaisena opiskelijat kokivat MathCheck-ohjelmiston?
3. Miten opiskelijoiden matemaattinen osaaminen näkyi tentissä?

4.2 Ongelma-analyysi

Yliopistomatematiikan ongelma-analyysi perustuu edellä esitettyihin aikaisempiin tutkimuksiin (luku 1.2). Ongelma-alueena tarkastellaan kurssirakennetta ja oppimateriaalien monimuotoisuutta. Kurssirakennetta tarkastellaan sulautuvan oppimisen näkökulmasta, toisin sanoen kontaktiopetuksen ja sähköisen materiaalin suhteena. Algoritmimatematiikan kurssilla käsiteltävien asiakokonaisuuksien määrä on suuri suhteessa käytettävään luennointiaikaan, ja siksi on tarkoituksenmukaista siirtää osa oppisisällöistä sähköisiin oppimisympäristöihin. Tällöin vapautuu luentoaikaa opiskelijoille perusteellisemmin uusia asiakokonaisuuksia ja siirtää opiskelijoille osittain entuudestaan tuttuja asioita sähköisiin oppimisympäristöihin. Opiskelijoita ohjataan itsenäiseen työskentelyyn ja ottamaan entistä enemmän vastuuta omasta opiskelustaan. Sähköiset oppimisympäristöt mahdollistavat ajasta ja paikasta riippumattoman opiskelun. [23] [24]

Tampereen teknillisen yliopiston matematiikan opetuksessa on painotettu sähköisiä työkaluja matematiikan opiskelussa jo usean vuoden ajan, katso esimerkiksi [31]. Interaktiivisia sähköisiä oppimisympäristöjä ollut aikaisemminkin kokeilussa ja niiden kehitystyö jatkuu edelleen (esimerkiksi [23], [17]). Uutena kehityskohteena on MathCheck-matematiikkaohjelmisto, jonka toiminta-ajatus poikkeaa muista matematiikkaohjelmistoista. Mainitun ohjelman kehittäminen pedagogisena työkaluna on vasta alkuvaiheessa ja tämä tutkimus on osana kyseistä kehitystyötä. Sähköisten oppimateriaalien sisällölliseen kehittämiseen kuuluu myös uusien harjoitustehtävätyyppien laatiminen, sillä perinteiset tehtävätyypit eivät ohjaa aina riittävästi ymmärtävään oppimiseen. Erilaiset tehtävätyypit antavat monipuolisen kuvan opiskeltavasta aiheesta ja siten syventävät ymmärrystä. Kun tehtävien ratkaisuprosesseihin liitetään MathCheck-ohjelmiston käyttö, niin voidaan kehittää uudenlaista sähköistä oppimisympäristöä.

4.3 Opetusmoduulin laatiminen ja kokeilu

Opetusmoduuli laadittiin nettisivuiksi HTML-koodina ja matemaattiset merkinnät kirjattiin ASCII-komennoilla. Moduulissa oli yhteensä 11 sivua (katso Liite A). Siirtyminen sivulta seuraavalle tapahtui, kun oli ensin suorittanut hyväksytysti edellisen sivun tehtävät, jotka MathCheck-ohjelmisto tarkisti. Sivut koostuivat pääasiassa lyhyestä teoriaosuudesta, esimerkistä sekä yhdestä tai useammasta helpohkosta tehtävästä. Teoriaosuudet pyrittiin tiivistämään sellaiseksi, että niissä tulee vain suhteellisen vähän tietoa kerrallaan. Näin opiskelijan keskittyminen pysyy yhdessä asiakokonaisuudessa kerrallaan ja hän pääsee mahdollisimman nopeasti testaamaan juuri oppimaansa asiaa käytännössä helpon esimerkin kautta. Teoriaosuuden keskellä olevat esimerkit pidettiin suhteellisen helppoina, jotta mahdollisimman moni saisi onnistumisen kokemuksia. Osuuden lopussa oli aina muutama haastavampi tehtävä, joilla opiskelijat pääsivät testaamaan osaamistaan. Palautetta antavia tehtäviä oli usein, koska teoriaosuudet olivat lyhyitä ja tämä teki alustasta interaktiivisen eli vuorovaikutteisen. Vuorovaikutteisuus on yksi mielekkään oppimisen kriteereistä. Opetusmoduuli oli tarkoituksenmukaisesti strukturoitu: opiskelijoiden oli pakko käydä kaikki sivut järjestyksessä läpi päästäkseen moduulin loppuun. Opetusmoduuli oli linjakas eli asiat käytiin läpi loogisessa järjestyksessä ja opiskelijan tietorakenteeseen ei jäänyt aukkoja. Strukturoimattomilla opetusmoduuleilla on vaarana, että opiskelijat haluavat hypätä suoraan uuteen vaikeampaan aiheeseen, johon opiskelijalla ei ole riittäviä pohjatietoja.

Tutkimuksessa haluttiin käyttää perinteisten tehtävätyyppien lisäksi rakenteeltaan erilaisia tehtävätyyppejä. Aikaisemmissa tutkimuksissa [33] [21] on todettu, että ne syventävät opiskelijan matemaattista osaamista perinteisten tehtävätyyppien rinnalla. Tällaisia tehtäviä ovat:

1. Koodinvaihtotehtävä: matematiikan symbolikielellä esitetyt tehtävien ratkaisut kuvataan omin sanoin luonnollisella kielellä tai päinvastoin.
2. Täydennystehtävät: matematiikan symbolikielellä tai luonnollisella kielellä annetusta ratkaisusta puuttuu osia, jotka täydennetään.
3. Virheen etsintä: matematiikan symbolikielellä tai luonnollisella kielellä annetusta ratkaisuprosessista etsitään virheelliset tai puutteelliset kohdat ja korjataan ne.
4. Ratkaisusta tehtävä: annetaan ratkaisu matematiikan symbolisella kielellä tai luonnollisella kielellä, jonka pohjalta pitää laatia tehtävä.
5. Ratkaisun argumentointi: tehtävän ratkaisun välivaiheita perustellaan matematiikan symbolikielen tai luonnollisen kielen avulla.
6. Tiedon seulontatehtävä: annetusta tehtävästä on ensin seulottava tehtävän ratkaisuun tarvittava oleellinen informaatio, jotta voi ratkaista tehtävän.

7. Ratkaisuvaiheiden järjestämistehtävä: tehtävä ja sen ratkaisu on annettu valmiina, mutta ratkaisun vaiheet ovat väärässä järjestyksessä. Tehtävänä on järjestää ratkaisun vaiheet oikeaan järjestykseen ja mahdollisesti perustella valinnat.

8. Matematiikan konkretisointi: matemaattiselle sisällölle pitää keksiä vastine arkielämästä.

Edellä mainittuja tehtävätyyppejä pystyy myös yhdistelemään.

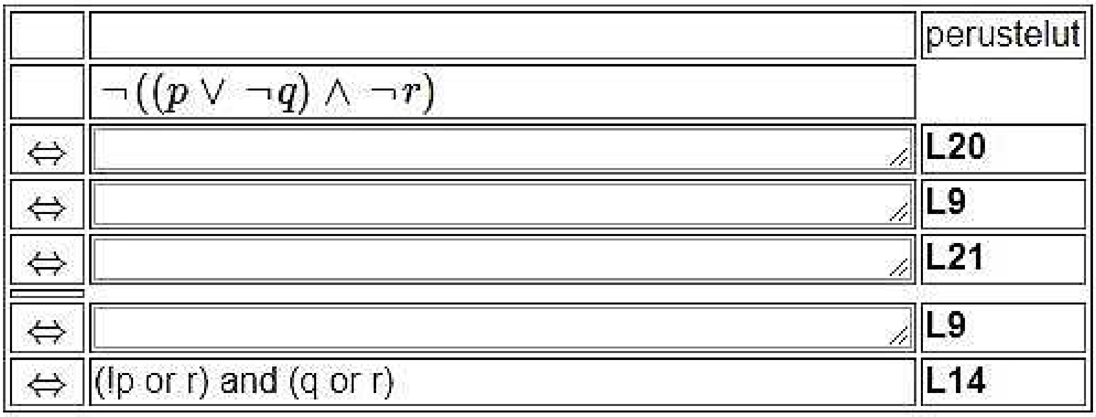
Tehtäviä oli opetusmoduulissa kolmea eri tyyppiä.

		perustelut
	$p \vee \neg q \vee (p \wedge q) \wedge (p \vee \neg q) \wedge \neg p \wedge q$	
$\leftrightarrow$	$p \vee \neg q \vee (p \wedge q \wedge (p \vee \neg q) \wedge \neg p \wedge q)$	
$\Leftrightarrow$	$p \vee \neg q \vee (p \wedge \neg p \wedge q \wedge (p \vee \neg q) \wedge q)$	
$\Leftrightarrow$	$p \vee \neg q \vee (\mathsf{F} \wedge q \wedge (p \vee \neg q) \wedge q)$	
$\Leftrightarrow$	$p \vee \neg q \vee (\mathsf{F} \wedge (p \vee \neg q) \wedge q)$	
$\Leftrightarrow$	$p \vee \neg q \vee (\mathsf{F} \wedge q)$	
$\Leftrightarrow$	$p \vee \neg q \vee \mathsf{F}$	
$\Leftrightarrow$	$p \vee \neg q$	

Kuva 4.1 *Ratkaisun argumentointi-tyyppinen tehtävä.*

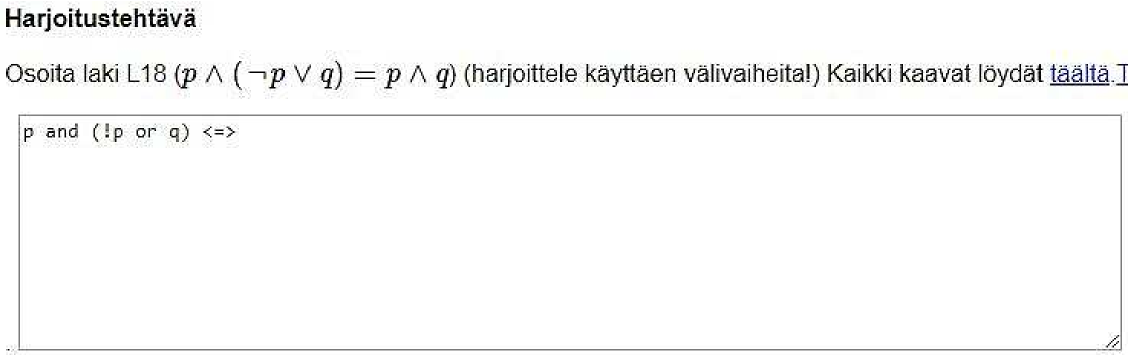
Ensimmäinen tehtävätyyppi oli ratkaisun argumentointi-tyyppinen tehtävä (Kuva 4.1), jossa oikean ratkaisun välivaiheet oli annettu ja opiskelijoiden piti itse perustella oikeiden ekvivalenssilakien avulla välivaiheet. Tällöin opiskelijan on pakko verrata kahta välivaihetta keskenään ja ajatella analyyttisesti, mikä on muutos kahden välivaiheen välillä ja mihin lakiin se perustuu. Tämä tehtävä kehittää matemaattisen osaamisen piirteistä käsitteellistä ymmärrystä ja mukautuvaa päättelyä.

Toisena tehtävätyyppinä oli täydennystehtävä-tyyppi (Kuva 4.2), jossa opiskelijoiden täytyi annettujen lakien avulla päätellä puuttuvat välivaiheet ja täydentää ne. Näissä



Kuva 4.2 *Täydennystehtävä.*

tehtävissä opiskelijoiden on täytynyt pohtia, mihin kohtaan kutakin lakia on pystynyt soveltamaan ja millaiseen muotoon lauseke lopulta taipuu. Tässä tehtävässä kehittyy opiskelijan proseduraalinen sujuvuus ja mukautuva päättely.



Kuva 4.3 *Perinteinen tehtävätyyppi.*

Kolmantena tehtävätyyppinä oli perinteinen tehtävätyyppi, jossa ongelman alku ja tehtävänanto on annettu, ja opiskelijan täytyy itsenäisesti päättää välivaiheet ja tarvitsemansa lait. Tällöin opiskelijoiden täytyy itse pohtia perustelu miksi ja miten välivaihe muotoutuu. Perusteluita tosin ei tässä opetuskokeilussa kysytty, mutta oletettiin, että opiskelijat osaavat perustella tekemisiään. Tehtävä kehittää opiskelijan mukautuvaa päättelyä, proseduraalista sujuvuutta ja käsitteellistä ymmärtämistä.

MathCheck-ohjelmisto tarkistaa tehtävien loogiset välivaiheet ja kertoo opiskelijalle, missä looginen välivaiheessa mahdollinen on virhe tapahtunut. Tämän vuoksi opetuskokeilussa on ollut mahdollista saada tehtävät oikein MathCheck-ohjelmistolla, vaikkei ole saanut välttämättä tehtävänannon mukaista lopullista ratkaisua (esimerkiksi normaalimuotoa). MathCheck-ohjelmisto ei kerää minkäänlaista dataa opiskelijoiden ratkaisuyrityksistä, jolloin opiskelijat voivat yrittää ratkaisemista niin monta kertaa kun haluavat.

Opetuskokeilu toteutettiin Algoritmimatematiikan kurssilla 18.4. – 9.5.2017. Opetusmoduulista kerrottiin opiskelijoille luennolla sekä harjoitustilaisuuksissa sekä informoitiin moduulin opiskelun vapaaehtoisuudesta. Opiskelijoille kerrottiin myös, että moduulin aiheesta tulee tenttiin kysymys. Moduuli oli auki kurssin loppupuoliskolla aina tenttipäivään asti. Tentissä oli yksi tehtävä disjunktiiviisesta normaalimuodosta. Saman tyyppinen tehtävä oli ollut myös moduulissa.

4.4 Palautekysely ja tentti

Opetuskokeilun jälkeen tehtiin kysely opetusmoduulin tehneille opiskelijoille. Kyselyssä haluttiin selvittää miten opiskelijat kokivat tehtävien ratkaisemisen ja miten mainitut tehtävät tukivat omaa oppimisprosessia. Lisäksi kysyttiin käyttäjäkokemuksia opetusmoduulista ja itsenäisestä opiskelusta sähköisessä oppimisympäristössä. Lopuksi pyydettiin opiskelijoita esittämään kehittämisehdotuksia käyttämästään opetusmoduulista. Opiskelijat vastasivat seuraaviin avoimiin kysymyksiin:

1. Saitko tehtävät mielestäsi tehtyä oikein?
2. Edesauttoiko tehtävät oppimistasi?
3. Oliko alusta miellyttävä käyttää (miksi?/miksei?)
4. Haluaisitko jatkossa (tai olisitko halunnut) opiskella vastaavalla tavalla itsenäisesti valmiilla pohjalla?
5. Olisitko halunnut, että oppimismoduulissa olisi ollut keskeyttämismahdollisuus?
6. Kehittämisehdotuksia?

Kurssin päätteeksi opiskelijat antoivat palautetta kurssista myös Kaiku-järjestelmässä. Opiskelijoiden kokemuksia MathCheck-ohjelmiston käytöstä logiikan opetusmoduulista ja Moodleen palautettavista tehtävistä kerättiin avoimilla kysymyksillä.

Tentissä oli yhteensä neljä tehtävää, joista jokainen oli kuuden pisteen arvoinen. Kokeiluun liittyvä tehtävä oli tehtävä 2b), josta oli mahdollista saada kolme pistettä. Kyseinen tehtävä oli “Muuta lause $\neg p \vee q$ täyteen (täydelliseen) disjunktiiviseen normaalimuotoon (DNF).” Tehtävästä saattoi saada osapisteitä puolen pisteen tarkkuudella. Tutkimuksen tekijä arvosteli tentin tehtävän kaksi kaikilta opiskelijoilta ($N = 134$).

5. TULOKSET

5.1 Kyselyn tulokset

Moodlessa tehtyyn kyselyyn vastasi 21 opiskelijaa. Kaikki kysymykset (katso luku 4.4) olivat avoimia kysymyksiä, joihin vastatattiin omin sanoin. Tutkimusta varten vastaukset jaettiin kysymysten mukaisiin kategorioihin. Taulukossa 5.1 on ensimmäisen kysymyksen ("Saitko tehtävät tehtyä mielestäsi oikein?") vastausjakauma, jossa vastausluokat olivat kolme vastausluokkaa. Noin kolme neljäsosaa vastanneista opiskelijoista koki, että he saivat tehtyä tehtävät oikein. Vain yksi opiskelija vastasi, että osasi tehdä vain muutaman tehtävän oikein. Tämä viittaa siihen, että tehtävät eivät olleet liian vaikeita suurimmalle osalle niitä tehneitä opiskelijoita, ja he ovat olleet motivoituneita tekemään koko opetusmoduulin.

Taulukko 5.1 *Vastausten (N=21) jakaantuminen kysymykseen "Saitko tehtävät tehtyä oikein?" (Kysymys 1).*

Kyllä	Suurimman osan	Muutaman	En
16	4	1	0

Noin kolme neljäsosaa opiskelijoista koki, että moduulin tehtävät edesauttoivat oppimista (Taulukko 5.2). Vain kaksi opiskelijaa koki, että tehtävät eivät edesauttaneet heidän oppimistaan. Vastausjakauma osoittaa, että moduulin sähköinen itseopiskelumateriaali näyttää tukevan useimpien opiskelijoiden oppimista perinteisen opetuksen lisänä.

Taulukosta 5.3 nähdään, että moduulissa käytettyyn oppimisalustaan noin puolet vastanneista opiskelijoista suhtautui positiivisesti ja piti alustaa miellyttävänä käyttää. Noin neljäsosa vastanneista opiskelijoista suhtautui alustan käyttöön positiivisesti, mikäli siihen tehtäisiin parannuksia, ja yhtä suuri joukko vastanneista ei pitänyt alustaa miellyttävänä. Vastausten perusteella voi todeta, että moduulin

Taulukko 5.2 *Vastausten (N=21) jakaantuminen kysymykseen "Edesauttoiko tehtävät oppimista?" (Kysymys 2).*

Kyllä	Vähän	En osaa sanoa	Ei
15	3	1	2

alustan perusrakenne on toimiva, mutta sitä on syytä kehittää käyttäjien palautteen perusteella.

Taulukko 5.3 *Vastausten (N=21) jakaantuminen kysymykseen "Oliko alusta miellyttävä käyttää?" (Kysymys 3).*

Positiivinen	Positiivinen, mutta parannettuna	Ei	Muu
9	6	5	1

Yli puolet vastaajista haluaisi opiskella vastaavanlaisessa kokeiltavana olleessa opiskeluympäristössä, jossa voi edetä itsenäisesti (Taulukko 5.4). Kaksi vastaajaa täsmensi, että haluaisivat itsenäisesti opiskeltavia sähköisiä oppimateriaaleja nimenomaan osana opetusta, mutta he eivät tahtoisi kaiken opetuksen olevan sähköistä. Kaksi opiskelijaa vastasivat, että he eivät halua opiskella itsenäisesti sähköisellä pohjalla. Kaksi muuta opiskelijaa eivät vastanneet suoraan esitettyyn kysymykseen (kategoria "Muu"). Vastausjakauman perusteella suurin osa opiskelijoista kokee, että sähköinen oppimisalusta sopii yliopistomatematiikan opetukseen ainakin perinteisen opetuksen rinnalla.

Taulukko 5.4 *Vastausten (N=21) jakaantuminen kysymykseen "Haluaisitko jatkossa opiskella vastaavalla tavalla itsenäisesti valmiilla pohjalla?" (Kysymys 4).*

Kyllä	Sulautuvasti	Ehkä (ei, mutta jos paranneltu)	En	Muu
13	2	2	2	2

Noin neljä viidesosaa vastanneista opiskelijoista olisi halunnut keskeyttämismahdollisuuden (Taulukko 5.5), minkä useimmat kokivat osana käyttömukavuutta. Neljä opiskelijaa ei kokenut keskeyttämismahdollisuutta tarpeelliseksi.

Opiskelijoiden tekemät kehitysehdotukset (kysymys 6) on koottu Taulukkoon 5.6.

Taulukko 5.5 *Vastausten (N=21) jakaantuminen kysymykseen "Olisitko halunnut keskeyttämismahdollisuuden?" (Kysymys 5).*

Kyllä	En
17	4

Kehittämisehdotukset (N=24) voidaan jakaa sisältönsä perusteella kolmeen pääteemaan: 1. Alustan rakenne, 2. MathCheck-ohjelmiston toiminnot ja 3. Tehtävät ja opetusosio.

Taulukko 5.6 *Opiskelijoiden (N= 21) tekemiä kehittämisehdotuksia oppimismoduuliin (Kysymys 6).*

Kehittämisehdotuksia	frekvenssi
Käyttöliittymän ulkoasu	4
Jäljellä olevien tehtävien lkm näkyminen	4
Keskeyttämismahdollisuus	3
Näytetään, että tehtävä valmis	3
Aloitussivu, jossa näkyisi valittavat sivut	2
Painovirheen korjaus	2
Turha kaavojen numerointi pois	1
Symbolisen matemaattisen lausekkeen välitön näkyminen	1
Täsmällisempi virheen näyttö	1
Kerrotaan etukäteen mitä operaattoreita tarvitaan ratkaisuissa	1
Näyttäisi heti, jos kirjoitettu syntaksi väärin	1
Lisää esimerkkejä	1

Alustan rakenteesta haluttiin kehittää erityisesti käyttöliittymän ulkoasua, joka koettiin nykyisellään vanhanaikaiseksi. Lisäksi haluttiin saada näkyviin opiskelijalle kuinka monta tehtävää hänellä on kulloinkin jäljellä.

> *Alustassa on parantamisen varaa. Edistyminen kokonaisuudessa pitäisi näkyä jossain (esim tehtävä 3/12 vihreän palkin kanssa). Alusta on todella tylsän näköinen. Vastauksia tarkistaessa, piti vain luottaa siihen, että sai oikean vastauksen. Eteenpäin pääsisi keskeneräisilläkin vastauksilla, koska mathcheck tulitsi ne kuitenkin loogisesti oikeiksi* (Opiskelija 1)

Kehittämisehdotuksissa opiskelijat halusivat alustaan keskeyttämismahdollisuuden, joka ilmeni myös jo aikaisemmassa kyselyssä (Taulukko 5.5).

> *Mahdollisuus keskeyttää ja jatkaa myöhemmin.* (Opiskelija 2)

MathCheck-ohjelmiston toimintaa haluttiin kehitettävän niin, että se hyväksyisi vastauksen vasta, kun se on tehtävänannon mukaisessa muodossa tai kun todistaminen on valmis.

> *Huomasin vasta loppu puolella, ettei vastauksien tarvinnut olla oikein loppuun asti. Eli mathcheck hyväksyi vastaukset, vaikka todistaminen olisi vielä kesken. Uskon, että ihmiset pystyvät käyttää tätä hyväksi, joten korjaisin sen ennenkuin käyttäisin virallisesti mathcheckiä opiskelussa.* (Opiskelija 3)

MathCheck-ohjelmiston toivottiin näyttävän reaaliajassa virheet sekä virheen paikan tarkemmin.

> *Myöskään tarkistukset eivät olleet riittävän automaattisia, tuntui hassulta ensin kirjoittaa lauseke ja seuraavalta sivulta sitten tarkistaa manuaalisesti menikö se oikein.* (Opiskelija 4)

> *Laajempi hyväksyvyys syntaksiin ja tarkemmat virheilmoitukset, jotta osaa korjata syntaksin. "Unknown token" ja punainen ! eivät auta löytämään ongelmaa. muuta huutomerkin kanssa ei ollut.* (Opiskelija 5)

MathCheck-ohjelmiston haluttaisiin näyttävän heti symbolisen matemaattisen lausekkeen.

> *Ascii merkeillä kirjoitettujen asioiden reaaliaikainen esittäminen vastaavin matemaattisin merkinnöin rinnakkain tekstikentän kanssa.* (Opiskelija 6)

Tehtävissä ja opetusosiossa toivottiin, että turha kaavojen numerointi jäisi pois ja olisi lisää esimerkkejä.

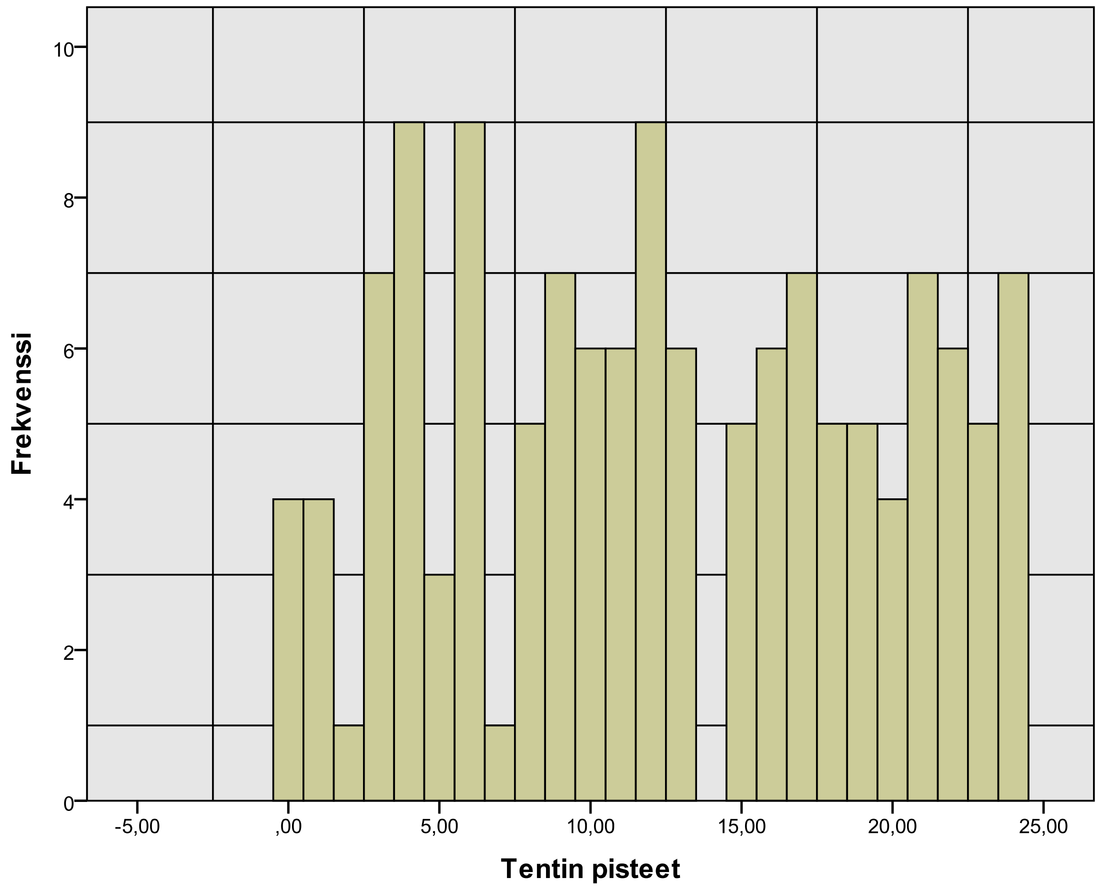
> *Turha kaavojen numeroiden etsiminen pois, vastaavia taitoja tarvitaan kuitenkin todistusten muotoilemiseen itse. Vaihtoehtoisesti pitäisi pystyä perustelemaan ekvivalenssien nimillä.* (Opiskelija 7)

> *Moduulissa käytetyt esimerkit ja materiaali olivat mielestäni hyviä, mutta haluaisin vielä esimerkkejä oikeista ja vääristä vastauksista (jos näin voi sanoa). Eli jos kysytään vaikka että onko relaatio refleksiivinen ja MIKSI se on ja myös esimerkki ei-refleksiivisestä relaatiosta ja MIKSI se EI ole.*– (Opiskelija 8)

Opiskelijat antoivat kurssin jälkeen Kaiku-järjestelmän kautta kurssipalautteen, jossa kommentit opetusmoduulista olivat samansuuntaisia kuin Taulukossa 5.6 esitetyt kehittämisehdotukset.

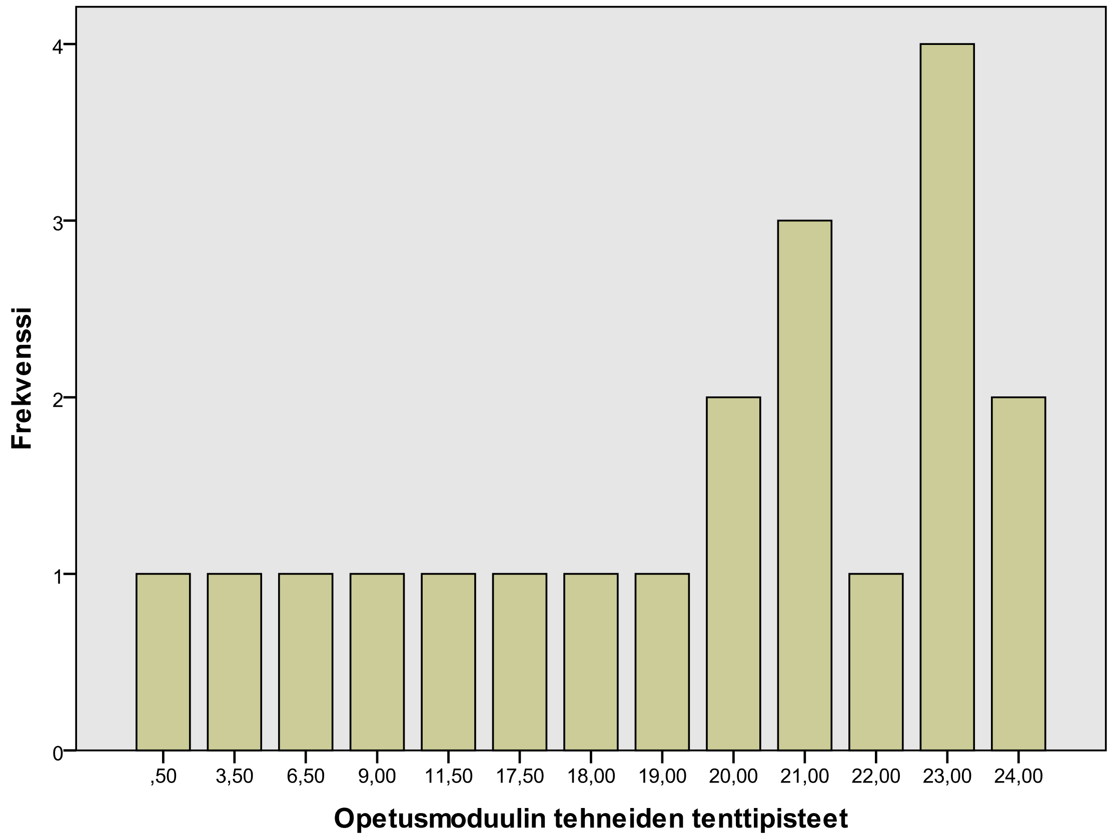
5.2 Tentin tulokset

Algoritmimatematiikan tenttiin osallistui 134 opiskelijaa. Koko tentin pistekeskiarvo oli 12,29 (maksimi 24 pistettä) ja keskihajonta 7,15 pistettä. Kuvassa 5.1 on esitetty kaikkien tenttiin osallistuneiden summapistemääräjakauma.



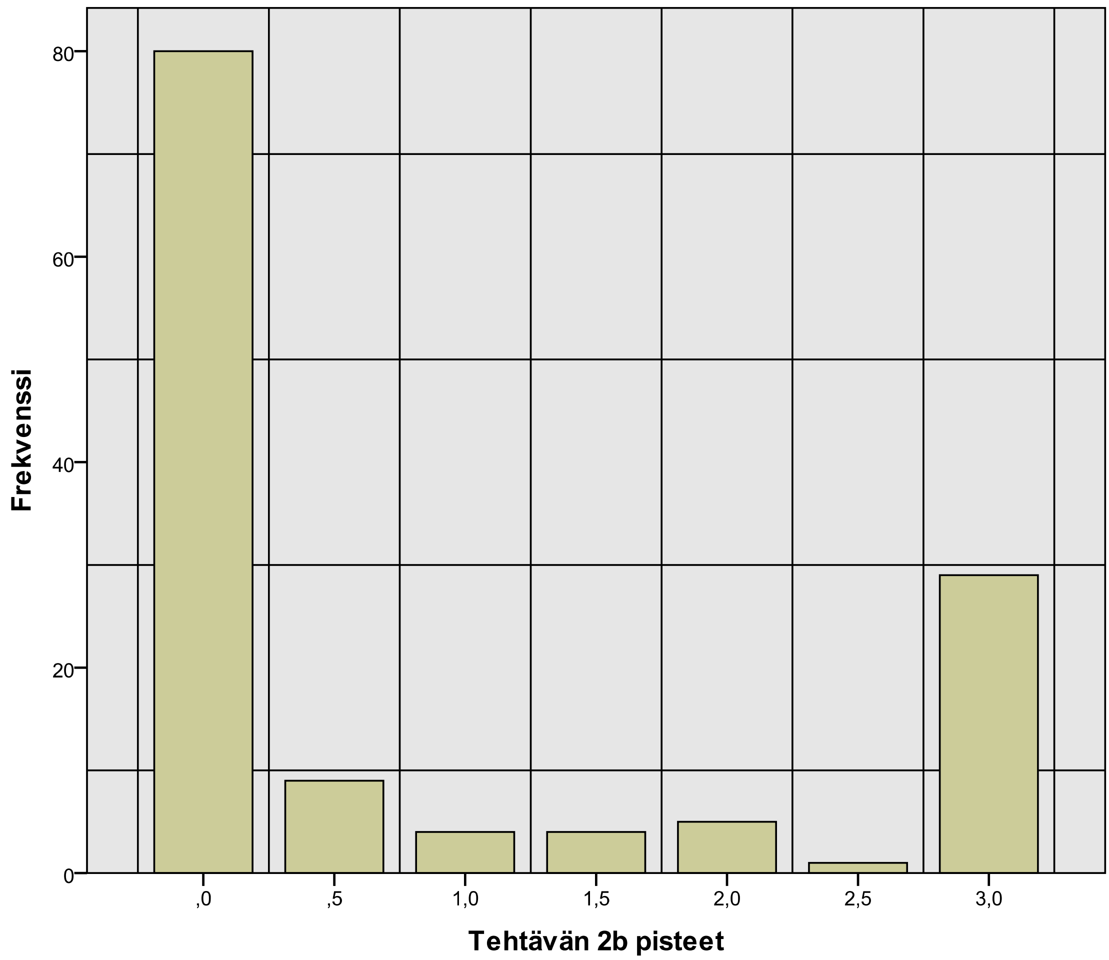
Kuva 5.1 *Algoritmimatematiikan tentin kaikkien opiskelijoiden saamien summapistemäärien jakauma (N=134, maksimipistemäärä 24).*

Opetusmoduulin, joka hyödynsi MathCheck-ohjelmistoa, teki 21 opiskelijaa. Heistä 20 opiskelijaa osallistui tenttiin. Heidän tentin pistekeskiarvonsa oli 17,52 pistettä (maksimi 24 pistettä) ja keskihajonta 7,22 pistettä. (Kuva 5.2)



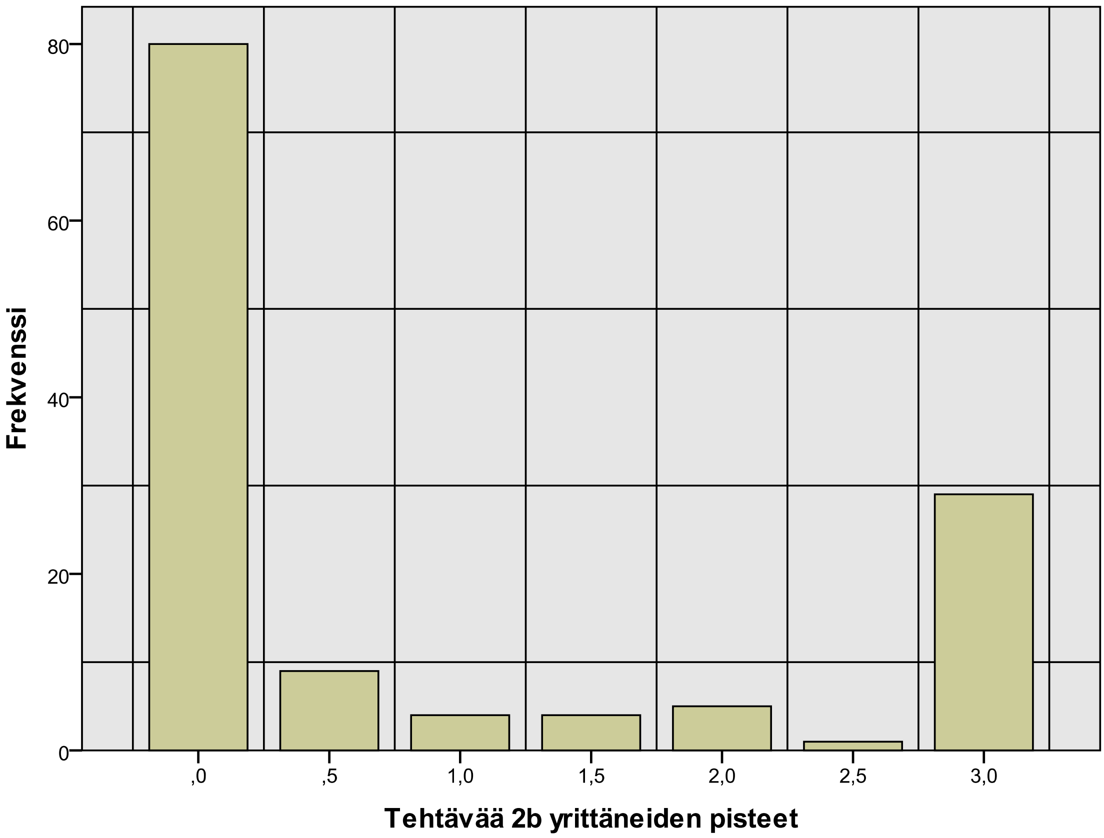
Kuva 5.2 *MathCheck -moduulin tehneiden (N=20) algoritmimatematiikan tentin kaikkien tehtävien summapistemäärien jakauma (maksimipistemäärä 24).*

Propositiologiikan tehtävää 2b) ei yrittänyt ratkaista vastauspaperiin 55 opiskelijaa. Toisin sanoen 79 opiskelijaa yritti kirjallista ratkaisua. Mainitun tehtävän pistekeskiarvo kaikilla opiskelijoilla (N=134) oli 0,8 pistettä (maksimi 3 pistettä) sekä keskihajonta 1,25 pistettä (Kuva 5.3).



Kuva 5.3 *Propositiologiikan tehtävän 2b pistejakauma kaikilla tenttiin osallistuneilla (N=134, maksimipistemäärä 3).*

Propositiologiikan tehtävän 2b) kirjallisen vastauksen antaneiden (N=79) pistekeskiarvo oli 1,46 pistettä (maksimipistemäärä 3) ja keskihajonta 1,31 pistettä (Kuva 5.4).



Kuva 5.4 *Propositiologiikan tehtävän 2b pistejakauma kirjallisen vastauksen antaneilla (N=79, maksimipistemäärä 3).*

6. JOHTOPÄÄTÖKSET

6.1 Yhteenveto vastauksista tutkimuskysymyksiin

6.1.1 Kokemukset propositiologiikan opetusmoduulista

Vastaus ensimmäiseen tutkimuskysymykseen *"Minkälaisena opiskelijat kokivat laaditun opetusmoduulin?"* löytyy opiskelijoille tehdyn kyselyn vastauksista (Taulukot 5.1–5.5). Taulukkojen 5.1 ja 5.2 perusteella voidaan todeta, että kyselyyn vastanneet opiskelijat kokivat opetusmoduulin tehtävät vaikeustasoltaan sopiviksi ja sisältöjen oppimista tukeviksi. Ilmeisesti moduuliin sisälletyt opetusmateriaaliosiot tukivat tehtävien ratkaisemista ja olivat asianmukaisia. Suurin osa kyselyyn vastanneista opiskelijoista koki opetusmoduulin käytön positiivisena kokemuksena. Osa opiskelijoista esitti perusteltuja parannuksia alustaan (Taulukot 5.3 ja 5.6). Itsenäisesti opiskeltava sähköinen oppimisympäristö nähtiin useimmille opiskelijoille heille sopivana tapana opiskella, ja osa opiskelijoista näki sen hyvänä lisänä perinteisen opetuksen rinnalla (Taulukko 5.4).

Kyselyyn vastanneet opiskelijat kokivat, että opetusmoduulia on joiltakin osin syytä kehittää. Erityisesti toivottiin, että moduuli sisältäisi työskentelyn keskeyttämismahdollisuuden, niin että opiskelija pystyisi jatkamaan työskentelyä siitä, mihin oli edelliskerralla jäänyt. Lisäksi nähtiin, että käyttöliittymän ulkoasu kaipaa visuaalista kehittämistä käyttäjälle miellyttävämmäksi. Opetusmoduulin haluttiin näyttävän opiskelijalle jäljellä olevien tehtävien lukumäärän ja aloitussivullaan sivurakenteen helpottaen navigointia (Taulukot 5.5 ja 5.6).

6.1.2 Kokemukset MathCheck-ohjelmistosta

Toiseen tutkimuskysymykseen "Minkälaisena opiskelijat kokivat MathCheck-ohjelmiston?" vastaus koostuu opiskelijoille tehdystä tutkimuskyselystä ja Kaiku-palautteesta.

Pääsääntöisesti opiskelijat kokivat MathCheck-ohjelmiston hyväksi apuvälineeksi matematiikan tehtävien ratkaisuissa. Opiskelijat näkivät hyväksi, että MathCheck-ohjelmisto muun muassa tarkistaa ratkaisun välivaiheiden ja tuloksen oikeellisuuden. Ohjelmiston eräänä hyvänä ominaisuutena nähtiin, että se antaa palautteen nopeasti tehdyistä virheistä verrattuna esimerkiksi virheiden korjaamiseen perinteisessä laskuharjoitustilaisuudessa. Palautteesta tuli selvästi ilmi, että MathCheck-ohjelmiston käyttöönotto ja sujuva käyttö vaativat opiskelijalta määrätietoista harjoittelua, minkä jälkeen ohjelmisto koettiin käyttökelpoiseksi työkaluksi.

Kyselyyn vastanneiden opiskelijoiden kehittämisehdotuksissa toivottiin, että MathCheck-ohjelmisto pystyisi näyttämään matemaattisen symboli lausekkeen välittömästi syntaksin kirjoittamisen jälkeen. Kehittämisehdotuksissa toivottiin myös, että ohjelmisto näyttäisi välittömästi väärinkirjoitetun syntaksin, ja että virheen näyttö olisi entistä täsmällisempi. Ohjelmiston toivottiin näyttävän ratkaisijalle milloin tehtävä on ratkaistu loppuun: esimerkiksi kun propositiologiikan lause on disjunktiivisessa normaalimuodossa (Taulukko 5.6).

6.1.3 Matemaattisen osaamisen arviointi

Opiskelijoiden matemaattista osaamista tentissä (tutkimuskysymys kolme) voidaan tarkastella tentin pistejakaumien pohjalta (Kuvat 5.1–5.4). Analysoitaessa propositiologiikan hallintaa (Kuvat 5.3 ja 5.4) voidaan arvioida tenttiin osallistuneiden opiskelijoiden matemaattista osaamista tällä sisältöalueella laskemalla pistekeskiarvon suhde maksimipistemäärään. Kaikkien tenttiin osallistuneiden opiskelijoiden (N=134) propositiologiikan tehtävän pistekeskiarvo (0,8 pistettä) on 27% maksimipistemäärästä (3 pistettä). Jos tarkastellaan vain niitä opiskelijoita, jotka ovat yrittäneet kirjallisesti tehtävää (N=79), niin pistekeskiarvo (1,5 pistettä) on 50% maksimipistemäärästä (3 pistettä). Tämä on samaa suuruusluokkaa kuin koko tentin (N=134) pistekeskiarvon (12,3) suhde maksimipistemäärään (24 pistettä). Tentin propositiologiikan tehtävänhallinta on selkeästi puutteellista, kun tarkastellaan tehtävän hallintaa kaikkien tenttiin osallistuvien opiskelijoiden suhteen (pistekeskiarvo 0,8/3 pistettä).

Propositiologiikan tehtävän ratkaiseminen vaatii opiskelijalta ainakin seuraavia matemaattisen osaamisen piirteiden hallintaa (luku 2.4): käsitteellistä ymmärtämistä, mukautuvaa päättelyä ja proseduraalista sujuvuutta. Edellä mainittuja matemaattisen osaamisen piirteitä hallitsi tentissä noin yksi kuudesosa kaikista tenttiin osallistuneista opiskelijoista (N=134) ja noin yksi neljäsosa tehtävää kirjallisesti yrittäneistä (N=79). Tyypillinen puute mainitun tehtävän ratkaisussa oli käsitteellisen ymmärtämisen argumentointi.

Tarkasteltaessa opiskelijajoukkoa, jotka tekivät opetusmoduulin ja tentin (N=20), voidaan todeta heidän menestyneen tilastollisesti merkitsevästi paremmin tentissä (p=0,004, yhden otoksen t-testi ja keskiarvo 17,5 pistettä) kuin kaikki tenttiin osallistuneet (keskiarvo 12,9 pistettä). Mainitusta ryhmästä (N=20) 15 opiskelijan pistemäärä oli yli keskiarvon (Kuva 5.2) ja noin puolet (N=9) tämän ryhmän opiskelijoista sai vähintään kiitettävän arvosanan (4 tai 5). Edellä kuvatulla opiskelijajoukolla ovat selkeästi kaikki matemaattisen osaamisen piirteet kehittyneet. Tosin tässä yhteydessä ei voi päätellä mikä osuus opetusmoduulin käytöllä on ollut piirteiden kehittymiseen, mutta tulos antaa viitteitä kyseisen opetusmoduulin tukevan keskeisten matemaattisen osaamisen piirteiden kehittymistä.

6.2 Materiaalin kehittäminen

Tämä kehittämistutkimus on edennyt kolmessa vaiheessa. Ensimmäisenä vaiheena oli ongelma-analyysi, jossa selvitettiin yliopistomatematiikan opetukseen liittyviä ongelmia tarkastelemalla aikaisempia tutkimuksia ja olemassa olevien kurssien rakenteita sekä oppimateriaaleja. Kehittämiskohteena olevan Algoritmimatematiikan kurssin ongelmana oli muun muassa suuri asiakokonaisuuksien määrä suhteessa käytettävään luentoaikaan. Toinen vaihe kehittämistutkimuksessa oli kehittämisprosessi, joka tässä tutkimuksessa koostui propositiologiikan opetusmateriaalin laatimisesta ja kokeilemisesta (luku 4.3). Tässä luvussa esitetään kehittämistutkimuksen kolmas vaihe, jossa tarkastellaan saatua palautetta, ja pohditaan miten se voidaan huomioida verkko-opetusmoduulin edelleen kehittämisessä. Tutkimuksen verkko-opetusmateriaalin kehittämistä tarkastellaan kolmesta eri näkökulmasta: opetusjärjestelyt, materiaalin sisältö ja opiskelijan oppiminen.

6.2.1 Opetusjärjestelyt

Tutkimuksen kohteena oleva Algoritmimatematiikan kurssi voidaan nähdä sulautuvan oppimisen ympäristönä (luku 2.3), jossa verkko-opetus on perinteisen kontaktiopetuksen rinnalla. Kyseisellä kurssilla sähköinen verkko-opetus oli huomattavasti pienemmässä roolissa kuin kontaktiopetus. Sähköinen verkko-opetus voi olla muun opetuksen sellaisena lisänä, jossa tarjotaan tukimateriaalia tai syventävää materiaalia kontaktiopetuksen aiheista. Se voi olla myös osa kurssirakenteen toteutusta, jolloin sähköinen oppimateriaali sisältää aihealueita, joita ei käsitellä kontaktiopetuksessa. Algoritmimatematiikan kurssilla toteutettu opetusmoduuli vastasi viimeksi kuvattua opetusjärjestelyä. Tutkimuksessa kehitetty sähköinen opetusmoduuli tukee yksilöllistä oppimista, joka sopii useille yliopisto-opiskelijoille (Taulukko 5.4).

Tutkitussa kurssissa sähköisen opetusmoduulin sisältöjen määrä oli suhteellisen pieni verrattuna koko kurssin sisältömäärään. Saadun palautteen perusteella (Taulukot 5.2–5.4) opetusjärjestelyjä kannattanee kehittää siten, että sähköisen verkko-opetuksen osuus koko kurssista olisi entistä suurempi sulautuvan oppimisen näkökulmaa unohtamatta. Tällöin voidaan parhaiten tukea opiskelijoita, joilla on erilaiset oppimistyylit ja lähtötaso. Heille voidaan tarjota mahdollisuus erilaisiin oppimisympäristöihin. Osana kurssin toteutusta opiskelijoille kannattaisi tarjota myös mahdollisuus sellaiseen sähköiseen opetusmateriaaliin, joka toimii tukimateriaalina opiskeltaville aihekokonaisuuksille ja siten huomioisi erilaiset lähtötasot matematiikan osaamisessa.

6.2.2 Opetusmoduulin sisältö ja käytettävyys

Saadun palautteen perusteella opetusmoduulin ulkoasua ja käyttöliittymässä olevia toimintoja on syytä edelleen kehittää muun muassa Taulukossa 5.6 esitettyjen ehdotusten mukaisesti. Suurin osa ehdotuksista on kehittämistoimenpiteinä melko pieniä ja helppoja toteuttaa, mutta lisäävät merkittävästi opetusmoduulin käytettävyyttä.

Opetusmoduulin teoriasisältö koostui propositiologiikasta. Saadun palautteen perusteella teoriaosuuden toteutus on määrältään ja muodoltaan riittävä, kuitenkin monipuolisia esimerkkejä kannattaa lisätä olemassa olevien rinnalle. Opetusmoduulin yksittäisiin aihealueisiin liittyi harjoitustehtäviä, joissa sovellettiin monenlaisia tehtävätyyppejä (luku 4.3). Moduulissa käytettiin muun muassa koodinvaihtotehtäviä ja täydennystehtäviä osana perinteisiä muunnos- ja osoitustehtäviä. Mainittuihin tehtävätyyppeihin ei tullut opiskelijoilta kommentteja eikä parannusehdotuksia. Ilmeisesti käytetyt tehtävätyypit sopivat materiaaliin. Jatkossa voi monipuolistaa harjoitustehtävätyyppejä.

Opetusmoduulissa harjoitustehtävät tarkasti välivaiheineen MathCheck-ohjelmisto.

Yleisesti ottaen voi todeta, että MathCheck-ohjelmisto sopi tutkitun opetusmoduulin harjoitustehtäviin. Kehittämisehdotukset (Taulukko 5.6) koskivat MathCheck-ohjelmiston yksittäisiä toimintoja. Ohjelmistoa on kehitetty tutkimuksen teon jälkeen merkittävästi: esimerkiksi ohjelmisto pystyy tarkastamaan, että onko annettu vastaus disjunktiivisessa normaalimuodossa. Yhteenvetona voi todeta, että käyttöliittymään tehdyt sisällölliset ratkaisut ovat olleet pääsääntöisesti toimivia, mutta joillakin osa-alueilla löytyy vielä yksittäisiä kehittämiskohteita.

6.2.3 Opetusmoduuli opiskelijan oppimisen tukena

Opiskelijat, jotka tekivät opetusmoduulin harjoitustehtäviä, menestyivät tentissä keskimääräistä paremmin. Heillä matemaattisen osaamisen piirteistä proseduraalinen sujuvuus, käsitteellinen ymmärtäminen ja strateginen kompetenssi kehittyivät hyvin kurssin tavoitteiden suunnassa. Tästä näkökulmasta opetusmoduulin tehtävät olivat riittävän monipuolisia.

Kehittämistutkimuksen toisessa syklissä saadun palautteen perusteella opetusmoduulin rakennetta ei tarvitse muuttaa, mutta sisältöä ja esimerkkejä sekä harjoitustehtäviä kannattaa monipuolistaa. Uudet harjoitustehtävät voisivat tukea erityisesti opiskelijoiden käsitteellisen ymmärtämisen kehittymistä.

6.3 Pohdinta

Tutkimusaineiston analyysissä käytettiin sekä kvalitatiivisia että kvantitatiivisia menetelmiä (*mixed methods*). Useammasta lähteestä saatu data lisää tutkimuksen johtopäätösten luotettavuutta. Tässä tutkimuksessa käytetty kehittämistutkimuksen menetelmää on kritisoitu [8] muun muassa siitä, että se vaatii luotettavien tulosten saamiseksi useita iteraatioita (syklejä). Tässä tutkimuksessa toteutettiin vain yksi sykli, joten tulokset ovat tästä näkökulmasta vasta suuntaa antavia. Toisaalta kehittämistutkimuksen lähtökohdat ovat aina käytännön opetuksessa todetuissa ongelmissa. Koska saadut tulokset ovat suoraan siirrettävissä käytäntöön, niin niiden toimivuus nähdään nopeasti käytännön opetustyössä. Tämä lisää tutkimuksen luotettavuutta ja validiutta.

Juuti ja Lavonen [18, s.174] ehdottavat kahta tasoa kehittämistutkimuksen luotettavuuden arviointiin: kokonaisuuden arviointi ja osien arviointi. Kokonaisuuden arvioinnissa tarkastellaan uuden artefaktin uutuutta ja hyödyllisyyttä opetuksessa. Arvioinnissa keskeisiä näkökulmia ovat muun muassa kuinka arviointiaineisto on kerätty ja analysointi, sekä kuinka opettajien kanssa on reflektoitu. [18, s.174-175] Tutkimuksessa laadittu opetusmoduuli sisälsi monipuolisia tehtävätyyppejä ja MathCheck -ohjelmiston käyttöä niiden ratkaisuissa. Nämä osoittautuivat opiskelijoiden näkökulmasta toimiviksi ja hyödyllisiksi. Tarkasteltaessa tutkimuksen osia huomataan, että kyselyaineisto jäi määrältään pieneksi (N=21) verrattuna tenttiin osallistuneiden lukumäärään (N=134). Lisäksi voi huomata taulukoista 5.1 ja 5.4, että vastaajista muodostunut otos ei edusta tilastollisesti koko tenttiin osallistuneiden joukkoa. Kyselyyn vastanneiden näkemykset edustavat ilmeisesti hyvin motivoituneiden ja kurssilla hyvin menestyneiden opiskelijoiden näkemyksiä. Näin ollen tutkimuksessa saatuja tuloksia ei voi yleistää, mutta ne nostavat esiin ilmiöitä tulevia tutkimuksia varten.

Tutkimuseettisestä näkökulmasta tutkimus noudatti hyvän tutkimuksen käytänteitä. Opiskelijoille ilmoitettiin, että tutkimukseen osallistuminen on vapaaehtoista ja osallistuminen ei vaikuta arviointiin. Opiskelijat olivat tietoisia, että kerättyä aineistoa käytettiin vain luvattuun tarkoitukseen. Yksittäisen opiskelijan tiedot eivät ole tunnistettavissa tutkimustuloksissa.

Tulevaisuudessa sulautuvan oppimisen lähestymistapa tulee yleistymään ja tällöin tarve hyville sähköisille oppimisympäristöille tulee kasvamaan. Tätä edesauttaa lukio-opintojen digitalisoituminen ja toisaalta suurien opiskelijamäärien opetus entistä pienemmillä resursseilla. Opetusmoduulissa käytettyä MathCheck-ohjelmistoa kehitetään edelleen ja on odotettavissa, että sen käytettävyys tulee parantumaan entisestään. MathCheck-ohjelmisto on integroitu erilaisiin opiskeluympäristöihin esimerkiksi EXAM:iin [1] ja TIM:iin [5]. Sähköisiin oppimisympäristöihin on tarve monipuolistaa tehtävätyyppejä, jotta saadaan opiskelijan matemaattisen osaamisen piirteet laajasti näkyviin. Erityisesti yliopisto-opinnoissa käsitteellinen ymmärtäminen on keskeinen tavoite.

Kehittämistutkimuksen näkökulmasta luonteva jatkotutkimus olisi tehdä seuraava sykli ja pyrkiä saamaan suurempi osallistujamäärä. Tutkimusasetelmaa voisi soveltaa esimerkiksi ammattikorkeakouluissa ja lukioissa ottamalla mukaan muitakin matematiikan sisältöalueita.

LÄHTEET

[1] "Exam -verkkosivu," https://confluence.csc.fi/pages/viewpage.action?pageId=45387063, viitattu 13.12.2017.

[2] "Mathcheck," http://math.tut.fi/mathcheck/, viitattu 3.8.2017.

[3] "Mathworks matlab," http://se.mathworks.com/products/matlab/, viitattu 20.6.2017.

[4] "Matta-sivusto," https://matta.hut.fi/matta/tausta.html, viitattu 21.1.2017.

[5] "Tim-verkkosivusto," https://tim.jyu.fi/, viitattu 13.12.2017.

[6] "Wolfram alpha," https://www.wolframalpha.com/, viitattu 20.6.2017.

[7] T. Amiel and T. C. Reeves, "Design-based research and educational technology: Rethinking technology and the research agenda," *Educational Technology & Society*, vol. 11, no. 4, pp. 29 – 40, 2008.

[8] T. Anderson and J. Shattuck, "Design-based research: A decade of progress in education research?" *Educational Researcher*, vol. 41, no. 1, pp. 16–25, 2012.

[9] R. Bisht and D. H.S, *Discrete Mathematics.* Oxford University Press, 2015.

[10] E. Draffan and P. Rainger, "A model for the identification of challenges to blended learning," *ALT-J*, vol. 14, no. 1, pp. 55–67, 2006.

[11] D. Edelson, "Design research : What we learn when we engage in design," *The Journal of the Learning Sciences*, vol. 11, no. 1, pp. 105 – 121, 2002.

[12] D. R. Garrison and N. D. Vaughan, *Blended learning in higher education: Framework, principles, and guidelines.* John Wiley & Sons, 2008.

[13] C. R. Graham, *Blended learning systems.* Pfeiffer San Francisco, CA, 2006.

[14] W. K. Grassman and J.-P. Tremblay, *Logic and Discrete Mathematics - A Computer Science Perspective.* Prentice Hall, 1996.

[15] V. Hakala, "Mathcheck ja wolfram alpha opiskelun tukena," 2016, unpublished report.

[16] A. Hirvonen, “Johdatus logiikkaan 1 -kurssimateriaali,” https://wiki.helsinki.fi/display/mathstatKurssit/\Johdatus+logiikkaan+I%2C+syksy+2016, 2016, viitattu 27.1.2018.

[17] M. Huhtanen, *Matematiikan oppimisen tukeminen MATLABin ja vuorovaikutteisten opetusohjelmien avulla.* Diplomityö, Tampereen teknillinen yliopisto, 2017.

[18] K. Juuti and J. Lavonen, “Design-based research ainedidaktisen tutkimuksen metodologisena lähestymistapana,” pp. 157 –158 , 166, 2009.

[19] J. Kilpatrick, J. Swafford, and B. Findell, *Adding it up.* Washington, DC: National Academy Press, 2001.

[20] H. Leppäaho, *Matemaattisen ongelmanratkaisutaidon opettaminen peruskoulussa - ongelmaratkaisukurssin kehittäminen ja arviointi.* Jyväskylän yliopisto, 2007.

[21] J. Linnusmäki, *Matematiikan perusopintojen kehittäminen matematiikan kielentämisen avulla.* Diplomityö, Tampereen teknillinen yliopisto, 2015.

[22] E. Löfström, K. Kanerva, L. Tuuttila, A. Lehtinen, and A. Nevgi, “Laadukkaasti verkossa,” *Verkko-opetuksen käsikirja yliopisto-opettajalle.*, vol. 33, 2006.

[23] A.-M. Mäkelä, *Verkkotyökalut yliopistomatematiikan peruskursseilla.* Diplomityö, Tampereen teknillinen yliopisto, 2016.

[24] A.-M. Mäkelä, S. Ali-Löytty, J.-P. Humaloja, J. Joutsenlahti, J. Kauhanen, and T. Kaarakka, “Stack assingments in university mathematics education,” in *44th SEFI Conference, Engineering Education on Top of the World: Industry University Cooperation*, 2016.

[25] S. K. Miettinen, *Logiikan peruskurssi.* Gaudeamus, 1993.

[26] A. Nevgi and K. Tirri, *Hyvää verkko-opetusta etsimässä: oppimista edistävät ja estävät tekijä verkko-oppimisympäristöissä; opiskelijoiden kokemukset ja opettajien arviot.* Suomen kasvatustieteellinen seura, 2003.

[27] Opetushallitus, “Lukion opetussuunnitelman perusteet,” http://www.oph.fi/download/172124_lukion_opetussuunnitelman_perusteet_2015.pdf, 2015.

[28] E. Pantzar, *Oppimisympäristö verkkona: verkko oppimisympäristönä.* Tampere University Press, 2004.

[29] P. P. Parviainen, *MATLAB-oppimateriaalin kehittäminen Tampereen teknillisessä yliopistossa.* Diplomityö, Tampereen teknillinen yliopisto, 2016.

[30] J. Pernaa, *Kehittämistutkimus opetusalalla.* Jyväskylä: PS-kustannus, 2013.

[31] S. Pohjalainen and K. Silius, *Teaching and learning mathematics at the university level -with and without technology.* Tampere University Press, 2011.

[32] E. Rasimus, A. Valmari, and T. Kaarakka, "Loppuraportti: Kaavat kuntoon! kaavatarkastin opiskelijan apuvälineenä," 2016, unpublished report.

[33] H. Sarikka, *Kielentäminen matematiikan opetuksen ja oppimisen tukena.* Diplomityö, Tampereen teknillinen yliopisto, 2014.

[34] K. Silius, S. Pohjolainen, T. Miilumäki, J. Kangas, and J. Joutsenlahti, "Korkeakoulumatematiikka teekkarin kompastuskivenä?" *Korkeajännityksiä-kohti osallisuutta luovaa korkeakoulutusta*, 2011.

[35] A. Valmari and T. Kaarakka, "Mathcheck: A tool for checking math solutions in detail," in *44th SEFI Conference, Engineering Education on Top of the World: Industry University Cooperation*, 2016, pp. 12–15.

[36] N. D. Vaughan, M. Cleveland-Innes, and D. R. Garrison, *Teaching in blended learning environments: Creating and sustaining communities of inquiry.* Athabasca University Press, 2013.

LIITE A: OPETUSMODUULI

Tässä itseopiskelumateriaalissa käsitellään propositiologiikkaa sekä siihen liittyviä juttuja. Jos et osaa käyttää MathCheckiä, Tästä linkistä pääset symboleihin ja ohjeisiin.

Sitten asiaan! **Propositio** on suljettu lause, joka on joko totta tai epätotta. Jos lause on tosi, se saa arvon 1 ja mikäli lause on epätotta, se saa arvon 0.

Atomilause on yksinkertainen looginen lause, jonka symbolina yleensä käytetään *p,q,r...* , esimerkiksi "TTY sijaitsee Tampereella" on atomilause ja formalisoimalla voisimme merkitä sitä vaikka symbolilla *p*. **Formalisointi** tarkoittaa luonnollisen kielen kääntämistä logiikan kielelle.

Konnektiiveillä voidaan yhdistellä atomilauseita ja näin muodostaa uusia propositioita. Konnektiivien avulla muodostettuja propositioita merkataan usein *P, Q, R, A, B,..* , joiden arvo riippuu atomilauseiden arvosta. Konnektiivit ovat alla olevassa taulukossa.

Konnektiivit

Negaatio	$\neg p$	ei *p*
Konjuktio	$p \wedge q$	*p* ja *q*
Disjunktio	$p \vee q$	*p* tai *q*
Implikaatio	$p \rightarrow q$	jos *p* niin *q*
Ekvivalenssi	$p \Leftrightarrow q$	*p* jos ja vain jos *q*

Seuraavaksi saat testata itse! Merkataan *p* = TTY sijaitsee Tampereella ja *q* = aurinko paistaa. Formalisoi alla olevat lauseet

TTY sijaitsee Tampereella ja aurinko paistaa

Jos TTY sijaitsee Tampereella niin aurinko ei paista

Valmis!

Kuva 1 *Moduulin ensimmäinen sivu.*

Konnektiiveja käsitellään sovitussa järjestyksessä. Järjestys on: $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\Leftrightarrow$. Näin sulkujen määrää saadaan vähennettyä lauseissa. Sulut vaihtavat evaluointijärjestystä suluille ominaiseen tapaan. Muuten lauseita tarkastellaan vasemmalta oikealle.

Totuustauluilla voidaan tarkastella eri propositioiden totuusarvoja. Alla olevaan taulukkoon on listattu edellisellä sivulla esitettyjen konnektiivien totuustauluarvot. Propositiot saavat siis vain arvoja 1 tai 0, riippuen onko propositio tosi vai epätosi. Taulukko aloitetaan listaamalla propositioissa esiintyvien atomilauseiden kaikki mahdolliset kombinaatiot.

Totuustaulu

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$
1	1	0	0	1	1	1	1
1	0	0	1	0	1	0	0
0	1	1	0	0	1	1	0
0	0	1	1	0	0	1	1

Samalla tavalla voidaan tutkia myös monimutkaisempia ja useammilla muuttujilla varustettuja propositioita. Testaa itse! täydennä alla oleva taulukko

p	q	$\neg q$	$p \rightarrow q$	$\neg(p \rightarrow q)$	$p \wedge \neg q$	$\neg(p \rightarrow q) \Leftrightarrow p \wedge \neg q$
1	1					
1	0					
0	1					
0	0					

Valmis!

Kuva 2 *Moduulin toinen sivu.*

Tautologia ja ekvivalenssit

Hyvä! Edellisellä sivulla täydentämässäsi taulukossa viimeiselle sarakkeelle tuli pelkkiä ykkösiä, eli lause oli tosi kaikilla p:n q:n arvoilla. Tälläista tilaa kutsutaan **tautologiaksi**.

$\neg(p \to q)$	$p \wedge \neg q$	$\neg(p \to q) \Leftrightarrow p \wedge \neg q$
0	0	1
1	1	1
0	0	1
0	0	1

Kun taas vertaat kahta tautologiaa edeltävää lausetta, saatat huomata, että ne saavat samat totuusarvot kaikilla riveillä. Tässä tapauksessa lauseet ovat **loogisesti ekvivalentit** . Loogiset ekvivalenssit ovat tärkeitä logiikassa, sillä niiden avulla pystymme sieventämään ja manipuloimaan loogisia lauseita. Lähdemmekin seuraavaksi tarkastelemaan erilaisia loogisia ekvivalensseja.

Määritellään **loogiset vakiot T** ja F (opintomonisteessa t ja e, Mathcheckin vuoksi valitaan T ja F). **T** (true) saa aina totuusarvon 1, ja kirjoitat sen Mathcheckiin TT. F (false) saa aina totuusarvon 0, ja kirjoitat sen Mathcheckiin FF. Alla on esitetty ekvivalensseja, jotka voit näppärästi todistaa totuustaulujen avulla halutessasi.

$p \vee \neg p =$ T	L1
$p \wedge \neg p =$ F	L2

Nämä kaksi ovat myös helppo päätellä loogisesti. Jos p on "ulkona tuulee" niin ensimmäinen laki olisi muotoa "ulkona tuulee tai ulkona ei tuule", mikä luonnollisesti on totta, sillä jompikumpi tila on voimassa. Mieti, miten toinen laki menisi suomennettuna ja saatat huomata kuinka siitä tulee loogisesti epätosi.

$p \vee$ **F** $= p$	L3
$p \wedge$ T $= p$	L4

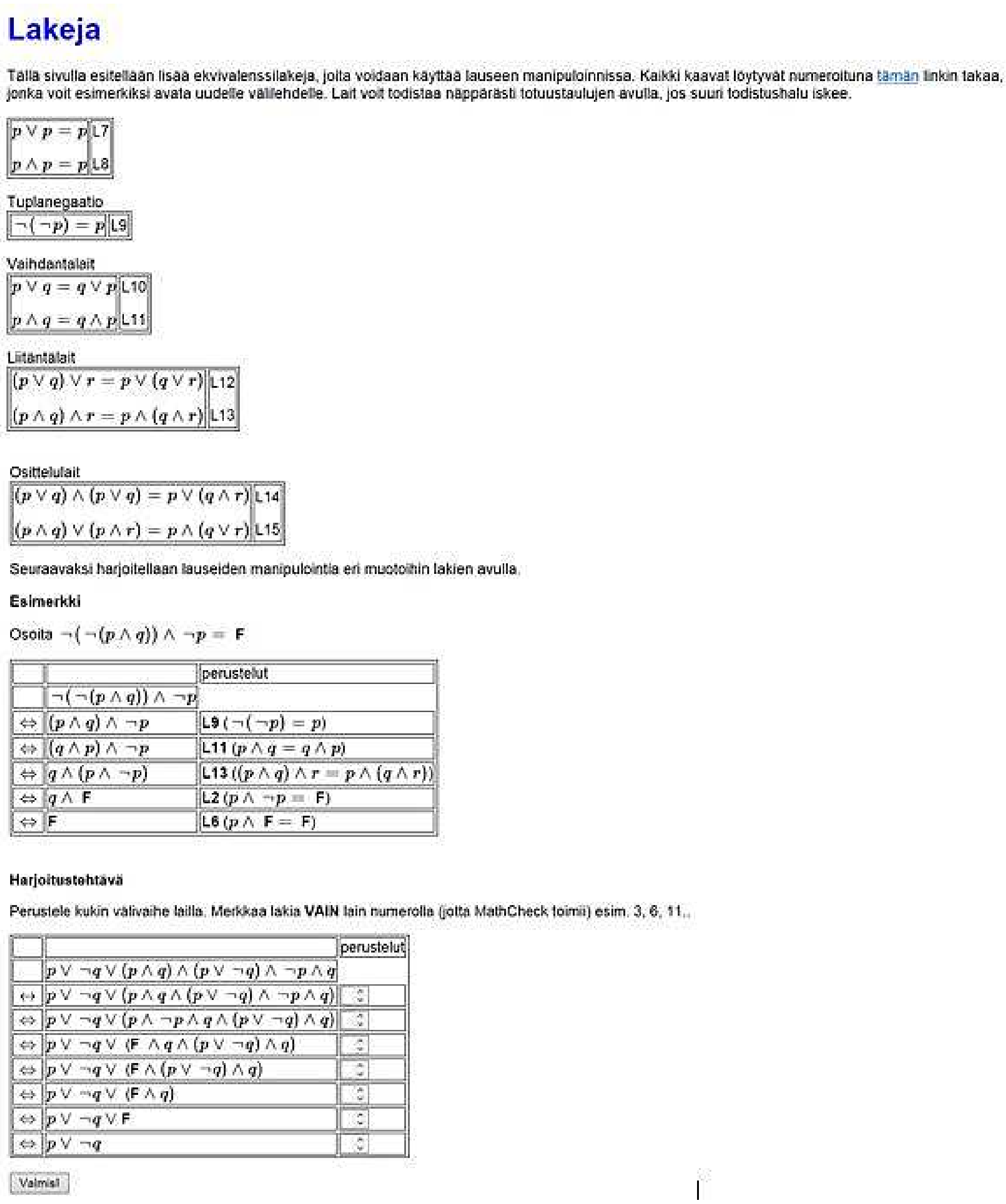
Yllä olevia lakeja kutsutaan Identiteettilaeiksi.

$p \vee$ **T** $=$ T	L5
$p \wedge$ **F** $=$ **F**	L6

Ekvivalensseja tulee useampia, joten ne on koottu yhdelle sivulle tänne. Tehtäviä tehdessäsi, kannattaa avata tämä sivu välilehdelle/uuteen ikkunaan, jotta voit tarkastella lakeja.

Kohti seuraavaa sivua!

Kuva 3 *Moduulin kolmas sivu.*



Lakeja

Tällä sivulla esitellään lisää ekvivalenssilakeja, joita voidaan käyttää lauseen manipuloinnissa. Kaikki kaavat löytyvät numeroituna tämän linkin takaa, jonka voit esimerkiksi avata uudelle välilehdelle. Lait voit todistaa näppärästi totuustaulujen avulla, jos suuri todistushalu iskee.

$p \vee p = p$	L7
$p \wedge p = p$	L8

Tuplanegaatio

$\neg(\neg p) = p$	L9

Vaihdantalait

$p \vee q = q \vee p$	L10
$p \wedge q = q \wedge p$	L11

Liitäntälait

$(p \vee q) \vee r = p \vee (q \vee r)$	L12
$(p \wedge q) \wedge r = p \wedge (q \wedge r)$	L13

Osittelulait

$(p \vee q) \wedge (p \vee q) = p \vee (q \wedge r)$	L14
$(p \wedge q) \vee (p \wedge r) = p \wedge (q \vee r)$	L15

Seuraavaksi harjoitellaan lauseiden manipulointia eri muotoihin lakien avulla.

Esimerkki

Osoita $\neg(\neg(p \wedge q)) \wedge \neg p =$ **F**

		perustelut
	$\neg(\neg(p \wedge q)) \wedge \neg p$	
$\Leftrightarrow$	$(p \wedge q) \wedge \neg p$	L9 $(\neg(\neg p) = p)$
$\Leftrightarrow$	$(q \wedge p) \wedge \neg p$	L11 $(p \wedge q = q \wedge p)$
$\Leftrightarrow$	$q \wedge (p \wedge \neg p)$	L13 $((p \wedge q) \wedge r = p \wedge (q \wedge r))$
$\Leftrightarrow$	$q \wedge$ **F**	L2 $(p \wedge \neg p =$ **F**$)$
$\Leftrightarrow$	**F**	L6 $(p \wedge$ **F** $=$ **F**$)$

Harjoitustehtävä

Perustele kukin välivaihe lailla. Merkkaa lakia **VAIN** lain numerolla (jotta MathCheck toimii) esim. 3, 6, 11..

		perustelut
	$p \vee \neg q \vee (p \wedge q) \wedge (p \vee \neg q) \wedge \neg p \wedge q$	
$\Leftrightarrow$	$p \vee \neg q \vee (p \wedge q \wedge (p \vee \neg q) \wedge \neg p \wedge q)$	
$\Leftrightarrow$	$p \vee \neg q \vee (p \wedge \neg p \wedge q \wedge (p \vee \neg q) \wedge q)$	
$\Leftrightarrow$	$p \vee \neg q \vee ($**F** $\wedge q \wedge (p \vee \neg q) \wedge q)$	
$\Leftrightarrow$	$p \vee \neg q \vee ($**F** $\wedge (p \vee \neg q) \wedge q)$	
$\Leftrightarrow$	$p \vee \neg q \vee ($**F** $\wedge q)$	
$\Leftrightarrow$	$p \vee \neg q \vee$ **F**	
$\Leftrightarrow$	$p \vee \neg q$	

Valmis!

Kuva 4 *Moduulin neljäs sivu.*

Absorptiolait

Seuraavaksi otamme käsittelyyn absorptiolait.

$p \wedge (p \vee q) = p$	L16
$p \vee (p \wedge q) = p$	L17
$p \wedge (\neg p \vee q) = (p \wedge q)$	L18
$p \vee (\neg p \wedge q) = (p \vee q)$	L19

Esimerkki

Osoita laki L16 käyttäen lakeja L1-L15

		perustelut
	$p \wedge (p \vee q)$	
$\Leftrightarrow$	$(p \wedge p) \vee (p \wedge q)$	L15 ($(p \wedge q) \vee (p \wedge r) = p \wedge (q \vee r)$)
$\Leftrightarrow$	$p \vee (p \wedge q)$	L8 ($p \wedge p = p$)
$\Leftrightarrow$	$(p \wedge T) \vee (p \wedge q)$	L4 ($p \wedge T = p$)
$\Leftrightarrow$	$p \wedge (T \vee q)$	L15 ($(p \wedge q) \vee (p \wedge r) = p \wedge (q \vee r)$
$\Leftrightarrow$	$p \wedge T$	L5 ($p \vee T = T$)
$\Leftrightarrow$	p	L4 ($p \wedge T = p$)

Harjoitustehtävä

Osoita laki L18 ($p \wedge (\neg p \vee q) = p \wedge q$) (harjoittele käyttäen välivaiheita!) Kalkki kaavat löydät täältä. Tästä linkistä pääset symboleihin ja ohjeisiin.

```
p and (!p or q) <=>
```

Valmis!

Kuva 5 Moduulin viides sivu.

De Morgan

Jo joukko-opistakin tutut De Morganin lait löytyvät myös logiikan puolelta, ja ne muistuttavat kovasti toisiaan.

$\neg(p \wedge q) = \neg p \vee \neg q$	L20
$\neg(p \vee q) = \neg p \wedge \neg q$	L21

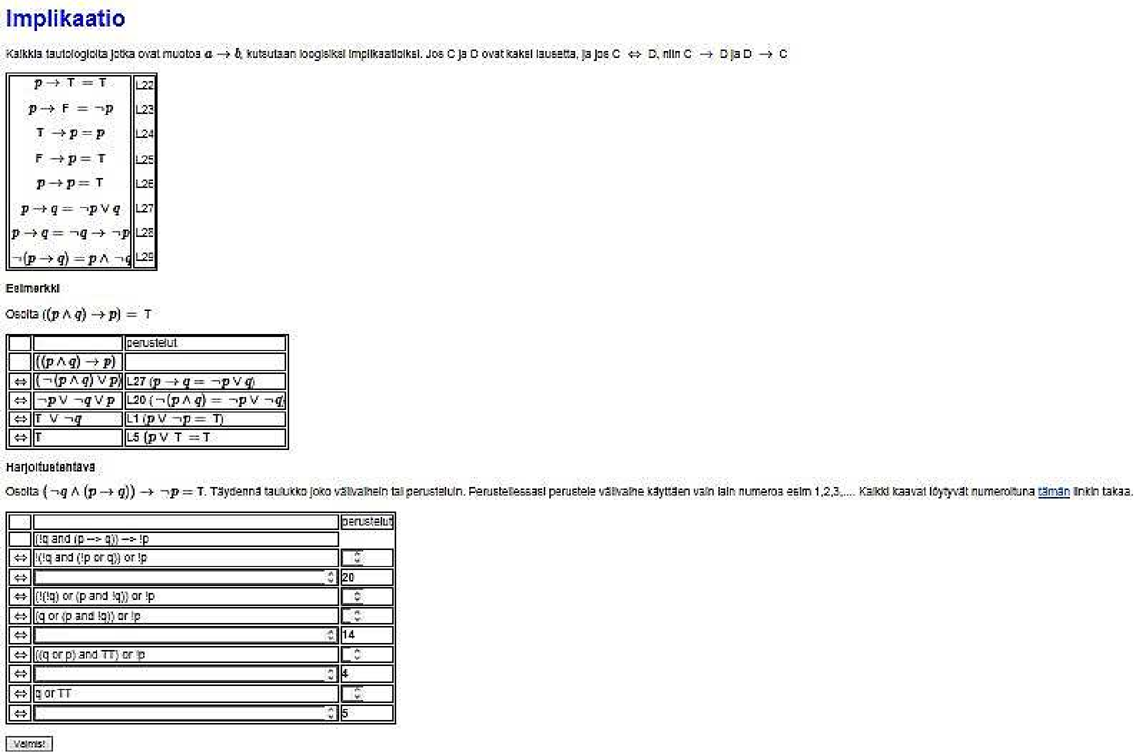
Harjoitustehtävä

Täydennä puuttuvat välivaiheet perustelujen perusteella. Tämän linkan takaa löydät kaikki lait numeroituna, voit avata sen esimerkiksi uudelle välilehdelle tai ikkunaan.

		perustelut
	$\neg((p \vee \neg q) \wedge \neg r)$	
$\Leftrightarrow$		L20
$\Leftrightarrow$		L9
$\Leftrightarrow$		L21
$\Leftrightarrow$		L9
$\Leftrightarrow$	(!p or r) and (q or r)	L14

Valmis!

Kuva 6 Moduulin kuudes sivu.



Implikaatio

Kaikkia tautologioita jotka ovat muotoa $a \rightarrow b$, kutsutaan loogisiksi implikaatioiksi. Jos C ja D ovat kaksi lausetta, ja jos C $\Leftrightarrow$ D, niin C $\rightarrow$ D ja D $\rightarrow$ C

$p \rightarrow \mathsf{T} = \mathsf{T}$	L22
$p \rightarrow \mathsf{F} = \neg p$	L23
$\mathsf{T} \rightarrow p = p$	L24
$\mathsf{F} \rightarrow p = \mathsf{T}$	L25
$p \rightarrow p = \mathsf{T}$	L26
$p \rightarrow q = \neg p \vee q$	L27
$p \rightarrow q = \neg q \rightarrow \neg p$	L28
$\neg(p \rightarrow q) = p \wedge \neg q$	L29

Esimerkki

Osoita $((p \wedge q) \rightarrow p) = \mathsf{T}$

		perustelut
	$((p \wedge q) \rightarrow p)$	
$\Leftrightarrow$	$(\neg(p \wedge q) \vee p)$	L27 $(p \rightarrow q = \neg p \vee q)$
$\Leftrightarrow$	$\neg p \vee \neg q \vee p$	L20 $(\neg(p \wedge q) = \neg p \vee \neg q)$
$\Leftrightarrow$	$\mathsf{T} \vee \neg q$	L1 $(p \vee \neg p = \mathsf{T})$
$\Leftrightarrow$	T	L5 $(p \vee \mathsf{T} = \mathsf{T}$

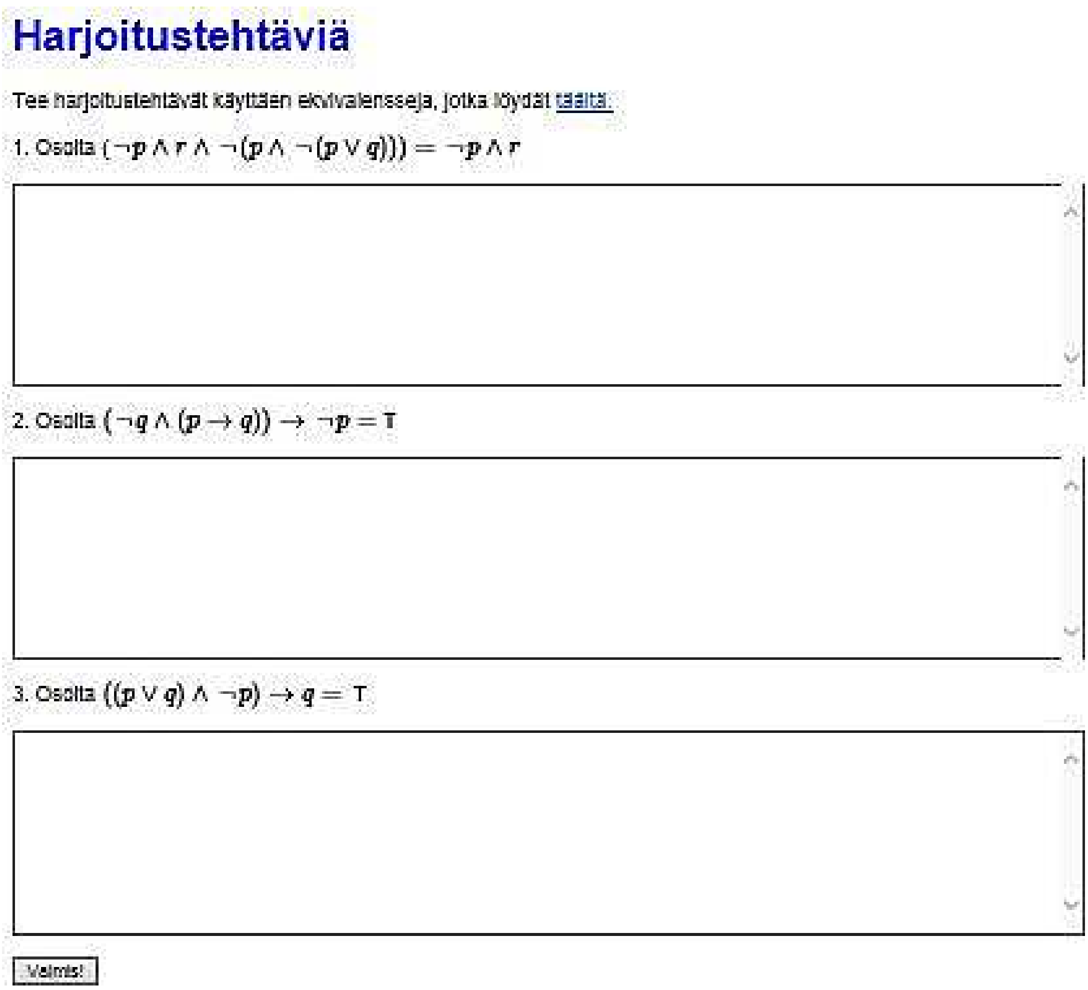
Harjoitustehtävä

Osoita $(\neg q \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow \neg p = \mathsf{T}$. Täydennä taulukko joko välivaihein tai perusteluin. Perustellessasi perustele välivaihe käyttäen vain lain numeroa esim 1,2,3,.... Kaikki kaavat löytyvät numeroituna tämän linkin takaa.

		perustelut
	(!q and (p --> q)) --> !p	
$\Leftrightarrow$	!(!q and (!p or q)) or !p	
$\Leftrightarrow$		20
$\Leftrightarrow$	(!(!q) or (p and !q)) or !p	
$\Leftrightarrow$	(q or (p and !q)) or !p	
$\Leftrightarrow$		14
$\Leftrightarrow$	((q or p) and TT) or !p	
$\Leftrightarrow$		4
$\Leftrightarrow$	q or TT	
$\Leftrightarrow$		5

Valmis!

Kuva 7 *Moduulin seitsemäs sivu.*



Kuva 8 *Moduulin kahdeksas sivu.*

Disjunktiivinen normaalimuoto DNF

Ensin määritellään pari uutta käsitettä:

- **Literaali**: atomilause (tai totuusfunktion muuttuja) tai sen negaatio (esim. $p, \neg p, q ..$)
- **Perusdisjunktio**:literaali tai literaalien disjunktio ($p, \neg p, p \vee q \vee \neg r . . .$)
- **Peruskonjunktio**:literaali tai literaalien konjunktio ($p, \neg p, p \wedge q \wedge \neg r ...$)

DNF Määritelmä: Loogisen lauseen sanotaan olevan disjunktiivisessa normaalimuodossa, jos se kirjoitettu disjunktiona, jossa kaikki termit ovat literaalien konjunktioita.

Muotoa kutsutaan täydelliseksi disjunktiiviseksi normaalimuodoksi, jos jokainen propositio esiintyy kaikissa peruskonjuktiossa.

Esimerkki

$(p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r)$

Eli sulkujen sisällä löytyy vain konjunktioita ja sulkujen ulkopuolelta vain disjunktioita. Huomaa, että negaatioiden tulee olla literaaleissa kiinni (eikä esim. sulkujen ulkopuolella). Muoto on myös täydellinen, sillä jokainen propositio (*p*,*q* ja *r*) esiintyy kaikissa peruskonjunktioissa.

Esimerkki

Muuta lause $p \wedge (q \to r)$ muotoon DNF.

		perustelut
	$p \wedge (q \to r)$	
⇔	$p \wedge (\neg q \vee r)$	**L27** $p \to q = \neg p \vee q$
⇔	$(p \wedge \neg q) \vee (p \wedge r)$	**L15** $p \wedge (q \vee r) = (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

Kun lähdet muuttamaan lauseita normaalimuotoihin, käy läpi seuraavat kolme vaihetta:

1. Muunna lausetta niin, että siinä ei ole enää konnektiiveja $\to$ ja ⇔

2. Siirrä negaatiot vaikuttamaan suoraan literaaleihin (De Morgan)

3. Muodosta haluttu normaalimuoto tunnettujen lakien (osittelu, liitäntäis-..) kautta

Harjoitus

Muuta lause $((p \to q) \wedge r)$ DNF muotoon (Kaavat numeroituna täältä.)

```
(p --> q) and r <=>
```

Valmis!

Kuva 9 *Moduulin yhdeksäs sivu.*

Konjunktiivinen normaalimuoto CNF

Määritelmä: Loogisen lauseen sanotaan olevan konjunktiivisessa normaalimuodossa, jos se kirjoitettu konjunktiivina, jossa kaikki termit ovat literaalien disjunktioita.

Muotoa kutsutaan täydelliseksi konjunktiiviseksi normaalimuodoksi, jos jokainen propositio esiintyy kaikissa perusdisjunktioissa.

Esimerkki

Täydellinen CNF

$(p \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee q \vee r)$

Eli sulkujen sisällä löytyy vain disjunktioita ($\vee$ - konnektiiveja) ja sulkujen ulkopuolelta vain konjunktioita ($\wedge$ -konnektiiveja).

Esimerkki

Muuta $(p \wedge (p \rightarrow q))$ täydelliseksi CNF:ksi.

		perustelut
	$p \wedge (p \rightarrow q)$	
$\Leftrightarrow$	$p \wedge (\neg p \vee q)$	L27 $(p \rightarrow q = \neg p \vee q)$
$\Leftrightarrow$	$(p \vee \mathrm{F}) \wedge (\neg p \vee q)$	L3 $(p \vee \mathrm{F} = p)$
$\Leftrightarrow$	$(p \vee (q \wedge \neg q)) \wedge (\neg p \vee q)$	L2 $(p \wedge \neg p = \mathrm{F})$
'hArr'	$(p \vee q) \wedge (p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee q)$	L13 $(p \vee (q \wedge r) = (p \vee q) \wedge (p \vee r))$

Harjoitustehtävä

Muuta lause $(p \rightarrow q) \rightarrow r$ muotoon CNF. (Kaavat numeroituna täältä.)

```
( p --> q) --> r
 <->
```

Valmis!

Kuva 10 *Moduulin kymmenes sivu.*

DNF ja CNF

Muistutuksena vielä, kun lähdet muuttamaan lauseita normaalimuotoihin, käy läpi seuraavat kolme vaihetta:

1. Muunna lausetta niin, että siinä ei ole enää konnektiiveja $\to$ ja $\Leftrightarrow$
2. Siirrä negaatiot vaikuttamaan suoraan literaaleihin (De Morgan)
3. Muodosta haluttu normaalimuoto tunnettujen lakien (osittelu, liittänäis-..) kautta

(Kaavat numeroituna tämän) linkin takaa löydät kaikki lait kompaktisti. Kannattaa avata linkki uuteen ikkunaan, jotta voit katsella lakeja samalla teet tehtäviä, mikäli et muista lakeja ulkoa.

Tehtävä 1

Muunna lause $(p \to q) \to p$ DNF:ksi

(p --> q) --> p <->

Tehtävä 2

Muunna lause $(p \to q) \to p$ CNF:ksi

(p --> q) --> p <->

Tehtävä 3

Muodosta täydellinen CNF muoto lauseelle $(p \to (q \vee r)) \wedge (p \vee q))$

(p --> (q or r)) and (p or q) <->

Etkö meinaa saada normaalimuotoosi kaikkia literaaleja? Nappaa vinkkiä tästä

Tehtävä 4

Muodosta täydellinen DNF muoto lauseelle $p \to q$

p --> q <->

Valmis!

Kuva 11 *Moduulin yhdestoista sivu.*

Loppu

Hienosti selvisit! Nyt pitäisi olla loogiset ekvivalenssit sekä normaalimuodot hallussa.

Muistathan täyttää palautteen!

Tämän kokonaisuuden lähteinä on käytetty:

Terhi Kaarakka : Opintomoniste Algoritmimatematiikka MAT-02650, 2016-2017 toteutuskerta, Tampereen teknillinen yliopisto

Winfried Karl Grassmann & Jean-Paul Tremblay : Logic and discrete mathematics : a computer science perspective, 1996

James L. Hein : Discrete Mathematics, 1996

Kuva 12 *Moduulin kahdestoista sivu.*