TAMPEREEN TEKNILLINEN YLIOPISTO
TAMPERE UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

OLLI HUOPIO
JOHDANTO KOMPLEKSISIIN MONIARVOISIIN FUNKTIOIHIN

Kandidaatintyö

Tarkastaja: Petteri Laakkonen
1.12.2017

TIIVISTELMÄ

OLLI HUOPIO: Johdanto kompleksisiin moniarvoisiin funktioihin
Tampereen teknillinen yliopisto
Kandidaatintyö, 25 sivua, 4 liitesivua
Joulukuu 2017
Teknis-luonnontieteellinen koulutusohjelma
Pääaine: Matematiikka
Tarkastajat: Tutkijatohtori Petteri Laakkonen
Avainsanat: kompleksianalyysi, moniarvoinen funktio, kiertopiste, haara, leikkauskäyrä, funktion analyyttisyys, logaritmifunktio, yleinen potenssifunktio, arkussinifunktio

Moniarvoisella funktiolla tarkoitetaan funktiota, jonka jotakin määrittelyjoukon alkiota vastaa useampi kuin yksi maalijoukon alkio. Voidaan ajatella, että funktio saa tällöin arvokseen maalijoukon alkion sijasta joukon maalijoukon alkioita. Kompleksianalyysissä etenkin monet alkeisfunktioiden käänteisfunktiot ovat moniarvoisia. Tässä työssä perehdytään kompleksianalyysin perustason oppikirjojen tapaan käsitellä moniarvoisia funktioita. Työssä määritellään moniarvoisiin funktioihin liittyvät käsitteet kiertopiste, haara ja leikkauskäyrä sekä havainnollistetaan näitä käsitteitä kompleksisen logaritmifunktion, yleisen potenssifunktion ja arkussinifunktion kautta. Lisäksi työssä perehdytään näiden kolmen esimerkkifunktion avulla siihen, miten moniarvoisia funktioita voidaan käsitellä yksiarvoisina ja analyyttisinä funktioina. Käsittelyn perusperiaate on se, että määrittelyjoukon jokaisella luvulla funktion arvoista valitaan sopivalla tavalla yksi, ja näin saatu yksiarvoinen funktion haara on analyyttinen jossain kompleksitason alueessa.

SISÄLLYS

TERMIT JA SYMBOLIT

θ_α	argumentti välillä $(\alpha, \alpha + 2\pi]$
exp	asiayhteydestä riippuen joko reaalinen tai kompleksinen eksponenttifunktio
∞	asiayhteydestä riippuen joko reaalinen tai kompleksinen äärettömyys
$f : X \to Y$	funktio f, jonka määrittelyjoukko on X ja maalijoukko Y
z, w, c	kompleksilukuja
$\mathbb{C}$	kompleksilukujen joukko
log	kompleksinen luonnollinen logaritmifunktio
$\Delta\theta$	kulman θ muutos
$\operatorname{Arg} z$, Θ	luvun z argumentin päähaara eli argumentti välillä $(-\pi, \pi]$
$z = re^{i\theta}$	luvun z eksponenttiesitys, jossa $r = \|z\|$ ja $\theta \in \arg z$
$\|z\|$	luvun z moduli
$\arg z$	nollasta poikkeavan luvun z argumenttien joukko
$(a, b]$	reaalilukujen a ja b välinen jana tai puolisuora, johon ei sisälly lukua a ja johon sisältyy luku b
$\mathbb{R}$	reaalilukujen joukko
ln	reaalinen luonnollinen logaritmifunktio
$\sqrt{}$	reaalinen neliöjuurifunktio
$x \notin X$	x ei ole joukon X alkio
$x \in X$	x on joukon X alkio
$\mathbb{R}_0^+$	$\{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$
$\mathbb{C}_{\neq 0}$	$\{z \in \mathbb{C} : z \neq 0\}$
$\mathbb{C}_\alpha$	$\{z \in \mathbb{C}_{\neq 0} : \alpha \notin \arg z\}$

1. JOHDANTO

Yleensä matemaattisella funktiolla tarkoitetaan sellaista relaatiota joukosta X joukkoon Y, jossa jokaista joukon X alkiota vastaa *täsmälleen* yksi joukon Y alkio [5]. Itse vastaavuus usein määritellään jonkinlaisen säännön, esimerkiksi kaavan avulla, kuten reaalifunktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+, f(x) = x^2$ tapauksessa.

Joskus vastaavuuden määrittelemisessä säännön avulla tulee kuitenkin ongelmia. Näin käy esimerkiksi, jos funktio $g : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ määritellään siten, että $g(x)$ on sellainen luku y, joka toteuttaa yhtälön $y^2 = x$. Tällöin funktion määritelmä ei täyty, sillä jokaista aidosti positiivista reaalilukua x vastaa nyt kaksi lukua, $-\sqrt{x}$ ja $\sqrt{x}$.

Tällaisesta "funktiosta", jonka jotakin määrittelyjoukon alkiota vastaa useampi kuin yksi maalijoukon alkio, käytetään nimitystä *moniarvoinen (multivalued) funktio*. Voidaan ajatella, että funktio saa arvokseen maalijoukon alkion sijasta joukon maalijoukon alkioita. Moniarvoisen funktion termin yhteydessä saatetaan normaalista funktiosta selvyyden vuoksi käyttää termiä *yksiarvoinen (single-valued) funktio*.

Kompleksianalyysissä etenkin alkeisfunktioiden käänteisfunktiot ovat usein moniarvoisia funktioita. Jotta funktion analyyttisyyttä ja siihen liittyviä tuloksia päästään näihin funktioihin soveltamaan, on niitä tarpeen pystyä käsittelemään yksiarvoisina funktioina. Tämän työn tarkoituksena on esitellä kompleksisiin moniarvoisiin funktioihin liittyviä käsitteitä sekä kolmen esimerkkifunktion avulla sitä, miten moniarvoisia funktioita voidaan käsitellä yksiarvoisina ja analyyttisinä funktioina. Esimerkkifunktioina toimivat logaritmifunktio, yleinen potenssifunktio ja arkussinifunktio.

Luvussa 2 perehdytään moniarvoisen funktion kiertopisteen, haaran ja leikkauskäyrän käsitteisiin kompleksisen neliöjuurifunktion avulla. Luvuissa 3 - 5 näitä käsitteitä havainnollistetaan esimerkkifunktioiden kautta sekä tarkastellaan, miten esimerkkifunktioita voidaan käsitellä yksiarvoisina ja analyyttisinä funktioina. Luvussa 6 on yhteenveto työssä esitetyistä asioista. Työ perustuu kompleksianalyysin perustason oppikirjoihin, ja lukijalta oletetaan alan perustietojen hallintaa.

2. MONIARVOISIIN FUNKTIOIHIN LIITTYVIÄ KÄSITTEITÄ

Tässä luvussa perehdytään moniarvoisen funktion kiertopisteen, haaran ja leikkauskäyrän käsitteisiin kompleksisen neliöjuurifunktion $z^{1/2}$ (jatkossa vain neliöjuurifunktio)[1] avulla. Luku tarjoaa ymmärrettävän kokonaisuuden näistä käsitteistä, jotka työn tekijän näkemyksen mukaan on kirjallisuudessa esitelty hajanaisesti ja lyhyesti.

2.1 Neliöjuurifunktion määritelmä

Määritellään ensin neliöjuurifunktio. Tässä työssä moniarvoisen funktion arvo on joukko, johon kuuluu kompleksilukuja eli funktion *yksittäisiä arvoja*. Neliöjuurifunktion yksittäisiä arvoja luvulla z kutsutaan luvun z neliöjuuriksi. Jos z on jokin nollasta poikkeava kompleksiluku eli $z \in \mathbb{C}_{\neq 0}$, se voidaan esittää polaarimuodossa $z = re^{i\theta}$, jossa $r = |z|$ ja $\theta \in \arg z$. Tällöin sen neliöjuuri on luku $w = \rho e^{i\phi}$, jolle on voimassa $w^2 = \rho^2 e^{i2\phi} = z = re^{i\theta}$. Luvut ovat yhtäsuuret, jos niiden modulit ovat yhtäsuuret ja luvun w^2 argumentti on jokin luvun z argumenteista eli jos

$$\rho^2 = r \qquad \text{ja} \qquad 2\phi \in \arg z.$$

Tästä seuraa $\rho = \sqrt{r}$ ja $\phi = \theta/2$, kun θ on luvun z argumentti. Neliöjuurifunktion arvoksi eli neliöjuurten joukoksi saadaan siis

$$z^{1/2} = \{\sqrt{r}e^{i(\theta/2)} : \theta \in \arg z\}. \tag{2.1}$$

Toisaalta jokainen luvun z argumentti θ voidaan esittää pääargumentin $\operatorname{Arg} z$ avulla $\theta = \operatorname{Arg} z + k2\pi$, jossa k on jokin kokonaisluku. Merkitään $\Theta = \operatorname{Arg} z$. Tällöin neliöjuurten argumentit ovat muotoa $\theta/2 = \Theta/2 + k\pi$. Koska kyseessä on sama luku, jos argumentit eroavat jollain luvun 2π monikerralla, luvulla z on kaksi neliöjuurta, joiden argumentit saadaan kokonaisluvun k arvoilla 0 ja 1. Arvolla $k = 0$ neliöjuuri

[1] Jatkossa yleisemminkin: ilman tarkentavaa ilmausta "reaalinen"tai "kompleksinen"kyseessä on kompleksinen versio.

on $\sqrt{r}e^{i(\Theta/2)}$. Arvolla $k = 1$ neliöjuuri on

$$\sqrt{r}e^{i(\Theta/2+\pi)} = \sqrt{r}e^{i(\Theta/2)}e^{i\pi} = -\sqrt{r}e^{i(\Theta/2)}$$

eli toisen neliöjuuren vastaluku. Neliöjuurifunktion arvo voidaan myös siis kirjoittaa

$$z^{1/2} = \{\sqrt{r}e^{i(\Theta/2)}, -\sqrt{r}e^{i(\Theta/2)}\}. \tag{2.2}$$

Moniarvoista neliöjuurifunktiota ei yleensä määritellä origossa [4, s. 64], [2, s. 25]. Tämä johtuu siitä, että nollalla on vain yksi neliöjuuri, mikä aiheuttaisi käytännön hankaluuksia moniarvoisuutta käsiteltäessä. Neliöjuurifunktion määrittelyjoukko on siis $\mathbb{C}_{\neq 0}$.

2.2 Kiertopiste

Tutkitaan neliöjuurifunktion yksittäistä arvoa, kun kierretään origoa r_0-säteistä origokeskistä ympyrää pitkin. Olkoon $z_0 = r_0 e^{i\theta_0}$ piste tällä ympyrällä. Yhtälön (2.1) mukaan $\sqrt{r_0}e^{i(\theta_0/2)}$ on tämän pisteen neliöjuuri.

Jos lähdetään kiertämään ympyrää vastapäivään liikkuen kerralla vain pienen kulmanmuutoksen verran ja valitaan pisteiden neliöjuureksi aina edellisen pisteen neliöjuurta lähinnä oleva neliöjuuri, pisteessä $r_0 e^{i(\theta_0+\Delta\theta)}$ neliöjuuri on $\sqrt{r_0}e^{i(\theta_0+\Delta\theta)/2}$. Tällä tavalla ikään kuin jatkuvasti kierretyn täyden kierroksen jälkeen pisteen z_0 neliöjuuri on muuttunut luvuksi

$$\sqrt{r_0}e^{i(\theta_0+2\pi)/2} = \sqrt{r_0}e^{i(\theta_0/2+\pi)} = -\sqrt{r_0}e^{i(\theta_0/2)}$$

eli pisteen z_0 toiseksi neliöjuureksi. Neliöjuurifunktion yksittäinen arvo pisteessä z_0 on siis eri ennen origon kiertoa kuin origon kierron jälkeen. Tämän takia origo on moniarvoisen neliöjuurifunktion *kiertopiste*.

Määritelmä 2.2.1. [1, s. 440] Kompleksitason pistettä c_0 kutsutaan moniarvoisen funktion $f(z)$ *kiertopisteeksi* (*branch point*), mikäli funktion f yksittäinen arvo jossakin pisteessä z_0 minkä tahansa pisteen c_0 ympäri jatkuvasti kierretyn kierroksen jälkeen ei ole sama kuin ennen kierrosta. Piste c_0 on *kertaluokan* n kiertopiste, mikäli yksittäinen arvo pisteessä z_0 palautuu alkuperäiseksi vähintään n kierroksen jälkeen. Muutoin c_0 on *äärettömän* kertaluokan kiertopiste.

Origo on neliöjuurifunktion kertaluokan 2 kiertopiste, sillä toisen kierroksen jälkeen pisteen z_0 neliöjuuri on sama kuin ennen kierroksia:

$$\sqrt{r_0}e^{i(\theta_0+4\pi)/2} = \sqrt{r_0}e^{i(\theta_0/2+2\pi)} = \sqrt{r_0}e^{i(\theta_0/2)}.$$

Kirjan [1] mukaan myös laajennetun kompleksitason piste $z = \infty$ voi olla funktion $f(z)$ kiertopiste ja tämän tutkimiseksi tulee tarkastella, onko origo funktion $f(1/z)$ kiertopiste. Koska pisteen $z_0 = r_0e^{i\theta_0}$ käänteisluku on $1/z_0 = r_0^{-1}e^{i(-\theta_0)}$, tämän yksi neliöjuuri on $\sqrt{r_0^{-1}}e^{i(-\theta_0/2)}$. Vastaavanlaisella tarkastelulla kuin ylempänä nähdään, että origo on funktion $(1/z)^{1/2}$ kertaluokan 2 kiertopiste, joten piste $z = \infty$ on neliöjuurifunktion kertaluokan 2 kiertopiste.

Origo ja piste $z = \infty$ ovat neliöjuurifunktion kiertopisteitä käytännössä sen takia, että mikä tahansa kierros origon ympäri aiheuttaa muutoksen pisteiden z_0 ja $1/z_0$ valituissa argumenteissa. Tästä poiketen minkä tahansa äärellisen pisteen $c \neq 0$ ympäri voidaan aina kiertää sellainen pistettä tarpeeksi lähellä kulkeva kierros, joka ei kierrä origoa. Tällöin kierros ei aiheuta muutosta pisteen z_0 valitussa argumentissa. Lisäksi koska pisteen z_0 moduli on aina sama, neliöjuurifunktion yksittäinen arvo pisteessä z_0 on sama ennen kierrosta kuin kierroksen jälkeen. Tästä nähdään, ettei mikään äärellinen kompleksitason piste ole neliöjuurifunktion kiertopiste, ja origo ja piste $z = \infty$ ovat siten neliöjuurifunktion ainoat kiertopisteet.

2.3 Haara

Mikäli jokaisessa pisteessä $z \in \mathbb{C}_{\neq 0}$ neliöjuureksi valitaan yhtälöstä (2.2) $\sqrt{r}e^{i(\Theta/2)}$, saadaan funktio

$$g(z) = \sqrt{r}e^{i(\Theta/2)}.$$

Tällä yksiarvoisella funktiolla on sama määrittelyjoukko kuin moniarvoisella neliöjuurifunktiolla ja se saa jokaisessa määrittelyjoukkonsa pisteessä arvoksi jonkin neliöjuurifunktion yksittäisen arvon.

Tutkitaan, missä g on jatkuva. Eulerin kaavaa $e^{i\phi} = \cos\phi + i\sin\phi$ käyttäen g voidaan kirjoittaa komponenttifunktioina

$$g(z) = \sqrt{r}\cos(\Theta/2) + i\sqrt{r}\sin(\Theta/2).$$

Tässä funktio $\sqrt{r} = \sqrt{|z|}$ on jatkuva joukossa $\mathbb{C}_{\neq 0}$, koska $|z|$ on jatkuva joukossa $\mathbb{C}_{\neq 0}$ ja reaalinen neliöjuuri on jatkuva kaikilla positiivisilla reaaliluvuilla. Olkoon $\mathbb{C}_\pi$ joukko, johon kuuluvat ne joukon $\mathbb{C}_{\neq 0}$ kompleksiluvut, jotka eivät sijaitse negatiivisella x-akselilla. Funktiot $\cos(\Theta/2)$ ja $\sin(\Theta/2)$ ovat jatkuvia joukossa $\mathbb{C}_\pi$, sillä

$\Theta = \operatorname{Arg} z$ on jatkuva joukossa $\mathbb{C}_\pi$ ja sini ja kosini ovat jatkuvia kaikilla reaaliluvuilla.

Funktiot $\sqrt{r}$, $\cos(\Theta/2)$ ja $\sin(\Theta/2)$ ovat siis jatkuvia joukossa $\mathbb{C}_\pi$, joten funktion g molemmat komponenttifunktiot ovat jatkuvia joukossa $\mathbb{C}_\pi$. Tämän perusteella g on jatkuva kaikkialla määrittelyjoukossaan $\mathbb{C}_{\neq 0}$ paitsi negatiivisella x-akselilla. Funktio g ei ole jatkuva negatiivisella x-akselilla, sillä lähestyttäessä akselia alhaaltapäin funktion raja-arvo

$$\lim_{\epsilon \to 0^+} g(r_0 e^{i(-\pi+\epsilon)}) = \lim_{\epsilon \to 0^+} \sqrt{r_0} e^{i(-\pi+\epsilon)/2} = \sqrt{r_0} e^{i(-\pi/2)} = -\sqrt{r_0} i$$

on erisuuri kuin funktion arvo akselilla eli

$$g(r_0 e^{i\pi}) = \sqrt{r_0} e^{i(\pi/2)} = \sqrt{r_0} i.$$

Funktio g saa siis jokaisessa määrittelyjoukkonsa pisteessä arvoksi pisteen jonkin neliöjuuren ja on joukossa $\mathbb{C}_{\neq 0}$ jatkuva paitsi negatiivisella x-akselilla. Tällaista funktiota kutsutaan neliöjuurifunktion *haaraksi*.

Määritelmä 2.3.1. [4, s. 80] Moniarvoisen funktion *haara* (*branch*) on mikä tahansa yksiarvoinen funktio, joka saa jokaisessa sen määrittelyjoukon pisteessä jonkin moniarvoisen funktion yksittäisistä arvoista kyseisessä pisteessä ja on määrittelyjoukossaan jatkuva, paitsi mahdollisesti joukon reunalla.

Määritelmän mukaan haara voi olla myös sellainen yksiarvoinen funktio, jonka määrittelyjoukko on moniarvoisen funktion määrittelyjoukon aito osajoukko. Tässä työssä käsitellään kuitenkin selkeyden vuoksi vain sellaisia haaroja, jotka on määritelty moniarvoisen funktion määrittelyjoukossa. Lisäksi määritelmässä "joukon reuna"ei tarkoita joukon täsmällistä topologista reunaa. Eiväthän esimerkiksi neliöjuurifunktion haaran g tapauksessa negatiivisen x-akselin pisteet ole joukon $\mathbb{C}_{\neq 0}$ reunapisteitä. Esitystavasta $\mathbb{C}_{\neq 0} = \{re^{i\theta} : r > 0 \text{ ja } -\pi < \theta \leq \pi\}$ näiden pisteiden voidaan kuitenkin käsittää olevan argumentin kannalta joukon "reunalla".

2.4 Leikkauskäyrä

Edellisessä aliluvussa määritellyn neliöjuurifunktion haaran g todettiin olevan epäjatkuva negatiivisella x-akselilla. x-akseli on tästä johtuen neliöjuurifunktion *leikkauskäyrä*.

Määritelmä 2.4.1. [6, s. 399] Moniarvoisen funktion *leikkauskäyrä* (*branch cut*) on kompleksitason käyrä, jolla jokin funktion haara on epäjatkuva.

Määritelmä sallii leikkauskäyrän olla hyvinkin monimutkainen käyrä. Tässä työssä pitäydytään kuitenkin selkeyden vuoksi mahdollisimman yksinkertaisissa leikkauskäyrissä kuten puolisuorissa.

Kirjan [6] mukaan leikkauskäyrä yhdistää moniarvoisen funktion kahta kiertopistettä. Esimerkiksi haaran g tapauksessa negatiivinen x-akseli eli puolisuora $(-\infty, 0)$ yhdistää neliöjuurifunktion kiertopisteitä eli origoa ja pistettä äärettömyydessä, vaikka kiertopisteet eivät olekaan käyrän pisteitä.

Huomautetaan lukijaa vielä siitä, että tässä luvussa esiteltyjen käsitteiden määritelmät voivat jonkin verran poiketa toisistaan eri oppikirjojen välillä. Esimerkiksi [2] määrittelee moniarvoisen funktion haaran olevan koko määrittelyjoukossaan analyyttinen ja leikkauskäyrän "viivan tai käyrän osaksi, jonka avulla moniarvoisen funktion haara määritellään". [2] ja [4] molemmat taas määrittelevät kiertopisteen kompleksitason pisteeksi, joka kuuluu moniarvoisen funktion jokaiseen mahdolliseen leikkauskäyrään. Tähän työhön valittiin kuitenkin sellaiset määritelmät, jotka työn tekijän mielestä antavat käsitteistä selkeimmän kuvan asiaan ensi kertaa perehtyvälle.

3. LOGARITMIFUNKTIO

3.1 Määritelmä ja kiertopisteet

Kompleksinen logaritmifunktio on kompleksisen eksponenttifunktion käänteisfunktio. Logaritmi tarkoittaa nyt logaritmifunktion yksittäistä arvoa ja logaritmifunktion arvo logaritmien joukkoa. Luku w on luvun z logaritmi, mikäli

$$e^w = z. \tag{3.1}$$

Logaritmifunktiota ei ole määritelty origossa, sillä eksponenttifunktio ei saa arvokseen nollaa millään luvulla w. Tämä nähdään kirjoittamalla $w = u + iv$, jolloin

$$|e^w| = |e^{u+iv}| = |e^u||e^{iv}| = |e^u| \cdot 1 = e^u.$$

Koska reaalinen e^u on aidosti positiivinen kaikilla reaaliluvuilla u, eksponenttifunktion e^w itseisarvo on positiivinen kaikilla luvuilla w. [2, s. 90]

Toisin kuin reaalinen eksponenttifunktio, kompleksinen eksponenttifunktio on jaksollinen funktio. Tämä johtuu reaalisten funktioiden $\sin x$ ja $\cos x$ jaksollisuudesta, jonka perusteella mille tahansa kokonaisluvulle k on voimassa

$$e^{w+ik2\pi} = e^w e^{ik2\pi} = e^w(\cos(k2\pi) + i\sin(k2\pi)) = e^w(1 + i0) = e^w.$$

Kompleksinen eksponenttifunktio on siis jaksollinen imaginaariosan suhteen, ja sen jakson pituus on 2π. Jaksollisuudesta johtuen jokaiselle eksponenttifunktion arvojoukon $\mathbb{C}_{\neq 0}$ alkiolle kuvautuu äärettömän monta määrittelyjoukon $\mathbb{C}$ alkiota. Jo tästä havaitsemme, että logaritmifunktio on eksponenttifunktion käänteisfunktiona lähtökohtaisesti moniarvoinen.

Eksplisiittinen määritelmä logaritmifunktiolle voidaan johtaa merkitsemällä yhtälön (3.1) muuttujaa $z = re^{i\theta}$ ja sen logaritmia $w = u + iv$. Tällöin yhtälö saadaan muotoon

$$e^u e^{iv} = re^{i\theta}.$$

Nämä eksponenttimuotoiset kompleksiluvut ovat yhtä suuret vain, jos niiden modulit ovat yhtä suuret ja luvun $e^u e^{iv}$ argumentti v on jokin luvun $z = re^{i\theta}$ argumenteista. Yhtäsuuruudelta siis vaaditaan

$$e^u = r \qquad \text{ja} \qquad v \in \arg z.$$

Näistä vasemmanpuoleinen yhtälö on reaalinen, joten $u = \ln(r)$. Annetaan tämän johdannon[4, s. 158] perusteella logaritmifunktiolle seuraava määritelmä.

Määritelmä 3.1.1. Olkoon $z = re^{i\theta}$ nollasta poikkeava kompleksiluku. *Logaritmifunktio* $\log(z)$ määritellään

$$\log(z) = \{\ln(r) + i\theta : \theta \in \arg z\}.$$

Määritetään logaritmifunktion kiertopisteet, ja aloitetaan tutkimalla, onko origo funktion kiertopiste. Olkoon $z_0 = r_0 e^{i\theta_0}$ piste r_0-säteisellä origokeskisellä ympyrällä. Määritelmän 3.1.1 mukaan

$$w_0 = \ln(r_0) + i\theta_0$$

on pisteen z_0 eräs logaritmi. Jos lähdetään kiertämään ympyrää vastapäivään kuten neliöjuurifunktion tapauksessa liikkuen kerralla vain pienen kulmanmuutoksen verran ja valiten pisteiden logaritmiksi edellisen pisteen logaritmia lähinnä oleva logaritmi, täyden kierroksen jälkeen pisteen z_0 logaritmi on

$$\ln(r_0) + i(\theta_0 + 2\pi) = w_0 + i2\pi.$$

Origo on täten logaritmifunktion kiertopiste. Lisäksi koska jokainen uusi kierros vastapäivään lisää pisteen z_0 logaritmiin luvun $i2\pi$, logaritmi ei millään kierrosluvulla palaa takaisin luvuksi w_0. Origo on siis logaritmifunktion äärettömän kertaluokan kiertopiste. Myös piste $z = \infty$ on logaritmifunktion äärettömän kertaluokan kiertopiste, sillä pisteen $1/z_0 = r_0^{-1} e^{i(-\theta_0)}$ eräs logaritmi on $\ln(r_0^{-1}) + i(-\theta_0)$ ja kierrokset origon ympäri vastapäivään lisäävät logaritmiin luvun $-i2\pi$. Muita kiertopisteitä logaritmifunktiolla ei ole, mikä voidaan perustella vastaavasti kuin neliöjuurifunktion tapauksessa.

3.2 Haarat ja leikkauskäyrät

Olkoon $\mathrm{Log}(z)$ funktio, joka saa joukon $\mathbb{C}_{\neq 0}$ jokaisella kompleksiluvulla z arvoksi luvun sen logaritmin, jonka imaginaariosa on luvun z pääargumentti Θ eli

$$\mathrm{Log}(z) = \ln(r) + i\Theta.$$

$\mathrm{Log}\,(z)$ on yksiarvoinen funktio, koska jokaisen nollasta poikkeavan kompleksiluvun pääargumentti on yksikäsitteinen. Komponenttifunktioiden jatkuvuuden perusteella $\mathrm{Log}\,(z)$ on jatkuva kaikkialla joukossa $\mathbb{C}_{\neq 0}$ paitsi negatiivisella x-akselilla, jossa pääargumentti on epäjatkuva. $\mathrm{Log}\,(z)$ siis täyttää määritelmän 2.3.1 ehdot ja on siten logaritmifunktion haara. Tätä pääargumentin avulla määriteltyä haaraa kutsutaan logaritmifunktion *päähaaraksi* [2], ja sen tapauksessa logaritmifunktion leikkauskäyrä on negatiivinen x-akseli.

Yleisemmin joukon $\mathbb{C}_{\neq 0}$ jokaisen luvun z logaritmiksi voidaan valita se logaritmi, jonka imaginaariosa on luvun z yksikäsitteinen argumentti joltain väliltä $(\alpha, \alpha+2\pi]$, jossa α on mielivaltainen reaaliluku. Jos tätä argumenttia merkitään θ_α, niin

$$\log_\alpha(z) = \ln(r) + i\,\theta_\alpha$$

on joukossa $\mathbb{C}_{\neq 0}$ yksiarvoinen funktio. Olkoon $\mathbb{C}_\alpha$ joukko, johon kuuluvat ne nollasta poikkeavat kompleksiluvut, jotka eivät sijaitse origosta kulmassa α lähtevällä puolisuoralla. Funktio $\log_\alpha(z)$ on jatkuva joukossa $\mathbb{C}_\alpha$, sillä sen komponenttifunktiot ovat tässä joukossa jatkuvat. Funktio $\log_\alpha(z)$ on siis logaritmifunktion haara.

Haara $\log_\alpha(z)$ ei ole jatkuva origosta kulmassa α lähtevällä puolisuoralla. Tämä johtuu argumentin θ_α epäjatkuvuudesta, jonka takia lähestyttäessä puolisuoraa sen eri puolilta haaran raja-arvot

$$\lim_{\epsilon\to 0^+} \log_\alpha(r_0 e^{i(\alpha+\epsilon)}) = \lim_{\epsilon\to 0^+} (\ln(r_0) + i(\alpha+\epsilon)) = \ln(r_0) + i\alpha, \tag{3.2}$$

$$\lim_{\epsilon\to 0^+} \log_\alpha(r_0 e^{i(\alpha+2\pi-\epsilon)}) = \lim_{\epsilon\to 0^+} (\ln(r_0) + i(\alpha+2\pi-\epsilon)) = \ln(r_0) + i(\alpha+2\pi) \tag{3.3}$$

ovat erisuuret. Tämän perusteella origosta kulmassa α lähtevä puolisuora on logaritmifunktion leikkauskäyrä. Koska α on on mielivaltainen reaaliluku, kaikki origosta lähtevät puolisuorat ovat logaritmifunktion leikkauskäyriä.

Seuraavan lauseen mukaan haara $\log_\alpha(z)$ on bijektio, kun maalijoukko koostuu kaikista niistä kompleksiluvuista, joiden imaginaariosa on välillä $(\alpha, \alpha+2\pi]$. Lauseen todistus ja lausetta seuraavat havainnot ovat kirjoittajan omia.

Lause 3.2.1. *Logaritmifunktion haara* $\log_\alpha(z) = \ln(r) + i\,\theta_\alpha$ *on bijektio joukolta* $\mathbb{C}_{\neq 0}$ *joukolle* $S_\alpha = \{z \in \mathbb{C} : \alpha < \mathrm{Im}\, z \leq \alpha + 2\pi\}$.

Todistus. Todistetaan bijektiivisyys todistamalla injektiivisyys ja surjektiivisuus. Aloitetaan injektiivisyydestä. Olkoon $z_1 = r_1 e^{i\theta_{\alpha,1}}$ ja $z_2 = r_2 e^{i\theta_{\alpha,2}}$ nollasta poikkeavia kompleksilukuja, joille on voimassa $\log_\alpha(z_1) = \log_\alpha(z_2)$. Tällöin funktion

$\log_\alpha(z)$ määritelmän mukaan

$$\ln(r_1) + i\theta_{\alpha,1} = \ln(r_2) + i\theta_{\alpha,2}.$$

Koska nämä kompleksiluvut ovat yhtä suuret, niiden reaali- ja imaginaariosat ovat yhtä suuret eli

$$\ln(r_1) = \ln(r_2) \quad \text{ja} \quad \theta_{\alpha,1} = \theta_{\alpha,2}.$$

Näistä vasemmanpuoleisen yhtäsuuruuden perusteella lukujen modulit ovat yhtä suuret ja oikeanpuoleisen yhtäsuuruuden perusteella luvuilla on sama argumentti. Siispä ne ovat sama luku, minkä perusteella $\log_\alpha(z)$ on injektio. Todistetaan vielä surjektiivisuus. Olkoon $w = u + iv$ joukon S_α kompleksiluku, jolloin $\alpha < v \leq \alpha + 2\pi$. Jos $z = e^u e^{iv}$, niin z on nollasta poikkeava kompleksiluku ja

$$\log_\alpha(z) = \ln e^u + iv = u + iv = w,$$

minkä perusteella $\log_\alpha(z)$ on surjektio. □

Huomautus 3.2.1. Koska eksponenttifunktio on logaritmifunktion haaran $\log_\alpha(z)$ käänteisfunktio, Lauseesta 3.2.1 seuraa suoraan eksponenttifunktion bijektiivisyys joukolta $\{z \in \mathbb{C} : \alpha < \operatorname{Im} z \leq \alpha + 2\pi\}$ joukolle $\mathbb{C}_{\neq 0}$.

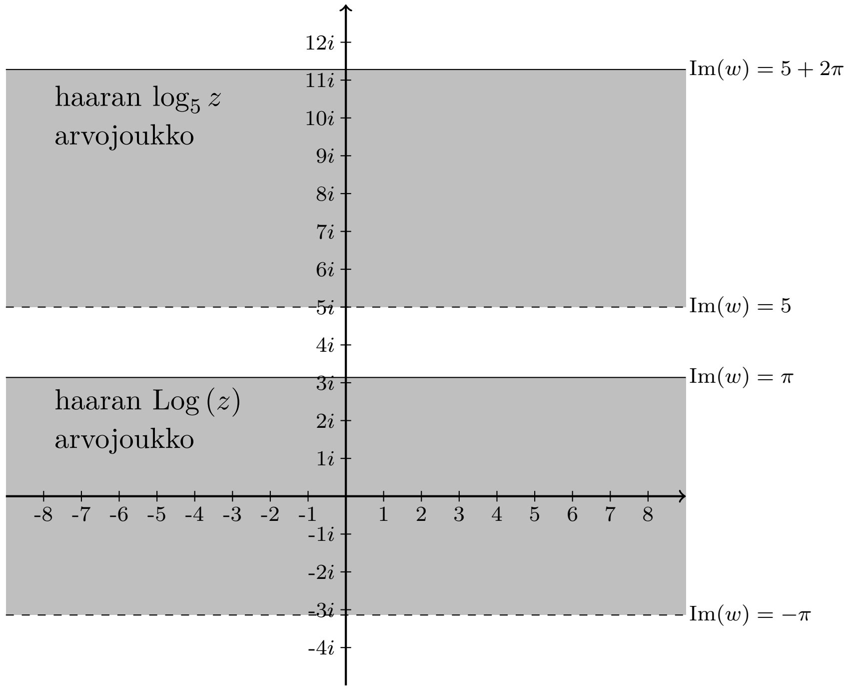
Haaran $\log_\alpha(z)$ arvojoukko koostuu siis kaikista niistä kompleksiluvuista, joiden imaginaariosa on välillä $(\alpha, \alpha+2\pi]$. Esimerkiksi päähaaran $\operatorname{Log}(z)$ arvojoukko koostuu luvuista, joiden imaginaariosa on välillä $(-\pi, \pi]$, ja haaran $\log_5(z)$ arvojoukko luvuista, joiden imaginaariosa on välillä $(5, 5 + 2\pi]$. Näitä arvojoukkoja on havainnollistettu kuvassa 3.1.

Seuraavan lauseen mukaan logaritmifunktion haara $\log_\alpha(z)$ on analyyttinen joukossa $\mathbb{C}_\alpha$. Valitsemalla haara sopivasti logaritmifunktiota voidaan siten käsitellä analyyttisenä funktiona kaikkialla muualla joukossa $\mathbb{C}_{\neq 0}$ paitsi vapaasti valittavalla origosta lähtevällä puolisuoralla.

Lause 3.2.2. *Logaritmifunktion haara* $\log_\alpha(z) = \ln(r) + i\,\theta_\alpha$ *on analyyttinen alueessa* $\mathbb{C}_\alpha$*. Lisäksi tässä alueessa*

$$\frac{d}{dz}\log_\alpha(z) = \frac{1}{z}.$$

Todistus. Mukaillaan todistusta [4, s. 165], ja todistetaan lause käyttäen liitteen A lauseen A.2 polaarimuotoisia derivoituvuuden Cauchy-Riemannin ehtoja. Jätetään argumentin θ_α alaindeksi merkkaamatta, jolloin haaralla $\log_\alpha(z)$ on reaaliosan komponenttifunktio $U(r, \theta) = \ln(r)$ ja imaginaariosan komponenttifunktio $V(r, \theta) = \theta$.



Kuva 3.1 *Logaritmifunktion haarojen* $\mathrm{Log}\,(z)$ *ja* $\log_5 z$ *arvojoukot kompleksitasossa.*

Näillä komponenttifunktioilla on alueessa $\mathbb{C}_\alpha$ jatkuvat osittaisderivaatat

$$\begin{aligned} U_r &= \frac{1}{r} \qquad \text{ja} \qquad V_r = 0, \\ U_\theta &= 0 \qquad \text{ja} \qquad V_\theta = 1. \end{aligned}$$

Osittaisderivaatat toteuttavat polaarimuodon CR-yhtälöt $rU_r = V_\theta$ ja $U_\theta = -rV_r$ alueen $\mathbb{C}_\alpha$ jokaisessa pisteessä, joten CR-ehtojen perusteella $\log_\alpha(z)$ on derivoituva alueen jokaisessa pisteessä ja

$$\frac{d}{dz}\log_\alpha(z) = e^{-i\theta}(U_r + iV_r) = \frac{1}{re^{i\theta}} = \frac{1}{z}.$$

Koska alue $\mathbb{C}_\alpha$ sisältää vain omia sisäpisteitään, $\log_\alpha(z)$ on alueessa analyyttinen. $\square$

4. YLEINEN POTENSSIFUNKTIO

4.1 Määritelmä ja kiertopisteet

Kompleksinen yleinen potenssifunktio määritellään logaritmifunktion avulla. Määritelmää motivoi reaalisille funktioille voimassa oleva kaava $x^a = \exp(a \ln(x))$, jossa notaation siistimiseksi eksponenttifunktiota merkitään exp.

Määritelmä 4.1.1. [4, s. 171] Olkoon c kompleksiluku ja z nollasta poikkeava kompleksiluku. *Yleinen potenssifunktio* määritellään

$$z^c = \exp(c \log(z)).$$

Potenssifunktion arvot ovat joukkoja, jotka koostuvat luvuista, joissa logaritmifunktion sijalle on sijoitettu pisteen z logaritmeja. Potenssifunktiota ei tässä tapauksessa ole määritelty origossa, koska logaritmifunktiota ei ole määritelty origossa. Jos kirjoitetaan $c = a + ib$ ja käytetään logaritmifunktion Määritelmää 3.1.1,

$$\begin{aligned} c \log(z) &= (a + ib)(\ln(r) + i\theta) \\ &= a \ln(r) - b\theta + i(a\theta + b \ln(r)), \end{aligned}$$

jossa θ on jokin luvun z argumentti. Tällöin yleinen potenssifunktio voidaan esittää muodossa

$$z^c = \{\exp(a \ln(r) - b\theta) \exp(i(a\theta + b \ln(r))) : \theta \in \arg z\}. \tag{4.1}$$

Potenssifunktion yksittäisten arvojen modulit ovat siis muotoa $\exp(a \ln(r) - b\theta)$ ja argumentit muotoa $(a\theta + b \ln(r))$.

Funktion z^c yksittäisten arvojen määrä tietyssä pisteessä riippuu luvusta $c = a + ib$. Tämä nähdään kolmessa seuraavassa esimerkissä, joissa tutkitaan potenssifunktion yksittäisten arvojen määrää mielivaltaisella nollasta poikkeavalla kompleksiluvulla z ja jotka kattavat kaikki mahdolliset luvun c arvot. Esimerkit ovat kirjoittajan omia. Ensimmäisessä esimerkissä c on kokonaisluku, toisessa jokin muu rationaaliluku kuin kokonaisluku ja kolmannessa irrationaaliluku tai sen imaginaariosa $b \neq 0$.

Esimerkki 4.1.1. Olkoon c kokonaisluku. Tällöin $a = c$ ja $b = 0$ yhtälössä (4.1) ja se voidaan esittää muodossa

$$\begin{aligned} z^c &= \{\exp(c \ln(r)) \exp(i(c\theta)) : \theta \in \arg z\} \\ &= \{r^c \exp(i(c\theta)) : \theta \in \arg z\}. \end{aligned}$$

Jos argumentti θ kirjoitetaan pääargumentin Θ avulla $\theta = \Theta + k2\pi$, jossa k on jokin kokonaisluku, yksittäisten arvojen argumentit ovat muotoa $c(\Theta + k2\pi) = c\Theta + ck2\pi$. Tästä nähdään, että argumentit eroavat toisistaan luvun 2π monikerroilla. Lisäksi koska yksittäisillä arvoilla on sama moduli r^c, ne ovat yksi ja sama kompleksiluku. Jos siis c on kokonaisluku, yleinen potenssifunktio z^c on tavallinen yksiarvoinen funktio.

Esimerkki 4.1.2. Olkoon c rationaaliluku m/n, joka ei ole kokonaisluku ja jossa luvuilla m ja n ei ole yhteistä tekijää. Tällöin $a = m/n$ ja $b = 0$ yhtälössä (4.1) ja se voidaan esittää muodossa

$$\begin{aligned} z^{m/n} &= \{\exp((m/n) \ln(r)) \exp(i((m/n)\theta)) : \theta \in \arg z\} \\ &= \{r^{m/n} \exp(i(m\theta/n)) : \theta \in \arg z\}. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Jos argumentti θ kirjoitetaan taas pääargumentin avulla,

$$z^{m/n} = \{r^{m/n} \exp(i\Big(\frac{m\Theta}{n} + \frac{mk2\pi}{n}\Big)) : k \in \mathbb{Z}\}. \tag{4.3}$$

Funktion $z^{m/n}$ kaikilla yksittäisillä arvoilla on sama moduli $r^{m/n}$. Kaavassa (4.3) luvun k arvoilla $1, 2, \ldots, n-1$ argumentin termi $\frac{mk2\pi}{n}$ ei ole mikään luvun 2π monikerta, sillä muutoin luvuilla m ja n olisi yhteinen tekijä. Tämän vuoksi kaavan antama funktion $z^{m/n}$ yksittäinen arvo luvun k arvolla 0 on erisuuri verrattuna yksittäisiin arvoihin luvun k arvoilla $1, 2, \ldots, n-1$. Yksittäiset arvot kuitenkin ovat samat luvun k arvoilla pn, jossa p on jokin kokonaisluku, sillä tällöin argumentit eroavat luvulla $pm2\pi$.

Soveltamalla vastaavanlaista päättelyä kaavan (4.3) antamiin funktion $z^{m/n}$ yksittäisiin arvoihin luvun k arvoilla $1, 2, \ldots, n-1$ voidaan päätellä, että nämä yksittäiset arvot ovat keskenään erisuuret, mutta ne toistuvat aina luvun k arvoilla luvun n välein. Funktiolla $z^{m/n}$ on siten täsmälleen n kappaletta yksittäisiä arvoja.

Funktion $z^{m/n}$ kiertopisteet ovat origo ja piste $z = \infty$, ja kummatkin ovat kertaluokan n kiertopisteitä. Origon tapauksessa tämä nähdään aloittamalla origon kierto ympyrää pitkin pisteestä $z_0 = r_0 e^{i\theta_0}$, jossa yhtälön (4.2) perusteella eräs funktion yksittäinen arvo on $r_0^{m/n}\exp(i(m\theta_0/n))$. Yksittäinen arvo k kierroksen jälkeen on

$$r_0^{m/n}\exp(i\Big(\frac{m\theta_0}{n}+\frac{mk2\pi}{n}\Big)),$$

ja vastaavilla perusteilla kuin ylempänä tämä palautuu alkuperäiseksi vasta n kierroksen jälkeen. Pisteessä $z=\infty$ päädytään samaan lopputulokseen, sillä pisteessä $1/z_0 = r_o^{-1}\exp(i(-\theta_0/n))$ funktion eräs yksittäinen arvo on $r_0^{-m/n}\exp(i(-m\theta_0/n))$ ja myös tämä palautuu takaisin vasta n origon ympäri kuljetun kierroksen jälkeen. Muita kiertopisteitä funktiolla ei ole, mikä voidaan todeta vastaavasti kuin neliöjuurifunktion tapauksessa.

Jos siis yleinen potenssifunktio on muotoa $z^{m/n}$, jossa m/n on redusoidussa muodossa eikä se ole kokonaisluku, jokaisella joukon $\mathbb{C}_{\neq 0}$ kompleksiluvulla funktio saa arvoksi n kompleksilukua ja origo sekä piste äärettömyydessä ovat funktion kertaluokan n kiertopisteitä. Tällä funktiolla on tärkeänä erikoistapauksena *n. juurifunktio* $z^{1/n}$, jota käsitellään tarkemmin aliluvussa 4.3.

Esimerkki 4.1.3. Viimeisenä tutkitaan funktiota z^c silloin, kun luvun $c = a + ib$ reaaliosa a on irrationaaliluku tai imaginaariosa $b \neq 0$.

Käsitellään ensin tapaus, jossa a on irrationaaliluku. Yhtälön (4.1) mukaan funktion z^c yksittäisten arvojen argumentit ovat muotoa $a\theta + b\ln(r)$. Jotta yksittäiset arvot luvun z eri argumenteilla θ voivat olla samat, täytyy arvojen argumenttien erota jollain luvun 2π monikerralla. Jos a on irrationaaliluku, tämä ei ole mahdollista, mikä nähdään esittämällä luvun z kaksi eri argumenttia pääargumentin Θ avulla. Mikäli tällöin yksittäisten arvojen argumentit eroaisivat toisistaan luvun 2π monikerralla, olisi olemassa kaksi erisuurta kokonaislukua n_1 ja n_2 sekä nollasta poikkeava kokonaisluku k, joille olisi voimassa

$$(a(\Theta + n_1 2\pi) + b\ln(r)) - (a(\Theta + n_2 2\pi) + b\ln(r))) = k2\pi.$$

Tämä sievenee muotoon $a(n_1 - n_2) = k$, joka ei voi olla tosi, sillä $a(n_1 - n_2)$ on irrationaaliluku ja k kokonaisluku.

Käsitellään vielä tapaus, jossa $b \neq 0$. Yhtälön (4.1) mukaan funktion z^c yksittäisten arvojen modulit ovat muotoa $\exp(a\ln(r) - b\theta)$. Jos $b \neq 0$, modulit eivät ole samat millään luvun z kahdella erisuurella argumentilla θ, sillä reaalinen eksponenttifunktio on aidosti monotoninen funktio.

Jos siis luvun c reaaliosa on irrationaaliluku tai imaginaariosa ei ole nolla, yleisellä potenssifunktiolla z^c on jokaisella joukon $\mathbb{C}_{\neq 0}$ kompleksiluvulla äärettömän monta yksittäistä arvoa. Origo ja piste $z = \infty$ ovat tällöin molemmat funktion äärettömän kertaluokan kiertopisteitä, mikä voidaan origoa kiertäessä perustella vastaavin tavoin kuin yksittäisten arvojen ääretön määrä. Muita kiertopisteitä funktiolla ei ole, mikä voidaan jälleen todeta vastaavasti kuin neliöjuurifunktion tapauksessa.

4.2 Haarat ja leikkauskäyrät

Oletetaan jatkossa, että c ei ole kokonaisluku, jolloin $z^c = \exp(c \log(z))$ on moniarvoinen funktio. Jos jokaisella $z \in \mathbb{C}_{\neq 0}$ logaritmifunktion arvoksi valitaan sen haaran $\log_\alpha(z)$ arvo, saadaan yksiarvoinen funktio

$$z_\alpha^c = \exp(c \log_\alpha(z)). \tag{4.4}$$

Koska sisäfunktio $c \log_\alpha(z)$ on jatkuva alueessa $\mathbb{C}_\alpha$ ja ulkofunktio eli eksponenttifunktio on jatkuva kaikkialla, z_α^c on yhdistettynä funktiona jatkuva alueessa $\mathbb{C}_\alpha$. Määritelmän 2.3.1 mukaan z_α^c on siis yleisen potenssifunktion haara. Yleisen potenssifunktion päähaaraksi kutsutaan funktiota $\exp(c \operatorname{Log}(z))$, jossa logaritmifunktion arvoista valitaan sen päähaaran arvot [2, s. 102].

Logaritmifunktion haaran raja-arvojen (3.2) ja (3.3) perusteella funktiolla z_α^c on origosta kulmassa α lähtevää puolisuoraa eri puolilta lähetyttäessä raja-arvot

$$\lim_{\epsilon \to 0^+} (r_0 e^{i(\alpha+\epsilon)})_\alpha^c = \exp(c(\ln(r_0) + i\alpha)), \tag{4.5}$$

$$\lim_{\epsilon \to 0^+} (r_0 e^{i(\alpha+2\pi-\epsilon)})_\alpha^c = \exp(c(\ln(r_0) + i(\alpha + 2\pi))). \tag{4.6}$$

Tämän takia yleisen potenssifunktion haara z_α^c on epäjatkuva tällä puolisuoralla. Kaikki origosta lähtevät puolisuorat ovat siis myös yleisen potenssifunktion leikkauskäyriä.

Seuraavan lauseen mukaan z_α^c on analyyttinen samassa alueessa kuin logaritmifunktion haara $\log_\alpha(z)$. Tästä johtuen valitsemalla logaritmifunktion haara sopivasti myös yleistä potenssifunktiota voidaan käsitellä analyyttisenä funktiona kaikkialla muualla joukossa $\mathbb{C}_{\neq 0}$ paitsi vapaasti valittavalla origosta lähtevällä puolisuoralla.

Lause 4.2.1. *Yleisen potenssifunktion haara* $z_\alpha^c = \exp(c \log_\alpha(z))$ *on analyyttinen alueessa* $\mathbb{C}_\alpha$. *Lisäksi tässä alueessa*

$$\frac{d}{dz} z_\alpha^c = c z_\alpha^{c-1}.$$

Todistus. Täydennetään selitystä [2, s. 101]. Olkoon $z_0 \in \mathbb{C}_\alpha$. Lauseen 3.2.2 mukaan logaritifunktion haaran $\log_\alpha(z)$ derivaatan arvo pisteessä z_0 on $\frac{1}{z_0}$, joten funktion

$c \log_\alpha(z)$ derivaatan arvo samassa pisteessä on $c\frac{1}{z_0}$. Lisäksi koska $\exp(z)$ on itsensä derivaatta kaikkialla, derivoinnin ketjusäännön mukaan $z_\alpha^c = \exp(c \log_\alpha(z))$ on derivoituva pisteessä z_0 ja sen derivaatan arvo tässä pisteessä on

$$\frac{d}{dz}\exp(c\log_\alpha z_0) = \exp(c\log_\alpha z_0)c\frac{1}{z_0}.$$

Logaritmin määritelmän perusteella voidaan kirjoittaa $z_0 = \exp(\log_\alpha z_0)$, jolloin

$$\begin{aligned}\frac{d}{dz}\exp(c\log_\alpha z_0) &= \exp(c\log_\alpha z_0)c\frac{1}{\exp(\log_\alpha z_0)}\\ &= c\exp((c-1)\log_\alpha z_0).\end{aligned}$$

Tämä on funktion cz_α^{c-1} arvo pisteessä z_0. Koska z_0 on alueen $\mathbb{C}_\alpha$ mielivaltainen piste, z_α^c on derivoituva alueen jokaisessa pisteessä ja sillä on pisteissä vastaava derivaatan arvo. Alue $\mathbb{C}_\alpha$ sisältää vain omia sisäpisteitään, joten z_α^c on alueessa analyyttinen. □

4.3 Juurifunktio yleisen potenssifunktion erikoistapauksena

Olkoon n jokin lukua 1 suurempi luonnollinen luku. Lähestytään tässä aliluvussa *n. juurifunktiota* $z^{1/n}$ yleisen potenssfunktion erikoistapauksena. Lähestymistapa on kirjoittajan oma. Yhtälön (4.2) perusteella

$$z^{1/n} = \{\sqrt[n]{r}e^{i(\theta/n)} : \theta \in \arg z\}. \tag{4.7}$$

Esimerkin 4.1.2 mukaan tällä funktiolla on jokaisella määrittelyjoukkonsa $\mathbb{C}_{\neq 0}$ luvulla n kappaletta yksittäisiä arvoja, jotka yhtälön (4.3) perusteella ovat muotoa

$$\sqrt[n]{r}\exp(i\Big(\frac{\Theta}{n} + \frac{k2\pi}{n}\Big)),$$

jossa $\Theta = \operatorname{Arg} z$ ja $0 \leq k \leq n-1$. Nämä luvut ovat luvun z n:nnet juuret. Lisäksi esimerkin mukaan origo ja piste $z = \infty$ ovat juurifunktion $z^{1/n}$ kertaluokan n kiertopisteitä.

Edellisen aliluvun perusteella juurifunktion haarat ovat muotoa

$$\begin{aligned}z_\alpha^{1/n} &= \exp((1/n)\log_\alpha(z))\\ &= \exp((1/n)(\ln(r) + i\,\theta_\alpha))\\ &= \sqrt[n]{r}e^{i(\theta_\alpha/n)}\end{aligned}$$

ja haara

$$z_{-\pi}^{1/n} = \exp((1/n)\,\mathrm{Log}\,(z)) = \sqrt[n]{r}e^{i(\Theta/n)} \tag{4.8}$$

on juurifunktion päähaara. Lauseen 4.2.1 perusteella $z_{\alpha}^{1/n}$ on analyyttinen alueessa $\mathbb{C}_{\alpha}$.

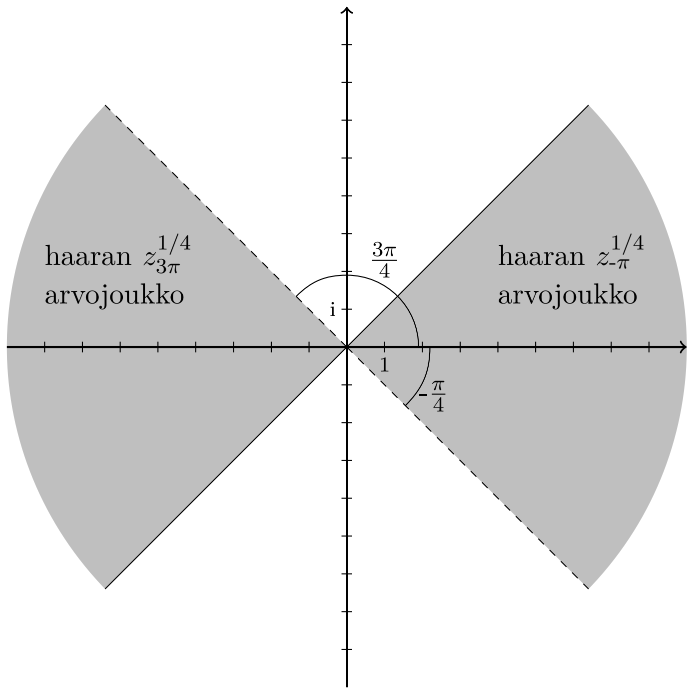
Lause 4.3.1. *n. juurifunktion haara $z_{\alpha}^{1/n} = \sqrt[n]{r}e^{i(\theta_{\alpha}/n)}$ on bijektio joukolta $\mathbb{C}_{\neq 0}$ joukolle $\left\{\rho e^{i\phi} : \rho > 0 \text{ ja } \frac{\alpha}{n} < \phi \leq \frac{\alpha}{n} + \frac{2\pi}{n}\right\}$.*

Todistus. Käsitellään haaraa muodossa $z_{\alpha}^{1/n} = \exp((1/n)\log_{\alpha}(z))$. Lauseen 3.2.1 mukaan $\log_{\alpha}(z)$ on bijektio joukolta $\mathbb{C}_{\neq 0}$ joukolle $\{z \in \mathbb{C} : \alpha < \mathrm{Im}\, z \leq \alpha + 2\pi\}$, joten funktio $(1/n)\log_{\alpha}(z)$ on bijektio joukolta $\mathbb{C}_{\neq 0}$ joukolle $\{z \in \mathbb{C} : \frac{\alpha}{n} < \mathrm{Im}\, z \leq \frac{\alpha}{n} + \frac{2\pi}{n}\}$. Lisäksi Huomautuksen 3.2.1 perusteella eksponenttifunktio on bijektio tältä joukolta joukolle $\left\{\rho e^{i\phi} : \rho > 0 \text{ ja } \frac{\alpha}{n} < \phi \leq \frac{\alpha}{n} + \frac{2\pi}{n}\right\}$, joten n. juurifunktion haara $z_{\alpha}^{1/n}$ on funktioiden $(1/n)\log_{\alpha}(z)$ ja e^z yhdistettynä funktiona bijektio. □

Lauseen 4.3.1 perusteella n. juurifunktion haaran $z_{\alpha}^{1/n}$ arvot ovat kaikki ne kompleksiluvut, joilla on argumentti välillä $\left(\frac{\alpha}{n}, \frac{\alpha}{n} + \frac{2\pi}{n}\right]$. Vastaavasti haaran $z_{\alpha+2\pi}^{1/n}$ arvot ovat ne kompleksiluvut, joilla on argumentti välillä $\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2\pi}{n}, \frac{\alpha}{n} + \frac{2\cdot 2\pi}{n}\right]$, ja näin jatkaen haaran $z_{\alpha+(n-1)2\pi}^{1/n}$ arvot ovat ne luvut, joilla on argumentti välillä

$$\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{(n-1)2\pi}{n}, \frac{\alpha}{n} + \frac{n2\pi}{n}\right] = \left(\frac{\alpha}{n} + \frac{(n-1)2\pi}{n}, \frac{\alpha}{n} + 2\pi\right].$$

Tästä nähdään, että juurifunktion $z^{1/n}$ yhden haaran arvojoukko kattaa sektorina yhden n:nnen osan nollasta poikkeavasta kompleksitasosta ja n kappaletta tarkoin valittuja haaroja kattaa koko joukon $\mathbb{C}_{\neq 0}$. Tämä eroaa logaritmifunktiosta, jolla mikään määrä haaroja ei kata koko kompleksitasoa. Kuvassa 4.1 havainnollistetaan juurifunktion $z^{1/4}$ päähaaran $z_{-\pi}^{1/4}$ ja haaran $z_{3\pi}^{1/4}$ arvojoukkoja.



Kuva 4.1 *Juurifunktion $z^{1/4}$ haarojen $z_{-\pi}^{1/4}$ ja $z_{3\pi}^{1/4}$ arvojoukot kompleksitasossa.*

5. ARKUSSINIFUNKTIO

5.1 Määritelmä ja kiertopisteet

Perustellaan arkussinifunktion määritelmä lähtien sinifunktion määritelmästä kuten [4, s. 189]. Yksi tapa määritellä sinifunktio on eksponenttifunktion avulla

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

Merkitään $w = \sin z$, ja ratkaistaan z. Yhtälö voidaan muokata muuttujan e^{iz} suhteen toisen asteen yhtälöksi

$$e^{i2z} - 2iwe^{iz} - 1 = 0.$$

Soveltamalla tähän kompleksista toisen asteen ratkaisukaavaa saadaan

$$\begin{aligned} e^{iz} &= \frac{2iw + ((-2iw)^2 - 4)^{\frac{1}{2}}}{2} \\ &= iw + (1 - w^2)^{1/2}, \end{aligned}$$

jossa $(1-w^2)^{1/2}$ on moniarvoinen juurifunktio. Ottamalla vielä logaritmi molemmilta puolilta seuraa

$$iz = \log\left[iw + (1 - w^2)^{1/2}\right] \quad \Leftrightarrow \quad z = -i\log\left[iw + (1 - w^2)^{1/2}\right].$$

Luvun z lauseketta ei tässä tapauksessa ole määritelty luvun w arvoilla 1 tai -1, koska juurifunktiota ei ole määritelty kun $1 - w^2 = 0$. Kaikilla muilla luvuilla w lauseke on määritelty, sillä logaritmifunktion sisällä oleva funktio $iw + (1 - w^2)^{1/2}$ ei millään näistä luvuista saa arvokseen nollaa, jolla logaritmifunktiota ei ole määritelty. Tämä nähdään tekemällä vastaoletus

$$iw + (1 - w^2)^{1/2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (1 - w^2)^{1/2} = -iw,$$

josta molemmat puolet neliöimällä saadaan

$$1 - w^2 = -w^2 \quad \Leftrightarrow \quad 1 = 0.$$

Annetaan yllä olevan perusteella arkussinifunktiolle seuraava määritelmä.

Määritelmä 5.1.1. Olkoon z jokin muu kompleksiluku kuin 1 tai -1. *Arkussinifunktio* määritellään

$$\arcsin z = -i \log \left[iz + (1 - z^2)^{1/2} \right].$$

Arkussinifunktion arvot ovat joukkoja, jotka koostuvat luvuista, joissa logaritmifunktion sijalle on sijoitettu pisteen z logaritmeja ja juurifunktion sijalle toinen juurifunktion yksittäisistä arvoista.

Funktiolla $iz + (1 - z^2)^{1/2}$ vaikuttaa olevan kiertopisteet $z = 1$ ja $z = -1$, sillä origo on neliöjuurifunktion kiertopiste. Tämän perusteella nämä pisteet saattaisivat olla myös arkussinifunktion kiertopisteitä. Näin todella onkin [7, s. 119].

5.2 Päähaara ja siihen liittyvät leikkauskäyrät

Jos arkussinifunktion määrittelyjoukon jokaisessa pisteessä logaritmifunktion ja juurifunktion arvoiksi valitaan funktioiden tiettyjen haarojen arvot, saadaan arkussinifunktion haara. Jos arvoiksi valitaan funktioiden päähaarojen arvot, saatua haaraa kutsutaan arkussinifunktion päähaaraksi ja sitä merkitään $\operatorname{Arcsin} z$.[2, s. 113]

Tutkitaan yksinkertaisuuden vuoksi vain arkussinifunktion päähaaraa $\operatorname{Arcsin} z$ ja siihen liittyviä leikkauskäyriä. Merkitsemällä juurifunktion päähaaraa poikkeuksellisesti $(1 - z^2)^{1/2}$ arkussinifunktion päähaara voidaan kirjoittaa muodossa

$$\operatorname{Arcsin} z = -i \operatorname{Log} (iz + (1 - z^2)^{1/2}).$$

Tutkitaan, missä $\operatorname{Arcsin} z$ on epäjatkuva. Tämä osio on kirjoittajan omaa työtä. Aloitetaan juurifunktion päähaaran epäjatkuvuuskohdista. Yhtälön (4.8) perusteella tämä funktio voidaan esittää muodossa

$$(1 - z^2)^{1/2} = \sqrt{|1 - z^2|} \exp \left(i \frac{\operatorname{Arg} (1 - z^2)}{2} \right).$$

Jos $z = x + iy$, niin

$$1 - z^2 = 1 - (x^2 - y^2) + i(-2xy).$$

Koska pääargumentti $\operatorname{Arg} z$ on epäjatkuva negatiivisella x-akselilla, $\operatorname{Arg}(1-z^2)$ on epäjatkuva, kun

$$1-(x^2-y^2)<0 \qquad \text{ja} \qquad -2xy=0.$$

Jälkimmäisen yhtälön mukaan $x=0$ tai $y=0$. Jos $x=0$, lausekkeen $1-z^2$ reaaliosa $1+y^2$ on aina positiivinen, eikä $1-z^2$ siten sijaitse negatiivisella x-akselilla. Täytyy siis olla $y=0$ ja $1-x^2<0$ eli

$$x<-1 \qquad \text{tai} \qquad x>1.$$

Kun $x<-1$ ja x-akselia lähestytään yläpuolelta, lausekkeen $1-z^2$ imaginaariosa $-2xy$ on positiivinen ja lähestyy nollaa, joten argumentilla $\operatorname{Arg}(1-z^2)$ on raja-arvo π. Tämän perusteella

$$\begin{aligned}(1-z^2)^{1/2} &= \sqrt{|1-z^2|}\exp\left(i\frac{\operatorname{Arg}(1-z^2)}{2}\right)\\ &\to \sqrt{|1-x^2|}\exp\left(i\frac{\pi}{2}\right)=\sqrt{x^2-1}\,i,\end{aligned} \tag{5.1}$$

kun $x<-1$ ja x-akselia lähestytään yläpuolelta. Akselia alapuolelta lähestyttäessä imaginaariosa $-2xy$ on negatiivinen ja lähestyy nollaa, joten argumentilla $\operatorname{Arg}(1-z^2)$ on raja-arvo $-\pi$. Tämän perusteella

$$(1-z^2)^{1/2}\to\sqrt{|1-x^2|}\exp\left(i\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)=-\sqrt{x^2-1}\,i, \tag{5.2}$$

kun $x<-1$ ja x-akselia lähestytään alapuolelta.

Juurifunktion päähaara $(1-z^2)^{1/2}$ on siis epäjatkuva puolisuoralla $(-\infty,-1)$. Näytetään vielä, että myös $\operatorname{Arcsin} z$ on epäjatkuva tällä puolisuoralla. Raja-arvon (5.1) perusteella

$$\operatorname{Arcsin} z=-i\operatorname{Log}(iz+(1-z^2)^{1/2})\to -i\operatorname{Log}(ix+\sqrt{x^2-1}\,i), \tag{5.3}$$

kun $x<-1$ ja x-akselia lähestytään yläpuolelta. Vastaavasti raja-arvon (5.2) perusteella

$$\operatorname{Arcsin} z\to -i\operatorname{Log}(ix-\sqrt{x^2-1}\,i), \tag{5.4}$$

kun $x<-1$ ja x-akselia lähestytään alapuolelta. Koska logaritmifunktion päähaara on Lauseen 3.2.1 mukaan bijektio sen arvojoukolle, raja-arvot (5.3) ja (5.4) ovat erisuuret. Arkussinifunktion päähaara on tämän takia epäjatkuva puolisuoralla $(-\infty,-1)$.

Vastaavasti perustellen voidaan näyttää, että $\operatorname{Arcsin} z$ on epäjatkuva myös puolisuoralla $(1, \infty)$. Nämä kaksi puolisuoraa ovat siten arkussinifunktion leikkauskäyriä. Seuraavan lauseen mukaan $\operatorname{Arcsin} z$ on analyyttinen kaikkialla muualla sen määrittelyjoukossa paitsi näillä puolisuorilla.

Lause 5.2.1. *Arkussinifunktion päähaara* $\operatorname{Arcsin} z = -i \operatorname{Log}(iz + (1-z^2)^{1/2})$ *on analyyttinen kaikkialla muualla kompleksitasossa paitsi puolisuorilla* $(-\infty, -1]$ *ja* $[1, \infty)$. *Lisäksi tässä alueessa*

$$\frac{d}{dz} \operatorname{Arcsin} z = \frac{1}{(1-z^2)^{1/2}}.$$

Todistus. Todistus on kirjoittajan oma. Olkoon z kompleksitason piste, joka ei sijaitse puolisuorilla $(-\infty, -1]$ ja $[1, \infty)$. Lauseen 4.2.1 ja ketjusäännön perusteella funktio $(1-z^2)^{1/2}$ on derivoituva pisteessä z ja sen derivaatan arvo tässä pisteessä on $-z(1-z^2)^{-1/2}$. Tämän tiedon, lauseen 3.2.2 ja ketjusäännön perusteella $\operatorname{Arcsin} z$ on derivoituva pisteessä z ja sen derivaatan arvo tässä pisteessä on

$$\frac{d}{dz} \operatorname{Arcsin} z = \frac{1 + iz(1-z^2)^{-1/2}}{iz + (1-z^2)^{1/2}}.$$

Laventamalla lauseketta luvulla $(1-z^2)^{1/2}$ saadaan

$$\frac{d}{dz} \operatorname{Arcsin} z = \frac{(1-z^2)^{1/2} + iz}{iz + (1-z^2)^{1/2}} \cdot \frac{1}{(1-z^2)^{1/2}} = \frac{1}{(1-z^2)^{1/2}}.$$

Luku z on lauseessa mainitun alueen mielivaltainen piste, joten $\operatorname{Arcsin} z$ on vastaavalla tavalla derivoituva kaikkialla alueessa. Lisäksi koska alue sisältää vain omia sisäpisteitään, $\operatorname{Arcsin} z$ on alueessa analyyttinen. □

6. YHTEENVETO

Tämän työn tarkoituksena oli selvittää, miten moniarvoisia funktioita käsitellään kompleksianalyysin perustason oppikirjoissa. Työssä esiteltiin moniarvoisiin funktioihin liittyvät käsitteet kiertopiste, haara ja leikkauskäyrä. Näitä käsitteitä havainnollistettiin logaritmifunktion, yleisen potenssifunktion ja arkussinifunktion avulla. Lisäksi näiden esimerkkifunktioiden avulla näytettiin, kuinka moniarvoisia funktioita voidaan käsitellä analyyttisinä funktioina.

Moniarvoisen funktion kiertopisteellä tarkoitetaan kompleksitason pistettä, jonka kierron jälkeen moniarvoisen funktion yksittäinen arvo jossain pisteessä on eri kuin ennen kiertoa. Moniarvoisen funktion haara on sellainen yksiarvoinen funktio, joka saa jokaisessa määrittelyjoukkonsa pisteessä jonkin moniarvoisen funktion yksittäisistä arvoista ja on yksittäisiä käyriä lukuun ottamatta määrittelyjoukossaan jatkuva. Näitä epäjatkuvuuskäyriä kutsutaan moniarvoisen funktion leikkauskäyriksi.

Logaritmifunktion haarat saatiin valitsemalla jokaiselle määrittelyjoukon pisteelle sellainen logaritmi, jonka imaginaariosa eli pisteen argumentti on tietyllä 2π-pituisella välillä. Yleisen potenssifunktion haarat saatiin valitsemalla funktion määritelmässä käytetyn logaritmifunktion arvoiksi sen jonkin haaran arvot. Vastaavasti arkussinifunktion haarat saatiin valitsemalla sen määrittelmässä käytettyjen logaritmifunktion ja yleisen potenssifunktion erikoistapauksen arvoiksi niiden joidenkin haarojen arvot.

Tällä tavalla saatujen haarojen todistettiin olevan analyyttisiä kaikkialla muualla moniarvoisen funktion määrittelyjoukossa paitsi haaraan liittyvällä leikkauskäyrällä. Näiden esimerkkifunktioiden perusteella voidaan siis todeta, että kompleksianalyysin perustason oppikirjoissa moniarvoisten funktioiden käsittely yksiarvoisina ja analyyttisinä funktioina perustuu funktion yksittäisten arvojen sopivaan valintaan.

Alan edistyneemmissä teksteissä moniarvoisten funktioiden käsittely eroaa huomattavasti perustason oppikirjojen käsittelystä. Näissä funktioita ei määritellä tavallisella kompleksitasolla, vaan kullekin funktiolle ominaisella *Riemannin pinnalla* (*Riemann Surface*), jotka kuuluisa matemaatikko Bernhard Riemann esitteli vuonna

1851 ilmestyneessä väitöskirjassaan [3]. Intuitiivinen selitys Riemannin pinnoista annetaan perustason oppikirjoissa [2] ja [4]. Esimerkki edistyneemmän tason oppikirjasta on suuren suomalaisen matemaatikon Lars Ahlforsin teos *Complex analysis: An introduction to the theory of analytic functions of one complex variable.*

LÄHTEET

[1] George Arfken and Hans Weber. *Mathematical methods for physicists.* 6th edition. Elsevier, 2005.

[2] James Brown and Ruel Churchill. *Complex variables and applications.* 8th internat. edition. McGraw-Hill, 2009.

[3] Detlef Laugwitz. "Riemann's Dissertation and Its Effect on the Evolution of Mathematics". In: *The American Mathematical Monthly,* Volume 106, Issue 5 (1999).

[4] John Mathews and Russell Howell. *Complex analysis for mathematics and engineering.* 5th edition. Jones and Bartlett, 2006.

[5] Jorma Merikoski, Ari Virtanen ja Pertti Koivisto. *Diskreetti matematiikka 1.* 11. muuttum. painos. Tampereen yliopisto, 2001.

[6] Philip Morse and Herman Feshbach. *Methods of theoretical physics : Part 1.* McGraw-Hill, 1953.

[7] Frank Olver. *NIST Handbook of Mathematical Functions.* Cambridge University Press, 2010.

A. FUNKTION KARTEESI- JA POLAARIMUODOT SEKÄ CAUCHY-RIEMANNIN EHDOT

Olkoon z kompleksimuuttuja ja f tämän kompleksiarvoinen funktio. Funktion f arvot voidaan ilmaista niiden komponenttien eli reaaliosan u ja imaginaariosan v avulla $f(z) = u + iv$. Jos myös kompleksimuuttuja z ilmaistaan sen reaaliosan x ja imaginaariosa y avulla $z = x + iy$, funktion f arvon komponentteja u ja v voidaan pitää muuttujien x ja y funktioina. Tällöin esitystapaa

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y).$$

kutsutaan funktion f komponenttiesityksen *karteesimuodoksi.*

Toisaalta jokainen nollasta poikkeava kompleksiluku $z = x + iy$ voidaan kompleksitason pisteenä ajateltuna ilmaista polaarikoordinaateilla r ja θ, jossa r on pisteen ja origon välisen janan pituus ja θ on janan ja positiivisen x-akselin muodostaman kulman suuruus. Eulerin kaava $e^{i\phi} = \cos(\phi) + i \sin(\phi)$ antaa yhteyden esitystapojen välille, sillä sen perusteella

$$z(r, \theta) = re^{i\theta} = r \cos(\theta) + ir \sin(\theta).$$

Funktion f arvon komponentteja voidaan siis pitää myös muuttujien r ja θ funktioina. Tällöin esitystapaa

$$f(z) = U(r, \theta) + iV(r, \theta)$$

kutsutaan funktion f komponenttiesityksen *polaarimuodoksi.* Eri muuttujien takia komponenttifunktioita merkataan eri symboleilla verrattuna karteesimuotoon. Lauseet A.1 ja A.2 antavat karteesi- ja polaarimuodossa riittävät ehdot funktion derivoituvuudelle pisteessä. Ehtoja kutsutaan *Cauchy-Riemannin (CR) ehdoiksi.*

Lause A.1 (Cauchy-Riemannin ehdot karteesimuodossa)**.** *[4, s. 105]. Oletetaan, että funktio $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ on jatkuva pisteen $z_0 = x_0 + iy_0$ jossain ympä-*

ristössä ja että:

1. *osittaisderivaatat* u_x, u_y, v_x, v_y *ovat olemassa kyseisessä ympäristössä*
2. *osittaisderivaatat ovat jatkuvia pisteessä* z_0*, ja ne toteuttavat siinä Cauchy-Riemannin karteesiset yhtälöt* $u_x = v_y$ *ja* $u_y = -v_x$

Tällöin f *on derivoituva pisteessä* z_0 *ja*

$$f'(z_0) = u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0).$$

Lause A.2 (Cauchy-Riemannin ehdot polaarimuodossa)**.** *Oletetaan, että funktio* $f(z) = U(r, \theta) + iV(r, \theta)$ *on määritelty pisteen* $z_0 = r_0 e^{i\theta_0} \neq 0$ *ympäristössä ja että:*

1. *osittaisderivaatat* $U_r, U_\theta, V_r, V_\theta$ *ovat olemassa kyseisessä ympäristössä*
2. *osittaisderivaatat ovat jatkuvia pisteessä* z_0*, ja ne toteuttavat siinä Cauchy-Riemannin polaariset yhtälöt* $rU_r = V_\theta$ *ja* $U_\theta = -rV_r$*.*

Tällöin f *on derivoituva pisteessä* z_0 *ja*

$$f'(z_0) = e^{-i\theta_0}(U_r(r_0, \theta_0) + iV_r(r_0, \theta_0)).$$

Todistus. Vaikka lauseen oletukset osittaisderivaattojen olemassaolosta ja jatkuvuudesta käsittelevät vain polaarimuodon komponenttifunktioita $U(r, \theta)$ ja $V(r, \theta)$, todistuksessa [4, s. 111] niiden oletetaan olevan voimassa myös karteesimuodon komponenttifunktioille $u(x, y)$ ja $v(x, y)$. Mukaillaan tätä todistusta ja todistetaan, että polaariset CR-yhtälöt ovat yhtäpitäviä karteesisten CR-yhtälöiden kanssa.

Pyritään ensin esittämään komponenttifunktioiden $u(x, y)$ ja $v(x, y)$ osittaisderivaatat komponenttifunktioiden $U(r, \theta)$ ja $V(r, \theta)$ osittaisderivaattojen avulla. Koordinaattimuunnoksilla $x = r\cos\theta$ ja $y = r\sin\theta$ komponenttifunktioiden välinen yhteys on $u(x, y) = u(r\cos\theta, r\sin\theta) = U(r, \theta)$ ja $v(x, y) = v(r\cos\theta, r\sin\theta) = V(r, \theta)$. Osittaisderivoimalla $U(r, \theta)$ muuttujien r ja θ suhteen saadaan ketjusääntöä soveltaen

$$\frac{\partial U}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} \quad \text{ja} \quad \frac{\partial U}{\partial \theta} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta}$$

eli

$$U_r = u_x \cos\theta + u_y \sin\theta \quad \text{ja} \quad U_\theta = -u_x r \sin\theta + u_y r \cos\theta. \tag{A.1}$$

Vastaavalla tavalla komponenttifunktion $V(r,\theta)$ osittaisderivaatoiksi saadaan

$$V_r = v_x \cos\theta + v_y \sin\theta \quad \text{ja} \quad V_\theta = -v_x r \sin\theta + v_y r \cos\theta. \tag{A.2}$$

Kertomalla yhtälöistä (A.1) vasemmanpuoleinen luvulla $r\cos\theta$ ja oikeanpuoleinen luvulla $-\sin\theta$ sekä summaamalla tästä seuraavat yhtälöt saadaan

$$U_r r\cos\theta - U_\theta \sin\theta = u_x r(\sin\theta^2 + \cos\theta^2).$$

Käyttämällä identiteettiä $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ ja jakamalla säteellä r (oletuksen $z \neq 0$ mukaan $r \neq 0$) saadaan

$$u_x = U_r \cos\theta - \frac{U_\theta \sin\theta}{r}. \tag{A.3}$$

Vastaavasti kertomalla yhtälöistä (A.1) vasemmanpuoleinen luvulla $r\sin\theta$ ja oikeanpuoleinen luvulla $\cos\theta$ ja ratkaisemalla summayhtälö saadaan

$$u_y = U_r \sin\theta + \frac{U_\theta \cos\theta}{r}. \tag{A.4}$$

Menettelemällä täsmälleen samalla tavalla yhtälöiden (A.2) kanssa saadaan komponenttifunktion v osittaisderivaatoiksi

$$v_x = V_r \cos\theta - \frac{V_\theta \sin\theta}{r}. \tag{A.5}$$

ja

$$v_y = V_r \sin\theta + \frac{V_\theta \cos\theta}{r}. \tag{A.6}$$

Jos polaariset CR-yhtälöt $rU_r = V_\theta$ ja $U_\theta = -rV_r$ ovat voimassa, niin yhtäsuuruus $u_x = v_y$ seuraa yhtälöistä (A.3) ja (A.6), ja yhtäsuuruus $u_y = -v_x$ yhtälöistä (A.4) ja (A.5). CR-yhtälöiden polaarisista versioista seuraa siis karteesiset versiot, ja Lauseen A.1 perusteella f on derivoituva pisteessä z_0.

Toisaalta, jos karteesiset CR-yhtälöt $u_x = v_y$ ja $u_y = -v_r$ ovat voimassa, yhtälöistä (A.1) vasemmanpuoleisesta ja yhtälöistä (A.2) oikeanpuoleisesta seuraa yhtäsuuruus $U_r = \frac{1}{r}V_\theta$. Vastaavasti yhtälöistä (A.1) oikeanpuoleisesta ja yhtälöistä (A.2) vasemmanpuoleisesta seuraa yhtäsuuruus $U_\theta = -rV_r$. Näin siis CR-yhtälöiden karteesisista versioista seuraa polaariset versiot.

Johdetaan vielä lauseen esitys derivaatalle $f'(z_0)$ polaarimuodossa lähtien (alaindeksejä merkkaamatta) sen karteesisesta esityksestä $f'(z) = u_x(x,y) + iv_x(x,y)$.

Tekemällä yhtälöiden (A.3) ja (A.5) mukaiset sijoitukset saadaan

$$f'(z) = U_r \cos\theta - \frac{U_\theta \sin\theta}{r} + i(V_r \cos\theta - \frac{V_\theta \sin\theta}{r}).$$

Nyt polaarisista CR-yhtälöistä seuraa

$$f'(z) = U_r \cos\theta + V_r \sin\theta + i(V_r \cos\theta - U_r \sin\theta),$$

joka sinin parittomuutta ja kosinin parillisuutta käyttäen saadaan muotoon

$$f'(z) = U_r(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)) + iV_r(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)).$$

Käyttämällä Eulerin kaavaa $e^{i\phi} = \cos\phi + i\sin\phi$ ja merkkaamalla alaindeksit saadaan lauseessa käytetty esitys

$$f'(z_0) = e^{-i\theta_0}(U_r(r_0, \theta_0) + iV_r(r_0, \theta_0)).$$

$\square$