



TAMPEREEN TEKNILLINEN YLIOPISTO  
TAMPERE UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

LEO MÄNTYNEN  
TURBULENSSIMALLIT AERODYNAAMISTEN SOVELLUSTEN  
NUMEERISESSA LASKENNASSA  
Kandidaatintyö

Kemian ja biotekniikan laboratorio

Tarkastaja: DI Niko Niemelä

## TIIVISTELMÄ

TAMPEREEN TEKNILLINEN YLIOPISTO

Ympäristö- ja energiatekniikan koulutusohjelma

**LEO MÄNTYNEN:** Turbulenssimallit aerodynaamisten sovellusten numeerisessa laskennassa

Kandidaatintyö, 27 sivua

Elokuu 2017

Pääaine: Energia- ja prosessitekniikka

Tarkastaja: DI Niko Niemelä

Avainsanat: aerodynamiikka, turbulenssimalli, numeerinen virtauslaskenta, Spalart–Allmaras-malli, SST  $k-\omega$ -malli

Aerodynamiikassa ollaan kiinnostuneita ilmapirtauksessa olevaan kappaleeseen kohdistuvista voimista, sillä useiden teknisten laitteiden toiminta perustuu näiden voimien hallintaan. Esimerkiksi tuuliturbiinien energiantuotanto, ajoneuvojen ilmanvastus ja lentokoneiden kantovoima määräytyvät aerodynaamisten voimien perusteella. Aerodynaamiset voimat voidaan selvittää mittausten tai numeerisen laskennan avulla. Laskennassa voimat voidaan ratkaista, kun ensin mallinnetaan virtauksen paine- ja nopeusjakauma kappaleen pinnalla. Turbulentissa virtauksessa paine- ja nopeuskentän selvittämiseen voidaan käyttää RANS-yhtälöitä ja turbulenssimalleja. Aerodynaamisten sovellusten laskentaan käytettävien turbulenssimallien täytyy ottaa huomioon kiinteän pinnan lähellä tapahtuvat ilmiöt kuten virtauksen irtoaminen ja kitkan vaikutus rajakerroksen eri osissa.

Tässä kandidaatintyössä selvitettiin, mitkä turbulenssimallit soveltuvat aerodynaamisten virtausten mallintamiseen ja laskettiin näitä malleja käyttäen kanto- ja vastusvoimakertoimen NACA 0012 -siipiprofiilille viidellä eri kohtauskulmalla. Vertailuarvoina käytettiin Ladsonin [7, s. 21] tuulitunnelikokeiden tuloksia.

Laskennan tulosten perusteella Spalart–Allmaras ja SST  $k-\omega$  -malleja voidaan käyttää NACA 0012 -profiilin kantovoimakertoimen laskemiseen ilman yli 5 % virhettä, kun kohtauskulma on pienempi tai yhtä suuri kuin  $10,11^\circ$ . Vastusvoimakertoimelle vastaava kohtauskulma oli  $4,11^\circ$ . Myös isommilla kohtauskulmilla tulokset olivat oikean suuntaisia, mutta ero kokeellisiin tuloksiin kasvoi kulman funktiona ollen välillä 30–150 %. Testattujen turbulenssimallien vertailussa SST  $k-\omega$  -mallilla saatiin hieman tarkempia tuloksia kohtauskulmilla  $0^\circ$  ja  $4,11^\circ$  ja Spalart–Allmaras-mallilla puolestaan tätä suuremmilla kohtauskulmilla. Erot tarkkuudessa olivat kuitenkin vain noin 5 %, paitsi kohtauskulmalla  $19,25^\circ$ , jolla Spalart–Allmaras-mallilla saatu tulos oli yli 10 % tarkempi kuin SST  $k-\omega$  -mallin tulos.

## SISÄLLYSLUETTELO

|       |  |    |
|-------|--|----|
| 1.    | JOHDANTO .....                                     | 1  |
| 2.    | TEOREETTINEN TAUSTA .....                          | 2  |
| 2.1   | Aerodynamiikan perusteet.....                      | 2  |
| 2.2   | Virtausta hallitsevat yhtälöt.....                 | 4  |
| 2.3   | RANS-yhtälöt.....                                  | 4  |
| 2.4   | Turbulenssimallit.....                             | 5  |
| 2.4.1 | Boussinesq'n hypoteesi.....                        | 6  |
| 2.4.2 | Energian siirto turbulenssissa.....                | 6  |
| 2.4.3 | Turbulentin rajakerroksen rakenne .....            | 7  |
| 2.4.4 | Spalart–Allmaras-malli .....                       | 8  |
| 2.4.5 | k- $\omega$ -malli .....                           | 10 |
| 2.5   | Numeerinen virtauslaskenta .....                   | 13 |
| 3.    | NACA 0012 -SIIPIPROFIILIN NUMEERINEN LASKENTA..... | 14 |
| 3.1   | Virtaustilanne ja oletukset.....                   | 14 |
| 3.2   | Laskentaverkko .....                               | 15 |
| 3.2.1 | Verkkoriippumattomuustarkastelu.....               | 16 |
| 4.    | TULOKSET .....                                     | 18 |
| 5.    | YHTEENVETO .....                                   | 20 |
|       | LÄHTEET.....                                       | 21 |

## SYMBOLILUETTELO

|            |  |        |
|------------|--|--------|
| $A$        | pinta-ala  | $m^2$  |
| $C$        | kokeellinen vakio                                  | 1      |
| $c$        | siipiprofiilin jänne                               | $m$    |
| $c_d$      | vastusvoimakerroin                                 | 1      |
| $c_l$      | kantovoimakerroin                                  | 1      |
| $D$        | vastusvoima  | $N$    |
| $D'$       | vastusvoima kappaleen syvyysyksikköä kohden        | $N/m$  |
| $d$        | siipiprofiilin paksuus                             | $m$    |
| $F$        | sekoitusfunktio                                    | 1      |
| $f$        | seinämäfunktio                                     | 1      |
| $i$        | tensorimerkintöjen alaindeksi, saa arvot 1, 2 ja 3 | 1      |
| $j$        | tensorimerkintöjen alaindeksi, saa arvot 1, 2 ja 3 | 1      |
| $k$        | turbulentti kineettinen energia                    | $J/kg$ |
| $k(t)$     | kineettinen energia                                | $J/kg$ |
| $L$        | kantovoima   | $N$    |
| $L'$       | kantovoima kappaleen syvyysyksikköä kohden         | $N/m$  |
| $\ell$     | turbulentti pituusskaala                           | $m$    |
| $M$        | Machin luku  | 1      |
| $p$        | paine  | $Pa$   |
| $U_\infty$ | vapaan virtauksen nopeus                           | $m/s$  |
| $u$        | $x$ -suuntainen nopeus                             | $m/s$  |
| $u_\tau$   | kitkanopeus  | $m/s$  |
| $Re$       | Reynoldsin luku                                    | 1      |
| $S$        | pyörteisyys  | $1/s$  |
| $s_{ij}$   | deformaatiotensori                                 | $1/s$  |
| $t$        | aika   | $s$    |
| $y$        | etäisyys seinästä                                  | $m$    |
| $y^+$      | dimensioton etäisyysmuuttuja                       | 1      |

### Kreikkalaiset kirjaimet

|                 |   |           |
|-----------------|---|-----------|
| $\alpha$        | kohtauskulma  | $^\circ$  |
| $\beta$         | kokeellinen vakio   | 1         |
| $\delta$        | nopeusrajakerroksen paksuus   | $m$       |
| $\delta_{ij}$   | Kroneckerin delta   | 1         |
| $\varepsilon$   | turbulentti dissipaationopeus   | $m^2/s^3$ |
| $\theta$        | siipiprofiilin pinnan normaalin ja paikallisen nopeusvektorin välinen kulma | $^\circ$  |
| $\vartheta$     | turbulentti nopeusskaala  | $m/s$     |
| $\kappa$        | Von Karmanin vakio  | 1         |
| $\mu$           | (dynaaminen) viskositeetti  | $kg/ms$   |
| $\mu_{kok}$     | summa $\mu + \rho \tilde{\nu}_t$  | $kg/ms$   |
| $\mu_t$         | turbulentti (dynaaminen) viskositeetti                                      | $kg/ms$   |
| $\nu$           | kinemaattinen viskositeetti   | $m^2/s$   |
| $\nu_t$         | turbulentti kinemaattinen viskositeetti                                     | $m^2/s$   |
| $\tilde{\nu}_t$ | modifioitu turbulentti kinemaattinen viskositeetti                          | $m^2/s$   |

|                   |  |          |
|-------------------|--|----------|
| $\rho$            | tiheys   | $kg/m^3$ |
| $\tau$            | leikkausjännitys   | $N/m^2$  |
| $\sigma$          | kokeellinen vakio  | 1        |
| $\phi$            | jokin virtauksen suure   |          |
| $\overline{\phi}$ | suureen keskiarvo ajan suhteen   |          |
| $\phi'$           | suureen ajasta riippuva osa  |          |
| $\chi$            | modifioidun turbulentin kinemaattisen viskositeetin ja kinemaattisen viskositeetin suhde | 1        |
| $\Omega_{ij}$     | keskiarvokulmanopeustensori  | 1/s      |
| $\omega$          | turbulentti taajuus  | 1/s      |

## LYHENTEET

|              |  |
|--------------|--|
| AAIA         | American Institute of Aeronautics and Astronautics |
| NACA         | National Advisory Committee for Aeronautics        |
| RANS-yhtälöt | aikakeskiarvotetut Navier–Stokes-yhtälöt           |
| S–A-malli    | Spalart–Allmaras-malli                             |
| SIMPLE       | Semi-Implicit Method for Pressure-Linked Equations |
| SST          | Shear Stress Transport                             |

# 1. JOHDANTO

Aerodynamiikka on virtausopin alahaara, joka tutkii ilman liikettä ja sen vuorovaikutusta kiinteiden kappaleiden kanssa. Aerodynamiikkaa hyödynnetään muun muassa autojen, lentokoneiden, laivojen ja turbiinien suunnittelussa. Sovelluksissa ollaan yleensä erityisesti kiinnostuneita virtauksessa olevaan kappaleeseen kohdistuvista voimista. Esimerkiksi lentokoneiden siivet pyritään suunnittelemaan niin, että ne tuottavat suurimman mahdollisen kantovoiman ja samanaikaisesti pienen vastusvoiman. [2]

Virtauksessa olevaan kappaleeseen kohdistuvat voimat voidaan selvittää kokeellisesti tuulitunnelissa tehtävien mittausten avulla, tai teoreettisesti virtausmekaniikan yhtälöistä. Tuulitunnelikokeet ovat usein kalliita ja aikaa vieviä, joten ensin virtaustilannetta on järkevää testata ratkaisemalla virtausta hallitsevat yhtälöt tietokonemallinnuksen avulla. Useimmiten aerodynaamisten virtausten virtauskentät ja geometriat ovat niin monimutkaisia, että analyttinen ratkaisu ei ole mahdollinen ja yhtälöt täytyy ratkaista numeerisesti. [5, s. 608]

Kappaleeseen kohdistuvat voimat aiheutuvat painejakaumasta ja kitkasta kappaleen pinnalla. Kitkan vaikutusta kuvataan leikkausjännityksellä, joka riippuu pinnan nopeusgradientista. Siten voimien ratkaisemiseksi täytyy selvittää nopeus- ja painejakauma virtauksessa. [2, s. 15–20] Paine- ja nopeuskentän ratkaisemisessa vaikeudeksi muodostuu turbulenssin riittävän tarkka kuvaaminen. Turbulentissa virtauksessa suureet kuten nopeus vaihtelevat 3-ulotteisesti, satunnaisesti ja nopeasti ajan funktiona, ja turbulenssin mallintaminen onkin yksi klassisen fysiikan ratkaisemattomista ongelmista [2, s. 839][10, s. 111]. Tällä hetkellä yleisin on menetelmä, jossa virtausta hallitsevat yhtälöt ratkaistaan keskiarvona ajan suhteen ja turbulenssin vaikutuksen huomioimiseen käytetään jotakin turbulenssimallia. Tulosten tarkkuus riippuu kuitenkin täysin siitä, miten hyvin valittu malli sopii kyseiseen virtaustilanteeseen. [10][5, s. 904] Aerodynaamisille virtauksille suunnitellut turbulenssimallit yrittävät vapaan virtauksen turbulenssin lisäksi ottaa huomioon ilmiöt pinnan lähellä olevassa rajakerroksessa, jossa kitkavoimilla on merkittävä vaikutus virtauksen käyttäytymiseen.

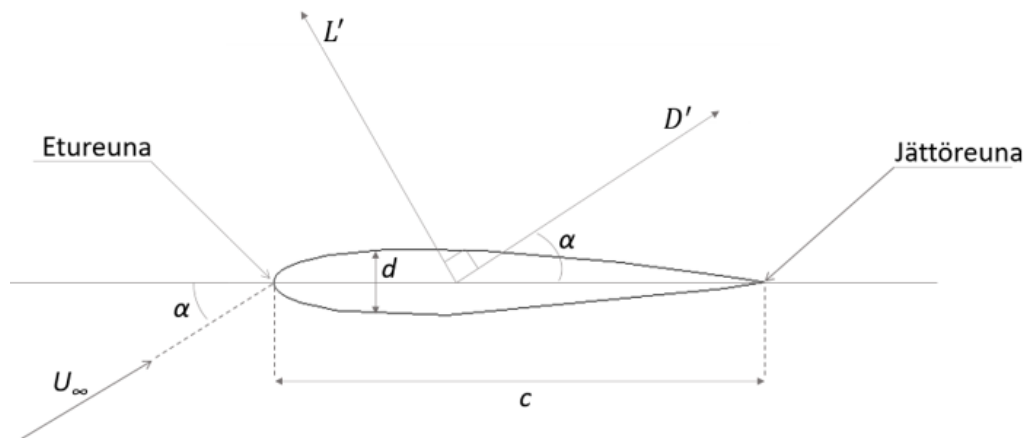
Tämän työn kirjallisuusosuudessa käydään lyhyesti läpi aerodynamiikan perusteet, virtausmekaniikan perusyhtälöt, turbulenssimallien lähtökohdat, laskentaosuudessa käytetyt turbulenssimallit ja kontrollitulavuusmenetelmä. Työn laskentaosuudessa käytettiin numeerista virtauslaskentaa NACA 0012 -kantosiiven ohitse olevan ilmapirtauksen mallintamiseen. Siivelle laskettiin kanto- ja vastusvoimakertoja kahta eri turbulenssimallia käyttäen viidelle eri kohtauskulmalle, ja tuloksia verrattiin kokeellisiin arvoihin.

## 2. TEOREETTINEN TAUSTA

### 2.1 Aerodynamiikan perusteet

Aerodynamiikassa ollaan yleensä kiinnostuneita virtauksessa olevaan kappaleeseen kohdistuvasta voimasta, joka aiheutuu kitkasta ja painejakaumasta kappaleen pinnalla. Voima jaetaan komponentteihin siten, että vapaan virtauksen nopeuden  $U_\infty$  suuntaan olevaa komponenttia sanotaan vastusvoimaksi  $D$  ja nopeusvektorin normaalin suuntaan vaikuttavaa komponenttia kantovoimaksi  $L$ . Kaksiulotteisessa tapauksessa voimista käytetään profiilin syvyydellä jaettuja muotoja  $D'$  ja  $L'$ . [2, s. 16–21]

Kuvassa 1 on esimerkkinä aerodynaamisesta virtauksesta NACA 0012 -kantosiipiprofiili ja profiilien kuvaamisessa käytettäviä merkintöjä. Profiilin jänne  $c$  on lyhin etäisyys etureunasta jättöreunaan ja paksuus  $d$  ylä- ja alapinnan välinen suurin etäisyys. Numerosarja 0012 tarkoittaa NACA-komitean (engl. National Advisory Committee for Aeronautics) nimeämistavan mukaan symmetristä profiilia, jonka maksimipaksuus on  $0,12c$ . Kohtauskulmaksi sanotaan jänteen ja vapaan virtauksen nopeuden  $U_\infty$  välistä pienempää kulmaa ja sitä merkitään kirjaimella  $\alpha$ . [2, s. 279–280][6, s. 30]



**Kuva 1.** NACA 0012 -siipiprofiili ja kantosiiven merkinnät, perustuu lähteeseen [6].

Jos paine- ja leikkausjännitys jakauma siiven pinnalla tiedetään, kantovoiman ja vastusvoiman suuruus voidaan ratkaista integroimalla kaavoista

$$L' = \int_A dL' = \int_A (-p \cos \theta + \tau \sin \theta) dA \quad (1)$$

$$j a D' = \int_A dD' = - \int_A (p \sin \theta + \tau \cos \theta) dA, \quad (2)$$

joissa  $p$  on paine,  $\tau$  on leikkausjännitys,  $A$  on siiven pinta-ala ja  $\theta$  on pinnan normaalin ja paikallisen nopeusvektorin välinen kulma. [5, s. 564–565] Profiilin kanto- ja vastusominaisuuksien ilmoittamiseen käytetään yleensä kanto- ja vastusvoimakertoimia  $c_l$  ja  $c_d$ , jotka on 2-ulotteiselle virtaukselle määritelty lausekkeilla

$$c_l \equiv \frac{L'}{\frac{1}{2} \rho U_\infty^2 c} \quad (3)$$

$$j a c_d \equiv \frac{D'}{\frac{1}{2} \rho U_\infty^2 c}, \quad (4)$$

joissa  $\rho$  on virtausaineen tiheys. Dynaamisesti similaarisille virtauksille kertoimet ovat yhtä suuret. Kantosiipien tapauksessa kaksi virtausta ovat likimain dynaamisesti similaarisia, kun profiilin muoto, Reynoldsin luku, Machin luku ja kohtauskulma ovat samat. Lisäksi pienillä virtausnopeuksilla virtaus voidaan olettaa kokoonpuristumattomaksi, jolloin myöskään Machin luvulla ei ole vaikutusta. Siten esimerkiksi tuulitunnelissa voidaan pienemmäksi skaalatus mallin avulla tutkia siiven ominaisuuksia todellisessa lentotilanteessa, kunhan similaarisuusparametrit ovat samat. Tästä syystä kanto- ja vastusvoimakertoimet ovat hyödyllisiä muuttujia lentokoneiden suunnittelussa. [2, s. 20–36]

Kaavoissa (1) ja (2) tarvittavat paine- ja leikkausjännitys jakaumat voidaan selvittää laskennallisesti, mutta sitä vaikeuttaa siiven pinnan ilmiöiden monimutkaisuus. Yleensä kappaleen etureunalla pintaan muodostuva rajakerros on laminaari, mutta tietyssä kohdassa se muuttuu transitoalueen kautta turbulentiksi. Transitoalueen mallintamisen vaikeuden takia rajakerros käsitellään joskus kokonaan turbulenttina, kuten tämän työn laskentaosuudessa. Silloin tulosten todentamiseen käytetään sellaisia kokeellisia tuloksia, joissa rajakerros on saatu alusta lähtien turbulentiksi asettamalla kappaleen etureunaan jokin este, esimerkiksi lanka. [5, s. 514, 564]

Toinen laskentatarkastelua vaikeuttava ilmiö on virtauksen irtoaminen. Jos pinnan lähellä olevassa virtauksessa esiintyy alue, jossa paine kasvaa virtaussuunnassa, rajakerros voi irrota pinnasta. Syntyvät pyörteet kohdistavat kappaleen pintaan pienemmän paineen kuin rajakerros, jolloin paine-eron aiheuttama vastusvoima kasvaa. Tarpeeksi suurella kohtauskulmalla rajakerros irtoaa siiven yläpinnasta kokonaan aiheuttaen sakkaamisen, jossa vastusvoima kasvaa jyrkästi ja kantovoima pienenee. Virtauksen irtoamisen tarkan kohdan ennustaminen on vaikeaa. [5, s. 616–617]



Turbulenssi ja virtauksen irtoaminen täytyy ottaa huomioon, kun kehitetään sopivia laskentamalleja aerodynaamisille virtauksille. Mallien perustana ovat yleiset virtausmekaniikan yhtälöt.

## 2.2 Virtausta hallitsevat yhtälöt

Virtausta hallitsevat yhtälöt pätevät sekä nesteille että kaasuille, ja tässä tekstissä niistä käytetään yhteisnimitystä fluidi. Massan ja liikemäärän säilymisyhtälöt voidaan johtaa tarkastelemalla kuution muotoista fluidi-elementtiä. Jatkuvuusyhtälö toteaa, että fluidi-elementin massan muutos ajan suhteen on yhtä suuri kuin nettomassavirta elementin tahkojen läpi, eli yhtälömuodossa saadaan [10, s. 9–11]

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial x_i} = 0, \quad (5)$$

jossa  $t$  on aika,  $u$  on nopeus ja  $x$  on paikka koordinaatistossa. Yhtälössä (5), kuten muuallakin tässä tekstissä, on käytetty karteesisia tensorimerkintöjä alaindekseillä  $i$  ja  $j$ .

Newtonin toisen lain mukaisesti fluidi-elementtiin vaikuttavien voimien summa on yhtä suuri kuin sen sisältämien molekyylien liikemäärävirran muutos, eli kun tilavuusvoimat jätetään huomiotta, saadaan yhtälö [10, s. 14–23]

$$\frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2}, \quad (6)$$

jossa  $\mu$  on dynaaminen viskositeetti. Yhtälöryhmän (6) yhtälöitä sanotaan Navier–Stokes-yhtälöiksi.

Laminaarille virtaukselle nopeus- ja painekenttä voidaan ratkaista yhtälöistä (5) ja (6). Yhtälöt pätevät myös turbulentille virtaukselle, mutta niiden ratkaiseminen on erittäin vaikeaa. Turbulentissa virtauksessa ominaisuudet vaihtelevat nopeasti, satunnaisesti ja 3-ulotteisesti ajan kuluessa jokaisessa avaruuden pisteessä. Virtausta hallitsevat yhtälöt täytyisi ratkaista ajasta riippuvina erittäin pienillä laskentakopeilla ja aika-askeleilla, jotta tarpeeksi monen yksittäisen pyörteen vaikutus virtaukseen tulisi otettua huomioon. Tämä on nykyteknologiallakin epäkäytännöllistä ja useimmissa tilanteissa myös mahdotonta. [10] Turbulentien virtauksen kuvaamiseen onkin kehitetty muita menetelmiä.

## 2.3 RANS-yhtälöt

Yleensä käytännön sovelluksissa riittää tieto siitä, miten virtauksen ominaisuudet käyttäytyvät keskimäärin ajan kuluessa. Siksi selvästi suosituin menetelmä turbulentin virtauksen nopeus- ja painekentän selvittämiseksi perustuu aikakeskiarvotettujen Navier–Stokes-yhtälöiden, eli RANS-yhtälöiden ratkaisemiseen. [10, s. 66]

RANS-yhtälöiden johtamiseksi jokainen virtauksen suure  $\phi$  hajotetaan summaksi

$$\phi = \bar{\phi} + \phi', \quad (7)$$

jossa  $\bar{\phi}$  on suureen keskimääräinen arvo ajan suhteen ja  $\phi'$  on suureen ajasta riippuva vaihtelu suhteessa keskiarvoon. Keskiarvosuure  $\bar{\phi}$  määritellään kaavalla

$$\bar{\phi} \equiv \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} \phi dt, \quad (8)$$

jossa  $\Delta t$  on riittävän pitkä aikaväli turbulentin heilahtelun jaksonaikaan verrattuna. Kaavan (8) mukainen integrointi lyhennetään jatkossa ylivivauksella. Määritelmien (7) ja (8) perusteella termille  $\phi'$  pätee  $\bar{\phi}' = 0$ . [10, s. 62]

Kun yhtälöön (5) sijoitetaan nopeuskomponentit yhtälön (7) kuvaamassa muodossa ja otetaan keskiarvo ajan suhteen, saadaan kokoonpuristumattomalle virtaukselle

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0. \quad (9)$$

Jatkuvuusyhtälö on siis keskiarvonopeudelle sama kuin nopeudelle laminaarissa tapauksessa. Sijoitetaan seuraavaksi paine ja nopeus yhtälöön (6) ja otetaan keskiarvo ajan suhteen. Tuloksena saadaan

$$\rho \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \rho \frac{\partial (\bar{u}_i \bar{u}_j)}{\partial x_j} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_j^2} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial (\overline{\rho u'_i u'_j})}{\partial x_j}. \quad (10)$$

Yhtälöitä (9) ja (10) kutsutaan RANS-yhtälöiksi. Yhtälö (10) eroaa Navier–Stokes-yhtälöistä vain liikeyhtälön oikean puolen viimeisen termin osalta, jossa suureita  $-\overline{\rho u'_i u'_j}$  kutsutaan Reynoldsin jännityksiksi. Reynoldsin jännitykset kuvaavat turbulentin vaihtelun keskiarvovirtaukseen aiheuttamia jännityksiä, jotka ovat usein paljon suurempia kuin kitkajännitykset. Turbulenssin vaikutus täytyy siis ottaa huomioon, vaikka tarkasteltaisiin virtauksen ominaisuuksia keskiarvona ajan suhteen. Reynoldsin jännitysten laskemiseksi on kehitetty erilaisia puoliempiirisiä malleja, joita sanotaan turbulenssimalleiksi. [10, s. 62–66]

## 2.4 Turbulenssimallit

Turbulenssimallinnuksen tavoitteena on kuvata Reynoldsin jännityksiä tarpeeksi yksinkertaisella, tarkalla ja laajasti sovellettavissa olevalla mallilla. [10, s. 66] Mallit ovat approksimaatioita, jotka perustuvat vahvasti mittauksien ja numeerisen simulaation tuloksiin. Tämän takia mikään turbulenssimalli ei ole yleispätevä, vaan luotettavien tulosten saamiseksi tarvitaan virtaustilanteeseen sopiva malli. [5, s. 904]

### 2.4.1 Boussinesq'n hypoteesi

Monissa turbulenssimalleissa tärkeä käsite on turbulenti viskositeetti, jonka Boussinesq määritteli vuonna 1877. Hän oletti, että samoin kuin kitkan aiheuttama leikkausjännitys, myös turbulentin heilahtelun aiheuttamat Reynoldsin jännitykset ovat suoraan verrannollisia keskiarvovenymänopeuteen, eli matemaattisesti ilmaistuna [10, s. 67]

$$-\overline{\rho u'_i u'_j} = \mu_t \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \rho k \delta_{ij}, \quad (11)$$

jossa  $\mu_t$  on turbulenti viskositeetti,  $k$  on turbulenti kineettinen energia ja  $\delta_{ij}$  on Kroneckerin delta, jolle pätee

$$\delta_{ij} \equiv \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}. \quad (12)$$

Turbulenti viskositeetti ei ole aineominaisuus, vaan riippuu virtaustilanteesta. Turbulenti kineettinen energia  $k$  määritellään kaavalla

$$k \equiv \frac{1}{2} \overline{u'_{ii}{}^2}. \quad (13)$$

Yleistä käytäntöä seuraten kaavan (7) mukaisesta merkintätavasta on tässä tekstissä turbulentin kineettisen energian kohdalla poikettu, ja sitä merkitään kirjaimella  $k = k'$ . Kaavassa (11) oikean puolen viimeinen termi tarvitaan, jotta normaalijännitykset toteuttavat kaavan (13). [10, s. 67–68]

Näin on saatu Reynoldsin jännityksille yhtälöryhmä, jossa ainoa tuntematon on turbulenti viskositeetti  $\mu_t$ . Yhtälö (11) ei ole vielä varsinainen turbulenssimalli, koska siinä ei ole yritetty mallintaa turbulenttia viskositeettia. Boussinesq'n hypoteesia on kuitenkin käytetty pohjana monessa turbulenssimallissa.

### 2.4.2 Energian siirto turbulenssissa

Turbulentin viskositeetin yksikkö on  $kg/ms$ , joten sen dimensioiden perusteella se voidaan laskea tiheyden  $\rho [kg/m^3]$ , nopeuskaalan  $\vartheta [m/s]$  ja pituuskaalan  $\ell [m]$  tulona [10, s. 69]. Skaalojen määrittämiseksi RANS-liikeyhtälöstä (10) voidaan johtaa siirtoyhtälöitä uusille suureille, jotka kuvaavat energian siirtoa turbulenssissa virtauksessa. Tässä tekstissä käsitellyt suureet ovat turbulenti kineettinen energia  $k$ , turbulenti dissipationopeus  $\varepsilon$  ja turbulenti taajuus  $\omega$ .

Turbulenssissa virtauksessa kineettinen energia  $k(t) = \bar{k} + k$  siirtyy pyörteiden vaikutuksesta. Keskiarvovirtauksen liike-energia  $\bar{k}$  muuttuu virtauksen isoimpien pyörteiden turbulenssiksi kineettiseksi energiaksi  $k$  Reynoldsin jännitysten tekemän muodonmuutostyön

vaikutuksesta. Tätä kutsutaan turbulenssin tuotoksi. Samaa kokoluokkaa olevat pyörteet vuorovaikuttavat keskenään pyörteiden venytykseksi kutsutulla mekanismilla, jolloin energia siirtyy koko ajan pienempiin skaaloihin. Lopulta pienimpien pyörteiden kineettinen energia muuttuu lämmöksi molekulaarisen kitkan vaikutuksesta, eli dissipoituu. Turbulenssin tuoton ja dissipaation voidaan päätellä olevan suunnilleen tasapainossa, sillä muuten turbulenssin energia kasvaisi äärettömästi. [10, s. 42–43]

Tuotto ja dissipaatio nähdään turbulentin kineettisen energian siirtoyhtälöstä, joka voidaan johtaa Navier–Stokes- ja RANS-yhtälöitä muokkaamalla. Tuloksena saadaan

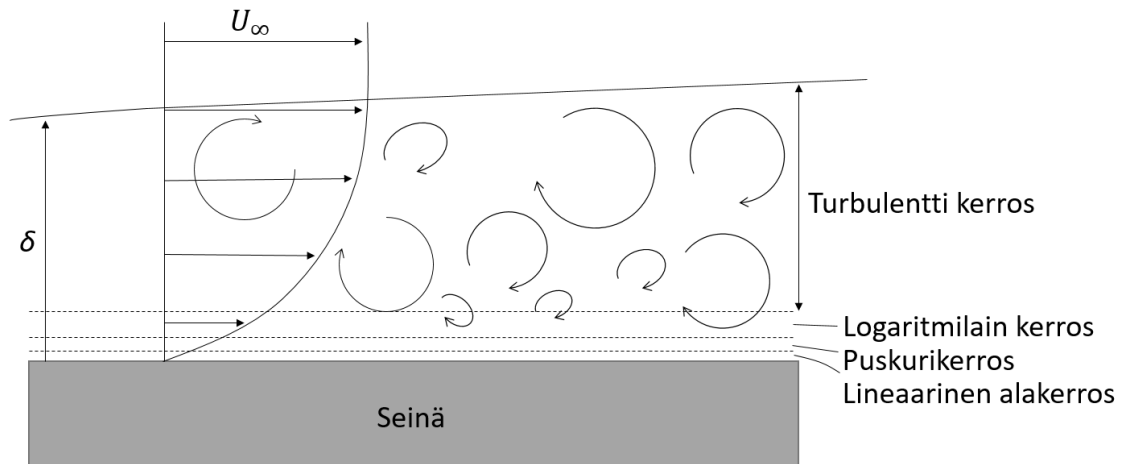
$$\frac{\partial(\rho k)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho k \bar{u}_i)}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( -\overline{p' u'_i} + 2\mu \overline{u'_i s'_{ij}} - \rho \frac{1}{2} \overline{u'_i \cdot u'_i u'_j} \right) - \rho \varepsilon - \overline{\rho u'_{ij} u'_{ij}} \cdot \bar{s}_{ij}, \quad (14)$$

jossa deformaatiotensori on hajotettu yhtälön (7) mukaisesti  $s_{ij} = \bar{s}_{ij} + s'_{ij}$ . Aivan kuten massan ja liikemäärän siirtoyhtälöissä, yhtälön (14) vasemman puolen ensimmäinen termi kuvaa turbulentin kineettisen energian muutosta kontrollitilavuudessa ja toinen termi konvektiolla ulos tilavuudesta siirtyvää nettovirtausta. Oikealla puolella sulkujen sisällä olevat termit kuvaavat paineen, kitkan ja turbulenssin aiheuttamaa siirtoa. Oikean puolen viimeinen termi on turbulentin kineettisen energian tuottonopeus ja  $\varepsilon$  on dissipaationopeus  $\varepsilon \equiv 2\nu \overline{s'_{ij} s'_{ij}}$ . [10, s. 74]

Yhtälön (14) kaltaiset siirtoyhtälöt voidaan johtaa myös dissipaationopeudelle  $\varepsilon$  ja turbulentille taajuudelle  $\omega \equiv \varepsilon/k$ . Kaikkia termejä yhtälöissä ei kuitenkaan edelleenkaan tiedetä, tällainen on esimerkiksi yhtälön (15) painetermi  $-\overline{p' u'_i}$  [10, s. 76]. Siksi turbulenssimalleissa osa termeistä on jätetty pois merkityksettöminä ja osa on mallinnettu kokonaan uudelleen tunnettujen muuttujien ja kokeellisiin tuloksiin tehtyjen sovitteiden avulla.

### 2.4.3 Turbulentin rajakerroksen rakenne

Aerodynaamisissa virtauksissa erityisen tärkeää on seinämän ilmiöiden riittävän tarkka kuvaaminen, sillä ne määrittävät kiinteään pintaan kohdistuvan voiman. Seinämän lähellä on nopeusrajakerros (paksuus  $\delta$ ), jossa kitkan vaikutus virtaukseen täytyy ottaa huomioon. Rajakerroksessa dimensiotonta etäisyyttä seinästä kuvataan etäisyyssuuttujalla  $y^+ \equiv u_\tau y/\nu$ , jossa  $y$  on etäisyys seinästä ja  $u_\tau$  on kitkanopeus, joka määritellään  $u_\tau \equiv \sqrt{\tau(y=0)/\rho}$ . Kitkan merkitys vaihtelee turbulentin rajakerroksen eri osissa, jotka on esitetty kuvassa 2.



**Kuva 2.** Turbulenttin rajakerroksen osat.

Aivan seinän vieressä alueella  $y^+ < 5$  on ohut kerros, jossa turbulenssin vaikutus on ole-  
maton verrattuna kitkavoimiin, sillä turbulenteja pyörteitä ei mahdu muodostumaan.  
Tässä lineaarisessa alakerroksessa turbulenteille viskositeetille pätee  $\nu_t \approx 0$  ja voidaan  
johtaa  $u^+ = y^+$ , jossa  $u^+ = u/u_\tau$ . [10, s. 58]

Kauempana seinästä etäisyydellä  $30 < y^+ < 500$  on kerros, jossa kitkan vaikutus on pie-  
nempi kuin turbulenssin, mutta silti otettava huomioon. Kerrokselle voidaan johtaa loga-  
ritmikaava  $u^+ = 1/\kappa \ln y^+ + B$ , jossa  $\kappa$  on Von Karmanin vakio ja  $B$  on vakio  $B \approx 5,5$ .  
Tässä logaritmikerrokseksi kutsutussa rajakerroksen osassa turbulenssin pituuskaala on  
 $\ell = \kappa y$  ja nopeuskaala  $\vartheta = u_\tau$ . [10, s. 58–59] Siten turbulenteille viskositeetille saadaan  
yhteys [9, s. 10]

$$\nu_t = \kappa u_\tau y. \quad (16)$$

Lineaarisen alakerroksen ja logaritmikerroksen välissä on puskurikerros, jossa kitkavoi-  
mien ja turbulenssin vaikutus on suunnilleen yhtä suuri. Kauempana seinästä turbulenteilla  
alueella kitkan vaikutus on merkityksetön. [10, s. 59] Aerodynaamisten sovellusten mal-  
linnukseen käytettävien turbulenssimallien täytyy siis vapaan virtauksen turbulenssin li-  
säksi ottaa huomioon kitkan merkitys rajakerroksen eri osissa.

#### 2.4.4 Spalart–Allmaras-malli

Spalart ja Allmaras julkaisivat [9] vuonna 1994 turbulenssimallin erityisesti aerody-  
naamisia sovelluksia varten. Spalart–Allmaras-mallissa (S–A-malli) määritellään uusi  
modifioitu turbulentti kinemaattinen viskositeetti  $\tilde{\nu}_t$ , joka noudattaa kaavaa (16) seinään  
asti, ja on nolla seinällä. Turbulentti kinemaattinen viskositeetti saadaan sen jälkeen yh-  
tälöstä  $\nu_t = \tilde{\nu}_t f_{v1}$ , jossa  $f_{v1}$  on seinämäfunktio

$$f_{v1} \equiv \frac{\chi^3}{\chi^3 + C_{v1}^3}. \quad (17)$$

Kaavassa (17)  $\chi$  on parametrin  $\tilde{v}_t$  ja molekyylärisen viskositeetin  $\nu$  suhde  $\chi \equiv \tilde{v}_t/\nu$  ja  $C_{v1}$  on kokeellinen vakio. [9, s. 12] Seinämäfunktio  $f_{v1}$  korjaa parametriä  $\tilde{v}_t$  siten, että turbulenti viskositeetti noudattaa oikeaa korrelaatiota jokaisessa rajakerroksen osassa. Esimerkiksi lineaarisessa alakerroksessa, jossa turbulenssin vaikutus on olematon, suhde  $\chi$  lähestyy nollaa. Sen seurauksena myös funktio  $f_{v1}$  on häviävän pieni, ja turbulenti viskositeetti  $\nu_t$  lähestyy nollaa.

Parametri  $\tilde{v}_t$  eroaa siis turbulentista kinemaattisesta viskositeetista, joten sille tarvitaan erillinen siirtoyhtälö

$$\frac{\partial \rho \tilde{v}_t}{\partial t} + \rho \tilde{v} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = \frac{1}{\sigma_{\tilde{v}_t}} \left[ \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \mu_{kok} \frac{\partial \tilde{v}_t}{\partial x_j} \right\} + C_{b2} \rho \left( \frac{\partial \tilde{v}_t}{\partial x_j} \right)^2 \right] + G_v - Y_v, \quad (18)$$

jossa  $\mu_{kok}$  on viskositeettien summa  $\mu_{kok} = \mu + \rho \tilde{v}_t$ ,  $G_v$  on turbulentin viskositeetin tuotto,  $Y_v$  on turbulentin viskositeetin tuhoutuminen ja  $\sigma_{\tilde{v}_t}$  ja  $C_{b2}$  ovat kokeellisia vakioita [9, s. 12]. Tuottotermi on määritelty yhtälöllä  $G_v = C_{b1} \rho \tilde{S} \tilde{v}_t$ , jossa  $C_{b1}$  on kokeellinen vakio ja  $\tilde{S}$  on

$$\tilde{S} \equiv S + \frac{\tilde{v}_t}{\kappa^2 y^2} f_{v2}, \quad (19)$$

jossa  $S$  on deformaatiotensoria kuvaava skalaarisuure,  $y$  on etäisyys seinästä ja  $f_{v2}$  on seinämäfunktio [9, s. 12]

$$f_{v2} \equiv 1 - \frac{\chi}{1 + \chi f_{v1}}. \quad (20)$$

Skalaarina  $S$  käytetään yleensä pyörteisyyttä  $S \equiv \sqrt{2\Omega_{ij}\Omega_{ij}}$ , jossa  $\Omega_{ij}$  on keskiarvokulmanopeustensori

$$\Omega_{ij} \equiv \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right). \quad (21)$$

Pyörteisyyden käyttäminen deformaation mittana on perusteltua, sillä yleensä rajakerrosvirtauksissa deformaatio ja pyörteisyys ovat joka pisteessä yhtä suuria. [3, s. 44]

S–A-mallissa on oletettu, että pääasiassa painegradientti välittää seinämän vaikutuksen kauemmaksi virtaukseen ja aiheuttaa Reynoldsin jännitysten tuhoutumisen. Tämän oletuksen ja dimensioanalyysin avulla saadaan tuhoutumistermiksi

$$Y_v \equiv C_{w1} \rho \left( \frac{\tilde{v}_t}{\kappa y} \right)^2 f_w, \quad (22)$$

jossa  $C_{w1}$  on vakio ja  $f_w$  on dimensioton funktio, jonka avulla korjataan tuhoutumistermiä logaritmisin kerroksen ulkopuolella. Se on määritelty yhtälöillä

$$f_w \equiv g \left( \frac{1 + C_{w3}^6}{g^6 + C_{w3}^6} \right)^{1/6}, \quad (23)$$

$$g \equiv r + C_{w2}(r^6 - r), \quad (24)$$

$$ja\ r \equiv \frac{\tilde{v}_t}{\tilde{S} \kappa^2 y^2}, \quad (25)$$

joissa  $C_{w2}$  ja  $C_{w3}$  ovat vakioita. [9, s. 10]

Yhtälön (18) termeissä esiintyvien vakioiden oletusarvot on annettu taulukossa 3. Vakiot on saatu kokeellisten ja laskennallisten tulosten avulla. Vakion  $C_{w1}$  täytyy noudattaa kaavaa  $C_{w1} \equiv C_{b1}/\kappa^2 + (1 + C_{b2})/\sigma_{\tilde{v}}$ , jotta tasapaino turbulentin viskositeetin tuoton, diffuusion ja tuhoutumisen välillä on mahdollista [9, s. 10].

**Taulukko 1.** Spalart–Allmaras-turbulenssimallin vakioiden oletusarvot [3].

| $\kappa$ | $C_{v1}$ | $\sigma_{\tilde{v}}$ | $C_{b2}$ | $C_{b1}$ | $C_{w1}$ | $C_{w3}$ | $C_{w2}$ |
|----------|----------|----------------------|----------|----------|----------|----------|----------|
| 0,4187   | 7,1      | 2/3                  | 0,622    | 0,1355   | 3,2059   | 2,0      | 0,3      |

Turbulentin viskositeetin laskemisen jälkeen Reynoldsin jännitykset saadaan kaavasta (11). S–A-mallissa ei ole laskettu arvoa turbulentille kineettiselle energialle  $k$ , joten yhtälön oikean puolen viimeinen termi jätetään pois [3, s. 43]. Malli antaa hyviä tuloksia myös tilanteissa, joissa rajakerros irtoaa pinnasta positiivisen painegradientin seurauksena. RANS-yhtälöiden lisäksi ratkaistavana on vain yksi differentiaaliyhtälö, joten malli on laskennallisesti kevyt. Monimutkaisiin geometrioihin malli ei sovellu, sillä silloin pituusskaalaa  $\ell = \kappa y$  ei voida enää käyttää. [3, s. 90][8, s. 174][10, s. 42–43]

### 2.4.5 $k$ – $\omega$ -malli

Kolmogorov esitti vuonna 1942 ensimmäisen kahden yhtälön turbulenssimallin, jossa hän käytti turbulenssin nopeus- ja pituusskaalan määrittelyyn turbulenssia kineettistä energiaa  $k$  ja turbulenssin taajuutta  $\omega$  [12, s. 84] Tämän jälkeen  $k$ – $\omega$ -mallista on esitetty monia eri muotoja, mutta nykyisin niistä yleisin on Wilcoxin vuonna 1988 esittämä malli [10, s. 90].

Mallissa turbulenssin nopeus- ja pituuskaala lasketaan kaavoista  $\vartheta = \sqrt{k}$  ja  $\ell = \sqrt{k}/\omega$ . Tällöin turbulenssille viskositeetille saadaan  $\mu_t = \rho k/\omega$ . Turbulenssille kineettiselle energialle käytetään siirtoyhtälöä

$$\frac{\partial(\rho k)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho k \bar{u}_i)}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + 2\mu_t \bar{s}_{ij} \cdot \bar{s}_{ij} - \rho \beta^* k \omega, \quad (26)$$

jossa  $\beta^*$  ja  $\sigma_k$  ovat kokeellisia vakioita. Yhtälö (26) pohjautuu turbulenssin kineettisen energian tarkkaan yhtälöön (14), mutta joitakin termejä on muokattu. Turbulenssin tuottotermiin  $2\mu_t \bar{s}_{ij} \cdot \bar{s}_{ij}$  on sijoitettu yhtälö (11). Oikean puolen viimeiseen termiin on sijoitettu  $\omega = \varepsilon/k$  ja lisätty vakio  $\beta^*$ . Oikealla puolella ensimmäisenä oleva diffuusiotermin on mallinnettu kokonaan uudelleen käyttämällä diffusiviteettina summaa  $\mu + \mu_t/\sigma_k$ . [10, s. 78]

Siirtoyhtälö turbulenssille taajuudelle  $\omega$  on

$$\frac{\partial(\rho \omega)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \omega \bar{u}_i)}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_{\omega,1}} \right) \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right] + \frac{\omega}{k} 2\mu_t \bar{s}_{ij} \cdot \bar{s}_{ij} - \rho \beta_{iw} \omega^2, \quad (27)$$

jossa  $\beta_{iw}$  ja  $\sigma_{\omega,1}$  ovat kokeellisia vakioita. Taulukossa 2 on esitetty Wilcoxin  $k$ - $\omega$ -mallissa käytetyt vakiot.

**Taulukko 2.** Wilcoxin  $k$ - $\omega$ -turbulenssimallin vakioiden oletusarvot [3].

| $\sigma_k$ | $\sigma_\omega$ | $\beta^*$ | $\beta_{iw}$ |
|------------|-----------------|-----------|--------------|
| 2,0        | 2,0             | 0,09      | 0,072        |

Wilcoxin mallin ongelmana on reunaehtojen määrittelyminen vapaalle virtaukselle. Siellä  $k$  ja  $\omega$  lähestyvät nollaa, ja turbulenssille viskositeetille tulee kaavasta  $\mu_t = \rho k/\omega$  ääretön tai määrittelymätön arvo. Jos muuttujille määritellään pienet, lähellä nollaa olevat arvot, turbulenssille taajuudelle  $\omega$  valittu arvo vaikuttaa tuloksiin. Aerodynaamisten virtausten laskennassa vapaan virtauksen reunaehtojen käyttäminen on yleistä, joten  $k$ - $\omega$ -mallin perusmuodon käyttäminen on ongelmallista. [10, s. 91]

Ratkaisuna tähän Menter esitti vuonna 1992 yhdistettyä mallia, jossa kaukana seinästä käytetään  $k$ - $\varepsilon$ -mallia, joka ei ole niin herkkä vapaan virtauksen oletetuille arvoille. Mallia kutsutaan myös SST (engl. Shear Stress Transport)  $k$ - $\omega$ -malliksi. Turbulenssille kineettiselle energialle käytetään samaa Wilcoxin mallin yhtälöä (26), mutta turbulenssin kineettisen energian tuottotermi on kerrottu rajoitinfunktiolla, joka ehkäisee turbulenssin liiallista kasvamista stagnaatioalueilla [10, s. 92]. Turbulenssin taajuuden yhtälön pohjalla on  $k$ - $\varepsilon$ -mallin siirtoyhtälö dissipaationopeudelle  $\varepsilon$



$$\frac{\partial(\rho\varepsilon)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho\varepsilon\bar{u}_i)}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right] + C_{1\varepsilon} \frac{\varepsilon}{k} 2\mu_t \bar{s}_{ij} \cdot \bar{s}_{ij} - C_{2\varepsilon} \rho \frac{\varepsilon^2}{k}, \quad (28)$$

jossa  $\sigma_\varepsilon$ ,  $C_{1\varepsilon}$  ja  $C_{2\varepsilon}$  ovat vakioita. Yhtälö (28) muutetaan  $\omega$ -yhtälöksi sijoittamalla  $\varepsilon = k\omega$ . Tuloksena saadaan

$$\frac{\partial(\rho\omega)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho\omega\bar{u}_j)}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\omega} \right) \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right] + \alpha_\infty \frac{\omega}{k} 2\mu_t \bar{s}_{ij} \cdot \bar{s}_{ij} - \rho\beta_i \omega^2 + D_\omega, \quad (29)$$

jossa  $\alpha_\infty$ ,  $\sigma_\omega$  ja  $\beta_i$  ovat vakioita ja  $D_\omega$  on ristidiffuusiotermi

$$D_\omega = 2(1 - F_1)\rho \frac{1}{\omega\sigma_{\omega,2}} \frac{\partial k}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j}, \quad (30)$$

jossa  $\sigma_{\omega,2}$  on vakio. Termi  $D_\omega$  syntyy, kun  $\varepsilon$ -yhtälön diffuusiotermiin sijoitetaan  $\varepsilon = k\omega$ . [10, s. 91]

Funktion  $F_1$  tarkoituksena on muuntaa  $\omega$ -yhtälö seinämällä käytetystä Wilcoxin mallista Menterin malliin vapaassa virtauksessa. Funktio on määritelty niin, että se on ykkösen seinällä, ja lähestyy nollaa vapaassa virtauksessa. Myös kaikki SST  $k$ - $\omega$ -mallin vakiot on määritelty sekoitusfunktion avulla. Esimerkiksi vakio  $\beta_i$  saadaan kaavasta  $\beta_i = F_1\beta_{i,1} + (1 - F_1)\beta_{i,2}$ , jossa  $\beta_{i,1}$  on lähellä Wilcoxin mallin vakiota ja  $\beta_{i,2}$  on  $\varepsilon$ -mallista johdetun Menterin mallin vakio. [10, s. 92] Taulukossa 3 on esitetty SST  $k$ - $\omega$ -mallin vakioiden oletusarvot Fluent-ohjelmassa.

**Taulukko 3.** Menterin SST  $k$ - $\omega$  -turbulenssimallin vakioiden oletusarvot [3].

| $\sigma_{k,1}$ | $\sigma_{k,2}$ | $\sigma_{\omega,1}$ | $\sigma_{\omega,2}$ | $\beta_{i,1}$ | $\beta_{i,2}$ | $\beta^*$ | $\alpha_{\infty,1}$ | $\alpha_{\infty,2}$ |
|----------------|----------------|---------------------|---------------------|---------------|---------------|-----------|---------------------|---------------------|
| 1,176          | 1,0            | 2,0                 | 1,168               | 0,075         | 0,0828        | 0,09      | 0,553               | 0,44                |

Turbulentti viskositeetti ratkaistaan kaavasta  $\mu_t = \rho k/\omega$ , jota on lisäksi kerrottu rajoitin-funktiolla, jotta saataisiin parempia tuloksia positiivisen painegradientin sisältävissä virtauksissa. [10, s. 92] Tämän jälkeen Reynoldsin jännitykset voidaan laskea Boussinesq'n hypoteesin (11) avulla.

Menterin SST  $k$ - $\omega$ -mallin avulla pystytään hyödyntämään Wilcoxin  $k$ - $\omega$ -mallin tarkkuus seinämän lähellä ja  $k$ - $\varepsilon$ -mallin riippumattomuus vapaan virtauksen reunaehdoista. Mallin on todettu antavan hyviä tuloksia myös positiivisen painegradientin sisältäville virtauksille [3, s. 63][8, s. 174][10, s. 92]. S-A-malliin verrattuna  $k$ - $\omega$ -mallit vaativat enemmän laskentaresursseja, sillä RANS-yhtälöiden lisäksi ratkaistavana on kaksi differentiaaliyhtälöä.

## 2.5 Numeerinen virtauslaskenta

Kun Spalart–Allmaras- tai  $k-\omega$ -mallin yhtälöt liitetään RANS-yhtälöihin, saadaan jatkuvien differentiaaliyhtälöiden ryhmä, jossa muuttujia ja yhtälöitä on yhtä paljon. Tällöin nopeus- ja painekenttä voidaan ratkaista. Numeerisen ratkaisun menetelmät voidaan jakaa differenssi-, elementti- ja spektrimenetelmiin. Yleisin on kontrollitulavuusmenetelmä, joka kuuluu differenssimenetelmiin. [10, s. 3]

Menetelmässä virtausalue jaetaan kontrollitulavuuksiin, joita sanotaan laskentakopeiksi. Jokaisen kopin keskipisteelle muodostetaan RANS-yhtälöt ja turbulenssimallien lisäyhtälöt. Sen jälkeen yhtälöt integroidaan kontrollitulavuuksien yli, jolloin jokaisella kopilla on oma diskreetti yhtälöryhmänsä. Tuloksena saaduissa yhtälöissä on pintaintegraalitermejä, joiden laskemiseen tarvitaan laskentakoppien reunojen arvoja. Niille saadaan lausekkeet arvioimalla viereisten koppien keskipisteiden arvoista jollakin menetelmällä, esimerkiksi lineaarisella interpoloinnilla. Virtausalueen reunalla interpoloinnin toisena lähtöarvona käytetään reunaehtoa. Saadut yhtälöt kootaan yhdeksi yhtälöryhmäksi, joka voidaan ratkaista iteratiivisesti matriisiratkaisumenetelmällä. [10] Ratkaisuun käytetään virtauslaskentaohjelmia, joissa kontrollitulavuusmenetelmä on sisäänrakennettuna.

## 3. NACA 0012 -SIIPIPROFIILIN NUMEERINEN LASKENTA

### 3.1 Virtaustilanne ja oletukset

Edellä käsiteltyjen turbulenssimallien testaamiseksi laskentaosuudessa laskettiin kanto- ja vastusvoimakerroin NACA 0012 -siipiprofiilille viidellä eri kohtauskulmalla. Profiilin muoto ja virtaustilanne on esitetty kuvassa 1. Kyseinen profiili valittiin, koska se on symmetrisyytensä vuoksi yksinkertainen ja sille löytyy kirjallisuudesta paljon tuloksia.

Laskenta suoritettiin 2-ulotteisesti, koska vertailuarvoina käytetyt Ladsonin [7, s. 21] kokeelliset tulokset oli saatu tuulitunnelissa, jossa profiili oli kiinnitetty syvyys suunnan reunoistaan tunnelin seiniin. Tällöin virtaus on hyvällä tarkkuudella 2-ulotteinen. [11, s. 155]. Ladsonin kokeissa siipiprofiilin etureunaan virtauksen tielle oli asetettu lanka, jolloin rajakerros oli alusta lähtien turbulenti. Siksi myös tämän työn laskennassa rajakerros käsiteltiin kokonaan turbulenttina. Tilavuusvoimat kuten painovoima jätettiin huomiotta, sillä ne ovat käytännön tilanteessa merkityksettömän pieniä muihin virtaustilanteessa vaikuttaviin voimiin suhteutettuina [5, s. 519].

Laskennan lähtöarvot on esitetty taulukossa 4.

*Taulukko 4. Laskennan lähtöarvot.*

| $Re$<br>(-)    | $T$<br>(°C) | $\rho$<br>(kg/m <sup>3</sup> ) | $\mu$<br>(kg/ms)      | $M$<br>(-) | $c$<br>(m) | $U_\infty$<br>(m/s) |
|----------------|-------------|--------------------------------|-----------------------|------------|------------|---------------------|
| $6 \cdot 10^6$ | 15          | 1,225                          | $1,789 \cdot 10^{-5}$ | 0,26       | 1          | 87,644              |

Reynoldsin luku valittiin samaksi kuin Ladsonin tuloksissa, jotta virtaukset olisivat dynaamisesti similaarisia. Ilman aineominaisuudet otettiin lämpötilassa  $T = 15 \text{ °C}$  ja merenpinnan tasossa [4, s. 933] ja siipiprofiilin jänne  $c$  asetettiin yksinkertaisuuden vuoksi ykköseksi. Muut taulukon arvot voidaan tämän jälkeen laskea. Saadun Machin luvun perusteella virtaus voidaan käsitellä kokoonpuristumattomana [2, s. 482–484]. Ladsonin mittauksissa virtaus oli myös käytännössä kokoonpuristumaton Machin luvun ollessa  $Ma = 0,15$ , joten virtaukset voidaan olettaa similaarisiksi.

Laskennassa käytetyt asetukset on esitetty taulukossa 5.

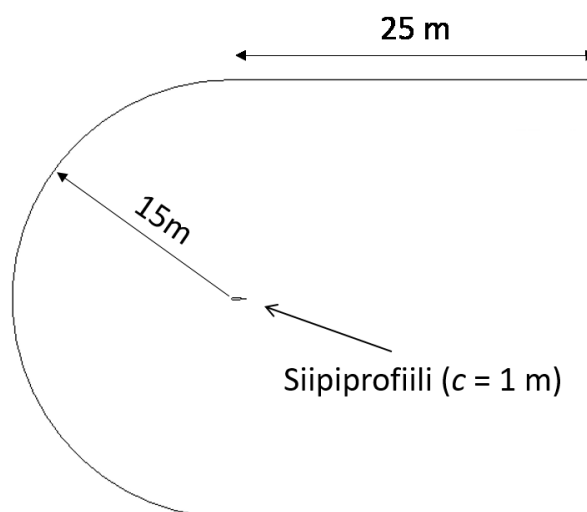
**Taulukko 5.** Laskenta-asetukset.

| Asetus                  | Valinta   |
|-------------------------|---|
| Ratkaisija              | Fluent, painepohjainen, stationääri.  |
| Turbulenssimalli 1      | Spalart–Allmaras.   |
| Turbulenssimalli 2      | SST $k-\omega$ .  |
| Turbulenssimalli 3      | Wilcox $k-\omega$ .   |
| Paine–nopeus-kytkentä   | SIMPLE (engl. Semi-Implicit Method for Pressure-Linked Equations) [10, s. 186–190]. |
| Muuttujien seinämäärvot | Second order upwind -arvio.   |

Lisäksi turbulenssimalleille 1 ja 2 käytettiin Fluent-ohjelmistossa saatavilla olevaa pinnan kaarevuuden aiheuttamille ilmiöille suunniteltua korjausta. Sen avulla turbulencia viskositeettia käyttävät mallit huomiovat virtaviivojen kaarevuuden paremmin [3, s. 128]. Turbulenssimallia 3 käytettiin verkkoriippumattomuustarkastelussa, sillä sen herkkyuden laskentaverkon tiheydelle oletettiin olevan samaa luokkaa kuin turbulenssimallin 2, joka taas on monimutkaisempien yhtälöidensä takia herkempi kuin turbulenssimalli 1.

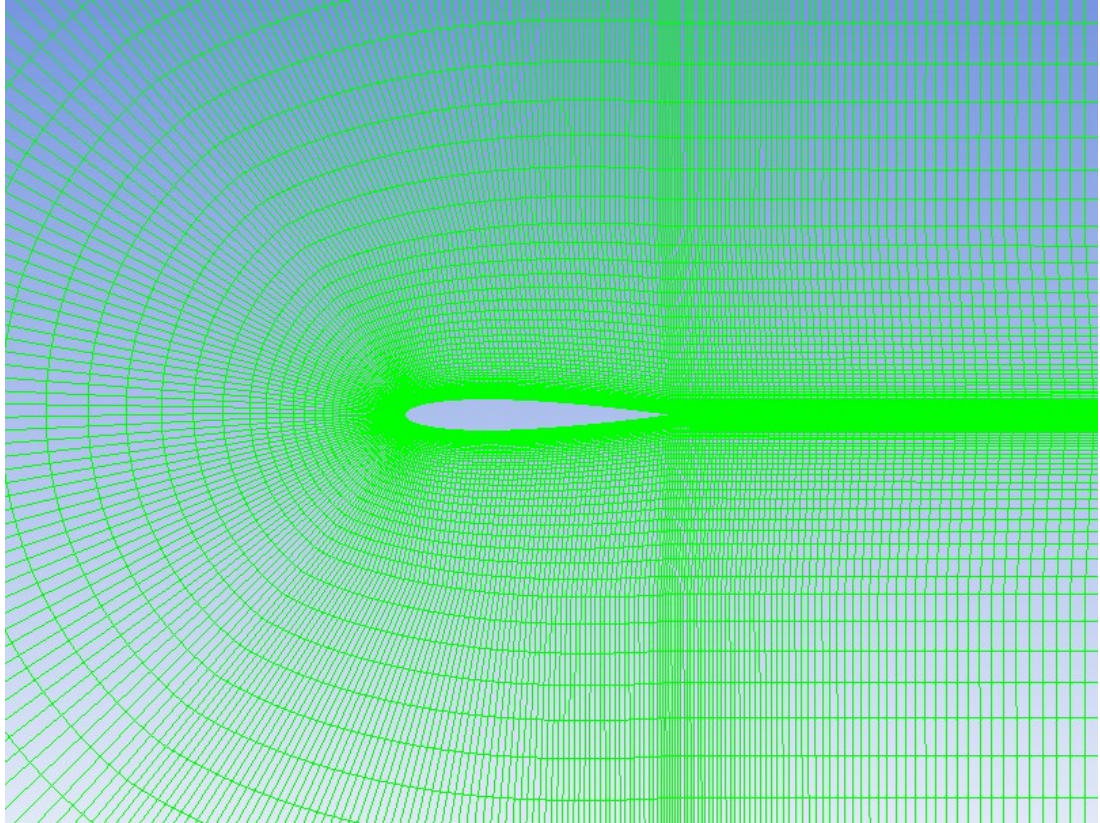
### 3.2 Laskentaverkko

Kuvassa 3 on esitetty käytetyn laskentaverkon ulkoreunan muoto ja mitat.



**Kuva 3.** Laskentaverkon ulkoreunan muoto ja mitat, perustuu lähteeseen [1].

Laskentaverkon ulkoreunan muoto perustuu AIAA:n (engl. American Institute of Aeronautics and Astronautics) turbulenssimallinnusresurssin [1] malliin, mutta sen koko on yksinkertaisuuden vuoksi huomattavasti pienempi kuin lähteessä esitelty. Laskentaverkko muodostettiin 2-ulotteisista nelikulmaisista laskentakopeista. Kuvassa 4 näkyy laskentaverkon rakenne siipiprofiilin läheisyydessä.

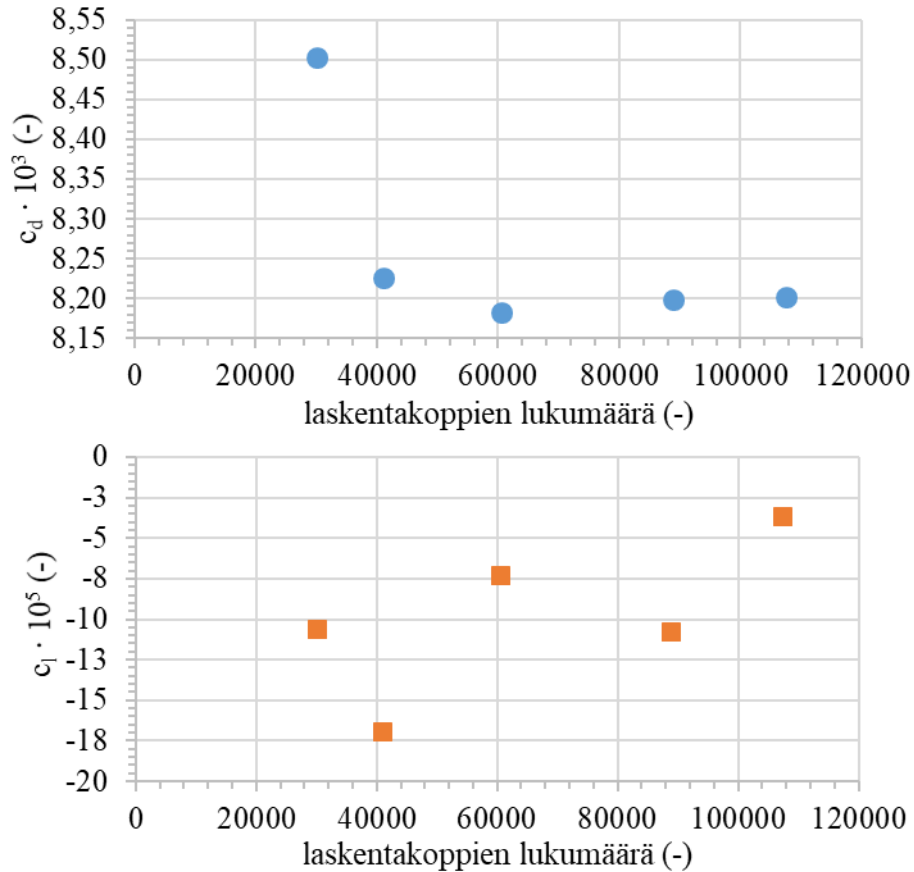


*Kuva 4. Laskentaverkon rakenne siipiprofiilin lähellä.*

Profiilin lähellä verkon reuna pyrittiin asettamaan lineaarisen alakerroksen alueelle ( $y^+ \approx 1$ ), jotta turbulentin rajakerroksen eri osat tulisivat otettua huomioon ratkaisussa [3, s. 43].

### 3.2.1 Verkkoriippumattomuustarkastelu

Verkkoriippumattomuustarkastelun tavoitteena oli varmistaa, että laskentakoppeja on tarpeeksi luotettavien tulosten saamiseksi. Tarkastelu suoritettiin laskemalla kanto- ja vastusvoimakertoimen arvoja  $0^\circ$  kohtauskulmalle Wilcoxin  $k-\omega$ -mallilla. Laskenta oletettiin konvergoituneeksi, kun kanto- ja vastusvoimakertoimen arvot lähestyivät tiettyä loppuarvoa siten, että ero loppuarvoon pysyi alle 5 %, vaikka iterointikierrosten määrää kasvatettiin. Kuvassa 5 on saadut vastus- ja kantovoimakertoimen arvot kullakin laskentakoppien määrällä.



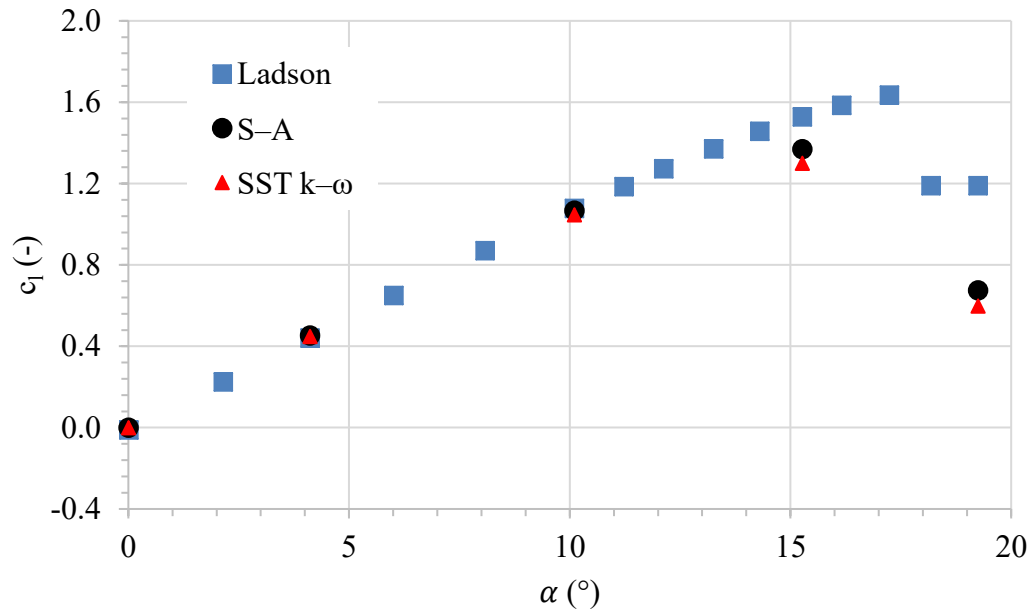
**Kuva 5.** Vastus- ja kantovoimakerroin laskentakoppien lukumäärän funktiona.

Kuvasta 5 nähdään, että vastusvoimakerroin  $c_d$  lähestyy arvoa  $8,20 \cdot 10^{-3}$ , kun laskentakoppien määrää kasvatetaan. Yli 60000 laskentakopin verkon käyttäminen ei enää muuta vastusvoimakertoimen arvoa merkittävästi, sillä koppien määrän kasvaessa 60000:stä 107000:een kertoimen suhteellinen muutos on vain noin 0,2 %.

Kantovoimakertoimen  $c_l$  tarkka arvo NACA 0012 -siipiprofiilille kohtauskulmalla nolla on nolla, sillä profiili on symmetrinen  $x$ -akselin suhteen. Kuten kuvasta 5 nähdään, saatu kantovoimakerroin on erittäin lähellä nollaa kaikilla laskentaverkon tiheyksillä. Kantovoimakerroin ei näytä konvergoituvan kohti tiettyä arvoa yhtä selkeästi kuin vastusvoimakertoimen tapauksessa, mikä voi johtua laskentaverkon epätäydellisyydestä ja numeerista virheistä. Laskennan olisi voinut vielä suorittaa uudelleen paremmalla laskentaverkolla, mutta sitä ei nähty tarpeelliseksi, koska saatu kantovoimakerroin on jo niin lähellä tarkkaa arvoaan nollaa. Verkkoriippumattomuustarkastelun perusteella varsinaiseen laskentaan valittiin 60000 laskentakopista koostuva verkko, koska sillä saadaan tarkkoja tuloksia tiheämpiin verkkoihin verrattuna pienemmällä koppimäärällä, jolloin myös tarvittava ratkaisuaika on lyhyempi.

## 4. TULOKSET

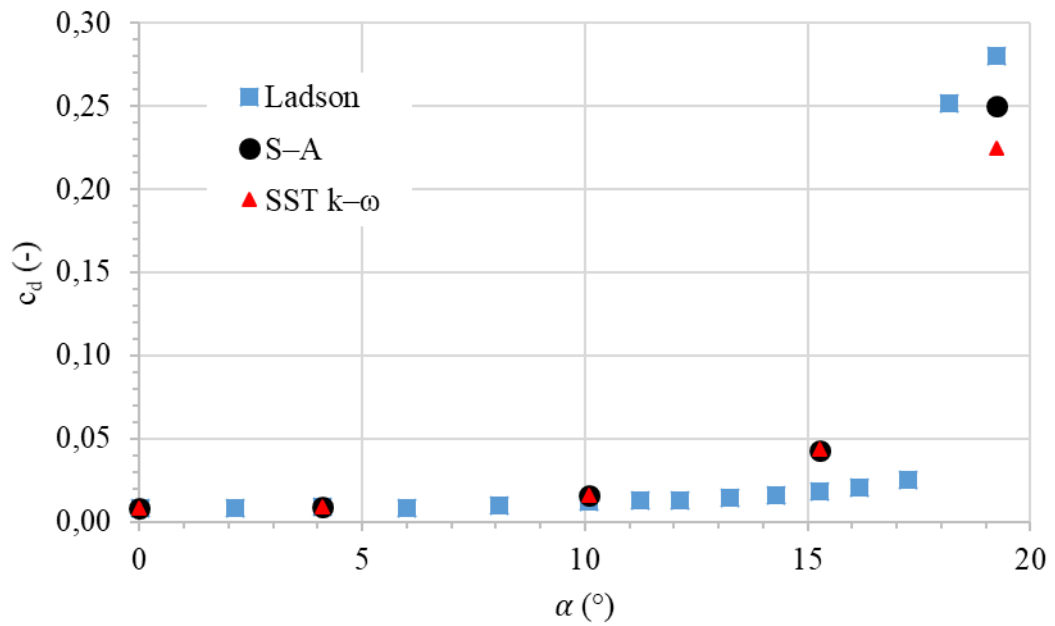
Kuvassa 6 on esitetty laskennan tuloksena saadut kantovoimakertoimen arvot kohtauskulman funktiona yhdessä Ladsonin [7, s. 21] kokeellisten tulosten kanssa.



**Kuva 6.** Kantovoimakerroin kohtauskulman funktiona.

Kokeellisista arvoista nähdään, että kantovoimakerroin kasvaa ensin lähes lineaarisesti kohtauskulman funktiona, mutta noin kohtauskulmalla  $18^\circ$  tapahtuva sakkaaminen aiheuttaa siiven kantovoimaan huomattavan pudotuksen. Molemmilla turbulenssimalleilla saadut tulokset vastaavat hyvin kokeellisia arvoja (ero alle 5 %) kohtauskulmilla  $0^\circ$ ,  $4,11^\circ$  ja  $10,1^\circ$ , mutta suuremmilla kulmilla virhe kasvaa. Sakkaamisen jälkeen laskennallinen kantovoimakertoimen arvo poikkeaa jo noin 50 % kokeellisesta tuloksesta.

Kuvassa 7 on esitetty vastusvoimakertoimen arvot kohtauskulman funktiona.



**Kuva 7.** Vastusvoimakerroin kohtauskulman funktiona.

Tuulitunnelikokeiden perusteella vastusvoimakerroin noudattaa ensin karkeasti eksponenttikäyrää kohtauskulman kasvaessa, mutta sakkauskulmalla siinä tapahtuu jyrkkä nousu. Laskennan tulokset ovat molemmilla turbulenssimalleilla järjestelmällisesti epätarkempia kuin kantovoimakertoimen tapauksessa, ja ainoastaan kohtauskulmilla  $0^\circ$  ja  $4,11^\circ$  suhteellinen virhe on pienempi tai yhtä suuri kuin 5 %. Poikkeuksena tähän kohtauskulmalla  $19,25^\circ$  vastusvoimakertoimen ero kokeellisiin tuloksiin oli alle 20 %, kun kantovoimakertoimelle vastaava luku oli 50 %.



## 5. YHTEENVETO

Tässä kandidaatintyössä tutkittiin, mitä turbulenssimalleja voidaan käyttää luotettavien tulosten saamiseksi aerodynaamisten virtausten numeerisessa laskennassa. Kirjallisuuden perusteella valittiin laskentaosassa testattaviksi turbulenssimalleiksi Spalart–Allmaras- ja SST  $k-\omega$  -mallit. Laskentaosuudessa laskettiin kanto- ja vastusvoimakerroin NACA 0012 -siipiprofiilille viidellä eri kohtauskulmalla ja tuloksia verrattiin kokeellisiin arvoihin.

Vertailun perusteella Spalart–Allmaras ja SST  $k-\omega$  -malleja voidaan käyttää NACA 0012 -profiilin kantovoimakertoimen laskemiseen ilman yli 5 % virhettä noin 10° kohtauskulmaan asti. Vastusvoimakerroin voidaan laskea samalla tarkkuudella noin kulmaan 5° asti. Myös isommilla kulmilla saatiin vähintäänkin karkea arvio kanto- ja vastusvoimakertoimien suuruudesta, mutta suhteelliset virheet olivat välillä 30–150 %. Spalart–Allmaras ja SST  $k-\omega$  -mallien tarkkuudessa ei tässä työssä huomattu suuria eroja, mutta SST  $k-\omega$  -mallilla lasketut tulokset olivat kohtauskulmilla 0° ja 4,11° hieman tarkempia (enintään 5%) kuin S–A-mallin vastaavat tulokset. Tätä isommilla kulmilla S–A-malli suoriutui paremmin kuin SST  $k-\omega$  -malli, suurin ero (noin 10 %) saatiin kohtauskulmalla 19,25°.

Tulokset ovat enimmäkseen yhtä pitäviä teorian ja muiden laskentatulosten kanssa. Pienillä kohtauskulmilla virtauksen irtoamisen merkitys siipiprofiiliin kohdistuviin voimiin ei ole vielä suuri, joten turbulenssimallien heikkoudet eivät nouse esille niin vahvasti. Vaikutus on suurin vastusvoimakertoimeen, joten sille saatiin epätarkempia tuloksia kuin kantovoimakertoimelle. Sama huomattiin esimerkiksi AIAA:n [1] laskentatuloksista, mutta ne olivat varsinkin kohtauskulmilla 10,1° ja 15,27° paljon lähempänä kokeellisia tuloksia kuin tässä työssä. Ero tarkkuudessa voi johtua esimerkiksi AIAA:n laskenta-alueen suuremmasta koosta tai laskentaverkon paremmasta laadusta.

Sakkauksen mallintamisessa varsinkin vastusvoimakertoimelle saatiin yllättävän tarkka tulos. Kirjallisuudessa 2-ulotteinen sakkaamisen mallinnus ei ole yleensä onnistunut kovin hyvin, mikä voi johtua siitä, että sakkaaminen on merkittävältä osin 3-ulotteinen ilmiö. Turbulenssimallit yleensä yliarvioivat kantovoimakertoimen maksimiaron, mutta päinvastaisiakin tuloksia on saatu, joten tämän työn tulos ei ole siltäkään osin ainutlaatuinen. [8]

Tässä työssä tarkasteltu virtaustilanne ja geometria olivat suhteellisen yksinkertaisia, eikä tuloksia voida suoraan yleistää muihin tilanteisiin. Turbulenssimallin valinta täytyy edelleen tehdä tapauskohtaisesti. Suositeltavaa on myös käyttää laskennan tulosten todentamiseen kokeellista dataa, sillä virtauslaskennassa virheet ja epävarmuus ovat aina väistämättömiä [10, s. 295–296].

## LÄHTEET

- [1] American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2DN00: 2D NACA 0012 Airfoil Validation Case - Turbulence Modeling Resource. Saatavissa (viitattu 14.5.2017): [https://turbmodels.larc.nasa.gov/naca0012\\_val.html](https://turbmodels.larc.nasa.gov/naca0012_val.html)
- [2] J.D. Anderson, Fundamentals of aerodynamics, 3rd ed., McGraw-Hill Education, Boston, USA, 2001, 892 p.
- [3] ANSYS Fluent Theory Guide, SAS IP Inc., Release 15.0, USA, 2013, 814 p.
- [4] Y.A. Çengel, M.A. Boles, Thermodynamics: An Engineering Approach, 8th ed., McGraw-Hill Education, New York, USA, 2015, 1024p.
- [5] Y.A. Çengel, J.M. Cimbala, Fluid mechanics: fundamentals and applications, 1st ed., McGraw-Hill Education, Boston, USA, 2006, 1024 p.
- [6] J. Hoffren, O. Saarela, Lentotekniikan perusteet, Opetushallitus, Helsinki, Suomi, 2008, 199 s.
- [7] C. LADSON, Effects of independent variation of Mach and Reynolds numbers on the low-speed aerodynamic characteristics of the NACA 0012 airfoil section, NASA, Technical Memorandum 4074, 1988, 95 p.
- [8] C.L. Rumsey, S.X. Ying, Prediction of high lift: review of present CFD capability, Progress in Aerospace Sciences, No. 2, 2002, pp. 145–180.
- [9] P. Spalart, S. Allmaras, A one-equation turbulence model for aerodynamic flows, Recherche Aerospatiale, No. 1, 1994, pp. 5–21.
- [10] H.K. Versteeg, W. Malalasekera, An introduction to computational fluid dynamics: the finite volume method, 2nd ed., Pearson Education Limited, Harlow, England, 2007, 520 p.

- [11] W.G. Vincenti, H.J. Allen, Wall interference in a two-dimensional-flow wind tunnel, with consideration of the effect of compressibility, National Advisory Committee for Aeronautics, Report No. 782, 1944, pp. 155–184
- [12] D.C. Wilcox, Turbulence modeling for CFD, 2nd ed., DCW Industries Inc., La Cañada, USA, 1994, 477 p.