



TAMPEREEN TEKNILLINEN YLIOPISTO  
TAMPERE UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

TUOMAS HAAPANEN  
POIKITTAISTUKEMATTOMAN PAARTEEN STABIILISUUS

Diplomityö

Tarkastaja: professori Sami Pajunen  
Tarkastaja ja aihe hyväksytty  
Talouden ja rakentamisen  
tiedekuntaneuvoston kokouksessa  
27. maaliskuuta 2017

## TIIVISTELMÄ

### **TUOMAS HAAPANEN: POIKITTAISTUKEMATTOMAN PAARTEEN STABIILISUUS**

Diplomityö, 107 sivua, 14 liitesivua

Elokuu 2017

Rakennustekniikan diplomi-insinöörin tutkinto-ohjelma

Pääaine: Rakennesuunnittelu

Tarkastaja: professori Sami Pajunen

**Avainsanat:** nurjahduspituus, poikittaistukematon paarre, linearisoitu nurjahdusanalyysi, epälineaarinen elementtimenetelmä, rotaatiojäykkyys

Teräsrakenteiden puristetuissa rakenneosissa yksi olennaisimpia mitoitusperusteita on nurjahdusmitoitus, joka pääosin perustuu oikean nurjahduspituuden valintaan. Yksittäisille rakenneosille on johdettu kirjallisuudessa valmiita nurjahduspituuksia, joita voidaan suunnittelussa käyttää. Rakenteen ollessa monimutkaisempi, on tarkemman nurjahduspituuden määrittäminen monimutkaisempaa ja reunaehtojen on oltava todellisuutta vastaavia.

Poikittaistukemattomalla paarteella työssä tarkoitetaan puristettua ristikkopilarin sisä- tai kattoristikon alapaarretta. Näissä tapauksissa on perinteisesti käytetty erillistä nurjahdus-tuentajärjestelmää, jotta nurjahduspituutta tasosta poispäin on voitu pienentää. Kuitenkin, vaikka sisä- tai alapaarre on kokonaan ilman erillistä poikittaistuentaa, voidaan nurjahduspituutta redusoida selvästi, jopa arvoon  $0,3...0,4*L$ , jossa  $L$  on paarteen pituus. Tämä perustetaan siihen, että ristikkoa hyödynnetään kokonaisuutena ja otetaan huomioon uumasauvojen taivutus- ja liitosjäykkyydet sekä tukevan/vedetyn paarteen vääntöjäykkyys.

On olennaista ymmärtää, että hyödynnettäessä ristikkoa kokonaisuutena poikittaistukemattoman paarteen mitoituksessa, aiheuttaa se ristikkoon lisärasituksia. Merkittävin näistä on K-liitokseen kertyvä momentti tasosta poispäin. Työssä lasketuissa ristikkopilareissa kyseinen momentti vie liitoksen kapasiteetista noin  $20...30\%$ , kun se oletetaan tasaisesti jakautuneeksi ja ristikosta hyödynnetään kaikki kapasiteetti. Tätä ilmiötä ei kuitenkaan esimerkiksi CIDECT:n ohjeissa mainita lainkaan.

Työssä lasketaan elementtimenetelmällä erilaisia ristikkopilareita ja kattoristikoita käyttäen sekä kuori- että palkkielementtejä. Kuorielementtimallissa liitosjäykkyydet muodostuvat automaattisesti oikein. Työssä esitellään menetelmä liitosjäykkyyden laskemiseksi, jota voidaan hyödyntää palkkielementtimallissa. Lisäksi poikittaistukemattomasta paarteesta muodostetaan analyttinen rakennemalli, jonka avulla suunnittelija voi määrittää nurjahduspituuden. Työssä laskettuja tuloksia verrataan myös CIDECT:n julkaisemaan ohjeeseen vuodelta 1982, jonka avulla voidaan suoraan laskea nurjahduspituuksia tämänkaltaisille tapauksille. CIDECT:n menetelmä ja työssä kehitettävä analyttinen rakennemalli tuottavat lähes saman suuruiset nurjahduspituudet tutkittaville ristikoille.

## ABSTRACT

### **TUOMAS HAAPANEN: STABILITY OF A LATERALLY UNSUPPORTED CHORD**

Tampere University of Technology

Master of Science Thesis, 107 pages, 14 Appendix pages

August 2017

Master's Degree Programme in Civil Engineering

Major: Structural Design

Examiner: Professor Sami Pajunen

**Keywords:** buckling length, laterally unsupported chord, linearized buckling analysis, non-linear finite element method, rotational stiffness

Buckling analysis, which mainly based on the right choice of buckling length, is the most fundamental part of designing compressed steel structures. In the literature, the complete buckling lengths for separated structural components have been demonstrated to facilitate designing. The more complicated structure, the more challenging it is to define the precise buckling length, and on top of that, boundary conditions must correspond to the reality.

In this Thesis, a laterally unsupported chord indicates to an inner chord of a lattice column or a bottom chord of a truss. In these cases, a separated buckling restraint system is traditionally used to reduce an out-of-plane buckling length. Although the inner or bottom chord is without buckling restraint, the buckling length can significantly be decreased, even up to  $0,3...0,4*L$ , where  $L$  is the total length of the chord. This is based on the fact, that there is a lot of capacity when a truss/a lattice column is considered as an entirety, bending and rotational stiffness of brace members and torsional stiffness of tension/stabilizing chord as a real.

It's necessary to understand, that by considering a truss/a lattice column as an entirety when designing a laterally unsupported chord, it causes additional stresses to truss or lattice column. The most significant additional stress is an out-of-plane moment which builds up in K-joint. On the lattice columns, which are calculated in this Thesis, this moment takes approximately  $20...30\%$  of a capacity of K-joint if it's assumed to be constantly divided and all capacity of a lattice column is utilized. This phenomenon isn't mentioned in CIDECT's instruction at all.

In this Thesis, different lattice columns and trusses are calculated by using FEM and both shell elements and beam elements. In shell element model, the rotational stiffness of K-joint is formed automatically correctly. A method to determine a rotational stiffness of K-joint is also presented in Thesis. Additionally, an analytical model of a laterally unsupported chord is formed. Employing this model, a designer can determine a buckling length. All results are compared to CIDECT's instruction by with a buckling length can also be determined. CIDECT's and Thesis' methods generate almost same out-of-plane buckling lengths to the laterally unsupported chord.

## ALKUSANAT

Tämä diplomityö on tehty A-Insinöörit Suunnittelu Oy:n palveluksessa. Työn tarkoitus on näyttää, miten teräsrakenteisen ristikkopilarin sisäpaarteen tai kattoristikon alapaarteen nurjahduspituus tasosta poispäin voidaan laskea hyödyntämällä ristikkorakennetta kokonaisuutena. Työn ohessa myös laaditaan yrityksen sisäinen laskentapohja nurjahduspituuden määrittämiseen.

Diplomityön tarkastajana toimi professori Sami Pajunen TTY:lta ja ohjaajana DI Ville Laine A-Insinöörit Suunnittelu Oy:stä. Haluan kiittää heidän tarjoamastaan asiantunteuksesta stabiilisuusteoriaan ja teräsrakenteisiin liittyen. Lisäksi kiitokset kaikille työkaivereille, jotka ovat omalta osaltaan auttaneet diplomityön etenemisessä.

Suuri kiitos myös avopuolisolleni Suville, joka on kärsivällisesti jaksanut tsempata minua työn alusta loppuun saakka.

Tampereella 26.7.2017



Tuomas Haapanen

# SISÄLLYSLUETTELO

1.	JOHDANTO .....	1
2.	STABIILISUUSTEORIA.....	4
2.1	Yleistä .....	4
2.2	Tarkka ratkaisu differentiaaliyhtälöstä .....	8
2.2.1	Ideaalisauva .....	10
2.2.2	Alkuhäiriön vaikutus.....	14
2.2.3	Suurten siirtymien teoria .....	17
2.2.4	Kimmoton nurjahdus.....	20
2.3	Likimääräisiä ratkaisumenetelmiä.....	25
2.3.1	Energiamenetelmä.....	25
2.3.2	Linearisoitu FEM-nurjahdusanalyysi.....	28
2.3.3	Epälineaarinen FEM-analyysi .....	31
3.	POIKITTAISTUKEMATON PAARRE .....	37
3.1	Ristikkopilari ja kattoristikko.....	37
3.2	Poikittaistukematonta parretta stabiloivat osat.....	38
3.3	K-liitoksen rotaatiojäykkyyden laskentamenetelmä.....	50
3.4	Poikittaistukemattoman paarteen analyyttinen rakennemalli.....	53
3.5	Rasitetun K-liitoksen kapasiteetti nurjahdusta vastaan .....	58
4.	LASKENTAMENETTELYJEN TODENTAMINEN FEM-LASKENNALLA ...	61
4.1	K-liitoksen rotaatiojäykkyys .....	61
4.2	Linearisoitu nurjahdusanalyysi ja eurokoodin mukainen käyttöaste.....	63
4.2.1	Tulokset käyttäen kuorielementtejä .....	63
4.2.2	Tulokset käyttäen palkkielementtejä.....	66
4.2.3	Tarkempi analyysi ottamalla huomioon paarteiden voimasuhteet	70
4.3	Epälineaarinen nurjahdusanalyysi .....	75
4.3.1	Tulokset käyttäen kuorielementtejä .....	78
4.3.2	K-liitokseen kertyvä momentti .....	80
4.3.3	Tukevan paarteen vääntö ja ristikon päiden leikkausrasitukset....	84
4.3.4	Nurjahdustuennan tukireaktio.....	87
4.4	Tulokset työssä kehitetyllä menetelmällä .....	88
4.5	Laskentamenetelmien vertailu.....	91
5.	CASE.....	93
5.1	Kattoristikon alapaarre.....	93
5.2	Ristikkopilari .....	96
6.	TULOSTEN VERTAILU KIRJALLISUUTEEN .....	99
7.	YHTEENVETO JA JOHTOPÄÄTÖKSET .....	102
	LÄHTEET.....	104
	LIITTEET.....	107

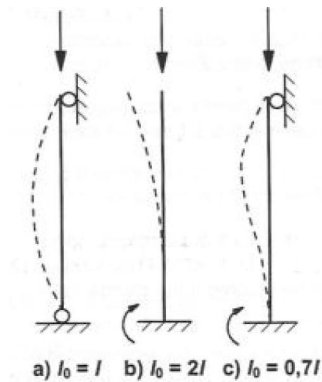
## LYHENTEET JA MERKINNÄT

FEM	Finite Element Method (elementtimenetelmä, rakenteen numeerinen analysointimenetelmä, joka perustuu siirtymien muotofunktioihin ja virtuaalisen työn periaatteeseen)
$A$	pinta-ala
$b_0$	paarteen leveys
$b_1$	uumasauvan leveys
$C$	K-liitoksen rotaatiojousen jäykkyys
$C_{out}$	päistään jousitetun uumasauvan rotaatiojousen jäykkyys
$E$	kimmomoduuli
$E_t$	tangenttimoduuli
$e$	puristavan voiman epäkeskisyys
$f_y$	myötöraja
$G$	liukumoduuli
$h_0$	paarteen korkeus
$h_1$	uumasauvan korkeus
$I$	neliömomentti
$I_v$	vääntöjäyhyys
$k$	translaatiojousen jousivakio
$L$	jänneväli
$L_1$	uumasauvan pituus
$L_b$	nurjahdustuennan välimatka tukevassa paarteessa
$L_{cr}$	nurjahduspituus
$M$	momentti
$M_{x,pl.Rd}$	putkiprofiilin plastinen vääntökestävyys
$M_{x,b.Rd}$	putkiprofiilin vääntölommuuskestävyys
$P_{cr}$	linearisoidun nurjahdusanalyysin kriittinen kuorma
$P_E$	Eulerin nurjahduskuorma
$Q$	leikkausvoima
$t_0$	paarteen ainevahvuus
$t_1$	uumasauvan ainevahvuus
$U$	kimmoenergia
$V$	ulkoisen voiman tekemä työ
$w_{con}$	K-liitoksen pään siirtymä johtuen liitoksen kiertymästä
$w_{FEM}$	K-liitoksen pään kokonaissiirtymä FEM-laskennasta
$W_t$	Poikkileikkauksen vääntövastus
$\alpha$	eurokoodin mukainen redusointikerroin nurjahdusanalyysissa
$\alpha_{cr}$	linearisoidun nurjahdusanalyysin kriittistä kuormaa vastaava kuor- makerroin
$\beta$	uumasauvan leveyden suhde paarteen leveyteen
$\gamma$	paarteen leveyden suhde sen kaksinkertaiseen ainevahvuuteen
$\bar{\lambda}$	muunnettu hoikkuus
$\lambda_t$	uuman muunnettu hoikkuus vääntömitoituksessa
$\sigma_{cr,r}$	kaksoismoduuliteorian mukainen kriittinen jännitys
$\sigma_{cr,t}$	tangenttimoduuliteorian mukainen kriittinen jännitys
$\sigma_m$	myötöraja
$\sigma_s$	suhteellisuusraja
$\chi_t$	vääntölommuuden pienennystekijä

# 1. JOHDANTO

Useilla suunnittelijoilla on luontainen ymmärrys stabiilisuuden, tai sen rajatilan, määrittämisestä – pieni kuormanmuutos aiheuttaa ison siirtymämuutoksen. Rakenteen stabiilisuudella tarkoitetaan yleisesti rakenteen tai rakennusosan kykyä ottaa vastaan kuormitusta ilman, että siirtymät, kiertymät tai venymät lähtevät suureen kasvuun. Stabiilisuusteorian ja sen, miksi rakenteesta tulee epästabiili, ymmärtäminen onkin olennaista insinööreille, jotka suunnittelevat turvallisia rakenteita. Teräsrakenteiden päivittäisessä suunnittelussa puhutaan nurjahdusilmiöstä stabiilisuusilmiön sijaan ja tätä käsitettä käytetään tässäkin työssä. Nurjahdus terminä kuvaa nimenomaan sauvamaisen rakenteen ilmiötä, kun esimerkiksi lommahdus on niin ikään stabiilisuuden menetyksen ilmiö, mutta tasomaisille rakenteille.

Puristetun rakenneosan nurjahdustehtävä perustuu pääosin oikean nurjahduspituuden määrittämiseen. Sauvan nurjahduspituudella tarkoitetaan nurjahdusmuodon kahden peräkkäisen käännepisteen välimatkaa [7]. Kuvassa 1.1 on muutama esimerkki nurjahduspituudesta.



**Kuva 1.1** Nurjahduspituuden esimerkkejä. [7]

Yleisesti voidaan todeta, että mitä pienempi on rakenteen nurjahduspituus, sitä suurempi on sen kriittinen kuorma nurjahduksen suhteen. Kuvasta 1.1 nähdään, että nurjahduspituus on täysin riippuvainen tukiehdoista. Pitkä ja puristettu rakenneosaa jaetaan usein pienempiin osiin sidejärjestelmällä, uumasauvoilla tai erillisellä nurjahdustuennalla. Suunnittelijan on olennaista ymmärtää, että nurjahdustuennalla on sen kestävyuden lisäksi oltava riittävä jäykkyys [21][22]. Toisaalta nurjahdustuennan jäykkyydellä on vaikutus tuettavan rakenneosan nurjahduspituuteen [9]. Tässä työssä rajataan nurjahdustuennan jäykkyyden tarkastelu pääosin pois. Aihetta kuitenkin sivutaan myöhemmissä kappaleissa. Yleisesti tässä työssä puhuttaessa nurjahdustuetusta rakenteesta, tuennan oletetaan olevan sekä riittävän kestävä, että jäykkä.

Stabiilisuuden laskenta ja sen huomioon ottaminen tulee aina kyseeseen, kun suunnitellaan puristettuja rakenteita kuten pilaria tai ristikon puristettua parretta. Myös palkin kiepahdusilmiö sekä esimerkiksi isoja levykenttiä sisältävän korkean I-palkin paikalliset lommahdusilmiöt luetaan stabiilisuustehtäviksi. Rakenteen tai rakenneosan nurjahdus voi tapahtua rakenteen tasossa tai rakenteen tasosta poispäin. Rakenteet tulee luonnollisesti mitoittaa molemmille ilmiöille. Usein rakenteet tuetaan erillisellä nurjahdustuennalla tasosta poispäin tapahtuvassa nurjahduksessa, sillä jäykkyys tähän suuntaan on tavanomaisesti pienempi kuin tasonurjahduksessa.

Tässä työssä keskitytään tasosta poispäin tapahtuvaan nurjahdukseen. Erityisesti työn tarkoituksena on tutkia poikittaistukemattomien rakenteiden nurjahdusta. Tyypillisiä tällaisia rakenteita ovat korkean ristikkopilarin sisäpaarre sekä kattoristikon alapaarre niissä tapauksissa, kun ne menevät puristukselle joko tietyltä osaa parretta tai koko paarten matkalta. Ristikkopilareita käytetään teollisuusrakentamisessa, kun pilarilta vaaditaan suurta normaali- ja taivutuskestävyyttä (esim. nosturirata) ja/tai pilari on hyvin korkea [17]. Kattoristikon alapaarre voi mennä puristukselle johtuen muun muassa ristikon jäykästä kiinnityksestä pilariin, poikkeuksellisesta sidejärjestelystä tai kevytrakenteisissa halleissa tuulen imukuormasta [25].

Työn tarkoituksena on tutkia edellä mainittuja rakenteita ja selvittää kriittisen kuorman perusteella puristetun rakenneosan nurjahduspituus tasosta poispäin tapahtuvaa nurjahdusta vastaan. Useissa lähteissä ja arkisuunnittelussa on usein tyydytty varustelemaan esimerkiksi ristikkopilarit erillisellä nurjahdustuennalla sekä todettu, että nurjahduspituus em. tapauksissa on nurjahdustukien välimatka. Tämä lähestymistapa on siinä määrin perusteltua, että ristikon puristetun paarten on helppo mieltää toimivan tällä tavoin.

Edellä mainittu ei kuitenkaan ota millään tavoin huomioon ristikon rakennetta kokonaisuutena. Tarkoituksena on selvittää, mikä vaikutus ristikon vetopaarteella ja tietyn jäykkyyden omaavilla uumasauvojen liitoksilla on puristuspaarten kriittisen kuorman arvoon. Kun ristikkoa ajatellaan kokonaisuutena, on ristikon vedossa olevien osien ja uumasauvojen kautta muodostuvalla vääntöjäykkyydellä stabiloiva vaikutus [1]. Mikäli edellä mainitut asiat voidaan luotettavasti hyödyntää, voidaan saavuttaa taloudellisia säästöjä. Lisäksi etenkin ristikkopilarin sisäpaarteessa ei voi aina arkkitehtonisista syistä/käyttäjän vaatimuksista johtuen käyttää nurjahdussiteitä mielivaltaisesti, sillä teollisuushallilta voidaan vaatia leveyttä rakennuksen toiselta ulkopaarteelta toiselle ulkopaarteelle.

Diplomityön tavoite on tuottaa ohje edellä mainitun nurjahduspituuden määrittämiseen, jota voidaan luotettavasti käyttää, mutta ei ole liian konservatiivinen. Työssä käydään läpi stabiilisuusteorian perusteita, pyritään yksinkertaisin esimerkein johtamaan kriittisen kuorman arvo lähtien puristetun ja taivutetun sauva-alkion differentiaaliyhtälöstä. Tällä tavoin tuodaan esiin mitkä asiat vaikuttavat laskentaohjelmista saataviin tuloksiin ja



kuinka tuloksia tulisi tulkita. Lisäksi esitellään pintapuolisesti niin lineaarisen kuin epälineaarisen elementtimenetelmän perusteet nurjahduskuorman määrittämiseksi. Poikittaistukemattoman paarteen nurjahduksesta tehdään analyttinen malli, joka on mahdollista suorittaa ”käsien laskentana”. Työssä tehdään FEM-laskentaa käyttäen Ansys- ja RFEM-ohjelmia, joilla on tarkoitus verifioida määritetty analyttinen malli. Lisäksi kirjallisuudesta etsitään menetelmiä, joilla tätä asiaa on hoidettu ja haetaan vertailutuloksia myös sieltä.

## 2. STABIILISUUSTEORIA

### 2.1 Yleistä

Stabiilisuus on ilmiö, joka toisessa tapauksessa voi olla hyvin herkkä alkuhäiriöille, kun toisessa tapauksessa tutkittava kohde ei juurikaan välitä siihen kohdistuvista alkuhäiriöistä stabiilisuuden menetyksen kannalta. Suunnittelijan on luonnollisesti olennaista ymmärtää mihin kategoriaan oma suunnittelukohde kuuluu.

Alkuhäiriöherkkyyden lisäksi tehtävästä riippuen rakenne voi stabiilisuuden menetyksen jälkeen joko olla kykenevä ottamaan vastaan kuormitusta (hardening post-buckling behavior) tai päinvastoin olla täysin kykenemätön vastaanottamaan kuormitusta enää stabiilisuuden menetyksen jälkeen (softening post-buckling behavior). Tätä ilmiötä havainnollistetaan yksinkertaisella esimerkillä tulevassa kappaleessa, kun ei tehdä oletusta pienistä siirtymistä. Suurten siirtymien teorialla pystytään kuvaamaan rakenteen todellista käyttäytymistä, kun siirtymät alkavat kasvaa suuriksi.

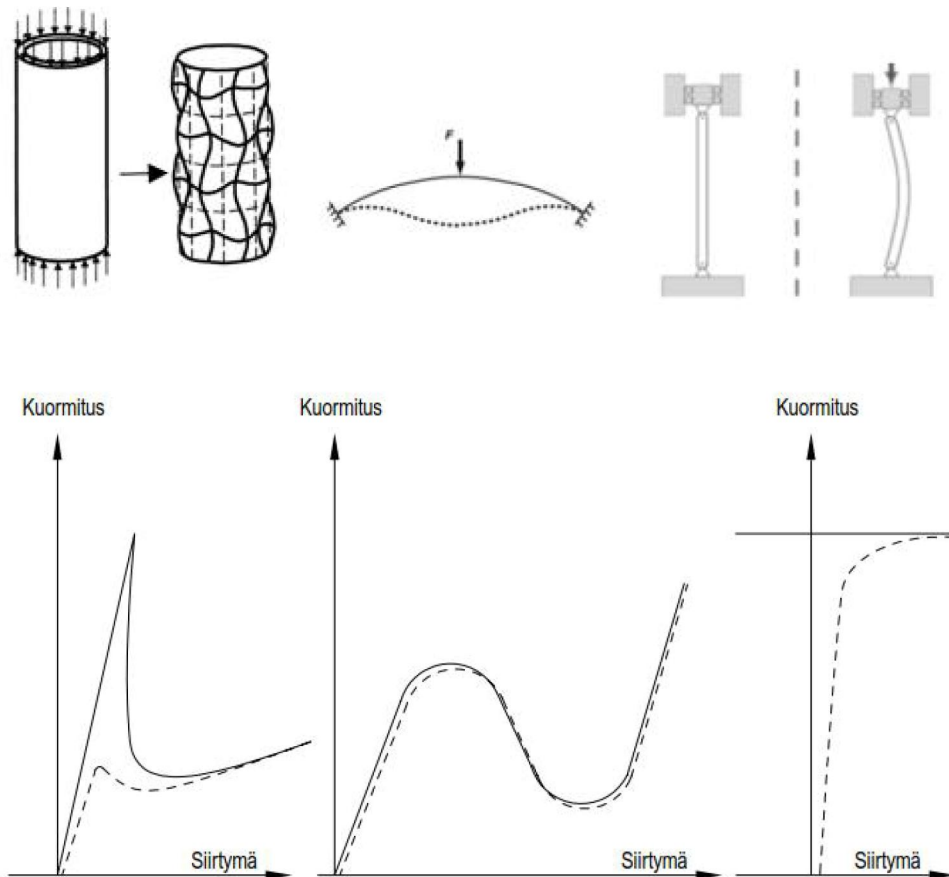
Kolmas epävarmuutta lisäävä tekijä on käytössä oleva materiaalimalli. Teräsrakenteiden kohdalla tämä tarkoittaa materiaalin plastisoitumista. Harvoin kuitenkaan rakenteen jännitykset kasvavat myötörajalle saakka ennen stabiilisuuden menetystä. Usein suurten siirtymien sekä plastisoitumisen huomioon ottaminen tulee kyseeseen, kun halutaan tietää rakenteen käyttäytymistä stabiilisuuden menetyksen jälkeen.

Edellä mainittuja ilmiöitä kuvataan seuraavissa kappaleissa erikseen yksinkertaisin esimerkein. Stabiilisuustehtävän analyttinen ratkaiseminen monimutkaistuu huomattavasti, kun nämä kaikki tekijät otetaan yhtä aikaa huomioon. Ratkaisua voidaan näissä tapauksissa hakea esimerkiksi energiamenetelmillä. Yksi paljon käytössä oleva menetelmä on elementtimenetelmä, joka perustuu energiamenetelmään ja nykyaikaiset elementtimenetelmään perustuvat ohjelmat pystyvätkin ratkaisemaan näitä tehtäviä suhteellisen nopeassa ajassa.

Eurokoodin mukaisessa teräsrakenteiden mitoituksessa rakenteen epätarkkuustekijät kuten alkuhäiriöt ja jäännösjännitykset otetaan huomioon erillisellä kertoimella [14]. Kertoimen on riippuvainen myös poikkileikkauksen tyypistä, sillä jäännösjännitykset ovat poikkileikkauksesta riippuvaisia. Eurokoodi sallii FEM-analyysia käytettäessä rakenteen alkuhäiriöksi kimmoteorian mukaisen nurjahdusmuodon. Häiriön amplitudiksi eurokoodi antaa myös ohjeen, joka riippuu analyysityypistä sekä tarkasteltavan rakenteen profiilista [14][15].

Erilaiset rakenteet käyttäytyvät hyvin eri tavoin stabiilisuuden menetyksen hetkellä kuten kappaleen alussa todettiin. Helposti voidaan luokitella ainakin kolmeen eri kategoriaan

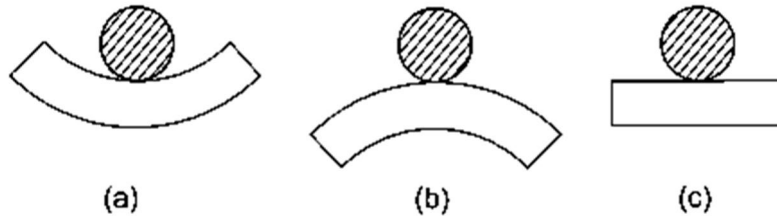
rakenteen tapa menettää stabiilisuutensa. Havainnollistetaan tätä erilaisten voima-siirtymä-kuvaajien avulla, joita on esitetty kuvassa 2.1.



**Kuva 2.1** Erilaisia tasapainopolkuja sekä vastaavia tyypillisiä rakenteita.

Kuvassa 2.1 ehjällä viivalla kuvataan virheetöntä rakennetta ja katkoviivalla kuvataan virheellistä, esimerkiksi alkutaipumalla häirittyä rakennetta. Kuvassa vasemmanpuoleinen tasapainopolku on hyvin tyypillinen puristetulle ohutseinämäiselle sylinterille. Nähdään, että tämän tyyppinen rakenne on hyvin herkkä alkuhäiriöille, ja alkuhäiriöttömän rakenteen kriittinen kuorma voi olla huomattavasti suurempi kuin häirityn. Kuvassa keskellä oleva tasapainopolku on tyypillinen läpilyöntitehtävä, esimerkiksi kaarisilta, jota painetaan keskeltä. Läpilyönti ei ole kovin herkkä alkuhäiriöille, mutta näissä tehtävissä korostuu suurten siirtymien teorian tärkeys. Pienten siirtymien teoriaan perustuvan lineaarisen laskennan nurjahduskuorma on huomattavasti epävarmalla puolella, koska siirtymät ennen stabiilisuuden menetyksiä (läpilyöntiä) ovat suuria. Käytännön elämästä oiva esimerkki on Turun Myllysilta, joka notkahti keskeltä yön aikana vuonna 2010 [30]. Oikeanpuoleinen tasapainopolku on tyypillinen sauvarakenteille ja tässä työssä tutkittava poikittaistukematon parre voidaan luokitella tähän kategoriaan. On huomattava, että kriittistä kuormaa kuvaava käyrän vaakasuora osuus voi olla ylös- tai alaspäin kaareutuva riippuen siitä, onko rakenne kykenevä ottamaan kuormaa stabiilisuuden menetyksen jälkeen vai ei. Aiheeseen palataan myöhemmin kappaleessa 2.2.3.

Nurjahdukseksi kutsutaan ilmiötä, kun suora ja hoikka sauva (tai rakennekokonaisuus) siirtyy puristavan voiman vaikutuksesta äkillisesti vaakasuuntaan sen pituussuuntaisesta asemastaan [20]. Usein puristetun sauvan tasapainoa havainnollistetaan pohtien kuvan 2.2 mukaisen pallon tasapainoa eri tilanteissa.



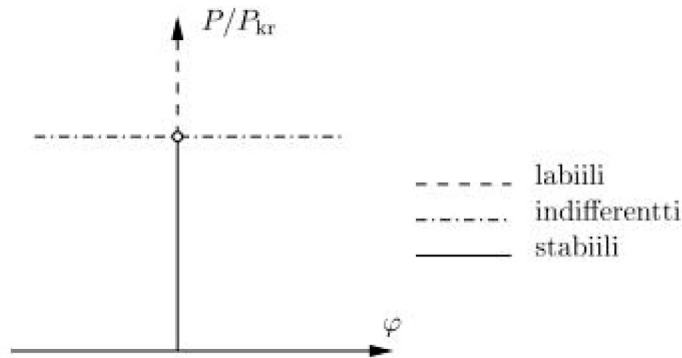
**Kuva 2.2** Tasapainotilan luonne. [20]

Kun kuvan 2.2 tapauksessa (a) pallolle annetaan pieni siirtymä sen alkuperäisestä paikasta, se palaa takaisin paikoilleen, kun häiritsevä voima poistetaan. Kappaleen käyttäytyessä näin, sanotaan sen olevan stabiilissa tasapainotilassa. Pallon pienikin siirto sen tasapainoasemastaan kasvattaa pallon potentiaalienergiaa. Kun kuvan 2.2 osan (b) palloa häiritään, se ei koskaan palaa, vaan jatkaa kulkuaan alkuperäisestä tasapainoasemastaan. Pallon tasapainoa kutsutaan labiiliksi (epästabiili). Pienikin siirtymä pallon tasapainoasemasta pienentää pallon potentiaalienergiaa. Voidaankin sanoa, että stabiilissa tasapainoasemassa systeemin energia on minimi ja epästabiilissa tasapainossa se on maksimi [20].

Kuvan 2.2 pallo osassa (c) ei häiriön jälkeen palaa alkuperäiseen asemaansa, mutta ei myöskään jatka kulkuaan, kun häiritsevä voima poistetaan. Tämän tyyppistä tasapainoasemaa sanotaan neutraaliksi tasapainoasemaksi. Myös termiä indifferentti tasapainoasema käytetään [19]. Yleisesti oletetaan, että stabiilin ja epästabiilin tasapainoaseman rajapinnassa on olemassa neutraali tasapainoasema. Kuorma, jolla suora pilari tai sauva ei ole enää stabiili, on kuorma, jolla neutraali tasapainoasema on mahdollinen. Tämä kuorma mielletään yleisesti kriittiseksi kuormaksi.

Määrittääkseen sauvan kriittisen kuorman, täytyy löytää se kuorma, jolla sauva voi olla tasapainossa sekä suorassa, että hieman taivutetussa asemassaan. Taivutetun aseman suuruutta ei ole määriteltä, vaan se on käsitteellinen. Näin ollen sauvan vapaakappalekuva täytyy piirtää hieman taivutetussa muodossa.

Sauvan kriittisellä kuormalla, primäärinen tasapainopolku saavuttaa haarautumispisteen ts. bifurkaatiopisteen, jonka jälkeen haarautuu neutraalille tasapainopolulle. Kuvassa 2.3 on esitetty eri tasapainotilat sekä ympyrällä merkitty bifurkaatiopistettä.



**Kuva 2.3** Tasapainopolut ja haarautumispiste. Pystyakselilla sauvan normaalivoiman suhde kriittiseen kuormaan ja vaaka-akselilla sauvan kiertymä. [19]

On syytä kuitenkin korostaa, että kuvan 2.3 mukaisen tasapainopolun oletuksina ovat muun muassa: sauva on täydellisen suora, puristava voima vaikuttaa keskeisesti poikkeileikkauksessa, siirtymät/kiertymät ovat pieniä. Voidaankin helposti todeta, että ei ole olemassa pilaria, joka täyttää edellä mainitut oletukset. Tämän tyyppinen nurjahdusanalyysi antaa kriittiselle kuormalle yläraja-arvion, mikä myös myöhemmin osoitetaan useissa eri yhteyksissä.

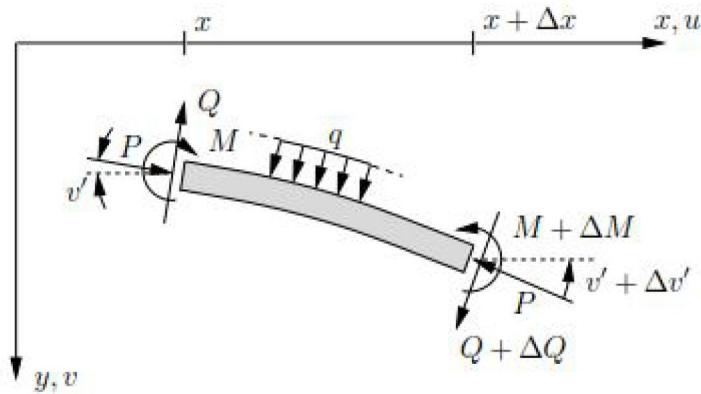
Yksittäisen sauvan nurjahduskuormalle on mahdollista johtaa käytetyn teorian puitteissa tarkka ratkaisu taipuman differentiaaliyhtälöstä [19]. Tämän työn teoriaosuudessa keskitytään puristetun ja taivutetun sauvan ratkaisuun käyttäen tarkan ratkaisun antavaa tasapainomenetelmää sekä approksimaation antavaa energiomenetelmää. Energiomenetelmää ja sen perusteita käsitellään pintapuolisesti, koska elementtimenetelmä, joka näyttää isoa osaa tässä työssä, perustuu energiomenetelmään.

Rakenteen kriittinen kuorma voidaan selvittää myös käyttäen joko lineaarista tai epälineaarista elementtimenetelmää. Elementtimenetelmä perustuu potentiaalienergian minimin periaatteeseen. Elementtimenetelmä on nykypäivänä erittäin suosittu ja tehokas työkalu monimutkaistenkin rakenteiden analysointiin.

Elementtimenetelmässä jokaiselle elementille muodostetaan jäykkyyismatriisi sekä geometrinen jäykkyyismatriisi, joka sisältää kuormitustiedot. Kriittinen kuorma lasketaan näiden avulla ominaisarvotehtävästä. Linearisoitu nurjahdusteoria olettaa bifurkaatiopisteen olemassaolon [4]. Edellisen perusteella voidaankin todeta, että linearisoidulla elementtimenetelmällä saatuun nurjahduskuorman arvoon tulee suhtautua suurella kriittisyydellä. Useimmat nurjahdustehtävät tulisikin ratkaista käyttäen epälineaarista elementtimenetelmää, missä voidaan ottaa huomioon siirtymien vaikutukset rakenteen jäykkyyteen sekä materiaalin plastisoituminen. Työn yksi tavoitteista on tuoda esiin linearisoidun ja epälineaarisen elementtimenetelmän erot nurjahdusanalyysissä.

## 2.2 Tarkka ratkaisu differentiaaliyhtälöstä

Puristetun ja taivutetun sauvan differentiaaliyhtälö johdetaan kuvan 2.4 mukaisesta  $\Delta x$  pituisesta alkioista. Puristavan voiman oletetaan olevan vakio alkion matkalla. Lisäksi on olennaista tiedostaa, että tässä työssä keskitytään vain Eulerin-Bernoullin palkkiteoriaan perustuviin palkkielementteihin. Näin ollen leikkausmuodonmuutoksia ei oteta huomioon eli palkin poikkileikkaus säilyy taivutettunakin tasona, joka on kohtisuorassa palkin pituussäikeitä vastaan. Homogeenisen ja hoikan pilarin tapauksessa leikkausmuodonmuutoksen vaikutus nurjahduskuormaan on pieni [19].



**Kuva 2.4** Sauvan alkio. [19]

Alkion vasemman pään ympäri otettu momentin tasapainoyhtälö on

$$q\Delta x \frac{\Delta x}{2} + M - (M + \Delta M) + (Q + \Delta Q)\Delta x + P\sin\Delta v'\Delta x = 0 \quad (2.1)$$

Koska siirtymät oletetaan pieniksi, seuraavat approksimaatiot ovat voimassa:

- $\cos\theta \approx 1$
- $\sin\theta \approx \tan\theta \approx \theta = \frac{\Delta v}{\Delta x}$
- $\Delta v' * \Delta x \approx 0$
- $\Delta Q * \Delta x \approx 0$
- $(\Delta x)^2 \approx 0$  [5].

Ottamalla huomioon edellä luetellut yksinkertaistukset, kaava (2.1) tulee muotoon

$$-\Delta M + Q\Delta x = 0, \quad (2.2)$$

joka voidaan kirjoittaa kaavan (2.3) muotoon jakamalla termillä  $\Delta x$

$$\frac{\Delta M}{\Delta x} = Q. \quad (2.3)$$

Rajalla  $\Delta x \rightarrow 0$  saadaan yhteys

$$M' = Q, \quad (2.4)$$

jossa on merkitty  $(\bullet)' = \frac{d(\bullet)}{dx}$  [19].

Pystysuuntaisten voimien tasapainoehdosta saadaan kaavan (2.5) mukainen yhtälö

$$\begin{aligned} Q \cos v' - (Q + \Delta Q) \cos(v' + \Delta v') - P \sin v' \\ + P \sin(v' + \Delta v') - q \Delta x = 0, \end{aligned} \quad (2.5)$$

johon sijoittamalla mainitut pienten siirtymien approksimaatiot, kaava (2.5) sievenee muotoon

$$-\Delta Q + P \Delta v' - q \Delta x = 0. \quad (2.6)$$

Jakamalla kaavaa (2.6) alkion pituudella  $\Delta x$  ja käyttämällä samaa menetelmää kuin edellä saadaan differentiaaliyhtälö

$$Q' - P v'' + q = 0. \quad (2.7)$$

Sijoittamalla yhteys (2.4) differentiaaliyhtälöön (2.7) saadaan lopulta puristetun ja taivutetun sauvan differentiaaliyhtälö

$$M'' - P v'' + q = 0. \quad (2.8)$$

Kimmoisen sauvan momentin ja kaarevuuden välillä on kaavan (2.9) mukainen yhteys. Yhteys on johdettu useissa lähteissä, [5][13] eikä sitä esitellä tässä työssä.

$$M = EI\kappa, \quad (2.9)$$

jossa E on materiaalin kimmokerroin, I neliömomentti ja  $\kappa$  kimmoviivan kaarevuus. Taivuneen palkin kaarevuus on

$$\kappa = \frac{-v''}{(1+(v')^2)^{\frac{3}{2}}} [5]. \quad (2.10)$$

Koska siirtymät oletetaan edelleen pieniksi, kaavan (2.10) nimittäjä lähestyy arvoa 1 ja sijoittamalla saatu tulos kaavaan (2.8) sekä järjestelemällä termit uudelleen saadaan lopulta puristetun ja taivutetun sauvan differentiaaliyhtälö muotoon

$$v'''' + k^2 v'' = \frac{q}{EI}. \quad (2.11)$$

Kaavassa (2.11) on merkitty  $k = \sqrt{\frac{P}{EI}}$ . Yhtälö (2.11) on neljännen kertaluvun differentiaaliyhtälö ja sen ratkaisu on tunnetusti

$$v(x) = A \sin kx + B \cos kx + Cx + D + v_p, \quad (2.12)$$

jossa  $v_p$  on poikittaiskuormasta  $q(x)$  riippuva yksityisratkaisu [19] ja kertoimet A, B, C ja D ovat reunaehdoista riippuvia vakioita.

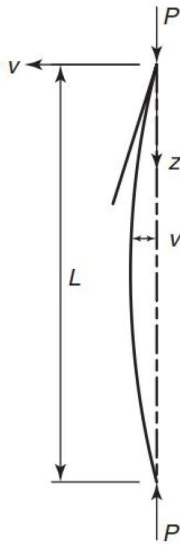
## 2.2.1 Ideaalisauva

Seuraavissa kappaleissa tarkoituksena on yksinkertaisten esimerkkien avulla havainnollistaa alkuhäiriön, suurten siirtymien huomioon ottamisen sekä plastisoitumisen vaikutusta kriittiseen kuormaan. Laskelmat perustetaan edellä johdettuun differentiaaliyhtälöön, eli tulokset ovat teorian puitteissa tarkkoja. Esimerkit lasketaan ottaen edellä mainitut tekijät huomioon yksi kerrallaan. Näin toimitaan, koska tehtävä on todella haastava, jopa mahdoton, ratkaista analyyttisin kaavoin, mikäli kaikki tekijät otettaisiin huomioon samaan aikaan.

Ensimmäisenä esimerkkinä tarkastellaan kuvan 2.5 mukaista molemmista päistä niveltuetta sauva. Sauvan oletetaan olevan täysin suora, puristavan kuorman ajatellaan vaikuttavan keskeisesti poikkileikkaukseen, pienten siirtymien teoria on käytössä sekä kriittisen kuorman oletetaan olevan kimmoisten jännitysten alueella eli sauvan käyttäytyminen on hyvin ideaalinen. Sauvan reunaehdot ovat

- $v(0) = 0$
- $M(0) = EI v''(0) = 0$
- $v(L) = 0$
- $M(L) = EI v''(L) = 0$ .





**Kuva 2.5** Niveltuettu sauva. [5]

Koska poikittaiskuormitusta ei ole, differentiaaliyhtälö (2.11) menee nyt muotoon

$$v'''' + k^2 v'' = 0. \quad (2.13)$$

Yhtälön ratkaisu on kaavan (2.12) mukainen ja sen toinen derivaatta on

$$v''(x) = -Ak^2 \sin kx + Bk^2 \cos kx. \quad (2.14)$$

Sijoittamalla taipuman ja sen derivaatan lausekkeet (2.13) ja (2.14) määritettyihin reuna-  
ehtoihin saadaan yhtälöryhmä

$$B + D = 0$$

$$Bk^2 = 0$$

$$A \sin kL + B \cos kL + CL + D = 0$$

$$-Ak^2 \sin kL + Bk^2 \cos kL = 0.$$

Kokoamalla yhtälöryhmä matriisimuotoon saadaan

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & k^2 & 0 & 0 \\ \sin kL & \cos kL & L & 1 \\ -k^2 \sin kL & k^2 \cos kL & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2.15)$$

Yhtälön (2.15) kerroinmatriisin determinantin tulee olla nolla, jotta sillä olisi ei-triviaali ratkaisu. Näin ollen voidaan kirjoittaa

$$k^4 L \sin(kL) = 0. \quad (2.16)$$

Koska  $k^4 L \neq 0$ , niin kriittiselle kuorman ratkaisulle saadaan lopulta lauseke

$$kL = \sqrt{\frac{PL^2}{EI}} = n\pi \rightarrow P_{cr} = \frac{n\pi^2 EI}{L^2}, \quad (2.17)$$

missä  $n = 1, 2, 3, \dots$  ja sauvan kriittinen kuorma nurjahduksen suhteen saadaan käyttämällä alinta ominaisarvoa  $k = k_1 = \pi/L$  ( $n=1$ ). Nurjahduskuorma on siten

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2} = P_E, \quad (2.18)$$

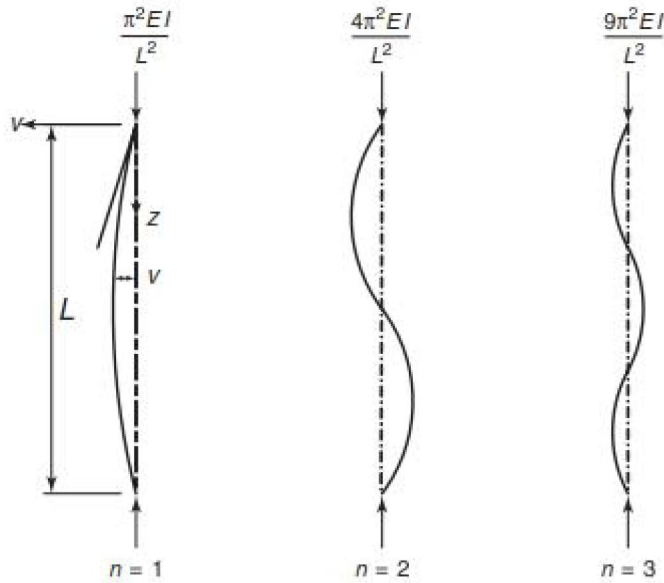
joka on hyvin tunnettu, klassinen Eulerin nurjahduskuorma. Alinta ominaisarvoa vastaava nurjahdusmuoto saadaan sijoittamalla ominaisarvo reunaehtoihin:

- $B + D = 0$
- $Bk_1^2 = 0$
- $A \sin k_1 L + B \cos k_1 L + CL + D = 0$
- $-Ak_1^2 \sin k_1 L + Bk_1^2 \cos k_1 L = 0,$

josta helposti nähdään, että  $B = C = D = 0$  ja näin ollen taipuman lauseke saadaan muotoon

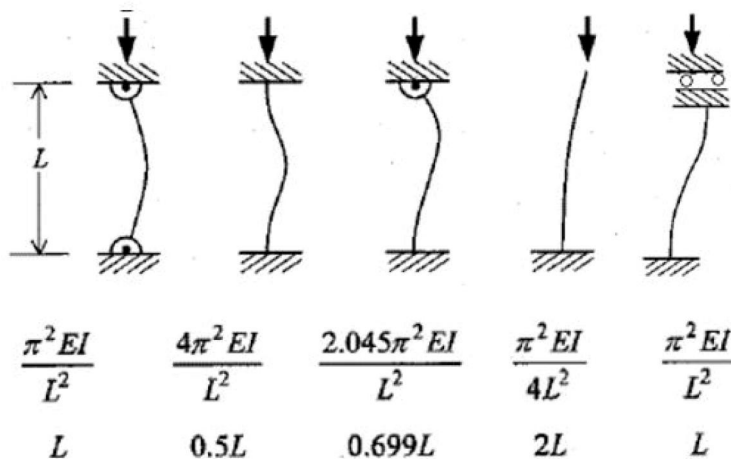
$$v(x) = A \sin \frac{\pi x}{L}. \quad (2.19)$$

Kaavan (2.19) kerrointa  $A$  ei voida ratkaista tällä menetelmällä eli analyysi antaa vain nurjahdusmuodon, ei taipuman suuruutta sauvan nurjahtaessa. Kerroin on yksinkertaisesti vain sinimuotoisen käyrän amplitudi. Kuvassa 2.6 on kolme alinta ominaismuotoa (nurjahdusmuotoa) niveltuetulle sauvalle.



**Kuva 2.6** Kolme alinta nurjahdusmuotoa niveltuetulle sauvalle. [5]

Vastaavalla menettelyllä voidaan johtaa kuvan 2.7 mukaisten viiden tunnetun perustapauksen kriittinen kuorma sekä nurjahdusmuoto.



**Kuva 2.7** Viisi perinteistä nurjahdustapausta. Alimmalla rivillä nurjahduspituus suhteutettuna koko pilarin pituuteen. Ylemmällä rivillä vastaava kriittinen kuorma.

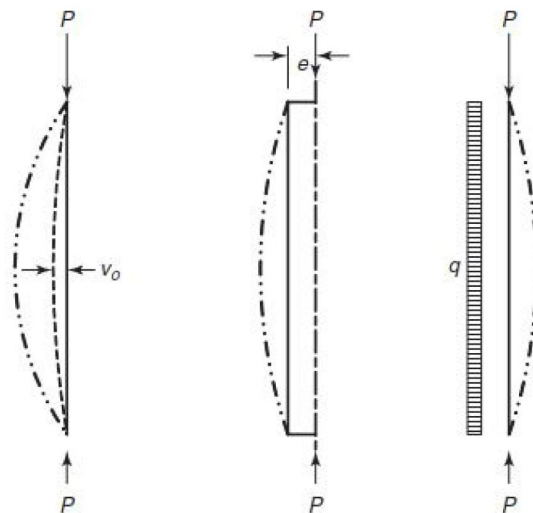
Tämän tyyppisellä analyysillä johdetun sauvan tasapainopolku on juuri kuvan 2.3 mukainen eli laskenta olettaa bifurkaatiopisteen olemassaolon. Laskenta olettaa sauvan olevan täysin suora, kunnes kriittisen kuorman saavutettua se taipuu nopeasti sivuun. Voidaan helposti ymmärtää, että todellinen pilari ei käyttäydy tällä tavoin, vaan kuorman epäkeskisyydestä tai rakenteen geometrisesta häiriöstä johtuen sauva siirtyy sivuun vähän kerrallaan puristavan voiman vaikutuksesta, kunnes se ei ole enää kykenevä ottamaan lisäkuormitusta vastaan ja nurjahtaa. Lisäksi kriittisen kuorman arvoon vaikuttaa muun muassa valmistusprosessista poikkileikkaukseen jääneet jäännösjännitykset. Eurokoodin

mukaisessa nurjahdusmitoituksessa otetaan laskentaan mukaan epätarkkuuskerroin, mikä ottaa huomioon juuri edellä mainittuja asioita. Eurokoodin nurjahduskertoimet ovat erilaisia eri poikkileikkauksille johtuen siitä, että eri poikkileikkaustyypille valmistusprosessia jäävät jäännösjännitykset ovat erilaiset. Jäännösjännityksien vaikutusta ei käsitellä tarkemmin tässä työssä.

Yksi vaihtoehto on tutkia epälineaarisen FEM laskennan avulla rakenteen todellista käyttäytymistä kuormitushistorian aikana ottaen huomioon alkuhäiriöt, suurten siirtymien teorian sekä tarkemman materiaalimallin. Tämän kaltainen analyysi on kuitenkin aikaa ja resursseja vievää eikä sitä luonnollisesti käytetä arkisuunnittelussa, lukuun ottamatta erityisen vaativia kohteita. Aihetta käsitellään lisää myöhemmin, kun ristikon puristetun paarteen kriittisen kuorman laskentaa varmennetaan FEM-laskennan avulla.

## 2.2.2 Alkuhäiriön vaikutus

Jokaisessa todellisessa pilarissa on epätäydellisyyksiä, jotka vaikuttavat pilarin käyttäytymiseen lähellä teoreettista nurjahduskuormaa. Tämän kappaleen tarkoitus on tuoda esiin mitä vaikutusta näillä epätäydellisyyksillä on puristetun sauvan kriittiseen kuormaan ja miten tasapainopolku poikkeaa ideaalisauvan tapauksesta. Epätäydellisyyksiä on periaatteessa kolme tyyppiä: sauvaan voi asettaa alkutaipuman, kuorman voi laittaa vaikuttamaan epäkeskeisesti tai sauvaa voi kuormittaa tasaisella vaakakuormalla. Kuvassa 2.8 on esitetty periaatteet edellä mainituille epätäydellisyyksille.



**Kuva 2.8** Erilaisia alkuhäiriöitä. [5]

Tarkastellaan tässä työssä alkuhäiriön vaikutusta olettamalla sauvalle jokin alkusiirtymä keskelle sauvaa, koska tämä on myös eurokoodin lähestymistapa [15]. Annetaan sauvalle alkuhäiriöksi sen ensimmäinen ominaismuoto, mikä on määritetty kaavassa (2.19). Oletettu alkumuoto on siten

$$v_i(x) = v_0 \sin \frac{\pi x}{L}. \quad (2.20)$$

Lähestytään ongelmaa toteamalla, että missä tahansa poikkileikkauksen pisteessä taivutusmomentti voidaan lausua seuraavasti

$$M = P(v + v_i). \quad (2.21)$$

Sijoittamalla kaavat (2.9) ja (2.10) edelliseen yhtälöön sekä käyttäen merkintää

$$k = \sqrt{\frac{P}{EI}}, \quad (2.22)$$

yhtälö (2.21) saadaan muotoon

$$v'' + k^2 v = -k^2 v_0 \sin \frac{\pi x}{L}. \quad (2.23)$$

Yhtälön homogeeninen ratkaisu on tunnetusti

$$v_H = A \sin kx + B \cos kx \quad (2.24)$$

ja yksityisratkaisu yleisten differentiaalilaskennan perusteiden mukaan on

$$v_P = C \sin \frac{\pi x}{L} + D \cos \frac{\pi x}{L}, \quad (2.25)$$

joka sijoittamalla yhtälön (2.23) vasemmalle puolelle derivaattoineen saadaan

$$C \left( k^2 - \frac{\pi^2}{L^2} \right) \sin \frac{\pi x}{L} + D \left( k^2 - \frac{\pi^2}{L^2} \right) \cos \frac{\pi x}{L} = -k^2 v_0 \sin \frac{\pi x}{L}. \quad (2.26)$$

Yhtälön (2.26) on oltava voimassa kaikilla  $x$ :n arvoilla. Ratkaistaan sinin ja cosinin kertoimet vertailemalla niiden kertoimia yhtälön molemmin puolin. Näin ollen

- $D = 0$
- $C = -\frac{-k^2 v_0}{k^2 - \frac{\pi^2}{L^2}}$

Taipuman lopullinen yhtälö on muotoa  $v = v_h + v_p$ . Sijoittamalla kertoimet  $C$  ja  $D$  yksityisratkaisuun ja toteamalla, että reunaehdot  $v(0) = 0$  ja  $v(L) = 0$  antavat  $A = 0$  ja  $B = 0$ , saadaan taipuman yhtälö muotoon

$$v(x) = -\frac{-k^2 v_0}{k^2 - \frac{\pi^2}{L^2}} \sin \frac{\pi x}{L}. \quad (2.27)$$

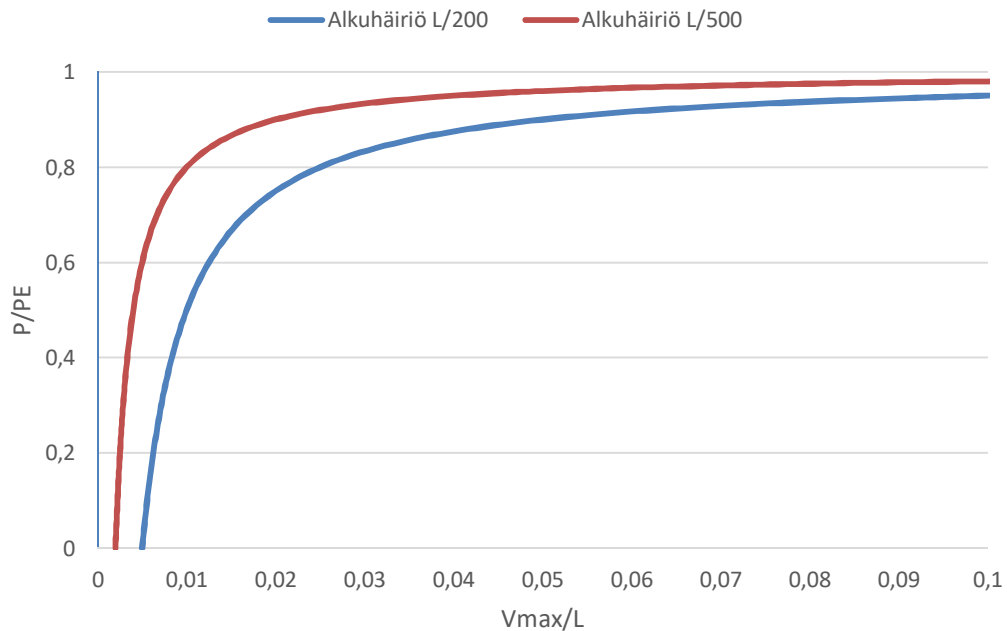
Lopullinen taipuma saadaan summaamalla yhteen alkutaipuma (alkuhäiriö) sekä lisätai-  
puma johtuen voimasta P

$$v_{total}(x) = v_i + v = v_0 \sin \frac{\pi x}{L} \left( 1 - \frac{k^2}{k^2 - \frac{\pi^2}{L^2}} \right). \quad (2.28)$$

Lopulta kaavasta (2.28) voidaan laskea taipuman suuruus keskellä sauvaa

$$v_{max} = v_{total} \left( \frac{L}{2} \right) = v_0 \left( 1 - \frac{k^2}{k^2 - \frac{\pi^2}{L^2}} \right) = v_0 \left( 1 - \frac{\frac{P}{P_E}}{\frac{P}{P_E} - 1} \right). \quad (2.29)$$

Havainnollistetaan alkuhäiriön vaikutusta piirtämällä kuvaaja sauvan keskipisteen siirty-  
män ja kuormituksen suhteesta. Annetaan sauvalle alkuhäiriö L/200, joka perustuu läh-  
teen [14] taulukkoon 5.1 sekä vertailun vuoksi myös L/500.



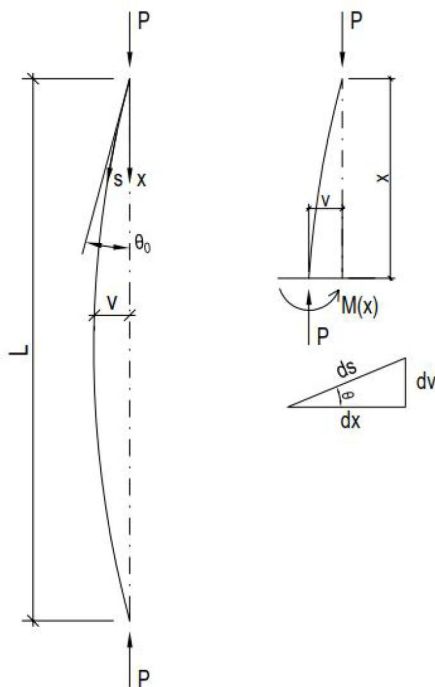
**Kuva 2.9** Alkuhäiriön vaikutus kriittiseen kuormaan, kun häiriö on sinimuotoinen puolialto.

Kuvassa 2.9 pystyakselilla on puristavan kuorman suhde ideaalisen sauvan kriittiseen kuormaan, joka on määritetty aiemmin kaavassa (2.18) ja vaak akselilla on keskipisteen siirtymä. Kuvasta voidaan selkeästi nähdä, että mitä suurempi alkuhäiriö on, sitä ennem-  
min sauva saavuttaa kriittisen kuorman ja nurjahtaa. Tämä korostaa, miten olennainen

vaikutus epäkeskeisellä kuormalla sekä sauvan alkukaarevuudella on nurjahduskuorman arvoon. Mainittakoon myös, että kuvan 2.9 vaaka-akselin oikea pää ei enää ole pienten siirtymien teorian alueella, mutta havainnollistaa kuitenkin hyvin alkuhäiriön vaikutusta.

### 2.2.3 Suurten siirtymien teoria

Seuraavassa tutkitaan samaa niveltuettua sauvaa, kun edellisissä esimerkeissä. Edellisistä poiketen, nyt ei tehdä oletusta pienten siirtymien olemassaolosta. Näin ollen kappaleessa 2.2 tehdyt oletukset eivät ole voimassa. Kuitenkin edelleen oletuksena on, että pilari on täydellisen suora, kuorma on keskeinen ja materiaali on kimmoinen. Nurjahduksen hetkellä tasapainopolulla on bifurkaatiopiste ja tasapaino haetaan kuvan 2.10 mukaisesta pilarin taipuneesta muodosta.



**Kuva 2.10** Kimmoisen pilarin nurjahtanut muoto. [5]

Ylläolevan vapaakappalekuvan mukaan siirtymä missä tahansa pilarin kohdassa on  $v$  ja kiertymä pilarin päässä on  $\theta_0$ . Koordinaatti  $s$  kulkee pitkin pilarin taipunutta muotoa. Edellisten tapaan missä tahansa pilarin kohdalla momentti on

$$M(x) = Pv = -EI\kappa = -EI \frac{1}{\rho} = -EI \frac{d\theta}{ds}, \quad (2.30)$$

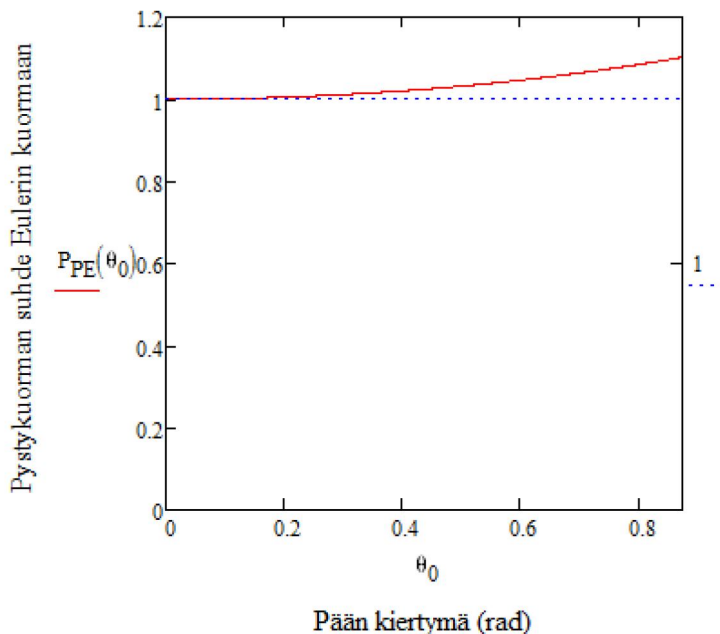
missä  $\rho$  on kaarevuussäde ja suhde  $1/\rho$  on kappaleessa 2.2 määritetty kaarevuus  $\kappa$ . Kaarevuus on kulmanmuutoksen suhde kuljettuun kaaren pituuteen, jota käytetään kaavan (2.30) viimeisessä yhtäläisyysmerkinnässä [26]. Käyttäen kaavan (2.22) merkintää sekä kuvasta 2.10 saatavaa yhteyttä  $\sin(\theta) = dv/ds$  sekä differentioimalla kerran saadaan yhtälö (2.30) muotoon

$$\frac{d^2\theta}{ds^2} + k^2 \sin\theta = 0. \quad (2.31)$$

Differentiaaliyhtälö (2.31) johtaa lopulta yhtälöön (2.32). Johtaminen on tehty esimerkiksi lähteessä [20] eikä sitä tehdä tässä työssä

$$\frac{kL}{2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\alpha}{\sqrt{1 - (\sin\frac{\theta_0}{2})^2 (\sin\alpha)^2}}. \quad (2.32)$$

Ratkaistaan yllä olevasta kaavasta suhde  $P/P_E$  sauvan pään kiertymän funktiona. Kaavassa oleva integraali on muotoaan täydellisen ensimmäisen lajin elliptinen integraali, ja se voidaan ratkaista matemaattisilla tietokoneohjelmilla (esim. Mathcad) [5]. Kuvassa 2.11 on punaisella puristetun kuorman suhde Eulerin kuormaan sauvan pään kiertymän funktiona. Sinisellä pisteiviivalla on merkitty edellä mainitun kuormien suhdetta arvolla 1.

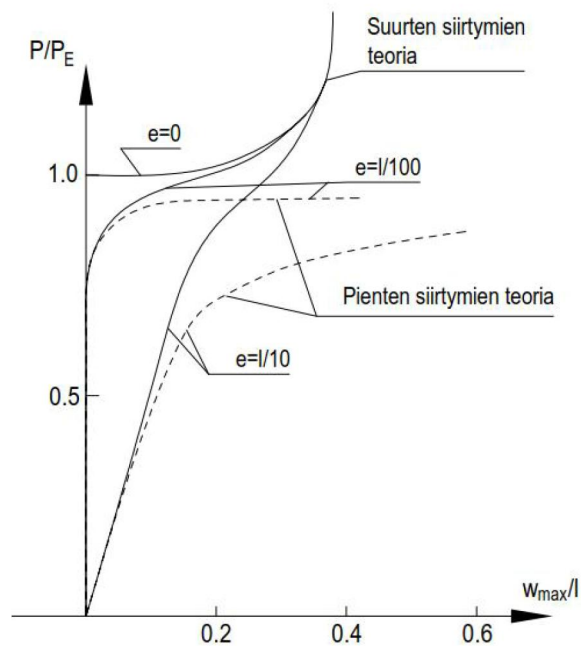


**Kuva 2.11** Nivelpäisen sauvan nurjahduksen jälkeinen käyttäytyminen.

Kuvan 2.11 perusteella niveltuetun sauvan käyttäytyminen nurjahduksen jälkeen on hieinan lujittuvaa, mutta sauvan kyky ottaa lisäkuormitusta vastaan alkaa vasta melko suurilla kiertymän arvoilla (noin 15-20 astetta). On huomattavaa, että edellinen esimerkki on varsin akateeminen, sillä todellinen teräsrakenne sisältää alkuhäiriön, kuorman epäkeskisyyden sekä alkaa plastisoitumaan kiertymän kasvaessa riittävän suureksi. Esimerkin tarkoituksena on kuitenkin havainnollistaa, että suurten siirtymien teoria tulee usein kyseen silloin, kun halutaan tietää rakenteen käyttäytyminen nurjahduksen jälkeen tai on ennustettavissa suuria siirtymiä ennen stabiilisuuden menetystä. Lähteessä [2] on laskettu



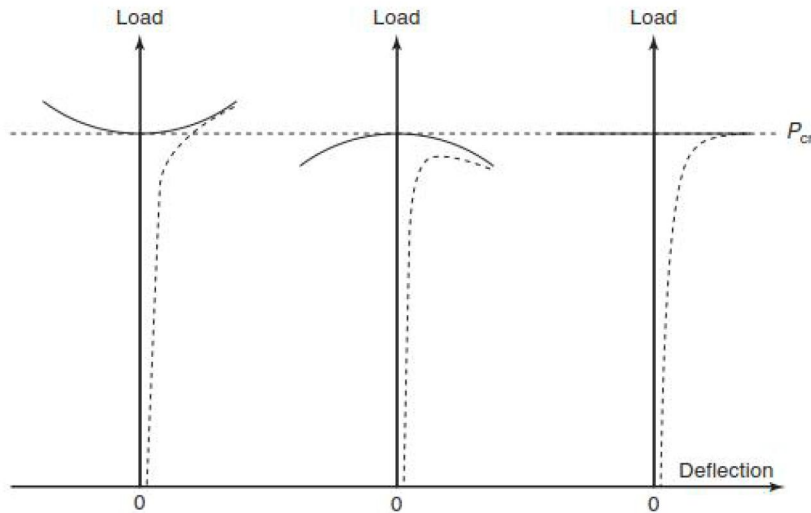
useita edellisen mukaisia tehtäviä. Laskelmissa on otettu huomioon myös alkuhäiriön vaikutus ja kuvaan 2.12 on piirretty näiden tasapainopolkuja.



**Kuva 2.12** Suurten ja pienten siirtymien teorioiden tasapainopolkuja. [2] (muokattu)

Kuvassa 2.12  $e$  kuvaa alkuhäiriön suuruutta,  $l$  on sauvan pituus, vaaka-akselilla on keskipisteen siirtymä suhteessa sauvan pituuteen ja pystyakselilla on kuorman suhde Eulerin nurjahduskuormaan.

Kuten on jo mainittu, suurten siirtymien teoria tulee usein kyseeseen sauvarakenteita tutkittaessa silloin, kun halutaan tietää rakenteen käyttäytyminen nurjahduksen jälkeen, on ennustettavissa suuria siirtymiä ennen stabiilisuuden menetystä tai halutaan selvittää rakenteen todellinen kantokyky. Ensimmäisenä mainittu voi joissain tapauksissa olla kiinnostava, sillä rakenne voi käyttäytyä myös päinvastoin kuin kuvassa 2.11 ja on näin ollen nurjahduksen jälkeen hyvin vaarallinen rakenne. Lisäksi tämän tyyppinen rakenne on herkkä alkuhäiriöille. Tätä havainnollistetaan kuvan 2.13 eri tyyppisillä tasapainopoluilla.



**Kuva 2.13** Erilaisia rakenteen käyttäytymisiä nurjahduksen jälkeen. [5]

Kuvassa 2.13 katkoviivalla kuvataan häirityn systeemin tasapainopolkua ja ehjällä viivalla häiriötöntä rakennetta. Oikeanpuoleisin tasapainopolku on juuri edellä johdetun nivelpäisen sauvan tasapainopolku, vaikka sauvan todettiin olevan hieman lujittuva nurjahduksen jälkeen. Keskellä oleva tasapainopolku kuvaa häiriöherkkiä rakenteita, esimerkiksi kuvan 2.1 yhteydessä mainittua puristettua (kuori)sylinteriä tai sauvaa mikäli nurjahdus tapahtuu plastisella alueella. Vasemmanpuoleisin tasapainopolku on tyypillinen esimerkiksi taivutetuille levyrakenteille. Käytyjen esimerkkien perusteella voidaan todeta, että rakenteen tapa menettää stabiilisuutensa riippuu hyvin paljon tutkittavasta rakenteesta itsestään. Tämän työn tutkimuksen kohteena oleva ristikon puristetun paarten, ja nimenomaan tutkittaessa sen nurjahdusta tasosta poispäin, voidaan lähtökohtaisesti mieltää kuuluvan kuvan 2.13 oikeanpuoleiseen kategoriaan.

Teräsrakenteita tutkittaessa on ymmärrettävä, että materiaali plastisoituu jossain vaiheessa, kun jännitykset kasvavat riittävän suuriksi. Näin ollen todellista rajakuormaa ei saavuteta, vaikka käytössä olisi suurten siirtymien teoria ja rakenteelle annettaisiin jokin alkuhäiriö, koska näin tutkittaessa materiaalin jännitykset kasvavat kasvamistaan, eikä saavuta myötörajaa lainkaan. Määrittääkseen rakenteen todellisen rajakuorman esimerkiksi FEM-ohjelmiston avulla, tulee ottaa huomioon alkuhäiriöt, suuret siirtymät ja plastisoitumisen vaikutus. Seuraavassa kappaleessa käydään lyhyesti läpi kimmotonta nurjahdusta.

## 2.2.4 Kimmoton nurjahdus

Kaikki edellä olevat esimerkit ovat perustuneet oletukseen, että materiaali noudattaa Hookeen lakia. Hoikan teräspilarin tai -sauvan nurjahdusta tutkittaessa usein näin onkin. Joissain tapauksissa, esimerkiksi lyhyen pilarin nurjahduksessa stabiilisuuden menetys voi tapahtua myötörajaa suuremmilla jännityksen arvoilla, jolloin materiaalin plastisoituminen tulee ottaa huomioon. Plastisoitumisen huomioon ottaminen tulee kyseeseen myös,

kun halutaan tutkia rakenteen todellista käyttäytymistä kantokykyä vastaavaan kuormaan asti.

Kirjallisuudessa on esillä yleisesti kolme erilaista teoriaa, tangenttimoduuliteoria, kaksoismoduuliteoria sekä Shanleyn teoria, joiden avulla voidaan käsitellä yksittäisen sauvan kimmotonta nurjahdusta. Teorioiden pohjalta voidaan luoda analyttiset kaavat sauvan kimmottomalle nurjahdukselle. Seuraavassa käsitellään lyhyesti tangenttimoduuli- ja kaksoismoduuliteoriaa ja esitellään pääperiaatteet. Shanleyn teoria perustuu samannimisen henkilön julkaisuun, jonka mukaan tangenttimoduuliteoria antaa suurimman jännityksen, jolla häiriötön sauva pysyy vielä suorana [19]. Lisäksi teorian mukaan kriittinen kuorma ei voi koskaan saavuttaa kaksoismoduuliteorian mukaista arvoa [5].

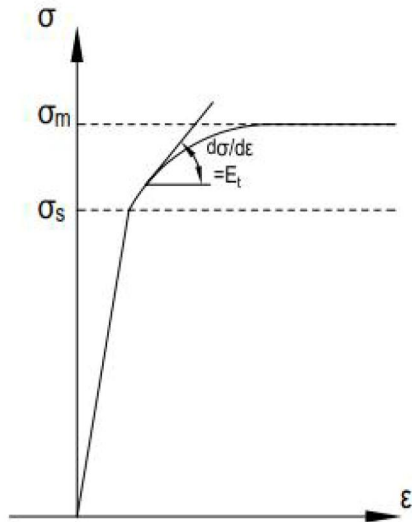
Tangenttimoduuliteoriassa oletuksena on, että aksiaalinen kuorma kasvaa nurjahduksen tapahtuessa siten, että keskimääräisen puristusjännityksen kasvu on suurempi kuin taivutuksesta johtuvan vetojännityksen kasvu kuperalla puolella. Näin ollen puristusjännitys kasvaa kaikissa sauvan pisteissä ja tangenttimoduuli  $E_t$  pätee koko poikkileikkauksessa [20]. Kriittinen jännitys on tällöin

$$\sigma_{cr,t} = \frac{\pi^2 E_t}{\left(\frac{L_{cr}}{i}\right)^2}, \quad (2.33)$$

jossa  $L_{cr}$  on nurjahduspituus ja  $i$  on jäyhyysäde, joka määritellään neliömomentin ja pinta-alan mukaan

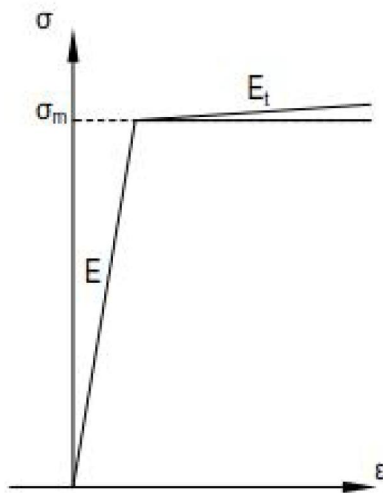
$$i = \sqrt{\frac{I}{A}}. \quad (2.34)$$

Huomattavaa on, että kaavasta (2.33) kriittistä jännitystä ei voida enää suoraan laskea, sillä tangenttimoduuli on jännityksen funktio. Lisäksi todettakoon, että tangenttimoduuliteorian  $(\sigma, \lambda)$ -kuvaaja riippuu materiaalin ominaisuuksista, mutta ei poikkileikkauksen muodosta [19]. Teorian perustana olevaa materiaalmallia on esitetty kuvassa 2.14.



**Kuva 2.14** Jännitys-venymä kuvaaja.

Kuvassa 2.14  $\sigma_s$  on materiaalin suhteellisuusraja ja  $\sigma_m$  myötöraja. Käytettävä materiaali-malli on oltava siis tiedossa. Kirjallisuudessa on esitetty erilaisia materiaalimalleja esimerkiksi alumiinille [5]. Teräsrakenteita analysoitaessa usein on käytössä kuvan 2.15 mukainen bi-lineaarinen materiaalimalli, jossa ei ole kuvan 2.14 mukaista pyöristettyä aluetta suhteellisuus- ja myötörajän välissä vaan materiaalille annetaan vain myötöraja jonka jälkeen materiaali noudattaa tangenttimoduulia. Tangenttimoduuli voi olla joko nolla, tai sitten hieman nouseva, jolloin materiaali on myötölujittuvaa.



**Kuva 2.15** Bilineaarinen materiaalimalli.

Kaksoismoduuliteoria esiteltiin tangenttimoduuliteorian jälkeen, koska huolimatta tangenttimoduuliteorian yksinkertaisuudesta soveltaa ja hyvistä tuloksista verraten kokeellisiin tuloksiin, sen teoreettinen pohja on epäkorrekti [5]. Kaksoismoduuliteorian mukaan sauvan nurjahtaessa aksiaalinen voima ei kasva. Tällöin sauvan kuperaan (vähemmän puristetun) puolen jännitykset palautuvat kimmoisesti eli noudattaen kimmomoduulia  $E$ .

Tähän perustuen tangenttimoduuliteoriaan perustuva kriittinen kuorma on aina pienempi kuin kaksoismoduuliteorian mukainen kriittinen kuorma. Lisäksi todellisen sauvan voidaan ajatella toimivan enemmän kaksoismoduuliteorian mukaisesti, jolloin tangenttimoduuliteorian mukainen kriittinen jännitys on alaraja-arvio [5]. Kaksoismoduuliteorian mukainen kriittinen jännitys on

$$\sigma_{cr,r} = \frac{\pi^2 \bar{E}}{\left(\frac{L_{cr}}{i}\right)^2}, \quad (2.35)$$

jossa  $\bar{E}$  on redusoitu moduuli, joka riippuu niin materiaalin jännitys-venymä-kuvaajasta kuin poikkileikkauksen muodosta

$$\bar{E} = \frac{EI_1 + E_t I_2}{I}. \quad (2.36)$$

Kaavassa (2.36)  $I_1$  on vedetyn ja  $I_2$  puristetun puolen neliömomentti poikkileikkauksen neutraaliakselin suhteen.

Havainnollistetaan edellä mainittujen teorioiden tuloksia kuvan 2.16 mukaisella  $(\sigma, \lambda)$ -kuvaajalla. Tangentti- ja kaksoismoduuliteorioihin perustuvissa käyrissä teräksen materiaalin on oletettu myötörajan lähetyvillä noudattavan yhtälöä

$$E_t = E \left( 1 - \frac{(\sigma - \sigma_s)^2}{(\sigma_m - \sigma_s)^2} \right), \quad (2.37)$$

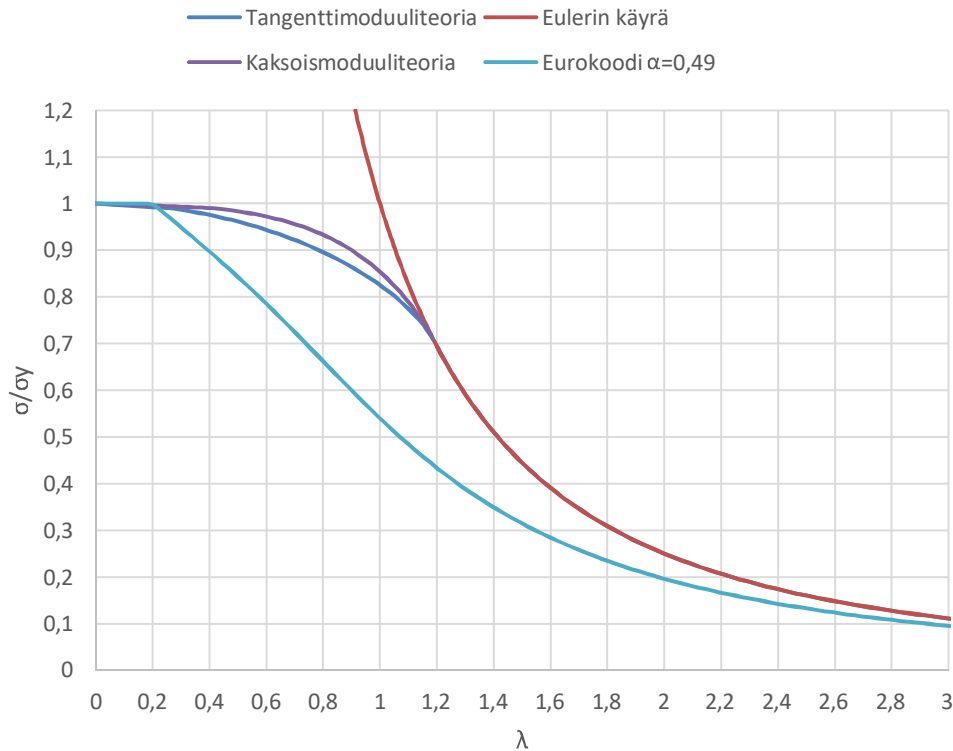
kun  $\sigma_s < \sigma < \sigma_m$ , jossa suhteellisuusraja  $\sigma_s = 0,7\sigma_m$ . Pystyakselilla on jännityksen suhde myötörajaan ja vaaka-akselilla hoikkuus, joka määritellään seuraavasti

$$\bar{\lambda} = \frac{1}{\pi} \frac{L_{cr}}{i} \sqrt{\frac{\sigma_y}{E}}. \quad (2.38)$$

Kuvassa 2.16 on lisäksi Eulerin mukainen käyrä, joka pohjautuu kaavaan (2.18) sekä eurokoodin mukainen nurjahduskäyrä käyttäen epätarkkuustekijää  $\alpha = 0,49$ , jota tulee normin mukaan käyttää umpiprofiileille [14]. Kaavassa (2.39) on esitetty kyseinen eurokoodin kaava, missä epätarkkuustekijä otetaan huomioon

$$\Phi = 0,5[1 + \alpha(\bar{\lambda} - 0,2) + \bar{\lambda}^2]. \quad (2.39)$$

Yhtälö (2.39) sisältää hoikkuustermin ja se sisällytetään mitoituksessa yhtälöön, joka redusoi poikkileikkauksen kestävyyttä huomioiden rakenteen nurjahduksen. Epätarkkuustekijän valinta alla olevaan kuvaajaan siitä syystä, että lähteessä [5] esitellään varsin perusteellisesti esimerkkilaskelma, jossa on käytössä neliöpoikkileikkaus.



**Kuva 2.16**  $(\sigma, \lambda)$ -kuvaajia.

Kuvasta 2.16 nähdään ensimmäisenä, että tangenttimoduuliteoria antaa pienempiä kriittisen kuorman arvoja kuin kaksoismoduuliteoria, mikä todettiin edellä. Kuvaajasta ilmenee lisäksi, että Eulerin käyrä luonnollisesti jatkaa nousuaan myötörajan saavuttamisen jälkeenkin eikä näin ollen ota materiaalin plastisoitumista huomioon.

Kuvaajassa näytetään myös eurokoodin mukainen nurjahduskäyrä, kun epätarkkuustekijä on  $\alpha = 0,49$ . On selkeästi nähtävissä, että normin käyrä antaa pienempiä kriittisen jännityksen arvoja kuin häiriöttömät rakenteet. Tämä johtuu pääosin siitä, että eurokoodin nurjahduskäyrät ottavat huomioon sekä geometrian alkuhäiriön, että teräsojan valmistuksesta johtuvat alkujännitystilat, jotka vaihtelevat profiilin mukaan. Alkujännitystilat syntyvät, kun valmistuksen jälkeen poikkileikkauksessa on epätasainen lämpötila. Esimerkkinä I-profiili, jonka laippojen kärjet jäähtyvät nopeimmin ja muuttuvat muuta poikkileikkausta jäykemmiksi, kun muu osa poikkileikkauksesta on vielä kuuma ja muokattavassa tilassa. Profiilin keskiosakin jäähtyy lopulta ja pyrkii supistumaan, mutta jo jäähtyneet laippojen kärjet vastustavat supistumista, joka aiheuttaa poikkileikkaukseen jännityksiä [19]. Näin ollen kuorman kasvaessa riittävän suureksi, osa poikkileikkauksesta plastisoituu ennemmin.

## 2.3 Likimääräisiä ratkaisumenetelmiä

Kaikki edellä esitetyt ratkaisut ovat olleet niin sanottuja tasapainomenetelmiä, joista on pyritty ratkaisemaan kriittinen kuorma tai taipuman lauseke suoraan käyttäen reunaeh-toja. Nämä ratkaisut ovat olleet käytetyn teorian puitteissa tarkkoja. Tämän tyyppinen ratkaiseminen on kuitenkin mahdollista vain geometrialtaan yksinkertaisille rakenteille. Siitä huolimatta näillä yksinkertaisilla rakenteilla (niveltuettu sauva) voidaan hyvin ha-vainnollistaa eri ilmiöiden vaikutusta sekä antaa teoreettista perustaa nurjahdusilmiölle. Rakenteet todellisuudessa ovat kuitenkin monimutkaisia ja koostuvat useista rakenne-osista. Pystyäkseen kuvaamaan koko rakenteen yhteistoimintaa, tarvitaan muita keinoja.

Yleisin käytössä oleva menetelmä on elementtimenetelmä, josta käytetään myös lyhen-nettä FEM (Finite Element Method) tai FEA (Finite Element Analysis). Elementtimene-telmä perustuu potentiaalienergian minimin periaatteeseen, jota käydään lyhyesti läpi seuraavassa kappaleessa. Tämän jälkeen käydään yksinkertainen nurjahdusanalyysi sau-varakenteelle linearisoidulla elementtimenetelmällä sekä tuodaan esiin linearisoidun ja epälineaarisen elementtimenetelmän välisiä eroja.

### 2.3.1 Energiamenetelmä

Energiamenetelmän perusajatuksena on, että kappaleeseen kohdistuvan ulkoisen voiman tekemä työ on yhtä suuri kuin kappaleen muodonmuutosenergia, eli kimmoenergia. Kimmoenergian ja ulkoisten voimien tekemän työn summaa kutsutaan kokonaispotentiaa-lienergiaksi ja sitä merkitään

$$\Pi = U + V, \quad (2.40)$$

jossa  $U$  on kimmoenergia ja  $V$  ulkoisten voimien tekemä työ. Aksiaali- ja taivutusjäyk-kyden omaavan sauvan kimmoenergian lauseke on johdettu useissa lähteissä ja se on muotoa

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L EA \varepsilon^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L EI \kappa^2 dx, \quad (2.41)$$

jossa  $A$  on sauvan poikkipinta-ala,  $\varepsilon$  venymä,  $I$  neliömomentti sen akselin suhteen, minkä ympäri rakenne nurjahtaa,  $\kappa$  kaarevuus ja  $L$  sauvan pituus [19]. Kuvan 2.10 mukaisen sauvan ulkoisen kuormituksen tekemä työ on tunnetusti

$$V = Pu(L), \quad (2.42)$$

jossa  $u$  on sauvan pituussuuntainen siirtymä.

Potentiaalienergian minimin periaate perustuu stationäärisyyslauseeseen:

*”For conservative systems, of all the kinematically admissible displacement fields, those corresponding to equilibrium extremized the total potential energy. If the extremum condition is a minimum, the equilibrium is stable.” [3]*

Lauseen mukaan konservatiivisen systeemin kaikista kinemaattisesti käyvistä siirtymäkentistä ne, jotka vastaavat tasapainoa, tuottavat kokonaispotentiaalienergialle ääriarvon. Jos ääriarvo on minimi, tasapaino on stabiili. Kinemaattisesti käypä siirtymäkenttä toteuttaa oleelliset reunaehdot, jotka yleensä muodostuvat kappaleen kiinnityksestä [29]. Lauseen perusteella voidaan kirjoittaa

$$\delta\Pi = 0. \quad (2.43)$$

Tähän perustuu yleinen elementtimenetelmä. Siirtymämenetelmään perustuvassa elementtimenetelmässä kokonaispotentiaalienergia lausutaan solmusiirtymien avulla ja niille haetaan arvot siten, että  $\Pi$  tulee mahdollisimman pieneksi. Siirtymäkenttä elementin alueella lasketaan interpolaatiofunktioiden (muotofunktioiden) avulla. Elementtijaon on oltava riittävän tiheä, jotta siirtymäsuureet elementtisolmujen välillä ovat riittävän tarkkoja.

Stabiilisuuden menetyksen hetkellä potentiaalienergian lausekkeen toinen variaatio lakkaa olemasta positiivisesti definiitti, mikä vaatii, että lausekkeen  $\delta^2\Pi$  ensimmäinen variaatio on nolla [2]. Näin ollen kriittinen kuorma voidaan ratkaista yhtälöstä

$$\delta(\delta^2\Pi) = \delta\left(\frac{1}{2}\int_0^L (EI(v'')^2 - P(v')^2)dx\right) = 0, \quad (2.44)$$

joka tunnetaan yleisesti Trefftz’n ehtona. Kaavassa (2.44) ehtoa on sovellettu aksiaali- ja taiputusjäykkyyden omaavalle sauvalle. Trefftz’n ehto on johdettu muun muassa lähteissä [2] ja [19]. Huomion arvoista on, että kaavassa (2.44) merkintä  $\delta(\delta^2\Pi)$  ei tarkoita potentiaalienergian kolmatta variaatiota, vaan sisempi variaatiomerkinä kuvaa siirtymäkentän variaatiota.

Ratkaistaan saman niveltuetun sauvan kriittinen kuorma käyttäen energiamenetelmää. Annetaan taipumalle kaavan (2.19) mukainen estimaatti, ja todetaan, että se toteuttaa oleelliset reunaehdot  $v(0) = 0$  ja  $v(L) = 0$ . Derivoidaan estimaatti ja ilmoitetaan se interpolaatiofunktion  $N$  avulla, jolloin saadaan yhtälöt

- $v(x) = \sin\frac{\pi x}{L} C = \mathbf{N} \mathbf{q}$
- $v'(x) = \frac{\pi}{L} \cos\frac{\pi x}{L} C = \mathbf{N}' \mathbf{q}$
- $v''(x) = -\frac{\pi^2}{L^2} \sin\frac{\pi x}{L} C = \mathbf{N}'' \mathbf{q}.$



Yhtälöissä muotofunktion ja siirtymän termit on lihavoitu, koska yleisemmässä tapauksessa ne voivat sisältää useampia termejä ja olisivat näin ollen vektorisuureita. Tässä esimerkissä ne ovat skalaarisuureita, mutta käytetään lihavoitua merkintää, koska tällöin seuraavassa esiin tulevat jäykkyysmatriisin ja geometrisen jäykkyysmatriisin yhtälöt ovat verrattavissa kirjallisuuslähteisiin. Sijoittamalla derivaatat yhtälön (2.44) integraalin ensimmäiseen ja toiseen osioon saadaan

- $\int_0^L (EI(v'')^2) dx = \mathbf{q}^T (EI \int_0^L (\mathbf{N}'')^T \mathbf{N}'' dx) \mathbf{q} = \mathbf{q}^T \mathbf{K} \mathbf{q}$
- $\int_0^L (P(v')^2) dx = \mathbf{q}^T (P \int_0^L \mathbf{N}'^T \mathbf{N}' dx) \mathbf{q} = \mathbf{q}^T \mathbf{K}_g \mathbf{q}.$

Näin ollen saadaan yleisesti elementtimenetelmässä käytettävät kaavat jäykkyysmatriisille

$$\mathbf{K} = EI \int_0^L (\mathbf{N}'')^T \mathbf{N}'' dx \quad (2.45)$$

sekä geometriselle jäykkyysmatriisille

$$\mathbf{K}_g = P \int_0^L (\mathbf{N}')^T \mathbf{N}' dx. \quad (2.46)$$

Yllä esiteltyjä jäykkyysmatriiseja käytetään elementtimenetelmässä, johon palataan seuraavissa kappaleissa. Sijoittamalla laskentaesimerkin interpolaatiofunktiot edellä esitettyihin kaavoihin saadaan

- $\mathbf{K}_g = P \frac{\pi^2}{2L}$
- $\mathbf{K} = \frac{\pi^4 EI}{2L^3}.$

Sijoittamalla johdetut yhtälöt Trefftz 'in ehtoon saadaan

$$\delta \frac{1}{2} (\mathbf{q}^T (\mathbf{K} - \mathbf{K}_g) \mathbf{q}) = 0, \quad (2.47)$$

jossa geometrisen jäykkyysmatriisin etumerkillä on väliä. Näin esitettynä puristavan voiman etumerkki on positiivinen ja vedetyn negatiivinen. Kriittinen kuorma lasketaan yllä olevasta yhtälöstä asettamalla determinantti

$$\det(\mathbf{K} - \mathbf{K}_g) = 0. \quad (2.48)$$

Esimerkkitehtävässä termit ovat skalaareja ja näin ollen yhtälöstä tulee yksinkertainen ja siitä voidaan ratkaista kriittisen kuorman arvo

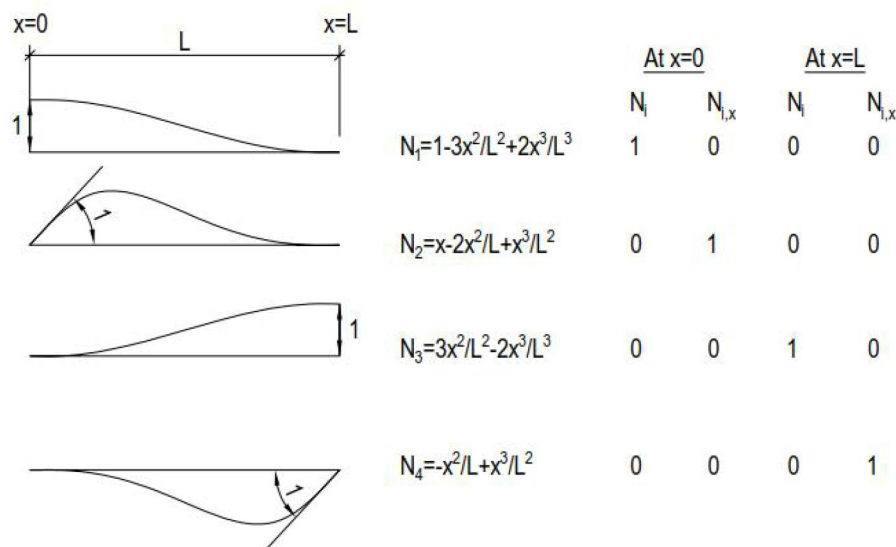
$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}. \quad (2.49)$$

Tulos on sama kuin kappaleessa 2.2.1 laskettu ideaalisauvan kriittinen kuorma. Tämä johtuu siitä, että käytetty taipuman estimaatti oli tarkka. [19]

### 2.3.2 Linearisoitu FEM-nurjahdusanalyysi

Alla olevat laskelmat esitetään käyttäen sauvaelementtiä, mutta samat periaatteet pätevät myös kuori- ja solidielementeille [4]. Arkisessa suunnittelutyössä esimerkiksi teräsrakenteisen hallin kokonaislaskentamalli koostuu sauvaelementeistä, josta saadaan riittäväällä tarkkuudella voimien jakautuminen eri rakenneosille. Tarkempaa analyysia tai geometriaa vaativissa kohteissa käytetään kuori- tai solidielementtejä. Tässä työssä on käytössä myös kuorielementit FEM-laskentaosuudessa, jotta esimerkiksi ristikon liitosjäykkyydet saadaan vastaamaan lähes todellista tilannetta.

Elementtimenetelmässä sauva jaetaan pienempiin osiin, elementteihin, joista muodostetaan jäykkyydsmatriisit. Käytettävät muotofunktiot riippuvat käytössä olevan elementin vapausasteiden määrästä. Tyypilliset kahden solmuvapausasteen palkkielementissä käytettävät muotofunktiot on esitetty kuvassa 2.17.



**Kuva 2.17** Tyypilliset muotofunktiot palkkielementille. [4] (muokattu)

Yleisen elementtimenetelmän perusyhtälö on tunnetusti

$$[K]\{q\} = \{R\}, \quad (2.50)$$

jossa  $[K]$  on koko rakenteen jäykkyyismatriisi,  $\{q\}$  on solmupisteiden siirtymävektori ja  $\{R\}$  on solmukuormitusvektori. Yhtälö perustuu potentiaalienergian minimin periaatteeseen, kuten edellisessä kappaleessa on esitelty. Kun jäykkyyismatriisi ja solmukuormitukset tunnetaan, yhtälöstä voidaan ratkaista siirtymät, joka on perinteinen menetelmä.

Ehdosta (2.47) seuraa lineaarinen yhtälöryhmä

$$[K - K_g]\{q\} = 0, \quad (2.51)$$

jolla on ei-triviaali ratkaisu, kun yhtälö (2.48) toteutuu [19]. Jäykkyyismatriisi ja geometrisen jäykkyyismatriisi muodostetaan jokaiselle elementille erikseen, jolloin muodostassa geometrista jäykkyyismatriisia, on sauvojen puristusvoimat oltava tiedossa. Toisin sanoen elementtimenetelmässä lasketaan ensin rakenneosien kuormitukset, jonka jälkeen muodostetaan geometriset jäykkyyismatriisit ja lasketaan kriittinen kuorma. FEM-ohjelmat antavat usein kriittisen kuormakertoimen  $a_{cr}$ . Yhtälö (2.51) on tällöin muotoa

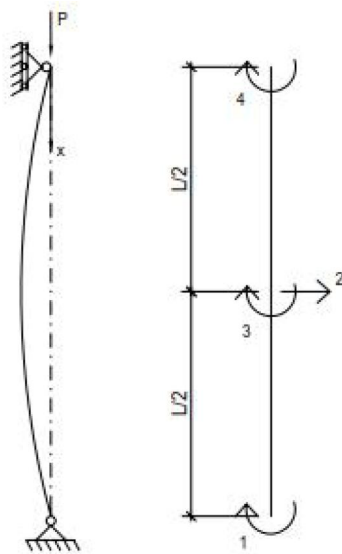
$$[K - a_{cr}K_g]\{q\} = 0, \quad (2.52)$$

joka on muodoltaan yleistetty ominaisarvotehtävä. Tässä tapauksessa  $K_g$ :n laskennassa käytetty voima on jokin referenssivoima  $P_{ref}$  siten, että  $P = a_{cr} * P_{ref}$ . Ominaisarvot ovat kriittisiä kuormituskertoimia ja ne ratkaistaan käyttäen yhtälöä (2.48). Tämän jälkeen rakenteen kriittinen kuorma saadaan kertomalla vaikuttava kuorma kriittisellä kertoimella. Nurjahduskuormaa vastaava nurjahdusmuoto saadaan ominisarvoa vastaavasta ominaismuodosta.

On erityisesti mainittava, että linearisoidulla elementtimenetelmällä suoritettu nurjahduslaskenta perustuu samoihin oletuksiin kuin kappaleen 2.2.1 ideaalisauvan laskenta. Kappaleen 2.2 esimerkkien perusteella voidaankin todeta, että linearisoidulla elementtimenetelmällä laskettuun nurjahduskuormaan tulee suhtautua hyvin kriittisesti. Siitäkin huolimatta linearisoitu nurjahduslaskenta on suosittu työkalu, koska se on hyvin nopea laskea nykyisillä tietokoneilla ja sen avulla voidaan laskea nurjahdusmuotoja eli saadaan selville, miten tutkittava rakenne on taipuvainen nurjahtamaan. LBA:sta saatavat nurjahdusmuodot ovat lähtökohtaisesti oikeita, sillä muoto on riippuvainen vain reunaehdoista. Tähän periaatteeseen nojaten, syöttämällä LBA:sta saadun nurjahduskuorman Eulerin kaavaan (2.18), laskemalla siitä nurjahduspituus  $L_{cr}$  ja tätä nurjahduspituutta käyttäen kriittisen kuorman laskeminen eurokoodin kaavoilla on perusteltua. Epätarkkuudet tulevat näin ollen mukaan eurokoodin epätarkkuustekijän kautta. Toinen vaihtoehto on suorittaa niin sanottu GMNIA (Geometrically and Materially Nonlinear Analysis with Imperfections). Tällöin jo FEM laskennassa pyritään ottamaan kaikki epälineaarisuudet sekä häiriöt mukaan laskentaan ja rakennetta kuormitetaan sen kantokykyynsä asti. Alkuhäiriön muotona käytetään usein LBA:sta saatua ensimmäistä nurjahdusmuotoa, koska tähän

muotoon rakenne on taipuvainen nurjautamaan. Nurjahdusmuodon amplitudina tulee käyttää eurokoodin mukaisia arvoja.

Kuten alussa on mainittu, elementtimenetelmässä rakenne jaetaan pienempiin osiin, elementteihin. Yksittäisten elementtien matriisit kootaan sijoittelusummausperiaatteella yhteen ja ratkaistaan kriittinen kuormitus yhtälöstä (2.48). Kirjallisuudessa on esitetty geometrisia ja tavallisia jäykkyyismatriiseja eri määrän vapausasteita omaaville sauvoille, joita voidaan suoraan käyttää laskettaessa yksinkertaista tehtävää. Lasketaan niveltuetun sauvan nurjahduskuorma elementtimenetelmällä käyttäen kahta elementtiä kuvan 2.18 mukaisesti.



**Kuva 2.18** Niveltuettu sauva jaettuna kahteen elementtiin.

Kuvan 2.18 mukaan sauvalla on neljä vapausastetta. Kahden solmuvapausasteen palkkielementin jäykkyyismatriisi on

$$\mathbf{k}_e = \frac{EI}{l_e^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l_e & -12 & 6l_e \\ 6l_e & 4l_e^2 & -6l_e & 2l_e^2 \\ -12 & -6l_e & 12 & -6l_e \\ 6l_e & 2l_e^2 & -6l_e & 4l_e^2 \end{bmatrix}, \quad (2.53)$$

jossa  $l_e$  on elementin pituus [28]. Geometrinen jäykkyyismatriisi on muotoa

$$\mathbf{k}_g = \frac{P}{30l_e} \begin{bmatrix} 36 & 3l_e & -36 & 3l_e \\ 3l_e & 4l_e^2 & -3l_e & -l_e^2 \\ -36 & -3l_e & 36 & -3l_e \\ 3l_e & -l_e^2 & -3l_e & 4l_e^2 \end{bmatrix} [19]. \quad (2.54)$$

Laskemalla esimerkin molemmille elementeille jäykkyysmatriisit ja sijoittelusummausperiaatteella yhdistämällä ne yhteen jäykkyysmatriisiin ja geometriseen jäykkyysmatriisiin, voidaan kriittinen kuorma laskea ehdosta (2.48). Nurjahduskuorman arvo käytettäessä kahta elementtiä on

$$P_{cr,LBA,2} = \frac{1,0075\pi^2 EI}{L^2}, \quad (2.55)$$

joka on varsin lähellä tarkkaa tulosta (0,75% suurempi). Vertailun vuoksi, jos käytettäisiin vain yhtä elementtiä, tulos olisi

$$P_{cr,LBA,1} = \frac{1,2159\pi^2 EI}{L^2}, \quad (2.56)$$

joka on jo noin 21,6 % suurempi kuin tarkka arvo. Tämä esimerkki on varsin karkea, mutta havainnollistaa kuitenkin ilmiötä. On siis syytä kiinnittää huomiota elementtien lukumäärään laskettaessa nurjahdusanalyysia etenkin palkkielementeillä, sillä usein FEM-ohjelmissa oletuksena on, että yhtä mallinnettua sauvaa kohden on yksi elementti. Tietokoneohjelmia käytettäessä voi helposti esimerkiksi kokeilemalla selvittää, mikä on tarvittava elementtien määrä. Tämä voidaan tehdä lisäämällä elementtien lukumäärää kunnes kriittisen kuorman arvo ei enää merkittävästi muutu. LBA:n suorittaminen tietokoneavusteisesti on nopeaa.

### 2.3.3 Epälineaarinen FEM-analyysi

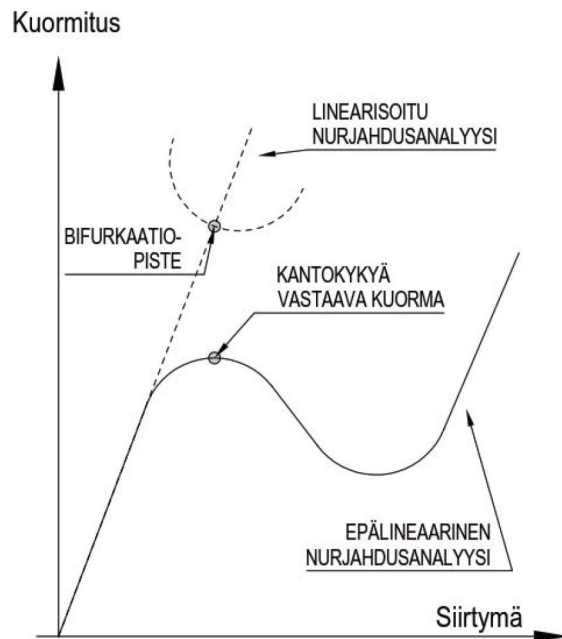
Epälineaarisuutta voi rakenteessa esiintyä pääsääntöisesti kolmessa muodossa. Epälineaarisuus voi olla luonteeltaan geometrista, jolloin kuormitukset aiheuttavat rakenteeseen niin suuria siirtymiä, että kuormituksen ja siirtymien yhteys ei ole enää riittävän lineaarinen. Materiaalinen epälineaarisuus on helposti mielleltävissä teräsrakenteissa materiaalin plastisoitumiseen. Kolmantena voi esiintyä reunaehtoihin liittyvää epälineaarisuutta, joka voi johtua esimerkiksi siitä, että rakenneosan tukeutuminen ympäristöönsä on riippuvainen kuormituksen suuruudesta, jolloin puhutaan ns. kontaktiongelma. Edellä esitelty lineaarinen elementtimenetelmä ja ominaisarvoanalyysi perustuvat pienten siirtymien teoriaan ja tasapainopolun bifurkaatiopisteen olemassaoloon. [27]

Epälineaarisuudet voi ottaa laskentaan mukaan joko yksi tai kaikki kerrallaan. Yleisesti on olemassa viisi epälineaarista analyysityyppiä, jotka myös eurokoodi tuntee:

- GNA (Geometrically nonlinear analysis), jossa otetaan huomioon suurten siirtymien teoria ja niiden vaikutus rakenteen rasitukseen. Analyysissa on käytössä kimmoinen materiaalmalli, ja rakenteen oletetaan olevan täysin häiriötön.
- MNA (Materially nonlinear analysis), joka perustuu pienten siirtymien teoriaan, mutta materiaali käyttäytyy epälineaarisesti (plastisoituminen).

- GMNA (Geometrically and materially nonlinear analysis), jossa käytetään suurten siirtymien teoriaa ja otetaan huomioon materiaalin epälineaarisuus, mutta rakenteen oletetaan olevan häiriötön.
- GNIA (Geometrically nonlinear elastic analysis with imperfection included), joka on saman tyyppinen analyysi kuin GNA, mutta rakenteelle annetaan häiriö kuormituksen alussa.
- GMNIA (Geometrically and materially nonlinear analysis with imperfection included) on analyysi, jossa otetaan huomioon suurten siirtymien teoria, materiaalin epälineaarisuus (plastisoituminen) sekä rakenteen epätarkkuudet. Epätarkkuuksiin voi sisältyä esimerkiksi alkutaipuman lisäksi myös jäännösjännitykset. [16]

Epälineaarinen nurjahdusanalyysi poikkeaa periaatteiltaan täysin linearisoidusta analyysistä. Nurjahdusanalyysi jaetaan kahteen eri tyyppiin: bifurkaatio- sekä polunseuranta-tyyppinen nurjahdus [20]. Kuten edellä on jo useasti todettu, linearisoitu nurjahdusanalyysi antaa kriittiselle kuormalle yläraja-arvion eikä sitä luonnollisesti tule käyttää suoraan tutkittavan rakenteen kestävyytensä. Kuvassa 2.19 on havainnollistettu tyyppillisen läpilyöntitehtävän tasapainopolun avulla näiden kahden analyysin eroja.



**Kuva 2.19** Linearisoitu vs. epälineaarinen nurjahdusanalyysi.

Kuvasta 2.19 on hyvin nähtävissä näiden analyysien ero. Epälineaarissa analyysissä rakenteelle lasketaan tasapaino deformatiivisessa tilassa ja näin ollen pystytään seuraamaan rakenteen tasapainopolkua mahdollisimman tarkasti. Linearisoidussa menetelmässä rakenteen jäykkyyismatriisia linearisoidaan ja sieltä jää solmisiirtymistä riippuvaiset termit pois, jolloin tehtävä palautuu edellisen kappaleen mukaiseksi.

Havainnollistetaan yksinkertaisella, kuvan 2.20 mukaisella, vain aksiaalijäykkyyden omaavan tasosauvan avulla suurten siirtymien vaikutusta elementin jäykkyyismatriisiin.

Taivutusjäykkyyden omaavalle palkille jäykkyysmatriisien lausekkeista tulee hyvin monimutkaisia. Lisäksi mainittakoon, että esimerkiksi solidi- tai kuorielementin tapauksessa matriisien lausekkeiden johtamisesta tulisi todella työlästä, jopa mahdotonta. [11]



**Kuva 2.20** Sauvaelementti. [11]

Kuvan 2.20 mukaisen sauvaelementin jäykkyysmatriisi on muotoa

$$\mathbf{k}_1 = \frac{EA}{l_e} \begin{bmatrix} (1 + u_{,x})^2 & v_{,x}(1 + u_{,x}) & -(1 + u_{,x})^2 & -v_{,x}(1 + u_{,x}) \\ v_{,x}(1 + u_{,x}) & v_{,x}^2 & -v_{,x}(1 + u_{,x}) & -v_{,x}^2 \\ -(1 + u_{,x})^2 & -v_{,x}(1 + u_{,x}) & (1 + u_{,x})^2 & v_{,x}(1 + u_{,x}) \\ -v_{,x}(1 + u_{,x}) & -v_{,x}^2 & v_{,x}(1 + u_{,x}) & v_{,x}^2 \end{bmatrix} \quad (2.57)$$

jossa termit  $u_{,x}$  ja  $v_{,x}$  ovat siirtymäkenttien derivaattoja [11]. Kaavassa (2.58) on esimerkin vuoksi näytetty

$$u(x) = N_1(x)u_1 + N_2(x)u_2, \quad (2.58)$$

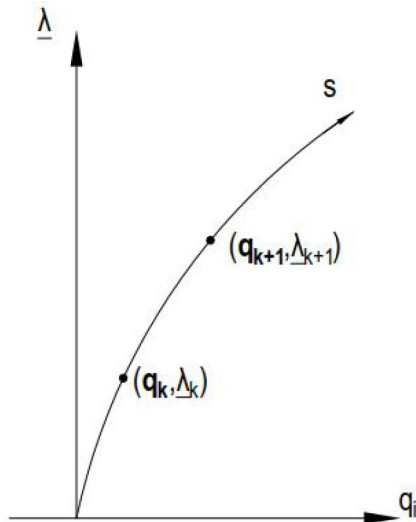
jossa  $N_1$  ja  $N_2$  ovat lineaarisia muotofunktioita. Näin ollen jäykkyysmatriisissa on aina solmuisiirtymistä  $u_1$ ,  $u_2$ ,  $v_1$  ja  $v_2$  riippuvaisia termejä ja laskennassa matriisi tulee päivittää aina siirtymien muuttuessa.

Käsitellään seuraavassa lyhyesti epälineaarisen elementtimenetelmän perusteita ja ratkaisumenetelmiä. Epälineaarisen elementtimenetelmän laskennan perustana on yhtälö

$$\mathbf{r}(\mathbf{q}) - \underline{\lambda}\mathbf{p}_{ref} = 0, \quad (2.59)$$

joka on kirjoitettu lyhennysmerkinnöin virtuaalisen työn periaatteesta, jonka mukaan rakenne on tasapainossa, jos ja vain, jos siihen vaikuttavien ulkoisten kuormien virtuaalinen työ on yhtä suuri kuin palkin virtuaalinen muodonmuutosenergia. Virtuaalisen työn periaatteen voidaan osoittaa pätevän yleisessä tapauksessa, jossa materiaalista tai siirtymistä ei tehdä mitään oletuksia [11] [13]. Yhtälössä (2.59)  $\mathbf{r}$  on sisäisten voimien vektori, joka on riippuvainen solmuisiirtymistä, ja  $\underline{\lambda}\mathbf{p}_{ref}$  on ulkoisten kuormien vektori. Yhtälössä  $\mathbf{p}_{ref}$  on vakio referenssi kuormitusvektori, joka aiheutuu käyttäjän antamista kuormituskentistä ja termi  $\underline{\lambda}$  on kuormakerroin, joka kasvattaa kaikkia annettuja kuormia yhtä paljon. Lisäksi on huomattavaa, että yhtälön ulkomuodossa on selkeä yhtäläisyys kaavan (2.48) kanssa.

Tasapainoyhtälö (2.59) on epälineaarinen, koska sisäisten voimien vektori on riippuvainen solmusiirtymistä. Yhtälön ratkaiseminen on mahdollista linearisoinnin ja askeltamisen avulla. Ratkaisumenetelmistä tunnettuja on etenkin kuormaohjattu Newton-Raphson (N-R) iterointi sekä kaarenpituusmenetelmä. Yleisellä tasolla tasapainopolun määrittämisessä on tavoitteena selvittää tunnetusta tasapainopisteestä  $(\mathbf{q}_k, \underline{\lambda}_k)$  pisteeseen  $(\mathbf{q}_{k+1}, \underline{\lambda}_{k+1})$  otetut äärelliset lisäykset annetulla kuormalisäyksellä tai kuljetulla kaarenpituudella. Kuvassa 2.21 on havainnollistettu tätä.



**Kuva 2.21** Tasapainopolku  $(\mathbf{q}, \underline{\lambda})$ -avaruudessa. [11] (muokattu)

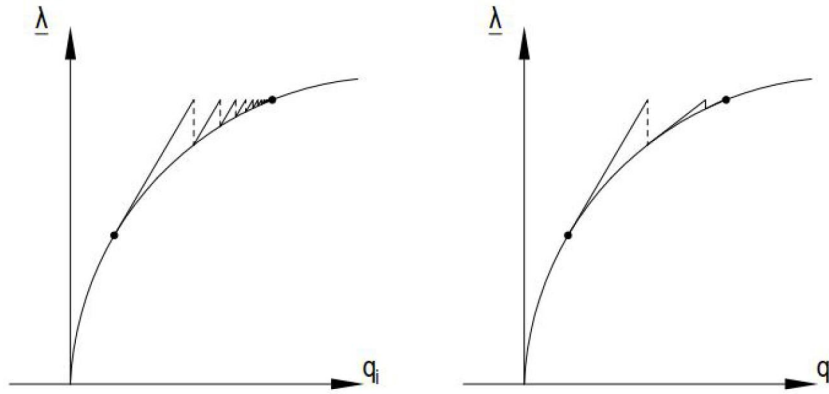
Kuormaohjatussa N-R iteroinnissa tasapainoyhtälö (2.59) linearisoidaan ja kirjoitetaan sisäisten voimien muutos muotofunktioiden avulla, jolloin yhtälö saadaan muotoon

$$(\mathbf{K} + \mathbf{K}_g)\Delta\mathbf{q}_k = \mathbf{K}_T\Delta\mathbf{q}_k = \underline{\lambda}_{k+1}\mathbf{p}_{ref} - \mathbf{r}_k, \quad (2.60)$$

jossa  $\mathbf{K}_T$  on tangenttijäykkyysmatriisi [11]. Yhtälö (2.60) ratkaistaan Newton-Raphson iteroinnilla. Menetelmä etenee käytännössä siten, että lasketaan tunnetussa pisteessä sisäisten voimien vektori sekä tangenttijäykkyysmatriisi. Tämän jälkeen käyttäjä valitsee kuorma-askelen  $\lambda_{k+1}$ , jonka jälkeen lasketaan siirtymämuutos  $\Delta\mathbf{q}_k$ . Uudella siirtymän arvolla lasketaan uudestaan sisäisten voimien vektori ja tangenttijäykkyysmatriisi ja jälleen ratkaistaan siirtymämuutos. Menetelmää toistetaan, kunnes siirtymämuutos on riittävän pieni. Kriteerin määrittelee käyttäjä itse. Kun kriteeri on saavutettu, otetaan uusi kuorma-askel ja toistetaan sama iterointiprosessi. Näin laskemalla selvitetään tasapainopolku kokonaisuudessaan.

Tangenttijäykkyysmatriisia ei ole välttämätöntä päivittää joka iteraatiokierroksella, jolloin menetelmää kutsutaan modifioiduksi N-R-menetelmäksi. Tällöin päivitys tehdään yleensä aina kuorma-askelen alussa. Jos päivitys tehdään jokaisella iteraatiokierroksella, menetelmää kutsutaan täydeksi N-R-menetelmäksi. Kuvassa 2.22 on vasemmalla modifioitu ja oikealla täysi N-R-menetelmä.

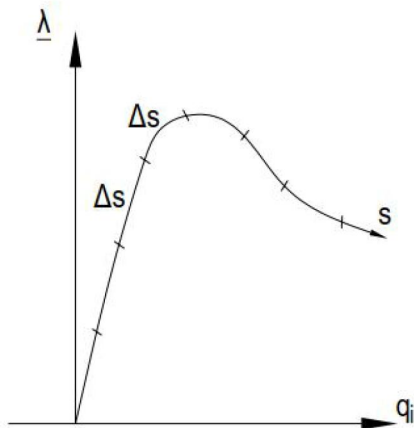




**Kuva 2.22** Modifioitu ja täysi Newton-Raphson menetelmä.

N-R-menetelmän rajoitteena on kuitenkin se, että tasapainopolun tulee olla monotonisesti kasvava tai laskeva, että sillä voidaan polkua seurata. Tarkoittaen esimerkiksi sitä, että läpilyöntitehtävän tasapainopolkua (kuva 2.1) se ei pysty ensimmäisen lakipisteen jälkeen seuraamaan, vaan tulos on (noin) vaakasuora viiva. Toisaalta se on varsin riittävä, koska käytännön suunnittelussa kiinnostava kohde on juuri se tasapainopolun ensimmäinen lakipiste, joka on rakenteen kriittisen kuorman arvo. Mikäli tasapainopolku halutaan jostain syystä määrittää kokonaisuudessaan, siihen on kehitetty kaarenpituusmenetelmä.

Kaarenpituusmenetelmässä ohjausparametrina ei ole enää kuormakerroin, vaan se on ratkaisupolkua (tasapainopolkua) pitkin kulkeva koordinaatti  $s$ . Tällöin  $s$ :lle annetuilla inkrementeilä ei ole fysikaalista tulkintaa, vaan kuvan 2.23 mukaisesti ne tarkoittavat, että 'askeleen  $k$  aikana edetään tasapainopolkua  $(\underline{q}, \underline{\lambda})$ -avaruudessa matkan  $\Delta s_k$ ' [11].

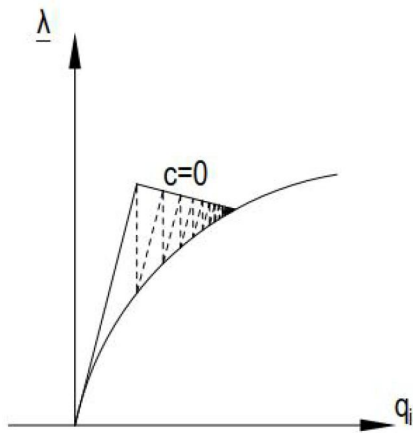


**Kuva 2.23** Tasapainopolun seuraaminen kaarenpituusmenetelmällä. [11] (muokattu)

Kaarenpituusmenetelmässä sekä solmusiirtymät että kuormakerroin ovat tuntemattomia. Näin ollen tuntemattomien määrä on kasvanut yhdellä, joten tarvitaan yhtälön (2.59) lisäksi yksi lisäyhtälö. Lisäyhtälöllä hallitaan, että otetun askeleen aikana edetään tasapainopolkua halutun pituuden  $\Delta s$  verran. Yhtälöryhmä on nyt muotoa

$$\begin{cases} \mathbf{r}(\mathbf{q}) - \underline{\lambda} \mathbf{p}_{ref} = 0 \\ c(\mathbf{q}, \underline{\lambda}) = 0 \end{cases} \quad (2.61)$$

Ratkaisuperiaatteeltaan kaarenpituusmenetelmä on saman tyyppinen kuin kuormaohjattu N-R-menetelmä. Siinä annetaan ohjausparametrille  $\Delta s$  jokin arvo, jonka jälkeen lasketaan sitä vastaavat kuorma- ja siirtymäkertoimien inkrementit. Tätä vaihetta kutsutaan ennustaja-askeleeksi. Tämän jälkeen ratkaisu iteroidaan alkuarvauksesta tasapainopolulle, eli tehdään korjaaja-askeleita riittävä määrä. Yksi tunnetuimmista menetelmistä on Riksin kaarenpituusmenetelmä, jossa kuvan 2.24 mukaisesti korjaaja-askeleen vaaditaan olevan kohtisuorassa ennustaja-askeleisiin nähden.



**Kuva 2.24** Riksin kaarenpituusmenetelmä. [11] (muokattu)

Tunnettuja menetelmiä on myös muita, joista esimerkkinä mainittakoon kohtisuoran radan menetelmä, jossa korjaaja-askeleen vaaditaan olevan kohtisuorassa tasapainopolun tangenttia vastaan [11].

## 3. POIKITTAISTUKEMATON PAARRE

### 3.1 Ristikkopilari ja kattoristikko

Työn keskeisin tarkoitus on selvittää, mitä hyötyä voidaan saavuttaa poikittaistukematton paarteen nurjahdusanalyysissa, kun ristikkoa ajatellaan kokonaisuutena. Kuvassa 3.1 on esitetty tyypillinen kehä, joka muodostuu kattoristikosta sekä ristikkopilarista, joiden sisä- tai alapaarre ovat tämän työn keskipisteessä.



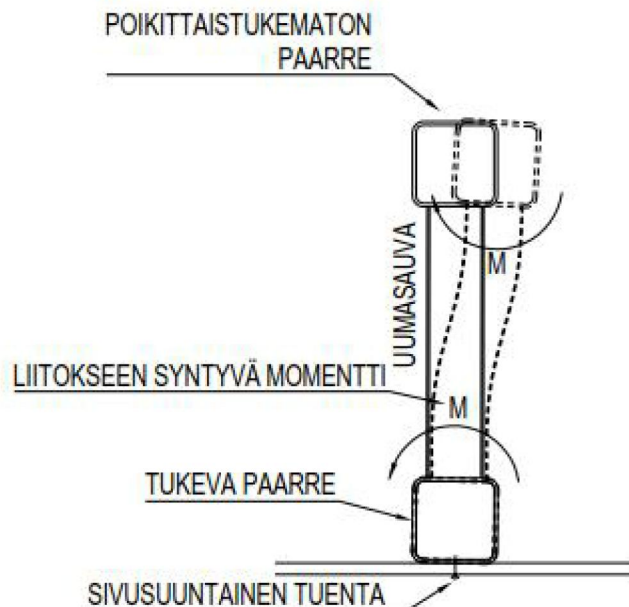
**Kuva 3.1** Ristikkopilarista ja kattoristikosta muodostuva kehärakenne. [24]

Ristikkopilaria käytetään esimerkiksi silloin, kun pilarilta vaaditaan suurta korkeutta (kymmeniä metrejä), suurta puristuskestävyyttä (nosturiradat) tai kun rungon vaakasiirtymien hallitseminen sitä edellyttää. Myös kattoristikon alapaarre voi joutua puristukselle johtuen esimerkiksi ristikon ja pilarin jäykästä liitoksesta tai kevytrakenteisissa halleissa tuulen imusta katolla. Näitä kahta tilannetta käsitellään tässä työssä myös kahden casen avulla.

### 3.2 Poikittaistukematonta parretta stabiloivat osat

Yksinkertaisimmillaan tilannetta on käsitelty siten, että puristettu sisäparre tuetaan erillisellä nurjahdustuennalla tasosta poispäin tapahtuvaa nurjahdusta vastaan. Tällöin nurjahduspituutena on käytetty nurjahdustuennan välimatkaa. Tämä periaate ajaa pääsääntöisesti tiheään tuentaväliin tai ylimitoitettuun paarteeseen.

Edellä mainittu menetelmä ei nimittäin ota millään tavalla huomioon ristikon käyttäytymistä kokonaisuutena. Todellisuudessa puristettu parre saa tukea uumasauvojen taivutusjäykkyyksien sekä tukevan/vedetyn paarteiden vääntöjäykkyyden kautta. Tällöin luonnollisesti uumasauvojen liitosjäykkyys vedettyyn ja/tai tuettuun paarteeseen otetaan huomioon todellisena. On olennaista ymmärtää, että näin menetellen laskennassa käytetään hyödyksi tukevan paarteiden vääntöjäykkyyttä sekä uumasauvojen ja paarteiden välisten liitoksien momenttijäykkyyksiä tasosta poispäin syntyvää momenttia vastaan. Kuvassa 3.2 on havainnollistettu tätä ilmiötä.



**Kuva 3.2** Ristikkorakenteen uumasauvojen ja paarteiden välisiin liitoksiin kehittyvä momentti, kun ristikkooa hyödynnetään kokonaisuutena estämään poikittaistukemattoman paarteiden nurjahdusta.

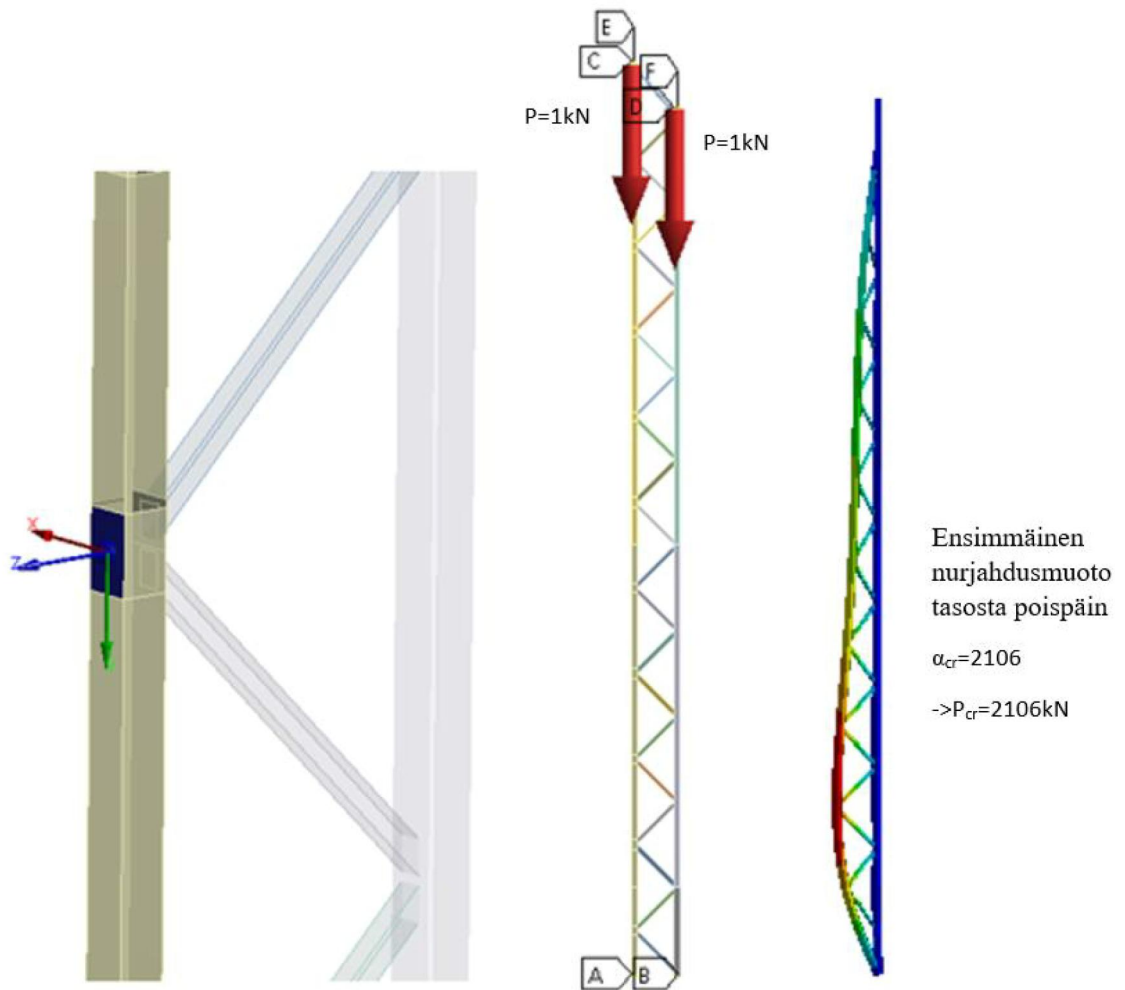
Uumasauvan ja paarteiden välisen momentin suuruuksia sekä paarteiden vääntörasituksia lasketaan epälineaarilla FEM-analyysillä kappaleessa 4.3.2. Tällöin rakennetta häiritään asiaan kuuluvalla, eurokoodin mukaisella häiriöllä, huomioidaan suurten siirtymien teoria ja kuormitetaan rakennetta sen kantokykyynsä saakka. Lisäksi on otettava huomioon myös se, että ristikko on lähes poikkeuksetta aina kuormitettuna esimerkiksi tuulikuormalla, jolloin uumasauvojen ja paarteiden liitokset ovat valmiiksi rasitettuna, eikä ne välttämättä pysty tarjoamaan täyttä tuentaa tukemattomalle paarteelle.

Lisäksi etenkin ristikkopilarin tapauksessa on tärkeää tiedostaa, että tuentaa antavan paarteiden on oltava riittävästi tuettu sivuttaissuunnassa, mikäli se on myös puristettuna. Näin on, koska tässä tapauksessa myös tukea antava paarre nurjahtaa ”mukana” eli ristikkopilarin nurjahtaa kokonaisuudessaan. Toisaalta, mikäli tukea antava paarre on mitoittavassa tilanteessa vedettynä, antaa se huomattavasti tukea puristetun paarteiden nurjahdukselle ilman erillistä poikittaistuenta. Jo tämän perusteella voi todeta, että poikittaistukemattoman paarteiden nurjahdus on hyvin haasteellinen ilmiö ja on riippuvainen monesta asiasta.

Tässä työssä tuettu paarre oletetaan tuetuksi paarteiden takaa kuvastaen esimerkiksi kattoristikon tuentaa poimulevyillä tai erillisillä orsilla. Näin ollen nurjahdustuenta on vain sivusuuntainen, eikä ota vääntöä vastaan. Etenkin ristikkopilarin tapauksessa tuenta voidaan siteillä järjestää ulkopaarteiden kyljestä, mutta tämän työn puitteissa ei oteta huomioon siitä saatavaa lisähyötyä sisäpaarteiden nurjahdusta ajatellen. Tämän huomioon ottaminen toisaalta tarkoittaisi, että tulisi erikseen selvittää, miten vääntöjäykkä tuenta tapauskohtaisesti on.

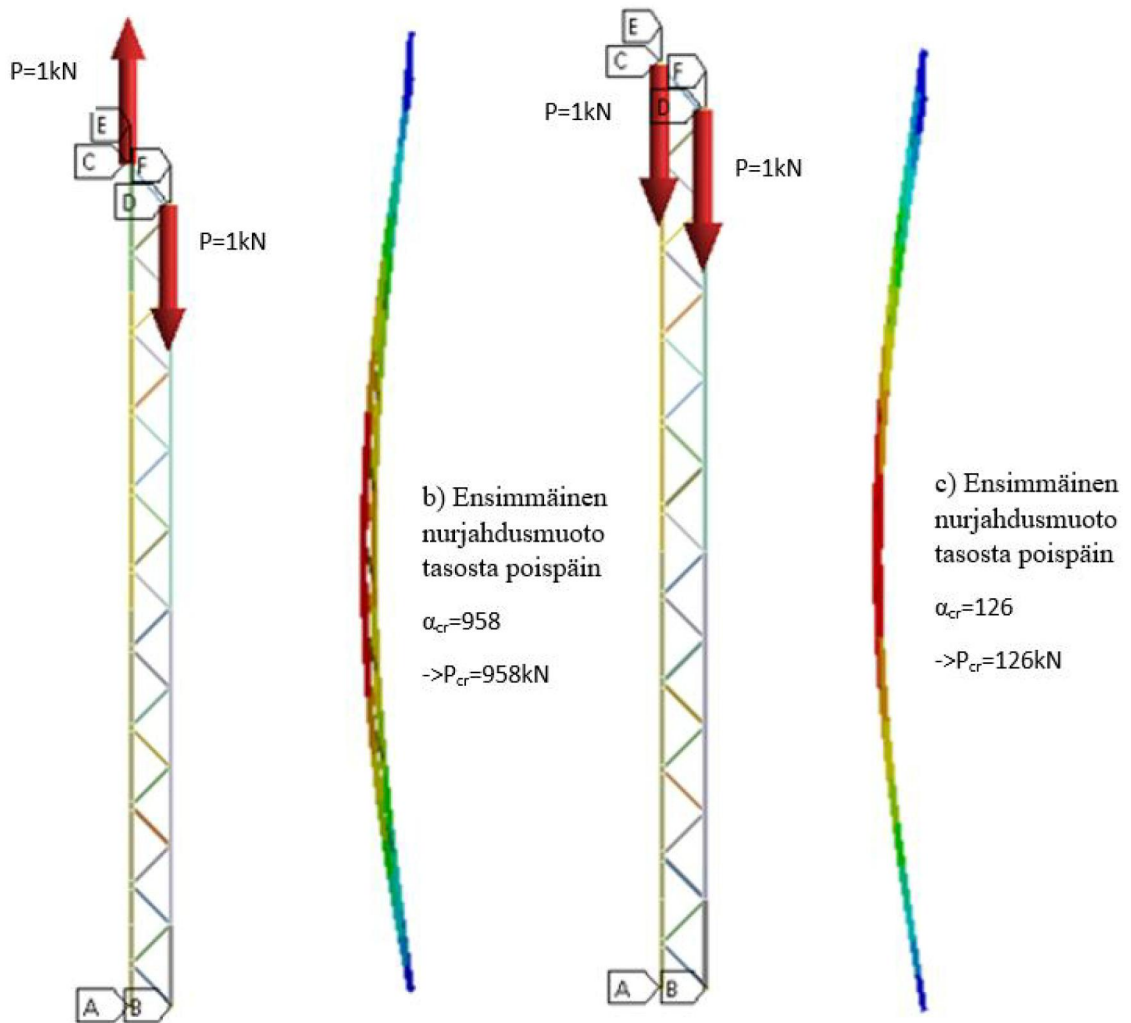
Havainnollistetaan mainittuja ilmiöitä laskemalla Ansys-ohjelmalla muutama lineaarinen nurjahdusanalyysi 30 metriä korkealle ja 1,4 metriä leveälle ristikkopilarille. Pilarit on mallinnettu käyttäen kuorielementtejä. Kuvissa 3.3 ja 3.4 on lineaarisen nurjahdusanalyysin tuloksia kolmelle erilaiselle tapaukselle:

- a) Molemmat paarteet on puristettu samalla kuormalla, mutta ulkopaarre on sivusuunnassa tuettu jokaisesta uumasauvojen risteyskohdasta.
- b) Ulkopaarre on vedetty samalla kuormalla, kun sisäpaarre on puristettu. Kumpikaan paarre ei ole sivusuunnassa tuettu.
- c) Molemmat paarteet on puristettu samalla kuormalla, eikä kumpikaan paarre ole sivusuunnassa tuettuna.



**Kuva 3.3** Ristikkopilarin reunaehdot sekä linearisoidun nurjahdusanalyysin kriittinen kuormakerroin  $\alpha_{cr}$ , kriittinen kuorma  $P_{cr}$  ja ensimmäinen nurjahdusmuoto tasosta poispäin tapauksessa a.

Tilanteessa a) ristikkopilari on tuettuna kuvan 3.3 mukaisesti paarteen takaa kuvassa näkyvän koordinaatiston x-suunnassa. Tuenta on jokaisessa uumasauvojen ja paarteen liitoskohdassa. Ristikkopilaria kuormitetaan molemmista paarteista samalla pystykuormalla. Pilari on tuettu siten, että kuvassa näkyvä piste A on tuettu joka suuntaan siirtymää vastaan. Pisteessä B siirtymät ovat kiinni joka suunnassa ja yläreunassa pisteissä A ja B on otettu kiinni ainoastaan siirtymä ristikon tasoa kohtisuorassa suunnassa.



**Kuva 3.4** Ristikkopilarin reunaehdot sekä linearisoidun nurjahdusanalyysin kriittiset kuormakertoimet  $\alpha_{cr}$ , kriittiset kuormat  $P_{cr}$  ja ensimmäiset nurjahdusmuodot tasosta poispäin tapauksissa b ja c.

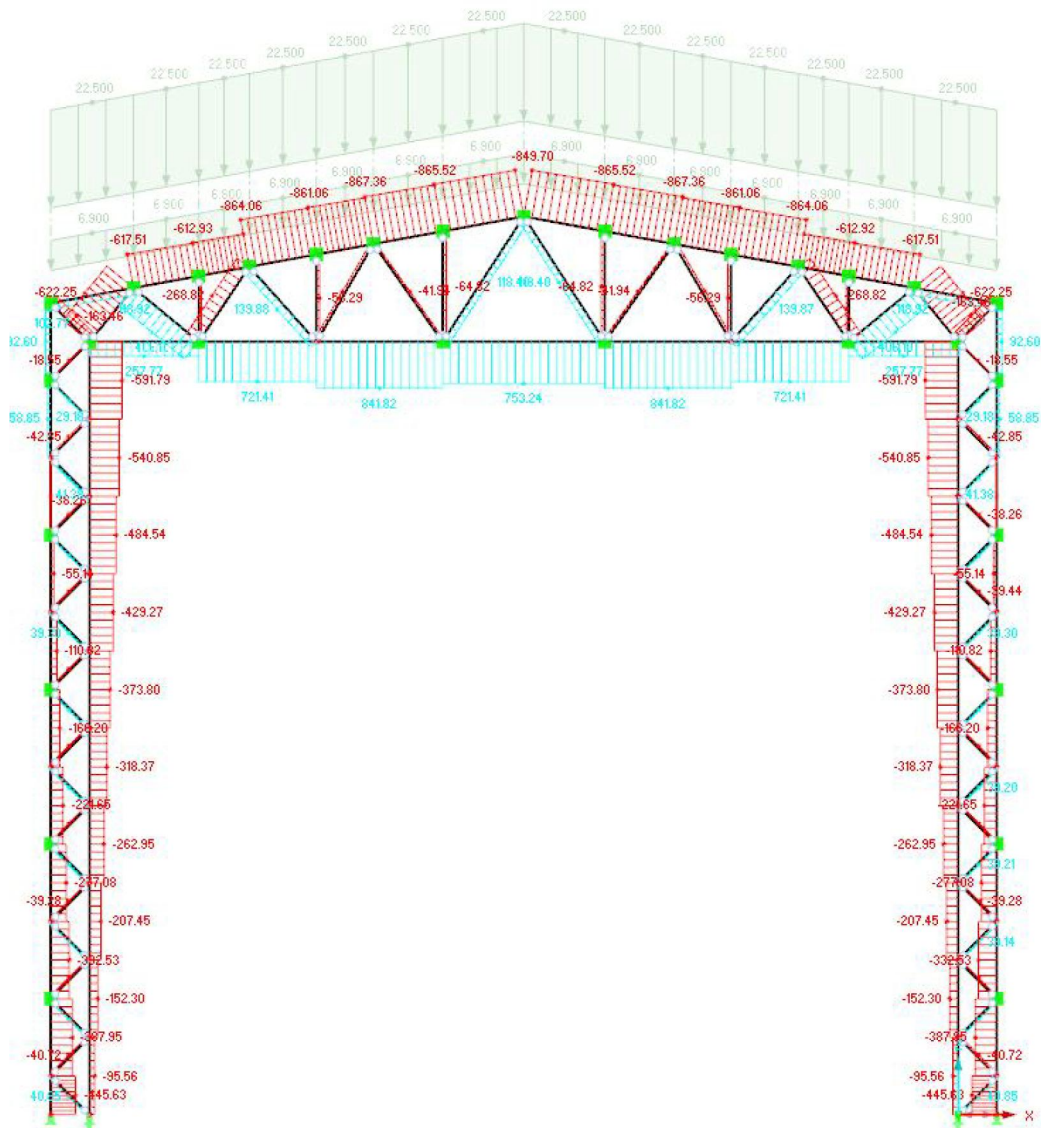
Kuvassa 3.4 ristikkopilarit on tuettu identtisesti kuvan 3.3 pilarin kanssa lukuun ottamatta sivuttaistuenta paarteen takana. Lisäksi tapauksessa b) ulkopaarteessa on saman suuruisen vetovoima ja tilanteessa c) ulkopaarteessa on a):n mukainen puristava voima.

Tuloksista voidaan selkeästi nähdä mainitut ilmiöt. Tapauksissa a) ja c) on sama puristus sisäpaarteessa, mutta a)-kohdassa ulkopaarre on tuettu ja c)-kohdassa ei. Kun ulkopaarre on tuettu, antaa se uumasauvoille mahdollisuuden tukea sisäpaarteen nurjahdusta. Tuettussa tapauksessa kriittisen kuormakertoimen noin 16-kertainen arvo tukemattomaan tapaukseen verrattuna osoittaa sen, että sisäpaarteella on ko. tapauksessa huomattavasti pienempi nurjahduspituus. Tässä tapauksessa se on nähtävissä selvästi myös nurjahdusmuodoista.

Kuvan 3.4 kohdassa b) ulkopaarretta ei ole tuettu, mutta se on vedetty samalla kuormalla kuin sisäpaarre on puristettu. Huomio tulee kiinnittää kohtiin b) ja c). Kuormakertoimen noin 8-kertainen ero osoittaa sen, että normaalivoimien jakautumalla paarteiden välillä

on selvä vaikutus sisäpaarten nurjahduspituuteen. Siitäkin huolimatta, että ulkopaarretta ei ole tuettu lainkaan.

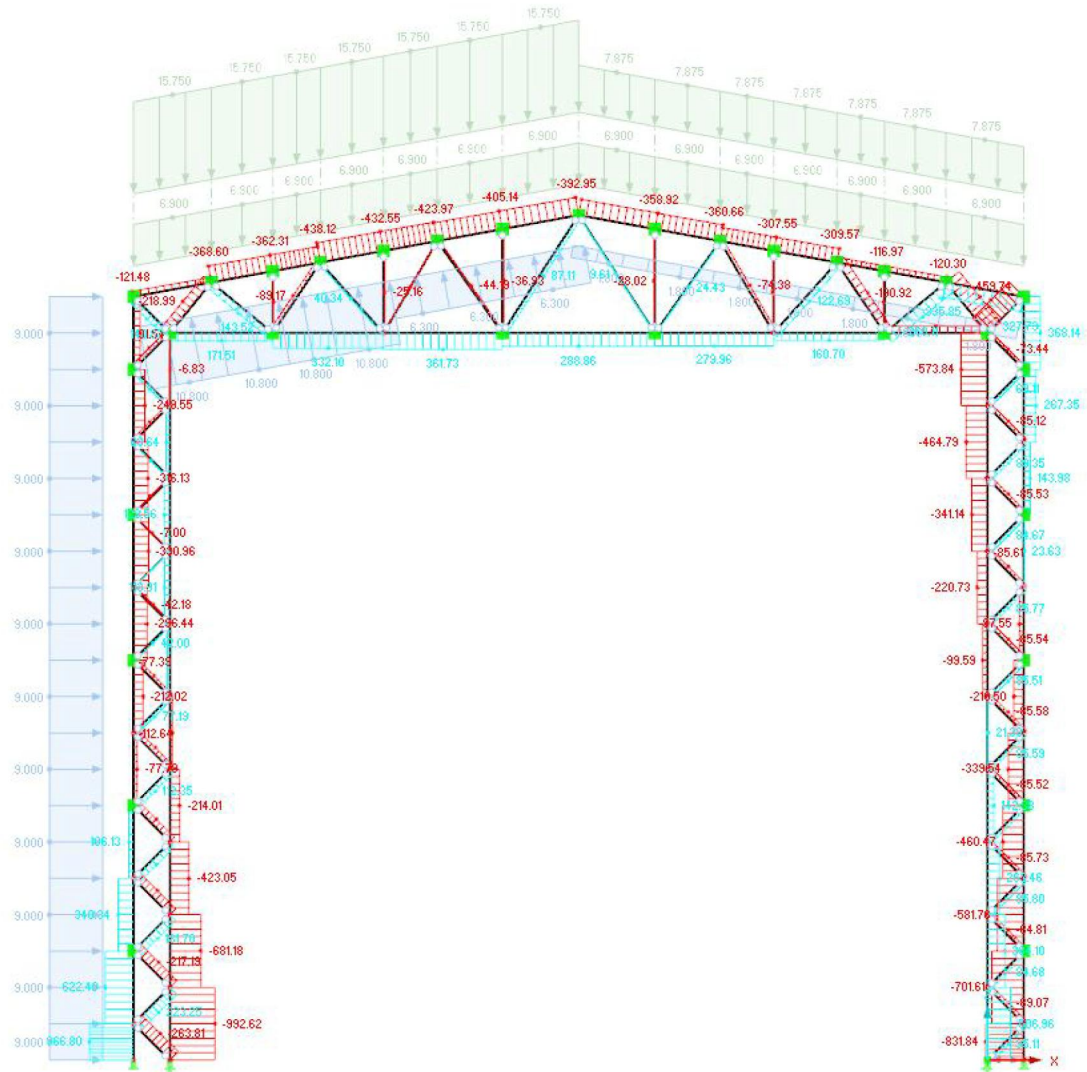
Näiden perusteella tutkimus voidaan jakaa edellä esiteltyihin kolmeen eri tapaukseen. Kuitenkin tätä vaikeuttaa huomattavasti se, että todellisten kuormien vaikuttaessa tämän tyyppisissä kehärakenteissa rasitukset eivät jakaudu näin selkeästi sisä- ja ulkopaarten välille. Kuvissa 3.5 ja 3.6 on kahdesta erityyppisestä kuormitusilanteesta normaalivoimien jakaumat laskettuna RFEM-ohjelmalla. Ensimmäisessä tilanteessa kuormituksena on ainoastaan pystykuormat ja toisessa tilanteessa myös tuulikuorma vaikuttaa.



**Kuva 3.5** Normaalivoimien jakautuminen, kun ainoastaan pystykuormat vallitsevat.

Kuvasta 3.5 selkeästi havaitaan, että normaalivoimat eivät jakaudu tasaisesti sisä- ja ulkopaarten välille. Toisaalta nähdään, että sisäpaarten ollessa paljon puristettuna, ulkopaarre on vedolla tai huomattavasti vähemmän puristettu ja päinvastoin.





**Kuva 3.6** Normaalivoimien jakautuminen, kun myös tuulikuorma vaikuttaa.

Kuvasta 3.6 voidaan todeta samat asiat, mitkä edellisen kuvan perusteella havaittiin. Tämä johtaa väistämättä siihen, että sisäpaarteen nurjahduspituudelle tasosta poispäin tapahtuvaa nurjahdusta vastaan tulee antaa kaksi tai ehkä useampi nurjahduspituus, mikäli ristikkorakenteesta halutaan saada kaikki kapasiteetti irti. Esimerkiksi tässä tapauksessa sisäpaarteen alaosalle tulisi antaa nurjahduspituus kuvan 3.6 tapauksesta, kun yläosalle vastaavasti kuvan 3.5 perusteella. Tällöin alaosalle voitaisiin hyödyntää ulkopaarteen vedettyä osaa. Mikäli alaosalle määritettäisiin nurjahduspituus kuvan 3.5 perusteella, saataisiin sille luonnollisesti suurempi nurjahduspituus, koska ulkopaarre on huomattavasti puristettuna eikä pysty tarjoamaan tukea. Tässä tapauksessa kuitenkin puristava voima sisäpaarteessa on huomattavan pieni jolloin sen käyttöaste ei kuitenkaan ole kovin suuri. Tämä on juuri se ilmiö, mikä usein toistuu tämän tyyppisissä rakenteissa ja tekee tilanteesta kovin tapauskohtaisen.

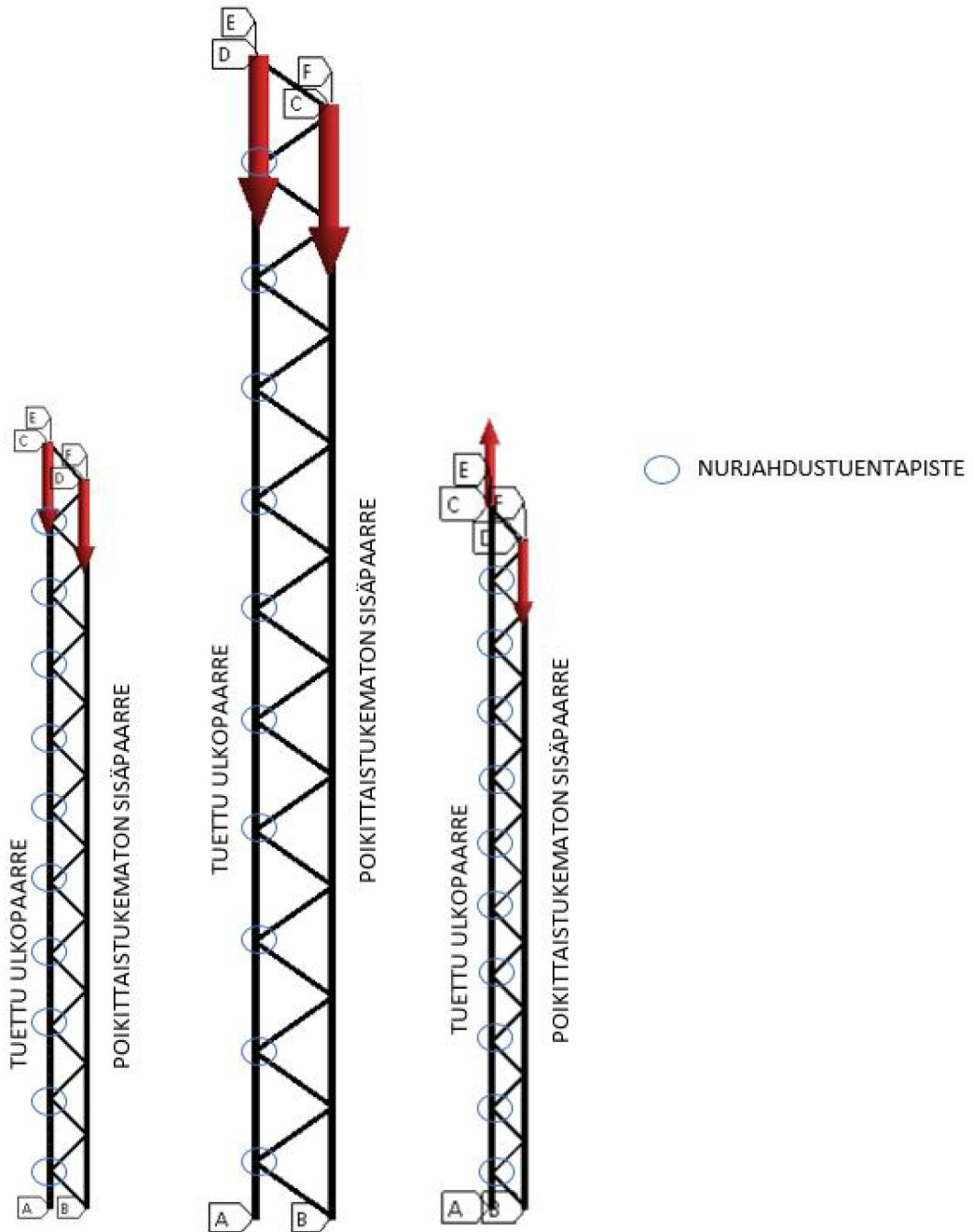
Edellä esitelty menettely ei kuitenkaan ole kovin suunnittelijaystävällinen ja on toisaalta tapauskohtainen. Näin ollen tässä työssä unohdetaan normaalivoimien suhteesta tuleva hyöty siinä määrin, että sitä ei hyödynnetä työssä kehitettävässä laskentamenettelyssä, jonka periaatteet esitellään kappaleessa 3.4. Se ei kuitenkaan poista sitä faktaa, että ulkopaarteen ollessa vedettynä tai vähemmän puristettuna, antaa se selkeän tuennan sisäpaarteen nurjahdusta vastaan. Näin ollen tapauskohtaisesti, mikäli paarteelle halutaan todentaa lisää kapasiteettia, on se mahdollista tämän menettelyn avulla käyttäen FEM-laskentaa.

Edellisten perusteella työssä tuotettavassa laskentamenettelyssä on tehtävä varmallalla puolella olevia oletuksia, että sen käyttö pysyy suhteellisen käyttäjäystävällisenä. Työssä käydään kuitenkin läpi myös esimerkkien avulla tarkemman nurjahduspituuden laskenta FEM-ohjelmia käyttäen. Taulukkoon 3.1 on koottu työssä tehtävät oletukset sekä käsiteltävät aiheet.

**Taulukko 3.1** Työssä käsiteltävät asiat ja tehtävät oletukset.

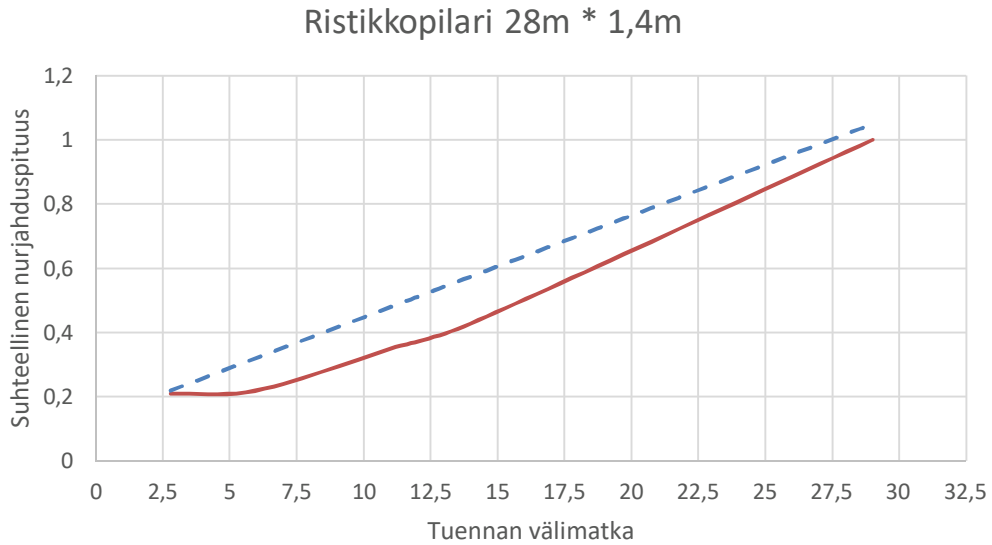
<b>Käsiteltävät aiheet/tehtävät oletukset</b>	<b>Huom!</b>
Nurjahdustuennat oletetaan nivelellisiksi (tuki vain sivusuunnassa tasosta pois).	
Kattoristikon yläpaarre oletetaan tuetuksi poimulevyllä.	
Työssä tuotettava laskentamenettely laskee ala-/sisäpaarteen nurjahduspituuden, kun ylä-/ulkopaarre on täysin tuettu.	Mikäli ulkopaarre on harvemmin tuettu, nurjahduspituus voidaan laskea lineaarisella interpoloinnilla.
Työssä tuotettavan laskentamenettelyn oletuksena on, että paarteissa vaikuttaa saman suuruinen puristava voima.	Työssä ohjeistetaan kuitenkin, miten FEM-mallia käyttämällä voi hyödyntää lisää kapasiteettia ristikosta.

Ajatuksena on, että ääripäinä ovat tilanteet, jossa ulkopaarretta ei ole lainkaan tuettu sekä siten, että ulkopaarre on täysin tuettu. Lineaarinen interpolointi ääripäiden välillä tuottaa varmallalla puolella olevan arvion nurjahduspituudesta. Todetaan tämä seuraavassa laskeamalla kahden erikokoisen ristikkopilarin linearisoitu nurjahdusanalyysi, jonka avulla tuotetaan nurjahduspituus sisäpaarteelle. Kuvassa 3.7 on esitetty edellä mainitut tutkittavat rakenteet. Kahdessa tapauksessa on molemmissa paarteissa puristusvoimat ja yhdessä tapauksessa ulkopaarre on vedetty samalla voimalla. Tulokset lasketaan käyttäen kuorielementtejä ja Ansys-ohjelmaa. Ulkopaarteen nurjahdustuentatuenta on vastaava kuin kuvassa 3.3.



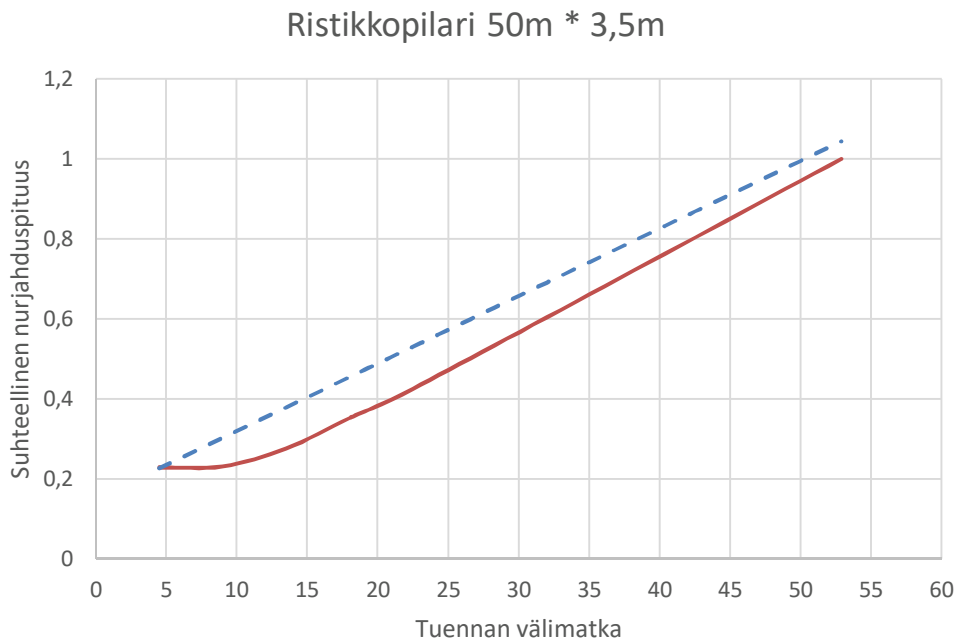
**Kuva 3.7** Tutkittavat rakenteet, joille lasketaan linearisoitua nurjahdusanalyysia, kun ulkopaarten tuentaväli vaihtelee.

Linearisoitu nurjahdusanalyysi lasketaan kasvattamalla ulkopaarten nurjahdustuennan välimatkaa. Täysin tuetussa tapauksessa nurjahdustuenta on jokaisessa K-liitoksen kohdassa, kuten kuvassa 3.7 on esitetty. Seuraavassa tarkastelutilanteessa nurjahdustuenta on harvennettu siten, että joka toinen tuenta on poistettu, jolloin tuentaväli on kaksi kertaa kahden K-liitoksen välimatka. Edelleen seuraavassa tarkastelutilanteessa tuentaväli on kolme kertaa kahden K-liitoksen välimatka ja niin edes päin. Kuvassa 3.8 on nurjahduspituuden muutos suhteessa tuennan välimatkaan kuvan 3.7 pienemmästä ristikkopilarista. FEM-mallin tulokset ovat alla olevissa kuvissa ehjällä viivalla ja interpolointi on katkoviivalla.



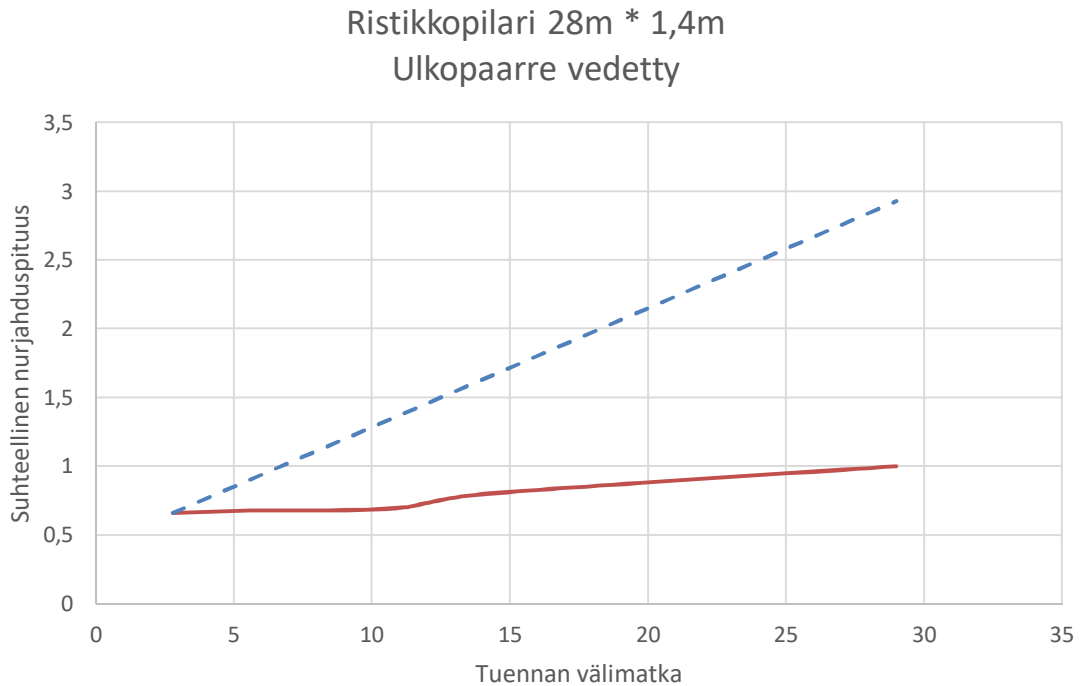
**Kuva 3.8** Nurjahduspituuden muutos suhteessa nurjahdustukien välimatkaan. Kuvassa katkoviivalla interpoloinnin tulokset ja ehjällä viivalla FEM-laskennan tulokset.

Kuvan 3.8 perusteella voidaan heti todeta, että oletus lineaarisesta interpoloinnista on suunnittelussa varmallalla puolella eli se antaa suurempia nurjahduspituuksia. Kuvassa 3.9 on esitetty vastaava kuvaaja isommalle ristikkopilarille.



**Kuva 3.9** Nurjahduspituuden muutos suhteessa nurjahdustukien välimatkaan. Kuvassa katkoviivalla interpoloinnin tulokset ja ehjällä viivalla FEM-laskennan tulokset.

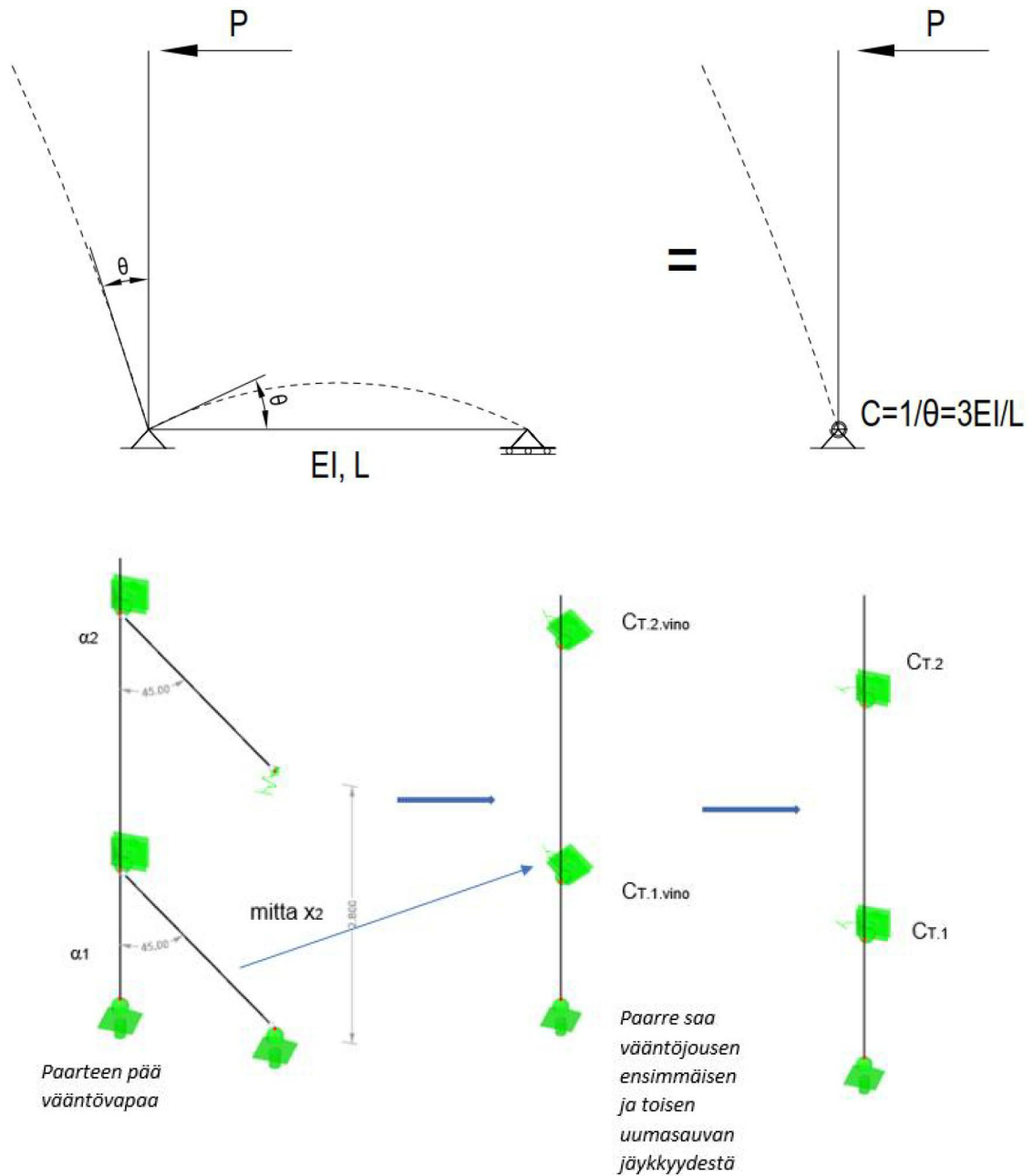
Ilmiö on varsin samanlainen kuin pienemmässäkin ristikkopilarissa. Lisäksi edellisistä kuvista voi nähdä selkeästi, että ulkopaarteen ollessa ilman tuentaa, on sisäpaarteen nurjahduspituus koko paarteen pituus, mikä on myös odotettavissa. Kuvassa 3.10 on tulokset kuvan 3.7 oikeanpuoleisimmalle ristikkopilarille. Tässä tapauksessa ulkopaarteessa on saman suuruinen veto, kuin sisäpaarteessa on puristus.



**Kuva 3.10** Nurjahduspituuden muutos suhteessa nurjahdustukien välimatkaan. Kuvassa katkoviivalla interpoloinnin tulokset ja ehjällä viivalla FEM-laskennan tulokset.

Kuvassa 3.10 katkoviivalla on esitetty lineaarisen interpoloinnin tulos. Kaikkien edellä olevien kuvaajien vasemman pään tulos, eli täyttä tuentaa vastaavan nurjahduspituus, voidaan määrittää työssä kehitetyllä laskentamenetelmällä. Kuvaajien oikean pään tulos on paarteiden koko pituus. Kuva 3.10 on erittäin havainnollistava siinä mielessä, että valitsemalla sisäpaarteiden nurjahduspituudeksi koko paarteiden pituus, on se noin kolme kertaa varmallalla puolella. Tämä sen vuoksi, että tukevan paarteiden vetovoima antaa selkeän tuennan sisäpaarteiden nurjahdukselle.

Kappaleen alussa mainittiin, että hyödynnettäessä ristikköä kokonaisuutena, otetaan huomioon myös tukevan paarteiden vääntöjäykkyys. Lähtökohtaisesti rakenteiden suunnittelussa pyritään siihen, että vääntörasitusta ei rakenteisiin synny. On kuitenkin selvää, että tukevaan paarteeseen muodostuu jotain vääntörasitusta, sillä muuten paarre alkaisi pyöriä pituusakselinsa ympäri. Työssä oletetaan, että tukevan paarteiden päät on vapautettu vääntöstä, jolloin ne pääsevät vapaasti kiertymään. Paarre kuitenkin saa hieman vääntötukea alimmilta uumasauvoilta kuten kuvassa 3.11 on esitetty. Kuvassa 3.11 on ylempänä esitetty yleinen logiikka, jota soveltamalla vääntöjousi voidaan muodostaa.

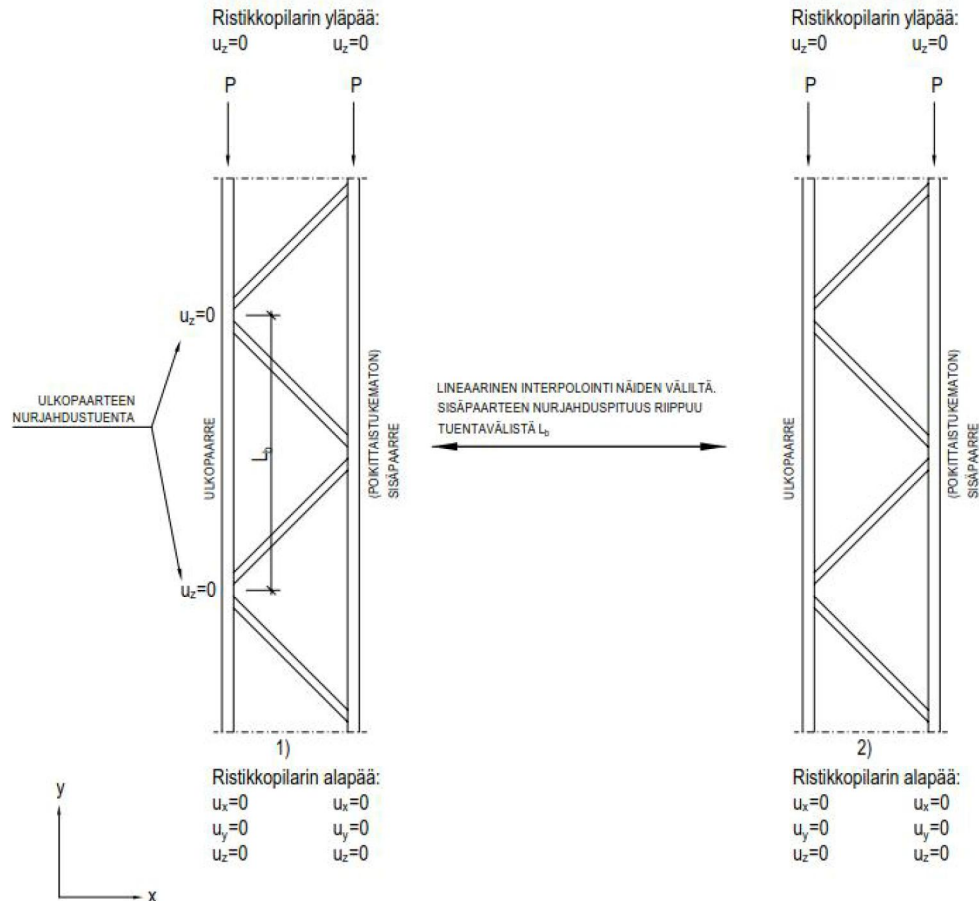


**Kuva 3.11** Kuvassa ylempänä yleinen periaate vääntäjousen muodostumiselle. Alla ensimmäisen ja toisen uumasauvan antama vääntötuenta tukevalle pariteelle. Alemman kuvan merkinnät viittaavat liitteen 2 merkintöihin.

Kuvassa 3.11 on esitetty kahden reunimmaisen uumasauvan tarjoaman vääntötuen logiikka, koska niiltä tukeva parre saa käytännössä suurimman tuennan. Kappaleen 4 epälinearisessa FEM-laskentaosuudessa lasketaan syntyvien leikkausrasitusten ja vääntörasitusten suuruuksia, mutta todetaan niiden olevan kuitenkin suhteellisen pieniä. Kuvan 3.11 vääntäjousen määrittäminen esitetään tarkemmin liitteessä 2. Jousijäykkyyden suuruus on

olennainen osa työssä tuotettavaa laskentamenetelmää, missä tulee ottaa huomioon myös paarteen kiertymän suuruus.

Summaamalla kaikki edelliset tulokset, työssä kehitettävä laskentamenetelmä perustuu kuvan 3.12 ideologiaan.



**Kuva 3.12** Työssä kehitettävän laskentamenetelmän ääripäät ja laskentaperuste sisäpaarteen nurjahduspituudelle.

Kuvassa 3.12 on esitetty myös ala- ja yläpäiden kiinnitykset suhteessa ilmoitettuun koordinaatistoon. Termillä  $u$  kuvataan siirtymävapausastetta eri suuntiin.

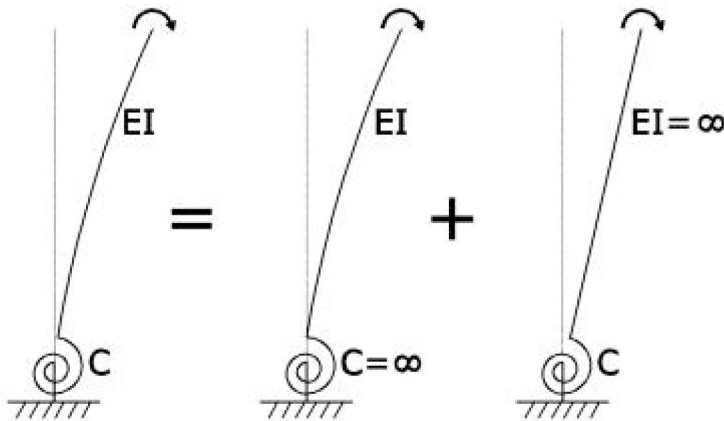
Lisäksi mainittakoon, että epälineaarilla analyysillä pääsee käsiksi nurjahdustuennan tukireaktioon. Suunnittelijoilla on yleisesti käytössä periaate, jonka mukaan nurjahdustuenta mitoitetaan voimalle, joka on 2 % nurjahdustuettavasta sauvasta. Tästä on olemassa myös poikkeavia tulkintoja, erään lähteen mukaan suhde voisi olla 1,5 % [18]. Winter painottaa kuitenkin, että tuennalla on oltava sen kestävyuden lisäksi myös riittävä jäykkyys, ja hänen mukaansa 2 % sääntö ottaa kantaa vain tuennan lujuuteen, eikä sen jäykkyyteen. Winter on kehittänyt mallin, jonka avulla tuennan riittävä jäykkyys voidaan ratkaista. Tuennan riittävä jäykkyys määritellään siten, että tuettava sauva nurjahtaa jokaisen tuentapisteen välillä puolialtoon. Huomioitavaa on, että malli antaa aina varmalle puo-

lelle olevia tuloksia [22]. Tähän haetaan vertailutuloksia epälinearisessa FEM-laskentaosuudessa kappaleessa 4, mutta tarkoituksena ei ole kuitenkaan tuottaa laskentamenetelyä riittävän tuentajäykkyyden määrittämiseen, vaan se jää suunnittelijan vastuulle.

### 3.3 K-liitoksen rotaatiojäykkyyden laskentamenetelmä

Kun ristikkorakenteen stabiloiva parre on riittävästi tuettu tai siinä vaikuttaa selvä veto-voima, on sillä mahdollisuus antaa tuentaa puristetulle paarteelle uumasauvojen taivutusjäykkyyden kautta. Tässä kappaleessa esitellään perusteita, miten uumasauvojen rotaatiojäykkyys tasosta poispäin voidaan määrittää.

Miten paljon poikittaistukematon parre voi saada tukea uumasauvojen taivutusjäykkyyden kautta, riippuu muun muassa uumasauvojen ja tukea antavan paarteen liitosjäykkyydestä. Uumasauvan ja paarteen välinen liitosjäykkyys lasketaan perustuen kuvan 3.13 superpositioperiaatteeseen.



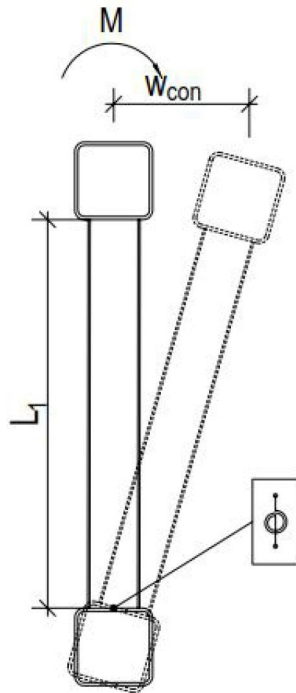
**Kuva 3.13** Jousituetun ulokepalkin taipuma. [6]

Superpositioperiaatteen mukaan jousituetun ulokepalkin taipuma on kahden tapauksen summa:

- Jousijäykkyys on ääretön ja palkilla on taivutusjäykkyys.
- Jousijäykkyys on oikea ja palkilla on ääretön jousijäykkyys

Kuvassa 3.14 on esitetty liitoksen rotaatiojousi tasosta poispäin, joka halutaan määrittää.

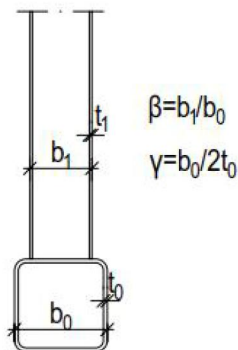




**Kuva 3.14** Rotaatio- ja translaatiojousen yhteys.

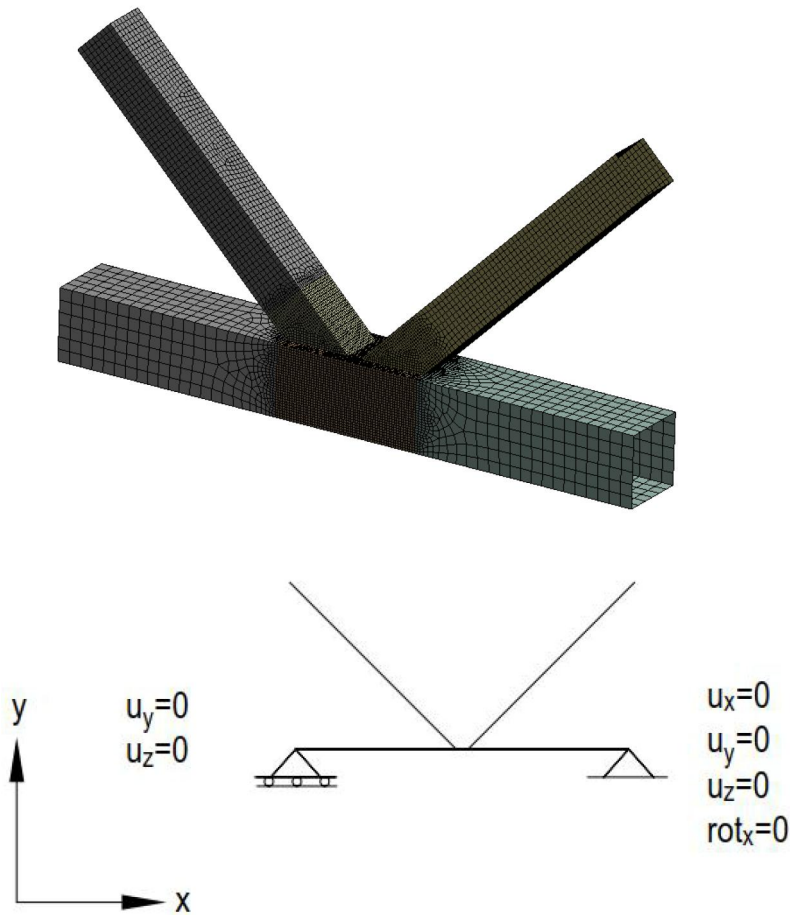
Kuvassa 3.14  $M$  on uumasauvan päässä vaikuttava momentti,  $L_l$  uumasauvan pituus ja  $w_{con}$  on rotaatiojousen kiertymästä aiheutuva siirtymä uumasauvan päässä. Siten kuvan 3.13 superpositioperiaatteen oikeanpuoleisin tapaus on se tilanne, joka halutaan ratkaista.

Tämän selvittämiseksi tässä työssä käytetään kuorielementeillä mallinnettua kahden uumasauvan ja paarteen liitosta kuvan 3.13 vasemman tilanteen selvittämiseen. Työn ohessa tuotetaan Excel-pohjainen työkalu, jolla voidaan ohjata Ansysista ja josta saadaan palautettua edellä mainitun tilanteen siirtymän arvo. Olennaista on tiedostaa oikeat parametrit, joilla liitosjäykkyyteen on merkittävä vaikutus. Parametreiksi valitaan  $\beta$  ja  $\gamma$ , jotka esitellään kuvassa 3.15. Parametrien valinta perustuu lähteeseen [6], ja on varsin järkeenkäypä valinta. Kuvassa 3.15 on havainnollistettu käytettäviä parametreja.



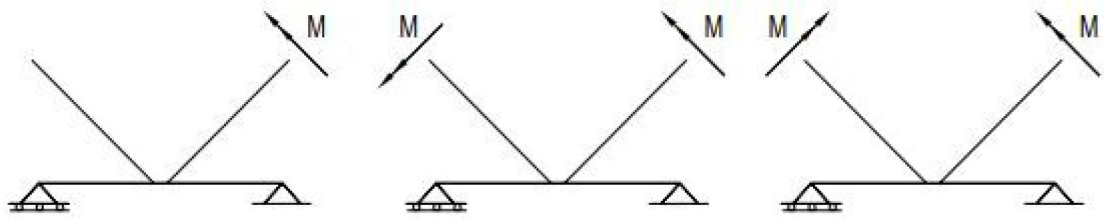
**Kuva 3.15** Parametrit  $\beta$  ja  $\gamma$ .

Näiden lisäksi vaikuttaviksi parametreiksi valitaan luonnollisesti myös uumasauvan ja paarteen välinen kulma sekä paarteen leveys. Myös uumasauvojen välisellä etäisyydellä paarteen pinnalla on hieman merkitystä, ja se onkin myös yksi annettavista lähtötiedoista. Liitoksen kuorielementtimalli ja tuenta on esitetty kuvassa 3.16.



**Kuva 3.16** Liitoksen kuorielementtimalli ja sen tuentaperiaate. Termi  $u$  viittaa siirtymään ja termi  $rot$  rotaatiovapausasteeseen alaindeksin mukaisen akselin ympäri.

Liitos, jota tässä työssä tutkitaan, on tyypiltään K-liitos. Määrittääkseen toisen uumasauvan vaikutuksen, tulee liitos mallintaa kahdella uumasauvalla. Kuormitus, joka vaikuttaa liitosmallissa uumasauvan päässä, aiheuttaa uuman pintaan muodonmuutoksia ja sitä kautta vaikuttaa myös toiseen uumasauvaan. Tämän vuoksi Boel on diplomityössään tutkinut kolmea kuvan 3.17 kuormitustapausta ja todennut laajan laskennan perusteella, että parhaimman tuloksen saa laskemalla erikseen näille kolmelle tapaukselle liitosjäykkyydet, ja ottamalla näistä keskiarvon [6]. Tällä periaatteella liitosta tutkitaan myös tässä työssä.



**Kuva 3.17** Tutkittavat liitoksen kuormitustapaukset.

Kirjoitetaan kuvan 3.13 superpositioperiaate kaavamuotoon seuraavasti

$$w_{tot} = w + w_{con}, \quad (3.1)$$

jossa  $w_{tot}$  on uumasauvan yläpään todellinen siirtymä, joka saadaan FEM-ohjelmasta,  $w$  siirtymä, joka saadaan laskettua tunnetuilla käsinlaskentakaavoilla (muun muassa ulokepalkin pään siirtymä) ja  $w_{con}$  on uumasauvan pään siirtymä johtuen liitoksen kiertymästä. Se saadaan järjestelemällä kaava (3.1) uudestaan

$$w_{con} = w_{tot} - w. \quad (3.2)$$

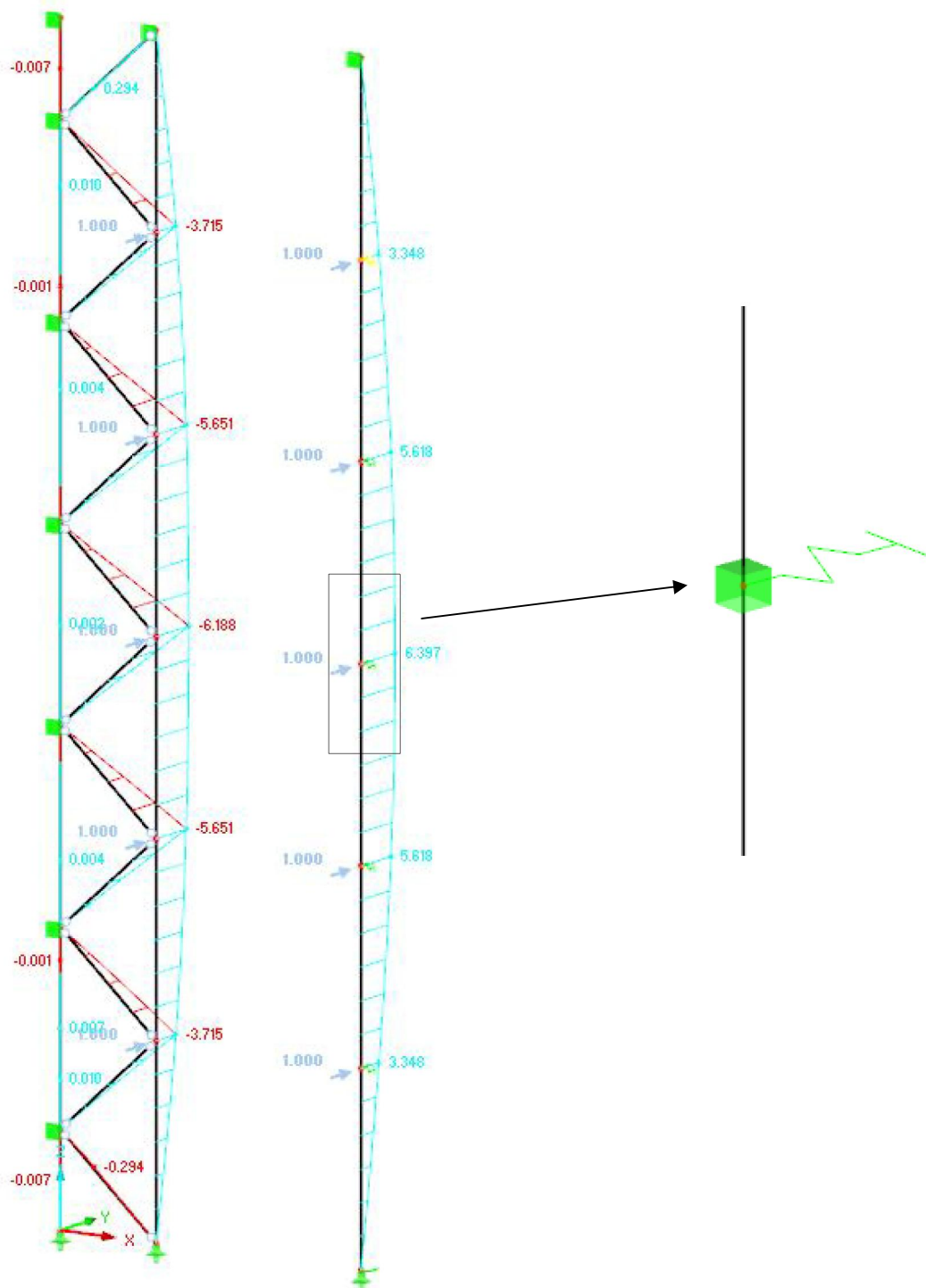
Näin ollen, kun  $w_{con}$  tiedetään, saadaan K-liitoksen rotaatiojäykkyys tasosta pois päin laskettua kaavasta

$$C = \frac{M}{w_{con}} L_1. \quad (3.3)$$

Tätä liitosjäykkyyttä voidaan suoraan käyttää esimerkiksi palkkimallissa, jos halutaan laskea nurjahduspituuksia todellisten reunaehtojen vallitessa. Termin  $w$  tarkempi laskenta esitetään liitteessä 1.

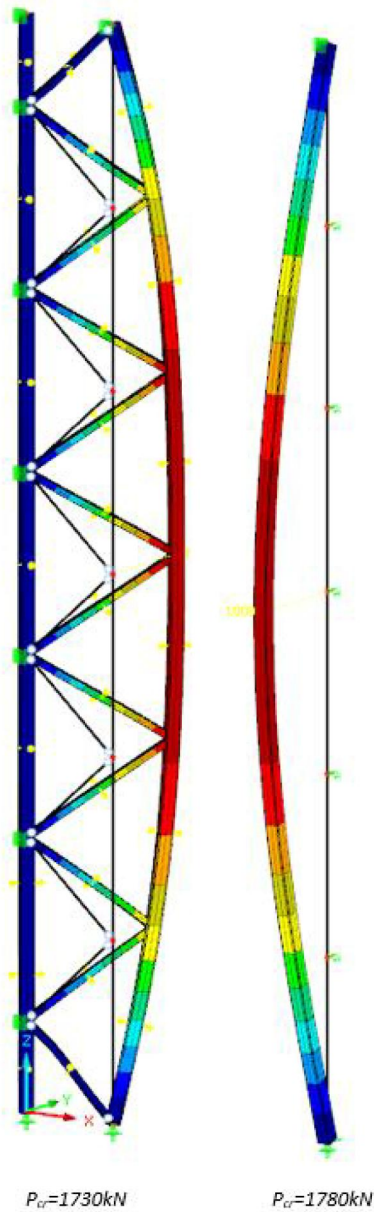
### 3.4 Poikittaistukemattoman paarteiden analyttinen rakenne-malli

Ristikon poikittaistukemattomasta paarteesta kehitetään kuvan 3.18 mukainen rakenne-malli. Työssä puhutaan tuotettavasta laskentamenettelystä ja se perustuu tässä kappaleessa esitettyyn periaatteeseen. Tämä rakennemalli kuvaa tilannetta, kun tukea antava parre on täysin tuettu, ja tuentavälin kasvaessa voidaan lineaarisesti interpoloida tämän tuloksen ja tukevan paarteiden todellisen nurjahdustuentavälin väliltä. Toinen vaihtoehto on käyttää FEM-laskentaa, mutta tämä menettely tarjoaa vaihtoehdon, jossa FEM-malliin ei tarvitse rotaatiojäykkyyksiä syöttää. Poikittaistukemattoman paarteiden kuvaamista jousitetun palkin avulla on esitetty jo aiemmin esimerkiksi lähteissä [9] ja [23].



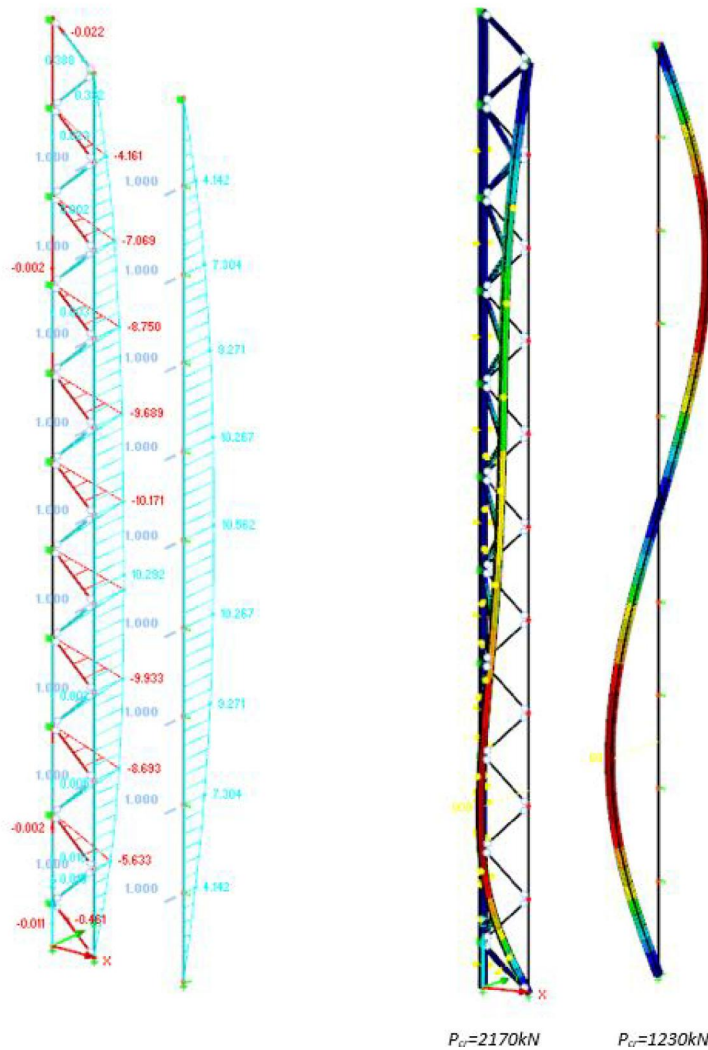
**Kuva 3.18** Jousituettu palkin muodostaminen.

Poikittaistukemattomasta paarteesta muodostetaan jousituettu palkki, jonka jousivakioiden arvot ovat sen suuruiset, että samalla kuormalla saadaan saman suuruinen siirtymäkenttä. Kuvan 3.18 linearisoidun nurjahdusanalyysin tulos on kuvan 3.19 mukainen.



**Kuva 3.19** Kuvan 3.17 rakenteiden linearisoidun nurjahdusanalyysin tulokset.

Kuvasta 3.19 nähdään, että nurjahdusanalyysin tulokset ovat hyvin lähellä toisiaan, joten jousitetun palkin muodostaminen tukemattomasta paarteesta on tämän perusteella pätevä. Kuitenkin tapauksissa, kun tukemattoman paarteen nurjahdusmuoto on selvästi jokin muuta, kun sivulle taipunut puoliaalto, ei jousitettu palkki pysty enää kuvaamaan tilannetta riittävän tarkasti. Kuvassa 3.20 on esitetty yksi tapaus, jossa tämä ilmenee.



**Kuva 3.20** Tapaus, kun jousitettu palkki ei kuvaa enää hyvin poikittaistukematonta sisäpaarretta.

Kuten kuvasta 3.20 nähdään, ristikkopilarin sisäpaarteen nurjahdusmuoto ei ole enää yhtenevä jousitetun palkin kanssa. Kriittinen kuormakerroin on jopa 1,8-kertainen jousitettuun palkkiin nähden. Tämä johtuu siitä, että tarkastellessa jousituttua palkkia erillään, palkki voi nurjahtaa kumpaan suuntaan tahansa, missä kohtaa palkkia tahansa. Kun ristikkopilaria tutkitaan kokonaisuutena, on selvää, että paarteen nurjahtaessa jossain kohtaa sivuun, seuraavat uumasauvat nurjahtavat niin ikään samaan suuntaan. Yksinkertaistettuna tukematon parre nurjahtaa ensin kokonaisuudessaan sivuun, jonka jälkeen se nurjahtaa useampaan muotoon. Jousitetulla palkilla pitäisi olla ”tieto” ristikon muodosta kokonaisuudessaan, ja siitä mihin edellinen solmu on lähtenyt nurjahtamaan. Tässä kohtaa tyydytään kuitenkin tähän tulokseen, sillä tulokset johtavat varmalla puolella olevaan nurjahduspituuteen. Tämän lisäksi, vaikka kriittinen kuormakerroin on esimerkiksi kaksi kertaa pienempi, on nurjahduspituus kaavan (2.18) mukaan noin 1,414-kertainen.

Taulukossa 3.2 on esitetty teräskiloina, kuinka paljon voidaan kuvan 3.20 tapauksessa hyötyä taloudellisesti, kun käytetään nurjahduspituutena jousitetun palkin tuottamaa

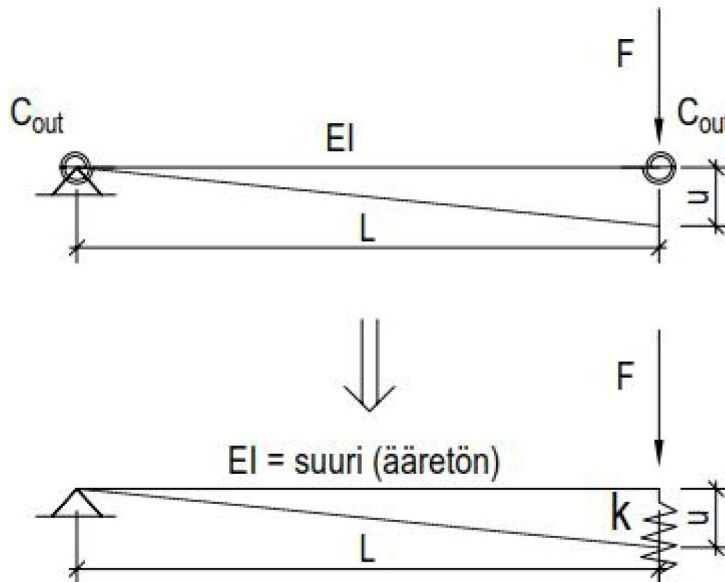
nurjahduspituutta verrattuna perinteiseen menetelmään, että käytetään nurjahduspituutena koko nurjahdustuennan välimatkaa. Oletetaan esimerkiksi teollisuushallin koostuvan vastaavista ristikkopilareista, joita on yhteensä 20. Paarteissa oletetaan vaikuttavan puristava voima 800kN.

**Taulukko 3.2** Kehitetyn laskentamenettelyn tuottaman nurjahduspituuden antama taloudellinen hyöty verrattuna perinteiseen menetelmään.

	$L_{cr}$	Valittu profiili	Käyttöaste	Paino	Paino yhteensä (20 kpl)
Työn laskentamenettely	8600 mm	SHS200x200x10,0	95 %	57 kg/m	31920 kg
Perinteinen menettely	28000 mm	HK350-15-15x350	95 %	158 kg/m	88368 kg

Taulukossa 3.2 merkintä HK tarkoittaa hitsattua koteloa, jonka perässä olevat luvut 350 ja 15 tarkoittavat kotelon äärimittoja sekä uumalevyjen ja laippojen paksuuksia. Taulukosta voidaan selkeästi nähdä nurjahduspituuden pienenemisen vaikutus teräskiloihin.

Kuvassa 3.18 suurennettuna esitetyn translaatiojousen jäykkyys saadaan laskettua kuvan 3.21 analogialla.



**Kuva 3.21** Jousituetun palkin jousijäykkyyden määrittäminen.

Kuvan 3.21 palkki kuvaa uumasauvaa, joka on liitetty päistään oikeilla jousijäykkyyksillä paarteisiin. Termi  $C_{out}$  koostuu uumasauvan ja paarteen jousijäykkyydestä sekä tukevan paarteen vääntöjäykkyydestä ja sen tarkempi laskenta on esitetty liitteessä 2. Kun jousit

on määritelty, saadaan pään siirtymän avulla laskettua rakenteen tuottama translaatiojousi uumasauvan päähän kaavasta

$$k = \frac{F}{u}. \quad (3.4)$$

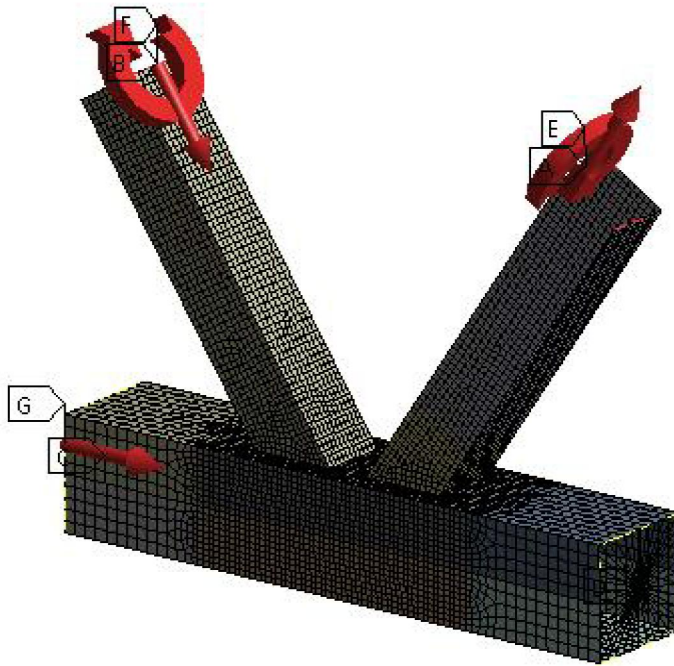
Kaava (3.4) on perinteinen jousi-palkki-systeemin yhtälö, jossa  $F$  on jouseen vaikuttava voima ja  $u$  on jousen puristuma/venymä.

### 3.5 Rasitetun K-liitoksen kapasiteetti nurjahdusta vastaan

Kun ristikko halutaan hyödyntää kokonaisuutena poikittaistukemattoman paarteen nurjahdusta vastaan, liitoksien jäykkyydet otetaan huomioon todellisina. Tämän työn mitoitusten menetelmässä kuormitus on sen tyyppinen, että se vaikuttaa suoraan normaalivoimana molemmissa paarteissa. Todellisuudessa esimerkiksi ristikkopilaria kuormittaa tuuli-kuorma, jolloin uumasauvoissa on aksiaalisia voimia, jotka vaikuttavat suoraan liitokseen eikä tätä ole otettu huomioon tähän mennessä liitoksen jäykkyyttä laskettaessa.

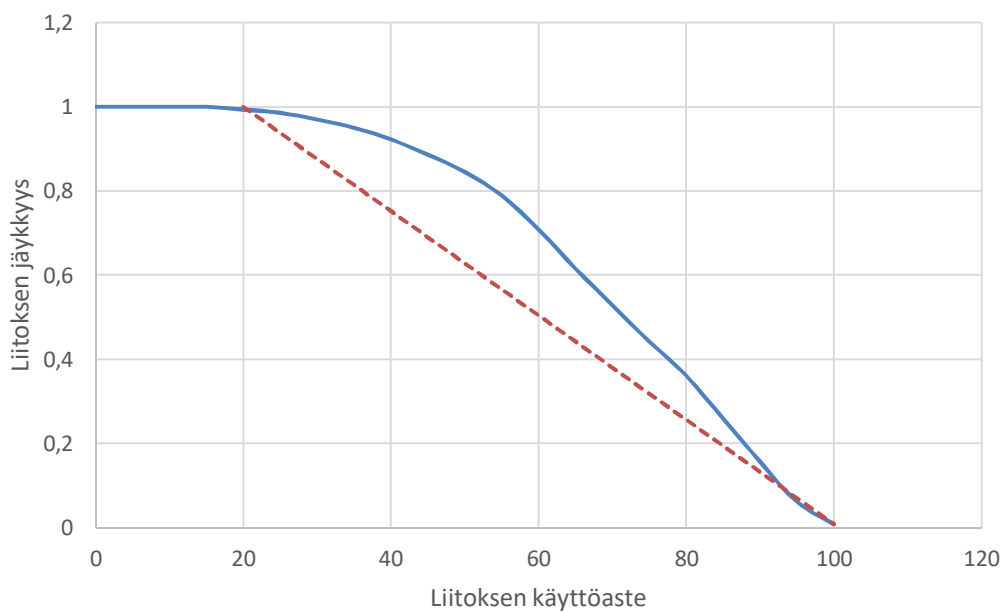
Asia voidaan hoitaa perustellusti varmalle puolelle siten, että tehdään lineaarinen interpolaatio täyden jäykkyyden ja nollajäykkyyden välillä. Täysi jäykkyys on liitoksen käyttöasteen ollessa 0-20% ja nollajäykkyys, kun liitoksen käyttöaste on 100%. Helposti voidaan mieltää, että liitoksen käyttöasteen kasvaessa nolasta kohti 100 %:a, alussa jäykkyys ei juuri muutu paarteen pinnan jännityksien pysyessä kimmoisella alueella. Kun jännitykset kasvavat, paarteen pinta alkaa jossain vaiheessa plastisoitua ja jäykkyys pienee, kunnes se lopulta menee nolnaan. Todennetaan edellä mainittu ilmiö FEM-laskennalla kuormittamalla K-liitosta uumasauvojen normaalivoimilla kuvan 3.22 mukaisesti.





**Kuva 3.22** K-liitos kuormitettuna normaalivoimilla ja taivutusmomenteilla.

Liitosta kuormitetaan kuvan 3.22 mukaisesti siten, että normaalivoimat rasittavat liitosta ensin, jonka jälkeen uumasauvoja aletaan taivuttaa. Tällä menetelmällä lasketaan liitoksen rotaatiojäykkyys eri normaalivoimien eli toisin sanoen käyttöasteiden arvoilla. Kuvassa 3.23 on esitetty ehjällä viivalla liitoksen käyttöasteen vaikutus sen rotaatiojäykkyyteen.



**Kuva 3.23** Liitoksen käyttöasteen vaikutus sen rotaatiojäykkyyteen.

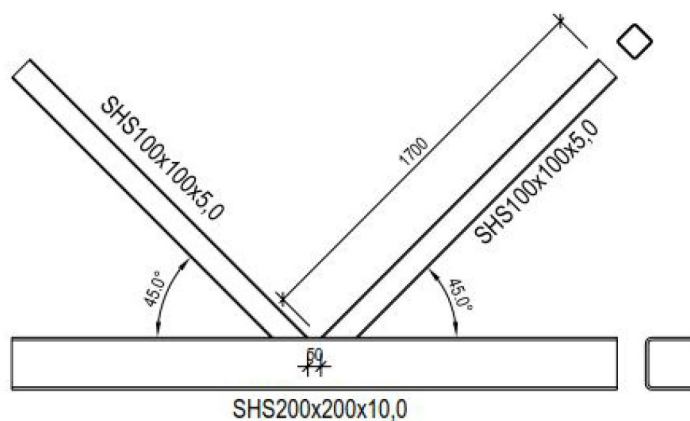
Kuvaan 3.23 on piirretty katkoviivalla lineaarinen malli, jota tämän työn menetelmässä käytetään. Lineaarinen interpolointi tehdään liitoksen käyttöasteesta 20% käyttöasteeseen 100%. Kuvasta nähdään selkeästi, että linearisoitu oletus on aina suunnittelussa varmallalla puolella, sillä se tuottaa liitoksen jäykkyydelle pienempiä arvoja ja johtaa näin ollen poikittaistukemattoman paarteen nurjahduspituuden suurempiin arvoihin.

Tämän lisäksi liitoksen mitoituksessa tulisi ottaa huomioon tasosta pois päin syntyvä momentti. Onhan selvää, että mikäli tukematon paarre olisi erillään, sen nurjahduspituus olisi paarteen pituus itsessään. Nyt kuitenkin hyödynnetään uumasauvojen taivutusjäykkyyttä sekä liitosjäykkyyttä tukevaan paarteeseen, jolloin ne luonnollisesti rasittuvat siitä, että niiden täytyy pitää tukematon paarre paikallaan. Kuitenkin esimerkiksi lähteessä [9] ei oteta kantaa liitokseen kertyvään momenttiin, kun lasketaan poikittaistukemattoman paarteen nurjahduspituutta. Siinä uumasauvan liitos tukevaan paarteeseen oletetaan täysin jäykäksi ja nurjahtavaan paarteeseen liitos oletetaan nivelelliseksi. Kyseinen lähde on toisaalta vuodelta 1982. Kuitenkin CIDECT on julkaissut vuonna 2009 oppaan ”Design Guide 3”, jossa edelleen viitataan tässä kohtaa samaan lähteeseen [8]. Tässä työssä haetaan kuitenkin liitokseen kertyvälle momentille vertailutuloksia kappaleessa 4, kun lasketaan epälineaarista laskentaa. Kappaleessa 6 lasketaan nurjahduspituudelle vertailuarvoja lähteen [9] menetelmällä.

## 4. LASKENTAMENETTELYJEN TODENTAMINEN FEM-LASKENNALLA

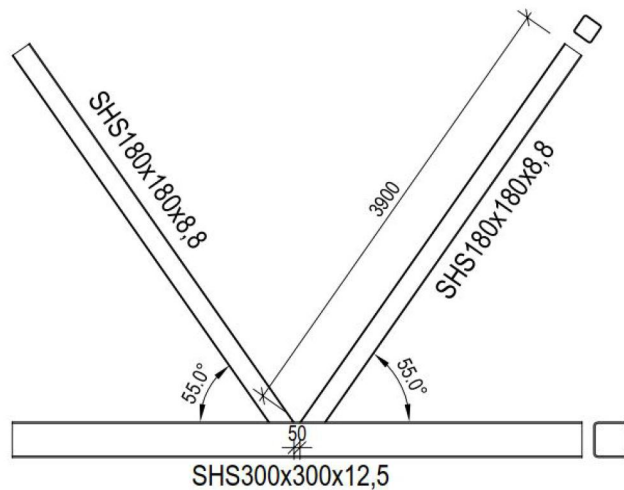
### 4.1 K-liitoksen rotaatiojäykkyys

Liitoksen rotaatiojäykkyyden laskentaperusteet on esitetty kappaleessa 3.3 sekä liitteessä 1. Lasketaan tässä esimerkinomaisesti läpi kahden liitoksen rotaatiojäykkyydet, joita voidaan käyttää seuraavan kappaleen palkkielementtimallissa, kun lasketaan vertailutulosta kuorielementtimallille. Valitaan ensimmäiseksi esimerkkiin liitos, jonka paarteen profiili on SHS200x200x10 ja uumasauvojen profiilit ovat SHS100x100x5. Valitaan sauvojen kulmiksi 45 astetta ja uumasauvan pituudeksi 1,7 metriä. Uumasauvojen välinen etäisyys on 50 mm. Liitosta kuormitetaan uumasauvojen päistä momentilla 1 kNm. Kuvassa 4.1 on esitetty ensimmäinen liitos.



**Kuva 4.1** Ensimmäisen tutkittavan liitoksen geometria.

Toisen valitun liitoksen paarteen profiili on SHS300x300x12,5 ja uumasauvan profiili SHS180x180x8,8. Uumasauvan pituus on 3,9 metriä sekä uumasauvan ja paarteen välinen kulma 55 astetta. Kuvassa 4.2 on esitetty vastaavasti toinen tutkittava liitos.



**Kuva 4.2** Toisen tutkittavan liitoksen geometria.

Edellä esitettyjä liitoksia kuormitetaan kolmella eri kuormitustapauksella kuvan 3.17 mukaisesti. Taulukkoon 4.1 on koottu edellä eri kuormitustapausten siirtymien arvot sekä näiden keskiarvo.

**Taulukko 4.1** Kahden erilaisen tutkittavien K-liitoksien rotaatiojäykkyydet tasosta poispäin.

	LC1	LC2	LC3	Keskiarvo
LIITOS 1				
$w_{tot}$ [mm]	3,651	4,280	3,054	
$w$ [mm]	2,765	2,952	2,578	
$w_{con} = w_{tot} - w$ [mm]	0,886	1,327	0,476	
$C$ [kNm/rad]	1919	1281	3573	2258
LIITOS 2				
$w_{tot}$ [mm]	2,500	3,318	1,712	
$w$ [mm]	1,601	1,855	1,347	
$w_{con} = w_{tot} - w$ [mm]	0,900	1,463	0,364	
$C$ [kNm/rad]	4335	2665	10966	5899

Seuraavassa kappaleessa lasketaan ensin kuorielementeillä kahden erikokoisen ristikkopilarin sekä yhden kattoristikon linearisoitu nurjahdusanalyysi. Tämän jälkeen lasketaan samat rakenteet palkkielementeillä käyttäen määritettyjä jousijäykkyyksiä ja todennetaan tämän avulla, että jousivakion määrittäminen työssä esitettyllä tavalla on pätevä.

## 4.2 Linearisoitu nurjahdusanalyysi ja eurokoodin mukainen käyttöaste

Lasketaan kahden eri kokoisen ristikkopilarin sekä yhden kattoristikon linearisoidut nurjahdusanalyysit. Ristikkopilarin uumasauvojen ja paarteiden profiilit ovat samat kuin edellisessä kappaleessa laskettujen liitoksien profiilit. Seuraavissa laskelmissa ei oteta vielä huomioon liitoksen käyttöasteiden vaikutusta liitosjäykkyyteen, vaan pyritään todentamaan kappaleiden 3.3 ja 3.4 mukaiset jousianalogiat FEM-laskennan avulla. Kappaleessa 5 lasketaan kaksi todellista rakennetta, joissa otetaan huomioon todelliset kuormat ja siinä laskentaan otetaan mukaan myös liitoksien käyttöasteiden vaikutus, niin kuin se on suunnittelussa suositeltavaakin tehdä.

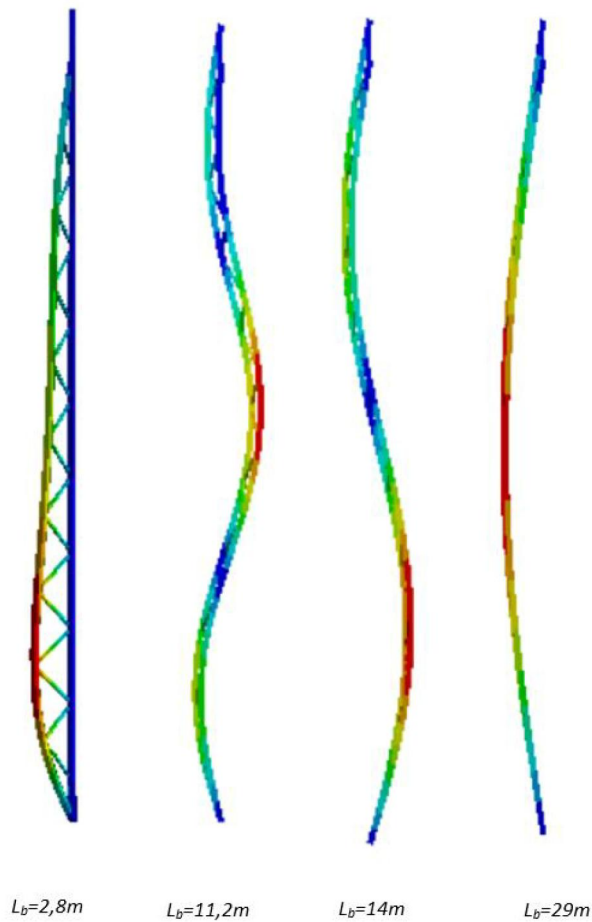
### 4.2.1 Tulokset käyttäen kuorielementtejä

Lasketaan ensin 28 metriä korkean ristikkopilarin linearisoitu nurjahdusanalyysi, jonka avulla tuotetaan sisäpaarteelle nurjahduspituus. Tulokset haetaan tapauksille, joissa ulkopaarre on tuettu täysin (jokaisesta K-liitoksesta, tuennan väli 2,8 metriä), ulkopaarre on tuettu 8,4 metrin välein (joka kolmannesta K-liitoksesta), ulkopaarre on tuettu 14 metrin välein (joka viidennestä K-liitoksesta) sekä tapaukselle, että ulkopaarretta ei ole tuettu lainkaan. Nurjahduspituus lasketaan Eulerin yhtälöstä (2.18), kun kriittinen kuorma tunnetaan. Taulukkoon 4.2 on koottu edellä mainittujen tapauksien kriittiset kuormat ja nurjahduspituudet laskettuna Ansys-ohjelmalla kuorielementein sekä lineaarisella interpoloinnilla. Taulukossa on lisäksi esitetty eurokoodin mukaiset kestävyudet, joissa otetaan huomioon häiriötekijät yhtälössä (2.39) esitetyllä kertoimella. Eurokoodin mukaiset kestävyudet on laskettu käyttäen nurjahduspituuksia, jotka saadaan Ansys-tulosten avulla. Tällä tavoin saadaan vertailupohjaa, kun kappaleessa 4.3 lasketaan epälineaarista laskentaa ja rakennetta häiritään eurokoodin mukaisella häiriöllä.

**Taulukko 4.2** 28m\*1,4m ristikkopilarin kriittiset kuormat ja nurjahduspituudet laskettuna Ansys-ohjelmalla kuorielementein sekä lineaarisella interpoloinnilla.

		$L_b=2,8\text{m}$	$L_b=11,2\text{m}$	$L_b=14\text{m}$	$L_b=29\text{m}$
Kuorielementit	$N_{cr}$	2125 kN	992 kN	465 kN	126 kN
	$L_{cr}$	6439 mm	9424 mm	13770 mm	26500 mm
Lineaarinen interpolointi	$L_{cr}$	6439 mm	13350 mm	16080 mm	28000 mm
Erotus		0 %	+42 %	+17 %	+5 %
$N_{b,Rd} / EC3$		1246 kN	724 kN	380 kN	113 kN

Kuvassa 4.3 on esitetty ristikkopilarin nurjahdusmuodot edellä mainituin reunaehdoin. Nurjahdusmuodot on kuvattu ristikon ”sisältä” päin eli pilarin sisäpaarteen puolelta.



**Kuva 4.3**  $28m*1,4m$  ristikkopilarin nurjahdusmuodot taulukon 4.2 mukaisin tuentaehtoin.

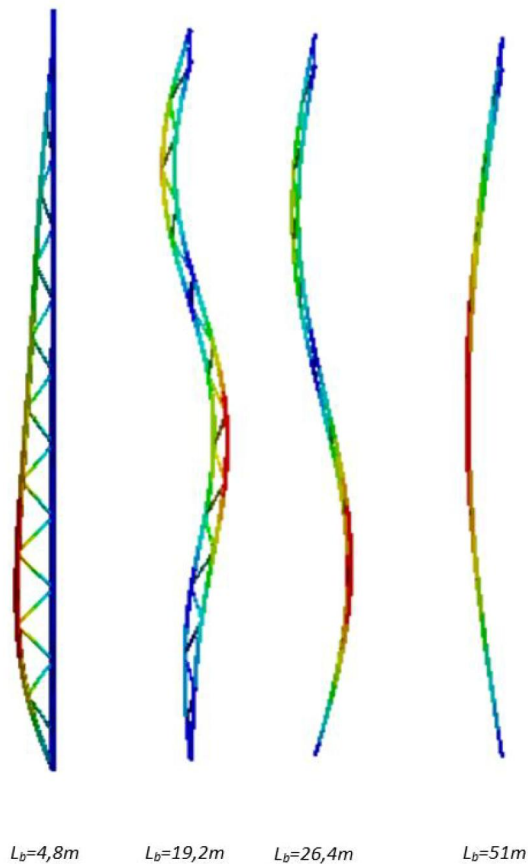
Kuvasta 4.3 selkeästi voidaan nähdä tuentavälin merkityksen sisäpaarteen nurjahduspituudelle. Mitä harvemmin tukeva parre on tuettu, sitä helpommin se nurjahtaa sisäpaarteen mukana.

Taulukossa 4.3 on vastaavat tulokset isommalle, noin 50 metriä korkealle ja 3,5 metriä leveälle ristikkopilarille.

**Taulukko 4.3**  $50m*3,5m$  ristikkopilarin kriittiset kuormat ja nurjahduspituudet laskettuna Ansys-ohjelmalla kuorielementein sekä lineaarisella interpoloinnilla.

		$L_b=4,8m$	$L_b=19,2m$	$L_b=26,4m$	$L_b=51m$
Kuorielementit	$N_{cr}$	2540 kN	1248 kN	621 kN	164 kN
	$L_{cr}$	12236 mm	17456 mm	24746 mm	48154 mm
Lineaarinen interpolointi	$L_{cr}$	12236 mm	24010 mm	29890 mm	50000 mm
Erotus		0 %	+38 %	+21 %	+4 %
$N_{b,Rd} / EC3$		1728 kN	976 kN	525 kN	150 kN

Kuvassa 4.4 on esitetty isomman ristikkopilarin nurjahdusmuodot vastaavalla tavalla kuin kuvassa 4.3.



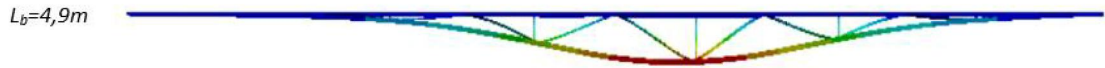
**Kuva 4.4** 50m\*3,5m ristikkopilarin nurjahdusmuodot taulukon 4.3 mukaisin tuentaehdoin.

Taulukossa 4.4 on esitetty vastaavat tulokset 36 metriä pitkälle kattoristikolle. Tuennat yläpaarteessa on 4,9 metrin välein, jokaisesta K-liitoksesta, kuvastaen yläpaarteeseen ”täyttä” tuentaa. Kriittisen kuorman arvo taulukossa on alapaarteen keskellä, missä puristus voidaan olettaa olevan suurin.

**Taulukko 4.4** Kattoristikon kriittiset kuormat ja nurjahduspituudet laskettuna Ansys-ohjelmalla kuorielementein sekä lineaarisella interpoloinnilla.

		$L_b=4,9\text{m}$
Kuorielementit	$N_{cr}$	613 kN
	$L_{cr}$	7673 mm
$N_{b,Rd} / EC3$		450 kN

Kuvassa 4.5 on vastaavasti esitetty kattoristikon nurjahdusmuoto, kun yläpaarre on tuettu jokaisesta K-liitoksesta.



**Kuva 4.5** Kattoristikon nurjahdusmuodot taulukon 4.4 mukaisin tuentaehdoin.

Kuvasta 4.5 voidaan selvästi nähdä, että alapaarre ei lähde nurjahtamaan heti päistään puoliaaltoon. Tämä johtuu luonnollisesti siitä, että kuorman vaikuttaessa suoraan ylöspäin yläpaarteessa, alapaarre menee päistään hieman vedolle. Tämän lisäksi uumasauvojen taivutusjäykkyydellä sekä liitosjäykkyydellä on suuri merkitys.

## 4.2.2 Tulokset käyttäen palkkielementtejä

Edellisessä kappaleessa kriittisten kuormien arvot on määritetty kuorielementeillä tehdystä mallista, jolloin liitoksien jäykkyydet muodostuvat automaattisesti oikein. Arki-suunnittelussa ei kuitenkaan pääsääntöisesti ole aikaa/resursseja tehdä rakenteesta kuori-mallia, vaan nurjahduspituuden määrittäminen tulee jollain tavalla yksinkertaistaa, että se voidaan suoraan syöttää suunnittelijan laatimaan palkkielementtimalliin. Samanlainen menettely voidaan toteuttaa myös palkkielementeillä tehtyyn malliin, mutta tällöin liitoksien rotaatiojäykkyydet on oltava tiedossa, että ne voidaan malliin todellisina syöttää. Menettely on varsin käyttökelpoinen, sillä onhan suunnittelijalla olemassa suunnittelukohteesta joka tapauksessa palkkielementein muodostettu malli. Jousijäykkyys määritetään kappaleen 3.3 mukaisin periaattein. Tässä tutkittavien ristikkopilarien paarteet ja uumasauvat ovat kappaleessa 4.1 esitetyn laskentaesimerkin mukaiset. Näin ollen muodostetaan ristikkopilarista palkkimalli RFEM-ohjelmalla, ja lisätään uumasauvojen päihin jousijäykkyydet taulukon 4.1 mukaisesti. Taulukkoon 4.5 on koottu palkkielementein tehdyn 28 metriä korkean ristikkopilarin tulokset vastaavalla tavalla kuin edellisessä kappaleessa.

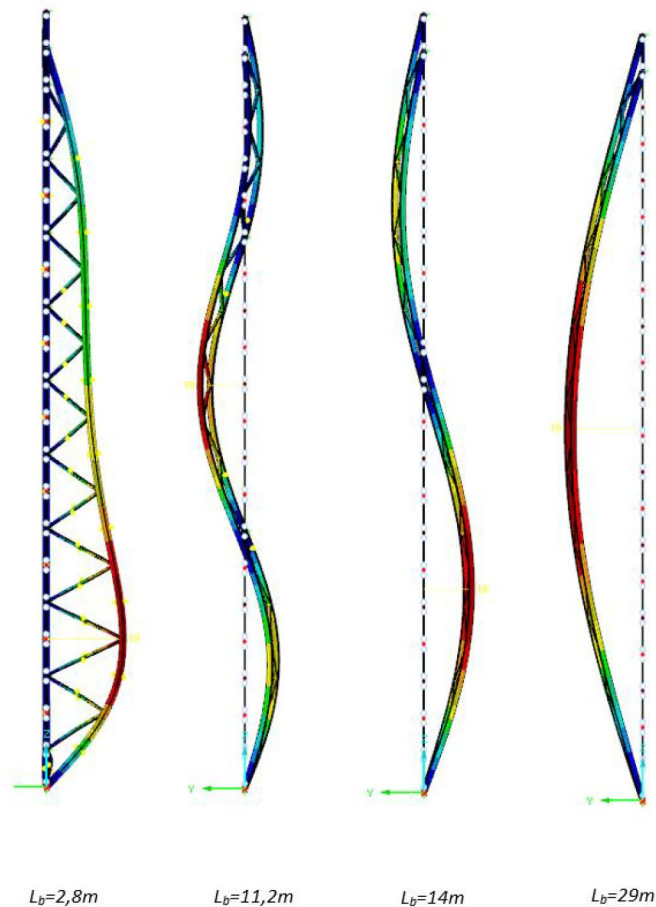
**Taulukko 4.5** 28m\*1,4m ristikkopilarin kriittiset kuormat ja nurjahduspituudet laskettuna RFEM-palkkimallilla sekä lineaarisella interpoloinnilla.

		$L_b=2,8\text{m}$	$L_b=11,2\text{m}$	$L_b=14\text{m}$	$L_b=29\text{m}$
Palkkielementit	$N_{cr}$	1976 kN	912 kN	430 kN	116 kN
	$L_{cr}$	6679 mm	9829 mm	14314 mm	27560 mm
Lineaarinen interpolointi	$L_{cr}$	6679 mm	13510 mm	15790 mm	28000 mm
Erotus		0 %	+37 %	+10 %	+1,6 %
$N_{b,Rd} / EC3$		1191 kN	676 kN	354 kN	105 kN



Taulukon 4.5 tuloksien mukaan palkkielementeillä tehdyn ristikkopilarin tulokset ovat varsin käyttökelpoisia, kun liitoksen jousijäykkyys otetaan huomioon todellisena. Vertaillen taulukoiden 4.2 ja 4.5 nurjahduspituuksia, kuorielementeillä ja palkkielementeillä mallinnetun pilarin tulokset poikkeavat vain hyvin vähän toisistaan. Tämä johtuu muun muassa siitä, että palkkimallissa uumasauvojen pituus on hieman eri kuin kuorimallissa, sillä kuorimallissa uumasauvat liittyvät paarteen pintaan ja palkkimallissa ne liittyvät paarteen keskilinjaan.

Kuvassa 4.6 on vastaavalla tavalla esitetty palkkielementeillä mallinnetun 28 metriä korkean ristikkopilarin nurjahdusmuodot.



**Kuva 4.6** Palkkielementeillä mallinnetun 28 metriä korkean ristikkopilarin nurjahdusmuodot taulukon 4.5 mukaisin tuentaehdoin.

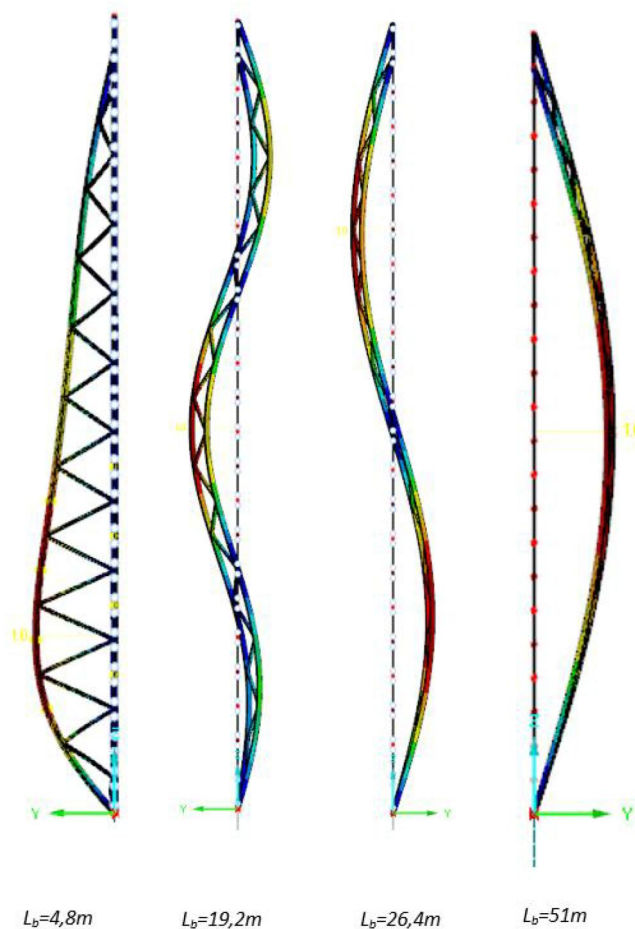
Vertailemalla kuvien 4.6 ja 4.3 nurjahdusmuotoja, voidaan todeta, että ne ovat hyvin samanlaiset. Tämäkin todistaa omalta osaltaan liitoksen rotaatiojäykkyyden laskentamenetelyn oikeellisuutta.

Edelleen tehdään samat tarkastelut isommalle, noin 50 metriä korkealle ristikkopilarille. Taulukossa 4.6 on laskettu kriittisiä kuormia ja nurjahduspituuksia eri tuentaväleillä.

**Taulukko 4.6** 50m\*3,5m ristikkopilarin kriittiset kuormat ja nurjahduspituudet laskettuna RFEM-ohjelmalla palkkielementein sekä lineaarisella interpoloinnilla.

		$L_b=4,8\text{m}$	$L_b=19,2\text{m}$	$L_b=26,4\text{m}$	$L_b=51\text{m}$
Palkkielementit	$N_{cr}$	2560 kN	1350 kN	619 kN	160 kN
	$L_{cr}$	12180 mm	16780 mm	24786 mm	48750 mm
Lineaarinen interpolointi	$L_{cr}$	12180 mm	23970 mm	29870 mm	50000 mm
Erotus		0 %	+42%	+20%	+2,6%
$N_{b,Rd} / EC3$		1738 kN	1043 kN	524 kN	147 kN

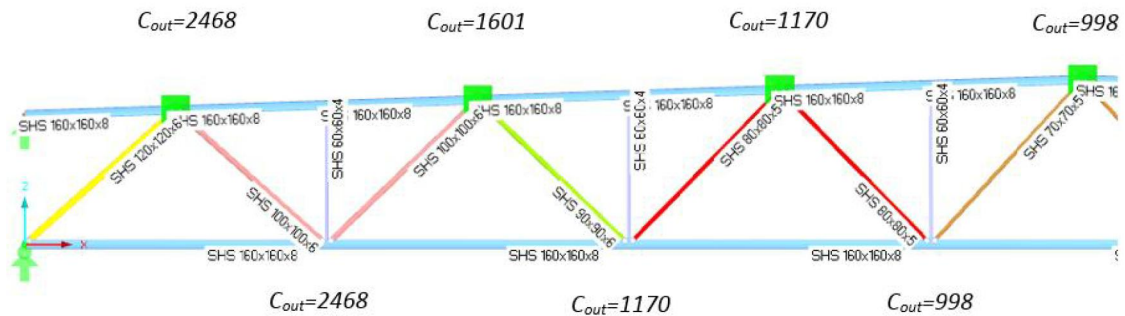
Kuvassa 4.7 on esitetty nurjahdusmuodot 50 metriä korkealle ristikkopilarille tuentavälin vaihdellessa.



**Kuva 4.7** Palkkielementeillä mallinnetun 50 metriä korkean ristikkopilarin nurjahdusmuodot taulukon 4.6 mukaisiin tuentaehdoin.

Sekä kriittisten kuormakertoimien, että nurjahdusmuotojen perusteella voidaan hyvin todeta, että työssä esitelty menetelmä liitoksen jousijäykkyyden laskentaan on toimiva.

Tarkastellaan seuraavassa vastaavalla tavalla kattoristikon kriittisiä kuormia ja nurjahduspituuksia. Esimerkin kattoristikossa uumasauvojen profiilit pienenevät reunalta keskelle päin mentäessä. Lasketaan tässä tapauksessa neljälle eri liitokselle jäykkyydet, joita palkkielementtimallissa käytetään. Näin saadaan mahdollisimman vertailukelpoisia tuloksia kuorielementtimallin kanssa. Arkisuunnittelussa suunnittelija voi kuitenkin resursien/ajan puutteen vuoksi käyttää jokaisessa liitoksessa pienimmän jäykkyyden antavaa liitosta. Lisäksi on hyvä ymmärtää, että tässä menetelmässä ei oteta huomioon vertikaalien tuomaa vaikutusta. Kuvassa 4.8 on esitetty kattoristikon profiilit sekä jokaisen liitoksen rotaatiojäykkyys tasosta poispäin. Jäykkyydet on laskettu käyttäen liittyvistä uumasauvoista pienempää ja pidempää. Ristikosta esitetään kuvassa vain puolet, jolloin kuvasta saadaan selkeämpi. Profiilit ovat symmetriset harjan molemmin puolin.



**Kuva 4.8** Kattoristikon profiilit ja jokaisen K-liitoksen rotaatiojäykkyydet.

Taulukossa 4.7 on koottuna eri reunaehdoin palkkielementein tehdystä mallista saadut kriittiset kuormat ja nurjahduspituudet.

**Taulukko 4.7** Kattoristikon kriittinen kuorma ja nurjahduspituus laskettuna RFEM-ohjelmalla palkkielementein sekä lineaarisella interpoloinnilla.

		$L_b=4,9\text{m}$
Palkkielementit	$N_{cr}$	608 kN
	$L_{cr}$	7698 mm
$N_{b,Rd} / EC3$		448 kN

Edellä esitetyn taulukon perusteella voidaan niin ikään todeta, että palkkielementeillä suoritettu nurjahdusanalyysi on varsin pätevä, kun liitosjäykkyydet otetaan oikeina huomioon. Vertailemalla taulukoiden 4.4 ja 4.7 kriittisten kuormakertoimien arvoja, tehdään samat havainnot kuin ristikkopilarin tapauksessa. Kuormakertoimet ovat suuruudeltaan hyvin lähellä toisiaan. Kuvassa 4.9 on esitetty vastaava nurjahdusmuoto.



**Kuva 4.9** Palkkielementein mallinnetun kattoristikon nurjahdusmuodot taulukon 4.7 mukaisin tuentaehdoin.

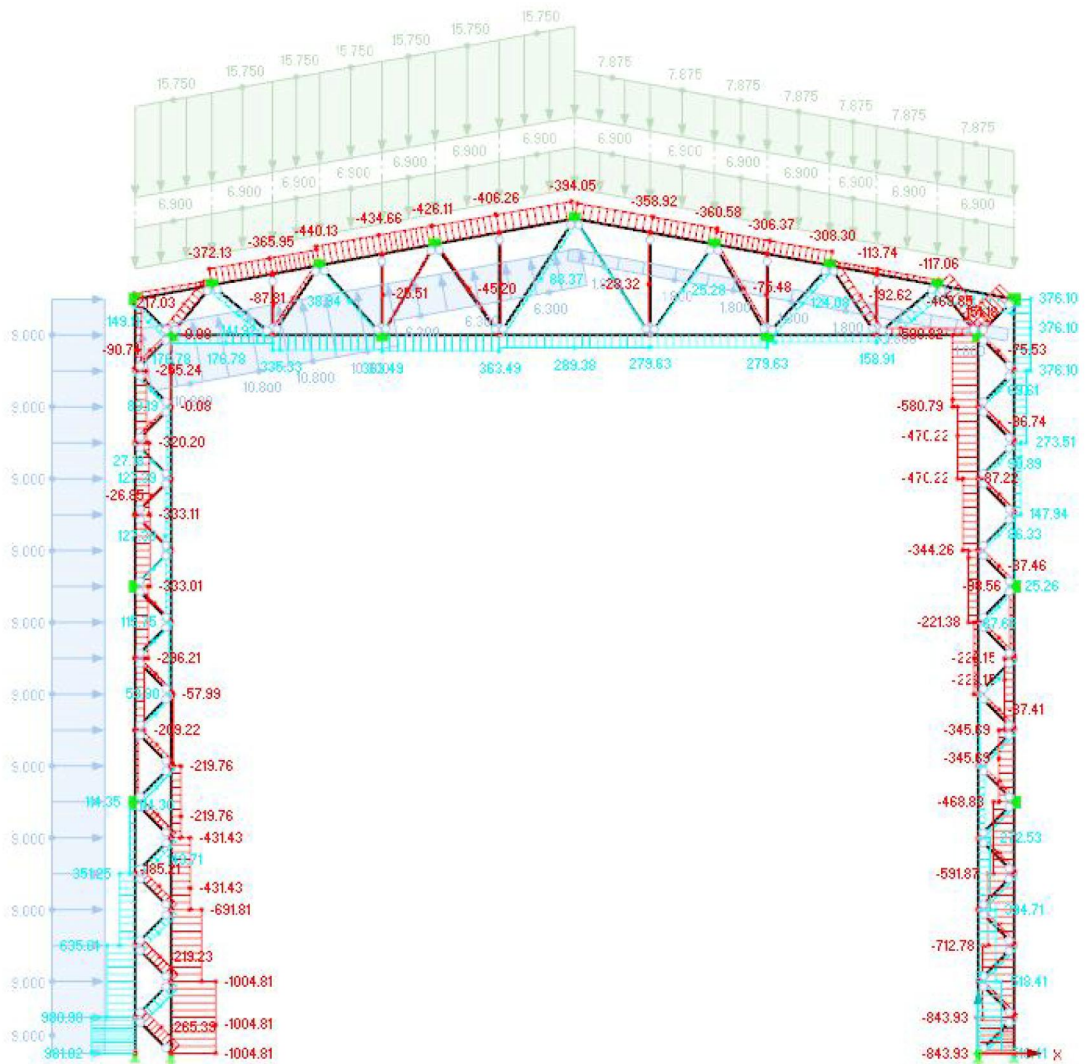
Kuvien 4.9 ja 4.5 nurjahdusmuotojen perusteella voidaan jälleen todeta liitoksen rotaatiojäykkyyden laskentamenettelyn olevan pätevä. Huomattakoon myös, että kuvassa 4.9 nurjahduskupla on hieman ”siirtynyt” oikealle. Tämä saattaa johtua muun muassa siitä, että liitoksen geometrian mallinnuksessa tulee pientä virhettä palkki- ja kuorielementtimallien välillä. Palkkielementtimallissa uumasauvojen keskilinjat kohtaavat samassa pisteessä paarteen keskilinjalla, kun kuorielementtimallissa/todellisuudessa uumasauvojen keskilinjat kohtaavat usein paarteen keskilinjän jommallakummalla puolella riippuen liitosalueen geometriasta. Lisäksi kuorielementeillä käytetään painekuormaa yläpaarteen pinnalla, kun palkkielementeillä käytetään viivakuormaa, jossa saattaa syntyä myös hieman eroavaisuutta voimien jakautumisessa. Siitä huolimatta tulokset ovat hyvin lähellä toisiaan ja niitä voidaan pitää yhtenevinä.

### 4.2.3 Tarkempi analyysi ottamalla huomioon paarteiden voima-suhteet

Edellisessä kappaleessa ristikkopilarin sisäpaarteessa oletettiin vaikuttavan tasainen puristava voima koko paarteen matkalla. Kuvissa 3.6 ja 3.7 kuitenkin on osoitettu, että todellisessa kehärakenteessa kuormat eivät näin tasaisesti jakaudu. Suunnittelija voi määrittää nurjahduspituuden palkkimallistaan käyttämällä oikeita (tai varmalla puolella olevia) liitoksien rotaatiojäykkyyksiä. Vaihtoehtoisesti, jos suunnittelija ei halua käyttää liitoksien jousijäykkyyksiä mallissaan, hän voi ratkaista nurjahduspituuden kappaleen 3.4 mukaisella jousituetulla palkilla. Tässä tapauksessa paarteessa kuitenkin oletetaan olevan tasainen puristava voima, joka on varmalla puolella oleva oletus.

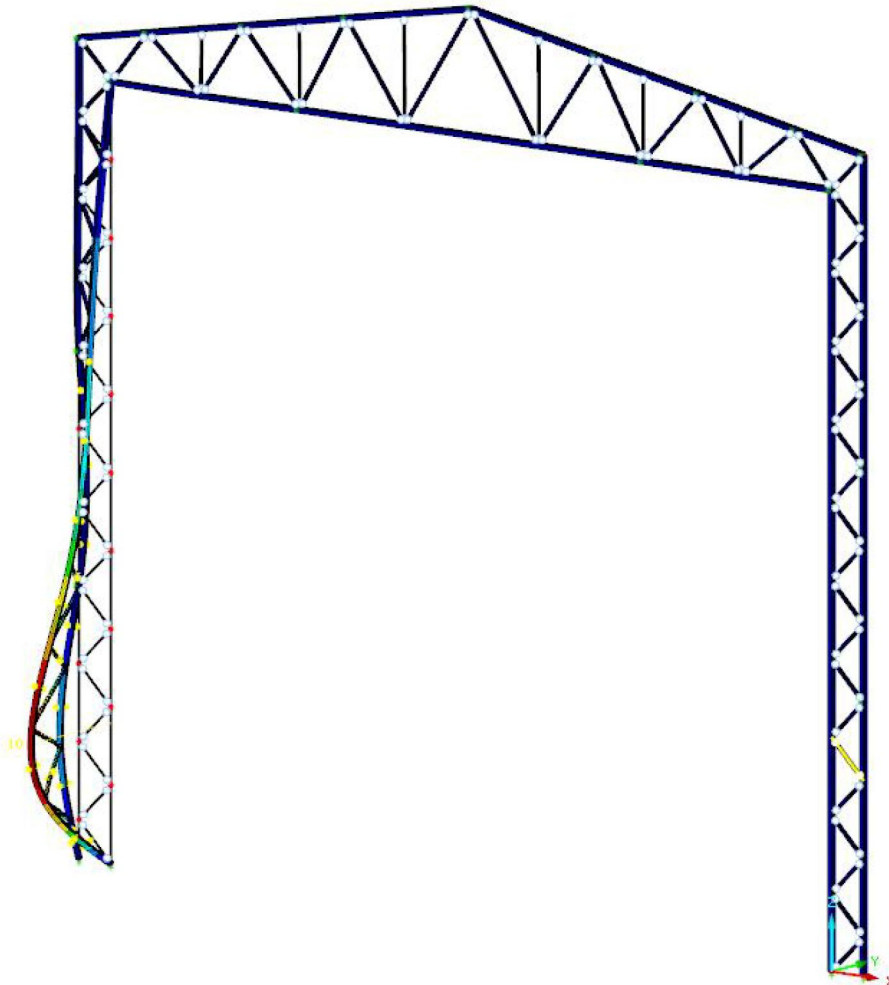
Käydään seuraavassa läpi, mitä vaikutusta normaalivoimien suhteella sisä- ja ulkopaarteen välillä on sisäpaarteen nurjahdukseen. Kun ulkopaarre on täysin tuettu, voimasuhteella ei ole suurta merkitystä, kuten voidaan helposti ymmärtää. Ristikkopilari voidaan kuitenkin käytännössäkin tukea harvemmin, esimerkiksi joka toisesta K-liitoksen kohdasta. Lasketaan kuvan 3.6 mukaisessa kehärakenteessa olevan ristikkopilarin sisäpaarteelle nurjahduspituudet ottaen normaalivoimien jakauma paarteiden välillä huomioon. Verrataan tämän jälkeen tuloksia edellisten kappaleiden laskelmiin, joissa sitä tutkittiin erillisenä rakenteena, ja puristavan kuorman ajateltiin olevan tasainen molemmissa paarteissa.

Oletetaan rakenteen toteutettavan siten, että ulkopaarre tuetaan 11,2 metrin välein kuvan 4.6 toisen tapauksen mukaisesti. Kun paarteissa oletetaan vaikuttavan tasainen puristava voima, kuorielementtimallin mukaan sisäpaarteen nurjahduspituus on 9,42 metriä ja palkkielementtimallin mukaan pituus on 9,83 metriä. Tähän perustuen otetaan laskentaan tarkemman tuloksen antavan kuorielementtimallin nurjahduspituus 9,42 metriä. Tutkitaan seuraavaksi samaa ristikkopilaria osana kehärakennetta. Suunnittelijan vastuulle jää valittavaksi nurjahduspituuden määräävät kuormitustapaukset. Käytännössä katsoen tämän tyyppisissä rakenteissa se tarkoittaa kuormitustapauksia, jotka aiheuttavat sisäpaarteeseen suurimman (piikin) tai mahdollisimman tasaisen puristusvoiman. Kuvassa 4.10 on ensimmäinen tutkittava kuormitustapaus, joka aiheuttaa ristikkopilarin sisäpaarteeseen suuren puristusvoiman. Tulee kuitenkin ottaa huomioon, että samalla ulkopaarteessa vaikuttaa suuri vetovoima.



**Kuva 4.10** Ensimmäinen kehärakenteen tutkittava kuormitustapaus. Kuvassa vallitseva kuormitus sekä normaalivoimajakauma.

Lasketaan RFEM-ohjelmalla linearisoitu nurjahdusanalyysi todellisten kuormitusten ja reunaehto-  
jen vallitessa. Kuvassa 4.11 on kehärakenteen se nurjahdusmuoto, jolla sisä-  
paarre selkeästi nurjahtaa tasosta ulospäin.

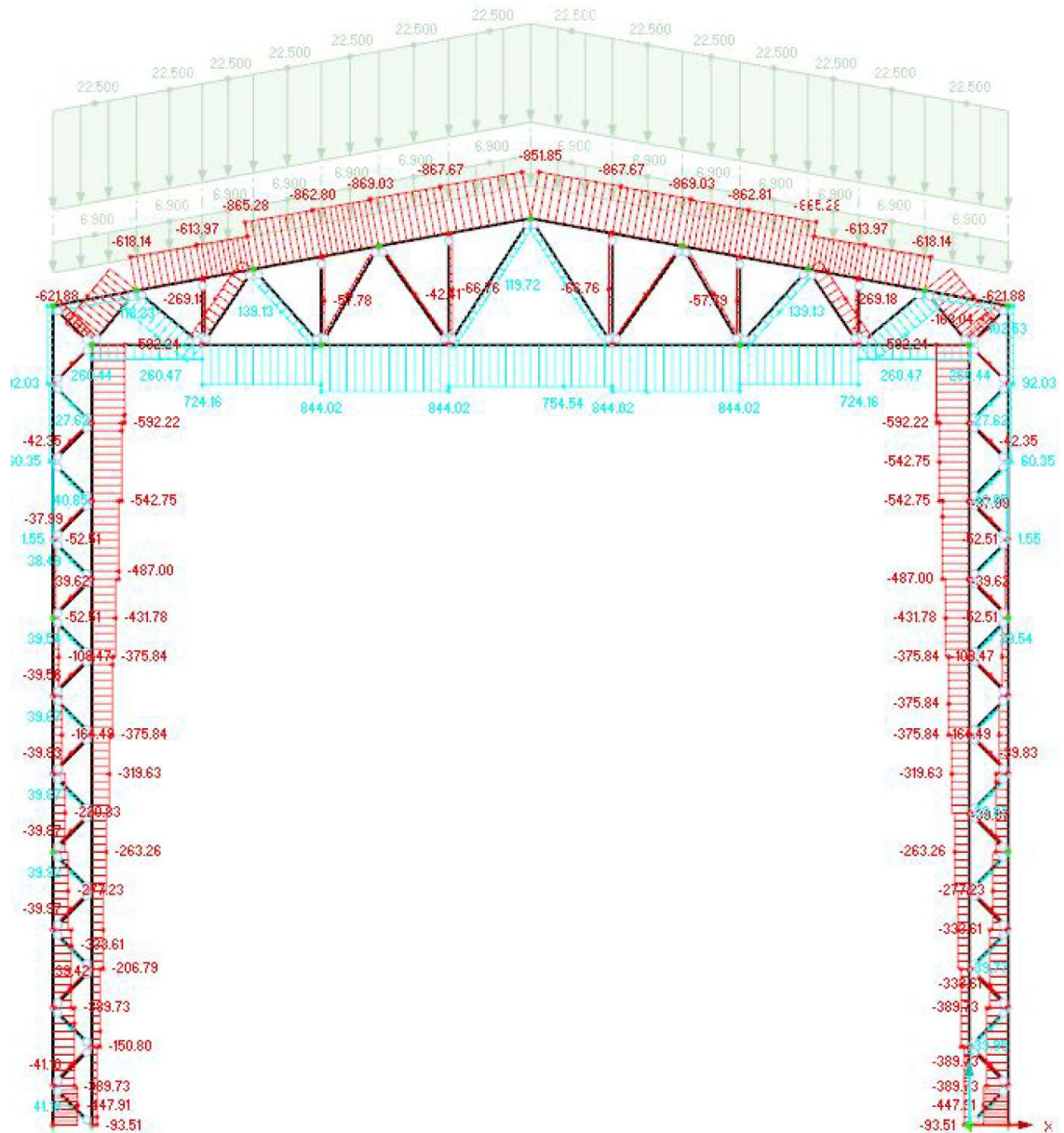


**Kuva 4.11** Kuvan 4.10 reunaehtoja vastaava se nurjahdusmuoto, jolla sisäpaarre nurjahtaa tasosta ulospäin.

Nurjahdusmuoto on juuri sellainen, kun helposti oli pääteltävissä. Sisäpaarre nurjahtaa suurimman puristavan voiman alueelta. Lasketaan tämän kuormitustapauksen perusteella neljälle alimmalle paarteen pätkälle eli paarteelle, jossa vaikuttaa kuvan 4.10 mukaan puristusvoima 58 kN – 1004 kN. Nurjahdusanalyysi mukaan kyseisen nurjahdusmuodon kriittinen kuormakerroin on 2,08, joka tarkoittaa kriittistä kuormaa  $1004\text{kN} \cdot 2,08 = 2088\text{kN}$ . Sijoittamalla tämä Eulerin yhtälöön, saadaan nurjahduspituudeksi 6,49 metriä.

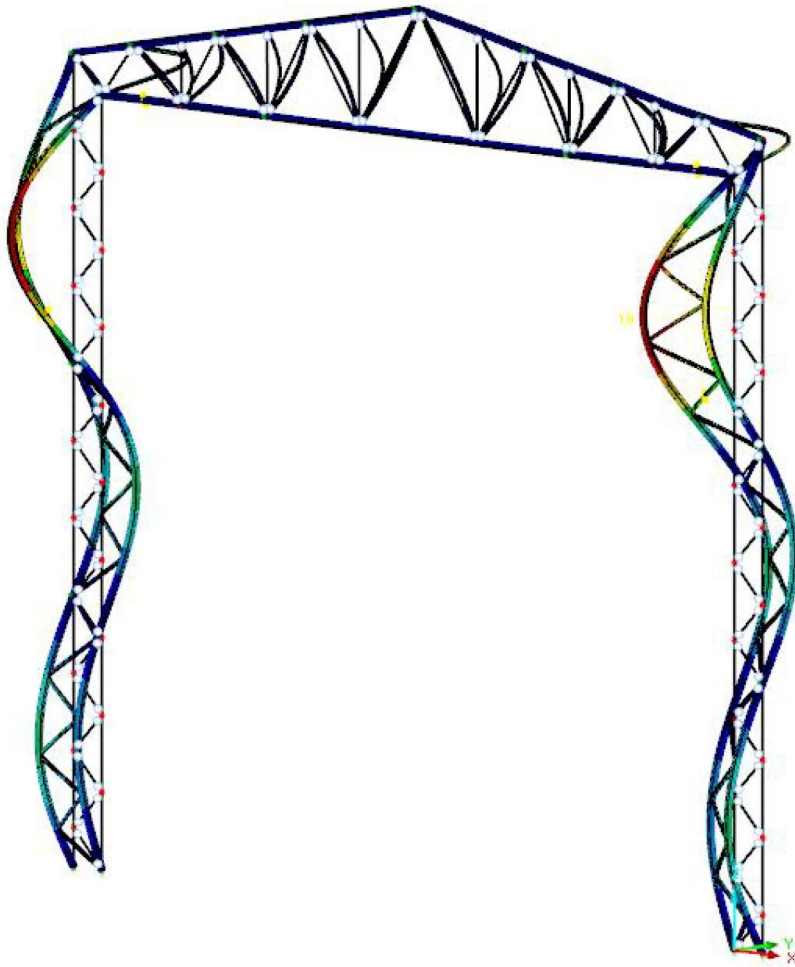
Seuraavaksi haetaan kuormitustapauksista se, joka aiheuttaa suuren puristuksen sisäpaarteen yläpäähän. Kuvassa 4.12 on toinen tutkittava kuormitustapaus. Tässä tapauksessa puristava normaalivoima on selkeästi sisäpaarteen yläpäässä suuri. On syytä myös ottaa

huomioon, että ulkopaarteissa on tässä tapauksessa hyvin vähän puristusta, ihan yläreunassa jopa vetoa.



**Kuva 4.12** Toinen kehärakenteen tutkittava kuormitustapaus. Kuvassa vallitseva kuormitus sekä normaalivoimajakauma.

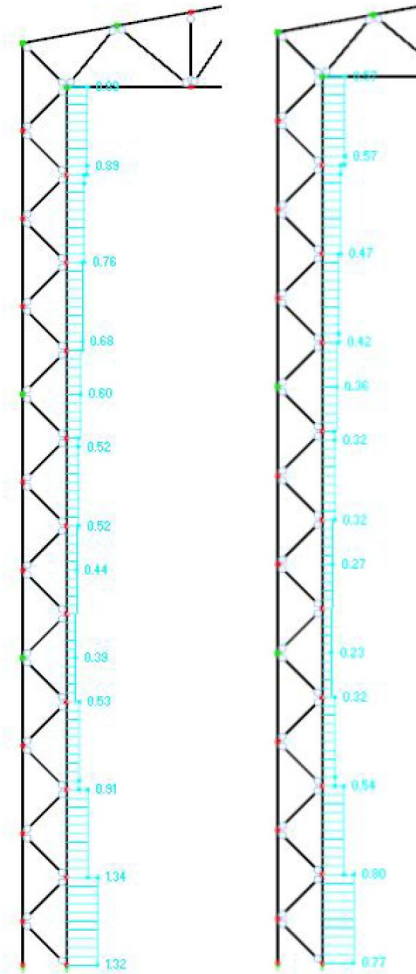
Lasketaan nurjahdusanalyysi tälle kuormitustapaukselle. Kuormakertoimen arvolla 3,34 ristikkopilari nurjahtaa selkeästi tasostaan. Kuvassa 4.13 on esitetty kyseinen nurjahdusmuoto.



**Kuva 4.13** Nurjahdusmuoto kriittisen kuormakertoimen 3,34 arvolla ja kuvan 4.12 reunaehtojen vallitessa.

Samalla logiikalla kuin paarteen alaosalle, lasketaan yläosalle nurjahduspituudeksi 6,68 metriä. Sisäpaarteelle on nyt määritetty kaksi eri nurjahduspituutta. Luonnollisesti suunnittelija voi käyttää myös suurempaa nurjahduspituutta koko paarteen matkalla. Tämän jälkeen suunnittelussa suoritetaan eurokoodin mukainen mitoitus. Tehdään se tässä kohdalla kahdella eri tavalla, ensin koko sisäpaarteelle annetaan nurjahduspituus 9,42 metriä ja toisessa vaiheessa asetetaan ala- ja yläosalle eri nurjahduspituudet edellä määritellyn mukaan. Mitoitetaan tämän jälkeen sisäpaarre kaikille kuormitusyhdistelmille eurokoodin mukaisesti. Kuvassa 4.14 on esitetty sisäpaarteen käyttöasteen edellä mainituille tapauksille.





**Kuva 4.14** Sisäpaarteiden käyttöasteet eurokoodin mukaan. Vasemmalla sisäpaarteella sama nurjahduspituus 9,42m ja oikealla alaosan nurjahduspituus on 6,49m ja yläosan 6,68m.

Kuvasta 4.14 nähdään, että käytettäessä nurjahduspituutena 9,42 metriä, sisäpaarteiden käyttöaste ylittää arvon 1. Kun otetaan huomioon paarteiden normaalivoimajakauma, käyttöastetta voidaan selkeästi redusoida (1,32  $\rightarrow$  0,77). Tämä osoittaa sen, että vedetyllä tai vähemmän puristetulla ulkopaarteella on stabiiliva vaikutus. On kuitenkin tapauskohtaista, milloin tätä menettelyä on arkisuunnittelussa järkevää käyttää. Menettely on aikaa ja resursseja vievää, eikä ole jokapäiväistä suunnittelua. On kuitenkin hyvä tiedostaa, että ottamalla normaalivoimien jakauma todellisen huomioon, voidaan todentaa ristikossa oleva lisäkapasiteetti.


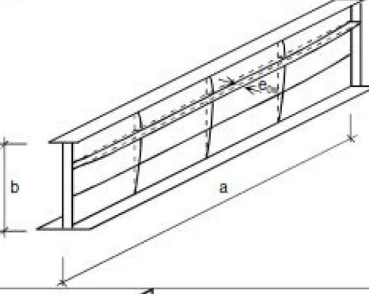
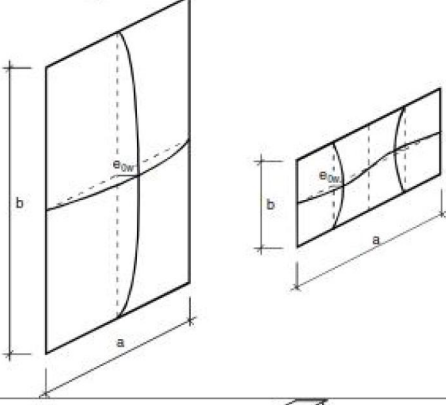
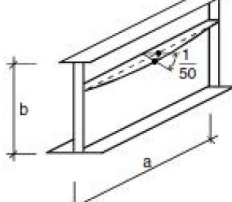
### 4.3 Epälineaarinen nurjahdusanalyysi

Tässä kappaleessa lasketaan epälineaarilla analyysillä samoja rakenteita kuin edellä. Epälinearisuutta rakenteeseen tuo materiaalimalli sekä geometrinen epälinearisuus (suurten siirtymien teoria). Materiaalimalli analyysissä on ideaaliplastinen, joka on esi-

tetty kuvassa 2.15. Edellisissä laskelmissa paarteen kestävyys nurjahdusta vastaan on laskettu käyttäen linearisoitua nurjahdusanalyysia sekä eurokoodin mukaista häiriötermiä. Epälineaarilla laskennalla on tarkoitus varmentaa tämä menettely käyttäen eurokoodin mukaisia häiriöitä ja kuormittaa rakennetta sen kantokykyynsä saakka. Lisäksi epälineaarilla laskennalla päästään tutkimaan nurjahdustuennan tukireaktioita sekä K-liitokseen kertyvää tasosta poispäin kertyvää momenttia.

Kuten kappaleen 2 alussa todettiin, eurokoodi sallii tämän tyyppisen rakenteen tarkastelun. Suurimman haasteen tähän oikeastaan tuo oikean alkuhäiriön määrittäminen. Taulukossa 4.8 on eurokoodin määräämät alkuhäiriön mallinnustavat erityyppisille epätäydellisyyksille.

**Taulukko 4.8** Epätäydellisyyksien mallinnustavat ja suuruudet eurokoodin mukaan. [15]

Epätäydellisyyden tyyppi	Tarkasteltava osa
Globaali. Sauva, jonka pituus on $l$	
Globaali. Pituusjäykiste, jonka pituus on $a$	
Paikallinen kenttä tai osakenttä	
Paikallinen jäykiste tai laippa, johon kohdistuu vääntö	

Epätäydellisyyden tyyppi	Tarkasteltava osa	Muoto	Suuruus
Globaali	Sauva, jonka pituus on $l$	Kaareva	Ks. standardin EN 1993-1-1 taulukko 5.1
Globaali	Pituusjäykiste, jonka pituus on $a$	Kaareva	Pienempi arvoista ( $a/400$ , $b/400$ )
Paikallinen	Levykenttä tai osakenttä, jonka lyhyempi jänne on $a$ tai $b$	Lommahdusta vastaava muoto	Pienempi arvoista ( $a/200$ , $b/200$ )
Paikallinen	Jäykiste tai laippa, johon kohdistuu vääntö	Kiertyvästi kaareva	$1 / 50$

Työssä tutkittavan paarteen stabiilisuus kuuluu yllä olevan taulukon ylimpään kohtaan. Globaalin sauvan, jonka pituus on  $l$ , häiriön suuruus tulee katsoa EN 1993-1-1 taulukosta 5.1. Alla olevaan taulukkoon 4.9 on tuotu tämä kyseinen eurokoodin taulukko.

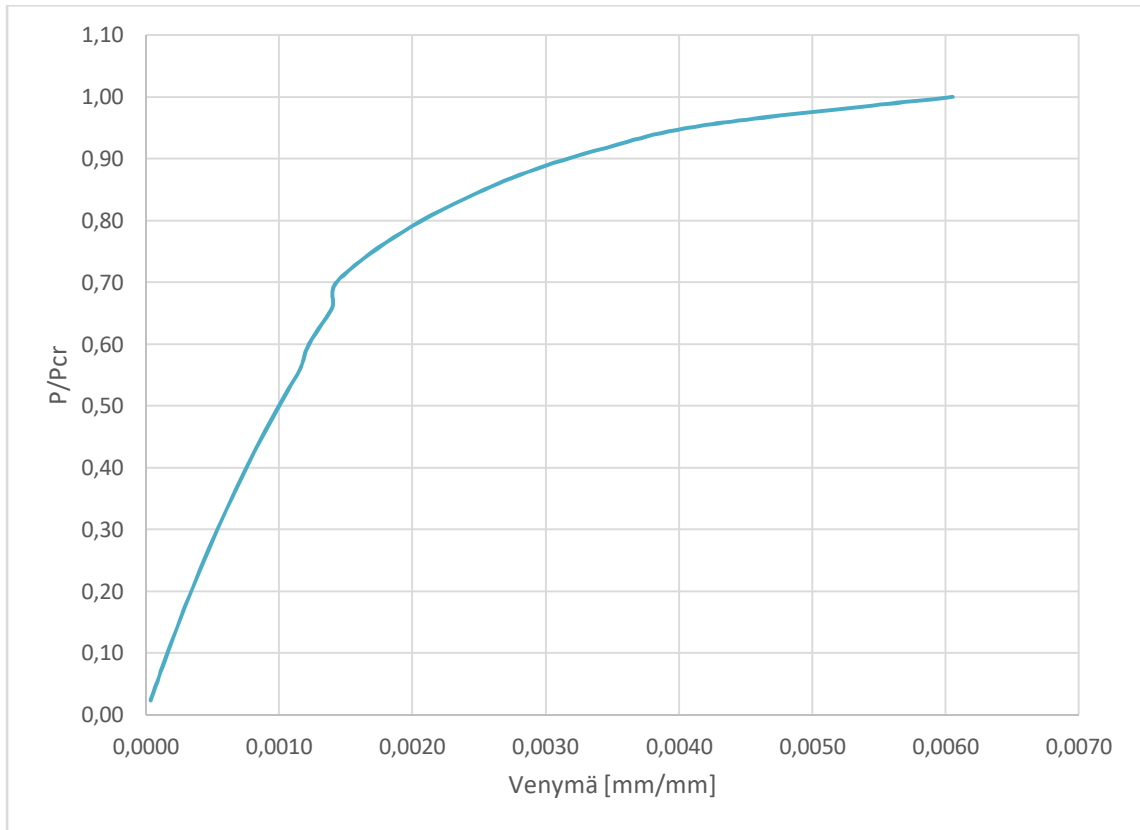
**Taulukko 4.9** Alkuepäätarkkuuksien mitoitusarvot eurokoodin mukaan. [14]

Taulukko 6.1 mukainen nurjahduskäyrä	Kimmenteorian mukainen analyysi	Plastisuusteori- an mukainen analyysi
	$e_0/L$	$e_0/L$
$a_0$	1/350	1/300
a	1/300	1/250
b	1/250	1/200
c	1/200	1/150
d	1/150	1/100

Putkiprofiilien, joista tämän työn ristikkorakenteet koostuvat, nurjahduskäyrä on eurokoodin mukaan c. Näin ollen plastisuusteorian mukaista analyysia tehdessä, alkuhäiriön suuruuden tulee yllä olevan taulukon mukaan olla  $L/150$ , jossa  $L$  on tutkittavan sauvan pituus. Itse tulkitseen tämän siten, että mitta  $L$  tarkoittaa nurjahdusmuodon kuplan pituutta. Eli niiden kahden pisteen välimatkaa, missä nurjahdusmuoto kääntyy puolelta toiselle. Näin ollen esimerkiksi kuvaa 4.3 katsottaessa, mittana  $L$  tulee käyttää koko paarteen pituus jaettuna kolmella. Valinta olisi varmasti selkeä, jos sisäpaarre olisi tuettu kolmannuksen välein. Nyt paarretta ei kuitenkaan ole tuettu, mutta uumasauvojen ja koko ristikon vääntöjäykkyyden kautta sisäpaarre saa ”virtuaalisen” tuennan, jolloin tämä valinta on mielestäni perusteltu.

### 4.3.1 Tulokset käyttäen kuorielementtejä

Tarkastellaan ensin edellä tutkittua ristikkopilaria. Lasketaan tulokset samoilla tuentaväleillä ja verrataan käyttöastetta linearisoidun analyysin ja eurokoodin kautta määritettyyn käyttöasteeseen. Rakennetta kuormitetaan sen kantokykyynsä saakka, eli pisteeseen jolloin siirtymät/venymät lähtevät suureen kasvuun pienestäkin kuorman lisäyksestä. Kuvassa 4.15 on esitetty 28 metriä korkean ristikkopilarin voima-venymä-kuvaaja. Pystyakselilla on sisäpaarteen voima suhteessa kriittiseen kuormaan ja vaaka-akselilla venymä ulkopaarteen pinnalla alimman K-liitoksen alueella.



**Kuva 4.15** 28 metriä korkean ristikkopilarin voima-venymä-kuvaaja.

Edellä olevasta kuvaajasta nähdään, miten ristikkopilari saavuttaa maksimikapasiteettinsa, kun kuvaaja kaartuu lähes vaakatasoon. Tällöin ristikkopilari ei pysty enää vastaanottamaan lisää kuormitusta vaan venymät suurenevat paljon pienestäkin kuormanlisäyksestä. Materiaalimalli tämän kappaleen laskelmissa on ideaaliplastinen ja suurten siirtymien teoria on käytössä, jolloin geometrian muutoksen vaikutukset otetaan jäykkyyksissä huomioon. Taulukkoon 4.10 on koottu kriittiset kuormakestävyydet sekä laskelmissa käytetyt alkuhäiriöiden suuruudet.

**Taulukko 4.10** Epälineaarilla analyysillä lasketut 28 metriä korkean ristikkopilarin sisäpaarteen normaalivoimakestävyydet kahdella eri tuentaväleillä sekä vertailu muihin menetelmiin.

		$L_b=2,8\text{m}$	$L_b=14\text{m}$
Alkuhäiriö	$e_0$	62 mm	93 mm
Kestävyys / GMNIA		1284 kN	400 kN
$N_{b,Rd}$ / EC3 Lin. analyysi Ansys		1246 kN	380 kN
$N_{b,Rd}$ / EC3 Lin. analyysi RFEM		1191 kN	354 kN

Taulukon 4.10 tuloksista nähdään, että linearisoidun nurjahdusanalyysin ja eurokoodin mukaan määritetyn kestävyuden sekä epälineaarisen analyysin mukaan määritetyn kestävyuden tulokset ovat keskenään hyvin saman suuruiset. Tulokset ovat kuitenkin hyvin riippuvaisia annettavan alkuhäiriön suuruudesta ja esimerkiksi tukijaon ollessa 14 m, on hyvin tulkinnanvaraista, että otetaanko alkuhäiriöksi  $(0,5 \cdot 28m)/150$  vai esimerkiksi  $(0,6 \cdot 28m)/150$ . Tulosten suuruusluokka on kuitenkin sama ja näin ollen osoittaa sen, että linearisoidusta nurjahdusanalyysistä voidaan laskea rakenteelle nurjahduspituus, jonka jälkeen eurokoodin kaavoilla otetaan häiriötekijät mukaan laskentaan.

Käsitellään seuraavaksi kattoristikkoa. Taulukkoon 4.11 on vastaavalla tavalla koottu käytettävän alkuhäiriön suuruus sekä kriittinen kuorma.

**Taulukko 4.11** *Epälineaarilla analyysillä lasketut 36 metriä pitkän kattoristikon alapaarteen normaalivoimakestävyydet eri tuentaväleillä sekä vertailu muihin menetelmiin.*

		$L_b=4,9m$
Alkuhäiriö	$e_0$	120 mm
Kestävyys / GMNIA		430 kN
$N_{b,Rd}$ / EC3 Lin. analyysi Ansys		450 kN
$N_{b,Rd}$ / EC3 Lin. analyysi RFEM		448 kN

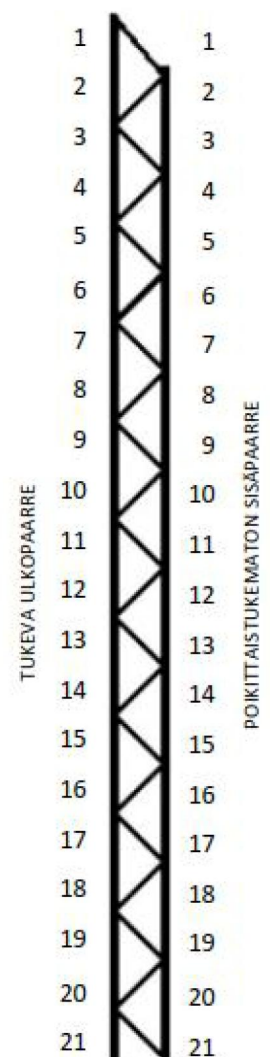
Edellisestä taulukosta tehdään samat päätelmät kuin ristikkopilarin tapauksesta. GMNIA:n tulokset sekä linearisoidun nurjahdusanalyysin ja eurokoodin yhdistetyt tulokset ovat samassa suuruusluokassa.

### 4.3.2 K-liitokseen kertyvä momentti

Kuten kappaleen 3.5 lopussa on mainittu, K-liitokseen kertyy momenttia, koska sen täytyy pitää sisäpaarre paikallaan siten, että se ei pääse nurjahtamaan. Eurokoodin putkiliihosten mitoituskaavoihin sisältyy tasosta poispäin olevan momentin huomioon ottaminen. On kuitenkin huomioitavaa, että esimerkiksi CIDECT:n lähteessä [9] uumasauvat oletetaan täysin jäykiksi tukevaan paarteeseen eikä liitokseen kertyvän momentin suuruuteen oteta lainkaan kantaa. Lasketaan seuraavassa kuitenkin kaksi eri kokoista ristikkopilaria epälineaarilla laskennalla, jolloin saadaan ulos myös liitokseen kertyvät momentit. Taulukossa 4.12 on kyseiset momenttien arvot ulko- ja sisäpaarteissa 100 %:n ja 80 %:n käytöasteilla.

**Taulukko 4.12** 28 metriä korkean ristikkopilarin K-liitoksiin kertyvien momenttien arvot ulko- ja sisäpaarteissa. Lisäksi oikealla havainnollistava kuva, mistä momenttien arvot on luettu.

Lii- tos	100% ul- kopaarre [kNm]	80% ulko- paarre [kNm]	100% si- säpaarre [kNm]	80% sisä- paarre [kNm]	Kuva tutkittavasta risti- kosta
1	-9,7	-4,8	-14	-7,0	
2	-8,0	-3,9	-3,4	-1,5	
3	0,6	0,4	-3,9	-1,8	
4	-1,6	-0,6	2,9	1,6	
5	3,0	1,6	0,09	0,19	
6	0,16	0,25	2,8	1,43	
7	1,9	0,95	0,07	0,18	
8	-0,47	-0,11	1,4	0,66	
9	0,8	0,34	-0,99	-0,4	
10	-1,5	-0,67	0,47	0,16	
11	0,36	0,09	-2,1	-0,97	
12	-2,1	-0,9	0,8	0,28	
13	1,8	0,8	-1,6	-0,8	
14	-0,6	-0,3	3,3	1,5	
15	5,2	2,4	1,8	0,78	
16	4,2	2,0	7,9	3,8	
17	8,7	4,3	8,9	4,3	
18	10	5,4	9,0	4,6	
19	1,4	1,3	12	6,2	
20	1,6	1,9	-9,0	-3,4	
21	-23	-14	-12	-7,8	
	<b>KA</b>	<b>KA</b>	<b>KA</b>	<b>KA</b>	
	<b>4,1</b>	<b>2,2</b>	<b>4,6</b>	<b>2,3</b>	



Tuloksista nähdään selkeästi, että hajonta on suuri. Ihan ylä- ja alareunassa on piikit momenttien arvoissa, jotka ovat toisaalta loogisia, sillä nämähän ovat juuri ne kohdat, jotka eniten vastustavat tukevaa parretta kiertymästä. Kuvassa 4.16 on esitetty rakenteen muoto, kun se menettää kantokykynsä. On nähtävissä, että momenttien arvot kasvavat myös suurimman nurjahduskuplan kohdalla.



**Kuva 4.16** 28 metriä korkean ristikkopilarin muoto tilanteessa, kun se menettää kantokykynsä.

Vaikein osuus on kuitenkin määrittää, että mikä on se momentin arvo, jonka suunnittelijan tulee ottaa mitoituksessa huomioon. Mikäli lähdetään ajatuksesta, että jokaisen liitoksen voi mitoittaa edellisessä taulukossa näkyvälle keskiarvolle (noin 4,5 kNm), sitä voidaan lähestyä soveltamalla 2 %:n sääntöä. 2%:n säännön mukaan, nurjahdustuettaava sauva tulee mitoittaa 2 %:lle sen puristavasta voimasta, kun halutaan käyttää nurjahduspituutena tuennan välimatkaa. Tässä tapauksessa sisäpaarteen nurjahduspituus on 6260 mm, joka tarkoittaisi 28 metriä korkealle paarteelle 3,47 tuentapistettä ( $=28\text{m}/6,26\text{m}-1$ ). Kriittinen kuorma paarteessa on 1290 kN. Näin ollen voima, joka estää sisäpaarretta nurjahdamasta, on  $3,47 \cdot 0,02 \cdot 1290\text{kN} = 90\text{kN}$ . Momentti saadaan näin ollen kertomalla edellä saatu voima ristikon leveydellä sekä jakamalla se tasaisesti jokaiselle uumasauvalle (21 kpl). Momentti on suuruudeltaan  $90\text{kN} \cdot 1,4\text{m}/21 = 5,9\text{kNm}$ . Tuloksesta nähdään, että se on hieman konservatiivisella puolella.

Haetaan tähän ajatukseen vielä vertailutulosta laskemalla 50 metriä korkea ristikkopilari vastaavalla tavalla. Taulukossa 4.13 on esitetty vastaavat arvot isommalle ristikkopilarille.



**Taulukko 4.13** 50 metriä korkean ristikkopilarin K-liitoksiin kertyvien momenttien arvot ulko- ja sisäpaarteissa. Lisäksi oikealla havainnollistava kuva, mistä momenttien arvot on luettu.

Lii- tos	100% ul- kopaarre [kNm]	80% ulko- paarre [kNm]	100% si- säpaarre [kNm]	80% sisä- paarre [kNm]	Kuva tutkittavasta ris- tikosta
1	-28	-11	-47	-19	
2	-28	-11	-8,6	-3,2	
3	5,7	2,5	-18	-7,1	
4	-13	-4,8	12	5,1	
5	12	5,0	-8,4	-2,8	
6	-7,9	-2,7	11	4,6	
7	9,4	3,7	-7,7	-2,6	
8	-9,0	-3,2	-,7	3,3	
9	8,6	3,2	-9,8	-3,6	
10	-10	-3,8	9,6	3,5	
11	13	4,8	-9,0	-3,4	
12	-5,9	-2,0	18	6,7	
13	23	8,8	3,0	1,2	
14	11	4,7	31	12	
15	29	12	30	12	
16	38	16	28	12	
17	-4,2	0,6	56	24	
18	17	13	-44	-13	
19	-94	-50	-38	-23	
	<b>KA</b>	<b>KA</b>	<b>KA</b>	<b>KA</b>	
	<b>17,5</b>	<b>7,8</b>	<b>18,7</b>	<b>7,8</b>	

Sisäpaarten kriittiseksi kuormaksi saadaan 1660 kN ja nurjahduspituudeksi 12535 mm. Vastaavalla laskennalla kuin edellä, saadaan keskiarvomomentin suuruudeksi 19,7 kNm. Tulos on jälleen hieman varmallalla puolella, mutta on kuitenkin johdonmukainen. Se ottaa huomioon käytettävän sisäpaarten nurjahduspituuden. Päätelmä on looginen, mutta ei kuitenkaan ota huomioon suurempia piikkien arvoja paarteiden päissä. Toisaalta rasituksen voisi ajatella plastisoitumisen myötä jakautuvan uudelleen muille liitoksille, kun suurimman momentin rasittavan liitoksen kapasiteetti ylittyy. Mikäli K-liitokset mitoitetaan edellisen periaatteen mukaan momentin keskiarvolle, vie se liitoksen kapasiteettia edellisissä esimerkeissä noin 30 %. Näin ollen liitoksien käyttöasteet tulisi rajoittaa noin 70 %:iin, mikäli liitosta hyödynnetään nurjahtavan paarten tukemisessa. Lisäksi tehdään kuvan 3.23 mukainen lineaarinen interpolointi liitoksen käyttöasteen suhteen.

Lisäksi tulee ottaa huomioon, että kattoristikon tapauksessa, mikäli yläpaarre on kovin jyrkkä, ja käytettäessä korkeutena ristikon harjakorkeutta, voi menetelmä antaa liitoksille suhteettoman suuria momenttien arvoja. Tämä menettely sopiikin parhaiten tilanteelle, kun paarteet ovat samansuuntaisia. Kuitenkin momentin tarkka määrittäminen on haasteellista FEM-laskennan avulla, ja aihe vaatisikin mielestäni lisätutkimuksia ja kentiesikäytännön testejä, että momenttien suuruuksista saataisiin todellisia arvoja.

### 4.3.3 Tukevan paarteen vääntö ja ristikon päiden leikkausrasitukset

Kuten kappaleen 3.2 lopussa on mainittu, tukevaan paarteeseen syntyy keskelle hieman vääntörasitusta, joka otetaan kiinni ristikon päiden leikkausvoimana. Tässä kappaleessa lasketaan edellä mainituille rasituksille arvoja kahdelle ristikkopilarille sekä yhdelle kattoristikolle. Tavoite on tuoda esiin rasitusten suuruusluokat. Kuten jo aiemmin on mainittu, esimerkiksi CIDECT:n lähteessä ei ole mainintaa näistä ”sekundäärisistä” rasituksista [9].

Taulukossa 4.14 on esitetty 28 metriä korkean ristikkopilarin tukevan paarteen vääntörasitus sekä ristikon päiden leikkausvoimat tasosta poispäin. Vääntö on ilmoitettu käyttöasteilla 100 % ja 95 % ja leikkausvoimat käyttöastella 100 %.

**Taulukko 4.14** 28 metriä korkean ristikkopilarin vääntörasitus sekä leikkausvoimat tasosta poispäin ristikon päissä.

<b>Vääntö tukevassa paarteessa [kNm]</b>	11	100%
	8,5	95%
<b>Leikkausvoima [kN]</b>	2,6	alapää
	7,8	alapää
	9,6	yläpää
	8,8	yläpää

Taulukon arvoista nähdään, että leikkausvoimat ovat melko pieniä. Esimerkiksi perustustasoa ajatellen Peikon valmistama yksi HPM20 perustuspultti ottaa leikkausvoimaa vastaan 21 kN. Saadaksean vertailupohjaa vääntörasitukselle, täytyy tietää mikä on kyseisen profiilin vääntökestävyys. Eurokoodin mukaan rakenneputkien tapauksessa voidaan ulkoisen momentin välittyvän ainoastaan vapaana vääntönä, jolloin estetyn väännön osuudet voidaan jättää ottamatta huomioon. Neliön ja suorakaiteen muotoisen rakenneputkien puhtaana vääntökestävyyden arvon laskenta jaetaan kaavan (4.1) mukaisesti kahteen osaan riippuen putken profiilin mittasuhteista. [12]

$$\frac{\max(b, h)}{t} \leq \frac{72\varepsilon}{\eta} \rightarrow \text{lasketaan plastinen vääntökestävyys} \quad (4.1)$$

$$\frac{\max(b, h)}{t} > \frac{72\varepsilon}{\eta} \rightarrow \text{lasketaan vääntöломmahduskestävyys}$$

Kaavassa (4.1)  $b$  on profiilin leveys,  $h$  profiilin korkeus,  $t$  ainevahvuus ja  $\eta$  on pienennystekijä, jolle käytetään arvoa 1,0 rakenneputkien tapauksessa. Termi  $\varepsilon$  määritellään kaavasta

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{235}}{f_y}, \quad (4.2)$$

missä  $f_y$  on materiaalin nimellinen myötölujuus yksikkönä [MPa]. Kaavassa (4.1) esitetty plastinen vääntökestävyys lasketaan yhtälöstä

$$M_{x.pl.Rd} = \frac{f_y/\sqrt{3}}{\gamma_{M0}} W_t, \quad (4.3)$$

missä  $W_t$  on poikkileikkauksen vääntövastus ja  $\gamma_{M0}$  kestävyuden osavarmuusluku. Vastavasti vääntöломmahduskestävyys lasketaan kaavasta

$$M_{x.b.Rd} = \frac{\chi_t f_y/\sqrt{3}}{\gamma_{M1}} W_t, \quad (4.4)$$

missä  $\chi_t$  on vääntöломmahduksen pienennystekijä. Pienennystekijää varten on ensin laskettava uuman muunnettu hoikkuus kaavan (4.5) mukaisesti

$$\lambda_t = \frac{(h-3t)/t}{86,4\varepsilon}. \quad (4.5)$$

Tämän jälkeen pienennystekijä voidaan määrittää taulukon 4.15 mukaan.

**Taulukko 4.15** Pienennystekijä  $\chi_t$

$\lambda_t < 0,83$	1,0
$0,83 \leq \lambda_t < 1,08$	$0,83/\lambda_t$
$\lambda_t \geq 1,08$	$0,83/\lambda_t$

28 metriä korkeassa esimerkin ristikkopilarissa tukevan paarteen profiili on SHS200x200x10,0, jolle saadaan edellä esitetyllä menetelmällä laskettua vääntökestävyydelle arvoksi 133 kNm. Taulukon 4.14 mukaan nurjahdushetkellä vääntömomenti on

11 kNm, joka noin 8,3 % kestävydestä. Rakenteita ei kuitenkaan mitoiteta käytännössä 100 % käyttöasteelle, ja esimerkiksi 95 % käyttöasteen kohdalla vääntömomentti on laskenut jo arvoon 8,5 kNm, joka on enää 6,4 % vääntökestävyydestä. On kuitenkin olennaista tiedostaa, että tämä tarkastelu on vain puhtaalle vääntörasitukselle, ja todellisudessa rakenteet tulee mitoittaa tapauskohtaisesti yhdistetyille rasituksille. Tästä huolimatta mielestäni vääntörasitus ei suuruudeltaan ole kovin merkittävä, eikä sitä tarvitse erikseen ottaa mitoituksessa huomioon.

Tehdään sama tarkastelu esimerkin 50 metriä korkealle ristikkopilarille. Taulukkoon 4.16 on koottu vastaavat tulokset kyseiselle pilarille.

**Taulukko 4.16** 50 metriä korkean ristikkopilarin vääntörasitus sekä leikkausvoimat tasosta poispäin ristikon päissä.

<b>Vääntö tukevassa paarteessa [kNm]</b>	47	100%
	33	95%
<b>Leikkausvoima [kN]</b>	13,4	alapää
	11,2	alapää
	17,8	yläpää
	12,8	yläpää

Vastaavasti taulukosta nähdään, että leikkausvoimat ovat merkityksettömän pieniä. Tässä esimerkissä tukevan paarteen profiili on SHS300x300x12,5, jonka vääntökestävyys on 388 kNm. 100 %:n käyttöasteella se tarkoittaa 12 % maksimikestävyystä ja 95 % käyttöasteella 8,5 % maksimikestävyystä.

Edelleen lasketaan samat tulokset 36 metriä pitkälle kattoristikolle, jota on tutkittu muissa yhteyksissä jo aikaisemmissa kappaleissa. Taulukossa 4.17 on vääntörasitus ristikon yläpaarteessa sekä päiden leikkausvoimat tasosta poispäin.

**Taulukko 4.17** 36 metriä pitkän kattoristikon vääntörasitus sekä leikkausvoimat tasosta poispäin ristikon päissä.

<b>Vääntö tukevassa paarteessa [kNm]</b>	9,6	100%
	8,4	95%
<b>Leikkausvoima [kN]</b>	7,0	vasen pää
	1,0	vasen pää
	0,8	oikea pää
	0,4	oikea pää

Taulukosta nähdään, että leikkausvoimat ovat edelleen merkityksettömän pieniä. Tässä esimerkissä yläpaarteen profiili on SHS160x160x8,8, jonka vääntökestävyys on 74 kNm. 100 %:n käyttöasteella se tarkoittaa 13 % maksimikestävyydestä ja 95 % käyttöasteella 11 % maksimikestävyydestä.

#### 4.3.4 Nurjahdustuennan tukireaktio

Kappaleen 3.2 lopussa sivuttiin tätä aihetta toteamalla, että tukevan paarteen nurjahdustuennalla on oltava riittävä kestävyys sekä jäykkyys. Riittävän jäykkyyden toteamiseen vaadittava tarkastelu jätetään kappaleen lopussa olevaa lyhyttä esimerkkiä lukuun ottamatta tämän työn ulkopuolelle. Tässäkin kohtaa lähdetään soveltamaan suunnittelijoiden keskuudessa vallitsevaa käytäntöä, että tuettava rakenneosaa on mitoitettava 2 %:lle sen puristavasta voimasta, jotta nurjahduspituutena voidaan käyttää tuentaväliä. Tässä työssä tuennat oletetaan olevan täysin (riittävän) jäykkiä. Haetaan tähän teoriaan vertailutuloksia epälineaarista laskennasta laskemalla 28 metriä ja 50 metriä korkeiden ristikkopilarien nurjahdustuentojen tukireaktiot.

Taulukossa 4.18 esitetty 28 metriä korkean ristikkopilarin ulkopaarteen nurjahdustuentojen tukireaktiot, kun ulkopaarre on tuettu jokaisesta K-liitoksesta. Arvot on taulukoitu sisäpaarteen käyttöasteen ollessa 100 % ja 80 %.

**Taulukko 4.18** 28 metriä korkean ristikkopilarin ulkopaarteen nurjahdustuennan tukireaktiot.

100% [kN]	80% [kN]	% (100)	% (80)
-35	-17	3,57	2,01
33	17	3,37	2,01
14,6	7,4	1,49	0,87
5,9	3,0	0,60	0,35
-1,4	-0,8	0,14	0,09
-2,1	-1,1	0,21	0,13
0,5	0,3	0,05	0,04
2,5	1,5	0,26	0,18
6,4	3,7	0,65	0,44
-14	-7,4	1,43	0,87

Taulukon arvoista nähdään, että tukireaktion suuruus vaihtelee suuresti ja käyttöasteen ollessa 100 % on tukireaktio lähes 4 % puristavasta voimasta. Toisaalta tukireaktio laskee nopeasti käyttöasteen pienentyessä. Tämän perusteella kuitenkin varmallalla puolella oleva oletus on, että nurjahdustuennan tulee kestää 4 % puristavasta voimasta. Lasketaan vielä

vertailutuloksia isommasta ristikkopilarista. Taulukossa 4.19 on esitetty nämä vastaavat tulokset.

**Taulukko 4.19** 50 metriä korkean ristikkopilarin ulkopaarteen nurjahdustuennan tukireaktiot.

100% [kN]	80% [kN]	% (100)	% (80)
46	18	3,83	1,71
-48	-22	4,0	2,10
-25	-10	2,08	0,95
-10	-4	0,83	0,38
0,6	0,26	0,05	0,02
0,05	0,01	0,00	0,00
0,3	0,3	0,03	0,03
-5,6	-2,8	0,47	0,27
22	8,8	1,83	0,84

Yllä olevasta taulukosta tehdään samat havainnot. Näiden laskelmien perusteella voi todeta, että nurjahdustuenta tulee mitoittaa 4%:lle puristavasta voimasta.

Havainnollistetaan lyhyen esimerkin avulla, miten tuennan jäykkyyttä ja sen vaikutusta voi arvioida. 50 metriä korkean ristikkopilarin tapauksessa ulkopaarteessa vaikuttaa noin 1200 kN puristava voima. Näin ollen jokainen nurjahdustuki tulee mitoittaa voimalle  $0,04 \cdot 1200 \text{ kN} = 48 \text{ kN}$ . Oletetaan ristikkopilarikehien olevan 8100 mm jaolla, jolloin tuentasauvaksi voi laittaa esimerkiksi neliöputken 90\*90\*5. Kun käytettävä nurjahdustuki ja kehäväli ovat tiedossa, voidaan laskea sen jousijäykkyys kaavasta

$$k_{tuki} = \frac{EA}{L}. \quad (4.6)$$

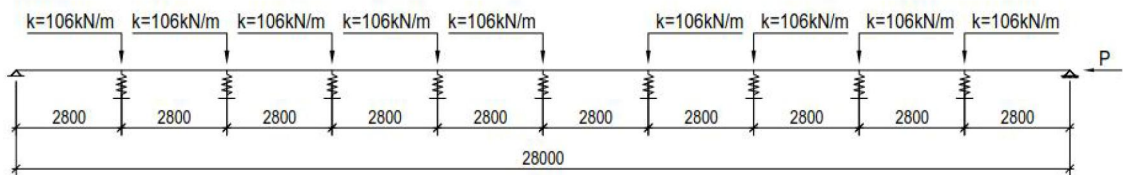
Näillä arvoilla jousijäykkyydeksi saadaan 42415 kN/m. Tämä voidaan sijoittaa esimerkiksi RFEM:n palkkielementtimalliin, jolloin linearisoidusta nurjahdusanalyysistä saadaan kriittiseksi kuormaksi 2518 kN. Taulukon 4.5 mukaan, kun tuenta oletetaan täysin jäykäksi, kriittinen kuorma on 2540 kN. Tässä tapauksessa 4 %:n sääntö tuottaa myös riittävän jäykän tuennan.

#### 4.4 Tulokset työssä kehitetyllä menetelmällä

Kaikki edellä esitetyt laskentamenettelyt vaativat ristikkopilarin mallin ja palkkielementtimallin tapauksessa liitoksien rotaatiojäykkyyksien syöttämisen siihen. Tässä työssä kehitetyllä laskentamenettelyllä, joka perustuu kappaleiden 3.3 ja 3.4 jousituettuun palkkiin

ja liitoksen rotaatiojäykkyyksien kautta määritettyihin palkin jousivakioihin, voidaan laskea poikittaistukemattoman paarteiden nurjahduspituus ilman varsinaista ristikon mallia. Työssä kehitetyllä laskentamenetelmällä lasketaan se ääritapaus, kun tukeva paarre on täysin tuettu sivusuunnassa ja tuennan ollessa harvempi, interpoloidaan lineaarisesti lasketun ääritapauksen sekä täysin tukemattoman tapauksen väliltä. Mikäli tukeva paarre on kokonaan tukematon sivusuunnassa, tutkittavan paarteiden nurjahduspituudeksi valitaan paarteiden pituus. Lisäksi nurjahduspituutta laskettaessa tulee syöttää käytettävän liitoksen käyttöaste, jolloin jousivakiota redusoidaan lineaarisesti kuvan 3.23 periaatteella.

Lasketaan edellisten tavoin tällä yksinkertaistetulla menetelmällä saman 28 metriä korkean ristikkopilarin ja 36 metriä pitkän kattoristikon tukemattoman paarteiden nurjahduspituus, kun tukeva paarre oletetaan täysin tuetuksi. Edellisten tavoin tässäkin esimerkissä ei oteta huomioon liitoksen käyttöasteen vaikutusta. Liitteessä 2 esitetyn laskentamenetelmän perusteella translaatiojousen vakioksi saadaan 106 kN/m. Jousivakio on sama jokaisessa pisteessä, sillä kulmat ja uumasauvojen pituudet ovat samat. Seuraavassa vaiheessa syötetään jousituetun palkin geometria kenttien lukumäärän ja pituuksien kautta. Esimerkin ristikkopilarin tapauksessa laskentamalli on kuvan 4.17 mukainen.



**Kuva 4.17** Ristikkopilarin sisäpaarteesta muodostettu jousitettu palkki.

Kriittiseksi kuormakertoimeksi saadaan 1201 kN ja nurjahduspituudeksi 8,56 metriä. Taulukkoon 4.20 on koottu vastaavalla tavalla kuin edellisissä esimerkeissä nurjahduspituusien arvot laskettuna työssä tehdyllä pohjalla.

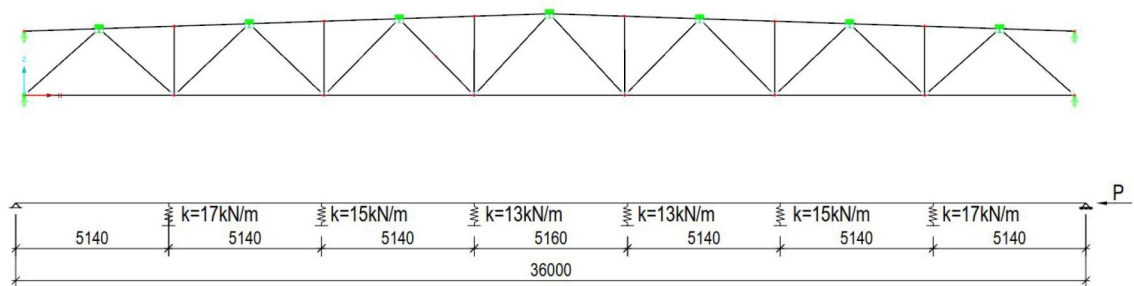
**Taulukko 4.20** 28 metriä korkean ristikkopilarin nurjahduspituudet ja kestävyudet eurokoodin mukaan laskettuna työssä kehitetyllä laskentamenetelmällä eri tuentaväleillä.

Nurjahdustuennan välimatka		$L_b=2,8\text{m}$	$L_b=11,2\text{m}$	$L_b=14\text{m}$	$L_b=29\text{m}$
Työssä kehitetty laskentamenetelmä	$L_{cr}$	8,56 m	14,8 m	16,9 m	28,0 m
	$N_{b,Rd} / \text{EC3}$	841 kN	334 kN	262 kN	102 kN

Tuloksista nähdään, että täyden tuennan tapauksessa nurjahduspituus (8,56 metriä) on suurempi kuin ristikon kokonaismallin kautta määritetty nurjahduspituus (noin 6,7 metriä). Tämä johtuu pääosin kuvan 3.20 yhteydessä selitetystä ilmiöstä, mutta tulokset ovat

näin varmallalla puolella ja niitä voidaan suunnittelussa käyttää. Lisäksi on otettava huomioon, että vaikka tulos on selvästi varmallalla puolella, antaa se silti huomattavasti paremman tuloksen kuin olettamalla nurjahduspituus koko paarteen pituudeksi. Taulukossa 3.2 on havainnollistettu myös teräskiloissa saavutettavaa säästöä.

Lasketaan seuraavaksi myös kattoristikon nurjahduspituudet. Kuten kuvassa 4.8 on esitetty, kattoristikko koostuu useista eri profiileista. Näin ollen lasketaan tässä esimerkissä tarkemmin jokaiselle uumasauvalle erikseen jousivakion arvo. Liitteen 2 menetelmällä saadaan ristikon alapaarteesta kuvan 4.18 mukainen jousituettu palkki.



**Kuva 4.18** Kattoristikko ja sen alapaarteesta muodostettu jousituettu palkki.

Taulukkoon 4.21 on koottu vastaavasti alapaarteen nurjahduspituuden arvo ja eurokoodin mukainen käyttöaste, kun yläpaarre on tuettu jokaisesta K-liitoksesta.

**Taulukko 4.21** 36 metriä pitkän kattoristikon alapaarteen nurjahduspituus ja eurokoodin mukainen kestävyys laskettuna kehitetyllä menetelmällä.

Nurjahdustuennan välimatka		$L_b=4,9\text{m}$
Työssä kehitetty laskentamenetelmä	$L_{cr}$	13,1 m
	$N_{b,Rd} / \text{EC3}$	178 kN

Yllä olevasta taulukosta nähdään jälleen, että työn laskentamenetelmällä tuotettu nurjahduspituus on reilusti varmallalla puolella nähden ristikon mallista tuotettuun nurjahduspituuteen (13,1m -> 7,8m). Tämä johtuu samasta ilmiöstä kuin edellisessä esimerkissä, mutta myös siitä, että alussa tehtiin monta varmallalle puolelle menevää oletusta muun muassa ristikon korkeudesta ja liitoksien jäykkyyksistä. Näiden kaikkien huomioon ottaminen oikein on kuitenkin lähes mahdotonta yksinkertaistetussa laskennassa ja tarvittaessa suunnittelija voikin laskea nurjahduspituuden käyttäen FEM-ohjelmaa ja oikeaa geometriaa. Toisaalta on kuitenkin selvää, että tälläkin menetelmällä saadaan selkeä hyöty siihen



nähdessä, että esimerkiksi edellisen ristikkopilarin tapauksessa sisäpaarteen nurjahduspituudelle oletettaisiin arvo 28 metriä tai kattoristikon alapaarteelle arvo 36 metriä vastaavalla tavalla kuin taulukossa 3.2.

## 4.5 Laskentamenetelmien vertailu

Edellisten perusteella voidaan helposti todeta, että mitä enemmän ristikosta halutaan kapasiteettia irti, sitä enemmän se vaatii eri reunaehtojen ja vaihtoehtojen tarkastelua. Käytännössä katsoen kuorielementtimallin analysoinnin voi sen puolesta unohtaa, että sitä ei arkisuunnittelussa pääsääntöisesti käytetä. Se on kuitenkin erinomainen työkalu varmentamaan tehtyjä oletuksia. Lähtökohtaisesti suunnittelija määrittää nurjahduspituuden käyttäen työssä kehitettyä menetelmää. Mikäli on tarve todentaa lisää kapasiteettia ristikosta, tulee nurjahduspituus määrittää käyttäen FEM-laskentaa ja oikeita reunaehtoja sekä mahdollisesti ottaa huomioon myös normaalivoimien jakauma paarteiden välillä.

Taulukkoon 4.22 on koottu ristikkopilarin nurjahduspituuden arvoja eri menetelmin laskettuna.

**Taulukko 4.22** 28 metriä korkean ristikkopilarin sisäpaarteen nurjahduspituuksia eri menetelmin laskettuna.

Nurjahdustuennan välimatka		$L_b=2,8\text{m}$	$L_b=11,2\text{m}$	$L_b=14\text{m}$	$L_b=29\text{m}$
Ansyst/kuorielementit	$L_{cr}$	5,56 m	9,13 m	11,4 m	26,5 m
RFEM/palkkielementit	$L_{cr}$	5,68 m	9,48 m	11,9 m	28,6 m
Työssä kehitetty laskentamenetelmä	$L_{cr}$	8,56 m	14,8 m	16,9 m	28,0 m

Yllä olevasta taulukosta voidaan nähdä, että kuorielementein ja palkkielementein määritettyjen nurjahduspituuksien arvot ovat hyvin tasapainossa keskenään. Lisäksi nähdään, että työssä kehitetty laskentamenetelmä tuottaa selvästi varmalle puolelle olevia tuloksia, mutta ovat kuitenkin hyvin käyttökelpoisia ja tehokkaita perinteiseen näkökulmaan verrattuna. Taulukossa 4.23 vastaavat tulokset kattoristikon alapaarteen osalta.

**Taulukko 4.23** 36 metriä pitkän kattoristikon alapaarteen nurjahduspituuksia eri menetelmin laskettuna.

Nurjahdustuennan välimatka		$L_b=4,9\text{m}$
Ansyst/kuorielementit	$L_{cr}$	7,67 m
RFEM/palkkielementit	$L_{cr}$	7,69 m
Työssä kehitetty laskentamenetelmä	$L_{cr}$	13,1 m

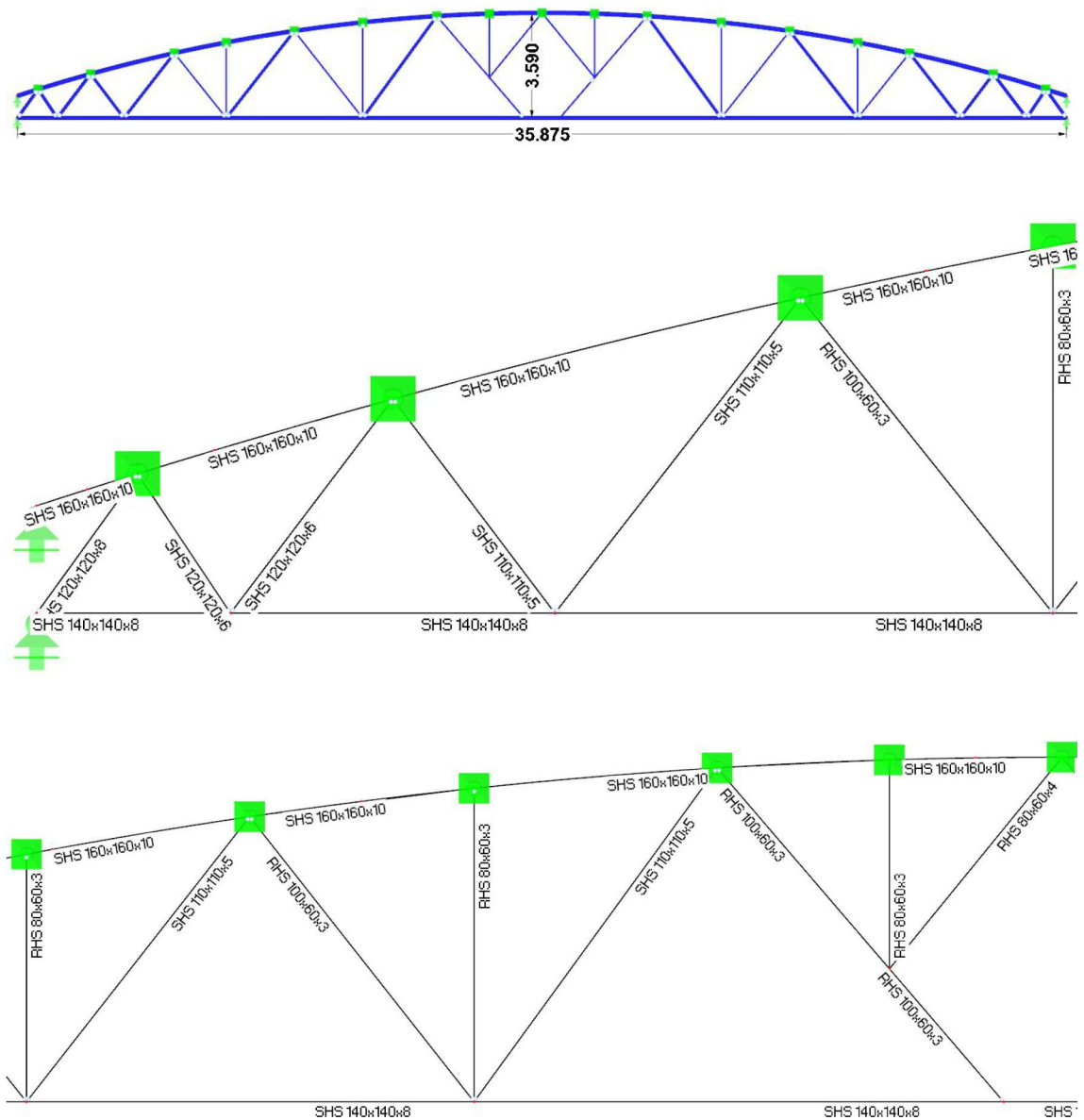
Tästä taulukosta voidaan tehdä samat johtopäätökset kuin edellisestä. Työssä kehitetty laskentamenetelmä tuottaa reilusti varmalle puolelle olevan tuloksen, mutta on toisaalta huomattavasti parempi tulos kuin konservatiivinen oletus, että nurjahduspituus on tukien välimatka.

## 5. CASE

Tässä kappaleessa käydään läpi yksi kattoristikko ja yksi ristikkopilari todellisista kohteista. Laskennat tehdään RFEM:llä sekä työn laskentamenettelyllä. Lisäksi edellisistä poiketen, reunimmaisille K-liitoksille oletetaan korkeat käyttöasteet, jolla redusoidaan liitoksen rotaatiojäykkyyttä tasosta poispäin.

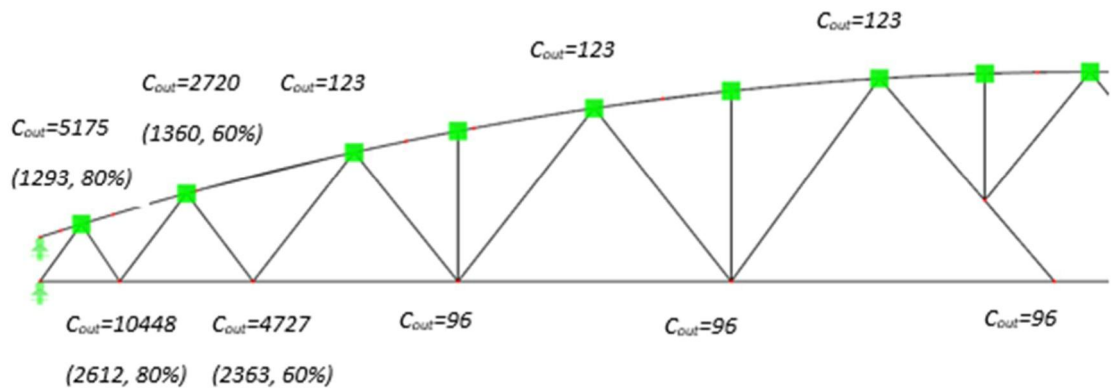
### 5.1 Kattoristikon alapaarre

Ensimmäinen tutkittava kohde on noin 36 metriä pitkä kattoristikko. Sen yläpaarre on tuettu poimulevyllä tasosta poispäin, jolloin se voidaan olettaa täysin tuetuksi. Alapaarretta ei ole erikseen tuettu lainkaan ja siihen kohdistuu paarteen päästä puristava normaallivoima poikkeuksellisten sidejärjestelyjen vuoksi. Kuvassa 5.1 on esitetty ristikon päämitat sekä tarkennettu kuva ristikon eri osista, josta näkyvät ristikon osien profiilit. Ristikko on symmetrinen keskilinjan suhteen.



**Kuva 5.1** Tutkittavan ristikon päämitat sekä ristikon osien profiilit.

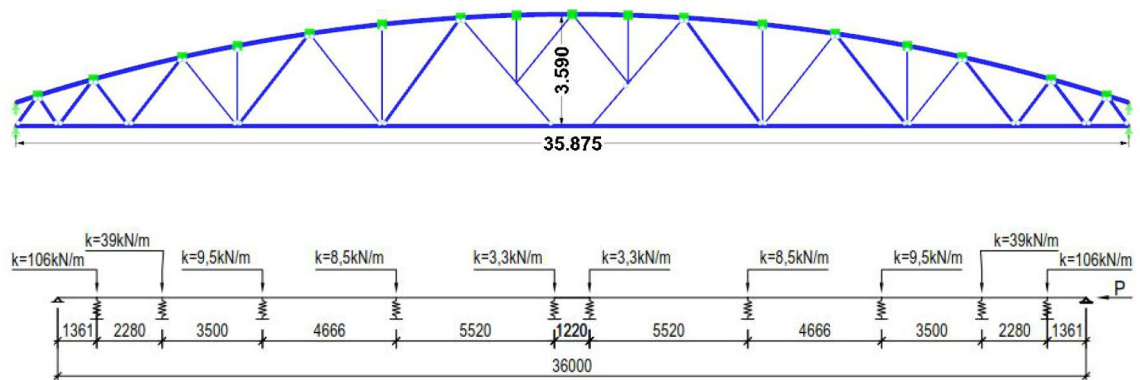
Ristikon alapaarteen nurjahtamista tukemaan käytetään vain K-liitoksia, jonka laskentaan tämä työ antaa edellytykset. Todellisuudessa myös vertikaalisauvat antavat jotain tuentaa alapaarteelle. Vastaavalla tavalla kuin edellisen kappaleen kattoristikossa, lasketaan ensin jokaiselle K-liitokselle rotaatiojousjäykkyydet. Kuvassa 5.2 on esitetty nämä jäykkyydet ilman redusointia sekä reunimmaisten osalta suluissa suluissa redusoitu arvo ja liitoksen käyttöaste. Mikäli K-liitokseen yhtyy kaksi erilaista sauvaa, lasketaan rotaatiojäykkyys olettamalla molemmat sauvat heikomman jäykkyyden tuottavaksi sauvaksi.



**Kuva 5.2** Kattoristikon jokaisen K-liitoksen rotaatiojäykkyydet.

Syöttämällä edellisen kuvan mukaiset liitoksien rotaatiojäykkyydet ristikon palkkimalliin, ja laskemalla linearisoitu nurjahdusanalyysi, saadaan kriittiseksi kuormakertoimeksi 162 kN. Se tarkoittaa alapaarteelle nurjahduspituutta 10852mm. Tehdään sama analyysi myös tuotetulla laskentamenetelmällä.

Liitteen 2 menetelmällä saadaan ristikon alapaarteesta muodostettua kuvan 5.3 mukainen jousituettu palkki jousijäykkyyksineen.



**Kuva 5.3** Kattoristikon alapaarteesta muodostettu jousituettu palkki.

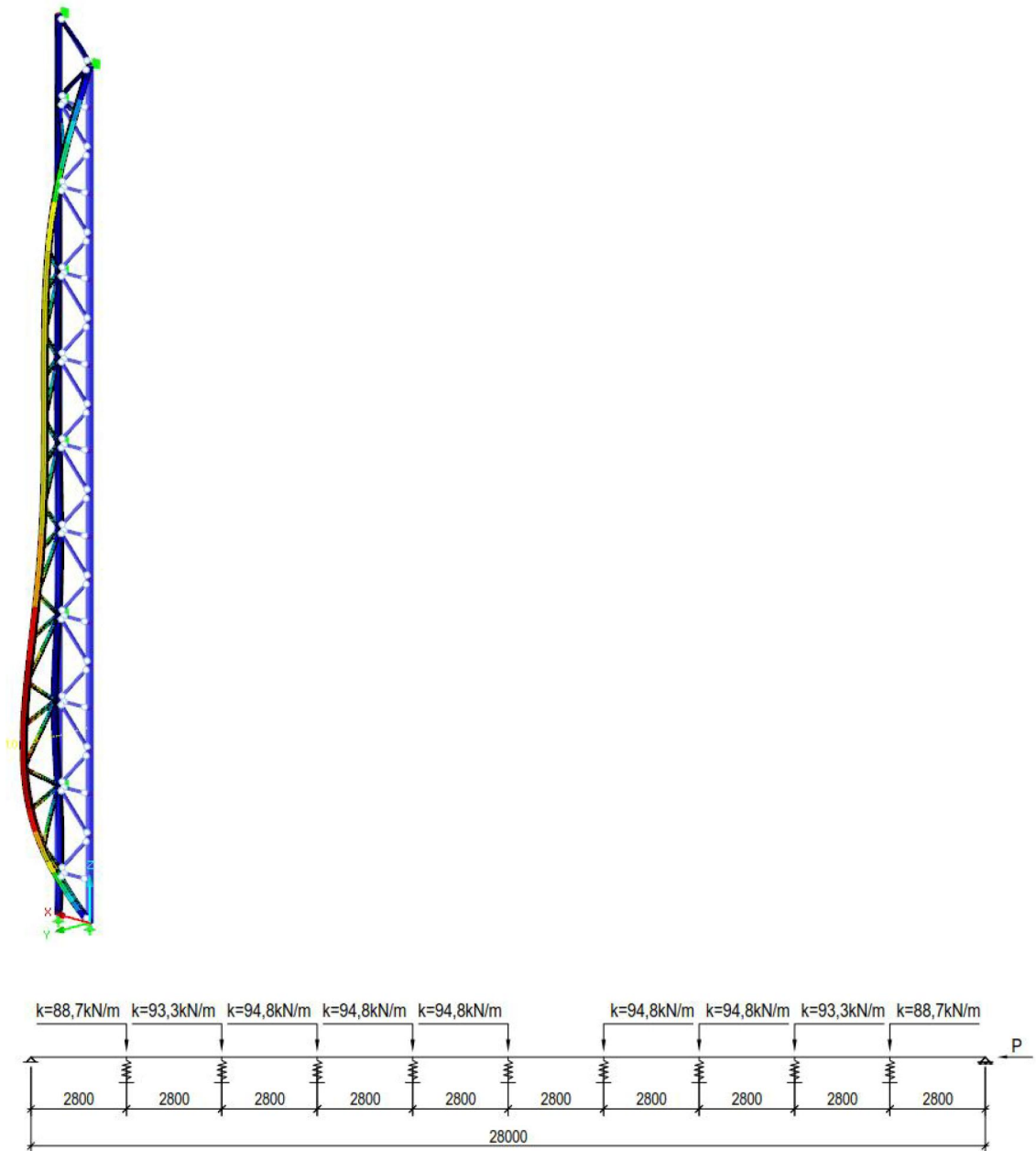
Kun lasketaan linearisoitu nurjahdusanalyysi edellisen kuvan mukaiselle palkille, saadaan kriittiseksi kuormakertoimeksi 159 kN, joka vastaa nurjahduspituutta 10938 mm. Havaitaan, että tulos on hyvin lähellä palkkimallista saatua tulosta.

Tämän jälkeen on syytä varata kapasiteettia K-liitokseen kertyvälle momentille. Työssä esitellyn menetelmän mukaan jokainen liitos tulee mitoittaa momentille 0,6 kNm, kun alapaarteessa oletetaan vaikuttavan voima 130 kN. Tässä esimerkissä on kuitenkin olennaista ymmärtää, että yläpaarteiden kaareva geometria sekä vaihtelevat profiilien sauvat asettavat haasteita. Näin ollen etenkin momentin voi helposti olettaa jakautuvan enemmän reunimmaisille sauvoille, joilla on selvästi suurempi jäykkyys kuin keskimmaisilla. Momentti 0,6 kNm vie reunimmaisten sauvojen kohdalla kapasiteettia vain noin 7 %,

joten kappaleen 4.3.2 perusteella jokaiselle liitokselle varataan 20 % käyttöastetta ottamaan momenttia vastaan. Kuvan 5.2 käyttöasteiden mukaan näin voidaan tehdä. Mikäli on tarve todentaa lisää ristikossa olevaa kapasiteettia, rakenteesta tulee tehdä kuorielementtimalli, jolloin geometria ja kaikki liitosjäykkyydet tulee otetuksi huomioon todellisina. Kuten ennemmin on mainittu, jousitetun palkin analogialla saadaan kuitenkin huomattavasti parempi tulos kuin olettamalla nurjahduspituus alapaarteen pituudeksi (36 m).

## 5.2 Ristikkopilari

Tutkittava ristikkopilari on geometrialtaan samanlainen kuin edellisessä kappaleessa laskettu 28 metriä korkea pilari. Se on tuettu joka toisesta K-liitoksen kohdasta erillisellä nurjahdustuennalla ja lisäksi ristikkopilarissa on vertikaali joka toisessa K-liitoksen kohdassa. Vertikaaleja ei kuitenkaan hyödynnetä tässä laskentamenetelmässä. Lasketaan sisäpaarteen nurjahduspituus olettaen, että ensimmäisten liitosten käyttöasteet ovat 80 %, toisten 60 % ja keskimmäisten 30 %. Taulukon 4.1 mukaan liitoksen rotaatiojäykkyys on 2260 kNm/rad, kun sitä ei ole redusoitu. Liitoksen kapasiteetin redusointi on tehty kuvan 3.23 mukaan. Ristikkopilari ja sen ensimmäinen nurjahdusmuoto tasosta pois päin sekä sisäpaarteesta muodostettu jousitettu palkki on esitetty kuvassa 5.4.



**Kuva 5.4** Ristikkopilarin geometria ja ensimmäinen nurjahdusmuoto tasosta pois-päin sekä sisäpaarteesta muodostettu jousituettu palkki.

Palkkielementtimallilla saadaan kriittiseksi kuormaksi 1594 kN, joka vastaa nurjahduspi-tuutta 7450 mm. Vastaava analyysi tehdään tuotetulla laskentamenetelmällä. Tulee ottaa huomioon, että nyt ulkopaarre on tuettu vain joka toisesta K-liitoksesta, jolloin laskenta tehdään täydelle tuennalle, jonka jälkeen interpoloidaan sen ja täysin tukemattoman tilanteen väliltä. Liitteen 2 mukaisella menetelmällä jousituetun palkin jousivakioille saadaan kuvan 5.4 mukaiset arvot. Ilman lineaarista interpolointia nurjahduspi-tuus on 8910 mm. Interpoloimalla lineaarisesti täyden tuennan ja tukemattoman tilanteen väliltä nur-jahduspi-tuudeksi saadaan 10940 mm, joka on noin selvästi suurempi kuin palkkimallista saatu arvo, mutta on kuitenkin varsin käyttökelpoinen tulos.

Kun paarteessa oletetaan olevan 1000 kN puristava voima, jokaisessa uumasauvan päässä on tasosta poispäin olevan momentti 2 kNm. Momentti on jaettu tasaisesti jokaiselle K-liitokselle työssä esitellyn menetelmän mukaan. Ristikkopilarin profiilit ovat samat kuin kuvassa 4.1 on esitelty. Eurokoodin mitoituskaavojen mukaan 2 kNm momentti vie K-liitoksen kapasiteetista noin 11 %. Näin ollen reunimmaisestikin liitokset, joiden käyttöaste on 80 %, kestävät lisäksi taivuttavan momentin.



## 6. TULOSTEN VERTAILU KIRJALLISUUTEEN

Kirjallisuuslähteessä [9] on menetelmä, jolla voidaan laskea nurjahduspituus poikkitaistukemattomalle paarteelle. Lähde on CIDECT:n julkaisema. CIDECT kuvailee kotisivuillaan olevan johtavien kansainvälisten teräsputkien valmistajien järjestö, jonka tavoitteena on laajentaa ja tuottaa tietoa teräsrakentamisen suunnittelusta ja sovellutuksista erilaisten tutkimusten avulla. Lähteessä on laskentataulukoita, jotka soveltuvat työssä esitellylle ristikkopilarille ja suorapaarteiselle kattoristikolle. Menetelmän oletuksina on muun muassa:

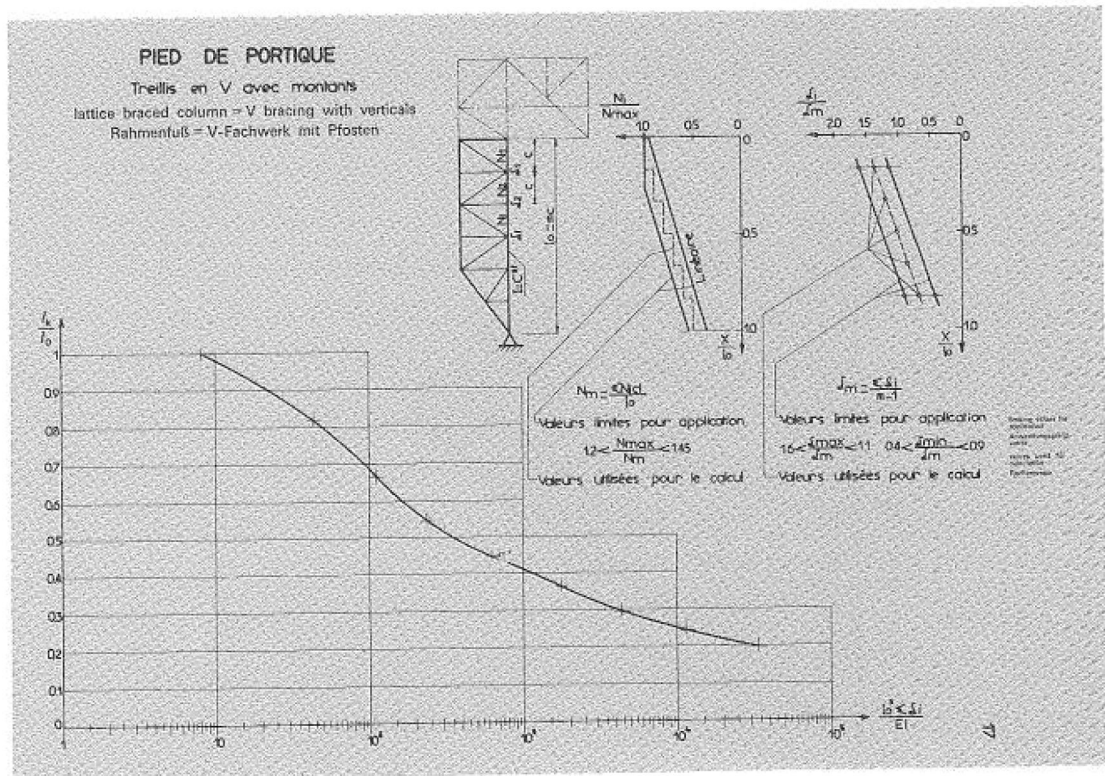
- Uumasauvojen vääntöjäykkyyttä ja niissä vaikuttavien normaalivoimien vaikutusta niiden taivutusjäykkyyteen ei oteta huomioon.
- Uumasauvat oletetaan täysin jäykäksi vedettyyn/tukevaan paarteeseen ja niveltueksi puristettuun paarteeseen.

Menetelmän periaate on sinänsä sama kuin työssä esitelty eli tukemattomasta paarteesta muodostetaan jousituettu palkki. Jousivakio lasketaan kuvan 6.1 mukaisesta kaavasta. Laskentataulukoista katsotaan nurjahduspituus, kun jousivakioiden arvot on määritetty.

$$\alpha = \frac{1}{\sum \frac{3EI_{di}}{l_{oai}^3} + \frac{1}{\sum \frac{1}{h^2 \left[ \frac{b_i}{q_1 q_2 EI_{ii}} + \frac{1}{k_{ei}c} + \frac{1}{GJ_2 \left( \frac{1}{c_{1i}} + \frac{1}{c_{2i}} \right)} \right]} + \frac{GJ_2}{ch^2} \left( 2 - 2 \cos \frac{\pi c}{l_0} \right)}}$$

**Kuva 6.1** Lähteen [9] mukainen menetelmä jousivakion määrittämiseen.

Kuvan kaavojen sisältöä ei tarkemmin käydä tässä työssä läpi, sillä ne voidaan lukea kyseisestä lähteestä. Siinä on kuitenkin poikkileikkaussuureiden lisäksi termejä, jotka ottavat kantaa tukevan paarteen tuentatyyppiin (onko vääntöjäykkä vai ainoastaan estää siirtymän) sekä tuennan jäykkyyteen ristikoiden keskinäisen etäisyyden kautta. Tämän työn menetelmässä ei otettu kantaa tuennan jäykkyyteen vaan oletetaan tuenta riittävän jäykäksi. Näin ollen lasketaan vertailutulokset käyttämällä ristikoiden keskinäiselle välimatkalle suhteellisen pientä arvoa. Kuvassa 6.2 on esitetty yksi esimerkki lähteen taulukosta, josta nurjahduspituus luetaan. Kuvan vaaka-akselilla on termi, joka muodostetaan edellisen kuvan kaavalla. Pystyakselilta luetaan tämän jälkeen käytettävä nurjahduspituus.



**Kuva 6.2** Esimerkkitaulukko nurjahduspituuden määrittämiseen lähteessä [9].

Taulukkoon 6.1 on koottu tulokset ristikkopilarin sisäpaarten ja kattoristikon alapaarten nurjahduspituuksille. Laskentatulokset perustuvat molemmissa tapauksissa siihen, että tukeva paarre on täysin tuettu. Lisäksi olennaista on tiedostaa, että taulukossa 6.1 työssä kehitetyllä menetelmällä lasketut tulokset eivät sisällä liitosjäykkyyksien redusointoja. Tämä sen vuoksi, että tulokset ovat vertailukelpoisia CIDECT:n tulosten kanssa.

**Taulukko 6.1** Kattoristikon alapaarten ja ristikkopilarin sisäpaarten nurjahduspituuksien vertailu laskettuna eri menetelmillä. Tukeva paarre oletetaan täysin tuetuksi.

		28 metriä korkea ristikkopilari	36 metriä pitkä kattoristikko
Ansys/kuorielementit	$L_{cr}$	6,43 m	7,67 m
RFEM/palkkielementit	$L_{cr}$	6,68 m	7,69 m
Työssä kehitetty laskentamenetelmä	$L_{cr}$	8,56 m	13,1 m
CIDECT	$L_{cr}$	9,28 m	13,3 m

Taulukon arvoista nähdään, että CIDECT:n lähteen tulokset ovat hyvin lähellä työssä kehitetyn laskentamenetelmän tuloksia. Ne ovat kuitenkin selkeästi varmalla puolella verrattuna palkki- tai kuorielementein laskettuihin tuloksiin. Tämä osaltaan puoltaa sitä, että CIDECT:n lähteessä ei ole mainintaa liitokseen kertyvästä momentista. Sillä onhan selvää, että käyttämällä nurjahduspituutena esimerkiksi ristikkopilarin tapauksessa 8,56

metriä 6,43 metrin sijaan, liitoksiin kertyy huomattavasti pienempi momentti. Näin on, koska paarre, joka mitoitetaan 8,56 metrin nurjahduspituudella, on itsessään huomattavasti vahvempi ottamaan nurjahdusta vastaan. Itseasiassa työssä esitellyllä menetelmällä nurjahduspituuden ollessa 6,43 metriä ja nurjahtavan paarteiden voiman ollessa 1200 kN, keskiarvomomentti liitoksissa on 5,34 kNm, joka vie noin 30%:a liitoksen kapasiteetista. Kun nurjahduspituutena käytetään 8,56 metriä, on momentti 3,5 kNm, joka vie noin 19%:a liitoksen kapasiteetista.

## 7. YHTEENVETO JA JOHTOPÄÄTÖKSET

Teräsrakenteiden suunnittelussa yksi olennaisimmista mitoitusperusteista on puristetun rakenneosan tai -kokonaisuuden nurjahdusmitoitusten estäminen. Nurjahdusmitoitus perustuu pääosin oikean nurjahduspituuden valintaan. Eurokoodin mukaisessa mitoituksessa häiriötekijät otetaan huomioon erillisellä kertoimella. Stabiilisuusteorian avulla voidaan johtaa rakenteiden analyysissä usein esiintyvien perustapausten nurjahduspituudet. Näissä tapauksissa rakenteen materiaali oletetaan kimmoiseksi sekä pienten siirtymien teorian oletetaan pätevän. Lisäksi voidaan johtaa analyyttisiä ratkaisuja yksinkertaiselle sauvalle myös kimmottoman nurjahduksen sekä suurten siirtymien teoriaan perustuvalla tapauksella. Nämä sinällään eivät ole kovin käyttökelpoisia rakennesuunnittelijan arkityössä, mutta ovat erinomaisia havainnollistamaan edellä mainittujen ilmiöiden vaikutuksia.

Nurjahduspituus hieman monimutkaisen rakennekokonaisuuden yksittäiselle rakenneosalle voidaan määrittää myös FEM-laskennan avulla. Tämä on todennettu myös tässä työssä käyttäen epälineaarista FEM-laskentaa ja eurokoodin mukaisia asiaankuuluvia alkuhäiriöitä. Tällöin on kuitenkin syytä tiedostaa, että reunaehdot ja osien liittymiset toisiinsa on pyrittävä mallintamaan mahdollisimman oikeina, koska nurjahduspituus määrittyy nimenomaan reunaehtoien kautta. Ristikkorakenteen paarteiden nurjahdustarkastelussa tasosta pois päin tämä tarkoittaa käytännössä sitä, että uumasauvojen ja paarteiden välisten liitoksien rotaatiojäykkyydet on oltava tiedossa.

Ristikopilarissa sisäpaarre on lähes poikkeuksetta aina puristettu rakenneosa. Vastavasti kattoristikossa alapaarre voi olla puristettuna johtuen esimerkiksi nostavista kuormista tai jäykkänurkkaisesta kehästä. Usein sisäpaarre tai kattoristikon alapaarre on näissä tapauksissa tuettu erillisellä nurjahdustuennalla, jotta voidaan käyttää pienempää nurjahduspituutta. Tämä ei kuitenkaan ota millään tavalla huomioon ristikkorakennetta kokonaisuutena. Todellisuudessa sisä- tai alapaarre saa uumasauvojen taivutusjäykkyyden ja ristikon kokonaisväntöjäykkyyden kautta selvän tuennan nurjahdusta vastaan. Tämän lisäksi normaalivoimien jakautumalla paarteiden välillä on merkittävä vaikutus. Työssä on laskettu useita ristikkorakenteita, joissa sisä- tai alapaarre on ilman poikittaistuentaa, ja nurjahduspituuden arvoiksi on saatu riippuen reunaehdoista ja käytettävästä menetelmästä  $0,25 \dots 0,4 * L$ , jossa  $L$  on paarteiden pituus.

Lähdekirjallisuutta suoranaisesti tähän aiheeseen on melko vähän. Suomenkielistä materiaalia ei löytynyt lainkaan. Merkittävin kirjallisuuslähde, jossa suoraan lasketaan nurjahduspituutta poikittaistukemattomalle paarteelle, on CIDECT:n julkaisema tutkimus vuodelta 1982. Samaan lähteeseen viitataan kuitenkin myös vuonna 2012 tehdyssä CIDECT:n putkirakenteiden suunnitteluoppaassa. Kyseisen lähteen menetelmällä on työssä laskettu samoja ristikkorakenteita kuin työssä kehitetyllä menetelmällä. Nurjahduspituuden arvoiksi on saatu  $0,33 \dots 0,37 * L$ .

Kun ristikkorakennetta hyödynnetään kokonaisuutena, aiheuttaa se ”sekundäärisiä” rasituksia ristikon eri osille. Näistä merkittävin on K-liitokseen kertyvä tasosta poispäin oleva momentti. Työssä on kehitetty menetelmä, jolla voidaan arvioida kertyvän momentin suuruutta. Menetelmä perustuu hyvin tunnettuun 2%:n sääntöön, jonka perusteella nurjahdustuentoja usein mitoitetaan. Menetelmässä momenttien oletetaan jakautuvan tasaisesti kaikille liitoksille ja sitä on verifioitu myös epälineaarilla FEM-laskennalla. FEM-laskenta osoittaa, että momentit eivät kuitenkaan jakaudu tasaisesti, mutta keskiarvotulos on hyvin lähellä kehitettyä menetelmää. Esimerkiksi CIDECT:n ohje ei ota tähän asiaan lainkaan kantaa. Työssä tehtyjen laskelmien perusteella asiaankuuluvaa on kuitenkin, että liitoksen käyttöastetta rajoitetaan, jolloin siihen jää kapasiteettia ottamaan momenttia. Työssä lasketuissa ristikkorakenteissa kyseinen momentti vie 20...30% liitoksen käyttöasteesta, kun ristikkorakenteesta hyödynnetään kaikki kapasiteetti. Tämä on mielestäni aihe, joka vaatisi lisätutkimuksia ja kenties käytännön kokeita. Jos käytetään työssä kehitettyä tai CIDECT:n menetelmää, johtaa ne suurempiin, mutta kuitenkin varsin käyttökelpoisiin nurjahduspituuksiin ja pienempiin momenttien arvoihin K-liitoksissa. Tähän nojaten voidaan vetää johtopäätös, että on suositeltavaa käyttää jompaakumpaa viimeisimpänä mainittua menetelmää.

Joka tapauksessa on selvää, että hyödynnettäessä ristikkorakennetta kokonaisuutena, on siinä iso kapasiteetti ajatellen sisä- tai alapaarteen nurjahdusta tasosta poispäin. Perinteinen ajatus, että nurjahduspituus olisi koko paarteen pituus, on reilusti varmalla puolella oleva oletus.

## LÄHTEET

- [1] Albermani F.G., Koon C.M., Chan S.L. Theoretical and experimental studies of unbraced tubular trusses allowing for torsional stiffness. *Steel and Composite Structures*, vol. 2, no. 3, 2002, s. 209-222.
- [2] Bažant Z.P., Gedolin L. *Stability of structures, Elastic, Inelastic, Fracture and Damage Theories*, (2010), 1011 s.
- [3] Belegundu A.D., Chandrupatla T.R. *Introduction to finite elements in engineering*, third edition, (2002), s. 9.
- [4] Cook R.D., Malkus D.S., Plesha M.E. *Concepts and applications of finite element analysis*, third edition, John Wiley & Sons, (1989), 650 s.
- [5] Galambos T.V., Surovek A.E. *Structural Stability of Steel: Concepts and Applications for Structural Engineers*, John Wiley & Sons, (2010), 381 s.
- [6] Harm B. *Buckling Length Factors of Hollow Section Members in Lattice Girders*, Master Thesis, (2010), 274 s.
- [7] Jalkanen Jussi, Mikkola Matti. Nurjahduspituudesta. *Rakenteiden Mekaniikka*, vol. 44, no. 1, 2011, s. 21-25. Saatavissa: [http://rmseura.tkk.fi/rmlehti/2011/nro1/RakMek\\_44\\_1\\_2011\\_2.pdf](http://rmseura.tkk.fi/rmlehti/2011/nro1/RakMek_44_1_2011_2.pdf) (viitattu 14.02.2017)
- [8] Kurobane Y., Packer J.A., van der Vegte., Wardenier J., Zhao X. L. *Design Guide 3, For rectangular hollow section (RHS) joints under predominantly static loading*, second edition, CIDECT, (2009), s. 23-24.
- [9] Mouty, J. *Effective Lengths of Tubular Lattice Girder Members*, Cidect, Monograph no. 4, (1980), 120 s.

- [10] Krajewski M., Iwicki P. Analysis of brace stiffness influence on stability of the truss. *Int. J. of Applied Mechanics and Engineering*, vol. 20, no. 1, (2015), s. 97-108
- [11] Pajunen S., *Elementtimenetelmän jatkokurssi, Luentomoniste*, (2016), ei saatavilla
- [12] Ruukki, *Rakenneputket EN 1993 -käsikirja*, (2012), 690 s.
- [13] Salmi T., Kuula K. *Rakenteiden mekaniikka, oppikirja*, Pressus Oy, (2012), s. 44-47, s.138
- [14] Suomen standardisoimisliitto SFS, SFS-EN 1993-1-1, SFS, (2005), 99 s.
- [15] Suomen standardisoimisliitto SFS, SFS-EN 1993-1-5, SFS, (2006), s. 51.
- [16] Suomen standardisoimisliitto SFS, SFS-EN 1993-1-6, SFS, (2007), s. 10.
- [17] Teräsrakenneyhdistys, *Teräsrakenteiden suunnittelu ja mitoitus, Eurocode 3 –oppikirja, Teräsrakenneyhdistys*, (2014), s. 72
- [18] Trahair, N.S., Bradford, M.A., Nethercot D.A., Gardner L., *The Behaviour and Design of Steel Structures to EC3*, 4. painos, (2008), Taylor & Francis Group, s. 67.
- [19] Tuomala M. *Rakenteiden stabiilisuusteoria, Luentomoniste*, Tampereen teknillinen yliopisto, 273 s. Saatavissa: [http://webhotel2.tut.fi/mec\\_tme/rak\\_33030/stab.pdf](http://webhotel2.tut.fi/mec_tme/rak_33030/stab.pdf) (viitattu 14.02.2017)
- [20] Yoo C.H., Lee S.C. *Stability of structures, Principles and Applications*, (2011), 523 s.
- [21] Yura A.J., Gil H. Bracing requirements of inelastic columns. *Journal of Constructional Steel Research* 51 (1999), s. 1-19.

- [22] Yura A.J. Winter's bracing approach revisited. Engineering Structures Vol. 18 (1996), No. 10, s. 821-825.
- [23] Ziemian D. Ronald. Guide to Stability Design Criteria for Metal Structures, 6<sup>th</sup> Edition, (2010), 1024 s.
- [24] <http://mashupstudio.pbworks.com/f/miracle%20truss.jpg> (viitattu 05.05.2017)
- [25] <https://www.rakennustieto.fi/Downloads/RK/RK010308.pdf> (viitattu 14.02.2017)
- [26] [http://www3.ul.ie/~mlc/support/Loughborough%20website/chap13/13\\_4.pdf](http://www3.ul.ie/~mlc/support/Loughborough%20website/chap13/13_4.pdf) (viitattu 06.03.2017)
- [27] <http://www2.amk.fi/digma.fi/www.amk.fi/material/attachments/vanhaamk/digma/5h5F5GiAj/FES03.pdf> (viitattu 10.03.2017)
- [28] [http://webhotel2.tut.fi/mec\\_tme/mec\\_2430/palkki.pdf](http://webhotel2.tut.fi/mec_tme/mec_2430/palkki.pdf) (viitattu 14.02.2017)
- [29] [http://webhotel2.tut.fi/mec\\_tme/mec\\_2430/PotEnergiaMin.pdf](http://webhotel2.tut.fi/mec_tme/mec_2430/PotEnergiaMin.pdf) (viitattu 09.03.2017)
- [30] <http://yle.fi/uutiset/3-7342830> (viitattu 04.05.2017)



## LIITTEET

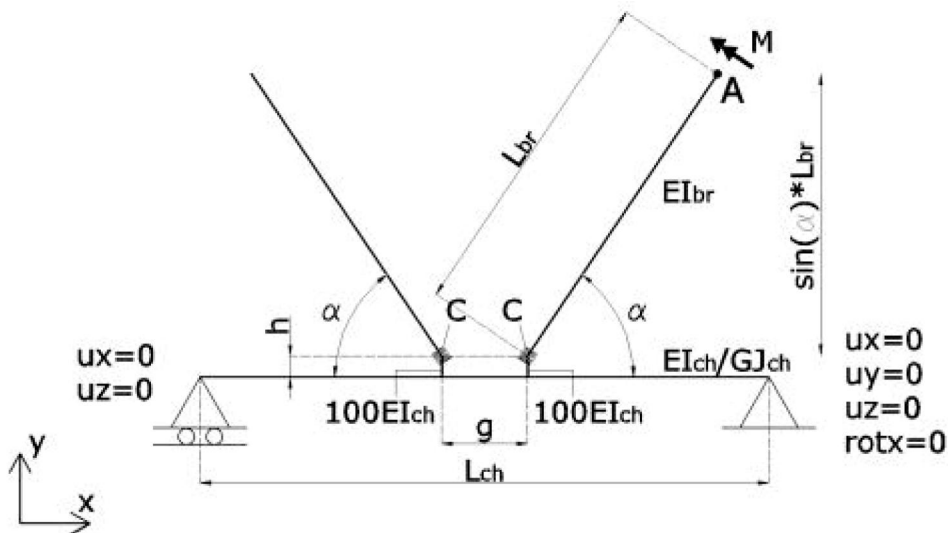
Liite 1 Termin  $w$  määrittäminen, 6 s.

Liite 2 Jousituetun palkin jousivakion  $k$  määrittäminen, 8 s.

## LIITE 1: TERMIN $w$ MÄÄRITTÄMINEN

- Tässä liitteessä esitetään uumasauvan ja paarteen väliseen rotaatiojousen laskentaan tarvittavan termin  $w$  määrittäminen.
- Termin  $w$  laskenta perustuu erilaisten yksinkertaisten ja tunnettujen kaavojen yhdistelyyn.
- Kuormitustilanteelle 1 esitellään kaikki kaavat ja niiden perusta ja kuormitustilanteille 2 ja 3 esitellään ainoastaan eroavaisuudet tilanteeseen 1 nähden.

### Kuormitustapaus 1



Kuvan mukaisin merkinnöin saadaan sauvan pään siirtymän lausekkeelle muoto:

$$w = \frac{ML_{br}^2}{2EI_{br}} + \frac{\sin(\alpha)M(L_{ch} - g)}{2GJ_{ch}}(\sin(\alpha)L_{br} + h) + \frac{M(3g^2 + L_{ch}^2)}{12EI_{ch}L_{ch}}\cos(\alpha)^2 L_{br} + \frac{\cos(\alpha)Mg(g^2 - L_{ch}^2)}{12EI_{ch}L_{ch}}$$

Kaavassa alaindeksi  $br$  viittaa uumasauvaan ja  $ch$  viittaa paarteeseen.

### Ensimmäinen termi:

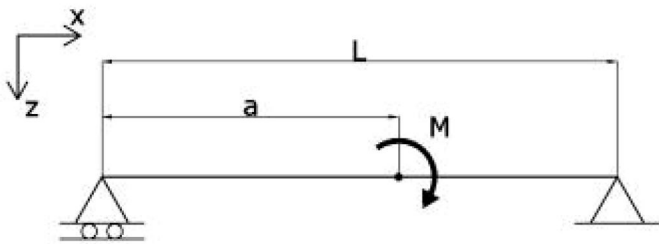
Ensimmäinen termi on ulokesauvan pään siirtymä. Tässä tapauksessa ulokesauva on uumasauva. Tämä termi on sama jokaisella kuormitustapauksella.

### Toinen termi:

Toinen termi kuvaa sauvan pään siirtymää johtuen paarteen väännöstä. Paarre kiertyy sen pituusakselinsa ympäri. Rasittavan momentin vaakasuuntainen komponentti aiheuttaa paarteen väännön ja se lasketaan kertomalla momentti kulman  $\alpha$  sinillä. Paarteen pituus joka kiertyy, on puolet paarteen pituudesta ( $\frac{1}{2}L_{ch}$ ). Lisäksi huomioidaan gapin suuruus tässä kohtaa. Siirtymä saadaan kertomalla kiertymä sauvan pituudella. Tässä tapauksessa sauvan pituudeksi otetaan luonnollisesti kohtisuora mitta, joka on uumasauvan pituuden ja paarteen puolikkaan summa.

### Kolmas termi:

Rasittavan momentin pystysuora komponentti aiheuttaa paarteen kiertymistä y-akselin ympäri. Seuraavassa kuvassa tilannetta on kuvattu päältä päin.



Paarteen kiertymä y-akselin suhteen saadaan kaavoista:

Kun  $0 \leq x \leq a$

$$\varphi(x) = \frac{Mx^2}{2EI L} + \frac{M}{6EI L} (2L^2 - 6aL + 3a^2)$$

Kun  $a \leq x \leq L$

$$\varphi(x) = \frac{M(L-x)^2}{2EI L} + \frac{M}{6EI L} (2L^2 - 6(L-a)L + 3(L-a)^2)$$

Kun tiedetään, että kiertymää aiheuttava momentti on rasittavan momentin cosini, sekä haluttu laskentakohta on

$$a = x = \frac{1}{2}(L_{ch} + g),$$

saadaan ensimmäinen yhtälö muotoon

$$\varphi_y = \frac{\cos(\alpha)M(L_{ch}+g)^2}{8EI L_{ch}} + \frac{\cos(\alpha)M}{6EI L_{ch}} (2L_{ch}^2 - 3(L_{ch} + g)L_{ch} + \frac{3}{4}(L_{ch} + g)^2).$$

Yhtälöä voidaan vielä sieventää muotoon

$$\varphi_y = \frac{M(3g^2 + L_{ch}^2)}{12EI_{ch}L_{ch}} \cos(\alpha),$$

jolloin haluttu siirtymä saadaan kerrottua yllä oleva kiertymä sauvan pituudella. Pituus on rasittavan momentin pystykomponentin kohtisuora etäisyys tarkasteltavasta pisteestä, joka on uumasauvan pituus kerrottuna kulman  $\alpha$  cosinilla.

*Neljäs termi:*

Sama rasittavan momentin pystykomponentti kuin edellä, aiheuttaa myös paarteen siirtymää z-suunnassa. Siirtymä saadaan laskettua kaavoista (vertailu samaan kuvaan kuin edellisessä kohdassa):

Kun  $0 \leq x \leq a$

$$y(x) = \frac{Mx^3}{6EI_L} + \frac{M}{6EI_L} (2L^2 - 6aL + 3a^2)x$$

Kun  $a \leq x \leq L$

$$y(x) = \frac{M(L-x)^3}{6EI_L} + \frac{M}{6EI_L} (2L^2 - 6(L-a)L + 3(L-a)^2)(L-x).$$

Kun tiedetään, että kiertymä aiheuttava momentti on rasittavan momentin cosini, sekä haluttu laskentakohta on

$$a = x = \frac{1}{2}(L_{ch} + g),$$

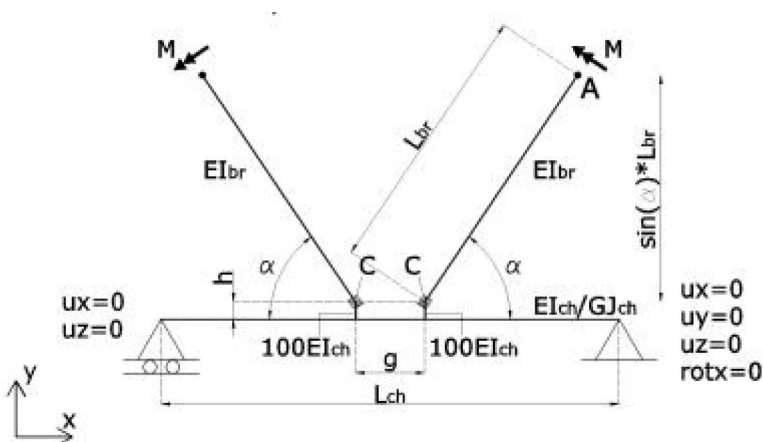
saadaan ensimmäinen yhtälö muotoon

$$y = \frac{\cos(\alpha)M(L_{ch}+g)^3}{48EI_{L_{ch}}} + \frac{\cos(\alpha)M}{12EI_{L_{ch}}} (2L_{ch}^2 - 3(L_{ch} + g)L_{ch} + \frac{3}{4}(L_{ch} + g)^2)(L_{ch} + g).$$

Yhtälö saadaan vielä sievennettyä alussa esitettyyn muotoon

$$y = \frac{\cos(\alpha)Mg(g^2 - L_{ch}^2)}{12EI_{ch}L_{ch}}.$$

## Kuormitustapaus 2



Erona ensimmäiseen kuormitustapaukseen on se, että myös toisessa uumasauvan päässä vaikuttaa momentti. Momentin suunta on sama kuin toisessakin uumasauvassa. Tässä tapauksessa termi  $w$  määritellään yhtälöstä

$$w = \frac{ML_{br}^2}{2EI_{br}} + \frac{\sin(\alpha)M(L_{ch} - g)}{GJ_{ch}}(\sin(\alpha)L_{br} + h) + \frac{Mg}{2EI_{ch}}\cos(\alpha)^2 L_{br} + \frac{\cos(\alpha)Mg(g - L_{ch})}{4EI_{ch}}.$$

Ensimmäinen termi on sama kuin kuormitustapauksessa 1. Toinen termi on sama muuten, mutta momentti on kaksinkertainen, jolloin termiä kerrotaan luvulla 2.

*Kolmas termi:*

Nyt kiertymää aiheuttaa kaksi momenttia, jolloin tarvitaan molempia yhtälöitä:

Kun  $0 \leq x \leq a$

$$\varphi(x) = \frac{Mx^2}{2EIL} + \frac{M}{6EIL}(2L^2 - 6aL + 3a^2)$$

Kun  $a \leq x \leq L$

$$\varphi(x) = \frac{M(L-x)^2}{2EIL} + \frac{M}{6EIL}(2L^2 - 6(L-a)L + 3(L-a)^2)$$

Kun tiedetään, että kiertymää aiheuttava momentti on rasittavan momentin cosini, sekä haluttu laskentakohta on

$$a = x = \frac{1}{2}(L_{ch} + g),$$

niin saadaan muodostettua yhtälö:

$$\begin{aligned} \varphi_y = & \frac{\cos(\alpha)M(L_{ch}+g)^2}{8EIL_{ch}} + \frac{\cos(\alpha)M}{6EIL_{ch}} \left( 2L_{ch}^2 - 3(L_{ch} + g)L_{ch} + \frac{3}{4}(L_{ch} + g)^2 \right) - \\ & \left( \frac{\cos(\alpha)M(L_{ch} - \frac{1}{2}(L_{ch}+g))^2}{2EIL_{ch}} + \frac{\cos(\alpha)M}{6EIL_{ch}} (2L_{ch}^2 - 6(L_{ch} - \frac{1}{2}(L_{ch} + g))L_{ch} + \right. \\ & \left. 3(L_{ch} - \frac{1}{2}(L_{ch} + g))^2 \right). \end{aligned}$$

Edellä oleva yhtälö sievenee muotoon

$$\varphi_y = \frac{\cos(\alpha)Mg}{2EI}.$$

*Neljäs termi:*

Myös neljäs termi on hieman monimutkaisempi. Nyt yhtälöistä

Kun  $0 \leq x \leq a$

$$y(x) = \frac{Mx^3}{6EIL} + \frac{M}{6EIL}(2L^2 - 6aL + 3a^2)x$$

Kun  $a \leq x \leq L$

$$y(x) = \frac{M(L-x)^3}{6EIL} + \frac{M}{6EIL} (2L^2 - 6(L-a)L + 3(L-a)^2)(L-x).$$

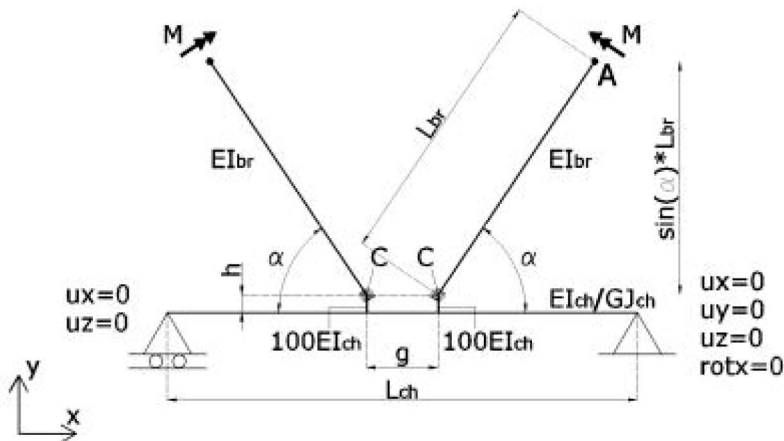
tulee yhteensä muoto

$$\begin{aligned} y &= \frac{\cos(\alpha)M(L_{ch}+g)^3}{48EI_{L_{ch}}} + \frac{\cos(\alpha)M}{12EI_{L_{ch}}} (2L_{ch}^2 - 3(L_{ch}+g)L_{ch} + \frac{3}{4}(L_{ch}+g)^2)(L_{ch}+g) \\ &+ \frac{\cos(\alpha)M(L_{ch}-\frac{1}{2}(L_{ch}+g))^3}{6EI_{L_{ch}}} + \frac{\cos(\alpha)M}{6EI_{L_{ch}}} (2L_{ch}^2 - 6(L_{ch}-\frac{1}{2}(L_{ch}+g))L_{ch} \\ &+ 3(L_{ch}-\frac{1}{2}(L_{ch}+g))^2)(L_{ch}-\frac{1}{2}(L_{ch}+g)). \end{aligned}$$

Tämä yhtälö sievenee niin ikään muotoon

$$y = \frac{\cos(\alpha)Mg(g-L_{ch})}{4EI_{ch}}.$$

### Kuormitustapaus 3



Nyt toisessa paarteessa oleva momentti vaikuttaa eri suuntaan. Termi  $w$  voidaan määrittää nyt yhtälöstä:

$$\begin{aligned} w &= \frac{ML_{br}^2}{2EI_{br}} + \frac{M(3g^2 - 3gL_{ch} + L_{ch}^2)}{6EI_{ch}L_{ch}} \cos(\alpha)^2 L_{br} + \\ &+ \frac{\cos(\alpha)Mg(2g^2 - 3gL_{ch} + L_{ch}^2)}{12EI_{ch}L_{ch}}. \end{aligned}$$

Yhtälöstä nähdään, että yksi termi puuttuu edellisiin nähden. Tämä siitä syystä, että toisen momentin vääntö kumoutuu toisen, eri suuntaisen momentin vaikutuksesta.

*Toinen termi:*

Tämän termin laskenta on hyvin samanlainen, kun kuormitustapaus 2:n kolmannen termin määrittäminen. Erona se, että jälkimmäinen termi on nyt positiivinen. Yhtälö sievenee muotoon

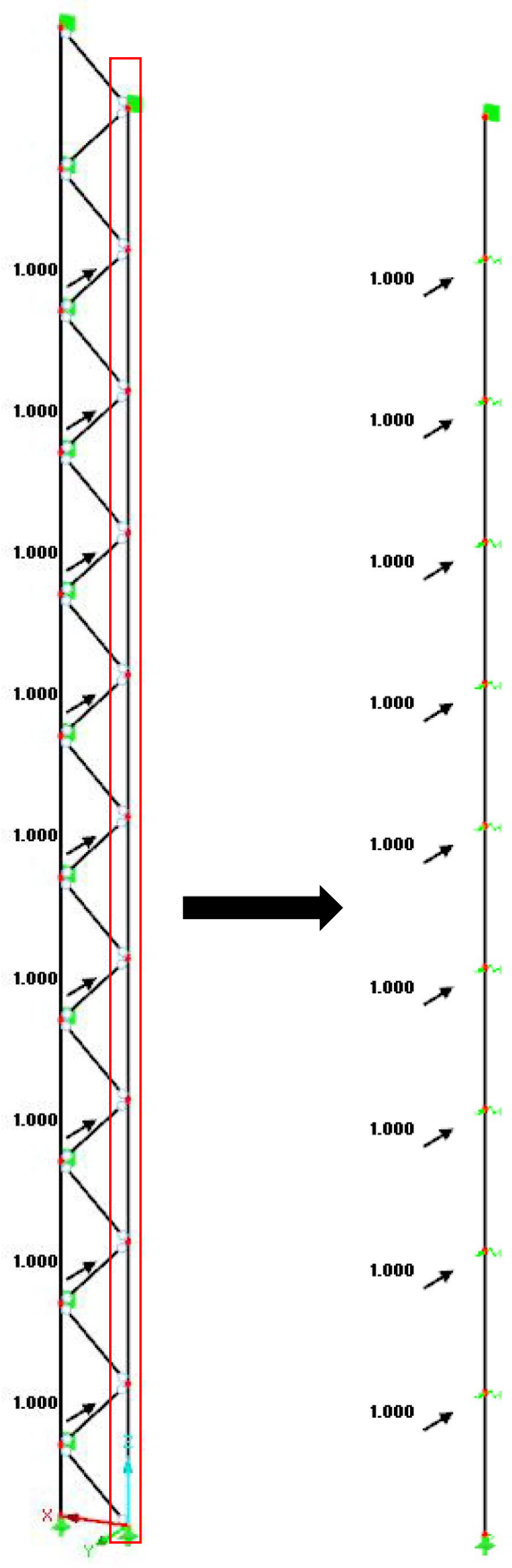
$$\varphi_y = \frac{M(3g^2 - 3gL_{ch} + L_{ch}^2)}{6EI_{ch}L_{ch}} \cos(\alpha).$$

*Kolmas termi:*

Sama pätee myös tähän termiin. Erona kuormitustapaus 2:n neljänteen termiin on se, että kaksi viimeistä termiä ovat negatiivisia positiivisten sijaan. Yhtälö sievenee näin ollen muotoon:

$$y = \frac{\cos(\alpha)Mg(2g^2 - 3gL_{ch} + L_{ch}^2)}{12EI_{ch}L_{ch}}.$$

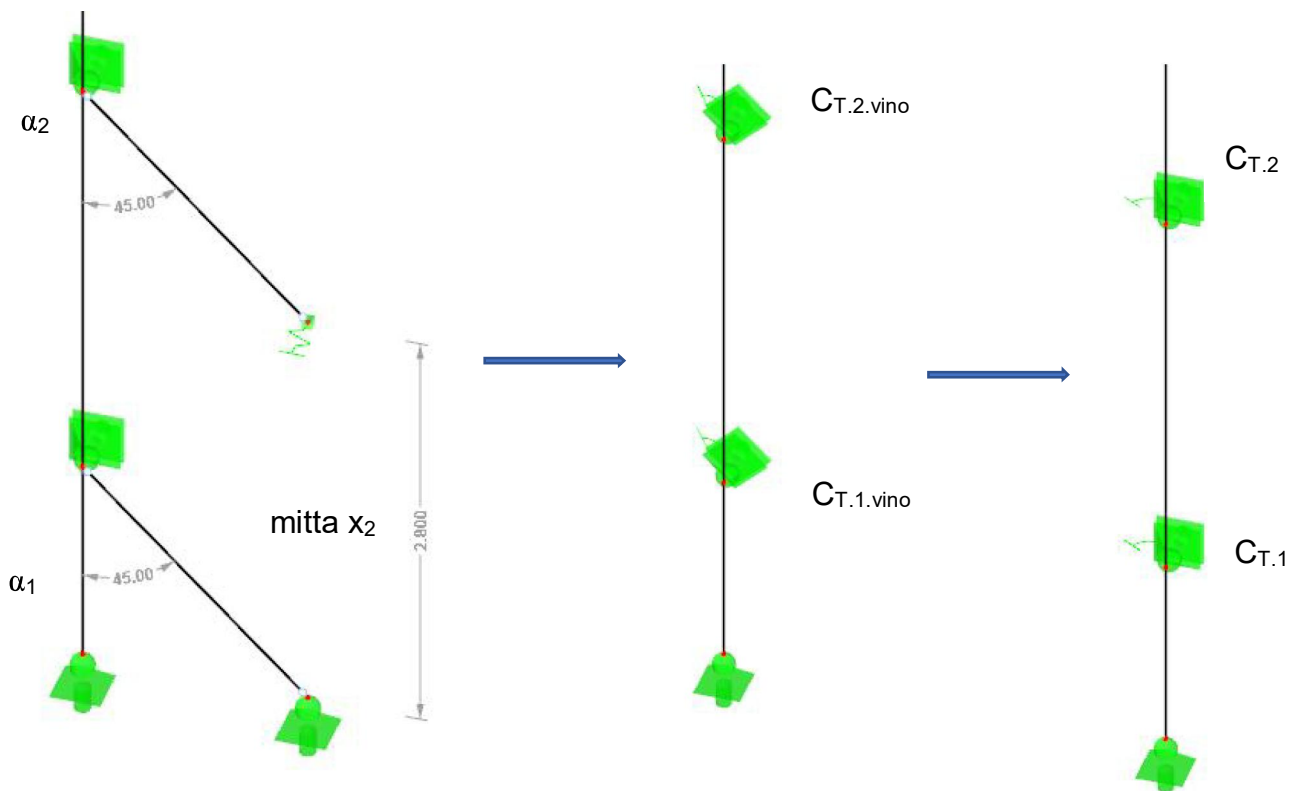
# LIITE 2: JOUSITUETUN PALKKIEN JOUSIVAKIOIDEN MÄÄRITTÄMINEN





## VAIHE 1) TUKEVAN PAARTEEN VÄÄNTÖJOUSEN MÄÄRITTÄMINEN

- Väätöjousen ajatellaan muodostuvan kahdesta alimmasta uumasauvasta ja niiden tarjoamasta väätöjousijäykkyydestä
- Jousijäykkyys kehitetään kahdesta ensimmäisestä uumasauvasta, sillä usein käyttöaste voi olla niin suuri alimmassa K-liitoksessa, että siitä ei saada niin suurta hyötyä.
- Kuten alla olevasta kuvasta nähdään, ylemmässä jousituessa tulee ottaa huomioon päässä oleva jousi, joka aiheutuu paarteiden taipumasta.
- Lopulta saadaan rotaatiojouselle jäykkyys summaamalla nämä kaksi jäykkyyttä.



$I_1 := 271.1 \text{cm}^4$  Ensimmäisen uumasauvan neliömomentti

$E := 210000 \text{MPa}$  Teräksen kimmokerroin

$L_1 := 1980 \text{mm}$  Ensimmäisen uumasauvan, "tukisauvan" pituus

$C_1 := 2260 \frac{\text{kN}\cdot\text{m}}{\text{rad}}$  Ensimmäisen uumasauvan jousijäykkyys tukevaan paarteeseen  
HUOM! Tässä kohtaa on syytä huomioida liitoksen käyttöaste!

$C_{T.1.vino} := \frac{1}{\left(\frac{3 \cdot E \cdot I_1}{L_1}\right) + \frac{1}{C_1}} = 624.307 \cdot \frac{\text{kN}\cdot\text{m}}{\text{rad}}$  Vääntöjousen arvo vinossa

$\alpha_1 := 45^\circ$  ensimmäisen uumasauvan ja tukevan paarteen välinen kulma

$C_{T.1} := \cos(90^\circ - \alpha_1)^2 \cdot C_{T.1.vino} = 312.154 \cdot \text{kN}\cdot\text{m}$  Jousesta otetaan cosinin neliö, sillä sekä vääntömomentti että haluttu jousen suunta ovat vinossa alkuperäiseen nähden

$I_{ch.2} := 4251 \text{cm}^4$  Nurjahtavan paarteen neliömomentti

$L_{ch.2} := 28000 \text{mm}$  Tukevan paarteen pituus

$n_k := 9$  Jousitukien määrä

$x_2 := 2800 \text{mm}$  Mitta x, vrt. kuva edellä

$y(x) := \frac{1 \text{kN} \cdot n_k \cdot x}{L_{ch.2} \cdot 24 \cdot E \cdot I_{ch.2}} \left( L_{ch.2}^3 - 2 \cdot L_{ch.2} \cdot x^2 + x^3 \right)$  Paarteen taipuma kohdassa x

$k_2 := \frac{1 \text{kN}}{y(x_2)} = 11.054 \cdot \frac{\text{kN}}{\text{m}}$  Jousivakion arvo

$I_2 := 271.1 \text{cm}^4$  Toisen uumasauvan neliömomentti

$L_2 := 1980 \text{mm}$  Toisen uumasauvan pituus

$\alpha_2 := 45^\circ$  Toisen uumasauvan ja paarteen välinen kulma

$$C_2 := 2260 \frac{\text{kN}\cdot\text{m}}{\text{rad}}$$

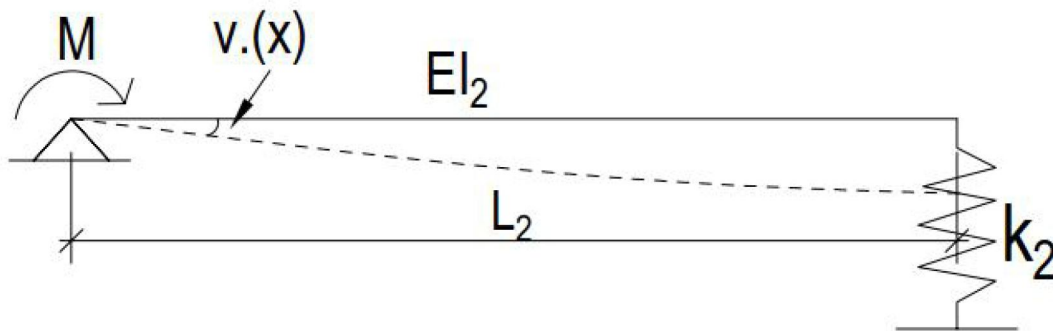
Toisen uum asauvan jousijäykkyys tukevaan paarteeseen  
HUOM! Tässä kohtaa on syytä huomioida liitoksen käyttöaste!

$$v(x) := \frac{1}{2} \cdot \frac{\text{kN}\cdot\text{m}}{E \cdot I_2 \cdot L_2} \cdot x^2 + -\frac{\text{kN}\cdot\text{m}}{E \cdot I_2} \cdot x + \frac{\text{kN}\cdot\text{m} \cdot (k_2 \cdot L_2^3 + 3 \cdot E \cdot I_2)}{3 \cdot E \cdot I_2 \cdot L_2^2 \cdot k_2}$$

Yksiaukkoisen sauvan kiertymän arvo, kun toisessa päässä translaatiojousi, vrt. alla oleva kuva

$$v_0 := \frac{\text{kN}\cdot\text{m} \cdot (k_2 \cdot L_2^3 + 3 \cdot E \cdot I_2)}{3 \cdot E \cdot I_2 \cdot L_2^2 \cdot k_2} = 0.024 \cdot \text{rad}$$

Kiertymä alkupäässä



$$C_{T.2.vino} := \frac{1}{\frac{1}{\frac{\text{kN}\cdot\text{m}}{v_0}} + \frac{1}{C_2}} = 40.525 \cdot \frac{\text{kN}\cdot\text{m}}{\text{rad}}$$

Toisen uum asauvan tarjoama vääntöjousivakio vinossa

$$C_{T.2} := \cos(90^\circ - \alpha_2)^2 \cdot C_{T.2.vino} = 20.262 \cdot \frac{\text{kN}\cdot\text{m}}{\text{rad}}$$

Vääntöjousivakio käännettynä suoraan

$$C_T := C_{T.1} + C_{T.2} = 332.416 \cdot \frac{\text{kN}\cdot\text{m}}{\text{rad}}$$

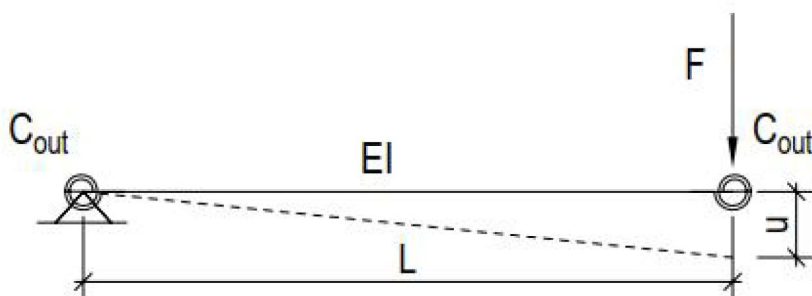
Yhteensä saatava rotaatiojousen jäykkyys vääntöä vastaan

## VAIHE 2) JOUSIVAKION k MÄÄRITTÄMINEN

$$u := \frac{F \cdot L^2}{2 \cdot C_{out}} + \frac{F \cdot L^3}{12 \cdot E \cdot I}$$

Samoilla rotaatiojousilla tuetun palkin pään siirtymä, vrt. alla oleva kuva. Voidaan johtaa taipuman differentiaaliyhtälöstä.

Tässä kohtaa tehdään oletus, että molemmat paarteet ovat samat jolloin niissä on lähes samat kiertymät. Todellisuudessa paarteet voivat olla hieman erit, mutta suunnittelija käyttää tässä kohtaa varmalla puolella olevaa oletusta ja olettaa molempiin paarteisiin pienemmän profiilin.



Edellisen kaavan rotaatiojousi  $C_{out}$  riippuu uumasauvan ja paarteen välisestä jousijäykkyydestä, koko paarteen kiertymästä ja ensimmäisessä vaiheessa määritetystä paarteen vääntöjousesta.

Koska tavoitteena on muodostaa ensimmäisellä sivulla esitetty palkki nurjahtavasta paarteesta, paarteen kiertymän arvoksi tulee ottaa vaakavoimien summasta aiheutuva kiertymä. Tässä tehdään varmalla puolella oleva oletus ja luetaan kiertymän arvoksi paarteen keskellä oleva kiertymä jokaiselle uumasauvalle.

Esimerkiksi ensimmäisen sivun kuvan tilanteessa kiertymästä tuleva vaikutus jousivakion  $C_{out}$  arvoon on 9-kertainen.

$$G := 80769 \text{ MPa}$$

Teräksen liukumoduuli

$$I_{v.ch.1} := 7071 \text{ cm}^4$$

Tukevan paarteen vääntöneliömomentti

$$L_{ch.1} := 29000 \text{ mm}$$

Tukevan paarteen pituus

$$n_k = 9$$

Jousitukien määrä, määritetty edellä

$$C := 2260 \frac{\text{kN} \cdot \text{m}}{\text{rad}}$$

Tutkittavan uumasauvan ja paarteen välinen jousijäykkyys

$$I := 271.1 \text{ cm}^4$$

Tutkittavan uumasauvan neliömomentti

$$L := 1980 \text{ mm}$$

Tutkittavan uumasauvan pituus

$$\alpha := 45^\circ$$

$$C_{\text{out}} := \frac{1}{\frac{1}{C} + \frac{1}{2C_T} + \frac{1}{\frac{4 \cdot G \cdot I_{v.ch.1}}{\cos(90^\circ - \alpha) \cdot n_k \cdot L_{ch.1}}}}$$

Jousituetun uumasauvan jousivakio, koostuu edellä mainituista asioista. Ensimmäinen termi on uumasauvan ja paarteen välinen jousijäykkyys, toinen termi on tukevan paarteen vääntäjousi ja kolmas termi on tukevan paarteen vääntöjäykkyys.

$$C_{\text{out}} = 99.748 \cdot \frac{\text{kN} \cdot \text{m}}{\text{rad}}$$

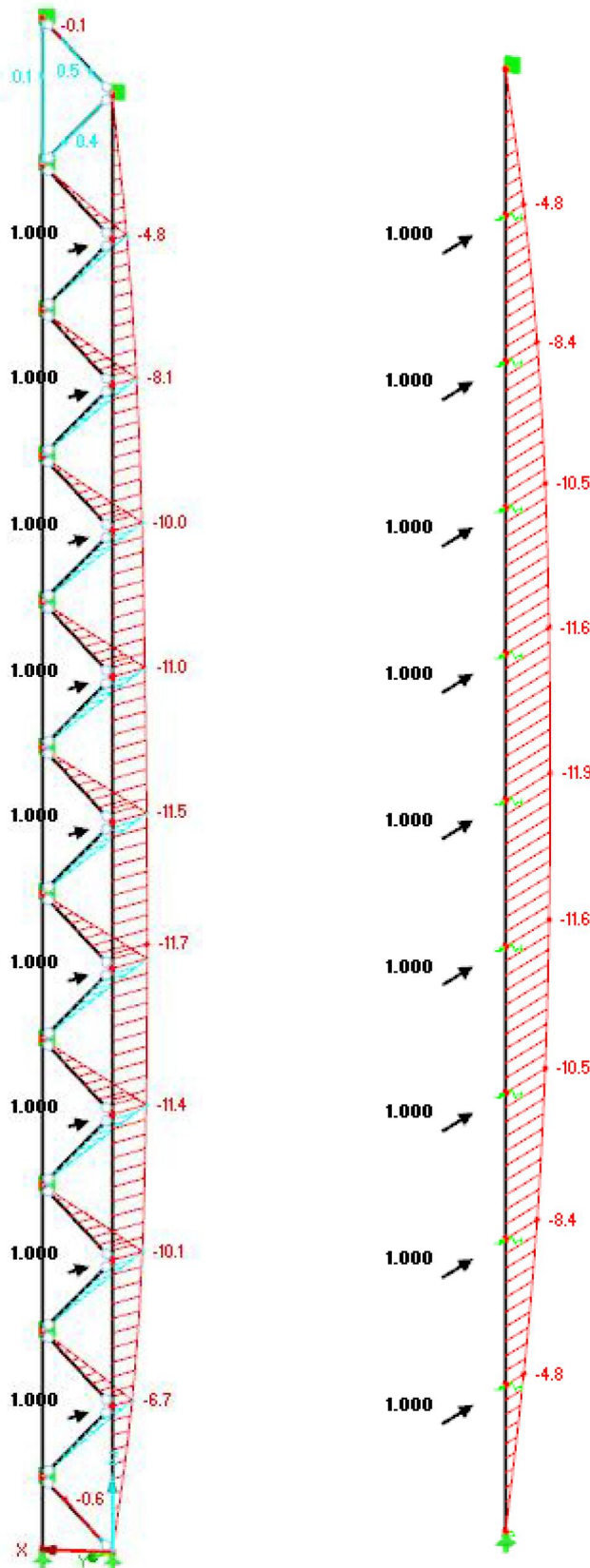
$$k := \frac{1}{\frac{L^2}{2 \cdot C_{\text{out}}} + \frac{L^3}{12 \cdot E \cdot I}} = 48.105 \cdot \frac{\text{kN}}{\text{m}}$$

Translaatiojousen arvo uumasauvan päässä.

HUOM! Jousivakio on yhden uumasauvan päässä, eli K-liitokseen tulee kaksinkertainen arvo (mikäli liittyvät uumasauvat ovat samat)

## TULOKSET ESIMERKEISSÄ:

- Alla tulokset esimerkin ristikkopilarissa, joissa käytetty edellisessä laskelmassa näytettyjä arvoja. Liitosjäykkyydet otettu täysinä, käyttöasteen vaikutusta ei ole huomioitu.



- Alla tulokset esimerkin ristikkopilarissa, kun ensimmäiset uumasauvat ovat kokonaan pois käytöstä suuren käyttöasteen vuoksi. Tällöin edellä olevassa laskentapohjassa  $C_{T.1.vino}$  saa arvon nolla ja paarre saa tukea vain seuraavasta uumasauvasta. Sen jäykkyyttä ei ole redusoitu. Yhden uumasauvan päähän saadaan arvo 17,5 kN/m, eli jousituetun palkin jousivakion arvo on 35 kN/m, koska siihen liittyy aina kaksi uumasauvaa.

