TAMPEREEN TEKNILLINEN YLIOPISTO
TAMPERE UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

JESSE KELA

Ohjelmistot sähköisessä tenttimisessä

Diplomityö

Tarkastajat:
Yliopistonlehtori Simo Ali-Löytty
Dosentti Jorma Joutsenlahti
Tarkastaja ja aihe hyväksytty
31.05.2017
Pvm: 15.06.2017

TIIVISTELMÄ

TAMPEREEN TEKNILLINEN YLIOPISTO
Teknis-luonnontieteellinen koulutusohjelma
JESSE KELA: Ohjelmistot sähköisessä tenttimisessä
Diplomityö, 50 sivua, 3 liitesivua
Kesäkuu 2017
Pääaine: Matematiikka
Tarkastajat: Simo Ali-Löytty, Jorma Joutsenlahti
Avainsanat: matematiikka, EXAM, sähköinen tentti, MATLAB, STACK, CAA

Matematiikan opetuksen sähköistyminen on ajankohtainen aihe ja sen digitalisaatio alkaa jo lähtien peruskoulun alusta jatkuen sähköisiin ylioppilaskirjoituksiin. Myös korkeakoulumaailmassa pyritään matemaattista osaamista testaamaan sähköisiä järjestelmiä käyttäen. Tampereen teknillisellä yliopistolla tällaisia järjestelmiä ovat muun muassa verkko-oppimisympäristö Moodle, sähköinen tenttipalvelu EXAM, laskentaohjelmisto MATLAB ja automaattisesti tarkastettavat STACK-tehtävät. Järjestelmiä käyttäen päästään hyödyntämään tietokoneavusteista arviointia ja tarkastamista. Sähköisessä tentissä pystytään tehtävissä hyödyntämään suurempia datoja ja laskemaan asioita, kuten otoskeskiarvoja tietokoneella, mikä vastaa työelämän toimintaa. Sähköinen tentti tarjoaa myös joustavuutta ja osaamisen voi näyttää milloin itselle sopii parhaiten. Sähköistä ympäristöä hyödyntäen voidaan yhtälailla testata matemaattista osaamista, vaikka työvälineet ja menettelytavat muuttuvat.

Syyslukukaudella 2016 osana Tampereen teknillisen yliopiston matematiikan perusopintojaksoja oli pakollinen ja lähes itsenäisesti pyörivä MATLABin alkeiden verkkototeutus. Tämän avulla tavoitellaan MATLABin perustoimintojen opettamista sekä työkaluksi opintoihin että vastausvälineeksi sähköiseen tenttijärjestelmään EXAMiin. MATLABin alkeiden sähköinen tentti, työssä kehitetyn interaktiivinen GeoGebra-tehtävän ohella ovat esimerkkejä uusista sähköiseen järjestelmään sopivista tehtävistä ja näitä on syytä kehittää ja luoda uusia. Kevätlukukauden 2017 tilastomatematiikan sähköisen EXAM-tentin tuloksien avulla tutkittiin tehtäväpankkien tasapuolisuutta ja laatua sekä yhdessä MATLABin alkeiden kanssa pohdittiin sähköisen tentin etuja ja haittoja.

ABSTRACT

TAMPERE UNIVERSITY OF TECHNOLOGY
Master's Degree Programme in Science and Engineering
JESSE KELA : Software in electronic examination
Master of Science Thesis, 50 pages, 3 appendix pages
June 2017
Major: Mathematics
Examiners: Simo Ali-Löytty, Jorma Joutsenlahti
Keywords: mathematics, EXAM, electronic exam, MATLAB, STACK, CAA

Electronic examination of mathematics is timely topic and the its digitalization begins already from primary school and up to electronic matriculation examination. Also in university level the aim is to test mathematical proficiency by using electronic systems. In Tampere University of Technology examples of such systems are virtual learning environment Moodle, computing software MATLAB, electronic exam system EXAM and automatically marked STACK assignments. These systems provide a way to use computer assisted assessment and automatic marking and assessing. In electronic exams it is possible use larger data sets in the assignments and compute things such as sample means with computer software which is line with real life problems. Electronic examination also provides flexibility over time and students can go show their skills in exam almost any time they see fit. The virtual environment does not prevent testing mathematical proficiency even though the tools and methods change.

In Tampere University of Technology during the 2016 autumn term part of the elementary mathematics courses were almost independently ongoing Basics of MATLAB course in Finnish. The learning outcomes of this course were to learn the basic operations in MATLAB which can be later used as a tool for other courses and means to use for answering in electronic exams. The electronic exam along with an invented interactive GeoGebra demonstration are new and suitable examples of assignments for electronic examination but they still require improvements and new assignments have high demand. The results of electronic exam of statistics course during 2017 spring term worked as material for studying the fairness and quality of the assignments within the bank. Also together with Basics of MATLAB discuss the advantages and drawbacks of electronic examination.

ALKUSANAT

Tämä diplomityö on tehty Tampereen teknillisen yliopiston Matematiikan laboratoriolle osana opetuksen ja opintojen kehittämistä sähköistymistä ajatellen. Erityiskiitokset ohjaajalleni Simo Ali-Löytylle, joka mahdollisti työn aiheen ja tarjosi valtavasti apua muun muassa MATLABin käytössä. MATLABista tulikin tämän seurauksena itselleni tärkeä työkalu ja antoi koodauksen maailmaan hyvän alun, johon jo jonkun aikaa on ollut kiinnostusta. Alkukankeutta lukuun ottamatta prosessi työn kanssa oli monipuolista ja antoisaa sisältäen muun muuassa kurssiassistenttina opettamista.

Haluan lisäksi kiittää tarkastajaani Jorma Joutsenlahtea sekä myös Tampereen teknillisen yliopiston yliopisto-opettajaa Jussi Kangasta työn aikana saaduista kehitysehdotuksista ja kommenteista. Ei parane myöskään olla kiittämättä Herwannan hauiskääntöä, jonka ansiosta opiskelu Tampereen teknillisellä yliopistolla on vastoinkäymisistä huolimatta ollut unohtumatonta.

SISÄLLYS

LYHENTEET JA MERKINNÄT

CAA	Computer Assisted/Aided Assessment. Tietokoneavusteinen arviointi.
ITS	Intelligent Tutoring System. Älykäs opetusjärjestelmä.
Moodle	Modular Object-Oriented Dynamic Learning Environment. Verkko-oppimisympäristö.
EXAM	Sähköinen tenttipalvelu.
MW	MathWorks. Matemaattisen laskentaohjelmistoon erikoistuva yritys.
MATLAB	Matrix Laboratory. Matriisilaskentaan perustuva numeerinen laskentaohjelmisto.
STACK	System for Teaching and Assessment using Computer algebra Kernel. Matematiikkaa hyödyntäviä automaattisesti itsensä tarkastavia tehtäviä
CAS	Computer Algebra System. Symbolisen laskennan ohjelmisto.
$\mathbb{R}$	Reaalilukujen joukko
$\det(A)$	Matrisin A determinantti.
$\operatorname{rank}(A)$	Matrisin A aste.
A^T	Matrisin A transpoosi.
I_n	$n \times n$ identiteettimatriisi
$\mathbf{x}$	Vektori.
$\|\|\mathbf{x}\|\|$	Vektorin $\mathbf{x}$ normi.
$x'(t),\ \frac{dx}{dt}$	Funktion $x(t)$ derivaatta t suhteen.
H_0	Nollahypoteesi.
H_1	Vaihtoehtoinen hypoteesi.
θ	Populaation tunnusluku yleisesti.
$\hat{\theta}$	Estimaatti.
$\hat{\Theta}$	Estimaattori.
$\min\{a, b\}$	Lukuarvojen a ja b minimi.
$P(X \leq x)$	Todennäköisyys, että satunnaismuuttujan X on pienempää kuin toteutunut arvo x.

1. JOHDANTO

Opetuksen sähköistyminen on kasvava trendi ja opetuksessa käytettävien sähköisten järjestelmien ja ohjelmistojen täytyy kehittyä tämän mukana. Suomen ylioppilastutkinnossakin on meneillään siirtymävaihe täysin sähköisiin ylioppilaskirjoituksiin, matematiikan ollessa vuorossa viimeiseinä keväällä 2019 [1]. Korkeakoulumaailmassakaan ei olla jääty trendin ulkopuolelle, vaan sähköistä tenttijärjestelmää on myös kehitetty. Yhteisiä ongelmia matemaattisten aineiden saralla on muun muassa sopivan editorin löytäminen, joka vastaa opetettavien aineiden tarpeita.

Sähköisten oppimis- ja tenttiympäristöjen tavoitteena on ainakin tarjota joustavuutta ajan ja paikan suhteen, säästää aikaa toimivan järjestelmän ollessa käytössä, tarjota automatisointia ja vähentää ihmistyötä esimerkiksi tehtävien arvioinnissa. Näiden avulla mahdollistetaan muun muassa etäopetus verkkokurssina, harjoitustehtävien tekeminen missä tahansa ja millä tahansa verkkoon kytketyllä laitteella ja tentin suorittaminen sähköisesti itsevalittuna ajankohtana.

Tällä vuosituhannella on kehitetty monia järjestelmiä matematiikan tehtäviä varten ja tehty tutkimusta näihin liittyen. Yksi tutkituimmista ja käytetyimmistä järjestelmistä, ainakin Suomessa, on STACK, joka on sähköinen järjestelmä automaattisesti arvioitavien tehtävien laadintaan. Tampereen teknillisessä yliopistossa STACK-järjestelmän tehtävien käyttöä matematiikan opetuksessa on tutkittu useaan otteeseen, kuten kuinka järjestelmää kuuluisi käyttää mielekkäästi [2] sekä suhtautumista STACK-tehtäviin ja niiden vaikutuksesta oppimistuloksiin [3]. Lisäksi on tuotettu monenlaista verkkomateriaalia, kuten opetusvideoita [4, 5] matematiikan opetuksen tueksi.

Myös muualla Suomessa on tutkittu STACK-tehtävien toimivuutta osana erilaisia matematiikan kursseja, kuten diskreettiä matematiikkaa [6] ja graafiteoriaa [7] Aalto-yliopistossa että muualla maailmassa on kehitetty sekä STACK-järjestelmää että muita automaattiseen arviointiin kykeneviä järjestelmiä [8, 9, 10].

Työssä käsitellään ohjelmistojen käyttöä sähköisessä tenttimisessä matematiikan suhteen. Keskeisinä tutkimuskysymyksinä ovat matematiikan sähköisen tentin ero paperiseen versioon sen etuineen ja haittoineen, minkälaiset tehtävätyypit sopivat sähköiseen tenttiin ja voiko sähköinen tentti toimia myös oppimistapahtumana.

Teoreettisessa viitekehyksessä käsitellään tarpeellista taustaa matematiikan oppimiseen, sähköiseen tenttimiseen ja tehtäviin liittyen. Näihin kuuluu matemaattisen osaamisen piirteet, oppiminen ja opetus yliopistossa sekä tietokoneavusteinen arviointi. Matemaattisesta osaamisesta tuodaan esille sen jakautuminen viiteen eri piirteeseen, joita pyritään testamaan erilaisin tehtävätyypein. Oppiminen ja opetus yliopistossa kappaleessa yhdistetään matemaattisen osaamisen piirteet oppimiseen ja opetukseen sekä luodaan taustaa mielekkäille ja motivoiville tehtäville. Tietokoneavusteisessa arvioinnissa keskitytään jatkuvan arvioinnin ja päättöarvioinnin tekemiseen tietokoneita hyödyntäen. Tätä kautta myös päästään automaattiseen arviointiin ja suurempaan älykkään opetusjärjestelmän muodostamaan kokonaisuuteen, jonka avulla pyritään sähköisiä järjestelmiä hyödyntäen saamaan ihmisen veroinen opettaja.

Matematiikan opetuksen ja arvioinnin sähköiset järjestelmät kappaleessa käsitellään lyhyesti Tampereen teknillisellä yliopistolla opetuksessa käytössä olevia järjestelmiä. Näihin kuuluvat sähköinen verkko-oppimisympäristö, sähköinen tenttijärjestelmä EXAM, tehtävien luomiseen ja vastaamiseen käytettävä laskentaohjelmisto MATLAB sekä automaattisesti tarkastettavat STACK-tehtävät.

Syyslukukaudella 2016 osana matematiikan perus- opintojaksoja oli opiskelijoille pakollinen MATLABin alkeiden verkkototeutus, jonka avulla tavoitellaan MATLABin perustoimintojen opettamista sekä työkaluksi opintoihin että vastausvälineeksi sähköiseen tenttijärjestelmään EXAMiin. Tähän liittyvässä kappaleessa esitellään toteutuksen sisältö, rakenne sekä tulokset.

Työssä esitellään muutama versio sähköisen tentin mahdollistamista tehtävätyypeistä. Näihin liittyen käsitellään tehtävien kannalta tarpeellinen matemaattinen tausta ja lyhyt esittely tehtävästä ja sen luonteesta. Lisäksi pohditaan millaista matemaattista osaamista tehtävän ratkaiseminen vaatii aikaisemmin mainittujen piirteiden pohjalta.

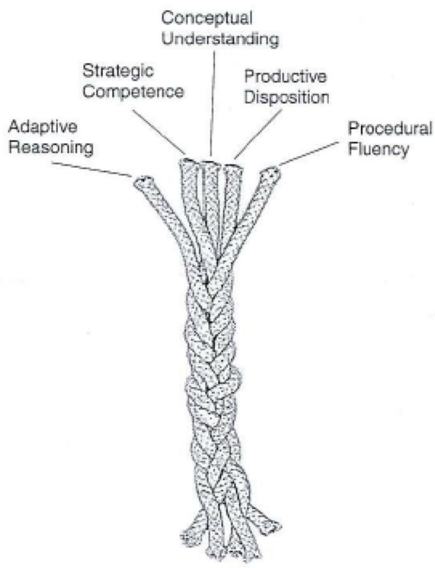
Lopuksi käsitellään kevään 2017 tilastomatematiikan kurssin toteutusta, jossa ensimmäistä kertaa oli mahdollista paperisen tentin ohella myös sähköinen EXAM-tentti. EXAM-tentin tehtäväpankin tehtävät ja niiden yleinen tausta, tilastollinen testaus, esitellään lyhyesti. EXAM-tentin tuloksia analysoidaan sekä kvantitatiivisesti että kvalitatiivisesti ajatellen tehtäväpankkien laajentamisen tarpeellisuutta ja tehtävien tasapuolisuutta laadun parantamiseksi.

2. TEOREETTINEN VIITEKEHYS

Luvussa käsitellään teoreettista viitekehystä tarpeellisine käsitteineen matematiikan sähköiseen tenttimiseen ja sähköisiin tehtäviin liittyen. Matemaattisen osaaminen, oppiminen, tietokoneavusteinen ja automaattinen arviointi sekä älykäs opetusjärjestelmä ovat keskeisinä käsitteinä työn teoreettisessa viitekehyksessä.

2.1 Matemaattinen osaaminen

Matemaattinen osaaminen (*mathematical proficiency*) on laaja käsite ja sen voidaan ajatella koostuvan useasta eri osa-alueesta. Eri ihmisiltä tai tahoilta kysyttäessä saisi luultavasti yhtä monta erilaista vastausta kuin kysymyksen kohteita on yhteensä matemaattisen osaamisen sisällöstä. Kilpatrick, Swafford ja Findell kirjassaan [11] katsovat matemaattisen osaamisen muodostuvan viidestä eri piirteestä, joita kuvassa 2.1 esitetään punotun köyden pään viitenä jakautuvana haarana.



Kuva 2.1 *Matemaattisen osaamisen piirteet. [11]*

Köyden haarautuva pää kuvastaa hyvin piirteiden sekä muodostavan yhtenäisen kokonaisuuden että olevan riippuvaisia toisistaan. Joutsenlahti väitöskirjassaan käsittelee tarkemmin näitä viittä matemaattisen osaamisen piirrettä ja on suomentanut ne mukautuvaksi päättelyksi (*adaptive reasoning*), strategiseksi kompetenssiksi (*strategic competence*), käsitteelliseksi ymmärtämiseksi (*concenptual understanding*), yritteliäisyydeksi (*productive disposition*) ja proseduraaliseksi sujuvuudeksi (*procedural fluency*). [12, s. 96]

Mukautuvalla päättelyllä tarkoitetaan kykyä ajatella loogisesti eri tilanteissa ja kykyä osoittaa perustelut omalle toiminnalleen. Mukautuvan päättely on merkittävässä roolissa ongelmanratkaisussa. Strategisella kompetenssilla tarkoitetaan kykyä hyödyntää tietoja ja taitoja ongelman matemaattisen muotoiluun ja sopivan ratkaisustrategian keksimiseen käyttäen hyväksi opittuja käsitteitä ja toimintatapoja. Strateginen kompetenssi siis liittyy käsitteelliseen ymmärtämiseen ja vaatii mukautuva päättelyä. Käsitteellisellä ymmärtämisellä tarkoitetaan muutakin kuin vain nimensä mukaisesti käsitteiden tietämistä. Lisäksi ymmärretään muun muassa milloin käsitteitä ja toimintatapoja voidaan käyttää, kuinka ne liittyvät toisiinsa ja miten niistä rakennetaan suurempia kokonaisuuksia. Yritteliäisyydellä tarkoitetaan matematiikan osaamisessa pyrkimystä havaita matematiikka hyödyllisenä ja nähdä sen opiskelu kannattavana. Yritteliäisyys siis liittyy uskomuksiin ja asenteisiin, jotka positiivisina kehittävät muita matemaattisen osaamisen piirteitä. Proseduraalisella sujuvuudella tarkoitetaan kykyä suoriutua proseduureista eli joko toiminnosta tai sarjasta toimintoja joustavasti, tehokkaasti ja tarkoituksenmukaisesti. Rutiininomaisen laskutaidon voidaan katsoa kuuluvan tähän matemaattisen osaamisen piirteeseen. Proseduraalinen sujuvuus vaatii käsitteellistä ymmärtämistä, mutta puolestaan käsitteellisen ymmärtämisen ilmentäminen vaatii myös proseduraalista sujuvuutta. [12, s. 96-99]

Sähköisessä ympäristö ei poissulje matemaattisen osaamisen piirteitä, vaan ne ovat yhtälailla testavissa sähköisessä tentissä kuin perinteisessä paperitentissä. Matemaattiset tehtävät vaativat ympäristössä kuin ympäristössä käsitteellistä ymmärtämistä, mukautuvaa päättelyä, strategista kompetenssia ja proseduraalista sujuvuutta. Tiedot ja toiminnot tehtävien ratkaisemisessa mahdollisesti joko muuttuvat osittain tai täysin, mutta looginen ajattelu, perusteleminen, käsitteiden ymmärtäminen ja sopivan ratkaisustrategian valinta ovat aina läsnä. Sähköinen ympäristö saattaa myös innostaa matematiikkaan, mikä näkyy yritteliäisyyden piirteessä.

2.2 Oppiminen ja opetus yliopistoympäristössä

Käsitellään hieman opiskelijoiden oppimista ja yliopistossa tarjottua opetusta yleisesti eikä pelkästään matematiikan opetuksen näkökulmasta. Kappaleen sisältä pohjautuu pitkälti yliopisto-opetuksesta kertovaan kirjaan *Teaching for Quality Learning at University* ja osaan sen käsittelemistä teemoista, joista keskeisimpänä ovat tavoitepohjainen koulutus (*outcomes-based education*), pinta- ja syvälähestyminen oppimiseen (*surface and deep approach to learning*), motivaatio sekä jatkuva arviointi (*formative assessment*) että päättöarviointi (*summative assessment*).

Pintalähestymisessä on kyse minkä tahansa yksittäisen tehtävän tai kokonaisuuden suorittamisesta hyväksytysti minimivaivalla eli mahdollisimmin pienellä työmäärällä [13, s. 22-23]. Yliopiston opetusympäristössä tällä tarkoitetaan esimerkiksi ulkoa opettelua ilman syvempää ymmärrystä, kuten tietynlaisen tehtävätyypin opettelu tenttiä varten, jolloin annetaan harhakuva. Jossain määrin kyseinen lähestymistapa on järkevä ja hyväksyttävä, mutta se ei kannusta syvempään oppimiseen ja ongelman aiheuttaa arvioitava tehtävä eikä niinkään opiskelija. Pintalähestymisessä hyödynnetään etenkin proseduraalista sujuvuutta. Syvälähestymisessä on taas kyse päinvastaisesta toiminnasta [13, s. 22-23], joka vaatii enemmän myös opiskelijalta ja vielä enemmän opettajalta etenkin tehtävien laadinnassa. Arvioitavat tehtävät eivät testaa ainoastaan jonkin tietynlaisen laskukaavan tai yksittäisten yksityiskohtien ulkoa osaamista. Tästä päästään siihen, että arvioitavien tehtävien tulisi vastata tarkoitettujen osaamistavoitteiden (*intended learning outcomes*) tarpeita tehtäviä suunniteltaessa. Syvälähestymisessä hyödynnetään matematiikan osaamisen piirteistä myös strategista kompetenssia ja syvempää käsitteellistä ymmärrystä.

Motivaatio ja sen luominen on myös yksi opetukseen liittyvistä tärkeistä elementeistä, sillä motivaatiota tarvitaan sekä oppimisen käynnistymiseen että ylläpitämiseen. Motivaation voidaan katsovan kuuluvaksi yritteliäisyyden piirteeseen. Kaikki perustuu opiskelijan näkemään hyöty-kustannussuhteeseen eli hyödyn pitää olla suurempaa kuin hyötyyn vaadittu kustannus. Motivaatiota on sekä ulkoista (*extrinsic*) ja sisäistä (*intrinsic*). Ulkoisella motivaatiolla tarkoitetaan päämäärän saavutettua saavan jokin asia tai puolestaan välttyvän joltain asialta ja sisäisessä motivaatiossa seuraamuksen sijaan tärkeää on itse työ eli ei päämäärä vaan matka. Motivaatio voi olla myös liittyneenä sosiaalisuuteen eli mitä muut ihmiset ajattelevat tai saavutukseen, jolla kohotetaan itsetuntoa, joko kilpailemalla itseään tai muita vastaan. [13, s. 47] Opetuksen ja arvioitavien tehtävien tulisi siis suunnitella niin, että ne lisäisivät opiskelijoiden motivaatiota.

Tärkeitä elementtejä toimivalle oppimistapahtumalle ovat muun muassa asianmukaisen motivationaalisen kontekstin rakentaminen tarjoamalla vapautta ja mahdollisuus käyttää aikaisemmin opittua tietoa. Yksi tärkeimmistä on kuitenkin jatkuvan arvioinnin hyödyntäminen. Jatkuva arviointi eroaa päättöarvioinnista siten, että arviointia ja palautetta annetaan jo oppimistapahtuman aikana eikä ainoastaan sen päätteeksi. [13, s. 97] Ideaaliseen palautteeseen kuuluu väärinkäsitysten ja virheiden osoittaminen ja korjaaminen.

2.3 Tietokoneavusteinen arviointi

Tietokoneavusteisella arvioinnilla (*computer aided/assisted assessment*) tarkoitetaan arviointintimenetelmää, jossa käytetään hyväksi tietokonetta joko koko arviointiprosessissa tai ainoastaan osassa arviointiprosessia. Tietokoneavusteista arviointia voidaan hyödyntää aina yhdestä laitteesta koostuvasta järjestelmästä verkkoa hyödyntäviin suurempiin järjestelmiin ja käyttää sekä jatkuvassa arvioinnissa tarjoten palautetta että päättöarvioinnissa lopullisen arvosanan määräämisessä. [9, 14]

Perinteisesti tietokoneavusteista arviointia on nähty ja edelleen nähdään moni- ja aukkovalintatehtävien kohdalla. Etenkin matematiikassa tällaisten tehtävien ongelmaksi koituu käänteisen tehtävän helppous. Tällä tarkoitetaan yleisesti sitä, että annettujen vastausvaihtoehtojen perusteella tutkitaan, mikä näistä sopisi parhaiten vastaukseksi tai että voidaan suorittaa käänteinen operaatio vastaukselle. Esimerkiksi matematiikassa integrointitehtävän tapauksessa saadaan derivointitehtävä, joka on suhteessa helpompi kuin alkuperäinen tehtävä. [9]

2.3.1 Automaattinen arviointi

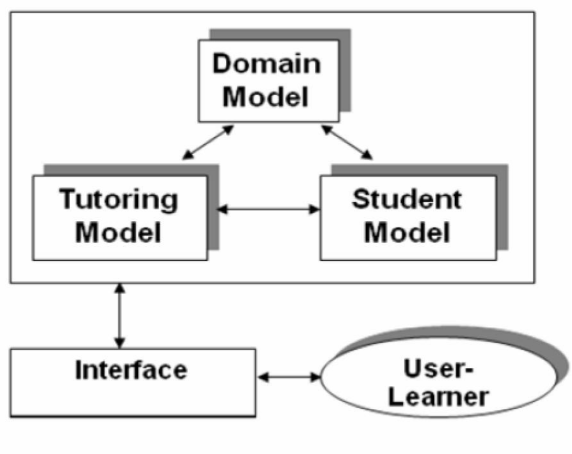
Tehtävissä, joissa ratkaisu on yksiselitteinen lauseke tai merkkijono, automaattinen arviointi on mahdollista [15, 16]. Tämän hetken näkemyksen mukaan myös avointen vastausten arvioinnissa automaattisesta arvioinnista on apua, mutta se ei vielä korvaa opettajan roolia arvioinnissa [17, 18].

Hyvin suunnitellulla ja toteutetulla automaattisella tietokoneavusteiselle arvioinnilla on tietenkin etuuksien lisäksi heikkouksia, niin pedagogisella puolella kuin hallinnollisella puolella. Etuuksia ovat muun muassa arvioinnin tekemisen laajalta skaalalta eri aiheita, käytännössä vain mielikuvituksen ollessa rajana. Tehtäviä pystyy satunnaistamaan automaation lisäksi esimerkiksi yksinkertaisesti muuttamalla yhtälön kertoimia tai tuomalla kokonaan uuden, mutta vastaavaa tasoa olevan tehtävän tilalle. Jatkuvaa arviointia ajatellen on mahdollista myös räätälöidä suoritettavaa tehtäväpakettia jo sen ollessa käynnissä opiskelijan osaamisen ja valintojen perusteella. Järjestelmästä riippuen suurien joukkojen käsittely on helpompaa ja nopeampaa, ihmisen tekemät satunnaiset virheet vähenevät, mahdollisuus saada ja analysoida tilastollista dataa esimerkiksi tehtäväkohtaisen suoritusajan ja pisteiden välistä riippuvuutta. Lisäksi voidaan olla joustavampia, etenkin paikan ja ajan suhteen sekä pystytään vähentämään vaadittua valvontaa ihmisiltä. Mahdollista on myös tehdä yhteistyötä ja integrointia muiden järjestelmien kanssa, kuten tenttituloksien suoraa vientiä sähköisestä tenttijärjestelmästä suoraan yleiseen tietojärjestelmään.

Kuten minkä tahansa uuden suunnittelun ja toteutuksen tapauksessa, vaaditaan aikaa sitä enemmän mitä monimutkaisemman ja laajemman järjestelmän haluaa luoda. Esimerkiksi automaattisesti arvioitavan monivalintatehtäväjärjestelmän luominen, joka tarjoaa opiskelijoille arvosanan lisäksi kommentointia tuloksista on huomattavasti helpompaa kuin avoimemman tehtävätyypin käsittelevän järjestelmän. Lisäksi aina on mietittävä myös tietoturva-asioita ja häiriötilanteiden minimoimista, torjumista ja niissä toimimista, kuten ei-sähköisessä muodossakin.

2.3.2 Älykäs opetusjärjestelmä

Tietokoneavusteisen arvioinnin kehittyneempänä versiona voidaan pitää älykästä opetusjärjestelmää (*intelligent tutoring systems, ITS*), jonka tarkoituksena on saada tekoälyn avulla tietokoneesta ihmisen veroinen opettaja. Älykäs opetusjärjestelmä mahdollistaa henkilökohtaisemman palautteen ja oppimisen kuin tavallinen tietokoneavusteinen arviointi. Älykäs opetusjärjestelmä pyrkii mukautumaan opiskelijan tarpeiden ja taitojen mukaan sekä antaa palautetta virheistä oppimisprosessin tukemiseksi. [19] Tällaisten järjestelmien kehityksestä ja käytöstä esimerkkejä ovat muun muassa ActiveMath [20] ja ASSISTments [21].



Kuva 2.2 *Neljästä komponentista koostuvan älykkään opetusjärjestelmän rakenne. [22]*

Älykkään opetusjärjestelmän katsotaan yleisesti koostuvan neljästä eri komponentista, joita ovat vapaasti käännettynä tietolähteen malli (*Domain Model*), opettajan malli (*Tutoring Model*), opiskelijan malli (*Student Model*) ja oppijan käyttöliittymän malli *Interface Model*) [22, 19]. Tietolähteen malli sisältää opetettavat toimintamallit, säännöt ja ongelmanratkaisustrategiat ollen eräänlainen järjestelmän kirjasto. Roolista riippuen se voi toimia tiedonlähteenä tai virheiden etsijänä.

Opiskelijan malli on järjestelmän ydinkomponentti. Sen kuuluisi sisältää mahdollisimman paljon tietoa opiskelijan tilasta tietoja ja taitoja ajatellen. Sen täytyy siis kerätä tietoa opiskelijasta ja käyttää tätä tietoa opiskelijan tiedon ja oppimisprosessin analysoimiseen. Opiskelijan malli siis on korjaava, kehittävä, strateginen, ennustava ja arvioiva rooli opiskelijan tietojen ja tekemien virheiden suhteen.

Opettajan malli saa tietonsa tietolähteen ja opiskelijan mallilta ja tekee näiden pohjalta päätöksiä opetusstrategioista ja -tavoista, joita tarjota opiskelijalle esimerkiksi vihjeiden tai palautteen muodossa. Sen täytyy tehdä päätöksiä siitä milloin ja miten auttaa opiskelijaa. Neljäntenä on vielä oppijan käyttöliittymän malli, jonka avulla järjestelmän ja opiskelijan välinen kommunikointi tapahtuu.

3. TUTKIMUSKYSYMYKSET

Sähköistä matematiikan tenttimistä ja siinä käytettyjä ohjelmistoja ajatellen työn tarkoituksena on saada vastauksia keskeisiin asioihin, joita ovat muun muassa sähköisen tentin edut ja haitat sekä mielekkäiden tehtävien luominen. MATLABin alkeiden verkkototeutus tuloksineen, sähköistä tenttimistä ajatellen luodut esimerkkitehtävät ja tilastomatematiikan sähköisen EXAM-tentin tulokset toimivat aineistona tutkimukselle. Tarkemmat tutkimuskysymykset ovat:

- Miten matematiikan sähköinen tentti eroaa paperisesta entistä ja mitkä ovat sen hyvät ja huonot puolet?
- Minkälaisia uusia tehtävätyyppejä voisi ottaa mukaan matematiikan sähköisen tenttiin?
- Voiko sähköinen tentti olla oppimistapahtuma?

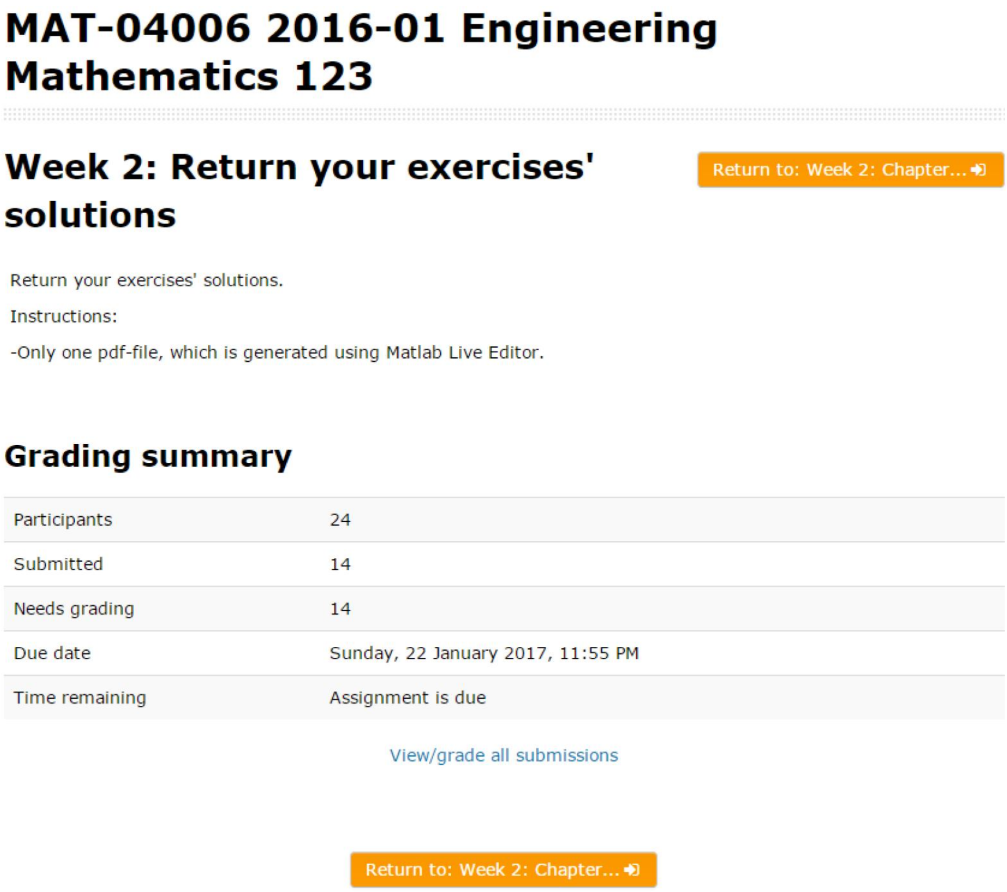
4. MATEMATIIKAN OPETUKSEN JA ARVIOINNIN SÄHKÖISET JÄRJESTELMÄT

Luvussa käsitellään Tampereen teknillisellä yliopistolla käytössä olevia sähköiset järjestelmiä ja niiden hyödyntämistä opetuksessa. Käsiteltäviin järjestelmiin kuuluu verkko-oppimisympäristö Moodle, sähköinen tenttijärjestelmä EXAM, laskentaohjelmisto MATLAB sekä automaattisesti tarkastettavat STACK-tehtävät.

4.1 Sähköinen verkko-oppimisympäristö Moodle

Opettajat ja opiskelijat tarvitsevat alustan muun muassa yhteydenpitoon ja tiedotukseen, kurssitehtävien ja -materiaalien jakamiseen ja muihin opintojaksoon liittyviin asioihin. Tätä varten useassa suomalaisessa yliopistossa on käytössä Moodle-niminen sähköinen oppimisalusta tai verkko-oppimisympäristö [24]. Myös Tampereen teknillisessä yliopistossa iso osa opintojaksotarjonnasta käyttää hyväkseen Moodlea kurssinsa pääasiallisena alustana muiden järjestelmien ja palveluiden ohella. Muita käytettyjä oppimisalustoja ovat muun muassa Optima [25].

Moodle ei tarvitse lisenssiä vaan se on avoimen lähdekoodin alla, joten Moodle on muovattavissa ja laajennettavissa kenen tahansa toimesta. Näin myös Moodle on saatavilla usealla eri kielellä [26]. Etenkin muovattavuus, helppokäyttöisyys, vuorovaikutusmahdollisuus ja eri kielivaihtoehtojen ohella ovat tärkeitä elementtejä hyvälle verkko-oppimisalustalle, minkä vuoksi Moodlen ja Optiman kaltaiset alustat ovat suosittuja valintoja [27].



Kuva 4.1 *Esimerkki Moodlen hyödyntämisestä Engineering Mathematics 123 -kurssilta viikkoharjoituksia palautusten merkeissä.*

Kuvassa 4.1 on esitetty yksi useasta Moodlen hyödyntämistavasta kevään 2017 Engineering Mathematics 123 -kurssilta. viikkoharjoituksia ratkaisut palautettiin Moodlen tarjoaman työkalun avulla, jolla vaivattomasti voi seurata tehtävän palauttaneiden määrää, nähdä tarjotut ratkaisut tai määrittää palautuksen sulkeutumiselle takaraja.

4.2 Sähköinen tenttijärjestelmä EXAM

EXAM-tenttipalvelu on suomalaisissa korkeakouluissa käytössä oleva sähköinen tenttijärjestelmä, josta vastaa EXAM-konsortio-organisaatio. Konsortioon kuuluu tällä hetkellä 24 suomalaista korkeakoulua, joista yksi on Tampereen teknillinen yliopisto. EXAM-palvelussa on kyse asiakas-palvelin-arkkitehtuurista, jossa opiskelija ottaa palvelimeen yhteyden tenttitilan tietokoneelta. [28]

Tällä hetkellä järjestelmällä kykenee suoraan muodostamaan avoimia esseetehtäviä ja monivalintatehtäviä, mutta vastauksena voi myös toimia yksittäinen liitetiedosto. Järjestelmään voi myös syöttää tehtävänannon ja siihen kuuluvan materiaalin tiedostona, joten periaatteessa tehtävätyyppejä voi olla rajattomasti. EXAMin tulevista ominaisuuksista on lista konsortion verkkosivuilla. Suoraan matemaattisten tehtävien laatimiseen ja vastaamiseen järjestelmä ei vielä kykene. [28]

Videovalvottujen EXAM-tenttiluokkien työasemat ovat Windows-koneita, joissa on rajatut ohjelmistot ja evätty pääsy verkkoon. Koneilla on tentin aikana käytettävissä seuraavat ohjelmat: Notepad, Paint, laskin, pdf-lukija, Excel, Word (ilman oikolukua), 7-zip, Matlab, Pycharm. Tenttiluokkia on useita ja niiden muu varustelu hieman vaihtelee. Käytössä voi olla muun muassa piirtomahdollisuus touch-näytöllä, erillinen piirtoalusta tai lisäohjelmistoja. EXAMissa annettuun sähköiseen näyttöön on myös jaossa ohjeet, jossa käsitellään tenttiin ilmoittautuminen, tilan käyttäminen, tentin suorittaminen, valvonta ja häiriötilanteet.

Ilmoittautuminen tapahtuu verkkosivujen kautta, josta aluksi etsitään haluama tentti ja valitaan sekä luokka että ajankohta. Tenttimisajankohtia on mahdollista valita jokaiselta viikonpäivältä klo 8-22 väliseltä ajalta. Pieniä poikkeuksia on kuitenkin huoltokatkojen ja tilakohtaisuuden vuoksi. Opiskelijoiden on myös mahdollista ilmoittautua EXAM-harjoitustenttiin, jossa pääsee tutustumaan käytännössä tenttijärjestelyihin.

4.3 Laskentaohjelmisto MATLAB

MATLAB on MathWorksin kehittämä numeerinen laskentaohjelmisto ja neljännen sukupolven ohjelmointikieli. Tampereen teknillisessä yliopistossa MATLABia käytetään etenkin matematiikan, fysiikan ja signaalinkäsittelyn opinnoissa. Ohjelmistolla voi muun muassa manipuloida ja indeksoida järjestettyjä taulukoita (*array*), jotka koostuvat merkeistä tai numeroista, käyttää useita matemaattisia funktioita, tuoda ja käsitellä dataa esimerkiksi tekstitiedostoista tai laskentataulukoista, visualisoida tuloksia tai dataa kahdessa sekä kolmessa ulottuvuudessa ja rakentaa omia skriptejä ja funktioita. [29] MathWorks tarjoaa MATLABiin sisäänrakennettuna kattavan kirjaston ja omilla sivuillaan valtavasti dokumentointia osittain esimerkein varusteltuna liittyen ohjelmiston komentoihin.

Vuoden 2016a versiosta lähtien lisäominaisuus, Live Editor, on myös mahdollistunut niin sanotun kooditekstin lisäksi normaalintekstin ja matemaattisten kaavojen kirjoittamisen LaTeX-ladontajärjestelmää hyödyntäen ja 2016b versiosta muista tekstinkäsittelyohjelmistoista, kuten Wordista tuttua kaavaeditoria käyttäen, jolloin LaTeXin syntaksia ei enää erikseen tarvitse opetella. [23] Kooditekstin ja normaalitekstin yhdistäminen on aikaisemminkin onnistunut ja edelleen onnistuu ohjelman publish-toiminnon avulla, jossa kooditeksti käännetään dokumentiksi tietynlaisin muotoseikoin.

Käänteismatriisi saadaan Gaussin eliminoilla matriisia $[A|I]$

```
A = sym([1 0 0; 4 2 0; 9 6 3]);
R = rref([A eye(size(A))]);
invA = R(:,4:6)
```

invA =

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & -1 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Kuva 4.2 *Esimerkki Live Editorin käytöstä Insinöörimatematiikka 123 -kurssin viikkoharjoituksia MATLAB-ratkaisuista.*

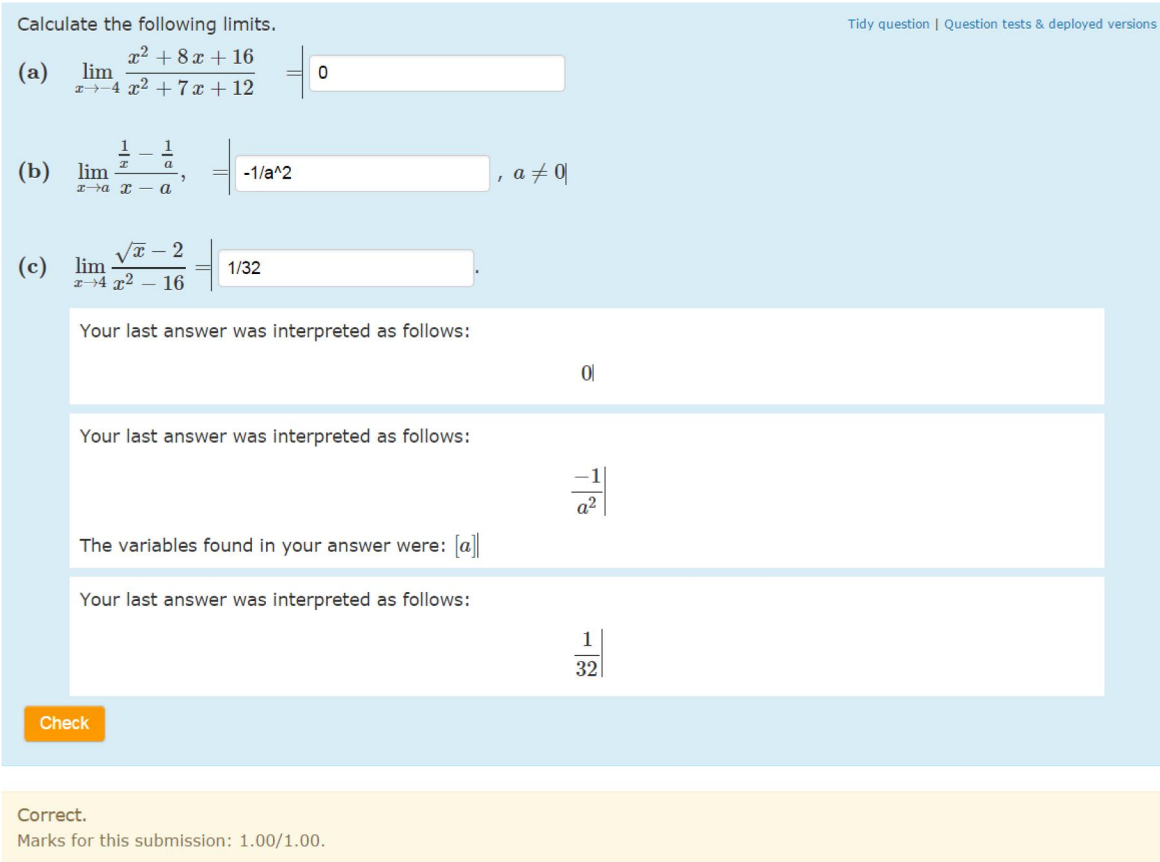
Kuvassa 4.2 on havainnollistetettu Live Editorin käyttöä yksinkertaisella esimerkillä syksyn 2016 Insinöörimatematiikka 123 -kurssilta. MATLABin Live Editoria hyödyntäen pystyy siis tuottamaan sekä koodia että normaalia tekstiä ja matemaattisia kaavoja samaan tiedostoon (.mlx-tiedosto) ja tuottamaan tästä luettavan dokumentin (.pdf-tiedosto). Tätä MATLABin ominaisuutta on hyödynnetty EXAM-tenttipalvelussa pidettyjen matematiikan tenttien luomisessa sekä opiskelijoiden tentteihin vastaamisessa.

4.4 Automaattisesti tarkastettavat STACK-tehtävät

STACK (System for Teaching and Assessment using Computer algebra Kernel) on Chris Sangwinin toimesta aloitettu avoimen lähdekoodin järjestelmä tehtävien laatimiseen, satunnaistamiseen ja tarkistukseen. STACK-järjestelmä voidaan asentaa verkkoympäristöön, kuten esimerkiksi Moodleen. Järjestelmällä voidaan siis toteuttaa tietokoneavusteista arviointia ja tarkistamista.

STACK-järjestelmä perustuu nimensäkin mukaisesti laskennallisten ohjelmistojen

(*Computer Algebra System, CAS*), kuten MATLABin hyödyntämiseen tehtäviä arvioidessa. STACKin tapauksessa pohjalla toimiva laskennallinen ohjelmisto on kuitenkin Maxima. Ohjelmistoa käyttäen voidaan luoda satunnaisesti luoduille tehtäville oikeat ratkaisupuut annettujen parametrien mukaisesti ja voidaan tehdä arviointia opiskelijan tarjoamalle ratkaisulle. [30]



Kuva 4.3 *Esimerkki STACK-tehtävästä Engineering Mathematics 123 -kurssilta.*

Kuvassa 4.3 on esitetty viikkoharjoitustehtävä kevään 2017 Engineering Mathematics 123 -kurssilta. Tehtävän tekevä opiskelija syöttää vastauksensa sille varattuun tekstikenttään ja järjestelmä lisäksi ilmoittaa kuinka se tulkitsi vastauksen syötteen. Väärin vastattuaan saa ehdotuksia ja apua tehtävän ratkaisuun.

5. MATLABIN ALKEIDEN VERKKOTOTEUTUS 2016-2017

Syyslukukaudella 2016 Tampereen teknillisessä yliopistolla osana opintojaksojen Insinöörimatematiikka 2, Matematiikka 2 ja Insinöörimatematiikka 123 suoritusta oli pakollisena MATLABin alkeet. Alkeet pitivät sisällään Moodle-sivuilla olevien materiaalien opiskelun, automaattisesti tarkastettavien STACK-tehtävien [5] tekemisen, mahdollisen opintojaksokohtaisen kontaktiopetuksen ja sähköisen EXAM-järjestelmän tentin.

MATLABin alkeet suoritettua opiskelijan on tarkoitus osata seuraavat MATLAB-toiminnot, joiden osaamista Moodlen STACK-tehtävissä harjoitellaan [5]

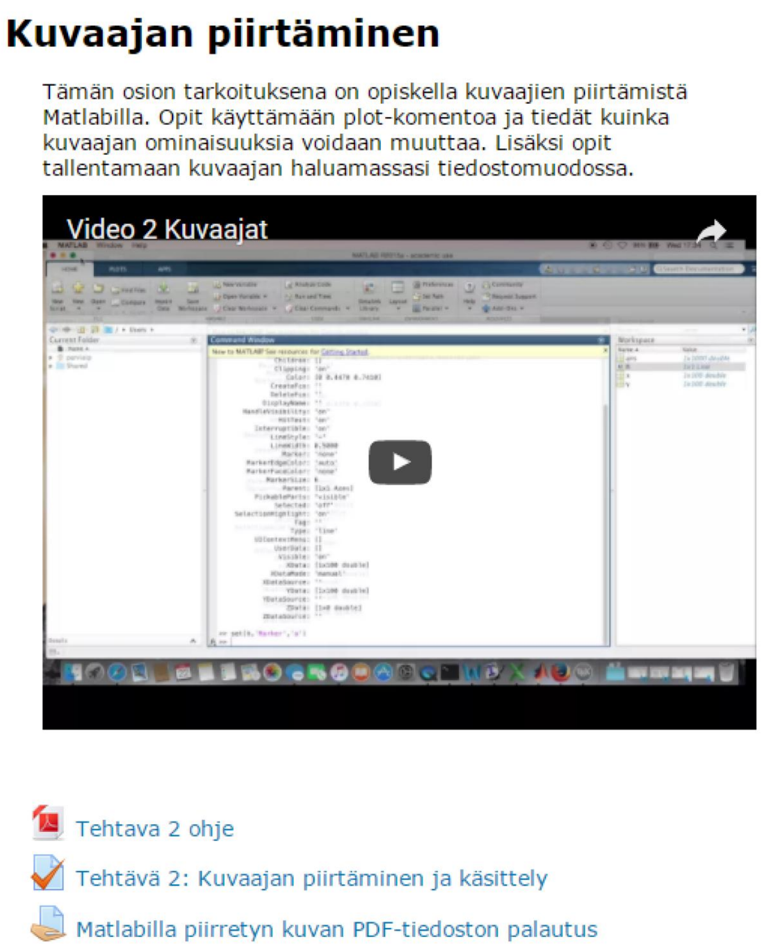
1. MATLABin erityyppiset muuttujat, kuten skalaarit ja matriisit, peruslaskukomennot ja help-toiminnon käyttö
2. Kuvaajien piirtäminen ja niiden käsittely
3. Editori-ikkunan käyttö, omien komentoketjujen ja funktioiden ohjelmoiminen
4. MATLABin sisäänrakennettujen funktioiden käyttö, sovitteet ja pienimmän neliösumman menetelmä
5. Tiedostojen lukeminen ja käsittely MATLABissa

MATLABin alkeet kuuluvat siis tuoreen opiskelijan opintoihin ja näin ollen ohjelmistosta on tarkoitus saada sekä apuväline ja työkalu muihin opintoihin että myös mahdollisesti työelämän tarpeisiin. MATLABin alkeet tarjoavat myös ponnahduslaudan ohjelmointiin ja sen ymmärtämiseen. Alkeiden Moodle-sivuille on vapaa pääsy, joten sivujen materiaalia pystyy myös käyttämään asioiden kertaamiseen tai toimintoja voi opetella myös ne henkilöt, joille MATLABin alkeet ei ole pakollinen osasuoritus mitään opintojaksoa.

Luvussa esitellään lyhyesti MATLABin alkeiden Moodle-tehtävien ja näihin liittyvän EXAM-tentin sisältö sekä alkeiden vaihtoehtoisen suorituksen eli MathWorksin MATLAB Fundamentals -verkkokurssin sisältö. Lisäksi käsitellään toteutuskerran opiskelijoiden tulokset kuluneelta lukukaudelta.

5.1 Moodle-tehtävät

Moodle-tehtäviä oli kaikkiaan viisi, joista jokaisesta sai maksimissaan kaksi pistettä. Tehtävissä käsiteltiin MATLABin peruskomentoja, kuvaajien piirtämistä ja käsittelyä, skriptien ja funktioiden, tekemistä ja suorittamista, MATLABin omien funktioiden käyttöä ja datan tuontia sekä käsittelyä. Jokaista Moodle-tehtävää myös tuki lyhyt opetusvideo [5] kustakin aiheesta.



Kuva 5.1 *Kuvakaappaus MATLABin alkeiden Moodle-sivujen kuvaajan piirtämistä käsittelevästä osiosta.*

Kuvassa 5.1 on esitetty MATLABin alkeiden Moodle-sivujen osio kuvaajien piirtämisestä. Osiossa kerrotaan tavoitteet, tarjotaan tehtävään sanalliset ohjeet sekä lyhyt opetusvideo, annetaan osioon liittyvä STACK-tehtävä ja palautuspiste tehtävästä saadulle kuvalle. Muille toiminnoille on tarjolla vastaavanlaiset osiot.

5.2 MathWorksin MATLAB Fundamentals -verkkokurssi

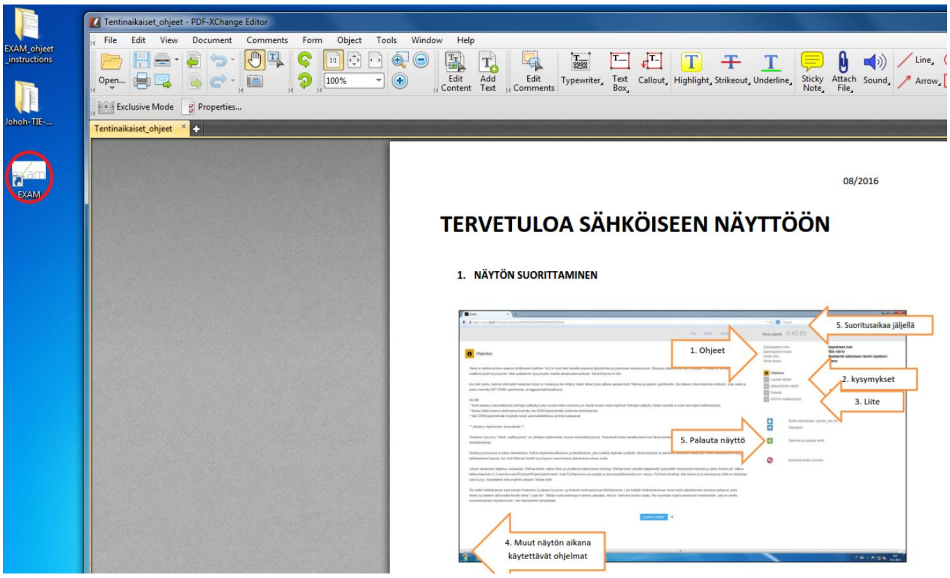
MATLABin alkeet pystyi suorittamaan myös MathWorksin MATLAB Fundamentals -verkkokurssin avulla suorittamalla vähintään 50 % tämän tehtävistä, jos opiskelija halusi vaihtoehtoisesti tehdä näin Moodle-tehtävien ja EXAM-tentin sijaan. Verkkokurssin sivulta sai ladattua suoritusraportti (*progress report*), josta käy ilmi opiskelijan tehtävien suoritusaste. Tämä raportti palautettiin Moodle-sivuille, kun vähintään kyseinen 50 % raja oli täynnä. Verkkokurssin tehtävät vastasivat hyvin paljon Moodle-tehtäviä aihealueelta ja niissä joko ajettiin lyhyitä komentoja tai muokattiin valmista skriptia ohjeiden mukaisesti.

MATLAB Fundamentals -verkkokurssi tehdään MathWorksin kotisivujen kautta. Verkkokurssin suorittaminen ei siis vaadi itse ohjelmiston lataamista ja asentamista koneelle, vaan kurssi suoritetaan täysin selaimen avulla. Kurssia ei ole saatavilla suomeksi, mutta oletuksena kurssin kieli oli englanti. Liitteenä (Liite A) on kurssista ladattavissa oleva suoritusraportti, josta nähdään kurssin koostuvan 15 luvusta. Kussakin luvussa käsitellään ohjelmiston eri toimintoja.

Ensimmäisessä luvussa käsitellään ohjelmiston syntaksia, komentojen suorittamista ja muuttujien käyttöä. Toisessa luvussa käsitellään datan tuomista ohjelmistoon ja sen visualisointia. Kolmannessa luvussa luodaan omia skripteja komentojen automatisoimiseksi. Luvuissa neljä ja viisi käsitellään vektoreita ja matriiseja sekä näiden operaatioita ja käyttöä visualisoinnissa. Nämä ensimmäiset luvut jo kattoivat MATLABin alkeiden STACK-tehtävien sisällön, mutta verkkokurssin avulla on mahdollista laajentaa vielä osaamistaan. Suoritusasteen verkkokurssista pystyy keräämään vaadittuun 50 %:iin ensimmäisestä osiosta, mutta minimikokonaisuuden sai rakentaa minkä tahansa luvun tehtävien avulla. Esimerkiksi jos ensimmäisen osion tehtävät tuntuvat liian helpoilta tai muusta syystä haluaa tehdä muun luvun tehtäviä, niin vaaditun suoritusasteen voi koostaa muidenkin lukujen avulla. Kuten myös Moodle-sivuilla, verkkokurssin tehtävät tarjoavat tehtävien lisäksi opetusvideoita, joissa esitellään tehtävien tekemiseen tarpeelliset toiminnot.

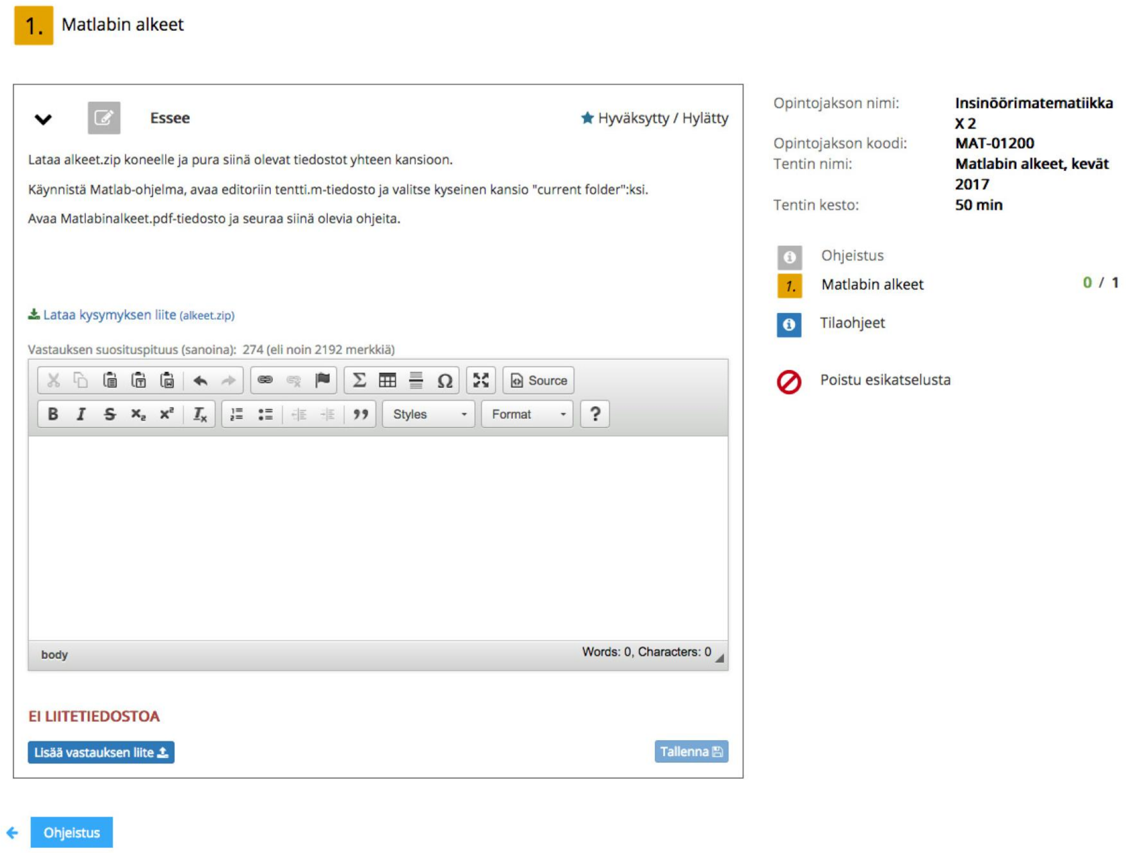
5.3 EXAM-tentti

Opiskelijat ilmoittautuvat sähköiseen tenttiin EXAM-tenttijärjestelmän verkkosivujen kautta haluamalleen ajankohdalle. Tenttitilan koneelle kirjautuessaan ruudun aloitusnäkymä on kuvan 5.2 mukainen.



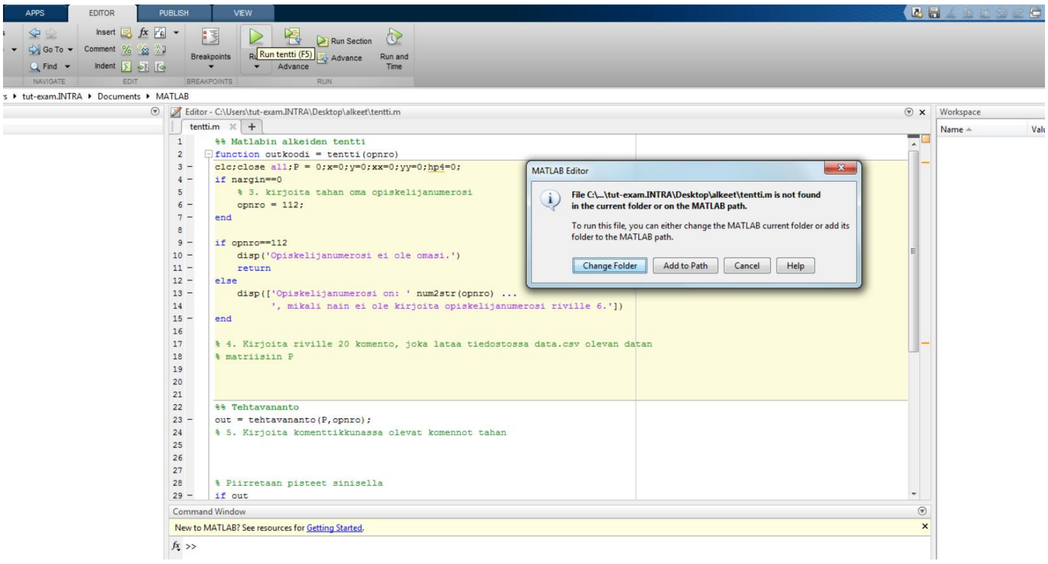
Kuva 5.2 *Aloitusnäkymä EXAM-tenttitilan koneella.*

Koneelle kirjauduttua, ruudulla on heti auki yleiset ohjeet sähköisen näytön antamisesta, jotka on syytä lukea varsinkin ensikertalaisena. Varsinainen tenttisuoritus alkaa kuitenkin vasta ruudulla näkyvän ja punaisella ympyröidyn EXAM-pikakuvakkeen takaa. Tätä klikattuaan tentin suorittaja ohjautuu itse tenttiin, josta valitaan MATLABin alkeiden tentti. Tämän jälkeen tentinsuorittajalla on kuvan 5.3 mukainen näkymä ruudullaan.



Kuva 5.3 *MATLABin alkeiden EXAM-tentin aloitustilan näkymä.*

Järjestelmästä kertoo suorittajalleen muun muassa jäljellä olevan ajan, tentin keston sekä opintojakson että tentin nimen. Halutessaan järjestelmän kielen voi vaihtaa suomen sijasta joko ruotsiksi tai englanniksi. Sekä tenttiohjeet että -kysymykset ja tentissä tarpeelliset liitetiedostot löytyvät alkeet.zip pakkaustiedostosta. Pakkaustiedoston purettuaan suorittaja saa pdf-tiedoston MATLABin alkeiden tenttiohjeista ja -tehtävistä (Liite B). Avattuaan ja suoritettuaan ohjeiden mukaisesti `tentti.m` skripti-tiedoston aukeaa kuvan 5.4 mukainen näkymä ja tenttitehtävään vastaaminen voi alkaa.



Kuva 5.4 Näkymä EXAM-tentissä `tentti.m` skriptin ensimmäisen suorituksen (run) jälkeen.

Toteutuskerran EXAM-tentti koostui valmiista annetusta skriptista, jota oli tarkoitus muokata ohjeiden mukaisesti hyväksytyn suorituksen saamiseksi. Tehtävänantoa, ohjeistusta ja tarkastusta ohjaili ennalta rakennetut p-tiedostot, `tehtavananto.p` ja `tarkista.p`, jotka tulevat muiden tarvittavien tiedostojen ohessa. p-tiedostot ovat suojattuja m-tiedostoja, kuten tavalliset skriptit [31]. Muokattu skripti `tentti.m` toimi täten tenttitehtävän vastauksena ja palautettiin yhtenä vastauksen liitteenä kuvassa 5.3 näkyvän liitetiedoston palautustoiminnon avulla. Lisäksi teksti-ikkunaan tuli syöttää osa hyväksytyn vastauksen komentoikkunan tekstistä. Aikaa tentin suorittamiseen oli 50 minuuttia. EXAM-tenttiä sai yrittää kolme kertaa, mutta tenttikertoja oli myös mahdollista saada lisää.

5.4 Tulokset

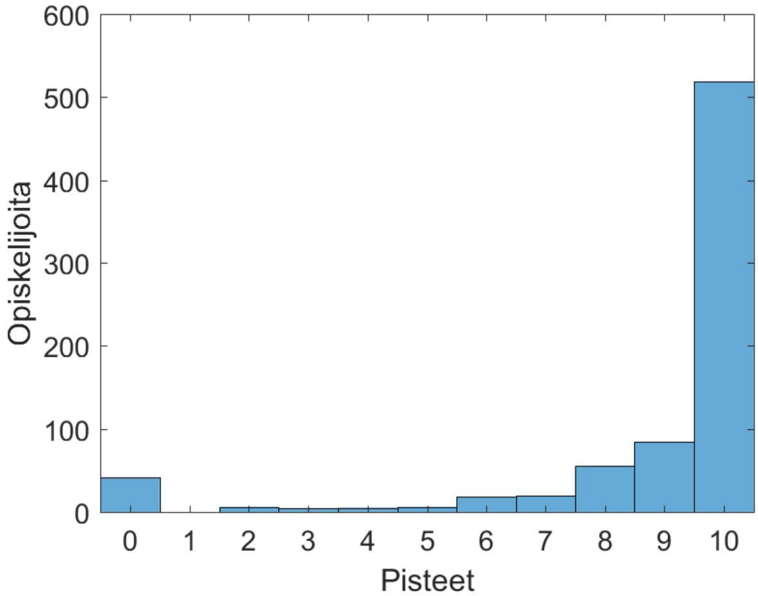
Kappaleessa käsitellään syyslukukauden 2016 kurssien MATLABin alkeiden sekä Moodle-tehtävien että varsinaisen EXAM-tentin ja MathWorksin MATLAB Fundamentals -verkkokurssin tuloksia. Taulukkoon 5.1 on koottu lukumääriä sekä hyväksyttyjen että hylättyjen MATLABin alkeiden suorituksista.

Taulukko 5.1 *MATLABin alkeiden suoritukset EXAM-tentin (EXAM), MathWorksin kurssin (MW) tai näiden molempien avulla sekä Moodle-tehtävät tehtynä että ilman.*

	EXAM	MW	EXAM & MW
Moodleteht. & hyväksytty	693	1	12
ei Moodleteht. & hyväksytty	39	1	0
Moodleteht. & hylätty	23	0	0
ei Moodleteht- & hylätty	2	0	0

Pelkän EXAM-tentin suoritti siis 757 opiskelijaa ja lisäksi 12 opiskelijaa suorittivat myös MathWorksin kurssin tentin lisäksi. Yhteensä 746 opiskelijaa läpäisi näin ollen MATLABin alkeet.

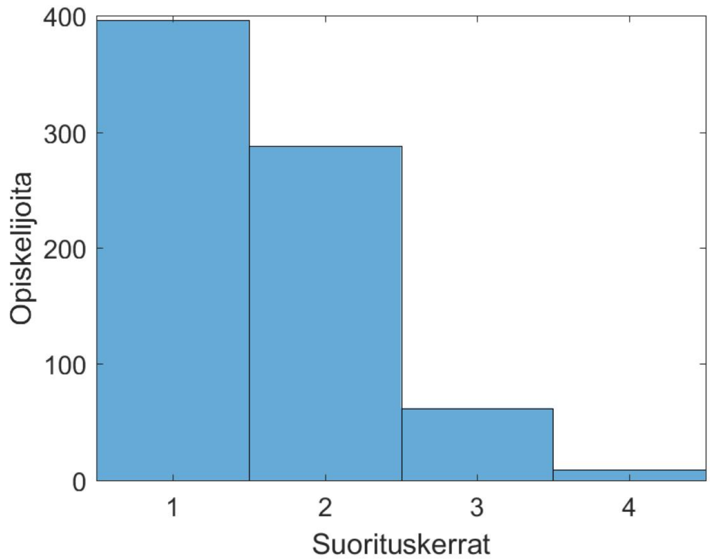
Yhteensä 14 opiskelijaa (taulukko 5.1) suorittivat MATLABin alkeet tämän kurssin avulla, joista 12 tekivät myös Moodle-tehtävät. Vain kaksi opiskelijaa suoritti alkeet ainoastaan MathWorksin kurssilla, joista toinen teki myös Moodle-tehtävät. Kuvassa 5.5 on esitetty Moodle-tehtävien pisteiden jakautuminen.



Kuva 5.5 *MATLABin alkeiden Moodle-tehtävistä saadut pisteet opiskelijoita kohden.*

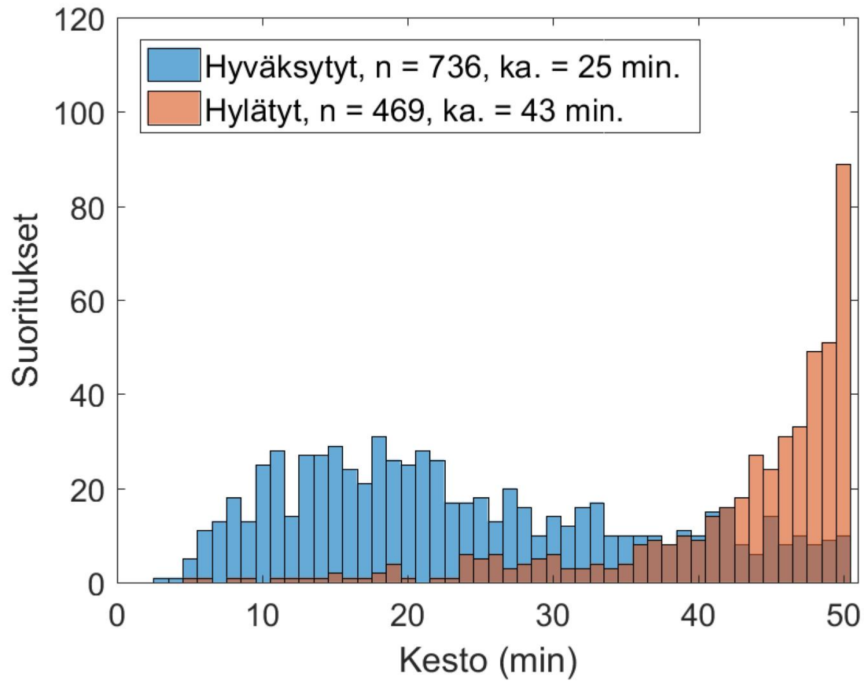
Kuvasta 5.5 nähdään valtaosan opiskelijoista suorittaneen Moodle-tehtävät positiivisin kokonaispistein joko lähes täysin tai täysin pistein, mutta myös osan jääneen ilman pisteitä syystä tai toisesta. Kuten taulukosta 5.1 nähdään, niin 23 opiskelija olivat tehneet Moodle-tehtäviä positiivisin pistein, mutteivat selviytyneet hyväksytysti EXAM-tentistä. Opiskelijoista 39 taas läpäisivät EXAM-tentin ilman Moodle-tehtävien tekemistä.

EXAM-tenttiä sai yrittää useamman kerran. Tavallisesti kolme kertaa, mutta pyynnöstä sai myös lisäyrityskertoja järkeviä perusteluja vastaan. Kuvassa 5.6 on esitetty tenttisuorituskertojen lukumäärät.



Kuva 5.6 *Opiskelijoiden tenttisuorituskertojen lukumäärä MATLABin alkeiden EXAM-tentissä.*

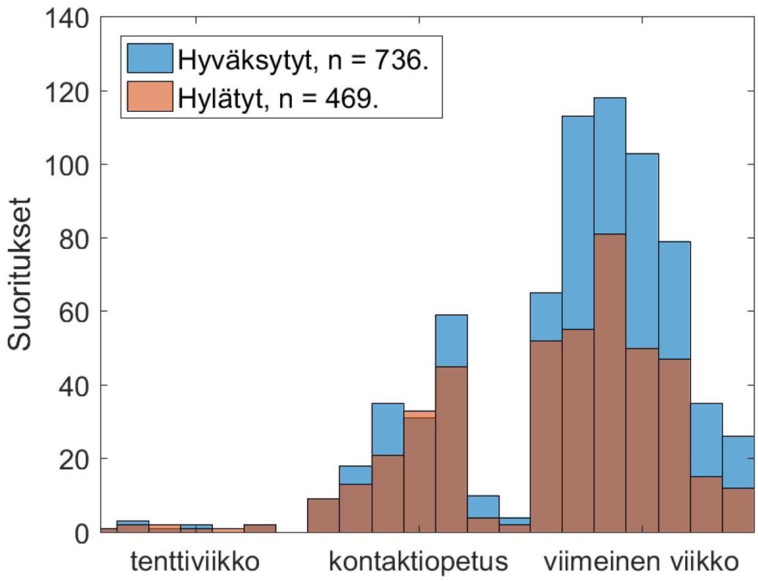
Kuvasta 5.6 nähdään, että suuri opiskelijoista suoritti tentin enintään kaksi kertaa. Hyväksytyn suorituksen saamiseksi näytti siis pääsevän suurimmilta osin toisella yrityksellä. Lisäksi yhdet opiskelijat olivat suorittaneet tentin viisi ja kuusi kertaa. Kuvassa 5.7 on esitetty sekä hyväksyttyjen että hylättyjen tenttisuorituskertojen kesto ja näiden keskiarvot.



Kuva 5.7 *MATLABin alkeiden EXAM-tentin hyväksyttyjen ja hylättyjen tenttisuoritusten määrä kestoineen sekä keskiarvo tentin kestolle.*

Kuvasta 5.7 huomataan ensinnäkin, että tentin hyväksytysti suorittaneet enimmissä määrin selvisivät tehtävistä nopeasti ja hylätyillä suorituksilla jouduttiin käyttämään selvästi enemmän aikaa tentin suorittamiseen. Tentistä oli siis mahdollista selviytyä nopeasti, jopa alle 10 minuutissa. Hyväksytyissä suorituksissa kului keskimäärin 25 minuuttia tentin suorittamiseen, kun taas hylätyissä suorituksissa kului selvästi enemmän aikaa, keskimäärin 43 minuuttia.

Tenttiä oli mahdollisuus käydä tekemässä kolmen viikon ajan aikavälillä 19.10 - 8.11.2016, myös viikonloppuisin. Kuvassa 5.8 on esitetty tenttisuoritusten ajoittuminen edellä mainitulle aikajaksolle.



Kuva 5.8 *Hyväksyttyjen ja hylättyjen tenttisuoritusten ajoitus kurssilla. Jokainen pylväs kuvastaa yhtä viikonpäivää.*

Kuvan tenttiviikolla tarkoitetaan opetusperiodien vaihteessa olevaa yleistä tenttiviikkoa, kontaktiopetuksella varsinaista opetusperiodin ja kurssin ensimmäistä opetusviikkoa ja viimeisellä viikolla toista kyseisen opetusperiodin viikkoa ja samalla viimeistä EXAM-tentin aukioloviikkoa.

Huomataan, että ennen kurssien varsinaisen kontaktiopetuksen alkua tenttiviikolla tentin suorittaneita on erittäin vähän ja hylättyjä suorituksia enemmän kuin hyväksyttyjä. Vain harvat ovat siis etukäteen olleet aktiivisia MATLABin alkeiden kanssa. Kontaktiopetuksen aikana ja viimeisellä viikolla suorituksia oli jo selvästi enemmän, kun osasuorituksesta on varsinaisesti tehty maininta itse opintojakson kurssilla. Vaikka viikonloppuisinkin on mahdollista käydä suorittamassa EXAM-tenttejä, niin voidaan huomata selvät taantumat suoritusmäärissä viikonloppuisin. Lisäksi huomataan suoritusten pääpainon olevan viimeisellä viikolla, kun Moodle-sivujen sisältöön on ollut aikaa paneutua ja tentin suoritusajankohta lähestyy umpeutumisaikaansa.

6. SÄHKÖISEN TENTIN MAHDOLLISTAMAT TEHTÄVÄT

Luvussa tuodaan esille jo käytössä olleita ja mahdollisesti tulevaisuudessa käytettäviä sähköiseen ympäristöön sopivia tehtäviä. Jokaisen tehtävän kohdalla käsitellään siihen liittyvä matemaattinen tausta, esitellään varsinainen tehtävä ja pohditaan mitä matemaattista osaamisen piirrettä sen ratkaisemisessa vaaditaan.

6.1 Matriisilaskentaa

Yhtälöiden ja matriisien käsittely, etenkin suurien systeemin tapauksessa käy hankalaksi tavallisessa tehtävänasettelussa. Kappaleessa käsitellään tehtävän kannalta välttämätön matriisilaskenta ja esimerkkitehtävä matriisin ominaisarvojen ja -vektorien ratkaisemista.

6.1.1 Matemaattinen tausta

Skalaarikerrointa λ kutsutaan matriisin $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ominaisarvoksi, jos on olemassa vektori $\mathbf{x}$, siten että $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ ja $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$. Tätä vektoria kutsutaan ominaisvektoriksi ja koko lauseketta ominaisarvoyhtälöksi. Ominaisarvojen määräämiseksi määritellään karakteristinen polynomi

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I_n),$$

jonka juuret ovat arvoja joilla ominaisarvoyhtälöllä on myös epätriviaaleja ratkaisuja. Karakteristisen polynomin juuret ovat siis matriisin A ominaisarvoja. Jokaiselle ominaisarvolle λ erikseen ratkaistu yhtälö

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \Leftrightarrow (A - \lambda I_n)\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

tuottaa ominaisarvoa vastaavat ominaisvektorit $\mathbf{x}$.

Matriisi $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ on diagonalisoituva, jos on olemassa diagonaalinen matriisi D, jolle

$$P^{-1}AP = D.$$

Matriisi $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ on diagonalisoituva, jos ja vain jos sillä on n lineaarisesti riippumatonta ominaisvektoria. Tällöin matriisin P sarakkeina ovat matriisin A lineaarisesti riippumattomat ominaisvektorit ja diagonaalimatriisilla D on diagonaalilla matriisin A liittyvät ominaisarvot vastaavassa järjestyksessä. [32]

6.1.2 Esimerkkitehtävä

Syksyn 2016 Insinöörimatematiikka 123 -kurssilla järjestettiin sähköiset välikokeet ja tentti EXAM-tenttijärjestelmässä. Yhden välikokeen eräs satunnaistettu variaatio oli kuvan 6.1 mukainen tehtävä.

Olkoon matriisi A ja sen kaksi ominaisvektoria $\mathbf{v}_1$ ja $\mathbf{v}_2$ seuraavat:

$$A = \begin{bmatrix} a & b & 40 \\ c & d & 232 \\ -34 & -1 & 42 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix},$$

missä vakiot $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.
(a) Ratkaise vakioiden a, b, c ja d arvot.
(b) Mitkä ovat matriisin A ominaisarvot ja muut ominaisvektorit?
(c) Onko matriisi A diagonalisoituva? Jos on, niin mitkä ovat matriisit P ja D, jotka toteuttavat yhtälön $A = PDP^{-1}$?

Kuva 6.1 *Eräs variaatio Insinöörimatematiikka 123 -kurssin EXAM-välikokeessa.*

Tehtävässä pitää ratkaista neliömatriisin A tuntemattomat alkiot, kun tiedetään sen kaksi ominaisvektoria. Tehtävän ratkaisemissa hyödynnetään ominaisarvoyhtälöä. Tehtävän tekoon ei välttämättä tarvitsisi sähköistä ympäristöä, mutta ohjelmistojen tarjoamat työkalut mahdollistavat erilaisen ratkaisutavan kuin vastaavalle tehtävälle paperimuodossa. Neljää tuntematonta alkiota ja kahta tuntematonta ominaisarvoa varten kuitenkin tarvitaan kuusi yhtälöä, joiden käsin ratkominen ei voida pitää kovin mielekkäänä. Tehtävässä ratkaisussa pystyi nyt hyödyntämään esimerkiksi valmista komentoa `eig` sekä ominaisarvojen että -vektorien selvittämiseksi, yhtälöiden ratkaisussa käyttämään hyväksi Gaussin eliminointiin liittyvää komentoa `rref` ja matriisin asteen selvittämiseen käytettävää komentoa `rank`. Jotta komentoja edes pääsisi hyödyntämään, opiskelijan täytyi ensin konstruoida matemaattinen ongelma ja ymmärtää komentojen syöte ja ulostulo.

Tehtävän ratkaisussa opiskelijalta vaaditaan käsitteellistä ymmärtämistä, jotta osataan liittää annettu matriisin A ominaisvektoreineen $\mathbf{v}_1$ ja $\mathbf{v}_2$ ominaisarvoyhtälön käsitteeseen pohjan luomiseksi tehtävän ratkaisulle. Mukautuvan päättelyn ja strategisen kompetenssin piirteitä tarvitaan käsitteellistä ymmärrystä hyödyntäessä tehtävän ratkaisussa. Proseduraalista sujuvuutta vaaditaan yhtälöiden ratkaisemisessa.

6.2 Polynomifunktion sovittaminen dataan

Usein mittausdatan muuttujan vaihtelua halutaan analysoida, joten tarvitaan malli tarkastelua varten. Datapisteisiin voidaan sovittaa funktiokäyrä, joka kuvaa parhaalla tavalla näiden pisteiden sijoittumista. Käsitellään tässä yhteydessä yksinkertaista polynomisovitetta.

6.2.1 Pienimmän neliösumman menetelmä

Sopivan polynomisovitteen etsinnässä on kyse yhtälöryhmän $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ratkaisemisesta. Yhtälöryhmällä ei kuitenkaan aina ole ratkaisua, joten etsitään niin sanotusti parhainta mahdollista ratkaisua, jota kutsutaan pienimmän neliösumman ratkaisuksi.

Olkoon $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ ja $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$. Yhtälöryhmällä $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ on pienimmän neliösumman ratkaisu $\overline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$, joka toteuttaa

$$||\mathbf{b} - A\overline{\mathbf{x}}|| \leq ||\mathbf{b} - A\mathbf{x}||, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Lisäksi $\overline{\mathbf{x}}$ on pienimmän neliösumman ratkaisu, jos ja vain jos se toteuttaa normaaliryhmän

$$A^T A\overline{\mathbf{x}} = A^T\mathbf{b},$$

jonka residuaali on $\mathbf{r} = \mathbf{b} - A\overline{\mathbf{x}}$ ja virhe tämän normi eli $||\mathbf{r}|| = ||\mathbf{b} - A\overline{\mathbf{x}}||$. Vektori $\overline{\mathbf{x}}$ on pienimmän neliösumman ratkaisu, jos ja vain jos se on lausekkeen $||\mathbf{b} - A\mathbf{x}||$ minimikohta.

Normaaliryhmä voidaan ratkaista joko Gaussin eliminoinnilla tai jos matriisin $A^T A$ käänteismatriisi on olemassa, niin

$$\overline{\mathbf{x}} = (A^T A)^{-1} A^T\mathbf{b}$$

ja pienimmän neliösumman ratkaisu on yksikäsitteinen. Matriisi $(A^T A)^{-1}$ on olemassa, jos ja vain jos matriisin A sarakkeet ovat lineaarisesti riippumattomat eli $\mathrm{rank}(A^T A) = \mathrm{rank}(A) = n$. [32]

Käytännössä polynomisovitteen etsinnässä halutaan polynomi

$$p(x) = c_0 + c_1 x + ... + c_{n-1}x^{n-1} + c_n x^n$$

ja sen tuntemattomat kertoimet $c_0, c_1, ..., c_n$ selvitettyä. Polynomin avulla voidaan kirjoittaa yhtälöryhmä

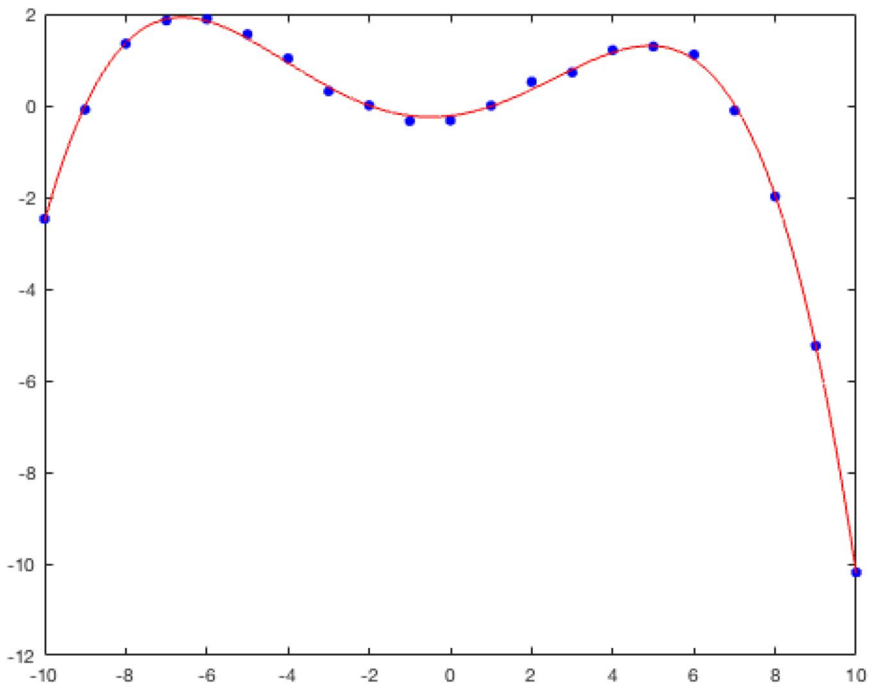
$$\begin{cases} c_0 + c_1 x_1 + ... + c_{n-1}x_1^{n-1} + c_n x_1^n = b_1 \\ c_0 + c_1 x_2 + ... + c_{n-1}x_2^{n-1} + c_n x_2^n = b_2 \\ \qquad\qquad\vdots \\ c_0 + c_1 x_k + ... + c_{n-1}x_k^{n-1} + c_n x_k^n = b_k, \end{cases}$$

jonka matriisimuodolle $A\mathbf{c} = \mathbf{b}$ etsitään pienimmän neliösumman ratkaisua normaaliryhmälle $A^T A\overline{\mathbf{c}} = A^T\mathbf{b}$, missä

$$A = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-1} & x_1^n \\ 1 & x_2 & \cdots & x_2^{n-1} & x_2^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & x_k & \cdots & x_k^{n-1} & x_k^n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_k \end{bmatrix}.$$

6.2.2 Esimerkkitehtävä

Syyslukukauden 2016-2017 MATLABin alkeiden (Luku5) EXAM-tenttitehtävän yhtenä vaiheena oli neljännen asteen polynomifunktion sovittaminen valittuihin datapisteisiin. Tämä ratkaistiin EXAM-tentin ohjeiden mukaisesti käyttämällä pienimmän neliösumman menetelmää. Sen sijaan, että opiskelija itse olisi rakentanut yhtälöryhmän ja ratkaissut tämän, tentin ohjeistus neuvoi käyttämään tähän valmiiksi soveltuvaa komentoa `polyfit`. Komennolla saadaan suoraan valittuihin x- ja y-akseleiden dataan sovitettua neljännen asteen polynomifunktion käyttäen myös hyväksi komentoa `polyval` polynomin piirtämiseksi kuvaajaan. Lopullinen sovite datapisteineen on esitetty kuvassa 6.2.



Kuva 6.2 *Polynomin sovittaminen dataan EXAM-tentissä.*

Ilman EXAM-tentin sisäänrakennettua ohjeistusta tehtävä olisi pitänyt ratkaista täysin määritelmää käyttäen. Tietojen ja taitojen mukaan mahdollista oli myös hyödyntää aikaisemmin mainittuja komentoja tai esimeriksi käyttäen hyväksi komentoa `lsqcurvefit` tai MATLABin Curve Fitting Toolboxia komennolla `cftool`.

Tehtävän ratkaisussa opiskelijalta eniten vaaditaan proseduraalista sujuvuutta, sillä tehtävää varten harjoiteltiin vastaavia tehtäviä kurssin Moodle-sivuilla (kts. Luku5). Toinen selvästi eroteltavissa oleva matemaattisen osaamisen piirre, jota tehtävällä testataan, on mukautuva päättely. Ohjeiden noudattamisen ja komentojen käyttämisen täytyy olla loogista ja perusteltua.

6.3 Numeerinen differentiaaliyhtälöiden ratkonta Eulerin menetelmällä

Differentiaaliyhtälöiden ratkonta kuuluu jokaisen diplomi-insinööriksi opiskelevan matematiikan perusopintoihin. Pääosin käsitellään lineaarisia ensimmäisen ja toisen kertaluvun differentiaaliyhtälöitä, joihin löytyy analyyttiset ratkaisut. Näin ei kuitenkaan aina ole ja joudutaan turvautumaan numeerisen ratkaisun tuottamaan approksimaatioon.

6.3.1 Eulerin menetelmä

Eulerin menetelmä on yksinkertaisin tavallisen differentiaaliyhtälön numeerinen ratkaisumenetelmä. Yleisesti alkuarvo-ongelma on muotoa

$$x'(t) = f(t, x),\ \ x(t_0) = x_0.$$

Ratkaisun $x(t)$ kulmakerroin pisteessä (t_0, x_0) on $x'(t_0) = f(t_0, x_0)$, jolloin ratkaisua voidaan approksimoida pisteen t_0 lähellä lineaarisella approksimaatiolla eli ensimmäisen asten Taylorin sarjakehitelmän $T(t) = x_0 + f(t_0, x_0)(t - t_0)$ avulla, ilman jäännöstermiä. Olkoon $h > 0$ ja $t_1 = t_0 + h$, jolloin approksimaation mukaan

$$x(t_1) = x_1 \approx x_0 + f(t_0, x_0)h$$

ja päädytään pisteeseen (t_1, x_1), joka on likimain ratkaisun käyrällä. Vastaavan siirtymän jälkeen, kuten edellä eli $t_2 = t_1 + h$

$$x(t_2) = x_2 \approx x_1 + f(t_1, x_1)h.$$

Yleisesti voidaan rekursiivisesti asettaa

$$t_{n+1} = t_n + h, \quad x_{n+1} = x_n + f(t_n, x_n)h, \quad n = 0, 1, 2, ...$$

Tällaista approksimaatiota kutsutaan Eulerin menetelmäksi askelpituudella h. [33]

6.3.2 Esimerkkitehtävä

Kevään 2017 Engineering Mathematics 123 -kurssin viikkoharjoituksissa oli säännöllisesti mukana täysin sähköisesti MATLABilla ratkaistavia tehtäviä. Yhdessä differentiaaliyhtälöihin liittyvässä viikkoharjoituksessa oli kuvan 6.3 mukainen tehtävä.

Write a computer program to solve the initial value problem

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x^2\frac{dx}{dt} + x = \sin t, \quad x(0) = 0, \quad \frac{dx}{dt}(0) = 1$$

using Euler's method. Use your program t ofind the value of $X(0.4)$ using steps of $h = 0.01$ and $h = 0.005$. Hence estimate the accuracy of your value of $X(0.4)$ and estimate the step size that would be necessary to obtain a value of $X(0.4)$ accurate to 4dp.

Kuva 6.3 *Numeerista differentiaaliyhtälön ratkontaa Eulerin menetelmällä Engineering Mathematics 123 -kurssin viikkoharjoituksissa.*

Tehtävässä pitää kirjoittaa MATLAB-skripti epälineaarisen toisen asteen differentiaaliyhtälön muodostaman alkuarvo-ongelman ratkaisemiksi käyttäen hyväksi Eulerin menetelmää, sillä ongelmalle ei ole eksplisiittistä ratkaisua. Lisäksi tämän kirjoitetun skriptin avulla selvitetään ratkaisun x arvo pisteessä 0.4 neljän desimaalin tarkkuudella käyttäen kahta eri askelpituutta h arvioiden sopivan askelpituuden valitsemista halutun tarkkuuden saavuttamiseksi. Yksi esimerkkiversio mahdollisesta opiskelijan tuottamasta ratkaisusta liitteenä (Liite C).

Ratkaisun aikaansaamiseksi opiskelijalta vaaditaan käsitteellistä ymmärrystä sekä itse Eulerin menetelmästä, differentiaaliyhtälöistä että tietoa monesta MATLAB-komennosta. Etenkin strateginen kompetenssi ja mukautuva päättely ovat tärkeitä ominaisuuksia tehtävän ratkaisua varten matemaattisen osaamisen piirteistä. Myös proseduraalista sujuvuutta testataan tehtävässä jossain määrin. Tehtävässä täytyy luoda jotain täysin uutta ja monelle myös ennalta täysin tuntemattomalla tavalla ratkaisun tuottamiseksi.

6.4 Ellipsin yhtälö

Ellipsi on tuttu tasogeometrinen käyrä. Esimerkiksi paikannuksessa voidaan hyödyntää ellipsin muotoisia kuuluvuusalueita. Kappaleessa käydään läpi ellipsin yhtälöön liittyvä matemaattinen tausta ja sen ympärille kehitellyistä kahdesta esimerkkitehtävästä.

6.4.1 Matemaattinen tausta

Ellipsi on pisteiden (x, y) joukko, jotka toteuttavat yhtälön

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1,$$

missä (x_0, y_0) on ellipsin keskipiste ja a, b ellipsin puoliakseleiden pituudet. Vaihtoehtoisesti ellipsin yhtälö voidaan kirjoittaa myös muodossa

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0,$$

missä $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$. Ellipsin yhtälö voidaan kuitenkin ryhmitellä seuraavaan muotoon

$$(\mathbf{x} - \mu)^T A^{-1}(\mathbf{x} - \mu) = 1,$$

missä μ on ellipsin keskipiste, $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ ja $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ on symmetrinen positiivisesti definiitti matriisi. Tämä niin kutsuttu kovarianssimatriisi A voidaan sen symmetrisyyden ja definiittisyden vuoksi esittää similaarisuusmuunnoksen avulla muodossa

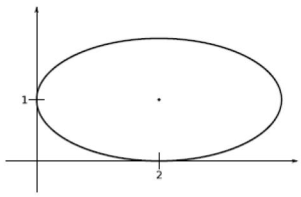
$$A = \begin{bmatrix} \mathbf{u} & \mathbf{v} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}^T \\ \mathbf{v}^T, \end{bmatrix}$$

missä $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$ ja $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ ovat ellipsin puoliakseleiden suuntaiset yksikkövektorit ja a, b puoliakseleiden pituudet. Pituuksien neliöt a^2 ja b^2 ovat kovarianssimatriisin ominaisarvot ja $\mathbf{u}$ ja $\mathbf{v}$ niitä vastaavat ominaisvektorit. [34]

6.4.2 Esimerkkitehtävän versio 1 MATLABilla

Haastavampien tehtävien joukossa Insinöörimatematiikka 123 -kurssin viikkoharjoituksissa oli myös kaksiosainen ellipsin yhtälöön ja ellipsin MATLABilla piirtämiseen liittyvä tehtävä, joka on esitetty kuvassa 6.4.

(a) Anna alla olevassa kuvassa näkyvän ellipsin yhtälö muodossa $(\mathbf{x}-\mu)^T A^{-1}(\mathbf{x}-\mu) = 1$.
(b) Piirrä kyseinen ellipsi Matlabilla. Vihje: generoi pisteitä yksikköympyrälle ja tee niille affiinimuunnos.



Kuva 6.4 *Ellipsitehtävä syksyn Insinöörimatematiikka 123 -kurssilla.*

Tehtävän a-kohtaa pystyi lähestymään ainakin kahdella tapaa joko käyttäen hyväksi ellipsin käyrän ja kovarianssimatriisin symmetriaa ja leikkauspisteitä koordinaatistoakseleiden suhteen tai hyödyntämällä similaarisuusmuunnosta. Tehtävän b-kohta oli tarkoitettu täysin sähköisesti ratkaistavaksi MATLABia käyttäen, jonka myös hiiri-ikoni tehtävänannossa ilmaisee. Kuvassa 6.5 on esitetty yksi vaihtoehtoinen ratkaisu tehtävän b-kohdalle.

Ellipsin yhtälö voidaan kirjoittaa muodossa $z^T z = 1$, missä $z = (A^{\frac{1}{2}})^{-1}(\mathbf{x} - \mu)$,

sillä $A = (A^{\frac{1}{2}})^2 \Rightarrow \mathbf{x} = A^{\frac{1}{2}} z + \mu$

Lasketaan matriisineliöjuuri

```
A12 = sqrtm(A);
```

Generoidaan pisteitä yksikköympyrälle

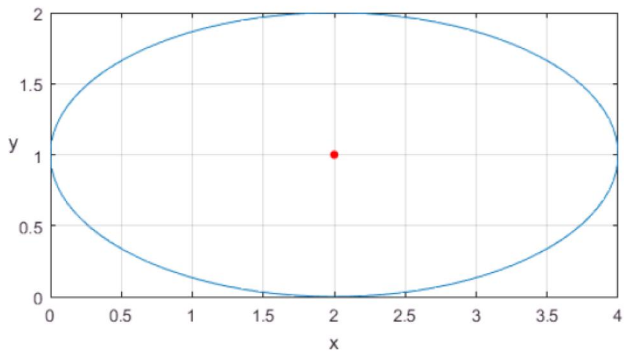
```
theta = linspace(0,2*pi,100);
z = [cos(theta); sin(theta)];
```

Ratkaistaan vektori $\mathbf{x}$ käyttämällä ratkaistua muunnosta $\mathbf{x} = A^{\frac{1}{2}} z + \mu$

```
x = A12*z+mu*ones(size(theta));
```

Piirretään sekä ellipsi että sen keskipiste

```
plot(x(1,:),x(2,:))
hold on
plot(mu(1),mu(2),'.r','MarkerSize',14)
axis equal; grid on
xlabel('x'); ylabel('y','Rotation',0)
axis([0 4 0 2])
```



Kuva 6.5 *Ellipsitehtävän b-kohdalle esitetty mahdollinen ratkaisu.*

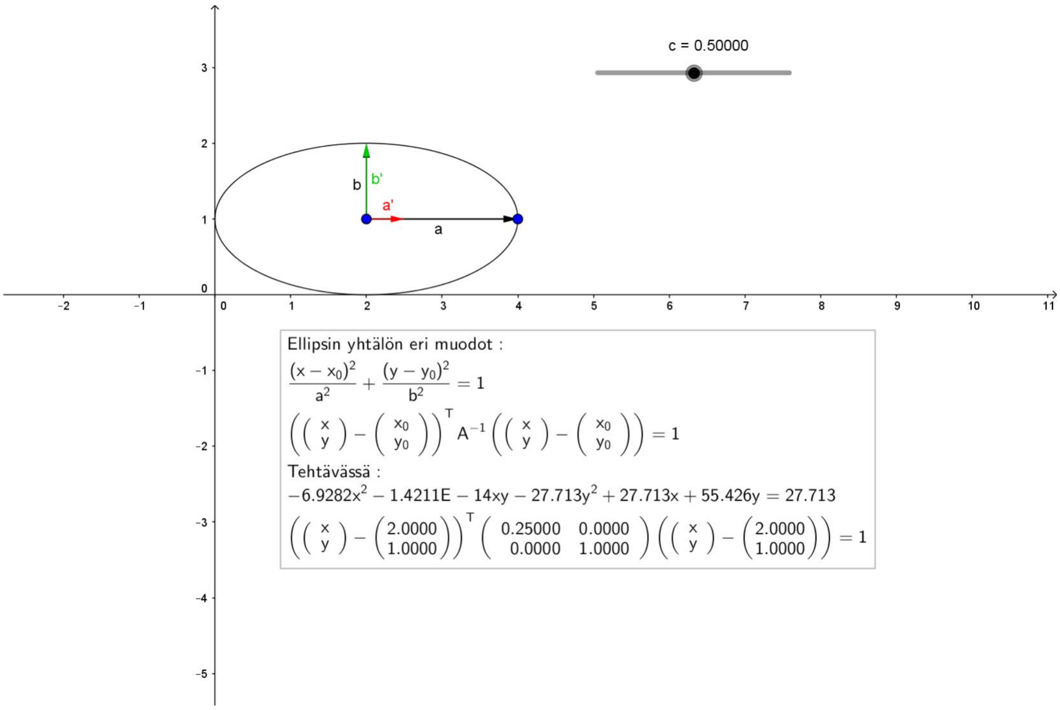
Ratkaisun aikaansaamiseksi opiskelijalta vaaditaan jokaista matemaattisen osaamisen piirrettä. Erityisesti käsitteellinen ymmärtäminen ja strateginen kompetenssi tulevat testatuksi tehtävän molemmissa kohdissa. Lisäksi b-kohdassa testataan osittain proseduraalista sujuvuutta aiemman opitun perusteella.

6.4.3 Esimerkkitehtävän versio 2 GeoGebralla

Toinen mahdollinen versio liittyen ellipsin yhtälöön voisi tulevaisuudessa liittää myös muunkin ohjelmiston kuin MATLABin. Yhtenä vaihtoehtona voisi olla GeoGebra [35], jolla funktioiden piirtäminen ja havainnollistaminen visuaalisesti on helppoa ja interaktiivisten tehtävien tekeminen on mahdollista. GeoGebraa käytetään ainakin

Suomessa yläkoulun ja lukion opetuksessa [36], joten sen jatkokäyttäminen yliopistomaailmassa vaikuttaisi järkevältä.

Kuvassa 6.6 on esitetty ellipsiin ja ellipsi yhtälön eri muotoihin liittyvä demonstraatio, jossa ellipsin muotoa voi vapaasti säädellä. Kuvassa on kuitenkin asetettu ellipsi vastaamaan Insinöörimatematiikka 123 -kurssin harjoitustehtävän ellipsiä (Kuva 6.4).



Kuva 6.6 *Ellipsitehtävän mahdollinen GeoGebra -versio.*

Tehtävänä opiskelijalla voisi esimerkiksi olla kuinka todeta demonstraation avulla vektorit a ja b matriisin A ominaisvektoreiksi tai kuinka laskettaisiin ominaisvektoreita vastaavat ominaisarvot riippuen siitä, mitä halutaan opiskelijoilta testattavan. Riippuen lopullisesta tehtävänasettelusta ja tavoitteista matemaattisen osaamisen testaaminen painottuu eri piirteille. Merkittävässä roolissa myös on GeoGebran aikaisempi osaaminen ja kuinka tutuksi ohjelmisto tehdään opiskelijoille kurssin aikana.

7. TILASTOMATEMATIIKAN EXAM-TENTTI KEVÄT 2017

Tilastomatematiikan kurssilla järjestettiin ensimmäisen kerran sähköinen EXAM-tentti normaalin paperisen tentin lisäksi. Kurssin tavoitteena on opettaa normaalijakaumaan perustuvat estimoinnit ja tilastolliset testit sekä tavalliset parametrittomat testit ja näiden soveltaminen tulosten analysointiin. Sähköisessä tentissä ollaan tilastomatematiikan kannalta sille suotuisassa ympäristössä, jossa ei olla riippuvaisia rajoitettujen taulukoiden käytöstä ja tilastollista testausta on mahdollista tehdä suurempienkin datojen pohjalta.

EXAM-tentissä oli opiskelijoiden käytössä kattava dokumentti, jossa oli koottuna kaikki kurssiin liittyvät kaavat testausmenetelmineen ja taulukoineen. Lisäksi dokumenttiin oli lisätty kokoelma tarpeellisia MATLAB-komentoja lähtien aina peruslaskutoimituksista tunnuslukujen ja todennäköisyysjakauman kvantiilien laskemiseen sekä parametrittomien testien suorittamiseen lyhyin selityksin.

7.1 Tenttitehtävät

Tehtävien perusideana oli hypoteesiparin testaus erilaisin tilastollisin menetelmin. Kappaleessa käydään lävitse tilastollisen testaamisen matemaattinen tausta ja esitellään lyhyesti tentissä olleet tehtävät.

7.1.1 Tilastollinen testaus

Tilastollisessa testauksessa on kyse hypoteesien asettamisesta. Hypoteesit kuvaavat jotain populaation tunnuslukua θ, kuten odotusarvoa μ tai hajontaa σ. Testaus alkaa nollahypoteesin H_0 asettamisesta ja tätä merkitään

$$H_0 : \theta = \theta_0.$$

Lisäksi asetetaan vaihtoehtoinen hypoteesi H_1 mikä astuu voimaan, jos testaus osoittaa nollahypoteesin asettaman oletuksen hylättäväksi. Tätä hypoteesia merkitään

$$H_1 : \theta > \theta_0,\ H_1 : H_1 : \theta < \theta_0 \text{ tai } H_1 : \theta \neq \theta_0$$

riippuen tilanteesta. Kahden ensimmäisen tapaukessa on kyse toispuoleisen hypoteesiparin ja viimeisessä kaksipuolisen hypoteesiparin testaamisesta. Tämän jälkeen otoksesta lasketaan hypoteesiparin tunnuslukua vastaavan otossuureen arvo, kuten otoskeskiarvo $\overline{x}$ tai otoshajonta s. Otossuureen testaamiseen liittyy oleellisesti ennalta määrätty riskitaso α, millä tarkoitetaan todennäköisyyttä sille, että nollahypoteesi hylätään, vaikka todellisuudessa se olisi oikein. [37]

Kurssilla käsiteltyä testausmenetelmiä on kolme: luottamusväli- ja luottamusrajatarkastelu, testisuureen vertailu ja p-arvon laskeminen. Kaksipuolisen hypoteesiparin luottamusväli- ja luottamusrajatarkastelussa on kyse riskitasoa vastaavan $100(1-\alpha)\%$ luottamusvälin $(\hat{\theta}_L, \hat{\theta}_U)$ etsimisestä eli todennäköisyydestä

$$P(\hat{\Theta}_L < \theta < \hat{\Theta}_L) = 1 - \alpha.$$

Estimaatit $\hat{\theta}_L$ ja $\hat{\theta}_U$ ovat realisoituneesta otoksesta laskettavia lukuja ala- ja ylärajoille ja estimaattorit $\hat{\Theta}_L$ ja $\hat{\Theta}_U$ ovat satunnaismuuttujia. Jos nollahypoteesin mukainen arvo θ_0 sijoittuu tälle välille, niin syytä hypoteesin hylkäämiselle ei ole. Toispuoleisten hypoteesiparien tapauksessa riittää tarkastella joko luottamusylärajaa tai luottamusalarajaa. [37]

Testisuureen tapauksessa liikkeelle lähdetään tilanteeseen sopivasta todennäköisyysjakaumasta ja tähän sopivasta satunnaismuuttujasta. Kurssilla käsiteltyjä jakaumia ovat muun muassa normaalijakauma, χ^2-jakauma, t-jakauma sekä F-jakauma sekä näihin liittyvät muuttujat Z, V, T ja F. Lasketun testisuureen arvoa verrataan vastaavan jakauman kvantiileihin. Esimerkiksi kaksipuolisen hypoteesiparin odotusarvoa tutkitaan toteuttaako realisoituneen normaalijakautuneen testisuureen z arvo epäyhtälöketjun

$$-z_{/2} < z < z_{\alpha/2},$$

kun populaation varianssi σ^2 tunnetaan. Luku $z_{\alpha/2}$ viittaa riskitasoa vastaavaan normaalijakauman kvantiililukuun. Epäyhtälöketjun toteutuessa ei ole syytä hylätä nollahypoteesia. Toispuoleisen hypoteesiparin tapauksessa vertaillaan joko alkuhäntä- tai loppuhäntäkvantiiliin tilanteen mukaan. [37]

Kolmantena testausmenetelmänä on p-arvon laskeminen, jolla tarkoitetaan pienintä riskitasoa, jolla nollahypoteesi voidaan hylätä. Käytännössä lasketaan teoreettinen todennäköisyys realisoituneelle tapahtumalle nollahypoteesin mukaisesti. Jos X on tunnuslukua vastaava otossuureen satunnaismuuttuja ja x sen realisoitunut arvo, niin p-arvot lasketaan todennäköisyyksistä $P(X \leq x)$ ja $P(X \geq x)$ toispuoleisten hypoteesiparien tapauksissa ja $2\min\{P(X \leq x), P(X \geq x)\}$ kaksipuoleisen hypoteesiparin tapauksessa tilanteeseen sopivan todennäköisyysjakauman mukaisesti. Jos p-arvo on pienempää kuin ennalta määrätty riskitaso, niin nollahypoteesi hylätään. [37]

7.1.2 Tehtävien esittely

EXAM-tentti koostui viidestä tehtävästä, jotka satunnaisesti valittiin tehtäväkohtaisesta laatikosta kullekin opiskelijalle. Kaikissa tehtävissä oleellisena osana oli tilastollinen testaus sopivaa menetelmää käyttäen. Tehtävissä oli myös mukana lisäkysymyksiä ja ratkaisuissa vaadittiin tarkempia perusteluja täysien pisteiden saavuttamiseksi etenkin valmiita MATLAB-komentoja käyttäessä. Esitetään yleisesti tentin kaikki tehtävät, mutta tulosten analysoinnin yhteydessä tarkastellaan osa tehtävistä syvemmin.

Ensimmäisessä tehtävässä kysyttiin kuinka suorittaa tuotteen valmistukseen liittyvä testaus, kun tilanne oletetaan normaalijakautuneeksi ja populaation hajonta σ tai varianssi σ^2 tunnetaan. Lisäksi tuli perustella sopivan riskitason valinta. Toisena tehtävänä oli tilanteeseen liittyvän tunnusluvun odotusarvon luottamusvälin ja luottamusalarajan tai -ylärajan riskitasoa vastaavaksi, kun tunnetaan joitain otoksen tunnuslukujen arvoista. Kolmantena tehtävänä oli vastaavanlainen tehtävä kuin edellinen, mutta otosten tunnuslukujen sijaan oli annettu itse otoksiin liittyneet mittaukset ja näiden perusteella tuli sekä selvittää luottamusväli populaatiovarianssin suhteelle, laskea p-arvo ja pohtia voidaanko otosten populaatiovariansseja pitää yhtä suurena. Neljäntenä tehtävänä oli jakauman sopivuuden testaaminen otoksen ja laajemman tutkimuksen välillä. Tehtävässä viisi testattiin hypoteesiparia parametrittomien testien avulla ja arvioida saatujen p-arvojen luotettavuutta.

7.2 Tulokset

Kappaleessa käsitellään opiskelijoiden tenttitehtävien tuloksia sekä kvantitatiivisesti että kvalitatiivisesti. Kvantitatiivisessa analyysissä tutkitaan tenttitehtävistä saatujen tuloksien pistekeskiarvoja ja hajontaa. Lisäksi selvitetään onko tenttitehtävien jakautumisessa tai tehtävien välillä tilastollisesti merkittävää eroa hyödyntäen Kruskal-Wallis -testiä [38] sekä t -testiä [39].

7.2.1 Kvantitatiivnen analyysi

Sähköisen EXAM-tentin arvosteltuja suorituksia oli 118. Suorituksiin sisältyy myös muutama useampi suorituskerta samalta opiskelijalta. Koko tentin maksimipistemäärä oli 30 pistettä ja jokaisesta tehtävästä sai maksimissaan kuusi pistettä. Keskimääräiset pisteet olivat 20,30 ja keskihajonta 6,64 sekä mediaani 23 pistettä ja moodi 25 pistettä.

Tenttituloksista on koottu taulukkoon 7.1 tehtäväkohtaisesti eri vaihtoehtojen suorituslukumäärät, pistekeskiarvot sekä hajonnat.

Taulukko 7.1 *Tenttitehtävien eri vaihtoehtojen suoritusten tuloksien lukumäärät (n), pistekeskiarvot ($\overline{x}$) ja hajonnat (s). Tehtäväkohtainen pistemaksimi oli kuusi.*

	n	$\overline{x}$	s
Tehtävä 1.1	26	3,73	1,43
Tehtävä 1.2	22	3,13	1,96
Tehtävä 1.3	32	4,06	1,34
Tehtävä 1.4	38	3,82	1,69
Tehtävä 1 yht.	118	3,73	1,61
Tehtävä 2.1	19	5,00	1,91
Tehtävä 2.2	23	5,39	1,44
Tehtävä 2.3	19	5,58	0,90
Tehtävä 2.4	18	5,78	0,65
Tehtävä 2.5	15	5,73	0,70
Tehtävä 2.6	24	5,67	0,96
Tehtävä 2 yht.	118	5,52	1,20
Tehtävä 3.1	41	3,98	1,93
Tehtävä 3.2	45	3,91	1,73
Tehtävä 3.3	32	3,50	2,11
Tehtävä 3 yht.	118	3,82	1,90
Tehtävä 4.1	25	2,60	1,96
Tehtävä 4.2	35	3,77	2,28
Tehtävä 4.3	30	3,17	2,60
Tehtävä 4.4	28	3,27	2,32
Tehtävä 4 yht.	118	3,58	2,24
Tehtävä 5.1	43	4,30	1,39
Tehtävä 5.2	24	3,88	2,35
Tehtävä 5.3	24	3,17	1,88
Tehtävä 5.4	27	4,15	1,70
Tehtävä 5 yht.	118	3,95	1,82

Pisteiden jakautumista tutkitaan myös Kruskal-Wallis -testiä käyttäen selvittämään onko tehtäväkohtaisesti pistemäärien jakautumisessa tilastollisesti merkittävää eroa mediaanimielessä. Käytetään merkitsevyystasona [40] 95 %. Taulukkoon 7.2 on koottu jokaisen tehtävälaatikon sisällä suoritetun testauksen p-arvot.

Taulukko 7.2 *Kruskal-Wallis- testin antamat p-arvot tenttitehtävien eri vaihtoehtojen pistemäärien jakautumisesta mediaanimielessä.*

Tehtävä	p-arvo
Tehtävä 1	0,42
Tehtävä 2	0,71
Tehtävä 3	0,59
Tehtävä 4	0,26
Tehtävä 5	0,08

Kuten taulukon 7.2 testauksen tulokset osoittavat, ei tehtävien jakautumisessa mediaanimielessä ole tilastollisesti merkittävää eroa. Lisäksi t-testin avulla selvitetään onko tehtävälaatikon sisällä olevat tehtävät keskiarvon mielessä erilaisia käyttäen edelleen 95 % merkitsevyystasoa. Testaus suoritettiin tehtävälaatikon sisällä jokaiselle tehtäväparille. Tilastollisesti merkittävää eroa löytyi ainoastaan tehtävien 1.2 ja 1.3, 4.1 ja 4.2 sekä 5.1 ja 5.3 väliltä, joiden p-arvot olivat 0,044, 0,042 ja 0,007 vastaavasti. Tehtävien 5.1 ja 5.3 välillä on siis tilastollisesti merkittävä ero myös merkitsevyystasolla 99 %.

7.2.2 Kvalitatiivinen analyysi

Kolmessa ensimmäisessä tehtävässä vaihtoehtojen väliset keskiarvot eivät merkittävästi eroa toisistaan. Ensimmäisen tehtävän kohdalla tehtävät eivät periaatteiltaan poikenneet toisistaan lainkaan, vaan lähinnä tehtävän tausta muuttui. Tehtävässä ei varsinaisesti laskettu mitään arvoja ja ratkaisuun kuuluikin ainoastaan menettelytavan valinta ja tälle perustelut. Tämän kaltaisia tehtäviä ei suoranaisesti harjoiteltu viikkoharjoituksissa. Myös toisen tehtävän kohdalla päti se, että vaihtoehtojen välillä ei ollut juurikaan eroa. Tehtävät olivat ensimmäistäkin tehtävää suoraviivaisemmin aseteltu ja vastaavia suoria laskutehtäviä oli myös harjoiteltu sekä viikkoharjoituksissa että luentoesimerkeissä.

Kolmannessa tehtävässä ensimmäinen vaihtoehto hieman erosi kahdesta muusta vaihtoehdosta. Tehtävien pistekeskiarvot kuitenkin vastasivat hyvin toisiaan. Tehtävistä teki vaikeamman kuin toisen tehtävän luultavasti se, että mitään otoksen tunnuslukuja ei ollut suoraan annettu, vaan nämä joutui MATLABia käyttäen laskemaan itse. Opiskelijoilla oli kuitenkin tarjolla aikaisemmin mainittu dokumentti apunaan tällaisia tapauksia varten.

Neljännessä ja viidennessä tehtävässä pistekeskiarvoissa on jo selvästi poikkeamia ja t-testin tulokset puoltavat niissä olevan hieman eroavaisuuksia. Kolme viimeistä vaihtoehtoa olivat pitkälti toisiaan vastaavat. Ainoana erona oli riskitason ollessa valmiiksi annettu vaihtoehdossa 2, joten opiskelijalle ei jäänyt tässä kohtaa ongelmaksi pohtia onko testisuureella laskettu p-arvo riittävän pieni nollahypoteesin hylkäämiseksi. Ensimmäinen vaihtoehto neljännen tehtävän laatikosta erosi kolmesta muusta jo ensinnäkin sen jakautuessa a- ja b-kohtiin. Periaatteessa vaihtoehdon a-kohta oli täysin vastaava tehtävä kolmen muun vaihtoehdon kanssa ja b-kohta oli saman testauksen suorittaminen poistamalla otoksesta alkioita. Alkioiden poiston seurauksena testiä ei voinut suoraan tehdä samalla tapaan kuin a-kohdassa. Täysin kolmen viimesein vaihtoehdon kaltaisia tehtäviä oli myös harjoiteltu viikkoharjoituksissa ja luentoesimerkeissä.

Tehtävä 4.1

Laajoissa tutkimuksissa koehenkilöille annettiin lumelääkettä, mutta kerrottiin sen olevan flunssan oireita helpottavaa lääkettä. Tällöin esiintyivät seuraavat luullut sivuvaikutukset: päänsärky (P, 5 %), uneliaisuus (U, 7 %), vatsavaiva (V, 4 %) ja ei mainittavia sivuvaikutuksia (E, 84 %).

Myöhemmin tehtiin 250 koehenkilölle vastaava testi, mutta sanottiin lääkkeen olevan tulehduskipulääke. Kyseltäessä heiltä mainittuja sivuvaikutuksia saatiin seuraavat tulokset: P (19 kpl), U (23 kpl), V (14 kpl) ja E (194 kpl). Testaa riskitasolla $\alpha = 0,05$ ovatko luultujen sivuvaikutusten osuudet samat näissä myöhemmissä kokeissa kuin aiemmissa laajoissa tutkimuksissa.

Tehtävä 4.2

Autoteollisuuteen osia valmistavan tehtaan laadunvalvontayksikön johtaja päätti tutkia, että onko tehtaassa valmistettujen viallisten osien lukumäärä riippuvainen viikonpäivästä. Hän testasi asiaa ottamalla valmistetuista osista päivittäin 100 kappaleen otoksen. Otoksissa viallisia osia esiintyi seuraavasti

Ma	Ti	Ke	To	Pe
13	5	6	12	14

Yhteensä viallisia osia esiintyi otoksissa siis 50 kappaletta (otoskoko 500).

a) Testaa käyttäen p-arvoa nollahypoteesi, jonka mukaan nämä viikon aikana tuotetut 50 viallista osaa ovat jakautuneet tasaisesti eri viikonpäiville (eli $p_i = \frac{50}{500} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{50}$).

b) Muuttuuko tilanne, jos tutkitaan vain maanantaina, tiistaina ja keskiviikkona tuotettuja osia?

Kuva 7.1 *Tilastomatematiikan tentin tehtävävaihtoehdot 4.1 ja 4.2.*

Viidennet tehtävät olivat myös hyvin pitkälti samanlaisia, joissa sovellettiin otoksiin parametrittomia testejä nollahypoteesin testaamiseen etenkin vaihtoehtojen 1, 3 ja 4 tapauksissa. Sen sijaan, että suoraan käytettäisiin ennalta määrättyä parametrittoman testin edellyttämää MATLAB-komentoa, niin vaihtoehdossa 2 tehtävänanto muutettu siten, että kysytäänkin sopivan testin valintaa, mihin se perustuu ja kuinka arvot määritetään. Muuten jokaisessa vaihtoehdossa tehtiin päätelmiä laskettujen p-arvojen perusteella. Yksi syy vaihtoehdon kolme huonompaan pistekeskiarvoon voi olla eri testin antama johtopäätös lasketun p-arvon perusteella, kun muissa tehtävissä jokaisen testin tapauksessa voidaan päätyä samoihin päätelmiin.

8. YHTEENVETO

Työssä käsiteltiin ohjelmistojen käyttöä matematiikan sähköisessä tenttimisessä sekä tehtävien luomisessa että tehtäviin vastatessa. Keskeisinä tutkimuskysymyksinä olivat sähköisen tenttimisen erot paperiseen versioon nähden, sähköiseen tenttiin sopivien tehtävien valikoituminen ja voiko sähköinen tentti toimia myös oppimistapahtumana (Luku 3). Tutkimuskysymyksiä ja tutkimusta varten käsiteltiin tarpeellinen viitekehys lähtien liikkeelle matemaattisesta osaamisesta, oppimisesta ja opetuksesta yliopistossa päätyen tietokoneavusteiseen ja automaattiseen arviointiin (Luku 2). Taustaa varten oli myös tarpeellista esitellä Tampereen teknillisen yliopiston matematiikan opetuksen kannalta tärkeitä järjestelmiä ja ohjelmistoja sähköistä tenttimistä ja sähköisiä tehtäviä ajatellen (Luku 4. Sähköinen verkko-oppimisympäristö Moodle, sähköinen tenttijärjestelmä EXAM, laskentaohjelmisto MATLAB ja automaattisesti tarkastettavat STACK-tehtävät voidaan pitää tärkeimpinä osina tämän hetkistä matematiikan opetuksen säihköistymisessä.

Tutkimuskysymyksiin vastaamista varten saatiin tukevaa aineistoa teoreettisesta viitekehyksestä sekä syksyn 2016 MATLABin alkeiden verkkototeutukset (Luku 5), sähköistä tenttiä ajatellen luoduista esimerkkitehtävistä (Luku 6) ja kevään 2017 tilastomatematiikan EXAM-tentistä (Luku 7). Yhtenä sähköinen tentin eduista on joustavuuden tarjoaminen ajan ja paikan suhteen. EXAM-tentille voi ennalta määritellyltä aikajaksolta valita sopivan ajan (Kuva 5.8) tentin suorittamiselle eikä olla lukittuina perinteisiin yksittäisiin tenttipäiviin ja kellonaikoihin, mikä on esimerkiksi työssäkäyvien opiskelijoiden kannalta suotuisaa. Lisäksi sähköistä tenttiä pääsee yrittämään todennäköisemmin nopeammin uudestaan kuin perinteistä paperista tenttiä, jopa seuraavana vapaana tenttitilan vapaana ajankohtana (Kuva 5.6). Sähköiseen tenttiin voidaan luoda realistisempia työelämää paremmin a tehtäviä, joiden ratkaisemissa hyödynnetään erilaisia ohjelmistoja, kuten MATLABia. Tästä esimerkkinä Kevään tilastomatematiikan EXAM-tentti, jossa ei oltu enää riippuvaisia rajoittavista taulukoista tilastollista testaamista harjoitellessa. Suurempien datojen käyttö tehtävänannossa on mahdollista ja asioita, kuten otoskeskiarvoa tai otoshajontaa ei tarvitse laskea kynää ja paperia käyttäen, vaan ohjelmistoa hyödyntäen työelämän tavoin. Sähköisellä tenttimisellä on toki ongelmia ja haasteita, jotka liittyvät muun muassa matematiikan kirjoittamiseen ja totutun kynän ja paperin puuttumiseen. Jotta sähköisestä järjestelmät saadaan enemmän hyötyä irti, on myös tehtäväpankkien laajentaminen ja laadun parantaminen jatkuvan kehityksen tarpeessa. Taulukosta 7.1 nähdään, että tilastomatematiikan EXAM-tentin tehtäväpankin sisällä oli hieman ongelmia tehtävien tasapuolisuudessa.

Sähköisessä tentissä käytettävien tehtävätyyppien tulisi olla työelämän tarpeita vaativia, joten tehtäväpankkeihin voisi laatia spesifimpejä tehtäviä esimerkiksi eri koulutusohjelmien opiskelijoiden tarpeita ajatellen. Näin todennäköisesti saadaan opiskelijat paremmin motivoitua matematiikan opiskeluun ja näkemään matematiikka hyödyllisenä työvälineenä omassa työssään. MATLAB tarjoaa myös polun ohjelmointiin, joten MATLABin tai muun vastaavan ohjelmiston käyttö tehtäviin vastaamisessa ja tehtäviä suunnitellessa on mielekästä ottaa huomioon tulevia diplomi-insinöörejä ajatellen. Suorat laskutehtävät eivät kuitenkaan ole järkeviä sähköisessä tentissä niiden helppouden vuoksi, eivätkä ne myöskään testaa matemaattista osaamista riittävän laajasti.

Sekä MATLABin alkeiden että tilastomatematiikan EXAM-tenttiä voidaan pitää myös oppimistapahtumana. Opiskelijoilla oli käytössään kattava `help` komento MATLABissa eri komentojen käyttöä varten ja tilastomatematiikan tapauksessa dokumentti tarpeellisista MATLAB-komennoista ja kurssilla käytetyistä kaavoista. Esimerkiksi MATLABin alkeiden tentissä suoritusten kestot vaihtelivat aina 10 minuutista maksimiaikaan (Kuva 5.7) ja ongelmakohdissa pystyi turvautumaan edellä mainittuihin vaihtoehtoihin apua etsiessä. Tällaista on osittain myös työelämässä. Kaikesta ei tarvitse osata heti, vaan apua voi etsiä ongelmanratkaisun aikana.

Ensimmäistä kertaa järjestyt sähköiset EXAM-tentit näyttivät tuloksista päätellen toimivan hyvin. Syytä näistä luopumiselle tuskin siis on. Tampereen teknillisen yliopiston matematiikan sähköisen tenttimisen järjestelmää, jossa yhdistellään sekä EXAMia että MATLABia, on kuitenkin syytä kehittää. Myös tehtäväpankkeja on suotava laajentaa ja kohdentaa paremmin opiskelijoiden tarpeita vastaaviksi.

LÄHTEET

[1] Ylioppilastutkintolautakunta. Ylioppilastutkinto. Viitattu: Kesäkuu 2017. Saatavissa: https://www.ylioppilastutkinto.fi/ylioppilastutkinto/tutkinnon-kehittaminen/ylioppilastutkinnon-digitalisointi

[2] Panula, M. (2012). Parhaat käytännöt STACKin käyttöön automaattisesti arvioitavien matematiikan tehtävien luontiin, diplomityö, Tampereen teknillinen yliopisto. Saatavissa: https://dspace.cc.tut.fi/dpub/bitstream/handle/123456789/21095/panula.pdf?sequence=3

[3] Mäkelä, A. (2015). Verkkotyökalut yliopistomatematiikan peruskursseilla, diplomityö, Tampereen teknillinen yliopisto. Saatavissa: https://dspace.cc.tut.fi/dpub/bitstream/handle/123456789/23768/Makela.pdf?sequence=1

[4] Myllykoski, T. (2016). Eduational videos and the Use of Tools in Mathematics Remedial Instruction, Master of Science thesis, , Tampere University of Technology. Saatavissa: https://dspace.cc.tut.fi/dpub/bitstream/handle/123456789/23734/Myllykoski.pdf?sequence=1

[5] Parviainen, P. (2016). MATLAB-oppimateriaalin kehittäminen Tampereen teknillisessä yliopistossa, diplomityö, Tampereen teknillinen yliopisto. Saatavissa: http://URN.fi/URN:NBN:fi:tty-201512281860

[6] Majander, H. (2010). Tietokoneavusteinen arviointi kurssilla Diskreetin matematiikan perusteet, Pro Gradu -tutkielma, Helsingin yliopisto. Saatavissa: http://urn.fi/URN:NBN:fi-fe201010142591

[7] Ruokokoski, J. (2009). Automatic Assessment in University-level Mathematics, Master of Science thesis, Helsinki University of Technology. Saatavissa: https://aaltodoc.aalto.fi/bitstream/handle/123456789/11451/master_ruokokoski_jarno_2009.pdf?sequence=1

[8] Pachego-Venegas, N., López, G. & Andrade-Aréchiga, M. (2015). Conceptualization, development and implementation of a web-based system for automatic evaluation of mathematical expressions, Computers & Education Vol. 88, sivut 15-28.

[9] Sangwin, C. & Köcher, N. (2015). Automation of mathematics examination. Computers & Education, Vol. 94, julkaisu C, sivut 215-227. Saatavissa: https://www.researchgate.net/publication/285363934_Automation_of_mathematics_examinations

[10] Lan, S., Vats, D., Waters, A. & Baraniuk, R. (2015). Mathematical Language Processing: Automatic Grading and Feedback for Open Response Mathematical Questions, Article in Proceedings of the Second (2015) ACM Conference on Learning @ Scale, Pages 167-176.

[11] Kilpatrick, J., Swafford, J. & Findell, B (2011). Adding it up: helping children learn mathematics. National Academy Press, Washington, DC.

[12] Joutsenlahti, J. (2005). Lukiolaisen tehtäväorientoituneen matemaattisen ajattelun piirteitä - 1990-luvun pitkän matematiikan opiskelijoiden matemaattisen osaamisen ja uskomusten ilmentämänä, väitöskirja, Tampereen yliopisto. 271 s. Saatavissa: http://urn.fi/urn:isbn:951-44-6204-1.

[13] Biggs, J. & Tang, C (2007). Teaching for Quality Learning at University, 3rd Edition, Society for Research into Higher Education & Open University Press.

[14] Chalmers, D. & McCausland, D. (2002). Computer-assisted Assessment, The Handbook of Economics Lecturers. Saatavissa: https://economicsnetwork.ac.uk/handbook/printable/caa_v5.pdf

[15] Havola, L. (2012). Assessment and learning styles in engineering mathematics education, lisensiaatin tutkielma, Aalto-yliopisto. Saatavissa: http://urn.fi/URN:NBN:fi:aalto-201209193106.

[16] Joutsenlahti, J., Ali-Löytty, S. & Pohjolainen, S. (2016). Developing learning and teaching in engineering mathematics with and without technology. Proceedings of the 44th SEFI Conference, Tampere, Finland, 12-15 September, 2016.

[17] Liu, O. L., Rios, J. A., Heilman, M., Gerard, L., & Linn, M. C. (2016). Validation of automated scoring of science assessments. Journal of Research in Science Teach-ing, 53(2), 215-233. Saatavissa: http://dx.doi.org/10.1002/tea.21299

[18] Bennett, R. E. (2015). The changing nature of educational assessment. Review of Research in Education, 39(1), 370-407. Saatavissa: http://dx.doi.org/10.3102/0091732X14554179.

[19] Chen, T., Mdyunus, A., Zah, W. Bakar, A. (2008). Utilization of Intelligent Tutoring System in mathematics learning. International Journal of Education and Development using Information and Communication Technology, 4(4), 50-63. Saatavissa: https://www.researchgate.net/publication/282604639_Utilization_of_Intelligent_Tutoring_System_in_mathematics_learning

[20] Melis, E. & Siekmann, J. (2004). ActiveMath: An Intelligent Tutoring System for Mathematics, conference paper, ICAISC. Saatavissa: https://www.researchgate.net/publication/221185253_ACTIVEMATH_An_intelligent_tutoring_system_for_mathematics

[21] Feng, M., Heffernan, N. & Koedinger, K. (2010). Student Modeling in an Intelligent Tutoring System. Intelligent Tutoring Systems in E-Learning Environments: Design, Implementation and Evaluation.

[22] Nkambou, R., Bourdeau, J. & Mizoguchi, R. (2010). Advances in Intelligent Tutoring Systems, Springer-Verlag GmbH Heidelberg Berlin.

[23] MathWorks, Release Notes for MATLAB. Viitattu: Huhtikuu 2017. https://se.mathworks.com/help/matlab/release-notes.html?s_cid=doc_ftr

[24] Tikkanen, A (2016). Suomalaisten yliopistojen käyttämät digitaaliset oppimisympäristöt -raportti, Jyväskylän yliopisto, Tietotekniikan laitos. Saatavissa: https://www.jyu.fi/it/tutkimus/muistiot/Digitaalisetoppimisymparistotsuomalaisissayliopistoissaraportti.pdf

[25] Discendum, Optima, verkkosivu. Viitattu Toukokuu 2017. https://www.discendum.com/optima/

[26] MoodleDocs, Features. Viitattu: Huhtikuu 2017. https://docs.moodle.org/32/en/Features

[27] Honkavuori, J. (2011). Oppimisalustaksi Oiva, Moodle vai Optima? Case: Oppijana ammattikorkeakoulussa -opintojakso, opinnäytetyö, Oulun seudun ammattikorkeakoulu. Saatavissa: http://www.theseus.fi/bitstream/handle/10024/28922/Honkavuori_Janna.pdf?sequence=1

[28] EXAM, verkkosivu. Viitattu: Huhtikuu 2017. https://confluence.csc.fi/display/EXAM/EXAM.

[29] MathWorks, MATLAB Documentation. Viitattu: Huhtikuu 2017. https://se.mathworks.com/help/matlab/

[30] Sangwin, C. (2013). Computer aided assessment of mathematics. Oxford University Press, Oxford, New York, USA

[31] MathWorks. Documentation, pcode, Create protected function file. Viitattu: Huhtikuu 2017. https://se.mathworks.com/help/matlab/ref/pcode.html?requestedDomain=www.mathworks.com

[32] Kaarakka, T. & Orelma, H. (2016). Matriisilaskentaa insinöörien tarpeisiin, Tampereen teknillinen yliopisto, Matematiikan laitos.

[33] Edwards, C. & Penney, D. (2002). Calculus, early transcendentals, matrix version, 6th Edition, Prentice-Hall.

[34] (2013). LTT-12200 Luonnontieteet, matematiikka ja teknologia - oheismateriaali, WLAN-paikannus, Tampereen teknillinen yliopisto.

[35] GeoGebra. Viitattu: Toukokuu 2017. https://www.GeoGebra.org/?lang=fi

[36] Suomen GeoGebra-verkoston blogi. Viitattu: Toukokuu 2017. http://hylblog.edu.hel.fi/wpmu/GeoGebraverkosto/

[37] Ruohonen, K (2011). Tilastomatematiikka -opintomoniste, Tampereen teknillinen yliopisto.

[38] Statistics How To, Kruskal-Wallis H test. Viitattu: Toukokuu 2017. http://www.statisticshowto.com/kruskal-wallis/

[39] Statistics How To, T Test. Viitattu: Toukokuu 2017. http://www.statisticshowto.com/t-test/

[40] Tilastokeskus. Tilastollinen merkitsevyys. Viitattu: Toukokuu 2017. http://www.stat.fi/meta/kas/til_merkitsevyy.html

LIITE A: MATLAB FUNDAMENTALS -VERKKOKURSSIN PROGRESS REPORT

MathWorks | Training Services

Progress Report

Name: Jesse Kela
Course: MATLAB Fundamentals
Progress: 13% complete (as of 28-Apr-2017)

Chapters

1. Getting Started 100%
2. Importing and Plotting Data 60%
3. Increasing Automation with Scripts 46%
4. Analysis and Visualization with Vectors 0%
5. Analysis and Visualization with Matrices 0%
6. Review Project I 0%
7. Tables of Data 0%
8. Conditional Data Selection 0%
9. Organizing Data 0%
10. Data Analysis 0%
11. Increasing Automation with Programming Constructs 0%
12. Increasing Automation with Functions 0%
13. Troubleshooting Code 0%
14. Review Project II 0%
15. Conclusion 0%

Release: R2016b | Language: English

LIITE B: MATLABIN ALKEIDEN EXAM-TENTIN OHJEET

TAMPEREEN TEKNILLINEN YLIOPISTO

Matlabin alkeiden EXAM-tentti

Tämä tentti tehdään `https://exam.tut.fi` -järjestelmässä, jonka kautta opiskelija varaa ajan tenttiä varten haluamastaan tenttiakvaariosta. Tentin kesto on 50 minuuttia. Tentissä on käytössä Matlab-ohjelmisto. Lue tämä ohje kokonaisuudessaan lävitse ennen tenttiä. Tentissä muokkaamasi `tentti.m`-tiedosto tulee palauttaa vastauksen liitetiedostona ja vastauslaatikkoon tulee kopioida Matlabista sanan TARKISTUS jälkeiset tekstit.

Tentin tehtävät (suoritettava tässä järjestyksessä)

1. Tentin tehtävänannon liitteenä on `alkeet.zip`-tiedosto, joka sisältää viisi tiedostoa. Tämän `Matlabinalkeet.pdf`-tiedoston, tentissä tarvittavan data tiedoston: `data.csv` ja m-tiedoston `tentti.m`, jonne kirjoitetaan tentissä tarvittavat komennot. Tiedosto `tentti.m` on jo osittain täytetty, muuta vain niitä rivejä joita pyydetään muokkaamaan. Tämän lisäksi zip-tiedosto pitää sisällään `tehtavananto.p` ja `tarkista.p` tiedostot, joihin ei tarvitse koskea tentin aikana. Lataa `alkeet.zip`-tiedosto haluamaasi kansioon ja pura tiedostot samaan kansioon.
2. Avaa Matlab-ohjelmisto ja avaa Matlabissa `tentti.m`-tiedosto editoriin. Suorita (run/play-nappi) kyseinen skripti ja vaihda kyseinen kansio nykyiseksi työkansioksi. Matlabin komentoikkunaan pitäisi tulla teksti
`Opiskelijanumero ei ole omasi.`
3. Kirjoita riville 6 opiskelijanumerosi numeron 112 tilalle. Suorita skripti `tentti.m`.
4. Kirjoita riville 20 komento, joka lataa tiedostossa `data.csv` olevan datan matriisiin P.
5. Suorita skripti `tentti.m` ja toimi komentoikkunan ohjeiden mukaan. Tämän jälkeen suorita skripti `tentti.m`.
6. Kun komentoikkunaan tulee teksti:
`Opiskelijan, jonka opiskelijanumero on XXXXXX, Matlabin alkeiden ratkaisut ovat oikein.`
niin olet tehnyt oikein tarvittavat tehtävät. Palauta jokatapauksessa täydentämäsi `tentti.m` tiedosto tentin vastauksena. Tentti voi olla hyväksytty, vaikka kyseinen teksti ei tulisi näytölle. Tämän lisäksi kopioi komentoikkunaan sanan `TARKISTUS` jälkeiset tekstit Exam-tentin essee vastauskohtaan.

Huom! Älä muokkaa muita rivejä kuin niitä joita pyydetään muokkaamaan. Älä myöskään lisää rivejä tiedostoon `tentti.m`, näin tehtävänannossa olevat rivinumerot osoittavat oikeille riveille. Rivien pituutta ei ole rajattu ja samalle riville voi kirjoittaa useamman komennon puolipistein (;) eroteltuna. Laita muokkaamasi rivien loppuun puolipiste (;). Mikäli saat Matlabin virheilmoituksen, tällöin todennäköisesti jokin on väärin.

LIITE C: ESIMERKKIRATKAISU EULERIN MENETELMÄÄN LIVE EDITORILLA

```
% Initial conditions
h1 = 0.01; h2 = 0.005;
x0 = 0; Dx0 = 1;
t0 = 0; tf = 5;
t1 = t0:h1:tf; t2 = t0:h2:tf;
n1 = tf/h1; n2 = tf/h2;

% Initialization of vectors
x1 = zeros(n1+1,1); x2 = zeros(n2+1,1);
x1(1) = x0; x2(1) = x0;
Dx1 = zeros(n2+1,1); Dx2 = zeros(n2+1,1);
Dx1(1) = Dx0; Dx2(1) = Dx0;

% Loop for Euler's method when h = 0.01
for i = 1:n1
    Dx1(i+1) = Dx1(i) + h1*(sin(t1(i))-x1(i)-x1(i).^2*Dx1(i));
    x1(i+1) = x1(i) + h1*Dx1(i+1);
end

% Loop for Euler's method when h = 0.005
for k = 1:n2
    Dx2(k+1) = Dx2(k) + h2*(sin(t2(k))-x2(k)-x2(k).^2*Dx2(k));
    x2(k+1) = x2(k) + h2*Dx2(k+1);
end

% Find the time index where t = 0.4
index1 = find(t1>0.4,1)-1;
index2 = find(t2>0.4,1)-1;

% Evaluate the values x(0.4) with the obtained index
sol1 = sprintf('%0.7f', x1(index1));
disp(['With h = 0.01 X(0.4) = ' num2str(sol1)])
```

```
With h = 0.01 X(0.4) = 0.3978138
```

```
sol2 = sprintf('%0.7f', x2(index2));
disp(['With h = 0.005 X(0.4) = ' num2str(sol2)])
```

```
With h = 0.005 X(0.4) = 0.3978132
```

```
% Plot the solutions
plot(t1,x1,'.b')
hold on
plot(t2,x2,'.r')
xlabel('t')
ylabel('x')
hstring = num2str([h1; h2]);
L = size(hstring,1);
legendtext = [repmat('h = ',L,1), hstring];
legend(legendtext,'location','best')
```