



TAMPEREEN TEKNILLINEN YLIOPISTO
TAMPERE UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

Mikko Virtanen
Johdatus Lagrangen ja Hamiltonin mekaniikkoihin
DIPLOMITYÖ

Tarkastajat: Reijo Kouhia, Lauri Kettunen

Tarkastajat ja aihe hyväksytty Teknisten tieteiden tiedekuntaneuvoston kokouksessa 9.11.2016

Tiivistelmä

MIKKO VIRTANEN: Johdatus Lagrangen ja Hamiltonin mekaniikkoihin

Tampereen Teknillinen Yliopisto

Diplomityö, 173 sivua, 5 liitesivua

Marraskuu 2016

Konetekniikan diplomi-insinöörin tutkinto-ohjelma

Pääaine: Teknillistieteellinen mallintaminen

Tarkastajat: prof. Reijo Kouhia, prof. Lauri Kettunen

Avainsanat: Lagrangen mekaniikka, Hamiltonin mekaniikka, klassinen mekaniikka, differentiaaligeometria, monisto, symplektinen matemaattinen rakenne

Suomalaisissa teknillisissä yliopistoissa differentiaaligeometrian opetus on suhteellisen vähäistä, ellei suorastaan olematonta. Se totuus, että differentiaaligeometrian merkittävimpiä käytännön sovelluksia on yleinen suhteellisuusteoria, antaa suuntaviittaa siitä, että kyseisellä matematiikan osa-alueella voi olla jotain tekemistä nykypäivän modernin teknillisen fysiikan kanssa. Differentiaaligeometria on kieli, jolla fysiikan teoriat voidaan pukea matemaattisesti yleispätevään muotoon. Jos fysiikan ilmiötä ei voida pukea tälle kielelle, on se oire siitä, että ilmiötä ei ymmärretä tarpeeksi hyvin.

Tällä diplomityöllä on kolme tavoitetta. Ensimmäinen on tarjota työkalut tämän edellä mainitun kielen ymmärtämiseen. Toisena tavoitteena on esitellä fysikaalisen luonnon matemaattinen rakenne kerros kerrokselta, differentiaaligeometrian kieltä hyväksi käyttäen. Kolmas on soveltaa opittuja työkaluja klassisen mekaniikan teorioihin.

Newtonilaista mekaniikkaa pidetään klassisen mekaniikan synonyymina, mutta on olemassa myös kaksi muuta mekaniikan muotoilua, jotka ovat newtonilaista lähestymistapaa perustavanlaatuisempia. Nämä ovat nimeltään Lagrangen ja Hamiltonin mekaniikat, joita kutsutaan myös mekaniikan pääformalismeiksi. Jotta näitä kahta mekaniikan lähestymistapaa voitaisiin ymmärtää syvällisesti, on niitä tarkasteltava geometrisesti. Varsinkin haastavimmissa mekaniikan sovelluksissa Lagrangen ja Hamiltonin lähestymistavat ovat välttämättömyyksiä.

Differentiaaligeometrian läheinen tuntemus antaa syvempää näkökulmaa fysikaalisten ilmiöiden ymmärtämiseen. Tämä diplomityö voisi toimia aiheesta kiinnostuneen yliopisto-opiskelijan ensimmäisenä differentiaaligeometrian teoksena.

Abstract

MIKKO VIRTANEN: Introduction to Lagrangian and Hamiltonian mechanics
Tampere University of Technology
Master of Science thesis, 173 pages, 5 appendix pages
November 2016
Master's Degree Programme in Mechanical Engineering
Major: Mathematical Modelling
Examiners: prof. Reijo Kouhia, prof. Lauri Kettunen
Keywords: Lagrangian mechanics, Hamiltonian mechanics, classical mechanics, differential geometry, manifold, symplectic, mathematical structure

At Finnish universities of technology, instruction in differential geometry is currently minimal, if not non-existent. However, the fact that one of the most significant applications of differential geometry is the general theory of relativity suggests that this field of mathematics also bears relevance to modern engineering physics. Differential geometry is a language that can be used to translate the theories of physics into a universally applicable mathematical form. If a given physical phenomenon cannot be translated into this language, the implication is that the phenomenon is not as yet sufficiently well understood.

The present thesis has three main purposes. The first is to provide tools for understanding the aforementioned language of differential geometry. The second is to present the mathematical structure of physical nature layer by layer, using this language. Finally, the third aim is to apply the tools provided to the theories of classical mechanics.

Newtonian mechanics is regarded as a synonym for classical mechanics, yet two other formulations of mechanics exist, which are more fundamental than the Newtonian approach. These are Lagrangian and Hamiltonian mechanics, also known as the main formalisms of classical mechanics. In order to form a profound understanding of these two approaches, they must be examined from a geometrical point of view. Especially in more challenging problems of classical mechanics, Lagrangian and Hamiltonian formulations are a necessity.

A thorough knowledge of differential geometry yields an in-depth perspective on physical phenomena. This Master's thesis could serve as the first introduction to differential geometry for a university student keen to explore the topic further.

Alkusanat

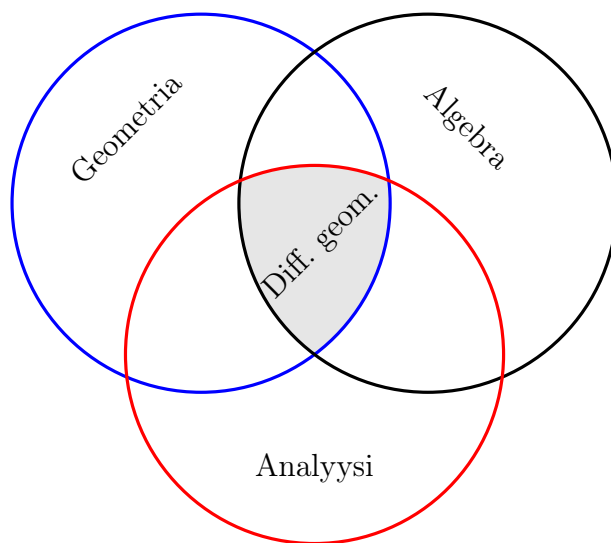
Matemaattisen fysiikan tehtävänä on pukea käsityksemme havainnoitavan maailman ilmiöistä täsmälliseen matemaattiseen muotoon eli matemaattiseen formalismiin. Matemaattinen formalismi kuuluu fysiikkaan siitä syystä, että me haluamme tutkia perusteellisesti näiden havainnoitavien ilmiöiden seurauksia.

Matemaattisen fysiikan luonne voidaan pukea vanhaan sanontaan: “ Se mitä emme osaa kertoa selkeästi, täytyy meidän pysyä siitä hiljaa”. Tarkoitetaan tällä sitä, että jos meillä on jonkinlainen havainto tai käsitys ilmiöstä maailmasta, jota havainnoimme, mitä emme kuitenkaan osaa pukea täsmälliseen matemaattiseen formalismiin, on se yleensä osoitus siitä, että jotain näkökulmaa tästä havainnosta ei ole täysin ymmärretty.

Matemaattinen fysiikka tähtää siis siihen, että nämä havainnot käännetään matemaattiselle kielelle. Mutta matematiikka on kuitenkin vain kieli, ei muuta. Jos haluamme tehdä fysikaalisia johtopäätöksiä tästä matemaattisesta kielestä, meidän täytyy osata tulkita tätä kieltä. Tämä ei ole matemaatikoiden tehtävä, vaan meidän insinöörien tehtävä, ja yleensä tässä vaiheessa asioihin alkaa tulla haastetta. Matematiikka tarjoaa siis vain ymmärtämisen apuvälineen niille asioille, joita haluamme tutkia.

Tämän diplomityön tarkoituksena on tarjota tarpeellinen matemaattinen kieli yleispätevän klassiseen mekaniikan ymmärtämiseen. Tämän diplomityön pitäisi siis vastata kysymykseen: Mitä sinun tarvitsee tietää, ymmärtääksesi Newtonin, Lagrangen ja Hamiltonin mekaniikkaa? Jos katsotaan kolmea matematiikan suurta osa-aluetta, algebraa, analyysia ja geometriaa, keskittyy tämä diplomityö pääsääntöisesti näiden kolmen leikkaukseen, jota kutsutaan differentiaaligeometriaksi.

Differentiaaligeometria nimestään huolimatta ei siis sisällä pelkkää geometriaa, vaan kaikkia näistä kolmesta osa-alueesta, geometriaa, algebraa ja analyysia. Työssä käymme ensiksi läpi differentiaaligeometrian teoriaa ja lopuksi sovellamme teoriaa Newtonin, Lagrangen ja Hamiltonin mekaniikkaan. Ajatuksena tässä diplomityössä ei ole esittää hienoja tuloksia tai monimutkaista matematiikkaa, vaan muodostaa enemmänkin siltaa insinöörien ja fyy-



Kuva 1: Matematiikan jaottelu kolmeen osa-alueeseen

sikoiden välille. Olen pyrkinyt rakentamaan tekstin niin, että lukija voisi oppia aiheesta lukemalla itse tekstiä ja esimerkkejä olisi helppo seurata. Haluan erityisesti kiittää TkT Timo Tarhasaarta, joka toimi työn ohjaajana. Hänen pitämänsä matemaattisen mallintamisen fysiikan kurssit 2014-2015 herättivät kiinnostuksen tämän diplomityön kirjoittamiseen. Kiitokset myös TkT Ilkka Kylänpäälle ja työn tarkastajille prof. Reijo Kouhialle ja prof. Lauri Kettuselle.

Tampereella 22.11.2016
Mikko Virtanen

Sisältö

1	Johdanto	1
2	Differentiaaligeometrian teoria	4
2.1	Joukko	4
2.1.1	Kuvaukset joukkojen välillä	5
2.1.2	Yhdistetty kuvaus	6
2.1.3	Identiteettikuvaus	7
2.1.4	Käänteiskuvaus	7
2.1.5	Injektio, surjektio ja bijektio	9
2.1.6	Ekvivalenssirelaatio ja -luokka	10
2.2	Topologiset avaruudet	12
2.2.1	Topologia	13
2.2.2	Potenssijoukko	13
2.2.3	Kuvauksen alkukuva	13
2.2.4	Jatkuvat kuvaukset	17
2.2.5	Jatkuvien kuvausten kompositio	18
2.2.6	Topologian periytyminen	18
2.2.7	Topologisten avaruuden ominaisuuksista	20
	Hausdorffin avaruus	20
	Kompaktisuus	22
	Parakompaktisuus	22
	Parakompakti Hausdorffin avaruus ja ykkösen ositus	22
2.3	Topologiset monistot	23
2.3.1	Koordinaatistot eli Kartat	24
2.3.2	Kartanvaihtokuvaus	28
2.3.3	Parametrisoitu käyrä	30
2.3.4	Funktio	31
2.3.5	Monistojen filosofia	32
2.3.6	Yhteenvedo	34
2.4	Multilineaarinen algebra	34
2.4.1	Vektoriavaruus	36

2.4.2	Lineaariset kuvaukset	37
2.4.3	Homomorfismien vektoriavaruus	40
2.4.4	Duaalivektoriavaruudet	41
2.4.5	Tensorit	42
2.4.6	Vektorit ja kovektorit tensoreina	43
2.4.7	Kovariantit ja kontravariantit tensorit	44
2.4.8	Kantavektorit	44
2.4.9	Duaaliavaruuksien kannat	46
2.4.10	Tensoritulo	46
	Symmetriset tensorit	47
2.4.11	Tensorien komponentit	49
2.5	Sileät monistot	51
2.5.1	Strategia	54
2.5.2	Sileiden funktioiden vektoriavaruus	56
2.6	Tangentti- ja kotangenttiavaruudet	57
2.6.1	Käyrän tangenttivektori eli nopeus	57
2.6.2	Tangenttivektoriavaruus	60
2.6.3	Nopeusvektorin komponentit	64
2.6.4	Tangenttiavaruuden kantavektorit	66
2.6.5	Vektorin komponentit kartanvaihdossa	69
2.6.6	Kotangenttivektoriavaruus	71
	Kantakovektorit	72
	Kovektorin komponentit	72
2.6.7	Kovektorin komponentit kartanvaihdossa	72
2.6.8	Tensorin komponentit kartanvaihdossa	73
2.7	Kentät	77
2.7.1	Bundlet	77
2.7.2	Sileän moniston tangenttibundle	79
2.7.3	Kotangenttibundle	81
2.7.4	Tensoribundle	81
2.7.5	Vektorikentät	82
2.7.6	Moduli	82
2.8	Konnektio	85
2.8.1	Tensorikentän suunnattu derivaatta	86
2.8.2	Konnektiokertoimet	92
2.8.3	Konnektiokertoimet kartanvaihdossa	93
2.9	Yhdensuuntaissiirrot	94
2.9.1	Vektorikenttien yhdensuuntaisena siirtyminen	95
2.9.2	Autoparalleeliyhtälöt	96
2.10	Metriikka	98
2.10.1	Metriinen tensori	99

2.10.2	Signatuuri	101
2.10.3	Riemannin monisto ja Riemannin metrinen tensori . .	103
	Pseudo-Riemannian metriikka	103
2.10.4	Käyrän pituus	103
2.10.5	Geodeesit	106
2.10.6	Levi-Civita konnektio ja Christoffelin symbolit	108
2.11	Symmetriat	109
2.11.1	Push-Forward kuvaus	109
2.11.2	Takaisinvento, Pull-Back	111
2.11.3	Vektorikentän virtaus	114
2.11.4	Lien algebra	116
2.11.5	Lien subalgebra	117
2.11.6	Symmetria	118
2.11.7	Lien derivaatta	118
2.12	Differentiaalimuodot	122
2.12.1	Wedge-tulo \wedge	126
	Differentiaalimuodot monistoilla	127
2.12.2	Interior-tulo	128
2.12.3	Exterior derivaatta d	128
2.12.4	Cartanin kaava	132
2.13	Symplektiset monistot	132
2.13.1	Darboux'n koordinaatit	133
2.13.2	Tautologinen 1-muoto θ	134
2.13.3	Hamiltonin vektorikentät	136
3	Klassinen mekaniikka	139
3.1	Newtonin mekaniikka	141
3.2	Lagrangen mekaniikka	145
	3.2.1 Euler-Lagrangen yhtälöt	147
3.3	Hamiltonin mekaniikka	153
	3.3.1 Legendre munnos	154
4	Mekaniikkojen sovellutukset	158
5	Yhteenvento	168
	Lähteet	172
	LIITE A Määritelmiä, todistuksia, kaavoja	174

Merkinnät

\mathcal{A}	Atlas
$C^\infty(M)$	sileiden funktioiden joukko
d	Exterior derivaatta, differentiaali
df	funktion f gradientti
$\dim M$	moniston dimensio M
dx^i	duaalikantavektori, kovektori
f	funktio
g	metrinen tensori
H	Hamiltonin funktio
i_X	kontraktio vektorikentällä X
id_M	identiteettikuvaus joukkolla M
L	Lagrangen funktio
\mathcal{L}_X	Lien derivaatta suuntaan X
M	Joukko
\mathcal{O}	topologia
Q	Konfiguraatioavaruus, sileä monisto
Q	Faasiavaruus, sileä monisto
$T_p M$	tangenttiavaruus pisteessä p
$T_p^* M$	kotangenttiavaruus pisteessä p
TM	tangenttibundle
$T^* M$	kotangenttibundle
v_γ	Käyrän γ tangenttivektori
x	kartta
X_p	vektori pisteessä p
X	vektorikenttä
∇	konnektio, kovariantti derivaatta

γ	parametrisoitu käyrä, trajektori, polku
$\frac{\partial}{\partial x^i}$	kantavektori
\wedge	wedge-tulo, antisymmettinen tensoritulo
\otimes	tensoritulo, symmetrinen tensoritulo
$\Gamma(TM)$	vektorikenttien joukko, $C^\infty(M)$ -moduli
$\Gamma(T^*M)$	kovektorikenttien joukko, $C^\infty(M)$ -moduli
Γ^k_{ij}	konnektiokerroin, Gamma-symboli

1

Johdanto

$(M, \mathcal{O}, \mathbf{A}_{sm}, \mathbf{g}, \nabla^{LC})$. Tämä viiden symbolin ketju on n -dimensionaalinen topologinen monisto varustettuna sileällä atlaksella, jonka konnektio on yhteensopiva Riemannin metriikan kanssa.

Tämä on se tilamalli eli avaruus, jota tarvitaan klassisen fysiikan laskentaan hukkaamatta teorian yleispätevyyttä. Työn ensimmäinen osio käsittelee differentiaaligeometriaa, jossa esitellään yllä oleva viiden symbolin rakenne. Näiden symbolien ymmärrys muodostaa hyvän pohjan myös nk. relativistiseen mekaniikkaan. Tekstin toinen osio käsittelee Newtonin, Lagrangen ja Hamiltonin mekaniikkoja, joihin sovellamme ensimmäisen osion teoriaa.

Monet teoriaosuudessa tulevat matemaattiset konseptit voivat olla insinööreille uusia. Insinöörin ei tulisi kuitenkaan pelästyä aikasemmin tuntemattomia matematiikan termejä, vaan lukea tekstiä ajatuksella läpi. Matematiikka jota työssä käytetään, ei sisällä mitään mystiikkaa. Matemaattisformaalit esitykset on jätetty tietyissä aiheissa vähemmälle, mutta tekstissä on luonnollisesti viitteet, jos lukijaa haluaa formaalimpaa esitystä käsittelyalla olevaan asiaan.

Työn toisessa osiossa, eli mekaniikan osuudessa käsittelemme pääasiassa Lagrangen ja Hamiltonin mekaniikkoja, joita kutsutaan mekaniikan pääformalismeiksi. Lagrangen ja Hamiltonin mekaniikat ovat klassisen mekaniikan formulointeja Newtonin mekaniikan rinnalle. Jokaisella näistä kolmesta lähestymistavasta on omat hyvät ja huonot puolensa.

Miksi täytyy määritellä avaruuden topologia ja mitä ovat sileät monistot? Onko monistoista insinööreille hyötyä? Mitä ovat ko-vektorit ja tensorit? Avaruuden muodon määrittelee konnektio ja jotta voitaisiin laskea käyrän pituus, tarvitsee ensiksi tietää sen vauhti. Vauhdin laskemiseksi tarvitsemme metriikkaa. Onko käsite vektori pelkkä suuruus ja suunta - nuoli jossain avaruuden pisteessä, vai onko se jotain muuta? Miksi Lagrangen ja Hamiltonin mekaniikat ovat monesti ylivertaisia Newtonin mekaniikkaan verrattuna?

Mm. näihin kysymyksiin ja väittämiin löytyy vastaukset ja perustelut tästä diplomityössä.

Tekstin rakenteesta

Jokainen tekstin kappale on tehty samaan muotoon. Kappale käsitellään seuraavanlaisen rakenteen mukaan.

Johdatus: Tarkoituksena on antaa lukijalle intuitio tarkasteltavasta asiasta. Johdatus on puhtaasti epäformaalia tekstiä, joka esittää asiaa yleisesti.

Määritelmä: Määritelmä on mahdollisimman tarkka, matemaattisesti formaali esitys asiasta.

Esimerkki: Esimerkkinä on usein laskutehtävä, jonka lukija voi seurata läpi mahdollisimman kevyesti.

Teoreema: Asiaan liittyvä teoreema, joka on hyvin käyttökelpoinen.

Todistus: Teoreeman todistus tai viittaus todistukseen.

Yhteenvedo: Yhteenvedo käsitellyistä asioista.

Määritelmistä

Määritelmät ovat rakennuspalikoita, joihin teoria perustuu. Määritelmät tulisi opetella mahdollisimman hyvin ulkoa.

Kuvat

Kuvien tarkoitus on elävoittaa tekstiä ja antaa lukijalla intuitiota konkreetiosinnin avulla. Kuvat eivät sisällä formaalia matematiikkaa.

Summausnotaatio

Tässä työssä on käytössä *summausnotaatio*, jonka kehittäjänä pidetään Albert Einsteinia. Tämä merkintätapa eli *notaatio* tunnetetaan myös nimellä *Einsteinin summausnotaatio*. Notaation ideana on yksinkertaisesti summausmerkinnän $\sum_{i=1}^n$ tekeminen näkymättömäksi. Notaatiossa käytämme nk. vapaita ja mykkiä indeksejä, jotka esiintyvät aina samassa termessä. Yhtälön

samalla puolella esiintyvien eri termien indeksit eivät liity mitenkään toisiinsa. Jos indeksejä on termissä parillinen määrä, ne summataan avaruuden dimension n yli. Näitä indeksejä, joita on parillinen määrä, kutsutaan mykiksi indekseiksi ja yksittäisiä indeksejä vapaiksi indekseiksi. Huomaa, että notaatiossa mykät eli summattavat indeksit ilmenevät termissä aina pareina ylhäällä ja alhaalla. Eikä siis pareina molempien ollessa ylhäällä tai alhaalla. Esimerkkeinä

$$X^a \partial_a := \sum_{a=1}^n X^a \partial_a \quad (1.1)$$

$$g_{ij} v^i v^j := \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n g_{ij} v^i v^j \quad (1.2)$$

$$T_{ij} v^i u^j := \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n T_{ij} v^i u^j \delta_a^i \delta_b^j \quad (1.3)$$

missä δ_b^j on Kroneckerin delta, joka määritellään

$$\delta_j^i := \begin{cases} 0 & \text{jos } i \neq j \\ 1 & \text{jos } i = j \end{cases} \quad (1.4)$$

Kroneckerin delta toimii myös ns. *korvausoperaattorina*, tarkoittaen että voit korvata termissä esiintyviä mykkiä indeksejä kroneckerin deltassa esiintyvällä vapaalla indeksillä.

$$\delta_j^i X^j = X^i \quad (1.5)$$

X :ssä esiintyvä j korvataan siis i :llä, koska määritelmän (1.4) mukaan $\delta_j^i = 1$, kun $i = j$.

2

Differentiaaligeometrian teoria

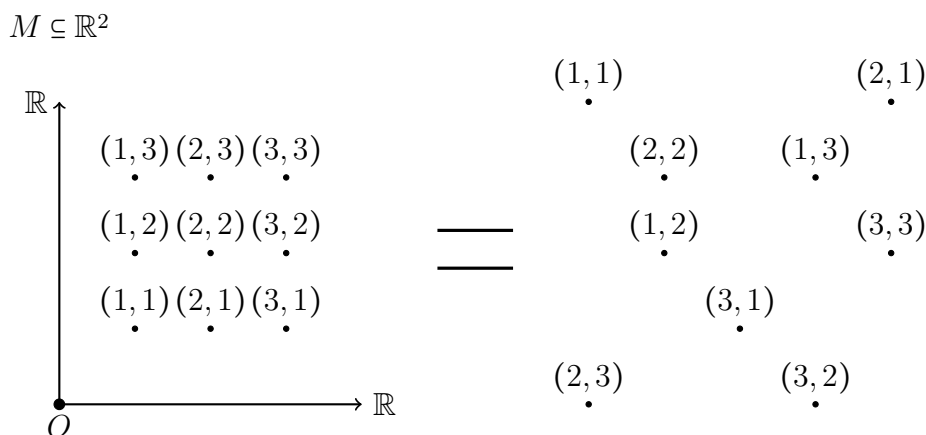
2.1 Joukko

Fysikaaliset ilmiöt tapahtuvat aina jonkinlaisessa *tilamallissa* eli *avaruudessa*. Karkeimmalla tasolla fysikaalinen avaruus on pelkkä *joukko*. Tässä työssä käytämme joukosta usein symbolia (M) . Joukko on kokoelma alkioita, joiden keskinäisellä järjestyksellä ei ole merkitystä. Joukon *alkioita* kutsutaan myös joukon *jäseniksi*, *elementeiksi* tai *pisteiksi*. Tarkastellaan aluksi yhtä hyvin tuttua joukkoa $M := \mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ eli kahden reaalityön *karteesista tuloa*.

Monesti kyseistä joukkoa \mathbb{R}^2 ajatellaan ensimmäiseksi tasona. Mutta jos avaruuden rakenne on pelkkä joukko, niin sen järjestyksellä ei ole merkitystä. Tason pisteet voisivat sijaita aivan mielivaltaisissa paikoissa ja silti joukko olisi sama. Esimerkiksi kolmen mielivaltaisen luonnollisen luvun joukko $\{2, 6, 23\}$ ja $\{23, 2, 6\}$ on yksi ja sama asia.

Joukkojen elementeistä eli alkioista voidaan muodostaa *yhdistelmiä* \cup , *leikkauksia* \cap , *negaatioita* \setminus ja *osajoukkoja* \subseteq . Jos joukossa ei ole yhtään jäsentä, on kysymys *tyhjästä joukosta* \emptyset . Joukko-opin sääntöjen mukaan, jokainen joukko sisältää osajoukkonaan aina tyhjän joukon. Jos muodostetaan joukko ”jalometallit”, sisältäisi se alkioita: kulta, hopea, platina, palladium. Tämä on *äärellinen joukko*, koska joukko sisältää äärellisen määrän jäseniä. Jos äärellinen joukko on järjestetty, on kysymys *tuplesta*.

Joukot voivat olla myös *äärettömiä joukkoja*, joissa joukon jäseniä on ääretön määrä. Joukkojen alkioiden laatua ei ole mitenkään rajoitettu, joten joukon alkioita voivat olla myös itsessään joukkoja.



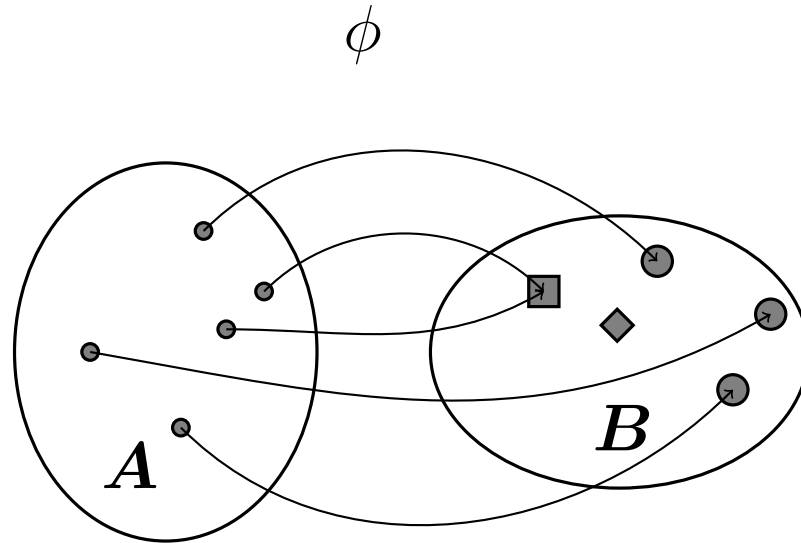
Kuva 2.1: Joukon alkioilla ei ole keskinäistä järjestystä

2.1.1 Kuvaukset joukkojen välillä

Kuvaus (engl. mapping) kertoo joukkojen välisistä riippuvuussuhteista. On erittäin hyödyllistä ymmärtää joukkojen välisiä kuvauksia. Itseasiassa kaikki jo entuudestaan tutut käsitteet, kuten parametrisoidut käyrät, vektorit, tensorit ja differentiaalit ovat kuvauksia erilaisten joukkojen välillä. Käytämme kuvausten esityksiin kahta vaihtoehtoista tapaa riippuen asiayhteydestä. Toinen on joskus havainnollisempi, kuin toinen. Esimerkkinä saman asian kahdesta esitystavasta: $\phi : A \rightarrow B$ ja $A \xrightarrow{\phi} B$. Näissä merkinnöissä A :ta kutsutaan *lähtöjoukoksi* (*domain*) ja B :tä kutsutaan *maalijoukoksi* (*codomain*, *kuva-avaruus*). Täydellisyydessään esitystapa näyttää seuraavalta

$$\begin{aligned} \phi : A &\rightarrow B \\ a &\mapsto \phi(a) \end{aligned}$$

Jossa $a \in A$ ja $\phi(a) \in B$. Ylemmällä rivillä näkyvät lähtö- ja maalijoukot, joiden välillä kuvaus ϕ tapahtuu ja alemmalla rivillä on määritelmä, kuinka lähtöjoukon alkiot kuvautuvat maalijoukon alkioiksi. Joukkojen välisessä kuvautumisessa käytetään merkintää \rightarrow ja alkoiden kuvautumisessa käytetään merkintää \mapsto . Esimerkki luetaan: Kuvaus ϕ kuvaa joukon A alkion a joukon B alkioiksi $\phi(a)$. $\phi(a)$ on a :n *kuva*, jonka ϕ määrää yksikäsitteiseksi.



Kuva 2.2: kuvaus ϕ kuvaa joukon A alkioita joukon B alkioiksi

Huomio 1 *Tärkeä asia liittyen yleisesti kaikkiin kuvauksiin: Lähtöjoukon A jokainen piste eli alkio kuvataan aina, mutta maalijoukon B jokaiseen pisteeseen ei välttämättä kuvauduta. Käytämme kuvautumisesta myös ilmaisua ”Maalijoukon pisteisiin osuminen”.*

2.1.2 Yhdistetty kuvaus

Kuvaus voidaan muodostaa vain *kahden* joukon välille, ei useamman. Meillä voi kuitenkin olla useampia kuvauksia, joita voimme yhdistää, jos tietyt ehdot toteutuvat. Jos $\phi : A \rightarrow B$ ja $f : B \rightarrow C$ eli toista esitystapaa käyttäen $A \xrightarrow{\phi} B \xrightarrow{f} C$, niin $f \circ \phi : A \rightarrow C$. Kuvausta $f \circ \phi$ kutsutaan yhdistetyksi kuvaukseksi tai kuvausten kompositioksi. Kompositiosta käytetään merkintää \circ . Huomaa, että ϕ :n maalijoukon eli codomain:n on oltava sama, kuin f :n lähtöjoukon eli domain:n. Näin meille muodostuu uusi kuvaus

$$(f \circ \phi) : A \rightarrow C$$

$$a \mapsto f(\phi(a))$$

2.1.3 Identiteettikuvaus

Ehkä kaikista yksinkertaisin kuvaus on *identiteettikuvaus*, koska siinä ei tapahdu yhtään mitään. Se kuvaa joukon alkion itsekseen samaan joukkoon. Tarkoittaen seuraavaa

$$\begin{aligned} \varphi : M &\longrightarrow M \\ m &\longmapsto m \end{aligned} \tag{2.1}$$

Käytämme identiteettikuvauksesta merkintää id_M , missä alaindeksi M viittaa joukkoon. Yllä olevassa esimerkissä kuvaus $\varphi = id_M$. Esimerkiksi identiteetti kuvaus $\tau : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ merkittäisiin $\tau = id_{\mathbb{R}^3}$.

Esimerkki 2.1.1 *Olkkoon $f : M \longrightarrow N$ ja $\varphi = id_M$ ja $\eta = id_N$. Tällöin $id_N \circ f = f \circ id_M \quad \forall f : M \longrightarrow N$.*

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & N \\ \varphi = id_M \downarrow & & \downarrow \eta = id_N \\ M & \xrightarrow{f} & N \end{array}$$

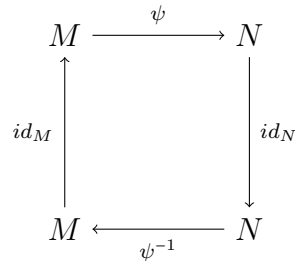
Kuva 2.3: Identiteettikuvaus

2.1.4 Käänteiskuvaus

Jos $\psi : M \longrightarrow N$ on kuvaus, niin $\psi^{-1} : N \longrightarrow M$ on ψ :n käänteiskuvaus, jos $\psi \circ \psi^{-1} = id_N$ ja $\psi^{-1} \circ \psi = id_M$. Sama asia voidaan muotoilla myös toisin ja sanoa, että ψ^{-1} on ψ :n käänteiskuvaus, jos seuraava diagrammi kommutoi¹

¹Diagrammin kommutoinnissa on kyse reitin yhdenmukaisuudesta - voit mennä lähtöjoukosta maalijoukkoon kahta reittiä muuttamatta lopputulosta. Tätä kutsutaan myös

(molempiin suuntiin).



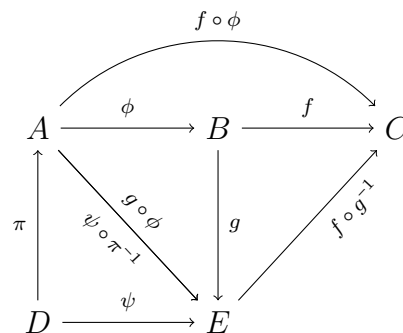
Kuva 2.4: Käänteiskuvaus

Käänteiskuvausta kutsutaan myös *inverssiksi*. Jos kuvauksella on olemassa käänteiskuvaus, niin puhutaan, että kuvaus on *käänttyvä*.

Diagrammit

Insinöörit pitävät kuvista ja kaavioista. Diagrammit ovat kuvauskaavioita, joita käytetään usein matemaattisformaalien ominaisuuksien eli predikaattien tukena. Toisinaan väittämienkin ominaisuutta havainnollistetaan kommutoivalla diagrammilla. On hyödyllistä osata tulkita diagrammeja. Alla olevaan esimerkkiin on rakennettu useita mielivaltaisia joukkoja ja niiden välisiä kuvauksia ja niiden kompositiota.

Esimerkki 2.1.2 *Kuvaus, yhdistetty kuvaus, inverssi*



Kuva 2.5: Kuvauksia ja niiden yhdisteitä

reittivapaudeksi. Kommutointi vaatimus sisältää myös vapauden lähtö- ja maalijoukon valintaan.

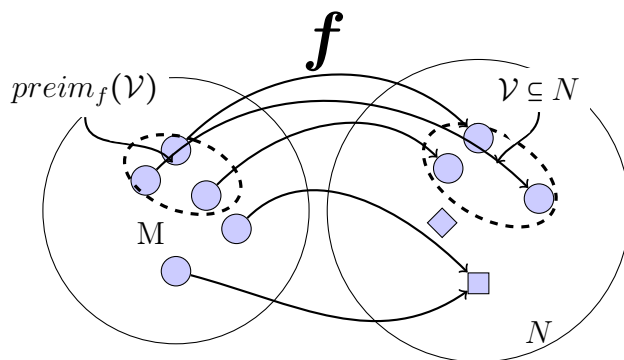
Olettaen että diagrammi kommutoi. Eri joukkojen välillä saattaa olla useita vaihtoehtoisia reittejä eli kuvauksia.

2.1.5 Injektio, surjektio ja bijektio

Katsotaan alla olevaa kuvaa. Maalijoukossa N on piste \diamond , mihin ei osuta eli kuvauduta lainkaan. Maalijoukossa on myös piste \square , mihin osutaan useammin kuin kerran.

$$f: M \xrightarrow{\text{joukko}} N \xrightarrow{\text{joukko}} \quad (2.2)$$

$$(2.3)$$



Kuva 2.6: injektio, surjektio, bijektio

Kuvaus f on :
 surjektiivinen jos $\nexists \diamond$
 injektiivinen jos $\nexists \square$

Yleisesti kuvauksen määritelmän mukaan, jokainen lähtöjoukon piste kuvautuu maalijoukolle. Mutta välttämättä jokaiseen maalijoukon pisteeseen ei osuta.

Surjektio

Jos jokaiseen maalijoukon pisteeseen osutaan, on kysymys *surjektiivisesta* kuvauksesta.

Injektio

Jos jokaiselle lähtöjoukon pisteelle on olemassa oma ainutlaatuinen parinsa maalijoukossa on kysymys *injektiivisestä* kuvauksesta. Eli lähtöjoukon eri pisteet eivät saa kuvautua samaan maalijoukon pisteeseen. Kaikkiin maalijoukon pisteisiin ei silti välttämättä tarvitse kuvautua.

Bijektio, isomorfismi

Kuvaus voi olla samaan aikaan surjektiiivinen ja injektiivinen, silloin puhutaan bijektiivisestä kuvauksesta tai bijektioista. Kun kuvaus on bijektiivinen, niin silloin kuvauksen lähtö- ja maalijoukot ovat *isomorfisia*. Tällöin kahden joukon välillä on *isomorfismi*. Bijektiivinen kuvaus ja isomorfismi (joukkojen välillä) ovat siis synonyymeja. Koska bijektiossa jokaiselle maalijoukon alkioille on oma parinsa, voidaan sille määritellä myös käänteiskuvaus. Isomorfisuudella viitataan siis kahteen joukkoon, kun bijektioilla ja isomorfismilla viitataan joukkojen väliseen kuvaukseen. Huomaa, että myöhempanä seuraavissa kappaleissa isomorfisuus saa hieman vahvemman merkityksen, kun annamme joukoille lisärakennetta.

2.1.6 Ekvivalenssirelaatio ja -luokka

Kun tulet täyteen luokkahuoneeseen, voit jaotella ihmiset opettajaan ja oppilaisiin. Toisaalta voit vaihtaa näkökulmaa ja jaotella ihmiset naisiin ja miehiin. Saman joukon jaotteluperuste saattaa vaihdella, ja voit jaotella joukon monellakin eri tapaa. *Ekvivalenssiluokittelussa* on kysymys joukon M jaottelusta pienempiin osajoukkoihin $\mathcal{U}_\alpha \subseteq M$ siten, että yksikään joukon M jäsen ei jää huomioimatta ja mitkään osajoukot eivät sisällä samoja elementtejä, eli eivät leikkaa toisiaan $\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j = \emptyset$. Nämä osajoukkojen eli *ekvivalenssiluokkien* jäsenet ovat samankaltaisia toistensa kanssa, eli muodostavat toisiinsa *ekvivalenssirelaation*. Ekvivalenssiluokan elementtiä kutsutaan sen *edustajaksi*.

Määritelmä 2.1.1 Ekvivalenssirelaatio

Jos U on joukko ja \sim sen binäärirelaatio siten, että seuraavat kolme ehtoa toteutuu

- i) refleksisyys: $\forall m \in U : m \sim m$
- ii) symmetria: $\forall m, n \in U : m \sim n \Leftrightarrow n \sim m$
- iii) transitiivisuus: $\forall m, n, p \in U : m \sim n \wedge n \sim p \Rightarrow m \sim p$

niin \sim kutsutaan *ekvivalenssirelaatioksi*.

Esimerkki 2.1.3 *Esimerkkejä ekvivalenssirelaatiosta ja ei-ekvivalenssirelaatioista*

- a) $p \sim q \Leftrightarrow$ ”p ja q ovat samaa mieltä”. Refl., symm., trans.
- b) $p \sim q \Leftrightarrow$ ”p ja q ovat sisaruksia”. Ei refl., symm., tran.
- c) $p \sim q \Leftrightarrow$ ”p on pidempi kuin q”. Ei refl., ei symm., trans.
- d) $p \sim q \Leftrightarrow$ ”p on rakastunut q:hun”. Ei refl., ei symm., ei tran.

Vain kohta a) täyttää ekvivalenssirelaation määritelmän.

Määritelmä 2.1.2 *Ekvivalenssiluokka []*

Jos \sim on ekvivalenssirelaatio joukolla M , niin jokaiselle elementille $m \in M$ määritellään joukko

$$[m] := \{n \in M \mid m \sim n\} \subseteq M \quad (2.4)$$

jota kutsutaan ekvivalenssiluokaksi.

Ekvivalenssiluokilla on kaksi erityislaatuista ominaisuutta

- 1) $a \in [m] \Rightarrow [a] = [m]$
- 2) joko $[m] = [n]$ tai $[m] \cap [n] = \emptyset$

Selitykset:

- 1) ”Jokainen ekv.luokan elementti voi toimia luokan edustajana”
- 2) ”Eri ekvivalenssiluokat eivät sisällä samoja elementtejä”

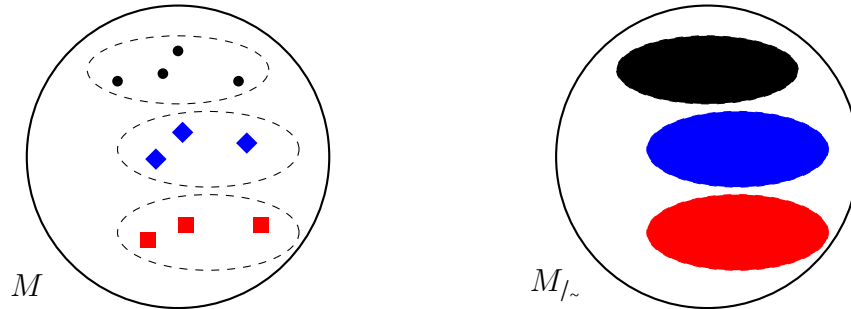
Määritelmä 2.1.3 *Tekijäjoukko.*

Jos \sim on ekvivalenssirelaatio joukolla M , niin

$$M_{/\sim} := \{ [m] \mid m \in M \} \quad (2.5)$$

on joukon M tekijäjoukko eli ekvivalenssiluokkien joukko.

Esimerkki 2.1.4 Joukko M ja tekijäjoukko M/\sim

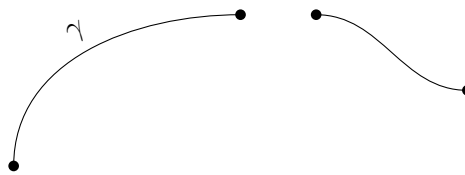


Kuva 2.7: Ekvivalenssiluokittelu ja tekijäjoukko

Tekijäjoukon määritelmässä on ideana katsoa joukkoa eri silmälaisella ja nähdä joukon eri ekvivalenssiluokkia joukon yksittäisinä alkioina.

2.2 Topologiset avaruudet

Luonnontieteilijöinä olemme kiinnostuneita ilmiöistä, jotka ovat *jatkuvia*. Voidaan sanoa, että kaikki havaitsemamme klassisen fysiikan ilmiöt ovat jatkuvia kuvauksia. Tarkoittaen sitä, että kappaleiden ja partikkeleiden liikera-dat eivät tee hyppäyksiä - ne jatkuvat. Kuvitellaan, että laiva seilaa keskellä Atlantin valtamerä, kunnes yht'äkkiä laiva hyppäisi keskelle Intian valtamerä. Tämä on klassisessa fysiikassa mahdotonta.



Kuva 2.8: Käyrä γ tekee hyppäyksen

Koska fysikaalisen ilmiön mallinnuksen tavoitteena on tuotettavan mallin edes jonkin asteinen ennustettavuus, meidän tulee vaatia jatkuvuusominaisuutta mallinnettavalta kohteelta tai ilmiöltä.

Pelkkä joukon käsite ei riitä kuvausten jatkuvuuksien tarkasteluun. Tarvitsemme avaruudelle eli joukolle *lisärakennetta*. Kevyin lisärakenne, mitä joukolle M voidaan antaa, jotta voitaisiin tarkastella kuvauksen jatkuvuutta,

on käsite nimeltä *topologia*. Ennen kuin voimme määritellä kuvausten jatkuvuutta joukkojen välillä, meidän täytyy siis tuntea molempien joukkojen topologiat. Topologia \mathcal{O} on myös joukko, joka liittyy aina tarkastelun alla olevaan joukkoon M . Kun joukkoon M on määritelty sen topologia, on kyse *topologisesta avaruudesta* (M, \mathcal{O}) . Muistamme viime kappaleesta, että pelkkänä joukkona esim. \mathbb{R}^n ei kerro meille muutakuin sen, että se sisältää reaalityyppisiä muodostuvia pisteitä. Pisteiden järjestyksestä tai avaruuden muodosta meillä ei ole vielä mitään tietoa.

2.2.1 Topologia

Kun tutkitaan kuvauksen jatkuvuutta, täytyy kuvauksen tapahtua topologisten avaruuksien välillä $(M, \mathcal{O}_M) \xrightarrow{\phi} (N, \mathcal{O}_N)$. Joukoille täytyy määritellä sellaiset topologiat \mathcal{O}_M ja \mathcal{O}_N , jotka ovat tähän jatkuvuus-käyttötarkoitukseen sopivia. Jatkuvuuteen soveltuvan topologian ideana on järjestää joukon M pisteitä tietyllä tavalla ja pitää niitä yhdessä. Käydään seuraavaksi läpi käsitteitä, joita tarvitann topologian määritelmään.

2.2.2 Potenssijoukko

Jos M on joukko, niin sen potenssijoukko $\mathcal{P}(M)$ on M :n kaikkien osajoukkojen joukko. Potenssijoukkoa (engl. Power set) havainnollistaa seuraava esimerkki, jossa tarkastellaan kolmiolkiollista äärellistä joukkoa $M := \{1, 2, 3\}$. Huom. joukko-opin mukaan tyhjä joukko \emptyset kuuluu osajoukkona jokaiseen joukkoon.

$$\begin{aligned} M &:= \{1, 2, 3\} \\ \mathcal{P}(M) &= \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\} \end{aligned} \quad (2.6)$$

Rakensimme yksinkertaisesti joukosta M kaikki mahdolliset kombinaatiot. Kolmen alkion joukosta muodostui siis kahdeksan alkion potenssijoukko - mikä on siis on joukkojen joukko. Neljän alkion joukosta muodustuisi 16 alkion potenssijoukko, viiden alkion joukosta 32 alkion potenssijoukko ja jne.

2.2.3 Kuvauksen alkukuva

Jokaisella kuvauksella on alkukuva. Alkukuva voi olla myös tyhjä joukko \emptyset . Alkukuvausta merkitään $preim_f$, jossa alaindeksi f viittaa kyseessä olevaan kuvaukseen.

Määritelmä 2.2.1 Jos $f: M \rightarrow N$ on kuvaus, niin kuvauksen f alkukuva on:

$$\begin{aligned} \text{preim}_f: \mathcal{P}(N) &\longrightarrow \mathcal{P}(M) \\ \mathcal{V} &\longmapsto \text{preim}_f(\mathcal{V}) := \{m \in M \mid f(m) \in \mathcal{V}\} \end{aligned}$$

Huomioi, että tämä ei ole sama kuin käänteiskuvaus. Kuvauksella on alkukuva, vaikka kuvaus olisi ei-kääntävä.

Määritelmä 2.2.2 Topologia

Jos M on joukko, niin topologia \mathcal{O} on osajoukko $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{P}(M)$. Topologian \mathcal{O} on toteutettava seuraavat kolme ehtoa:

$$\begin{aligned} i) \quad & \emptyset \in \mathcal{O}, M \in \mathcal{O} \\ ii) \quad & U \in \mathcal{O}, V \in \mathcal{O} \implies U \cap V \in \mathcal{O} \\ iii) \quad & A \subseteq \mathcal{O} \implies \left(\bigcup_{\alpha \in A} \alpha \right) \in \mathcal{O} \end{aligned}$$

Sama sanallisesti. Tarkastelun alla olevan joukon M topologian \mathcal{O} , täytyy toteuttaa seuraavat aksioomat:

- i) Tyhjän joukon \emptyset ja itse joukon M on kuuluttava topologiaan \mathcal{O}
- ii) Topologiasta \mathcal{O} mielivaltaisesti valitun kahden elementin U ja V leikkauksen on kuuluttava samaan topologiaan \mathcal{O}
- iii) Topologian \mathcal{O} osajoukon yhdisteiden eli unionin on kuuluttava samaan topologiaan \mathcal{O} . Joukkojen yhdisteiden määrää ei saa olla rajoitettu.

Esimerkki 2.2.1 Jos $M = \{1, 2, 3\}$ on joukko, niin

- a) $\mathcal{O}_1 = \{\emptyset, \{1, 2, 3\}\}$ on joukon M topologia
- b) $\mathcal{O}_2 = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2, 3\}\}$ ei ole joukon M topologia, sillä joukkojen $\{1\}, \{2\}$ unioni $\{1, 2\}$ ei kuulu topologiaan \mathcal{O}_2

Esimerkki 2.2.2 (Diskreetti ja indiskreetti topologia) Jos M on joukko, niin

a) $\mathcal{O}_{\text{diskr}} := \{ \emptyset, M \}$ on diskreetti topologia

b) $\mathcal{O}_{\text{kaot}} := \mathcal{P}(M)$ on indiskreetti topologia

Molemmat täyttävät topologian kolme aksiomaa ja ovat joukon M topologioita.

Määritelmä 2.2.3 Standardi topologia \mathcal{O}_{ST}
Missä joukkona on reaalityökalujen karteeminen tulo

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &:= \mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R} \\ &= \{(p_1, p_2, \dots, p_n) \mid p_i \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

Standardin topologian on kuuluttava \mathbb{R}^n :n potenssijoukkoon $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, ja sen on täytettävä topologian kolme aksiomaa.

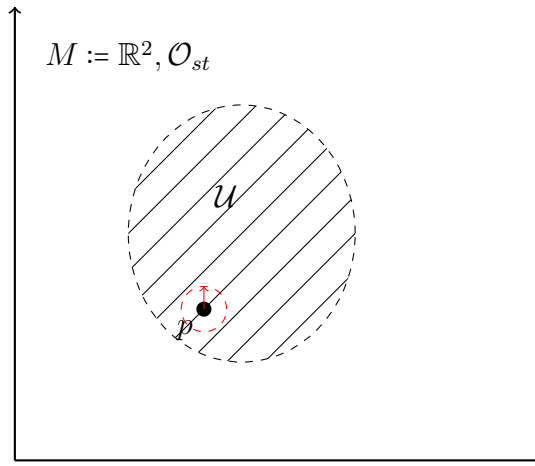
$$\mathcal{O}_{ST} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$$

RAKENNETAAN KUULA:

- 1) $\mathcal{B}_r(\mathbf{p}) := \{(q_1, q_2, \dots, q_n) \mid \sum_{i=1}^n (q_i - p_i)^2 < r^2\}$
- 2) $\mathcal{U} \in \mathcal{O}_{ST} \iff \forall p \in \mathcal{U} : \exists r \in \mathbb{R}^+ : \mathcal{B}_r(\mathbf{p}) \subseteq \mathcal{U}$

Tämä on yleisesti käytetty topologia \mathbb{R}^n :ssä ja valitaan tästä eteenpäin \mathbb{R}^n :ään ilman, että siitä erikseen mainitaan. Standardi topologia valitaan siksi, koska se antaa käyttötarkoituksiimme soveltuvan lisärakenteen. Huomaa, että standardi topologia voidaan määritellä vain \mathbb{R}^n :lle. Harjoituksena lukija voisi tarkistaa, että standardi topologia \mathcal{O}_{st} täyttää topologian määritelmän kolme aksiomaa.

Intuitio 1 Avoimesta joukosta \mathcal{U} , löytyy aina piste, jonka ympärille voidaan rakentaa r -säteinen kuula.



Kuva 2.9: Standardi topologia \mathbb{R}^n :ssä määritellään r-säteisellä pallolla

Standardi topologia \mathcal{O}_{st} on se topologia, mikä ollaan implisiittisesti oletettu \mathbb{R}^n :lle aina siitä lähtien kun olemme alkaneet laskuopin. Nyt olemme määritelleet topologian ja huomanneet, että se ei ole jotain, mikä on automaattisesti olemassa - se on meidän valintamme. Me itse määrittelemme sen valitsemaamme avaruuteen, joka karkeimmalla tasolla oli pelkkä joukko M . Kun määrittelemme joukkoon sen topologian, meillä on topologinen avaruus (M, \mathcal{O}) . Aina kun teemme vastaavanlaisia valintoja avaruudellemme, annamme avaruudelle lisärakennetta. Seuraavaksi käymme läpi terminologiaa, jota tarvitsemme jatkuvuuden määrittelyyn.

Avoin joukko

Jos M on joukko ja \mathcal{O} on se topologia, niin \mathcal{U} on *avoin joukko* jos

$$i) \quad \mathcal{U} \in \mathcal{O}$$

Suljettu joukko

Jos M on joukko ja \mathcal{O} on se topologia, niin \mathcal{V} on *suljettu joukko* jos

$$i) \quad M \setminus \mathcal{V} \in \mathcal{O}$$

Huomio 2 Joukko voi olla samalla avoin ja suljettu, avoin ja ei-suljettu, ei-avoin ja suljettu tai ei-avoin ja ei-suljettu. Ks. lisää Zermelon-Franekelin joukko-oppi valinta-aksioomalla (ZFC), halutessasi tarkempaa tietoa joukko-teoriasta.

2.2.4 Jatkuvat kuvaukset

Yleisesti kuvaus on määritelty jo pelkästään kahdelle joukolle - mitään muuta lisärakennetta ei joukoille tarvita. Jos kuitenkin haluamme tarkastella kuvausten jatkuvuutta - tarvitsemme siihen molempien joukkojen topologioita \mathcal{O} . Kuvauksen $f : M \rightarrow N$ jatkuvuus riippuu siis siitä, mitkä topologiat \mathcal{O}_M ja \mathcal{O}_N joukoille M ja N on valittu.

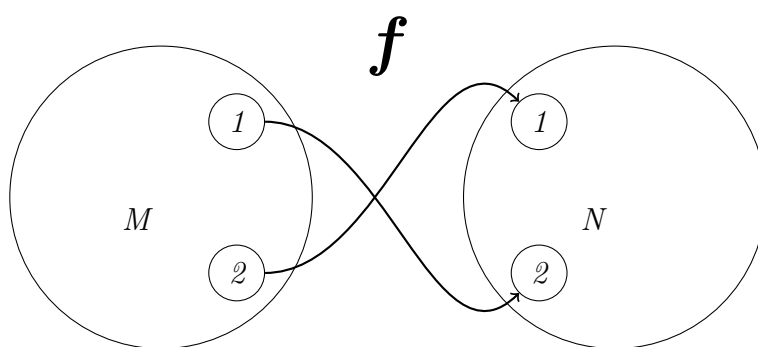
Määritelmä 2.2.4 Jos (M, \mathcal{O}_M) ja (N, \mathcal{O}_N) ovat topologisia avaruuksia, niin kuvaus

$$f : \overset{\text{top.avaruus}}{M} \longrightarrow \overset{\text{top.avaruus}}{N}$$

on jatkuva (verrattuina topologioihin \mathcal{O}_M ja \mathcal{O}_N), jos

$$\forall \mathcal{V} \in \mathcal{O}_N : \text{preim}_f(\mathcal{V}) \in \mathcal{O}_M$$

Esimerkki 2.2.3 Jos $f : M \rightarrow N$ ja $M := \{1, 2\}$ ja $N := \{1, 2\}$. Joukoille on valittu topologiat niin, että $\mathcal{O}_M := \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$ ja $\mathcal{O}_N := \{\emptyset, \{1, 2\}\}$. Kuvaus f kuvaa lähtöjoukon alkionsa siten että, $1 \mapsto 2$ ja $2 \mapsto 1$. Onko kuvaus jatkuva?



Kuva 2.10: Onko kuvaus f jatkuva?

Tarkastaaksemme onko kuvaus f jatkuva, meidän on tutkittava kuuluvatko joukon N avoimien joukkojen alkukuvat M :n avoimiin joukkoihin. Toisin

sanottuna, kuuluvatko topologian \mathcal{O}_N elementtien alkukuvat (preim) topologiaan \mathcal{O}_M ?

$$\begin{aligned} \text{preim}_f(\emptyset) &= \emptyset \in \mathcal{O}_M \\ \text{preim}_f(\{1, 2\}) &= M \in \mathcal{O}_M \\ &\Rightarrow \text{kuvaus } f \text{ on jatkuva} \end{aligned}$$

Jos kuvaus on jatkuva, niin välttämättä sen käänteiskuvaus ei ole. Harjoituksena lukija voi tarkistaa, että ylläolevan esimerkin käänteiskuvaus f^{-1} ei ole jatkuva. Tämä on intuitiivisesti hieman outoa, koska esimerkin joukot M ja N ovat aivan samat. Jos vertaa kuvausta sen käänteiskuvaukseen, ovat nekin samat. Erona on joukkojen topologiat, mihin jatkuvuuden määritelmä perustuu.

2.2.5 Jatkovien kuvausten kompositio

Jos f ja g ovat jatkuvia kuvauksia, niin myös niiden kompositio $f \circ g$ on jatkuva. Katso todistus liitteestä B (1.2). Tämä tieto on meille jatkossa hyödyllinen.

2.2.6 Topologian periytyminen

Topologian periyttäminen on erittäin hyödyllinen konsepti, koska meillä voi olla yksi tai useampiakin topologisia avaruuksia, joista voimme muodostaa uuden topologisen avaruuden. Periyttämiseen on monia tapoja, mutta yksi joka on meidän kannaltamme erittäin käyttökelpoinen on nimeltään *osajoukko topologia*.

Määritelmä 2.2.5 Jos (M, \mathcal{O}_M) on topologinen avaruus ja $S \subseteq M$, niin osajoukko topologia $\mathcal{O}|_S$, joka on peritty M :ltä on:

$$\begin{aligned} \mathcal{O}|_S &\subseteq \mathcal{P}(S) \\ \mathcal{O}|_S &:= \{ \mathcal{U} \cap S \mid \mathcal{U} \in \mathcal{O}_M \} \end{aligned} \tag{2.7}$$

Haetaan siis osajoukon $S \subseteq M$ leikkauksia M :n topologian \mathcal{O}_M elementtien \mathcal{U} kanssa. Lukija voi harjoituksena tarkistaa, että peritty osajoukko topologia $\mathcal{O}|_S$ toteuttaa topologian kolme aksiomaa. Topologian periytyminen

on erittäin kätevää esimerkiksi seuraavassa tapauksessa, jossa oletamme $\phi : M \rightarrow N$ olevan jatkuva kuvaus. Jos tiedämme topologiat \mathcal{O}_M ja \mathcal{O}_N , niin voimme helposti rakentaa uuden topologian S :lle ja sitä kautta muodostaa uuden jatkuvan kuvauksen $\phi|_S$.

$$\begin{array}{ccc} & \phi|_S & \\ & \curvearrowright & \\ S \subseteq M & \xrightarrow{\phi} & N \end{array}$$

Kuva 2.11: Topologian periytyminen

Otetaan esimerkiksi $M := \mathbb{R}^n$ jolla on standardi topologia \mathcal{O}_{st} . Nyt jos $S \subseteq M$, niin voimme periyttää topologian S :lle M :ltä. Vaikka S :n topologia on peritty \mathbb{R}^n :ltä, kyseessä ei ole standardi topologia vaan *osajoukko topologia*. S voisi esimerkiksi olla pallon pinta, joka määritellään $S := \mathbb{S}^2 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = r\}$. Tämä selvästi on osajoukko $\mathbb{S}^2 \subseteq \mathbb{R}^3$.

Homeomorfismi

Homeomorfismi on topologisten avaruuksien bijektio. Kaksi topologista avaruutta ovat homeomorfisia, jos niiden välillä oleva bijektiivinen kuvaus on myös molempiin suuntiin jatkuva. Tästä puhutaan myös topologisten avaruuksien isomorfismina. Huomaa, että isomorfismi on yleispätevä sana, joka tarkoittaa eri rakenteilla eri asiaa.

Huomio 3 *Muistetaan, että määrittelimme avaruuden topologian, ja erityisesti standardin topologian \mathcal{O}_{st} , koska olemme kiinnostuneita kuvausten jatkuvuudesta. \mathcal{O}_{st} on siis meidän valintamme ja se sopii myöhempään käyttö-tarkoitukseemme loistavasti. Toki sinulla voisi olla eri tarkoitusperät mielessä ja määritellä avaruudelle jonkin muun topologian.*

Joukko-kappaleen alussa annettiin esimerkki joukosta \mathbb{R}^2 , kun ajateltiin sen olevan taso. Pystyit sekoittamaan pisteet mielivaltaiseen järjestykseen joukon pysyessä samana. Otetaan sama esimerkki, mutta ajatellaan \mathbb{R}^2 :n tasona olevan topologinen avaruus $(\mathbb{R}^2, \mathcal{O}_{st})$. Taso muuttuu topologian lisäyksen seurauksena yhtenäiseksi ja et enään pysty sekoittamaan pisteitä, koska se rikkoisi topologian ja kuvaukset eivät olisi enään jatkuvia. Mutta voit silti venyttää, puristaa tai taittaa tasoa, aivan kuten haluat. Meidän topologiamme toimii ikäänkuin pisteiden elastisena liimana. Huomio kuitenkin se, että pelkkien topologisten avaruuksien muodosta emme voi sanoa mitään. Tämän takia topologit puhuvat kahvikupin ja donitsin olevan heille yksi ja sama asia.

2.2.7 Topologisten avaruuden ominaisuuksista

Nyt olemme käsitelleet topologisen avaruuden ja puhuneet kuvausten jatkuvuudesta. Päämääränämme on rakentaa nk. topologinen monisto, jota käsittelemme seuraavassa kappaleessa. Meillä on nyt siihen tarvittavat työkalut olemassa. Mutta ollaksemme teoriassa täsmällisiä, meidän pitää esitellä topologisen avaruuden kaksi *topologista ominaisuutta*, jotta voisimme esitellä moniston formaalin määritelmän. Nämä kaksi ominaisuutta ovat nimeltään Hausdorff ja parakompakti. Nämä ominaisuudet eivät ole insinöörien kannalta kovin kaunista luettavaa, koska ne vaativat paljon uutta termistöä, ja formaalit esitykset saattavat olla pitkiä. Syy minkä takia, nämä määritelmät täytyy kuitenkin esittää, on karkeasti sanottuna moniston integroituvuuden takaaminen. Lukija voi halutessaan hypätä suoraan seuraavaan kappaleeseen, koska nämä topologiset ominaisuudet eivät ole tavoittemme kannalta kovinkaan oleellisia, mutta teorian yleispätevyyden kannalta välttämättömiä.

Puhtaasti matematiikkaa ajatellen, monissa tilanteissa topologisille avaruuksille on hyvinkin hyödyllistä määrittää erilaisia *topologisia ominaisuuksia*. Kyseiset ominaisuudet saattavat helpottaa esimerkiksi teoreemien todistuksissa tai auttavat ymmärtämään käsiteltävää asiaa paremmin. Kirjallisuudessa puhutaan erikseen topologisista separointi ominaisuuksista, joita merkitään monesti kirjaimilla $T1, T2, \dots, TN$. Meidän kannalta oleellinen on $T2$ separointiominaisuus, jota kutsutaan, nimellä *Hausdorffin avaruus*. Topologiasta ja ominaisuuksista voi lukea lisää esim. lähteestä [2].

Hausdorffin avaruus

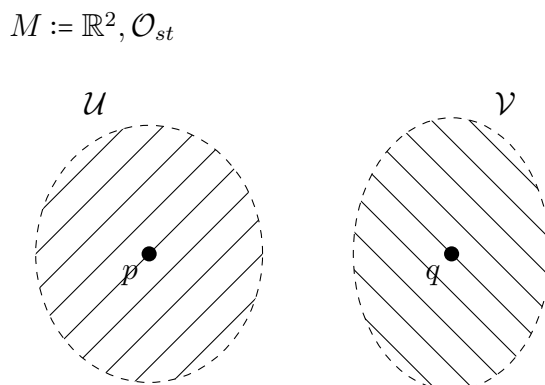
Määritelmä 2.2.6 *Topologinen avaruus (M, \mathcal{O}) on Hausdorffin avaruus, jos kahdelle eri pisteelle $(p \neq q)$*

$$\exists \mathcal{U} \in \mathcal{O}_p, \mathcal{V} \in \mathcal{O}_q : \mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \emptyset \quad (2.8)$$

missä $\mathcal{O}_p := \{\mathcal{U} \in \mathcal{O} \mid p \in \mathcal{U}\}$ ja $\mathcal{O}_q := \{\mathcal{V} \in \mathcal{O} \mid q \in \mathcal{V}\}$.

Intuitio 2 *Kahdelle pisteelle löytyy pistevieraat² ympäristö.*

²Pistevieraan on synonyymi on Erilliset joukot. Erillisillä joukoilla ei ole yhtään yhteistä alkioita



Kuva 2.12: Hausdorffin avaruus. On olemassa kahden pisteen leikkaamattomat ympäristöt

Seuraava terminologiaa tarvitsemme kompaktien ja parakompaktien avaruuksien määritelmässä.

Määritelmä 2.2.7 *Avoin peite.* Jos (M, \mathcal{O}) on topologinen avaruus, niin $C \subseteq \mathcal{O}$ on avoin peite jos

$$\bigcup C = M \quad (2.9)$$

Määritelmä 2.2.8 *Äärellinen osapeite.* Jos C on topologisen avaruuden (M, \mathcal{O}) peite, niin $\tilde{C} \subset C$ on äärellinen osapeite, jos

$$\tilde{C} \text{ on peite ja se on äärellinen} \quad (2.10)$$

Määritelmä 2.2.9 *Avoin jaloste³ (engl. refinement).* Topologisen avaruuden (M, \mathcal{O}) peitteen C jaloste $D \subseteq \mathcal{O}$ on peite, siten että

$$\forall U \in D \exists \tilde{U} \in C : U \subseteq \tilde{U} \quad (2.11)$$

³Osapeite on aina jaloste, mutta jaloste ei ole aina osapeite

Määritelmä 2.2.10 *Lokaalisti äärellinen. Jalostetta D , sanotaan lokaalisti äärelliseksi jos*

$$\forall p \in M : \exists \mathcal{U} \in \mathcal{O}_p : \mathcal{V} \cap \mathcal{U} \neq \emptyset \quad (2.12)$$

missä $\mathcal{V} \in \tilde{C}$ ja $\mathcal{O}_p := \{\mathcal{U} \in \mathcal{O} \mid p \in \mathcal{U}\}$.

Kompaktisuus

Kompaktisuus on topologisen avaruuden ominaisuus, jonka esittelyn motivaationa on ymmärtää myöhemmin määriteltävää parakompaktisuusominaisuutta. Kompaktisuus on suhteellisen vahva ominaisuus, jonka todistaminen on välillä hankalaa.

Määritelmä 2.2.11 *Topologinen avaruus (M, \mathcal{O}) on kompakti, jos sen jokaisella avoimella peitteellä on äärellinen osapeite.*

Kompaktisuus-ominaisuuden tekee vahvaksi äärellisen osapeitteen predikaatti. Yksinkertainen esimerkki on reaalilukujoukko \mathbb{R} varustettuna \mathcal{O}_{st} topologialla. Et pysty muodostamaan avaruudelle äärellistä osapeitettä.

Parakompaktisuus

Parakompaktius on kompatiutta paljon heikompi ominaisuus. Topologisia avaruuksia, jotka eivät ole parakompakteja on itseasiassa todella vaikea löytää. Voidaan karkeasti sanoa, että lähes kaikki topologiset avaruudet ovat parakompakteja.

Määritelmä 2.2.12 *Topologinen avaruus (M, \mathcal{O}) on parakompakti, jos sen jokaisella avoimella peitteellä C on avoin ”jaloste” (engl. Refinement) \tilde{C} , joka on lokaalisti äärellinen.*

Parakompakti Hausdorffin avaruus ja ykkösen ositus

Teoreema 2.2.1 *Hausdorffin avaruus (M, \mathcal{O}) on parakompakti jos ja vain jos sen jokainen avoin peite hyväksyy ykkösen osituksen.*

Katso todistus esim. lähteestä [2]. Ideana parakompaktin Hausdorffin avaruuden esittelyssä on siinä, että meillä olisi yleispätevä nimitys avaruudelle, jossa pystymme suorittamaan integrointia, kun saamme sille vielä hieman lisärakennetta. Tämä ykkösen ositus liittyy juurikin avaruuden integroituvuuteen, mutta tarkempi selvitys jätetään lukijan harrastuneisuuden varaan, koska se on tavoitteemme kannalta irrelevanttia. Ks. lisää [9, s. 50]

2.3 Topologiset monistot

Viime kappaleessa määrittelimme topologisen avaruuden ja sen kaksi ominaisuutta. Nimitimme tätä topologista avaruutta parakompaktiksi Hausdorffin avaruudeksi. Topologisilla avaruuksilla on olemassa lukemattoman paljon erilaisia ominaisuuksia - niitä on niin paljon, että matemaatikot eivät pysty edes tekemään listaa näistä kaikista. Parakompaktilla Hausdorffin avaruudella on ne ominaisuudet, joista me insinööreinä olemme kiinnostuneita. Pystymme tutkimaan kuvausten jatkuvuutta, ja voimme olla varmoja siitä, että integroinnin kanssa ei tule jatkossa ongelmia.

Seuraavaksi esittelemme uudenlaisen topologisen avaruuden, jota kutsutaan *topologiseksi monistoksi*. Tämä on niin erityislaatuinen topologinen avaruus, että se ansaitsee oman nimensä. Hyvin karkeasti sanottuna, tämä topologinen avaruus näyttää lokaalisti Euklidiselta avaruudelta \mathbb{R}^n . Formaali määritelmä on seuraava:

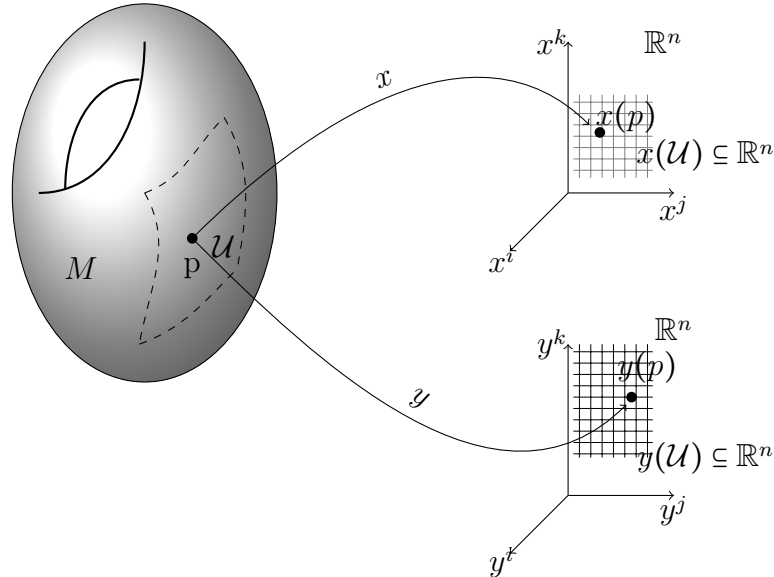
Määritelmä 2.3.1 *Parakompakti Hausdorffin avaruus (M, \mathcal{O}) on n -ulotteinen topologinen monisto, jos*

$$\forall p \in M : \exists \mathcal{U} \in \mathcal{O} : \exists x : \mathcal{U} \longrightarrow x(\mathcal{U}) \subseteq \mathbb{R}^n \mid x(\mathcal{U}) \in \mathcal{O}_{st}, p \in \mathcal{U}$$

- i) $x^{-1} : x(\mathcal{U}) \longrightarrow \mathcal{U}$
- ii) x on jatkuva $(\mathcal{U}, \mathcal{O}_{\mathcal{U}})$ vs. $(\mathbb{R}^n, \mathcal{O}_{st})$
- iii) x^{-1} on jatkuva $(\mathbb{R}^n, \mathcal{O}_{st})$ vs. $(\mathcal{U}, \mathcal{O}_{\mathcal{U}})$

On siis oltava olemassa kuvaus x , joka on kääntyvä, ja molempiin suuntiin jatkuva. Tämä tarkoittaa että kuvaus $x : \mathcal{U} \longrightarrow x(\mathcal{U}) \subseteq \mathbb{R}^n$ on *homeomorfismi*. Tämä kuvaus x on nk. kartta eli *karttakuvaus*. Jatkossa käytämme karttakuvauksesta myös notaatiota y ja myöhemmin klassisen mekaniikan osuudessa q :ta. Lukija voi katsoa topologisen moniston määritelmän myös

liitteestä [1, s. 3].



Kuva 2.13: Karttakuvaus x ja $y : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$

2.3.1 Koordinaatistot eli Kartat

Edellisen määritelmän kuvaus $x : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$ on kartta- eli koordinaatistokuvaus. Käytämme kartoista seuraavaa terminologiaa

- (\mathcal{U}, x) on (M, \mathcal{O}) :n kartta eli koordinaatisto missä $\mathcal{U} \subseteq M$ ja $\mathcal{U} \in \mathcal{O}_M$. Eli \mathcal{U} on jokin alue M :ltä, joka kuuluu myös M :n topologiaan. Puhutaan, että \mathcal{U} on avoin joukko M :llä.
- $\mathcal{A} = \{(\mathcal{U}_\alpha, x_\alpha) \mid \alpha \in \mathbb{N}\}$ on *Atlas*, jos $M = \bigcup_{\alpha \in \mathbb{N}} \mathcal{U}_\alpha$. Jotta voidaan puhua Atlaksesta, koko avaruus M , pitää pystyä rakentamaan sen erillisten alueiden \mathcal{U}_α yhdisteistä.
- Karttakuvaus x täydellisyydessään on:

$$x : \mathcal{U} \rightarrow x(\mathcal{U}) \subseteq \mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}}_{n \text{ kpl}}$$

$$p \mapsto x(p) := (x^1(p), x^2(p), \dots, x^n(p)) \quad | \quad x^i : \mathcal{U} \mapsto \mathbb{R}$$

Karttakuvaus ja sen koordinaattifunktiot

- (\mathcal{U}, x) on kartta. Monesti jätämme alueen \mathcal{U} mainitsematta ja puhumme vain kartasta x . Huomaa, että $x := (x^1, x^2, \dots, x^n)$ eli

$$\left. \begin{array}{l} x^1 : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R} \\ x^2 : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R} \\ \vdots \\ x^n : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R} \end{array} \right\} \iff x : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$$

- $x^i : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ ovat kartan (\mathcal{U}, x) *komponenttifunktioita* tai *koordinaattifunktioita*.
- jos p on piste ja $p \in \mathcal{U}$, niin $x^1(p)$ on pisteen p ensimmäinen *koordinaatti* kartassa (\mathcal{U}, x) . $x^2(p)$ on pisteen p toinen koordinaatti jne..
- Yhtä hyvin voitaisiin valita Atlaksesta \mathcal{A} eri kartta (\mathcal{U}, y) , jossa koordinaatit ovat eri numeroita kuin kartassa (\mathcal{U}, x) .

Atlaksen kartat ovat erittäin hyödyllisiä, mutta niillä ei ole mitään tekemistä fysiikan kanssa. Jos sinun pitäisi piirtää kotikaupungistasi kaksi karttaa, ja ensimmäiseen laitat asuintalosi origoon ja toiseen sijoitat sen pisteeseen $(34,7)$, niin liikkuko talosi pois paikaltaan fyysisesti? Minkälaista olisi fysiikka, jos systeemien liikeradat muuttuisivat riippuen siitä, millaista karttaa niiden kuvaamiseen käytetään? Jos näin olisi, tekisimme *kartan valinnasta riippuvaa* fysiikkaa. Me haluamme kuitenkin tehdä *kartan valinnasta riippumatonta* fysiikkaa. Aina kun valitset kartan, valitset koordinaatit. Jos valitset eri kartan, valitset eri koordinaatit. Toinen kartta ei ole yhtään sen oikeampi, kuin toinen. Jotkut kartat ehkä havainnollistavat todellista maailmaa paremmin, kuin toiset. Me tarvitsemme kyllä karttoja, mutta käytämme niitä kuvaamaan todellista maailmaa, kuten itse parhaaksi näemme. Ongelma on siinä, että minä en tiedä, mitä sinun parhaaksi näkeminen tarkoittaa. Meidän täytyy tehdä selkeä ero siihen, mikä on todellista maailmaa ja mikä mielikuvituksemme tuotetta. Aina kun puhumme monistoista, vedämme analogian todelliseen maailmaan, kun taas puhumme koordinaateista ja kartoista, olemme tehneet valinnan, joka perustuu omaan mielikuvitukseemme. Käytämme tästä eteenpäin topologisesta monistosta notaatiota M , sen sijasta että kirjoittaisimme sen kokonaisuudessaan $(M, \mathcal{O}, \mathcal{A})$.

Esimerkki 2.3.1 *Topologisen moniston $(\mathbb{S}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{S}^1 | \mathbb{S}^1}, \mathcal{A})$ rakennus*

Tarkastellaan reaalityöparien (a, b) joukkoa $\mathbb{S}^1 := \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid a^2 + b^2 = 1\}$. Joukko on varustettu topologialla $\mathcal{O}_{\mathbb{S}^1 | \mathbb{S}^1}$, joka on peritty \mathbb{R}^2 :n standardista

topologiasta \mathcal{O}_{st} .

Kun rakennetaan topologista avaruutta monistoksi, täytyy löytää karttakuvaukset jotka ovat homeomorfismeja ja joiden domainit kattavat koko topologisen avaruuden joukon \mathbb{S}^1 .

Tehdään aluksi testi ja katsotaan karttakuvauksen yritettä $x : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}$, joka kuvaa parin \mathbb{S}^1 :ltä ensimmäiseksi argumenttikseen \mathbb{R} :lle

$$\begin{aligned} x : \mathbb{S}^1 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (a, b) &\mapsto a \end{aligned}$$

Onko kuvaus homeomorfismi? Ei ole, koska kuvaus ei ole injktiivinen eikä surjekttiivinen. Esim. $x(0, -1) = 0$ ja $x(0, 1) = 0$. Kyseinen kuvaus ei ole siis kelvollinen kartaksi.

Muokataan kuvausta x hajoittamalla se kahteen osaan x_{\uparrow} ja x_{\downarrow} tekemällä samalla kuvausten lähtö- ja maalijoukkoihin sellaiset muutokset, että kuvauksista tulee injktiiviset ja surjekttiiviset.

$$\begin{aligned} x_{\uparrow} : \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid a^2 + b^2 = 1 \mid b > 0\} &\rightarrow (-1, 1) \\ (a, b) &\mapsto a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_{\downarrow} : \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid a^2 + b^2 = 1 \mid b < 0\} &\rightarrow (-1, 1) \\ (a, b) &\mapsto a \end{aligned}$$

Huomaa, että kuvauksien maalijoukon sulkeilla viitataan reaalityväliin, eikä pisteeseen. Nyt molemmat kuvaukset ovat injktiivisiä. Nämä kaksi karttaa eivät kuitenkaan riitä, koska karttojen domainit eivät sisällä pisteitä $(1, 0)$ ja $(-1, 0)$, jotka ovat joukon \mathbb{S}^1 pisteitä. Tarvitsemme lisää karttoja. Rakennetaan seuraavaksi vastaavanlaiset injktiiviset kuvaukset y_{\uparrow} ja y_{\downarrow} , jotka kuvaavat parin \mathbb{S}^1 :ltä toiseksi argumenttikseen \mathbb{R} :lle

$$\begin{aligned} y_{\uparrow} : \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid a^2 + b^2 = 1 \mid a > 0\} &\rightarrow (-1, 1) \\ (a, b) &\mapsto b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_{\downarrow} : \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid a^2 + b^2 = 1 \mid a < 0\} &\rightarrow (-1, 1) \\ (a, b) &\mapsto b \end{aligned}$$

Ovatko yllä muodostetut neljä kuvausta kääntyviä? Kyllä, koska injektii-
visyyden lisäksi ne ovat surjektivisiä, joten ne ovat bijektivisiä. Tällöin
käänteiskuvaus on olemassa. Esim. kuvauksen y_{\uparrow} käänteiskuvaus on

$$y_{\uparrow}^{-1} : (-1, 1) \longrightarrow \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid a^2 + b^2 = 1 \wedge a > 0\}$$

$$(\alpha) \longmapsto (\sqrt{1 - \alpha^2}, \alpha)$$

Seuraava kohta ei liity moniston rakennukseen, muuta voimme tarkastella
myös toisiaan leikkaavien karttojen domaineja ja muodostaa nk. kartan-
vaihtokuvauksia. Esim. kuvausten x_{\uparrow} y_{\uparrow} domainien leikkaukset muodostavat
seuraavanlaisen joukon

$$\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid a^2 + b^2 = 1 \mid a > 0, b > 0\}$$

ja näistä voidaan muodostaa kuvaus

$$x_{\uparrow} \circ y_{\uparrow}^{-1} : (0, 1) \longrightarrow (0, 1)$$

$$s \longmapsto x_{\uparrow}(\sqrt{1 - s^2}, s) = \sqrt{1 - s^2}$$

Jos rakennamme Atlaksen tällä tavalla, tarvitsemme yhteensä neljä karttaa.
Näiden neljän kartan domainit kattavat koko joukon \mathbb{S}^1 seuraavalla tavalla.

$$x_{\uparrow} \text{ ja } x_{\downarrow} : \mathbb{S}^1 \setminus \{(1, 0), (-1, 0)\}$$

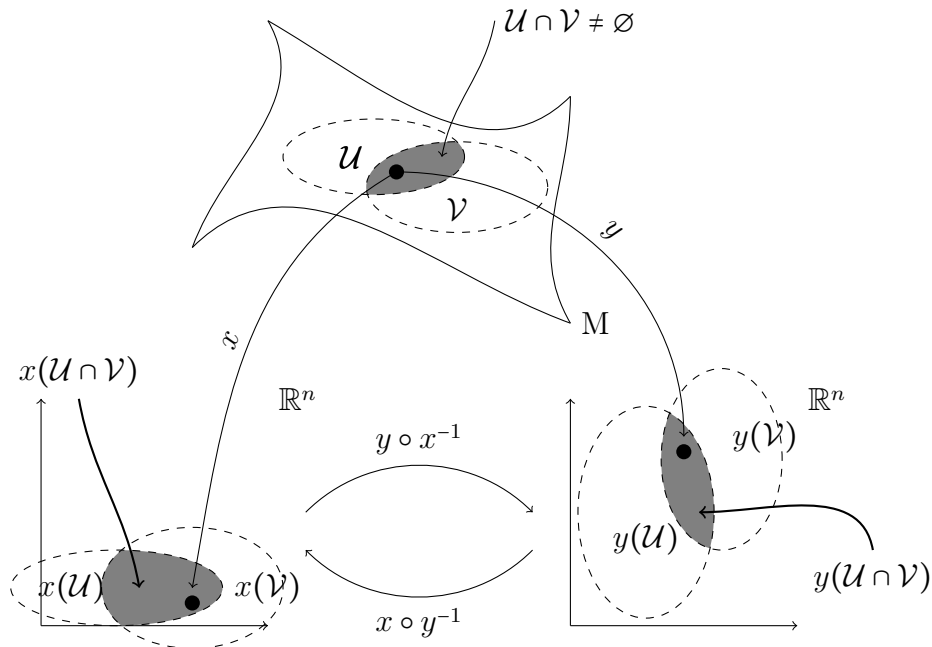
$$y_{\uparrow} \text{ ja } y_{\downarrow} : \mathbb{S}^1 \setminus \{(0, 1), (0, -1)\}$$

Koska kartat ovat homeomorfismeja ja niiden domainit kattavat koko
joukon \mathbb{S}^1 , voidaan näiden neljän kartan kokoelmaa $x_{\uparrow}, x_{\downarrow}, y_{\uparrow}, y_{\downarrow}$ kutsua
($\mathbb{S}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{S}^1|_{\mathbb{S}^1}}$):n Atlakseksi. Tämä esimerkki oli vain yksi tapa rakentaa
topologinen monisto. Samalle topologiselle avaruudelle $\mathbb{S}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{S}^1|_{\mathbb{S}^1}}$ voidaan
muodostaa Atlas monilla muillakin eri tavoilla, joilla voidaan selvittää ja
selvitäänkin pienemmällä määrällä karttoja.

Huomio 4 Notaatiossa koordinaattifunktioiden yläindeksit (x^1, x^2, \dots, x^n) tai (y^1, y^2, \dots, y^n) eivät ole potenssimerkintöjä vaan indeksejä. Normaalisti olet tottunut käyttämään esim. polaarikoordinaatistossa (\mathbb{R}^2) merkintää (r, ϕ) . Meidän notaatiossamme sama olisi $(y^1(p), y^2(p))$, kun käytössä on polaarikartta (\mathcal{U}, y) .

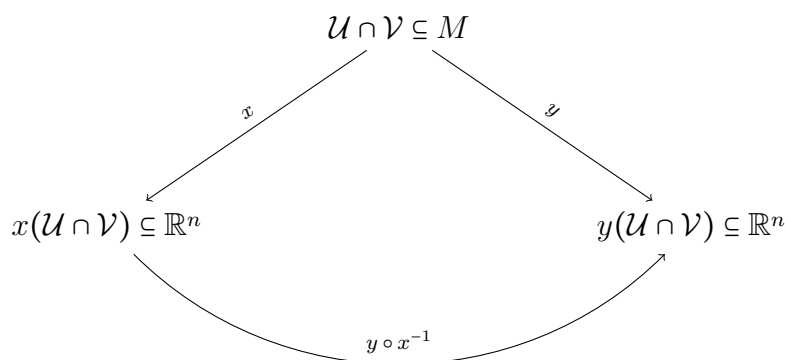
2.3.2 Kartanvaihtokuvaus

Moniston Atlaksessa voi olla useita karttoja, joissa näkyy sama moniston piste p . Piste on tällöin kuvattuna eri koordinaateilla jokaisessa näissä kartoissa. Jos piste p näkyy useammassa, kuin yhdessä kartassa, tarkoittaa se sitä, että karttojen domainit eli lähtöjoukot leikkaavat. Karttojen leikkaus ei ole silloin tyhjä joukko \emptyset . Jos ajatellaan vanhaa karttakirjaa, voisit löytää kotikaupunkisi kartan sivulta 7, 15 ja 23 hieman eri kuvakulmassa. Fysiikassa on erittäin hyödyllistä tietää, miten sivun 7 kartan koordinaatit esitetään sivun 23 kartan koordinaateissa. Esimerkiksi kontinuumimekaniikassa kappaleen deformaatiota käsitellään materiaali- ja spatiaalikuvausissa. Nämä kaksi kuvausta ovat täysin sama asia, mutta vaan eri kartoilla kuvattuna. (Tästä sovellus myöhemmin). Tarkastellaan seuraavaksi monistoa M , kahta sen aluetta \mathcal{U} ja \mathcal{V} , jotka leikkaavat toisensa ja niiden karttakuvauksia x ja y vastaavasti.



Kuva 2.14: koordinaatiston muunnos

Kartan pisteiden kuvauksia eri kartoilla kutsutaan koordinaatiston muunnoksiksi, jotka ovat lukijalle varmasti hyvinkin tuttuja. Nyt puetaan asia monistojen kielelle. Koordinaatiston muunnoksen sääntö monistoilla on seuraava, katsotaan samalla kuvaa 2.14. Jos halutaan esittää pisteen p kartan (\mathcal{U}, x) koordinaatit kartalla (\mathcal{V}, y) , niin sinun täytyy mennä ensiksi ylös monistolle käyttäen käänteiskuvausta x^{-1} ja sieltä karttaan y käyttäen sen kuvausta. Tämä luetaan $y \circ x^{-1}$. Sama toimii luonnollisesti myös toiseen suuntaan $x \circ y^{-1}$. Puhumme *kartanvaihtoista*, koska siirrymme yhdestä kartasta toiseen. Kuva 2.14 esitetään käyttäen formaalimpaa esitystapaa seuraavasti:



Kuva 2.15: kartanvaihtokuvaus, formaali esitystapa

Moniston määritelmän mukaan vaadimme, että Atlaksen kartat ovat kääntyviä ja jatkuvia molempiin suuntiin. Muistetaan Topologia-kappaleen lopusta, että jatkuvien kuvausten kompositiot ovat jatkuvia, joten kartanvaihtokuvausten $y \circ x^{-1}$ on oltava jatkuva. Olemme myös puhuneet, että kartat ovat mielikuvituksemme tuotetta. Kun teemme koordinaatiston muunnoksen, siirrymme siis yhdestä mielikuvituksemme tuotteesta toiseen. Kun tarkastellaan kartanvaihtokuvausta $y \circ x^{-1}$, huomataan, että se on kuvaus $y \circ x^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Tätä olemme tehneet aina matematiikan peruskursseista lähtien. Muuntaneet esim. karteesiset koordinaatit polaarikoordinaateiksi. Olemme siirtynyt siis \mathbb{R}^n :stä \mathbb{R}^n :ään. Emme ole vain tienneet moniston olemassa olosta, joka istuu kuvassa ylhäällä. Monisto on se paikka, josta kuvaukset eri koordinaatistoihin ovat peräisin.

Monesti kun alamme tehdä fysiikkaa, olemme tietämättömiä monistoista ja aloitamme karteesisesta koordinaatistosta (\mathbb{R}^n). Siinä olemme tottuneet ajattelemaan, ja se on se mukavin koordinaatisto. Sitten saatamme huomata, että

asiat kannattaakin tehdäkin yleistetyissä koordinaateissa, kuten pallo- tai polaarikoordinaateissa. Siirrymme siis edes takaisin näissä koordinaatistoissa. Tämä on kätevää ja asiat yleensä toimivat näin edetessä - ei ongelmia. Tässä lähestymistavassa on vain yksi suuri filosofinen ongelma. Teemme nimittäin olettamuksen, että \mathbb{R}^n :llä olisi jotain tekemistä todellisuuden kanssa.

Tämä saattoi olla Albert Einsteinin yksi suurimmista oivalluksista, mikä antoi lähtölaukauksen hänen yleiselle suhteellisuusteorialleen, jonka hän esitti v. 1915. Einstein nimittäin perusti yleisen suhteellisuusteorian periaatteelle: ”Jumala ei ole asettanut aika-avaruuden⁴ pisteille mitään tiettyä suosikki koordinaatistoaan”[7, s. 155]. Monisto-ajattelumallissa hieno piirre on siinä, että voit laskea kätevästi näissä kartanvaihtokuvauksissa $y \circ x^{-1}$, mutta et silti unohda, että todellinen maailma monistona on se, mitä haluat oikeasti mallintaa. Tiedät koko ajan, millaisia olettamuksia olet tehnyt.

Kartanvaihtokuvaukset sisältävät lisäksi erittäin tärkeää tietoa. Voit nimittäin rakentaa koko moniston näistä kartoista, joiden domainit eli lähtöjoukot leikkaavat toisiaan. Epämuodollisesti sanottuna, kartanvaihtokuvaukset sisältävät ohjeet, kuinka Atlaksen kartat liimataan yhteen.

Voit ajatella asiaa niin, että revit maapallon karttakirjan kaikki sivut irti ja asetat toisiaan leikkaavat kartat päällekkäin ja liimaat ne yhteen. Saatat ehkä joutua taittamaan sivuja hieman, mutta näin sinulla on kartoista rakennettuna koko maapallo.

Karttojen punainen lanka on siinä, että niiden merkitys tulee esille vasta, kun alamme liimaamaan karttoja yhteen, käyttäen näitä kartanvaihtokuvauksia $y \circ x^{-1}$.

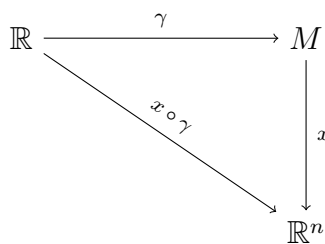
2.3.3 Parametrisoitu käyrä

Parametrisoitu käyrä (trajektori, polku) on kuvaus, jota tulemme käyttämään paljon. Se on kuvaus $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow M$. Lähtö- ja maalijoukot ovat monistoja $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_{st}, \mathcal{A})$ ja $(M, \mathcal{O}_M, \mathcal{B})$, vastaavasti.

$$\begin{array}{ccc} & (\mathbb{R}, \mathcal{O}_{st}, \mathcal{A}) & (M, \mathcal{O}_M, \mathcal{B}) \\ \gamma : & \mathbb{R} & \longrightarrow & M \\ & t & \longmapsto & \gamma(t) \end{array}$$

Jos katsomme kuvausdiagrammia, jossa on kartta x mukana, näyttäisi se seuraavalta

⁴Aika-avaruus on 4-ulotteinen sileä monisto. Ks. lisää kirjallisuudesta



Kuva 2.16: Käyrän esitys kartalla

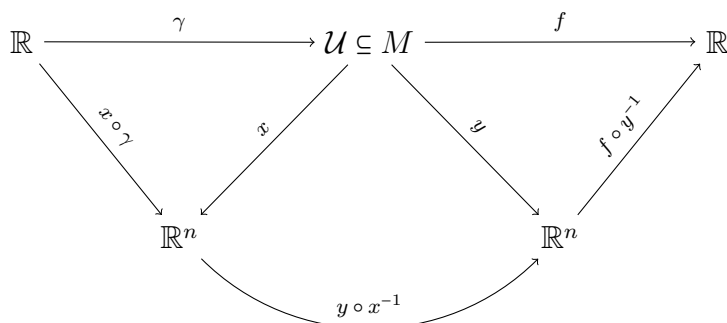
Insinöörimatematiikan kursseilla ollaan totuttu esittämään käyrän \mathbb{R}^3 :ssa, tarkoittaen $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, mutta tämä on vain käyrän koordinaatistoesitys $x \circ \gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$. Todellinen käyrä on kuvaus $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow M$. Tässä vaiheessa emme pysty edes piirtämään käyrää monistolle M , koska se on vain abstrakti käsite monistolla, jolla ei ole tiettyä muotoa.

2.3.4 Funktio

Funktio⁵ on kuvaus

$$\begin{aligned} f : M &\longrightarrow \mathbb{R} \\ p &\longmapsto f(p) \end{aligned} \tag{2.13}$$

Insinöörimatematiikan kursseilla olet käyttänyt funktiosta kuvausta $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Tämä on monistoilla funktio kartalta eli $f \circ x^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, kun käytössä kartta (\mathcal{U}, x) . Ks. alla oleva kuva.



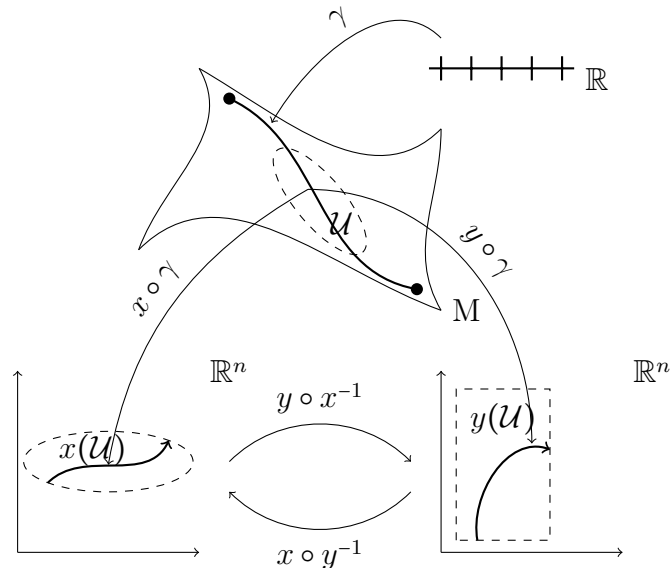
Kuva 2.17: Käyrän ja funktion esitys diagrammissa

⁵Hyvin yleisesti käytetty funktio fysiikassa on *lämpötilafunktio*. Funktion *tasa-arvopinta* on kaikki ne pisteet eli pisteiden joukko, jossa funktio saa saman arvon

2.3.5 Monistojen filosofia

Tässä vaiheessa emme voi ymmärtää monistoja vielä täysin, koska emme ole määritelleet sileitä monistoja. Sileillä monistoilla määrittelemme mm. käyrien differentioituvuuden eli karkeasti sanottuna käyrien tangentit. Sileät monistot tulevat kappaleessa 2.5. Minkä takia me puhumme monistoista ja miksi esittelemme ne näinkin yksityiskohtaisesti?

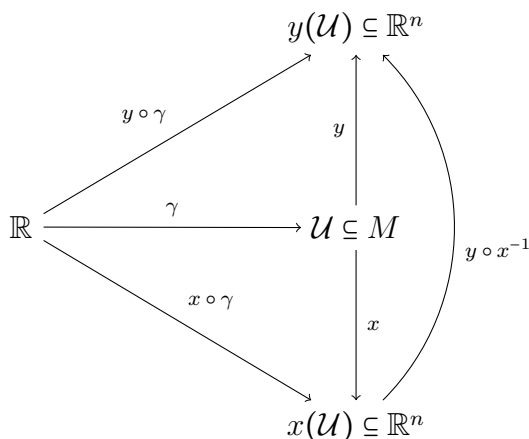
Todellisen maailman objektien, kuten partikkeleiden liikeratojen ($\mathbb{R} \xrightarrow{\gamma} M$) ominaisuuksien (jatkuvuus, differentioituvuus) tutkimiseen emme pääse välttämättä pureutumaan tarkastelemalla objektia itsessään monistolla M . Käyrän γ jatkuvuuden voisimme kyllä tarkastaa käyttämällä monistojen M ja \mathbb{R} topologioita. Mutta monistoilla meillä on uutena työkaluna Atlas käytössä, joka helpottaa työtämme huomattavasti. Ideana olisi siis kuvata parametrisoitu käyrä monistolta johonkin karttaan x eli $(x \circ \gamma)$, ja määritellä käyrän jatkuvuus tämän kartan perusteella. Tässä lähestymistavassa pitää olla kuitenkin varovainen. Täytyy nimittäin muistaa, että kartat olivat mielikuvitusta. Meidän täytyy varmistua, että tarkasteltavan objektin ominaisuudet eivät muutu jossain toisessa kartassa. Jos tarkastelemme käyrää γ ja toteamme, että se jatkuva kartassa x , niin sen on oltava jatkuva myös kartassa y .



Kuva 2.18: parametrisoitu käyrä eli trajektori monistolla ja sen koordinaatioesitys

Esitetään kuva 2.18 vastaavana formaalimpana esityksena alla ja tarkastal-

leen trajektorin γ jatkuvuutta. Jos olisimme jo todenneet, että käyrä on jatkuva kartassa x eli $x \circ \gamma$, niin nyt meidän pitäisi varmistua, että γ on jatkuva myös kartassa y eli $y \circ \gamma$.



Kuva 2.19: Käyrän γ jatkuvuus

Kun viemme trajektorin γ karttaan y , käytämme kuvaus $y \circ \gamma : \mathbb{R} \rightarrow y(\mathcal{U})$. Katsomalla kuvaa 2.19, huomaamme että pääsemme samaan päämäärään myös toista reittiä käyttämällä kuvausta $y \circ x^{-1} \circ x \circ \gamma$. Lähtö- ja maalijoukkomme ovat täysin samat $\mathbb{R} \rightarrow y(\mathcal{U})$. Tämä tarkoittaa, että $y \circ \gamma = y \circ x^{-1} \circ x \circ \gamma$. Tarkastallaan tätä yhtälöä enemmän ja muistetaan samalla, että moniston määritelmän 2.3.1 voimme olla varmoja, että kaikki karttakuvaukset monistolla ovat homeomorfismeja, eli bijektiivisiä kuvauksia, jotka ovat jatkuvia molempiin suuntiin.

$$\begin{aligned} y \circ \gamma &= y \circ x^{-1} \circ x \circ \gamma \\ &= \underbrace{(y \circ x^{-1})}_{\text{jatkuva}} \circ \underbrace{(x \circ \gamma)}_{\text{jatkuva}} \\ &\Rightarrow y \circ \gamma \text{ on jatkuva} \\ &\Rightarrow \gamma \text{ on jatkuva} \end{aligned}$$

Jos $x \circ \gamma$ oli jatkuva ja karttakuvaukset x ja y ovat jatkuvia molempiin suuntiin, niin $y \circ \gamma$:n on oltava jatkuva, koska jatkuvien kuvausten kompositio on jatkuva. Nyt voidaan sanoa, että γ on jatkuva. Idea on siis siinä, että mitä

tahansa objektin ominaisuutta tutkit todellisesta maailmasta, sinun täytyy varmistua siitä, että ominaisuus toimii valitsemasi kartan lisäksi myös jossain toisessa kartassa eli ominaisuus on *koordinaatistosta riippumaton*. Ominaisuus on tällöin mielikuvituksestasi vapaa. Kartastojen kappaleessa puhuimme karttojen punaisen langan olevan siinä, että kartat saavat merkityksensä vasta, kun niitä aletaan liimaamaan yhteen. Tämä oli juurikin esimerkki siitä. Samaa periaatetta eli koordinaatistosta riippumattomuutta sovellemme myös, kun määrittelemme käyrien differentioituvuutta. Samanlailla voimme tutkia muitakin kuvauksia, kuten funktioita $(M \xrightarrow{f} \mathbb{R})$.

Tässä on monistojen yksi hienous. Voimme tutkia todellisen maailman objektien ominaisuuksia näissä kartoissa, joissa laskutoimitukset ovat yksinkertaisia, kun varmistumme ensin koordinaatistoriippumattomuudesta.

Monistot on hyödyllistä ymmärtää myös filosofisella tasolla, koska se ehkäisee väriä olettamusten tekemistä. Monistoilta on helppo saada tuloksia karttoihin, jotka ovat \mathbb{R}^n avaruuksia, joissa yhteenlasku- ja kertomisoperaatiot ovat sallittuja, ne ovat nk. *vektoriavaruuksia*. Kartoissa ollaan totuttu tekemään laskutoimituksia aina peruskoulusta lähtien.

Seuraavassa kappaleessa esittelemme tensorien käsitteen. Fysiikassa ei ole olemassa sellaista kenttäsuuretta, oli se sitten paine, voima, nopeus, magneettikenttä tai sähkövaraus mitä ei voida pukea tensoreiksi. Kun ymmärretään tensorit ja miten ne käyttäytyvät monistolla, niin meille aukeaa uusi lähestymistapa erilaisten fysikaalisten ongelmien tarkasteluun. Niinkuin alkusanoissa mainittiin, jos luonnonilmiötä ei pystytä pukemaan matemaattisformaaliin muotoon, ei ilmiötä ymmärretä tarpeeksi hyvin. Fysiikka on geometriaa [4].

2.3.6 Yhteenveto

Olemme tähän mennessä käsitelleet joukon, kuvausten jatkuvuuden, ja koordinaatistot eli kartat jotka sijaitsevat karttakokoelmassa eli Atlaksessa. Meillä on siis joukko M , jolle olemme antaneet lisärakenteet; topologia \mathcal{O} ja Atlas A eli karttakokoelma. Me kutsumme tätä kolmen symbolin ketjua (M, \mathcal{O}, A) *topologiseksi monistoksi*.

Kappaleessa 2.5 ”Sileät monistot” rajoitamme Atlasta tehden sille erityisvaatimuksia. Tällainen valinta tuo monistolla lisää informaatiota, joka tuottaa lisärakenteen monistolle.

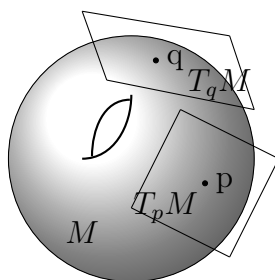
2.4 Multilineaarinen algebra

Olet todennäköisesti kuullut käsitteen *vektoriavaruus*, joita käsittelee matematiikassa lineaarinen algebra. Lineaarialgebrassa käsitellään siis *lineaarisia*

kuvauksia. Multilineaarinen algebra kuuluu samaan aihepiiriin, mutta käsittelee nimensä mukaan *multilineaarisia* kuvauksia. Multilineaarinen algebra on myös laskemista näissä vektoriavaruuksissa. Vektoriavaruus on joukko V , joka on varustettu yhteenlasku- (+) ja \mathbb{R} -kertolaskuoperaatiolla (\cdot). Täydellisyydessään käytämme vektoriavaruudesta merkintää (V, \oplus, \odot) . Tässä kappaleessa emme käytä joukosta merkintää M selvyyden vuoksi, koska me emme tule varustamaan monistoa vektoriavaruuden rakenteella, tarkoittaen että monistolla ei ole yhteen- ja \mathbb{R} -kertolaskuoperaatiot mahdollisia.

Miksi monistoille ei määritetä vektoriavaruuden rakennetta? Jos ajatellaan moniston olevan pallon pinta, niin vastaa kysymykseen, missä on $6 \cdot$ Helsinki? Tai missä on Helsinki+Tukholma? Jos kerron, että aarteen sijainti on paikassa $12 \cdot$ Berliini, niin minne menisit? Idea on siinä, että vektoriavaruuden määrittely monistolle ei hyödytä meitä.

Minkä takia kuitenkin käsittelemme vektoriavaruuksia? Ne ovat tärkeä rakenne, koska vektoriavaruudet nostavat esiin *tensorit*. Jokainen fysikaalinen kenttäsuure on jonkin asteinen tensori. Myöhemmin kappaleessa 2.6 esittelemme tangentiavaruuden T_pM , joka on kiinnitetty jokaiseen moniston M pisteeseen p . Tangentiavaruudelle määrittelemme vektoriavaruuden rakenteen. Tangentiavaruus on kiinnitetty jokaiseen moniston pisteeseen ja niitä voidaan varovaisesti ajatella alla olevaa kuvaa katsomalla⁶. Intuitiivisesti ne ovat jokaiseen moniston pisteeseen liittyviä hypertasoja, jotka omaavat vektoriavaruuden rakenteen.



Kuva 2.20: Tangentiavaruudet T_pM ja T_qM monistolla M

Me voisimme käsitellä seuraavaksi tangentiavaruuksia, mutta emme tee sitä kahdesta syystä:

- 1) Tangentiavaruuden T_pM rakenteeseen tarvitsemme toista vektoriavaruutta $C^\infty M$, jota emme vielä tunne.

⁶Kappaleessa 2.6 määrittelemme tangentiavaruudet. Huomioi, että kuvat eivät liity määritelmiin. Kuvien tarkoituksena on vain antaa intuitiota

- 2) Tensorit voidaan ymmärtää helpommin käsittelemällä ne ensin abstraktilla tasolla.

Sivuutamme hetkeksi päämäärämme, eli tangenttiavaruudet T_pM ja tarkastelemme vektoriavaruuksia V yleisellä tasolla. Seuraavia kappaleita silmällä pitäen voit ajatella, että vektoriavaruus $V = T_pM$.

2.4.1 Vektoriavaruus

Määritelmä 2.4.1 \mathbb{R} -Vektoriavaruus on kolmikko (V, \oplus, \odot) missä

- i) V on joukko
 ii) \oplus on Yhteenlasku eli summaus

$$\begin{aligned}\oplus : V \times V &\longrightarrow V \\ (v, w) &\longmapsto \oplus(v, w) := v \oplus w\end{aligned}$$

- iii) \odot on reaaliluvulla kertolasku

$$\begin{aligned}\odot : \mathbb{R} \times V &\longrightarrow V \\ (\lambda, v) &\longmapsto \odot(\lambda, v) := \lambda \odot v\end{aligned}$$

Huom. \oplus ja \odot viittaavat normaaleihin $+$ ja \cdot operaatioihin. Käytämme ”palloa” niiden ympärillä tehdäksemme selkeyttä ja erottavuutta tekstin notaatioon.

Toteuttaen seuraavat kahdeksan aksioomaa (KANIADDU):

K^+	Kommutatiivisuus	$v + w = w + v$	
A^+	Assosiatiivisuus	$(u + v) + w = u + (v + w)$	
N^+	Neutraali elementti	$\exists \underline{0} \in V : \forall v \in V : v + \underline{0} = v$	
I^+	Inverssi elementti	$\forall v \in V : \exists (-v) : v + (-v) = \underline{0}$	
A	Assosiatiivisuus	$\lambda \odot (\mu \odot v) = (\lambda \cdot \mu) \odot v$	$(\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R})$
D	Distributiivisuus	$(\lambda + \mu) \odot v = \lambda \odot v \oplus \mu \odot v$	
D	Distributiivisuus	$\lambda \cdot v + \lambda \cdot w = \lambda \cdot (v + w)$	
U	Unitaari elementti	$1 \cdot v = v$	

Vektoriavaruus sisältää siis laskulait, jotka ovat tuttuja jo peruskoulusta. Näillä tutuilla laskusäännöillä olemme laskeneet koko ikämme. Vektoriavaruuden aksioomat on helppo muistaa KANIADDU muistisäännöstä. Syy

minkä takia esittelemme tutun vektoriavaruuden näinkin tarkasti, on myöhemmänä tuleva käsite ”Moduli”, joka on yleistys vektoriavaruudesta. Modulia on helppo ymmärtää vertaamalla sen rakennetta vektoriavaruuteen.

2.4.2 Lineaariset kuvaukset

Mitä ovat vektorit? Jos kysytään matemaatikolta, hän saattaisi vastata, että vektori on vektoriavaruuden elementti. Se on totta, vektori on yllä määrittelemämme vektoriavaruuden alkio - pystyt laskemaan niitä yhteen ja kertomaan reaalityyppillä. Tarkastellaan tällaista määritelmää esimerkillä.

Esimerkki 2.4.1 *Tarkastellaan joukkoa P , jolla ei ole vielä vektoriavaruuden rakennetta. Joukko P koostuu polynomeista seuraavasti*

$$P := \left\{ f : (-1, 1) \longrightarrow \overset{(\mathbb{R}, +, \cdot)}{\mathbb{R}} \right\}$$

$$\text{jossa } \chi \longmapsto f(\chi) = \sum_{n=0}^N a_n \cdot \chi^n \quad | a_n \in \mathbb{R}$$

Joukko P koostuu siis kuvauksista f , jonka maalijoukolla on vektoriavaruuden rakenne. Otetaan mielivaltainen elementti $\Delta \in P$ ja kysytään onko Δ vektori? Ei voi olla, koska joukolla P ei ole vektoriavaruuden rakennetta, eli yhteen- ja \mathbb{R} -kertolaskuoperaatiota. Määritellään P :lle nämä rakenteet ⁷.

$$+ : P \times P \longrightarrow P$$

$$(p, q) \longmapsto p+q$$

$$\text{jossa } (p+q)(\chi) = p(\chi) + q(\chi)$$

$$\cdot : \mathbb{R} \times P \longrightarrow P$$

$$(\lambda, q) \longmapsto \lambda \cdot q$$

$$\text{jossa } (\lambda \cdot p)(\chi) = \lambda \cdot p(\chi)$$

Nyt P on vektoriavaruus $(P, +, \cdot)$. Kysytään sama kysymys uudelleen. Onko polynomi $\Delta \in P$ vektori? Kyllä, polynomi Δ on vektori, jos katsotaan vektorin yleistä määritelmää.

⁷Voit muodostaa joukolle vektoriavaruuden rakenteen, kunhan tarkistat, että rakenne toteuttaa 8 aksioomaa (KANIADDU)

Puhtaasti fysiikkaa ajatellen, emme ole tästä vektorin yleisestä määritelmästä kovinkaan kiinnostuneita, koska pystymme helposti näyttämään, että myös funktiot⁸ olisivat vektoreita. Meidän tavoitteena on määritellä *fysikaalinen käyrän tangenttivektori*. Käyrä voisi olla esimerkiksi partikkelin liikerata. Haluamme saada käyrän tangenttivektorille meidän tarkoitukseksi paremmin vastaavan määritelmän, jolla on selkeä ero yleiseen vektorin määritelmään. Me kuitenkin jatkamme vieden teoriaa eteenpäin puhtaasti abstraktilla tasolla.

Tottakai meillä kaikilla on mielessä esimerkki vektorista, \mathbb{R}^3 vektoriavaruutena eli $(\mathbb{R}^3, \oplus, \odot)$ ja siellä johonkin suuntaan sojoittava nuoli⁹. Tällä nuolella on jotain tekemistä vektorin kanssa, mutta se on hyvin pieni osa totuudesta. Tavoitteenamme on antaa käsitys vektoreista, ilman että niitä liitetään, joihinkin kokoelmiin numeroita, esimerkiksi pystymatriiseihin.

Matematiikassa tutkitaan paljon erilaisia joukkojen rakenteita. Tutkiminen tapahtuu tarkastelemalla kuvauksia näiden rakenteiden välillä. Näin toimimme myös topologian kappaleessa. Otimme kaksi topologista avaruutta ja tutkimme kuvauksia niiden välillä. Olimme kiinnostuneita ns. *rakenteen säilyttävistä* kuvauksista. Topologiassa rakenne oli avoimien joukkojen rakenne - Maalijoukon avoimien joukkojen alkukuvat ovat avoimia joukkoja lähtöjoukossa - tämä määritteli *jatkuvan* kuvauksen.

Noudatamme tässä kappaleessa samaa filosofiaa ja tutkimme myös rakenteen säilyttäviä kuvauksia. Nämä kuvaukset ovat *lineaarisia* kuvauksia.

Määritelmä 2.4.2 *Jos $(V, +, \cdot)$ ja $(W, +, \cdot)$ ovat kaksi vektoriavaruutta¹⁰. Niin kuvauksen*

$$\begin{aligned} \psi : V &\longrightarrow W \\ v &\longmapsto \psi(v) \end{aligned}$$

sanotaan olevan lineaarinen kuvaus, jos se toteuttaa seuraavat ehdot:

⁸Esimerkiksi lämpötilafunktiot

⁹Edes vektorilaskennan kehittäjä Oliver Heaviside ei puhunut vektoreista ”suuntina ja suuruuksina” vaan ”suunnatuista suuruuksista”.

¹⁰Huomaa, että monesti joukon yhteenlaskuominaisuusmerkintää \oplus ja reaalityyppillä kertomismerkintää \odot jätetään merkitsemättä ja puhutaan vain vektoriavaruuksista V ja W

$$\psi(v + \tilde{v}) = \psi(v) + \psi(\tilde{v}) \quad \forall v, \tilde{v} \in V \quad (2.14)$$

$$\psi(\lambda \cdot v) = \lambda \cdot \psi(v) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad (2.15)$$

Yhteenlasku- ja kertomismerkkit on merkitty eri väreillä, koska ne tapahtuvat eri joukoilla. $+$ ja \cdot ovat joukolla V , kun taas $+$ ja \cdot ovat joukolla W . Kuvaus siis säilyttää tai kunnioittaa joukkojen rakennetta. Lineaarinen kuvaus voidaan määritellä ainoastaan vektoriavaruuksien välille. Ennen, kuin voidaan puhua kuvauksen lineaarisuudesta, on siis tiedettävä lähtö- ja maalijoukkojen vektoriavaruudellinen rakenne. Saman asian kohtasimme määrittellessämme kuvauksien jatkuvuutta, tarvitsimme joukoille topologiset rakenteet.

Myöskään \mathbb{R}^3 :lla, ei ole automaattisesti vektoriavaruuden rakennetta, se on pelkkä joukko. Yhteen- ja \mathbb{R} -kertolasku pitää ensiksi määritellä. Sitten vasta, kun olet ilmoittanut, että yhteenlasku tehdään komponenteittain ja \mathbb{R} -kertolasku tehdään viemällä kertoja jokaiseen komponenttiin, niin \mathbb{R}^3 :sta on muodostunut vektoriavaruus ja pystyt tekemään siellä laskutoimituksia. \mathbb{R}^3 ei muodostu vektoriavaruudeksi automaattisesti. Pelkästään se syy, että olet aina tottunut tekemään näin, on huono teoria matematiikassa tai fysiikassa.

Esimerkki 2.4.2 *Differentiaalioperaattori* ¹¹. Otetaan esimerkin 2.4.1 polynomien vektoriavaruus P ja katsotaan onko operaattori lineaarinen.

$$\delta : P \longrightarrow P$$

$$p \longmapsto \delta(p) := \frac{d}{dt}p := p'$$

$$i) \quad \delta(p + q) = (p + q)' = p' + q' = \delta(p) + \delta(q)$$

$$ii) \quad \delta(\lambda \cdot p) = (\lambda \cdot p)' = \lambda \cdot p' = \lambda \cdot \delta(p)$$

Joten differentiaalioperaattori on lineaarinen.

Notaatio 1 Käytämme monesti kuvausnuolen päälle merkkiä \sim kun haluamme osoittaa, että kysymys on lineaarisesta kuvauksesta.

$$\varphi : V \longrightarrow W \text{ on lineaarinen} \Leftrightarrow \varphi : V \xrightarrow{\sim} W$$

¹¹Differentiaalioperaattori on derivoituvaan funktioon kohdistuva operaattori. Se palauttaa funktion derivaatan.

Teoreema 2.4.1 *Lineaaristen kuvausten kompositio on lineaarinen. Jos $\varphi : V \rightarrow W$ ja $\xi : W \rightarrow U$ ovat lineaarisia kuvauksia niin myös $\xi \circ \varphi : V \rightarrow U$ on lineaarinen. Ks. todistus Lineaarialgebraan liittyvästä kirjallisuudesta, kuten [16].*

$$\begin{array}{ccccc} V & \xrightarrow{\varphi} & W & \xrightarrow{\xi} & U \\ & & \searrow & \nearrow & \\ & & & & \xi \circ \varphi \end{array}$$

Kuva 2.21: Lineaaristen kuvausten kompositio on lineaarinen

Esimerkki 2.4.3 *Differentiaalioperaattoreiden kompositio, eli toinen derivaatta on lineaarinen*

$$\delta \circ \delta : P \rightarrow P \quad \text{on lineaarinen} \quad (2.16)$$

2.4.3 Homomorfismien vektoriavaruus

Määritelmä 2.4.3 *Jos (V, \oplus, \odot) ja (W, \oplus, \odot) ovat vektoriavaruuksia, niin kaikkien lineaaristen kuvausten joukkoa vektoriavaruuksien V ja W välillä merkitään*

$$\text{Hom}(V, W) := \{\varphi : V \xrightarrow{\sim} W\} \quad (2.17)$$

*Homomorfismi*¹² on alkio lineaaristen kuvausten joukossa.

Onko $\text{Hom}(V, W)$ vektoriavaruus? Ei ole, mutta se voidaan tehdä sellaiseksi määrittelemällä yhteenlasku- ja \mathbb{R} -kertolaskuoperaatiot.

$$\begin{aligned} \oplus : \text{Hom}(V, W) \times \text{Hom}(V, W) &\longrightarrow \text{Hom}(V, W) \\ (\varphi, \psi) &\longmapsto \oplus(\varphi + \psi) := \varphi \oplus \psi \\ \text{jossa } (\varphi \oplus \psi)(v) &:= \varphi(v) + \psi(v) \end{aligned}$$

¹²Eri asia kuin aikaisemmin määriteltä homeomorfismi

$$\begin{aligned} \odot : \mathbb{R} \times \text{Hom}(V, W) &\longrightarrow \text{Hom}(V, W) \\ (\lambda, \varphi) &\longmapsto \odot(\lambda, \varphi) := \lambda \odot \varphi \\ \text{jossa } (\lambda \odot \varphi)(v) &:= \lambda \cdot \varphi(v) \end{aligned}$$

Huomaa, että plus \oplus ja kertolaskumerkit \odot vaihtuvat määritelmässä. Tällä halutaan osoittaa sitä, että ne ovat operaatiota eri joukoilla. Nyt $(\text{Hom}(V, W), \oplus, \odot)$ on vektoriavaruus ¹³.

Esimerkki 2.4.4 Jos P on esimerkin 2.4.1 polynomien vektoriavaruus ja $\text{Hom}(P, P)$ on vektoriavaruus ja $\delta \in \text{Hom}(P, P)$, niin

$$\begin{aligned} \delta &\in \text{Hom}(P, P) \\ \delta \circ \delta &\in \text{Hom}(P, P) \\ \delta \circ \delta \dots \circ \delta &\in \text{Hom}(P, P) \end{aligned}$$

Koska $\text{Hom}(P, P)$ on vektoriavaruus, voit laskea yhteen, kertoa reaaliluvulla ja ottaa kompositiota aivan kuten haluat esim.

$$5 \cdot \delta + \delta \circ \delta \in \text{Hom}(P, P)$$

Näitä operaatiota teemme koko ajan, kun otamme esimerkiksi useamman kertaluvun derivaattoja funktioista. Nämä lineaaristen kuvausten joukot vektoriavaruuksina $(\text{Hom}(V, W), +, \cdot)$ on siis täysin luonnollinen rakenne, jota olemme käyttäneet tietämättämme jo pitkään.

2.4.4 Duaalivektoriavaruudet

Vektoriavaruuden *duaaliavaruus* on paljon vältelty aihe. Se on kuitenkin äärimmäisen yksinkertainen rakenne, jonka elementtejä olemme käyttäneet usein jo matematiikan peruskursseilla.

¹³Meidän pitäisi vielä tarkastaa, että $(\text{Hom}(V, W), \oplus, \odot)$ toteuttaa vektoriavaruuden 8 aksiomaa, mutta se jätetään harjoitukseksi.

Määritelmä 2.4.4 Jos $(V, +, \cdot)$ on vektoriavaruus, niin V :n duaaliavaruus on

$$V^* := \{\varphi : V \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}\} = \text{Hom}(V, \mathbb{R}) \quad (2.18)$$

Missä luonnollisesti myös \mathbb{R} :n on oltava vektoriavaruus. Duaaliavaruus on siis lineaaristen kuvausten joukko. Se sisältää lineaarisia kuvauksia vektoriavaruudelta V vektoriavaruudelle \mathbb{R} . Luonnollisesti duaaliavaruudesta tulee duaalivektoriavaruus, kun siihen lisätään yhteen- ja \mathbb{R} -kertolaskuoperaatiot (V^*, \oplus, \odot) .

(2.19) Duaalivektoriavaruuden elementtejä $\varphi \in V^*$ kutsutaan *kovektoreiksi*. Samankaltainen yleinen terminologia esiteltiin vektoreiden tapauksessa.

Esimerkki 2.4.5 Käytetään jälleen polynomien vektoriavaruutta P esimerkiksi 2.4.1. Integraalioperaattori I on kuvaus $I : P \rightarrow \mathbb{R}$, niin $I \in P^*$.

$$I : P \rightarrow \mathbb{R}$$

$$p \mapsto I(p) := \int_0^1 dt p(t)$$

Voidaan tarkistaa, että kuvaus on lineaarinen

$$i) I(p + q) = \dots = I(p) + I(q)$$

$$ii) I(\lambda p) = \lambda I(p)$$

Tämä tarkoittaa että integraalioperaattori on kovektori, $I = \int_0^1 dt$

2.4.5 Tensorit

Tensorit ovat multilineaarisia kuvauksia eli jokaisen argumenttipaikan suhteen erikseen lineaarisia kuvauksia.

$$T : \underbrace{V^* \times \dots \times V^*}_r \times \underbrace{V \times \dots \times V}_s \rightarrow \mathbb{R}$$

Esimerkki 2.4.6 $(1,1)$ -tensorin multilineaarisuus, $\varphi, \psi \in V^*$; $v, w \in V$

$$T : V^* \times V \longrightarrow \mathbb{R} \quad (2.20)$$

$$(\varphi, v) \longmapsto T(\varphi, v) \quad (2.21)$$

Jonka multilineaarisuus tarkoittaa seuraavaa

$$T(\varphi + \psi, v) = T(\varphi, v) + T(\psi, v)$$

$$T(\varphi, v + w) = T(\varphi, v) + T(\varphi, w)$$

$$T(\lambda \cdot \varphi, v) = \lambda \cdot T(\varphi, v)$$

$$T(\varphi, \lambda \cdot v) = \lambda \cdot T(\varphi, v)$$

Jos molempiin argumentteihin lisätään niihin sopivat elementit eli kovektori ensimmäiseen ja vektori toiseen, niin multilineaarisuus toimii seuraavasti

$$T(\varphi + \psi, v + w) = T(\varphi, v) + T(\varphi, w) + T(\psi, v) + T(\psi, w) \quad (2.22)$$

Seuraavaksi vielä yksi esimerkki tensorista, jossa olemme käyttäneet aikaisemmin esittelemäämme polynomien vektoriavaruutta P .

Esimerkki 2.4.7

$$g : P \times P \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(p, q) \longmapsto g(p, q) := \int_{-1}^1 dt p(t) q(t)$$

on $(0,2)$ -tensori vektoriavaruudella P .

2.4.6 Vektorit ja kovektorit tensoreina

Kovektorit

$$\varphi \in V^* \Leftrightarrow \varphi : V \xrightarrow{\sim} \mathbb{R} \Leftrightarrow \varphi \text{ on } (0,1) \text{ - tensori eli kovektori} \quad (2.23)$$

Vektorit

$$v \in V = (V^*)^* \Leftrightarrow v : V^* \xrightarrow{\sim} \mathbb{R} \Leftrightarrow v \text{ on } (1,0)\text{-tensori eli vektori} \quad (2.24)$$

Voidaan todistaa, että äärellisulotteisen vektoriavaruuden V dualivektoriavaruuden duaali on vektoriavaruus V itse eli $V \cong (V^*)^*$. Ks. todistus liitteestä B.1.3.

2.4.7 Kovariantit ja kontravariantit tensorit

Kovariantti tensori

Tensoreita, jotka pystyvät ottamaan argumenteikseen vain tavallisia vektoreita

$$T : \underbrace{V \times \dots \times V}_k \longrightarrow \mathbb{R} \quad (2.25)$$

kutsutaan kovarianteiksi tensoreiksi. Jos halutaan ilmoittaa kovariantin tensorin valenssi, ilmoitetaan tensorin argumenttipaikkojen määrä ja käytetään nimitystä kovariantti k -tensori.

Kontravariantti tensori

Tensoreita, jotka pystyvät ottamaan argumenteikseen vain kovektoreita

$$T : \underbrace{V^* \times \dots \times V^*}_r \longrightarrow \mathbb{R}$$

kutsutaan kontravarianteiksi r -tensoreiksi.

2.4.8 Kantavektorit

Kaikki mitä tähän mennessä on puhuttu vektoreista, on tehty ilman mainintaa vektorien komponenteista tai vektoriavaruuksien kannoista. Meidän näkemys vektoreihin ei perustu kokoelmaan lukuarvoja - meille ne ovat kuvauksia. Tottakai nämä lukuarvot tai komponentit ovat tietyllä tavalla piilotettuna vektoreihin.

Topologisten monistojen kappaleessa käsitelimme karttoja. Monistojen Atlaksessa meillä oli lukematon määrä karttoja valittavana, joilla pystyimme esittämään moniston pisteitä \mathbb{R}^n -koordinaatistossa. Me tähtäsimme siihen, että esityksemme olisi kartan valinnasta riippumaton. Samaa filosofiaa voidaan soveltaa vektorin esitykseen *kantavektoreilla*. Meillä on kannoissa lukematon määrä eri vaihtoehtoja valittavana. Saman vektorin voit esittää siis monellakin kannalla.

Vektorit ovat olemassa ilman kannan valintaa ja me tulemme määrittelemään ne tarkemmin lineaarisina kuvauksina kappaleessa tangenttiavaruudet. Lineaarinen kuvaus vaatii lähtö- ja maalijoukoilta vektoriavaruuden rakennetta. Tämän lisäksi vektori itse kuuluu vektoriavaruuteen. Tarkoittaen, että jos $u : V \xrightarrow{\sim} W$ on vektori, niin $u \in (Hom(V, W), \oplus, \odot)$. Jossa $Hom(V, W)$ on lineaaristen kuvausten joukko vektoriavaruuksien V ja W välillä. Joukolle $Hom(V, W)$ on määritelty yhteen- ja \mathbb{R} -kertolaskuoperaatiot \oplus ja \odot , jotka muodostavat joukosta vektoriavaruuden.

Seuraavaksi esittelemme tutun käsitteen, eli vektoriavaruuden kannan. Kun valitsemme vektorimme esitykselle kannan, on luonnollisesti kysymys *kannan valinnasta*. Kannanvalinta on hyvin käytännöllinen, koska sen avulla voimme suorittaa laskutoimituksia. Koska tässä työssä käsittelemme vain äärellisdimensioisia vektoriavaruuksia, voimme sanoa, että kannavalinnassa on kysymys aivan samasta asiasta, kuin oli kartanvalinnassa.

Määritelmä 2.4.5 Vektoriavaruuden kanta

Jos (V, \oplus, \odot) on vektoriavaruus, niin osajoukko $F \subset V$ on vektoriavaruuden V kanta, jos

$$\forall v \in V \exists_1 \text{ äärellinen } \underbrace{F}_{\{f_1, \dots, f_n\}} : \exists_1 \underbrace{v^1, v^2, \dots, v^n}_{\mathbb{R}} : v = v^1 f_1 + \dots + v^n f_n$$

Erilaisia kantoja on valittavana erittäin paljon. Jotkut laskutoimitukset saattavat helpottaa huomattavasti, kun valitaan vektoriavaruudelle oikeanlainen kanta.

Määritelmä 2.4.6 Vektoriavaruuden dimensio

Jos \exists kanta F , jossa on äärellinen määrä elementtejä $n \in \mathbb{N}$, niin kutsumme lukua n vektoriavaruuden V dimensioksi, tarkoittaen $\dim(V) = n$.

Kannan valinnassa idea on sama, kuin kartan valinnassa. Jos valitset kannan sinun täytyy varmistua, että tässä kannassa esitetty objektin ominaisuus py-

syy samana, kun vaihdat kannan toiseen. Hyvinä esimerkkeinä $(1,1)$ -tensorin determinantti ja kuvauksen jälki eli *trace*.

2.4.9 Duaaliavaruuksien kannat

Jos vektoriavaruudelle V on valittu kanta e_1, \dots, e_n , niin V :n duaalivektoriavaruudelle V^* voidaan valita kanta $\epsilon^1, \dots, \epsilon^n$. Tämän duaalivektoriavaruuden kannan ei tarvitse riippua millään tavalla V :n kannasta, koska se on eri vektoriavaruus. Usein on kuitenkin erittäin hyödyllistä tehdä seuraavanlainen valinta

Määritelmä 2.4.7 *Duaalikanta.*

Jos kanta (e_1, \dots, e_n) on valittu V :lle, ja valitaan V^ :n kannaksi $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)$, siten että*

$$\epsilon^a(e_b) = \delta^a_b = \begin{cases} 1 & \text{jos } a = b \\ 0 & \text{jos } a \neq b \end{cases} \quad (2.26)$$

niin $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)$ kutsutaan (duaalivektoriavaruuden) duaalikannaksi.

2.4.10 Tensoritulo

Määritelmä 2.4.8 *Tensoritulo*

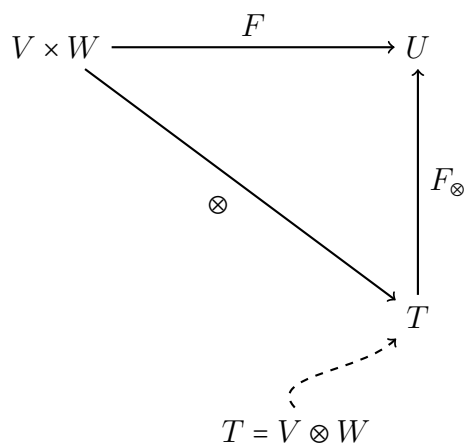
Kaksikko (T, \otimes) missä

- i) T on vektoriavaruus*
- ii) $\otimes : V \times W \longrightarrow T$ on multilineaarinen¹⁴ kuvaus*

on kahden vektoriavaruuden V ja W tensoritulo, kun

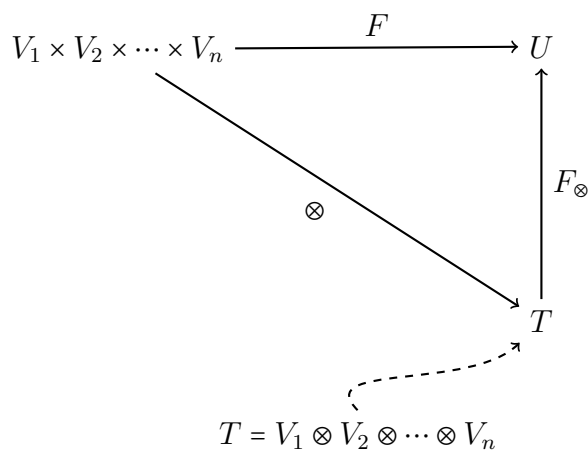
$$i) \{E\}_{i=1}^k \text{ on kanta } V\text{:lle ja } \{\tilde{E}\}_{j=1}^l \text{ on kanta } W\text{:lle} \implies \{\otimes(E_i, \tilde{E}_j) \mid (E_i, \tilde{E}_j) \in \{E\}_{i=1}^k \times \{\tilde{E}\}_{j=1}^l\} \text{ on kanta } T\text{:lle}$$

- ii) Seuraavan diagrammin kommutointi toteutuu*



Kuva 2.22: Tensoritulo

missä F on multilineaarinen kuvaus ja U on vektoriavaruus. Eli $\forall F : V \times W \rightarrow U \exists_1 F_\otimes$ s.e. $F = F_\otimes \circ \otimes$. Tätä kutsutaan myös tensoritulon *universaaliominaisuudeksi*. Tensoritulo voidaan yleistää useamman, kuin kahden vektoriavaruuden tensorituloksi, jossa vektoriavaruuksia on n -kappaletta



Kuva 2.23: Yleinen tensoritulo

Symmetriset tensorit

Olkoon V vektoriavaruus. Kovariantin 2-tensorin $\beta : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ sanotaan olevan symmetrinen, jos sen määräämän kuvan arvo ei muutu, kun sen argumenttien järjestystä vaihdetaan, tarkoittaen

$$\beta(u, v) = \beta(v, u) \quad (2.27)$$

missä $u, v \in V$. Yleisesti kovariantti k -tensori $\alpha : V \times \cdots \times V \rightarrow \mathbb{R}$ on symmetrinen, jos $\alpha(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_k) = \alpha(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_k)$. Huomaa, että lähtöjoukkona olevien vektoriavaruuksien karteesinen tulo sisältää samoja vektoriavaruuksia V .

Tensorituloavaruus $T = V \otimes \cdots \otimes V$, voidaan esittää sen symmetrisen ja antisymmetrisen tensorituloavaruuden (aliavaruuksien) *suorana* summana, jota merkittäköön $T = \Sigma \oplus \Omega$.¹⁵ Käytännössä tämä tarkoittaa sitä, että jokainen tensori $\alpha \in T$, voidaan esittää sen symmetrisen osan $Sym(\alpha)$ ja antisymmetrisen osan $AntiSym(\alpha)$ summana $\alpha = Sym(\alpha) + AntiSym(\alpha)$. Symmetrisointikuvaus Sym esitellään seuraavasti:

$$\begin{aligned} Sym : T &\longrightarrow \Sigma \subset T \\ \alpha &\longmapsto Sym(\alpha) \end{aligned}$$

mikä kovariantin 2-tensorin tapauksessa määriteltäisiin

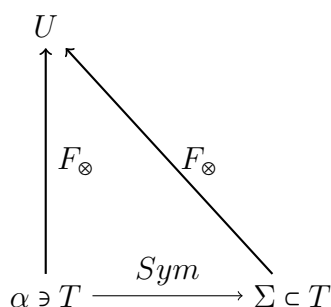
$$Sym(\alpha)(v, u) = \frac{1}{2}(\alpha(v, u) + \alpha(u, v)) \quad (2.28)$$

ja yleisen kovariantin k -tensorin tapauksessa

$$Sym(\alpha)(v_1, v_2, \dots, v_k) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} \alpha(v_{\sigma(1)}, v_{\sigma(2)}, \dots, v_{\sigma(k)}) \quad (2.29)$$

missä S_k on joukon $\{1, \dots, k\}$ permutaatioiden ryhmä ja σ on permutaatio eli argumenttiparin vaihto. Kuvaus Sym on luonnollinen projektiokuvaus vektoriavaruuksien T ja $\Sigma \subset T$ välillä. Ks. diagrammi 2.

¹⁵ks. todistus [21, s. 6]



Kuva 2.24: Tensoritulon symmetrisyys

Määritelmä 2.4.9 *Symmetrinen tensori.* Olkoon $\alpha : V \times \cdots \times V \rightarrow \mathbb{R}$ kovariantti k -tensori. α on symmetrinen jos ja vain jos,

$$\begin{aligned} F_{\otimes}(Sym(\alpha)) &= F_{\otimes}(\alpha) \\ \implies Sym(\alpha) &= \alpha \end{aligned}$$

Kovariantti k -tensori on siis yleinen tensori, jolla voi olla symmetrinen ja antisymmetrinen osa. Jos kovariantilla k -tensorilla on pelkkä symmetrinen osa ilman antisymmetristä osaa, on kysymys symmetrisestä tensorista. Huomaa, että symmetrisistä antisymmetrisistä tensoreista puhuttaessa tensorin lähtöjoukon vektoriavaruuksien karteesiset tulot sisältävät vain ja ainoastaan samoja vektoriavaruuksia. Antisymmetrisiä tensoreita käsitellään paremmin kappaleessa 2.12 Differentiaalimuodot.

2.4.11 Tensorien komponentit

Monesti tensorit esitellään liittämällä ne kokoelmaan lukuja tai komponentteja, jotka järjestellään matriisiesitysmuotoon. Jotta näin voidaan tehdä, täytyy kanta(kannat) valita ensin.

Määritelmä 2.4.10 *Jos T on (r,s) -tensori äärellisulotteisella vektoriavaruudella V . Silloin tensori voidaan esittää $\dim(V)^{(r+s)}$ kappaleella reaalityyppisiä lukuja, siten että*

$$\underbrace{T^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s}}_{\mathbb{R}} = T(\epsilon^{i_1}, \dots, \epsilon^{i_r}, e_{j_1}, \dots, e_{j_s}) \quad (2.30)$$

Joita kutsutaan myös tensorien komponenteiksi valitussa kannassa. Indeksit r ja s voivat juosta maksimissaan $\dim(V)$:hen asti. Tällaisessä esityksessä oletetaan aina, että $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_r)$:n olevan (e_1, \dots, e_s) :n duaalikanta. Tarkoitetaan, että puhumme ainoastaan kannan (e_1, \dots, e_s) valinnasta.

Esimerkki 2.4.8 Jos T on $(1,1)$ -tensori ja sen kantavektoreiden mukaiset komponentit ovat

$$T_j^i := T(\epsilon^i, e_j) \tag{2.31}$$

Niin silloin tensorin komponentit toimiessaan kovektoriin φ ja vektoriin v ovat.

$$\begin{aligned} T(\varphi, v) &= T(\varphi_i \epsilon^i, v^j e_j) \\ &= \varphi_i v^j \underbrace{T(\epsilon^i, e_j)}_{T_j^i} \end{aligned}$$

Summausnotaatio käytössä eli parilliset indeksit samassa termässä summaataan vektoriavaruuden V dimension, $\dim(V)$ yli. Kantavektorit merkitään alaindekseillä ja duaalikantavektorit eli kantakovektorit yläindekseillä - niiden komponentit eli kantavektoreiden kertoimet päinvastoin.

Matriisilaskentaan liittyvillä kursseilla ja lineaarialgebrassa olemme tottuneet kertomaan vektoreita matriiseilla käyttäen matriisien kertolaskuoperaatiota. Matriisilla toimitaan vektoriin ja saadaan tulokseksi vektori, $A \cdot v = u$. Tämä on tullut esiin laskiessamme esim. matriisin ominaisarvoja. Käyttämämme matriisi on tarkemmin sanottuna $(1,1)$ -tensori eli multilineaarinen kuvaus. Tuloksena operaatiossa on kuitenkin vektori. Jos katsomme juuri esittelemäämme yleistä tensorien määritelmää, on kuva-avaruutena aina \mathbb{R} eli reaaliluku. Nämä $(1,1)$ -tensorit sisältävät kuitenkin saman informaation mitä olemme käyttäneet matriisissa.

Esimerkki 2.4.9 Jos on annettu $(1,1)$ -tensori $T : V^* \times V \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}$, niin siitä voidaan rakentaa lineaarinen kuvaus $A : V \xrightarrow{\sim} (V^*)^*$, siten että

$$\begin{aligned} A : V &\xrightarrow{\sim} (V^*)^* \\ v &\longmapsto A(v) := A v := T(\cdot, v) \end{aligned}$$

missä $(V^*)^* \cong V$, kun $\dim(V) < \infty$. Todistus siitä, että $V \cong (V^*)^*$ eli vektoriavaruudet ovat isomorfisia¹⁶ liiteosiossa.

Esimerkki 2.4.10 Jos on annettu lineaarinen kuvaus $A : V \xrightarrow{\sim} V$, niin siitä voidaan rakentaa $(1,1)$ -tensori T , siten että

$$\begin{aligned} T : V^* \times V &\xrightarrow{\sim} \mathbb{R} \\ (\sigma, v) &\longmapsto T(\sigma, v) := \sigma(A(v)) \end{aligned}$$

missä $A(v) \in V$.

Esimerkki 2.4.11 Jos on annettu $(1,1)$ -tensori $S : V^* \times V \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}$, niin siitä voidaan rakentaa lineaarinen kuvaus $B : V^* \xrightarrow{\sim} V^*$, siten että

$$\begin{aligned} B : V^* &\xrightarrow{\sim} V^* \\ \omega &\longmapsto B(\omega) := S(\omega, \cdot) \end{aligned}$$

Esimerkki 2.4.12 Jos on annettu lineaarinen kuvaus $B : V^* \xrightarrow{\sim} V^*$, niin siitä voidaan rakentaa $(1,1)$ -tensori S , siten että

$$\begin{aligned} S : V^* \times V &\xrightarrow{\sim} \mathbb{R} \\ (\omega, v) &\longmapsto S(\omega, v) := B(\omega)(v) \end{aligned}$$

2.5 Sileät monistot

Kappaleessa 2.4 käsitelimme topologisia monistoja, jotka mahdollistivat meidän tutkia kuvausten jatkuvuutta käyttäen Atlaksen karttoja. Nämä kartat olivat homeomorfismeja eli bijektiivisiä ja molempiin suuntiin jatkuvia kuvauksia. Kartat helpottivat työtämme huomattavasti, koska pystyimme tarkastelmaan monistojen välisten kuvausten jatkuvuutta ilman, että meidän tarvitsi tarkastella monistojen topologioita.

Jatkuvuus on yksi tärkeä ominaisuus mistä olemme kiinnostuneita. Toinen vähintään yhtä tärkeä ominaisuus on *differentioituvuus*. Me olemme kiinnostuneita seuraavanlaisten objektien eli kuvausten differentioituvuudesta:

¹⁶kahden joukon isomorfisyydestä käytetään merkintään \cong

Käyrät eli trajektorit	$\mathbb{R} \longrightarrow M$
Funktiot	$M \longrightarrow \mathbb{R}$
Monistojen väliset kuvaukset	$M \longrightarrow N$

Kuten olemme jo maininneet, joidenkin objektien ominaisuuksien tutkiminen itse monistolla on vaikeaa, jollei mahdotonta. Differentioituvuus toimii hyvänä esimerkkinä ominaisuudesta, minkä tarkastelu itse monistolla on täysin mahdotonta. Syy tähän on yksinkertainen.

Muistellaan matematiikan peruskursseilta, että funktion derivaatta sen mielivaltaisessa pisteessä p määriteltiin täsmällisesti erotusosamäärän raja-arvon avulla.

Esimerkki 2.5.1 *Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ derivaatta¹⁷ pisteessä p .*

$$f'(p) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(p+t) - f(p)}{t} \Rightarrow \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(p+t) - f(p) - f'(p) \cdot t}{t} = 0$$

Jos tämä raja-arvo on olemassa, sanomme, että funktio f on differentioituva pisteessä p . Huomaa, että lähtö- ja maalijoukoilla on oltava vektoriavaruuden rakenne.

Katsotaan myös differentioituvuuden yleistä määritelmää

Määritelmä 2.5.1 *V ja W ovat vektoriavaruuksia, jotka ovat varustettuina vektorien normilla. Jos $U \subseteq V$ on avoin osajoukko ja $p \in U$, niin kuvauksen $F : U \longrightarrow W$ sanotaan olevan differentioituva pisteessä p , jos on olemassa lineaarinen kuvaus $L : V \xrightarrow{\sim} W$ siten, että*

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{|F(p+v) - F(p) - Lv|}{|v|} = 0 \quad (2.32)$$

Missä lineaarista kuvausta L kutsutaan kuvauksen F kokonaisderivaataksi pisteessä p .

Differentioituvuus määritellään siis erotusosamäärien raja-arvojen avulla, joihin tarvitsemme välttämättä vektoriavaruuden rakennetta. Kuten jo ”multilineaarinen algebra”-kappaleen alussa mainitsimme, monistoilla ei ole vektoriavaruuden rakennetta, tai ainakaan me emme määrittele kyseistä rakennetta

¹⁷Käytämme kokonaisderivaasta $'$ myös merkintää $\frac{d}{dt}$, eli $\frac{d}{dt}f(p) := f'(p)$

niille. Toki voit yrittää määritellä pallon pinnan vektoriavaruudeksi, mutta sinun täytyisi tehdä se myös toruksille, Kleinin pulloille ja kaikille muille lukemattomille eri monistoille erikseen. Kirjoittaja ei ainakaan pysty lupamaan, että tämä olisi edes mahdollista. Tässä ei muutenkaan olisi mitään järkeä, koska meillä on Atlaksen kartat käytössä.

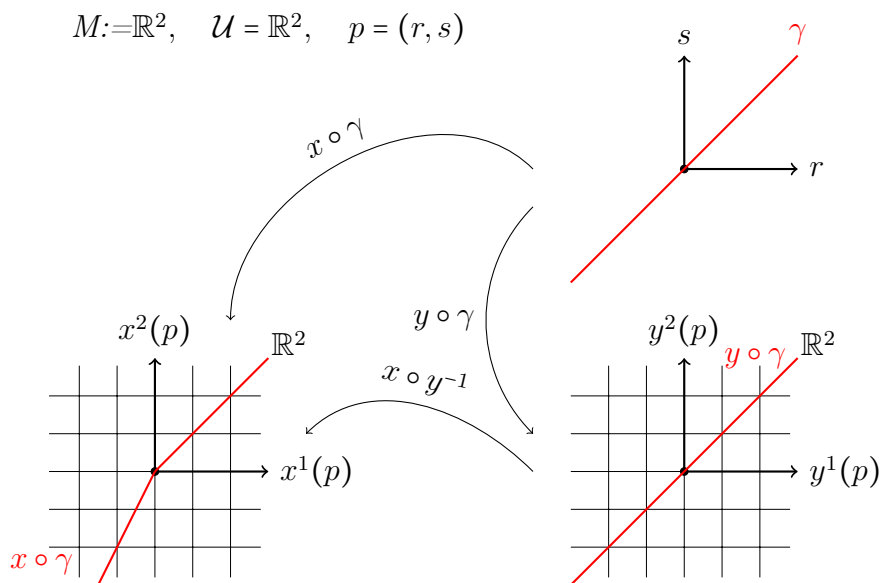
Kartat olivat kuvauksia $x : M \rightarrow \mathbb{R}^n$, missä maalijoukkona toimii siis \mathbb{R}^n . Tähän voimme kätevästi määritellä vektoriavaruuden rakenteen, jossa olemme tottuneet laskemaan aina peruskoulusta lähtien. Karttakuvaukset ovat jatkuvia, mutta tästä seuraa tärkeä kysymys mihin *sileiden monistojen* määritelmä juontuu: Jos kuvaus on jatkuva, niin onko kuvaus samalla myös differentioituva? Hyvin karkeasti sanottuna differentioituvuus tarkoittaa tangenttia. Eli pystymmekö piirtämään kuvaukselle tangentin sen jokaiseen pisteeseen? Katsotaan seuraavaa esimerkkiä missä monistomme on 2-ulotteinen Euklidinen avaruus, jolla sijaitsee käyrä $\gamma(t) := (t, t)$. Käytösämme on kaksi karttaa

$$1) \mathcal{U} := \mathbb{R}^2, x \mid x : (r, s) \mapsto (r, k(s) \cdot s) \quad \text{missä}$$

$$k(s) := \begin{cases} 2 & \text{kun } s < 0 \\ 1 & \text{kun } s \geq 0 \end{cases}$$

$$2) \mathcal{U} := \mathbb{R}^2, y = id_{\mathbb{R}^2}$$

Esimerkki 2.5.2 Onko käyrä differentioituva kartassa x ?

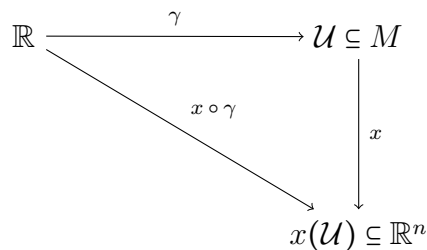


Kuva 2.25: Käyrän γ differentioituvuus

Miellämme, että itse käyrä γ on jatkuva ja derivoituva. Tätä se on myös kartassa y . Kartassa x käyrä on jatkuva, mutta ei differentioituva origossa.

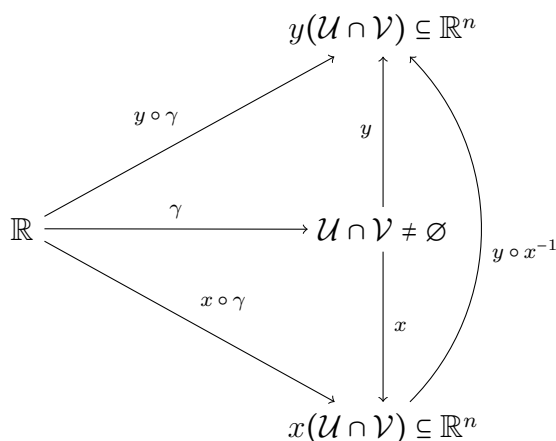
2.5.1 Strategia

Katsotaan samaa asiaa formaalimpana esityksenä. Me tiedämme jo insinöörimatematiikan kurseilta mitä tarkoittaa kuvauksen (funktion) differentioituvuus. Toisin sanoen, osaamme määrittellä kuvauksen differentioituvuuden, kun kuvaus on muotoa $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. Lähtö- ja maalijoukkojen ollessa luonnollisesti vektoriavaruuksia. Monistoilla olemme kiinnostuneita esimerkiksi käyrästä $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow M$, missä monistolla M ei ole vektoriavaruuden rakennetta. Jos katsotaan kuvausta $x \circ \gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, on tässä lähtö- ja maalijoukot sellaiset, minkä differentioituvuuden pystymme määrittelemään insinöörimatematiikan kurseilta opituilla tiedoilla. Meidän strategiamme on määrittellä käyrän $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow M$ differentioituvuus käyrän karttakuvauksen $x \circ \gamma$ avulla. Voisimme sanoa, että yritämme määrittellä monisto-differentioituvuuden insinöörimatematiikka-differentioituvuuden avulla.

Kuva 2.26: Käyrän γ differentioituvuus

Noudatamme nyt samaa filosofiaa, kuin käyrän jatkuvuuden määrittämisessä. Me emme voi tarkastella vain yhtä karttaa, koska kartat riippuivat omista mieltymyksistämme. Me haluamme määrittää käyrän differentioituvuuden riippumatta kartasta, minkä valitsemme. Meidän täytyy katsoa kahta karttaa, joiden domainit leikkaavat toisensa, muulloin kartat eivät olisi vertailukelpoisia, koska niillä ei olisi mitään tekemistä toistensa kanssa - ne kuvaisivat käyrän kahta täysin eri aluetta. Mutta jos karttojen domainit leikkaavat toisensa eli $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} \neq \emptyset$, meillä on uusi ongelma, nimittäin kuvaus voi olla differentioituva yhdessä kartassa, mutta ei toisessa. Tarkoittaen seuraavaa. Jos oletetaan, että käyrä on differentioituva kartassa $x \circ \gamma$, niin onko se differentioituva kartassa $y \circ \gamma$? Formuloidaan käyrä kartassa y toista

reittiä, ja huomaamme seuraavaa (voit myös ajatella lisääväsi identiteetti-kuvauksen $x \circ x^{-1} = id_{\mathbb{R}^n}$ kuvauksen $y \circ \gamma$ väliin):



Kuva 2.27: Käyrän γ differentioituvuus kartoissa

$$y \circ \gamma = \underbrace{y \circ x^{-1}}_{\text{jatkua}} \circ \underbrace{x \circ \gamma}_{\text{Diff.}}$$

Käyrä γ ei ole välttämättä differentioituva kartassa y . Ongelmana on $y \circ x^{-1}$. Se on jatkuva, mutta ei välttämättä differentioituva. Differentioituvan ja jatkuvan kuvauksen kompositio ei ole välttämättä differentioituva. Tämä taktiikka ei siis toimi. Me emme voi määritellä kuvausten differentioituvuutta kartoilla, mitä meillä on tällä hetkellä käytössä, koska ne eivät ole välttämättä differentioituvia. Meillä on liikaa karttoja käytössä. Haluamme siis poistaa kaikki ne kartat Atlaksesta \mathcal{A} , jotka eivät ole jonkin toisen kartan kanssa differentioituvia. Haluamme tämän jatkuvan kartanvaihtokuvauksen $y \circ x^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ olevan lisäksi differentioituva, tarkemmin sanottuna ∞ -kertaa differentioituva. Differentioituvuus tarkoitti derivaatan löytymistä. Haluamme vielä, että kaikki derivaatat ovat jatkuvia. Puhumme ∞ -kertaa jatkuvasti differentioituvista kuvauksista. Tällaisten kuvauksien luokasta käytetään merkintää C^∞ . Alla tarkempaa tietoa tästä luokittelusta.

Määritelmä 2.5.2 *Jatkuvasti differentioituvien kuvausten luokittelu*

Luokka	Luokan kuvaus	Merkitys
C^0	$C^0(\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n)$	jatkuvat kuvaukset
C^1	$C^1(\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n)$	kerran jatkuvasti differentioituvat kuvaukset
C^2	$C^2(\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n)$	2 kertaa jatkuvasti differentioituvat kuvaukset
C^k	$C^k(\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n)$	k-kertaa jatkuvasti differentioituvat kuvaukset
\vdots		
C^∞	$C^\infty(\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n)$	∞ -kertaa jatkuvasti differentioituvat kuvaukset

Määritelmä 2.5.3 Sileys

Kuvaus on sileä, jos se kuuluu luokkaan C^∞ .

Määritelmä 2.5.4 Sileä atlas

Atlas \mathcal{A} on C^∞ -atlas, jos sen kartanvaihtokuvaukset kuuluvat luokkaan C^∞ . C^∞ -atlasta käytetään nimitystä sileä atlas \mathcal{A}_{sm} .

Määritelmä 2.5.5 Sileä monisto

Topologinen monisto on sileä monisto, jos sillä on sileä atlas \mathcal{A}_{sm} . Sileä monisto on siis kolmikko $(M, \mathcal{O}, \mathcal{A}_{sm})$.

Huomio 5 Muokkasimme topologisen moniston atlasta \mathcal{A} , niin että, sen kartanvaihtokuvaukset $y \circ x^{-1}$ ovat sileitä, jolloin meillä on sileä atlas \mathcal{A}_{sm} . Tällainen valinta tuo avaruuden rakenteelle lisäinformaatiota, tarkoittaen sitä, että sileän atlasten valinta on lisärakenne topologiselle monistolle. Sileän atlasten valinta muokkaa topologisen moniston sileäksi monistoksi. Nyt olemme siis taanneet, että kartanvaihtokuvaukset ovat sileitä. Luonnollisesti tämä ei tarkoita sitä, että käyrä γ itse monistolla olisi sileä. Nyt meillä on vain työkalut, millä voimme huoletta tutkia ja määritellä käyrän γ differentioitavuuden monistolla. Kun puhumme jatkossa sileästä monistosta M , tarkoittaa se automaattisesti, että kyse on kolmikosta $(M, \mathcal{O}, \mathcal{A}_{sm})$. Topologia ja sileä atlas on siis piilotettu merkinnästä.

2.5.2 Sileiden funktioiden vektoriavaruus

Funktio f sileällä monistolla M on kuvaus $f : M \rightarrow \mathbb{R}$. Funktiot yleisesti kuuluvat joukkoon $C^k(M)$, jossa k riippuu siitä, kuinka monta kertaa funktiot ovat jatkuvasti differentioituvia. Sileät funktiot ovat ∞ -kertaa jatkuvasti differentioituvia funktioita. Sileys määritellään kartanvalinnasta riippumattomalla tavalla, tarkoittaen jos kuvaus $f \circ x^{-1}$ on sileä, myös $f \circ y^{-1}$ sileä, koska $f \circ y^{-1} \circ y \circ x^{-1}$ on sileä. Periaate on siis sama kuin käyrin differentioitavuuden määrittämisessä. Merkitsemme sileiden funktioiden joukkoa seuraavasti.

$$C^\infty(M) = \{f : M \longrightarrow \mathbb{R} \mid \text{sileät}\} \quad (2.33)$$

Joukolle $C^\infty(M)$ määrittelemme yhteen- ja \mathbb{R} -kertolaskuominaisuudet¹⁸.

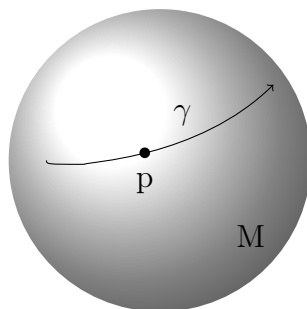
$$(f \oplus g)(p) = f(p) + g(p) \quad | \quad f, g \in C^\infty(M) \quad (2.34)$$

$$(\lambda \odot f)(p) = \lambda \cdot f(p) \quad | \quad \lambda \in \mathbb{R} \quad (2.35)$$

Näin saamme sileiden funktioiden vektoriavaruuden $(C^\infty(M), \oplus, \odot)$. Jatkossa käytämme kyseisen vektoriavaruuden notaatiosta vain merkintää $C^\infty(M)$, jättämällä yhteen- ja \mathbb{R} -kertolaskuominaisuusmerkinnät pois.

2.6 Tangentti- ja kotangenttiavaruudet

Alla olevassa kuvassa on sileä käyrä γ sileällä monistolla M . Kyseinen käyrä voisi kuvastaa esimerkiksi vaihtelevalla nopeudella kulkevan objektin liikerataa.



Kuva 2.28: liikeradan nopeus?

Seuraa kappaleen avain kysymys: Mikä on liikeradan γ nopeus pisteessä p ?

2.6.1 Käyrän tangenttivektori eli nopeus

Määritelmä 2.6.1 (M, \mathcal{O}, A_{sm}) on sileä monisto, jolla sijaitsee sileä käyrä $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow M$. Oletetaan, että moniston piste p sijaitsee käyrän kohdassa

¹⁸Tarkistamme lisäksi vektoriavaruuden kahdeksan aksioomaa. ks. 2.4.1

$\gamma(0) = p$. Käyrän γ nopeus pisteessä p on lineaarinen kuvaus:

$$v_{\gamma,p} : C^\infty(M) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}$$

$$f \mapsto v_{\gamma,p}(f) := \frac{d}{dt}(f \circ \gamma)(0) \quad (2.36)$$

Jota kutsutaan suuntaderivaatta operaattoriksi pisteessä p käyrällä γ . Tämä käyrän tangenttivektori, jota fysiikassa kutsutaan nopeusvektoriksi, on siis operaattori eli kuvaus $v_{\gamma,p} : C^\infty(M) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}$, jossa lähtö- ja maalijoukkojen on oltava vektoriavaruuksia, koska kuvaus on lineaarinen. Nopeusvektori ”syö” funktion ja ”sylkee” ulos reaaliluvun.

Näin differentiaaligeometrian tangenttivektori $v_{\gamma,p}$, joka fysiikassa tunnetaan nopeutena, on määritelty suuntaderivaatta-operaattoriksi yleispätevyyttä hukkaamatta. Vektori-terminologiasta huolimatta, meidän ei tulisi sekoittaa tangenttivektoria numerokokoelmaan tai matriisiin - ainakaan vielä tässä vaiheessa. Tämän kappaleen lopussa se tulee kyllä sitä olemaan, ja vektorin komponentit onkin erittäin helppo saada tästä edellä esitetystä määritelmästä. Mutta yleisesti differentiaaligeometriassa käyrien tangenttivektorit ovat suuntaderivaatta-operaattoreita, jotka mittaavat käyrän tangentin suuntaan tapahtuvia funktioiden muutosnopeuksia.

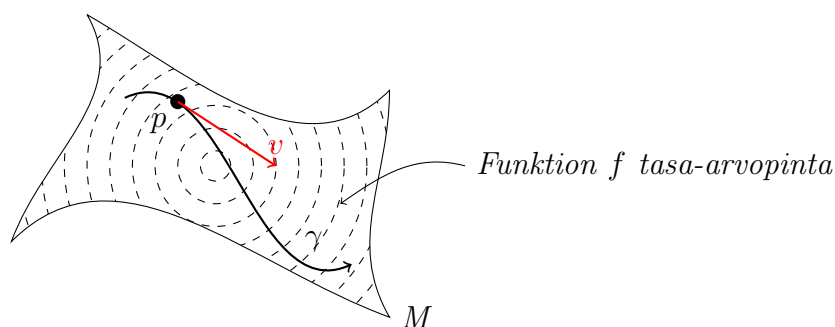
Tässä vaiheessa on hyvä huomioda, että vektoreiden pistetulosta, normeista tai pituuksista ei ole mainittu yhtään mitään. Me emme vielä tiedä, mitä ne tarkoittavat. Insinöörimatematiikan kurseilla puhutaan suunnatuista derivaatoista kahtena erillisenä käsitteenä eli vektorina \bar{u} , joka antaa *suunnan* ja ”nabla operaattorina” ∇f , jolla *derivoidaan* funktiota eri argumenttien suhteen. Näistä kahdesta vektorista otetaan pistetulo ja saadaan suuntaderivaatta eli $\bar{u} \cdot \nabla f$, joka on reaaliluku.

Differentiaaligeometriassa nämä kaksi käsitettä ovat naimisissa toistensa kanssa, jotka eivät voi erota - ne ovat siis yhdistetty toisiinsa. Ei ole erillistä käsitettä suunnasta eikä erillistä käsitettä derivaatasta - on vain näiden kahden yhdistelmä. Tämä on tärkeä asia pitää mielessä, koska se on punainen lanka differentiaaligeometrian tangenttivektoreiden tekniseen ymmärtämiseen. Mainittakoon vielä, että vektorilaskennan kehittäjä Oliver Heaviside puhui vektoreista ”suunnattuina suuruuksina” (engl. directed magnitudes). Myöhemmin tässä kappaleessa selvitämme asiaa vielä tarkemmin.

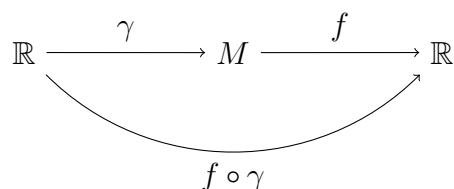
Intuitiivisesti suuntaderivaatta-operaattoria voidaan ajatella katsomalla alla olevaa kuvaa. Kuvittele, että olet monistolla M ja juokset pitkin käyrää γ . Monistolla on lämpötila funktio f , jossa kuvan katkoviivat esittävät

sen tasa-arvopintoja - eri katkoviivoilla on siis eri lämpötilat. Kun juokset pitkin käyrää, tunnet kuinka lämpötila muuttuu käyrän eri pisteissä matkasi varrella.

Intuitio 3 Nopeusvektori mittaa funktion muutokset



Kuva 2.29: nopeusvektori



Kuva 2.30

Jos katsotaan vielä kuvaa 2.30, niin voidaan ajatella, että kuvaus $f \circ \gamma$ mittaa käyrällä γ olevaa lämpötilaa, kun taas määritelmän 2.6.1 $\frac{d}{dt}(f \circ \gamma)$ mittaa lämpötilan muutosta, kun liikutaan pitkin käyrää γ .

Käyrän parametrisointi

Käyrä eli trajektori on muutakin, kuin sen kuvan $\gamma(t)$ joukko pisteitä monistolla M - käyrän määrittelee myös sen parametrisointi. Jos käyrän γ lisäksi on olemassa toinen käyrä σ , jolla on sama kuvapistejoukko M :llä, mutta erilainen parametrisointi, esimerkiksi $\sigma(t) = \gamma(2t)$. Tarkastellaan mikä on tällöin käyrän σ nopeusvektori $v_{\sigma,p}$ pisteessä p . Annetaan $v_{\sigma,p}$:n toimia

mielivaltaiseen sileään funktioon $f \in C^\infty(M)$.

$$\begin{aligned}\sigma(t) &= \gamma(2t) \\ v_{\sigma,p}f &= (f \circ \sigma)'(t) \\ v_{\sigma,p}f &= (f \circ \gamma)'(2t) \\ v_{\sigma,p}f &= 2(f \circ \gamma)'(t) = 2v_{\gamma,p}f\end{aligned}$$

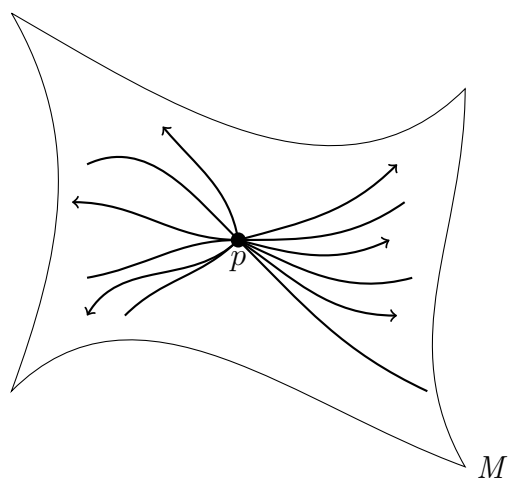
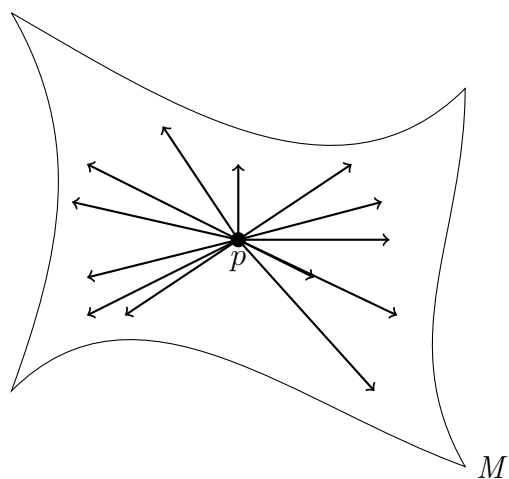
Voimme heittää reaaliluvun (2) kuvauksen eteen, koska differentiaalioperaattori ' on lineaarinen. Käyrän σ kuljetaan siis kaksinkertaisella nopeudella verrattuna käyrään γ . Yksinkertainen esimerkki, jolla haluttiin vain osoittaa parametrisoinnin merkitys.

2.6.2 Tangenttivektoriavaruus

Nyt kun olemme esitelleet käyrän tangenttivektorin, täytyy meidän määrittellä sen joukko. Kun puhumme vektoreista, on niiden joukko muodostettava luonnollisesti vektoriavaruudeksi. Käyrän γ tangenttivektori pisteessä p kuuluu pisteen p tangenttiavaruuteen T_pM .

$$T_pM := \{v_{\gamma,p} \mid \gamma \text{ sileä käyrä}\} \quad (2.37)$$

Intuitio 4 Tangenttiavaruutta T_pM voidaan intuitiivisesti ajatella seuraavasti. Meillä on monisto M , josta olemme valinneet kyseessä olevan tangenttiavaruuden pisteen p . Kuvittelemalla kaikkia mahdollisia sileitä käyriä eri parametrisoinneilla kaikkiin eri suuntiin, voimme ottaa näiden jokaisen käyrän tangentti vektorin v_p pisteessä p . Nämä tangenttivektorit muodostavat tangenttiavaruuden joukon T_pM .

Kuva 2.31: Pisteeseen p kautta kulkevat sileät käyrätKuva 2.32: Pisteeseen p kautta kulkevien käyrien tangenttivektorit

T_pM on vielä vain joukko. Jotta voisimme puhua tangenttivektoriavaruudesta, täytyy meidän lisätä joukkoon yhteen- ja \mathbb{R} -kertolaskuoperaatiot. Meidän tulee myös varmistua, että tulos pysyy kyseisessä joukossa T_pM .

$$\oplus: T_pM \times T_pM \longrightarrow T_pM$$

$$\odot: \mathbb{R} \times T_pM \longrightarrow T_pM$$

Tämä voidaan tehdä, katso todistus lähteestä [10, s. 44].

Algebra

Kun vektoriavaruudessa pystyimme laskemaan joukon alkioita yhteen ja kertomaan niitä reaalityyppisillä, niin algebrassa pystymme lisäksi suorittamaan tuloja itse alkioilla. Huomaa siis ero \mathbb{R} -reaalityyppisellä kertolaskuun ja kahden alkion tuloon.

Määritelmä 2.6.2 *Vektoriavaruus $(V, +, \cdot)$ varustettuna tulo-operaatiolla*

$$\begin{aligned} \bullet : V \times V &\longrightarrow V \\ v, \tilde{v} &\longmapsto \bullet(v, \tilde{v}) := v \bullet \tilde{v} \end{aligned} \tag{2.38}$$

missä tulo-operaatio \bullet on bilineaarinen¹⁹ kuvaus, on algebra $(V, +, \cdot, \bullet)$.

Tulo-operaatioksi voidaan määrätä erilaisia konkreettisia operaatioita, jotka toteuttavat määritelmän 2.6.2.

Esimerkki 2.6.1 *Sileiden funktioiden vektoriavaruus $(C^\infty(M), +, \cdot)$ on algebra, kun se varustetaan tulo-operaattorilla \bullet .*

$$\begin{aligned} \bullet : C^\infty(M) \times C^\infty(M) &\longrightarrow C^\infty(M) \\ (f, g) &\longrightarrow f \bullet g \\ \text{missä } (f \bullet g)(p) &= f(p) \cdot g(p) \end{aligned} \tag{2.39}$$

Tämä on tuttu operaatio, funktioiden kertolaskua olemme tehneet peruskoulusta lähtien. Tarkoituksena oli esittää vektoriavaruuden ja algebran rakenteellinen ero. Voisimme siis antaa $C^\infty(M)$ vektoriavaruudelle rakenteellisesti vahvemman määritelmän ja kutsua sitä algebraksi.

Derivaatio

Määritelmä 2.6.3 *Derivaatio D on lineaarinen kuvaus*

$$D : A \xrightarrow{\sim} B$$

¹⁹bilineaarinen on kahden argumenttipaikan suhteen multilineaarinen

Missä A ja B ovat algebroja. Derivaatio D toteuttaa lisäksi Leibnizin säännön,

$$D(f \bullet g) = (Df) \bullet g + f \bullet (Dg) \quad (2.40)$$

Joka näyttää differentiaalilaskennasta tutulta tulon derivoimissäännöltä ja se on myös sitä. Derivaation ideana on toimia abstraktina yleistyksenä, joka toimii monessa muussakin tilanteessa, kuin pelkän differentiaalilaskennan tai normaalin derivoimisen yhteydessä.

Esimerkki 2.6.2 Suuntaderivaatta-operaattori on derivaatio.

Esimerkki 2.6.3 Lien Algebra ja derivaatio $[H, \cdot]$

Osittaisderivaatan notaatio

Sanotaan, että meillä on differentioituva kuvaus

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (a, b, c) &\longmapsto F(a, b, c) := 2a^3b^2 + 5b^2c - 4c^3 \end{aligned}$$

ja muistetaan, että \mathbb{R}^n on tuple eli järjestetty joukko reaalilukujen karteesisista tuloista

$$\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{n \text{ kpl}}$$

Jos haluamme ottaa funktion F osittaisderivaatan, vaikka ensimmäisen argumentin (a) suhteen, niin olemme tottuneet käyttämään insinöörimatematiikan kursseilla merkintää $\frac{\partial F}{\partial a}$. Merkintätapa on hieman epätaloudellinen, koska voisit yhtä hyvin ilmoittaa saman asian käyttämällä merkintää $\partial_1 F$. On aivan yhdentekevää, millaisia kirjaimia tai symboleita argumenteista käytetään, kun suoritetaan derivoimista. Riittää kun ilmoitamme, monennenko argumenttipaikan suhteen osittaisderivaatta suoritetaan. Alla esimerkkejä

edellä esitellyn funktion F osittaisderivaatoista

$$\begin{aligned}\partial_2(F)(\square, \triangle, \heartsuit) &= 4\square^3 \triangle + 10 \triangle \heartsuit \\ \partial_1(F)(x, y, z) &= 6x^2y^2 \\ \partial_1\partial_2(F)(\alpha, \beta, \delta) &= 12\alpha^2\beta\end{aligned}$$

Näin meidän ei tarvitse olla kiinnostuneita siitä, minkälaisia kirjaimia argumenteista käytetään suoritettaessa derivointia. Toinen syy siihen, minkätäkia nostamme tämän notaatioteknillisen asian esille on siinä, että varaamme merkinnän $\frac{\partial}{\partial x}$ toiseen käyttöön. Nämä tulevat olemaan valitun kartan eli koordinaatiston määrittämiä kantavektoreita, joista ollaan monesti totuttu käyttämään myös notaatiota \vec{e} .

2.6.3 Nopeusvektorin komponentit

Seuraavaksi muodostamme vektorille komponentit. Käytämme käyrän nopeus- eli tangenttivektorista myös merkintää $X_{\gamma,p}$.

Määritelmä 2.6.4 Vektorin komponentit

Sileällä monistolla M on sileä käyrä γ , joka kulkee moniston pisteen p kautta siten, että $\gamma(0) = p$. Lähtötiedot ovat siis seuraavat:

$$\begin{aligned}(\mathcal{U}, x) &\in \mathcal{A}_{sm} \\ \gamma : \mathbb{R} &\longrightarrow M \\ \gamma(0) &= p\end{aligned}$$

Käyrän γ pisteessä p sijaitsevan nopeusvektorin $X_{\gamma,p}$ komponentit kartassa (\mathcal{U}, x) lasketaan lisäämällä kartta $x^{-1} \circ x = id_{\mathbb{R}^n}$ ja käyttämällä derivoinnin ketjusääntöä.

$$\begin{aligned}
X_{\gamma,p}(f) &:= \frac{d}{dt}(f \circ \gamma)(0) = \frac{d}{dt}(f \circ (x^{-1} \circ x) \circ \gamma)(0) \\
&= \frac{d}{dt}((f \circ x^{-1}) \circ (x \circ \gamma))(0) \\
&= \underbrace{\frac{d}{dt}(x^i \circ \gamma)(0)}_{\dot{\gamma}^i(0)} \cdot \underbrace{\left(\partial_i(f \circ x^{-1})\right)(x(p))}_{\left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\right)_p} \quad (2.41)
\end{aligned}$$

$$= \dot{\gamma}^i(0) \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\right)_p \quad (2.42)$$

$$= \underbrace{\dot{\gamma}^i(0) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p}_{X_{\gamma,p}} f \quad (2.43)$$

$$= X_{\gamma,p} f \quad (2.44)$$

Huomaa, että summausnotaatio on käytössä.

Kuten edellä olevasta huomataan, tangenttivektori $X_{\gamma,p}$ voidaan kirjoittaa muodossa

$$X_{\gamma,p} = \dot{\gamma}^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p \quad (2.45)$$

Missä $\dot{\gamma}^i = \frac{d}{dt}(x^i \circ \gamma)$ ovat vektorin komponentteja valitussa kartassa x ja $\frac{\partial}{\partial x^i}$ ovat tangenttivektoriavaruuden $T_p M$ kantavektoreita. Nämä kantavektorit ovat kuvauksia $\frac{\partial}{\partial x^i} : C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$. Vaikka tämä kantavektorin notaatio muistuttaa erehdyttävästi insinöörimatematiikan osittaisderivaattaoperaatiota, se ei aivan suoranaisesti ole sitä. Syy on siinä, että kantavektori voi toimia funktion $f \in C^\infty(M)$ eli $\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p(f)$, mutta funktiosta $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ ei voida suoraan ottaa osittaisderivaattaa, koska monistolla ei ole vektoriavaruuden rakennetta. Tämä notaatio tulee siis välittömästi kääntää seuraavasti, $\left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\right)_p := \partial_i(f \circ x^{-1})(x(p))$. Näin kuvaus on differentoituva, koska lähtö- ja maalijoukot ovat vektoriavaruuksia. Tämä on itseasiassa se osittaisderivaatta, mitä olemme suorittaneet aina peruskursseilta lähtien - jälleen kerran emme vain ole olleet tietoisia monistojen olemassaolosta.

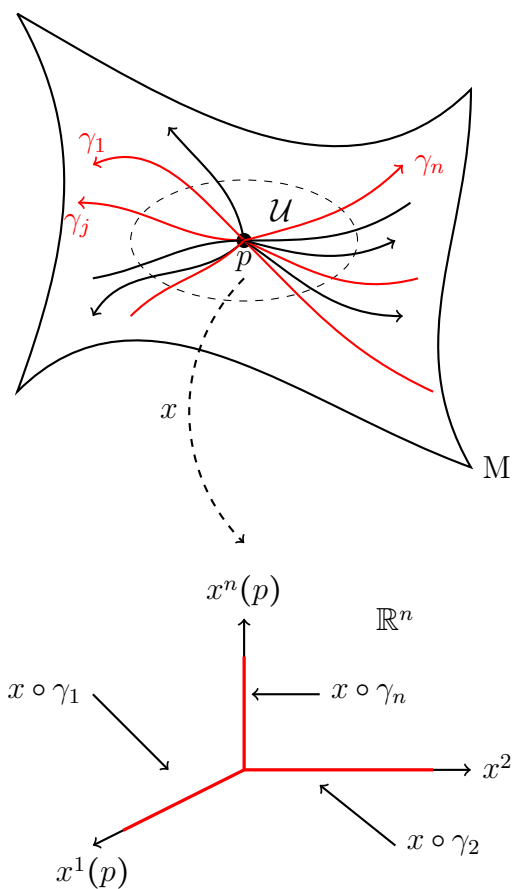
Kappaleen alussa puhuimme, että suuntaderivaatassa ei ole kysymys kahdesta eri käsitteestä, suunnasta ja derivaatasta. Vektorin komponenttimuotoiluista 2.45 nähdään, että nämä kaksi asiaa ovat todella yhdessä, vektorin komponentit ovat käyrän komponenttien derivointeja valitussa kartassa ja kantavektorit ovat derivaattaoperaattoreita. Huomaa, että näillä kantavektoreilla viitataan myös samaan valittuun karttaan, mikä on käytössä komponenttien esityksessä. Nämä tangentti- eli nopeusvektorit toimivat funktioihin mittaamalla niiden muutosnopeuksia.

Notaatio 2 Kokonaisderivaatan $\frac{d}{dt}$ merkintätapaa kutsutaan ”Leibnizin notaatioksi”. Käytämme samasta asiasta vaihtoehtoista notaatiota, jossa kokonaisderivaattaa merkitään heittomerkillä, esimerkiksi $(f \circ \gamma)'(t)$. Tätä jälkimmäistä tyyliä kutsutaan ”Lagrangen notaatioksi”. Kun muuttujien päälle ilmestyy pisteitä, esim $\dot{\gamma}^i$ on kysymys ”Newtonin notaatiosta”. Kaikki merkintätavat on hyviä ja niille on omat paikkansa. Merkintään $\dot{\gamma}^i$ olisi monesti hyvä lisätä alaindeksiin kartta, tarkoittaen $\dot{\gamma}_{(x)}^i$, jotta tiedettäisiin missä kartassa käyrän komponentit on esitetty. $\dot{\gamma}_{(x)}^i$ esitetään monesti myös muodossa \dot{x}^i .

2.6.4 Tangenttiavaruuden kantavektorit

Teoreema 2.6.1 $\dim(T_p M) = \dim(M)$. Tangenttivektoriavaruuden $T_p M$ dimensio on sama, kuin moniston M dimensio.

Todistus 2.6.1 Vektoriavaruuden dimension määrittämiseen tarvitsimme vektoriavaruuden kantaa (määr. 2.4.6). Ideana on rakentaa vektoriavaruuden kanta kartan (\mathcal{U}, x) kuva-avaruudesta. Valitaan monistolta M piste p ja kartta (\mathcal{U}, x) , siten että $x(p)$ on kartan origossa. Valitaan $\dim(M) = n$ kappaletta sileitä käyriä niin, että käyrät ovat kartassa koordinaattiakseleiden suunnassa. Intuitio voisi olla seuraava.



Kuva 2.33: Piste p kautta kulkevat sileät käyrät

Näitä erityislaatuisia käyriä γ_a on yhteensä moniston M dimension n verran

$$\begin{aligned} \gamma_1 &: \mathbb{R} \longrightarrow M \\ \gamma_2 &: \mathbb{R} \longrightarrow M \\ &\vdots \\ \gamma_n &: \mathbb{R} \longrightarrow M \end{aligned}$$

ja ne ovat kartassa (\mathcal{U}, x) muotoa

$$(x^b \circ \gamma_a)(t) = \delta_a^b \cdot t \quad (2.46)$$

Lasketaan seuraavaksi käyrien γ_a tangenttivektorit pisteessä p käyttäen kapaleen alussa esitettyä tangenttivektorien määritelmää 2.6.1. Merkitsemme kyseisten käyrien tangenttivektoreita nyt notaatiolla $e_{\gamma_a,p}$.

$$e_{\gamma_a,p}f = \frac{d}{dt}(f \circ \gamma_a)(0) \quad (2.47)$$

$$= \frac{d}{dt}(f \circ x^{-1} \circ x \circ \gamma_a)(0) = \frac{d}{dt}(x^b \circ \gamma_a)(0) \partial_b(f \circ x^{-1})(x(p)) \quad (2.48)$$

$$= \delta_a^b \partial_b(f \circ x^{-1})(x(p)) = \partial_a(f \circ x^{-1})(x(p)) = \left(\frac{\partial}{\partial x^a}\right)_p f \quad (2.49)$$

$$\Rightarrow e_{\gamma_a,p} = \left(\frac{\partial}{\partial x^a}\right)_p \quad (2.50)$$

Koska käyriä oli $\dim(M)$ -kappaletta, niin tangenttivektorit

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^{\dim(M)}}\right)_p \quad (2.51)$$

virittävät tangenttiavaruuden $T_p \mathcal{U} = \text{span}\left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^{\dim(M)}}\right)_p$. Jotta näitä tangenttivektoreita voitaisiin kutsua tangenttiavaruuden $T_p \mathcal{U}$ *kantavektoreiksi*, täytyy osoittaa, että mikä tahansa vektori $X \in T_p \mathcal{U}$ voidaan esittää näiden tangenttivektoreiden lineaarikombinaationa tarkoittaen

$$X = X^a \left(\frac{\partial}{\partial x^a}\right)_p \quad (2.52)$$

missä $X^a \in \mathbb{R}$. Olkoon mielivaltainen vektorimme $X \in T_p \mathcal{U}$ polun $\tau: \mathbb{R} \rightarrow M$ tangenttivektori pisteessä $p = \tau(0)$ eli $X = X_{\tau,p}$. Tutkitaan vektoria $X_{\tau,p}$ antamalla sen toimiaa funktioon $f \in C^\infty(M)$.

$$\begin{aligned} X_{\tau,p}f &= \frac{d}{dt}(f \circ \tau)(0) \\ &= \frac{d}{dt}(f \circ x^{-1} \circ x \circ \tau)(0) \\ &= \frac{d}{dt}(x^a \circ \tau)(0) \partial_b(f \circ x^{-1})(x(p)) \\ &= \underbrace{\frac{d}{dt}(x^a \circ \tau)}_{X_{\tau,p}} \left(\frac{\partial}{\partial x^a}\right)_p f \end{aligned}$$

Tästä nähdään, että $X_{\tau,p}$ voidaan esittää tangenttivektorien $\{\frac{\partial}{\partial x^a}\}_{a=1}^n$ lineaarikombinaationa. Viimeiseksi täytyy osoittaa näiden kantavektoriyhdistöiden lineaarinen riippumattomuus, joka voidaan muotoilla, että

$$\alpha^a \left(\frac{\partial}{\partial x^a} \right)_p = 0 \quad (2.53)$$

jos ja vain jos $\alpha^a = 0$. Eli tulos on nollavektori, jos ja vain jos komponentit α^a ovat kaikki nolli. Annetaan edellä esitetyn vektorin toimia taas funktioon, joka $\in C^\infty(M)$. Voimme valita funktioksi mitä tahansa, joten valitaan aikaisemmin tutuksi tulleet koordinaattifunktiot x^i , jotka ovat kuvauksia $x^i : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \alpha^a \left(\frac{\partial}{\partial x^a} \right)_p &= 0 \\ \alpha^a \left(\frac{\partial}{\partial x^a} \right)_p x^i &= 0 \\ \alpha^a \delta_a^i &= 0 \\ \alpha^i &= 0 \end{aligned}$$

Joten $(\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^{\dim(M)}})$ toteuttaa myös lineaarisen riippumattomuuden. Tämä tarkoittaa, että kyseiset kartan \mathcal{U}, x generoimat tangenttivektorit muodostavat $T_p \mathcal{U}$:n kannan.²⁰

Koska valitsemiamme käyriä γ_a oli n -kappaletta eli yhteensä moniston dimension verran ja niiden tangenttivektorit $(\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n})$ muodostivat tangenttiavaruuden $T_p \mathcal{U}$ kannan, on todistettu että $\dim(M) = \dim(T_p M)$.

2.6.5 Vektorin komponentit kartanvaihdossa

Mainittakoon heti alkuun itsestäänselvyys vektoreista. Jos vektori esitetään jollain toisella kannalla, vain sen komponentit muuttuvat, ei vektori itse. Vektori on abstrakti objekti monistolla, ja se pysyy samana huolimatta siitä millaisilla kantavektoreilla se esitetään.

²⁰kantoja on monia, tämä on vain yksi.

Jos (\mathcal{U}, x) ja (\mathcal{V}, y) ovat toisiaan leikkaavat kartat ja $p \in \mathcal{U} \cap \mathcal{V}$. Esitetään vektori $X \in T_p M$, eri kannoilla.

$$X_{(y)}^i \frac{\partial}{\partial y^i} = X = X_{(x)}^i \frac{\partial}{\partial x^i}$$

Kysymys on seuraava. Kuinka kantavektorit $\frac{\partial}{\partial x^i}$ ja $\frac{\partial}{\partial y^a}$ ovat kytkettyinä toisiinsa? Laitetaan kartan x kantavektori $\frac{\partial}{\partial x^i}$ toimimaan funktioon f ja käytetään toisen kartan y identiteettikuvausta²¹ $y^{-1} \circ y = id_M$.

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_p f &= \partial_i (f \circ x^{-1})(x(p)) \\ &= \partial_i (f \circ (y^{-1} \circ y) \circ x^{-1})(x(p)) \\ &= \partial_i ((f \circ y^{-1}) \circ (y \circ x^{-1}))(x(p)) \\ &= \underbrace{\partial_i (y^j \circ x^{-1})(x(p))}_{\left(\frac{\partial y^j}{\partial x^i} \right)_p} \underbrace{\partial_j (f \circ y^{-1})(y(p))}_{\left(\frac{\partial}{\partial y^j} \right)_p f} \\ \\ \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_p f &= \left(\frac{\partial y^a}{\partial x^i} \right)_p \cdot \left(\frac{\partial}{\partial y^a} \right)_p f \end{aligned}$$

eli kantavektorit saadaan toisen kartan mukaiseen kantaan seuraavasti

Määritelmä 2.6.5 *Kantavektoreiden muunnoskaava*

$$\frac{\partial}{\partial x^i} = \frac{\partial y^a}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial y^a} \tag{2.54}$$

²¹identiteettikuvaus voidaan lisätä, koska se ei muuta kuvausta

Jossa lineaarista kuvausta $\frac{\partial y^a}{\partial x^i}$, kutsutaan Jacobin matriisiksi²².

Edellä olevasta voidaan johtaa, että vektorien komponentit muuntuvat seuraavasti

$$\begin{aligned} X &= X_{(x)}^a \frac{\partial}{\partial x^a} = \underbrace{X_{(x)}^a \frac{\partial y^i}{\partial x^a}}_{X_{(y)}^i} \frac{\partial}{\partial y^i} \\ \Rightarrow X_{(y)}^i &= X_{(x)}^a \frac{\partial y^i}{\partial x^a} \end{aligned} \quad (2.55)$$

2.6.6 Kotangenttivektoriavaruus

Edellisessä kappaleessa 2.4 käsiteltiin vektoriavaruuksia ja niiden duaaliavaruuksia. Kuten edellä on tullut ilmi, pisteen p tangenttiavaruus $T_p M$ on vektoriavaruus. On siis luonnollista tarkastella kyseisen tangenttiavaruuden duaaliavaruutta. $T_p M$:n duaaliavaruutta kutsutaan nimellä *kotangenttiavaruus* jota merkitään notaatiolla $T_p^* M$. Kotangenttiavaruus voidaan muodostaa vektoriavaruudeksi, ja se on seuraavanlainen joukko

$$T_p^* M := \{\omega : T_p M \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}\} \quad (2.56)$$

Sen alkiot ovat objekteja, jotka kuvaavat tavallisia vektoreita lineaarisesti reaalityyppisiksi. Paljon käytetty esimerkki kovektorista on objekti jota merkitään notaatiolla df . Tämä on seuraavanlainen kuvaus.

$$\begin{aligned} (df)_p &: T_p M \longrightarrow \mathbb{R} \\ X &\longmapsto (df)_p(X) := Xf \end{aligned} \quad (2.57)$$

²²Vastaava muunnoskaava esitetään usein $\tilde{e}_i = A_i^a \tilde{e}_a$, jossa matriisi A on Jacobin matriisi. Huomaa, että $\frac{\partial y^a}{\partial x^i} := \partial_i (y^a \circ x^{-1})$.

$(df)_p$ kutsutaan funktion f *gradientiksi* pisteessä p . Funktion gradientti on siis kovvektori eikä normaali vektori. Muistutetaan multilineaarisen algebran kappaleesta, että kovvektori on myös $(0,1)$ -tensori.

Kantakovektorit

Teoreema 2.6.2 *Jos (\mathcal{U}, x) on kartta $x^i : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$, niin kotangenttiavaruuden T_p^*M kantavektorit ovat $(dx^1, dx^2, \dots, dx^n)_p$ esitettynä kartalla x .*

Todistus 2.6.2 [9, s. 110]

$$dx_p^i \left(\frac{\partial}{\partial x^a} \right)_p := \left(\frac{\partial x^i}{\partial x^a} \right)_p = \delta_x^i \Rightarrow \{dx_p^i\}_{i=1}^n \text{ on } T_p^*\mathcal{U}:n \text{ kanta} \quad (2.58)$$

Kovvektorin komponentit

Kovvektorin $\omega_p \in T_p^*M$ komponentit tietyllä kartalla saadaan, kun tämä laitetaan toimimaan kyseisen kartan mukaisiin normaaleihin kantavektoreihin.

$$\omega_j(p) = \omega \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_p = \omega_a \underbrace{dx^a \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_p}_{\delta_i^a} \quad (2.59)$$

$$= \omega_a(p) \delta_i^a = \omega_i(p) \quad (2.60)$$

Toisena esimerkkinä funktion f gradientin $df_p \in T_p^*M$ komponentit

$$(df)_j = df \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \right)_p \quad (2.61)$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x^j} \right)_p = \partial_j (f \circ x^{-1})(x(p)) \quad (2.62)$$

2.6.7 Kovvektorin komponentit kartanvaihdossa

Kuten vektoreiden tapauksessa, kovvektori on kovvektori, riippumatta siitä minkälaisessa kannassa se esitetään. Ainoastaan kovvektorin komponentit²³

²³Objektin sijainti pisteessä p jätetty notaatioista pois

muuttuvat kannanvaihdossa.

$$\omega_i^{(y)} dy^i = \omega = \omega_i^{(x)} dx^i$$

Jos seuraamme samaa periaatetta, kuin kantavektoreiden muunnosten tapauksessa, saamme kovektoreiden komponenttien muunnoskaavaksi.

$$\omega_j^{(y)} = \omega_i^{(x)} \frac{\partial x^i}{\partial y^j} \quad (2.63)$$

ja kantakovektorien muunnoskaavaksi

Määritelmä 2.6.6 *Kotangenttiavaruuden kantavektorien²⁴ muunnoskaava*

$$dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial y^j} dy^j \quad (2.64)$$

Huomaa, että vektorit ja kovektorit muuntautuvat eri tavoilla. $\frac{\partial y^j}{\partial x^i}$ ja $\frac{\partial x^i}{\partial y^j}$ ovat lineaarisia kuvauksia joita merkitään monesti kirjallisuudessa (1,1)-tensorilla A^i_j ja B^j_i vastaavasti. Nämä matriisit ovat toistensa inversejä, joita kutsutaan *Jacobin matriiseiksi*.

Insinöörimatematiikan kursseilla puhutaan funktion gradientista df tavalla, jolla se mielletään tavalliseksi vektoriksi²⁵. Se ei tätä kuitenkaan ole, ja tälle asialle ei voi valitettavasti tehdä mitään. Funktion gradientin komponentit muuntautuvat kannanvaihdossa kovektorin komponenttien tavoin ja jos yrität muuntaa niitä kuten vektorin komponentteja, saat väärän vastauksen. Ks. esimerkki lähteestä [1, s. 280, harj. 11.17].

2.6.8 Tensorin komponentit kartanvaihdossa

Kahden vektoriavaruuden tensoritulon määritelmä 2.4.8 esiteltiin Multilineaarisen algebran kappaleessa. Kappaleen ideana on näyttää, mikä on

²⁴kantakovektori

²⁵Insinöörimatematiikan notaatio funktion gradientista on tavallisesti ∇f

tensoritulon määritelmän idea, ja kuinka tensorit käyttäytyvät kartanvaihdossa. Laajempi katsaus aiheesta löytyy esim. lähteestä [21]. Tensoritulon tarpeellisuus juontuu valenssiltaan ykköstä korkeammille tensoreille. Ykkös-valenssin tensorit eli vektorit ja kovektorit, pystyttiin esittämään kanta(ko)vektoreiden lineaarikombinaationa seuraavasti

$$X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i} \quad \text{vektori} \quad (2.65)$$

$$\omega = \omega_i dx^i \quad \text{kovektori} \quad (2.66)$$

Kovektori ω on tensorikielellä ilmaistuna kovariantti 1-tensori, joka pystyy toimimaan siis yhteen vektoriin, tarkoittaen $\omega(X)$. Puretaan tämä toiminta auki

$$\omega(X) = \omega_i dx^i \left(X^a \frac{\partial}{\partial x^a} \right) = \omega_i X^a dx^i \left(\frac{\partial}{\partial x^a} \right) = \omega_i X^a \delta_m^i = \omega_i X^i \quad (2.67)$$

Olkoon α kovariantti 2-tensori, joka pystyy toimimaan kahteen vektoriin. Noudatetaan samaa periaatetta, mitä kovektorille ω ja yritetään esittää se kantavektoreiden dx^i lineaarikombinaationa

$$\alpha = \alpha_{ij} dx^i dx^j \quad (2.68)$$

Tämä on tyyli, joka esiintyy monesti kirjallisuudessa, mutta se ei ole matemaattisesti täysin formaali. Ongelma on siinä, että minkälainen laskutoimenpide on kantavektoreiden $dx^i dx^j$ välissä? Siinä ei voi olla binäärioperaationa kertolaskua, koska kovektoreiden joukolle ei ole määritelty kunnan tai renkaan rakennetta. Kysymys ei tietenkään ole kovektorin toiminnasta toiseen kovektoriin, koska kovektorit voivat toimia vain tavallisiin vektoreihin. Tätä varten määriteltiin tensoritulo, josta käytetään merkintää \otimes . Tensoritulo tekee oikeutuksen notaatiolle $dx^i dx^j$ eli $dx^i \otimes dx^j$, missä $dx^i \otimes dx^j$ on kyseisen tensotuloavaruuden kantavektori. Tensoritulon kuvaus-tyypitys kahdelle kovektorille $\varphi, \beta \in T^*M$ on seuraava

$$\otimes : T_p^*M \times T_p^*M \longrightarrow T_p^2M \quad (2.69)$$

$$(\varphi, \beta) \longmapsto \otimes(\varphi, \beta) := \varphi \otimes \beta \quad (2.70)$$

jossa T^*M ja T^2M ovat molemmat vektoriavaruuksia. $\varphi \otimes \beta$ toimii kahteen vektoriin $X, Y \in T_pM$ seuraavasti

$$\begin{aligned} \varphi \otimes \beta : T_pM \times T_pM &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (X, Y) &\longmapsto \varphi \otimes \beta(X, Y) = \varphi(X) \cdot_{\mathbb{R}} \beta(Y) \end{aligned}$$

Tensoritulon määritelmä 2.4.8 mahdollistaa tensoreiden kirjoittamisen tensorituloavaruuden kantavektoreiden lineaarikombinaationa. Otetaan esimerkiksi kovariantti 2-tensori $g = g_{ij}dx^i \otimes dx^j$, joka sijaitsee moniston pisteessä p .²⁶ Se toimii vektoreihin $X, Y \in T_pM$ seuraavasti:

$$\begin{aligned} g(X, Y) &= g_{ij} dx^i \otimes dx^j(X, Y) \\ &= g_{ij} dx^i(X) dx^j(Y) \\ &= g_{ij} dx^i\left(X^a \frac{\partial}{\partial x^a}\right) dx^j\left(Y^b \frac{\partial}{\partial x^b}\right) \\ &= g_{ij} X^a Y^b dx^i\left(\frac{\partial}{\partial x^a}\right) dx^j\left(\frac{\partial}{\partial x^b}\right) \\ &= g_{ij} X^a Y^b \delta_a^i \delta_b^j \\ &= g_{ij} X^i Y^j \end{aligned}$$

missä g_{ij} ovat tensorin komponentit. Nämä komponentit ovat reaalityyppisten kokoonnelmien kokoelma, joita voidaan kuvitella matriisina²⁷. Tensorien komponenttien matriisikäsittelyssä kannattaa olla varovainen siinä mielessä, jos niillä aiotaan suorittaa matriisilaskennasta tuttuja operaatioita. Syy on seuraava. Olkoon $A = A^i_j \frac{\partial}{\partial x^i} \otimes dx^j$ (1,1)-tensori, jonka komponentit ovat indeksimuodossa A^i_j . Nyt jos verrataan tensorin g ja tensorin A komponentteja g_{ij} ja A^i_j vastaavasti, niin molempia voidaan kyllä käsitellä matriiseina.

$$g_{ij} \sim \begin{bmatrix} g_{11} & \dots & g_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{n1} & \dots & g_{nn} \end{bmatrix} \quad A^i_j \sim \begin{bmatrix} A^1_1 & \dots & A^1_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A^n_1 & \dots & A^n_n \end{bmatrix} \quad (2.71)$$

²⁶Laskenta esimerkkien notaatiossa on jätetty piste p merkittömättä. Tensori g ja vektorit X, Y sijaitsevat kaikki moniston tietyssä pisteessä p . Yleisesti objektien sijaintoja pisteessä merkitään alaindeksillä, kuten g_p, X_p, Y_p

²⁷Vektorin komponentit pisteessä p ovat reaalityyppisiä, jotka esitellään monesti pystymatriisina ($n \times 1$)

Mutta kuinka tensoreiden $A \in T_1^1 M$ ja $g \in T_2^0 M$ komponentit muuntuvat kannanvaihdossa? Jos D olisi jokin kannanvaihtomatriisi, niin onko A :n muunnos $D^T A D$ vai $D^{-1} A D$ - molempia nähdään usein oppikirjoissa. Olenasta on se, että näiden kahden tensorin komponentit muuntuvat täysin erilailla, kun kanta vaihtuu, vaikka molempien komponentteja voidaankin käsitellä matriiseina. Myös tensoreiden ominaisarvojen kanssa pitää olla tarkkana. Tensorille A ominaisarvot ovat kyllä määriteltävissä, tarkoittaen, että ominaisarvoyhtälö voidaan kirjoittaa muodossa $A^i_j v^j = \lambda v^i$. Tästä voisi tehdä johtopäätöksen, että matriisille g_{ij} voidaan myös määrittellä ominaisarvot, mutta se ei olekaan mahdollista - g :n ominaisarvoyhtälöä ei voida kirjoittaa rikkomatta summausnotaation indeksisääntöä. Ominaisarvot ovat määritelty vain ja ainoastaan (1,1)-tensoreille. Tästä lisää metriikan kappaleessa 2.10.

Esimerkki 2.6.4 *(1,1)-tensorin kannanvaihto ja sen komponentit*

$$\begin{aligned} A^j_i dx^i \otimes \frac{\partial}{\partial x^j} &= A^j_i \underbrace{\frac{\partial x^i}{\partial y^a} dy^a}_{dx^i} \otimes \underbrace{\frac{\partial y^b}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial y^b}}_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \\ &= \underbrace{\frac{\partial x^i}{\partial y^a} \cdot \frac{\partial y^b}{\partial x^j} \cdot A^j_i}_{A^a_b} dy^a \otimes \frac{\partial}{\partial y^b} \end{aligned}$$

Esimerkki 2.6.5 *(0,2)-tensorin eli kovariantin 2-tensorin kannanvaihto ja sen komponentit*

$$\begin{aligned} g_{ij} dx^i \otimes dx^j &= g_{ij} \underbrace{\frac{\partial x^i}{\partial y^a} dy^a}_{dx^i} \otimes \underbrace{\frac{\partial x^j}{\partial y^b} dy^b}_{dx^j} \\ &= \underbrace{\frac{\partial x^i}{\partial y^a} \cdot \frac{\partial x^j}{\partial y^b} \cdot g_{ij}}_{g_{ab}} dy^a \otimes dy^b \end{aligned}$$

Kun tensoreiden komponentit määritellään uudessa kannassa, käytetään vektoreiden ja kovektoreiden muunnoskaavoja (2.6.5) ja (2.6.6) vastaavasti. Samalla periaatteella voidaan määritellä yleisen (r,s) -tensorin esitys eri kannassa. Riittää että tiedetään, kuinka vektorit ja kovektorit muuntuvat - mitään ulkoopittuja muistisääntöjä matriisien kääntyvyyksistä ja transposeista ei tarvita.

2.7 Kentät

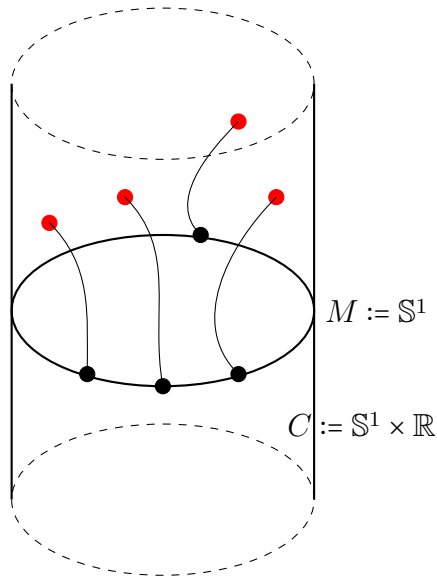
Fysikaalisten kenttien käsitteen esitteli ensimmäisenä kuuluisa keksijä ja tiedemies Michael Faraday (1791-1867). Faraday oli monilahjakkuus, josta poikkeuksellisen tieteen suurmiehen tekee se, että hänellä oli hyvin vähän muodollista koulutusta luonnontieteistä. Insinöörimatematiikan kursseilta tuttu vektorikenttien käsite avaruuden eri pisteissä sijaitsevilla vektoreilla on juurikin Faradayn luomus. Näin vektorikentät monesti käsitetään - vektori eri pisteissä. Kenttien ja vektoreiden käsittäminen tällä tavalla on siinä mielessä vaarallista, että sinä saatat käsittää jotain muuta, kuin minä. Tarkoitin tällä sitä, että me tarvitsemme yleispätevän matemaattisformaalin määritelmän kentille ja se onkin tämän kappaleen tavoite. Ennen kuin voimme määritellä kentän, tarvitsee meidän tutustua muutamaan uuteen differentiaaligeometrian käsitteeseen.

2.7.1 Bundlet

Bundle eli kimppu on aina kolmikko (M, π, E) , missä M on sileä monisto nimeltään *perusavaruus*, π surjektiivinen *projektiokuvaus* ja E sileä monisto jota kutsumme *totaaliavaruudeksi*. Projektiokuvaus π on sileä kuvaus totaaliavaruudelta perusavaruudelle eli $\pi : E \rightarrow M$.

Esimerkki 2.7.1 *Bundle esimerkki*

Yhdenlaisena raakana esimerkkinä voidaan antaa bundle, jonka totaaliavaruutena toimii sylinterin vaippa $E := \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$, jonka perusavaruutena toimii ympyrä $M := \mathbb{S}^1$. Sylinterin vaipan pisteet projisoidaan ympyrälle. Koska projektiokuvaus π on surjektiivinen, pitää perusavaruuden eli sileän moniston $M := \mathbb{S}^1$ jokaiseen pisteeseen kuvautua.



Kuva 2.34: Bundle esimerkki

Määritelmä 2.7.1 *Fiber eli kuitu*

Jos (E, π, M) on bundle ja piste $p \in M$ niin bundlen fiber on joukko

$$\text{preim}_{\pi}(\{p\}) \quad (2.72)$$

Kuitu johdetaan siis projektiokuvauksen π kautta. Edellä mainitussa esimerkissä bundlen fibre ovat kaikki ne pisteet sylinterin vaipalla C , jotka kuvautuvat perusavaruuden \mathbb{S}^1 tiettyyn pisteeseen p .

Määritelmä 2.7.2 *Bundlen kappale (eng. section)*

Jos (E, π, M) on bundle, niin $\sigma : M \rightarrow E$ on bundlen kappale, jos

$$\pi \circ \sigma = \text{id}_M \quad (2.73)$$

Nämä kappaleet ovat kenttiä. Se minkä tyylinen kenttä on kysymyksessä, riippuu valitsemastamme totaaliavaruudesta E .

2.7.2 Sileän moniston tangenttibundle

Jos $(M, \mathcal{O}, \mathcal{A})$ on sileä monisto, joka toimii bundlen perusavaruutena. Niin sileän moniston tangenttibundlen totaaliavaruus on seuraavanlainen joukko, josta käytämme notaatiota TM .

Määritelmä 2.7.3 *Joukko TM*

$$TM = \dot{\bigcup}_{p \in M} T_p M \quad (2.74)$$

Joka koostuu siis moniston pisteiden tangenttiavaruuksien $T_p M$ pistevieraista unioneista (engl. disjoint union). Myös tätä joukkoa kutsutaan "tangenttibundleksi". Varsinainen tangenttibundle ei ole kuitenkaan pelkkä joukko, vaan edellä mainitsemamme kolmikko.

Määritelmä 2.7.4 *Tangenttibundlen projektiokuvaus π*

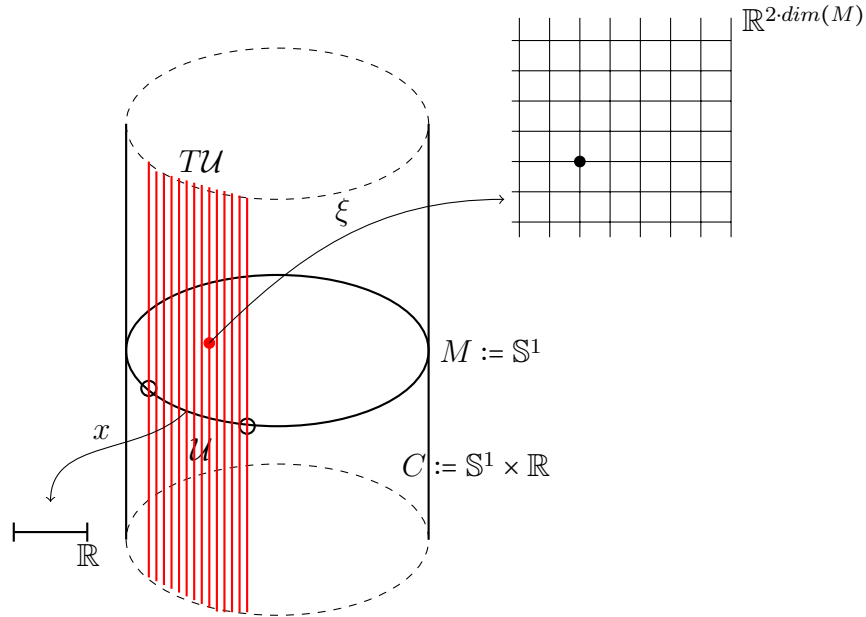
$$\pi : TM \longrightarrow M \quad (2.75)$$

$$(p, X_p) \longmapsto p \quad (2.76)$$

Koska joukko TM muodostuu moniston kaikkien tangenttiavaruuksien $T_p M$ erillisistä yhdisteistä, voidaan sen elementti kohdistaa aina moniston tiettyyn pisteeseen p . Muistutetaan, että kuvaus π on surjektiivinen kuvaus, eli jokaisen moniston M pisteeseen täytyy kuvautua.

Tällä hetkellä projektiokuvaus π on vain surjektiivinen. Bundlen määritelmässä projektiokuvauksen π täytyy olla myös sileä. Jotta voitaisiin puhua sileästä kuvauksesta, täytyy myös totaaliavaruuden TM eli "tangenttibundlen" olla sileä monisto - tällä hetkellä olemme määritelleet TM :n vasta joukoksi. Joukolle TM voidaan periyttää topologia perusavaruudelta M ja muodostaa se Hausdorffin avaruudeksi ks. [12, kpl. 1.25].

Jotta TM olisi sileä monisto, meidän täytyy muodostaa TM :lle sopiva Atlas. Tämä on hyvä ymmärtää ainakin jollain tasolla, koska myöhemmin klassisen mekaniikan luvussa tarvitsemme TM :n karttaa jatkuvasti. TM :n rooli on toimia nopeusavaruutena, jossa on tieto jokaisen moniston M pisteisiin liitetystä nopeusvektorien komponenteista. Katsotaan ensin alla olevaa kuvaa, jossa käytetään edellisen esimerkin bundlea.



Kuva 2.35: Tangenttibundlen kartta

Kuvassa monistolla $M := \mathbb{S}^1$ on avoin joukko \mathcal{U} , jonka alue on rajattu palleoilla. Tällä avoimella joukolla on kartta $(\mathcal{U}, x : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R})$, joka toimii perusavaruuden karttana. Punaiset viivat toimivat alueen \mathcal{U} pisteiden fibreinä²⁸, jotka muodostavat bundlen $T\mathcal{U}$. Ideana on muodostaa kartta $(T\mathcal{U}, \xi)$, joka pystyy kuvaamaan kaikki pisteet fibreiltä eli kuiduilta $\mathbb{R}^{2 \cdot \dim(M)}$:lle. Me emme halua hukata kartan x informaatiota, joten muodostamme kartan ξ kartan x avulla. Tangenttibundlen atlas muodostetaan seuraavasti

$$\mathcal{A}_{TM} := \{(T\mathcal{U}, \xi_x) \mid (\mathcal{U}, x) \in \mathcal{A}\} \quad (2.77)$$

missä

$$\begin{aligned} \xi_x : T\mathcal{U} &\longrightarrow \mathbb{R}^{2 \cdot \dim(M)} \\ X &\longmapsto (x^1(p), \dots, x^n(p), \dot{x}^1(p), \dots, \dot{x}^n(p)) \end{aligned} \quad (2.78)$$

Kartan kuvaan muodostuu n kappaletta paikkakoordinaatteja ja n kappaletta nopeuskoordinaatteja. Formaalisti paikkakoordinaatit määritellään

²⁸Tangenttibundlessa fibret, eli kuidut ovat moniston M pisteisiin liitettyjä tangenttivaruuksia $T_p M$

X :n avulla käyttäen projektiokuvausta $(x^i \circ \pi)(X)$ ja nopeuskoordinaatit $dx^i(X)$, mutta kuvauksen 2.78 esitys on jatkoa ajatellen selkeämpi. Koko TM :n kartta rakennetaan vastaavalla tavalla ottamalla avoimia joukkoja \mathcal{U} :lta niin, että koko TM on katettu.

Seuraavaksi pitäisi tarkistaa, että kartta ξ_x on homeomorfismi eli bijektiivinen kuvaus, joka on molempiin suuntiin jatkuva. Lähteessä [12, kpl. 1.25] tämä todistus on tehty, joten voimme kutsua totaaliavaruutta TM sileäksi monistoksi. Samassa lähteessä on todistettu myös, että projektiokuvaus π on sileä. Näin ollen kolmikkomme (TM, π, M) on muodostunut tangenttibundleksi, joka myöhemmin klassisen mekaniikan kappaleessa on kovassa käytössä.

2.7.3 Kotangenttibundle

Vastaavalla tavalla, kuin tangenttibundle (TM, π, M) , sileälle monistolle voidaan määritellä kanonisesti myös kotangenttibundle (T^*M, π, M) . Ks. todistus lähteestä [1, s.276]. Kotangenttibundlen joukko on

$$T^*M = \dot{\bigcup}_{p \in M} T_p^*M \quad (2.79)$$

Vektoribundlet

Jos bundlen (E, π, M) fibret eli kuidut ovat vektoriavaruuksia, kutsutaan bundlea *vektoribundleksi*. Tangenttibundlen (TM, π, M) ja kotangenttibundlen (T^*M, π, M) fibret ovat tangenti- ja kotangenttivektoriavaruuksia T_pM ja T_p^*M moniston eri pisteissä. Nämä ovat siis myös vektoribundleja.

2.7.4 Tensoribundle

Sileän moniston M (r,s) -tensoribundle bunle voidaan rakentaa käyttämällä tangenti- ja kotangenttibundlien tensorituloa

$$T_s^r(M) = \underbrace{T^*M \otimes \cdots \otimes T^*M}_{r \text{ kpl}} \otimes \underbrace{TM \otimes \cdots \otimes TM}_{s \text{ kpl}} \quad (2.80)$$

Huomio 6 *Bundle-teoria yleisesti on hyvin laaja ja syvä osa-alue differentiaaligeometrian teoriassa. Nykypäivän modernin fysiikan rakenteet nojautuvat vahvasti bundle-teoriaan ja mainittakoon, että erityisesti nk. fibre-bundlet näyttelevät hyvin isoa osaa nykyfysiikan kehityksessä.*

2.7.5 Vektorikentät

Bundlen (E, π, M) kappale σ on kuvaus $\sigma : M \rightarrow E$, joka toteuttaa ehdon $\pi \circ \sigma = id_M$. Kappale on vektorikenttä, jos bundle on tangentialbundle (TM, π, M) . Vektorikenttä²⁹ X on siis kuvaus $X : M \rightarrow TM$, joka toteuttaa $\pi \circ X = id_M$. Vektorikenttä on siis vektori moniston eri pisteissä³⁰, joka voidaan tyypittää

$$\begin{aligned} X : M &\rightarrow TM \\ p &\mapsto X(p) := X_p \end{aligned} \tag{2.81}$$

Tensorikentät

Sileän moniston M Tensorikentät ovat M :n tensoribundlien $(T_s^r(M), \pi, M)$ kappaleita.

2.7.6 Moduli

Edellisessä kappaleessa määrittelimme käyrien tangenttivektoreille joukon $T_p M$ jossain moniston tietyssä pisteessä p . Tästä joukosta tehtiin vektoriavaruus siten, että se toteuttaa kappaleessa 2.4 Multilineaarinen algebra esitetyt vektoriavaruuden aksioomat 2.4.1. Tämä vektoriavaruus oli \mathbb{R} -vektoriavaruus $(V, +, \cdot)$. Vielä täsmällisemmin ilmaistuna tämä on \mathbb{R} -vektoriavaruus *skalaarikunnassa*. Tämä tarkoittaa, että joukko $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ muodosti kunnan.

Määritelmä 2.7.5 $(\underbrace{K}_{\mathbb{R}}, +, \cdot)$ on kunta jos se toteuttaa

²⁹tarkemmin sanottuna sileä vektorikenttä, koska π on sileä kuvaus sileiden monistojen välillä

³⁰pisteissä, jossa vektorikenttä on määritelty

K^+	<i>Kommutatiivisuus</i>
A^+	<i>Assosiatiivisuus</i>
N^+	<i>Neutraalialkio</i>
I^+	<i>Inverssi alkio</i>
K^\cdot	<i>Kommutatiivisuus</i>
A^\cdot	<i>Assosiatiivisuus</i>
N^\cdot	<i>Neutraalialkio</i>
I^\cdot	<i>Inverssi alkio</i>
$D^{+,\cdot}$	<i>Distributiivisuus</i>

On olemassa kuntaa yleisempi rakenne, jota kutsutaan renkaaksi.

Määritelmä 2.7.6 $(K, +, \cdot)$ on rengas, jos se toteuttaa

K^+	<i>Kommutatiivisuus</i>	
A^+	<i>Assosiatiivisuus</i>	
N^+	<i>Neutraalialkio</i>	
I^+	<i>Inverssi alkio</i>	
K^\cdot	<i>Kommutatiivisuus</i>	
A^\cdot	<i>Assosiatiivisuus</i>	
N^\cdot	<i>Neutraalialkio</i>	
I^\cdot	<i>Inverssi alkio</i>	<i>Tätä ei tarvitse toteuttaa</i>
$D^{+,\cdot}$	<i>Distributiivisuus</i>	

Renkaan käsite on tärkeä muodostettaessa joukkoa vektorikentille X . Emme voi käyttää samaa tangenttivektoreiden \mathbb{R} -vektoriavaruuden rakennetta skalaarikunnassa, koska vektorikentän vektorit saattavat muuttua hyvinkin paljon moniston eri pisteissä. Tarkoittaen sitä, että meille ei riitä vektoreiden skaalaus pelkillä vakio reaaliluvuilla. Tarvitsemme keinon, jolla vektorit skaalautuvat eri tavalla moniston eri pisteissa ja tämä voidaan tehdä luonnollisesti funktioilla. Voimme käyttää sileiden funktioiden joukkoa $C^\infty(M)$ ja muodostaa $C^\infty(M)$ -vektoriavaruuden. Tämä kyseinen avaruus ei voi kuitenkaan olla $C^\infty(M)$ -vektoriavaruus skalaarikunnassa, koska meille tulisi uusi ongelma.

Olemme tähän mennessä rakentaneet teoriaamme käyttäen nk. Zermelo–Fraenkel joukko-oppia valinta-aksioomalla (ZFC), jossa paino sanalle *valinta-aksiooma*. ZFC-teoriolla voidaan todistaa, että *jokaiselle* vektoriavaruudelle skalaarikunnassa voidaan valita kanta. Tämä kuulostaa alkuun hyvältä - jos vektorikentät olisivat skalaarikunta vektoriavaruuden elementtejä, niin mielivaltainen vektorikenttä X , voitaisiin esittää

kanta-vektorikenttien lineaarikombinaationa. Mutta kuvitellaan seuraavaa tilannetta, jota kutsutaan nk. ”pallon kampausta”-ongelmaksi. Jossa sinulla on pallolla sileitä vektorikenttiä, niin kaikilla näillä vektorikentillä on aina jokin piste, jossa kenttä häviää täysin. Joten et pysty muodostamaan pallolle kanta-vektorikenttiä, joiden lineaarikombinaatioina mielivaltaiset vektorikentät pystyttäisiin esittämään - kanta-vektorikentät häviäisivät väkisinkin pallon tietyissä pisteissä, jolloin niitä ei voisi kutsua enään kannoiksi.

Ongelmaan on kuitenkin ratkaisu, nimittäin $C^\infty(M)$ -vektoriavaruus *renkaassa*. Tämä on erityislaatuinen rakenne ja sille on annettu oma nimensä, $C^\infty(M)$ -moduli. ZFC-teoriolla todistettiin, että jokaiselle vektoriavaruudelle skalaarikunnassa voidaan valita kanta. Vastaavaa tulosta ei kuitenkaan ole $C^\infty(M)$ -moduleille, jotka ovat vektoriavaruuksia renkaassa [22, s.124 (6)]. Tämä on juurikin se mitä haluamme kuulla. Me emme tarvitse kantaa vektorikentille, koska sitä ei ole aina mahdollista antaa³¹. Tämän takia sileiden vektorikenttien joukolle on määritelty oma rakenteensa jota kutsutaan $C^\infty(M)$ -moduliksi. Kyseistä modulia merkitään $(\Gamma(TM))$, jossa joukko $\Gamma(TM)$ on

$$\Gamma(TM) := \{X : M \longrightarrow TM \mid \text{sileä kappale}\} \quad (2.82)$$

jonka alkiot, eli sileät vektorikentät³² toteuttavat

$$(X+Y)(f) = X(f) + Y(f) \quad (2.83)$$

$$(g \cdot X)(f) = g \cdot X(f) \quad (2.84)$$

jossa mustalla merkityt yhteen- ja kertolaskut $(+, \cdot)$ ovat kyseiset operaatiot $C^\infty(M)$ -renkaassa ja $(X, Y \in \Gamma(TM))$ ja $g, f \in C^\infty(M)$.

Kovektorikentät kuuluvat $C^\infty(M)$ -moduliin $\Gamma(T^*M)$ ja (r,s) -tensorikentät moduliin $\Gamma(T_s^r M)$. Käsittelemme jatkossa $C^\infty(M)$ -moduleita vektoriavaruuksina (mitä ne kyllä ovatkin), välittämättä tästä rengas-yksityiskohdasta

³¹Vektorikenttien vektorit moniston pisteissä voidaan tietenkin esittää kyseisen tangenttiavaruuden kannoilla

³²sileät kappaleet

ja erityisestä nimestä moduli. Syvempää tietoa moduleista voi katsoa esim. lähteestä [22, s.109-158].

Esimerkki 2.7.2 Vektorikentän $X \in \Gamma(TM)$ toiminta funktioon f

Vektorikentän toiminta funktioon esitetään usein kuvauksena

$$\begin{aligned} X : C^\infty(M) &\longrightarrow C^\infty(M) \\ f &\longmapsto X(f) := Xf \end{aligned} \quad (2.85)$$

jossa on piilotettuna vektorikentän³³ kuvaus $X : M \longrightarrow TM, p \longmapsto X_p$. Vektorikenttä X toimii funktioihin, kuten kentän vektorit jokaisessa kentän lähdejoukon M pisteessä, jossa ne kenttä määritetty.

Frame

Jos $C^\infty(M)$ -modulille $\Gamma(TM)$ tai $\Gamma(T^*M)$ löydetään kanta, käytetään siitä nimitystä *frame*. Frame on siis (ko)vektorikentän kanta. Jos modulille $\Gamma(TM)$ löytyisi kartan x mukainen frame, merkittäisiin sitä

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n} \right) \quad (2.86)$$

jonka coframe olisi

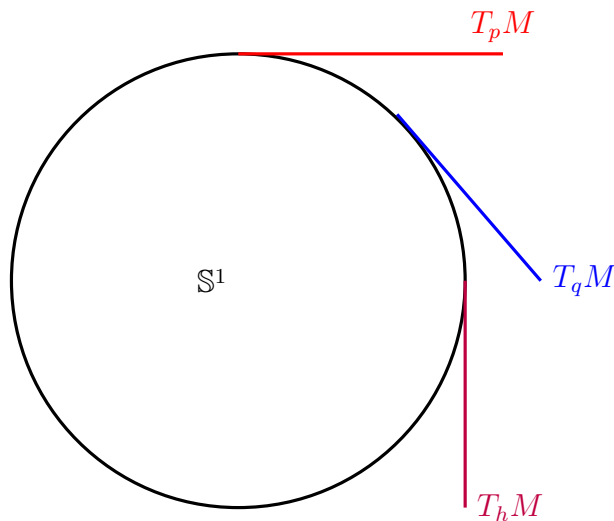
$$\left(dx^1, dx^2, \dots, dx^n \right) \quad (2.87)$$

2.8 Konnektio

Tähän mennessä olemme määritelleet neljä matemaattisista struktuuria. Ensimmäiseksi esittelimme joukon, josta rakensimme topologisen avaruuden,

³³tangettibundlen kappale

mistä edelleen muodostimme topologisen moniston ja josta viimein rakentui sileä monisto. Kaikki nämä edellä mainitut struktuurit tarvitsivat muodostuakseen jonkin lisärakenteen³⁴, joka perustui omaan valintaamme. Viime kappaleessa 2.7 Kentät, määrittelimme kanonisesti³⁵ sileiden monistojen tangentti- ja kotangenttibundlet³⁶, jotka olivat myös sileitä monistoja. Tässä kappaleessa esitellään uusi lisärakenne, joka on nimeltään *konnektio*, tarkemmin sanottuna vektoribundlen konnektio. Konnektio kertoo, kuinka vektoribundlen kappaleet eli kentät siirtyvät yhdensuuntaisesti sileän moniston eri pisteiden välillä. Eri bundleilla, on erilainen konnektio. Aloitamme tangenttibundlen konnektiosta, josta käytetään kirjallisuudessa nimitystä *lineaarinen konnektio* tai *affini konnektio*. Tämän jälkeen esittelemme kotangenttibundlen konnektion, minkä jälkeen määrittelemme yleisen (r,s) -tensoribundlen konnektion. Kaikkien vektoribundlien konnektion määrittelee nk. *kovariantti derivaatta*. Mainittakoon niille, jotka tuntevat teoriaa jo entuudestaan, että tässä kappaleessa ei ole kysymys Levi-Civita konnektiosta. Levi-Civita konnektio esitellään kappaleessa 2.10 Metriikka.



Kuva 2.36: Tangenttiavaruuksien yhdensuuntainen siirtyminen

2.8.1 Tensorikentän suunnattu derivaatta

Alla on esiteltyinä kaksi kuvausta, vektorikentän toiminta funktioon ja funktion gradienttikentän toiminta vektorikenttään.

³⁴lisärakenteita ovat olleet topologia, atlas, ja sileä (rajoitettu) atlas

³⁵luonnollisella tavalla. Kanoninen määrittely ei tarvitse mitään lisärakennetta

³⁶tangentti- ja kotangenttibundlet ovat molemmat nk. vektoribundleja, koska bundlien fibret eli kuidut ovat vektoriavaruuksia $T_p M$ ja $T_p^* M$

$$\begin{aligned} X : C^\infty(M) &\longrightarrow C^\infty(M) \\ f &\longmapsto X(f) := Xf \end{aligned} \quad (2.88)$$

$$\begin{aligned} df : \Gamma(TM) &\longrightarrow C^\infty(M) \\ X &\longmapsto (df)(X) := Xf \end{aligned} \quad (2.89)$$

Seuraavaksi esittelemme uuden objektin ∇_X , jossa $X \in \Gamma(TM)$. ∇_X toimii funktioon $f \in C^\infty(M)$ seuraavasti.

$$\begin{aligned} \nabla_X : C^\infty(M) &\longrightarrow C^\infty(M) \\ f &\longmapsto \nabla_X f := Xf \end{aligned} \quad (2.90)$$

joka toteuttaa

$$i) \quad \nabla_X(f + g) = \nabla_X(f) + \nabla_X(g) \quad (2.91)$$

$$ii) \quad \nabla_{X_1+X_2}(f) = \nabla_{X_1}f + \nabla_{X_2}f \quad (2.92)$$

$$ii) \quad \nabla_X(gf) = g\nabla_X(f) + \nabla_X(g)f \quad (2.93)$$

$$iv) \quad \nabla_{gX}(Y) = g\nabla_X Y \quad (2.94)$$

Tämä on aivan sama asia kuin funktion suunnattu derivaatta (2.88) ja funktion gradienttikentän toiminta vektoriin eli $Xf = df(X) = \nabla_X f$. Nabla ∇_X ei ole kuitenkaan notaatioteknillinen ylilyönti. Idea nablassa on siinä, että se pystyy toimimaan mielivaltaiseen tensorikenttään $\Gamma(T_s^r M)$ eli se on suunnatun derivaatan yleistys, jossa ala-argumenttina oleva vektorikenttä³⁷ X viittaa suuntaan, johon derivointi suoritetaan. ∇_X on derivaatio eli lineaarinen kuvaus joka toteuttaa Leibnizin säännön, mikä yleisemmin tunnetaan tulo-derivoimissääntönä. ∇_X -kuvausta kutsutaan myös kovariantiksi derivaataksi, joka on yleisesti kuvaus

$$\begin{aligned} \nabla_X(\bullet) : \Gamma(T_s^r M) &\longrightarrow \Gamma(T_s^r M) \\ T &\longmapsto \nabla_X T \end{aligned} \quad (2.95)$$

eli kuvaus ∇_X syö (r,s)-tensorin ja sylkee ulos (r,s) tensorin.

³⁷voi olla myös pisteessä oleva vektori

Tangenttibundlen konnektio

Määritellään seuraavaksi nablän ∇ toiminta vektorikentälle $Y \in \Gamma(TM)$ vektorikentän $X \in \Gamma(TM)$ suuntaan.

$$\begin{aligned}\nabla_X : \Gamma(TM) &\longrightarrow \Gamma(TM) \\ Y &\longmapsto \nabla_X Y\end{aligned}\tag{2.96}$$

jossa,

$$\begin{aligned}\nabla_X Y &:= \nabla_{X^i \frac{\partial}{\partial x^i}} \left(Y^j \frac{\partial}{\partial x^j} \right) = \\ &= X^i \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} (Y^j) \frac{\partial}{\partial x^j} + X^i Y^j \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \right) = \\ &= X^i \frac{\partial}{\partial x^j} (Y^j) \frac{\partial}{\partial x^j} + X^i Y^j \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \right)\end{aligned}\tag{2.97}$$

Edellä on käytetty Leibnizin sääntöä ja määritelmää 2.90, jossa vektorin Y komponentit $Y^j \in C^\infty(M)$ ovat siis funktiota. Viimeisessä termissä meillä on kantavektorin $\frac{\partial}{\partial x^j}$ derivointi toisen kantavektorin $\frac{\partial}{\partial x^i}$ suuntaan eli $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \right)$. Tämä on määritelty seuraavasti³⁸:

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \right) := \Gamma^q_{ij} \frac{\partial}{\partial x^q}\tag{2.98}$$

Gamma symboleita Γ^q_{ji} kutsutaan tangenttibundlen TM konnektiokertoimiksi. Konnetionkertoimien määrittelyn jälkeen saamme muotoilun (2.97) näyttämään seuraavalta

$$\nabla_X Y := X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} + \Gamma^q_{ij} X^i Y^j \frac{\partial}{\partial x^q}\tag{2.99}$$

$$= \left(X^i \frac{\partial Y^q}{\partial x^i} + \Gamma^q_{ij} X^i Y^j \right) \frac{\partial}{\partial x^q}\tag{2.100}$$

³⁸kun vektorikenttää derivoidaan toisen vektorikentän suuntaan, saadaan uusi vektorikenttä, joka on oltava jokin lineaarikombinaatio kertoimista, jotka riippuvat molemmista ∇ :n argumentteina olevista kantavektorikentistä

Edellä esitettyjen tulosten perusteella voidaan määritellä tangenttibundlen TM konnektio, jonka tuottaa kovariantti derivaatta

Määritelmä 2.8.1 *Tangenttibundlen TM konnektio*

Tangenttibundlen konnektio on kovariantti derivaatta $\nabla_X : \Gamma(TM) \rightarrow \Gamma(TM)$, jolla on seuraavat ominaisuudet

$$i) \quad \nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z \quad (2.101)$$

$$ii) \quad \nabla_{X_1+X_2}(Y) = \nabla_{X_1} Y + \nabla_{X_2} Y \quad (2.102)$$

$$ii) \quad \nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + \nabla_X(f)Y \quad (2.103)$$

$$iv) \quad \nabla_{fX}(Y) = f\nabla_X Y \quad (2.104)$$

Kotangenttibundlen konnektio

Seuraavaksi olemme kiinnostuneita kotangenttibundlen T^*M konnektiosta. Jos otamme kovariantin derivaatan kovektorista $\omega \in T^*M$, eli

$$\begin{aligned} \nabla_X : \Gamma(T^*M) &\longrightarrow \Gamma(T^*M) \\ \omega &\longmapsto \nabla_X \omega \end{aligned} \quad (2.105)$$

jossa,

$$\begin{aligned} \nabla_X \omega &:= \nabla_{X^m \frac{\partial}{\partial x^m}} (\omega_j dx^j) = X^m \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^m}} (\omega_j) dx^j + X^m \omega_j \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^m}} (dx^j) = \\ &= X^m \frac{\partial}{\partial x^m} (\omega_j) dx^j + X^m \omega_j \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^m}} (dx^j) \end{aligned} \quad (2.106)$$

niin meitä kiinnostaa termi $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} dx^j$, joka on kokantavektorin suunnattu derivaatta tavallisen kantavektorin suuntaan. Merkitään kotangenttibundlen konnektiokertoimia aluksi Λ_{ij}^q eli

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^m}} dx^j = \Lambda_{mq}^j dx^q \quad (2.107)$$

Jos annamme edellä olevan yhtälön vasemman puolen toimia tavalliseen kantavektoriin, saamme kroneckerin deltan δ_m^j , jonka kovariantti derivointi tuottaa tietysti nollan

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^m}} \left(dx^j \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right) \right) = \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^m}} (\delta_m^j) = \frac{\partial}{\partial x^m} (\delta_m^j) = 0 \quad (2.108)$$

Voimme toisaalta muotoilla edellä olevan yhtälön vasemman puolen käyttäen Leibnizin sääntöä, jolloin saamme

$$\begin{aligned} \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^m}} dx^j \right) \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right) + dx^j \underbrace{\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^m}} \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right) \right)}_{\Gamma_{mi}^q} &= 0 \\ \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^m}} dx^j \right) \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right) &= -\Gamma_{mi}^q dx^j \frac{\partial}{\partial x^q} \\ \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^m}} dx^j \right)_i &= -\Gamma_{mi}^j \end{aligned} \quad (2.109)$$

kokantakovektorin dx^i suunnattu derivaatta $\frac{\partial}{\partial x^m}$ suuntaan on siis

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^m}} (dx^i) := -\Gamma_{mj}^i dx^j \quad (2.110)$$

eli kotangenttibundlen konnektiokertoimet ovat vastaavia, kuin tangenttibundlen konnektiokertoimet, mutta varustettuina negatiivisella etumerkillä eli $\Lambda_{qi}^j = -\Gamma_{qi}^j$. Nyt saamme esitettyä muotoilun (2.106) seuraavasti

$$\begin{aligned} \nabla_X \omega &= X^i \frac{\partial \omega_j}{\partial x^i} dx^j - \Gamma_{iq}^j dx^q X^i \omega_j \\ &= \left(X^i \frac{\partial \omega_j}{\partial x^i} - \Gamma_{ij}^q X^i \omega_q \right) dx^j \end{aligned} \quad (2.111)$$

Nyt voimme määritellä kotangenttibundlen T^*M konnektion, jonka tuottaa kovariantti derivaatta $\nabla_X \omega$

Määritelmä 2.8.2 *Kotangenttibundlen T^*M konnektio*

*Kotangenttibundlen konnektio on kovariantti derivaatta $\nabla_X : \Gamma(TM) \rightarrow \Gamma(T^*M)$, jolla on seuraavat ominaisuudet*

$$i) \quad \nabla_X(\omega + \sigma) = \nabla_X\omega + \nabla_X\sigma \quad (2.112)$$

$$ii) \quad \nabla_{X_1+X_2}(\omega) = \nabla_{X_1}\omega + \nabla_{X_2}\omega \quad (2.113)$$

$$ii) \quad \nabla_X(f\omega) = f\nabla_X\omega + \nabla_X(f)\omega \quad (2.114)$$

$$iv) \quad \nabla_{fX}(\omega) = f\nabla_X\omega \quad (2.115)$$

Verrataan vektorikentän Y ja kovektorikentän ω kovariantteja derivaattoja

$$\nabla_X(Y) = \left(X^i \frac{\partial Y^q}{\partial x^i} + \Gamma^q_{ij} X^i Y^j \right) \frac{\partial}{\partial x^q} \quad (2.116)$$

$$\nabla_X(\omega) = \left(X^i \frac{\partial \omega_j}{\partial x^i} - \Gamma^q_{ij} X^i \omega_q \right) dx^j \quad (2.117)$$

Erilaisilla vektoribundleilla, on siis erilainen konnektio. Nämä edellä esitetyt molemmat eri konnektioidut voidaan kuitenkin määrittellä käyttäen samoja konnektiokertoimia Γ .

Tensoribundlen konnektio

Näiden kahden edellä esitetyn konnektion avulla voidaan määrittellä konnektiokertoimet myös yleiselle (r,s) -tensoribundlelle $T^r_s M$. Käyttäen samaa periaatetta, kuin muotoilussa (2.109), saadaan esimerkiksi $T^2_0 M$, $T^1_1 M$ ja $T^0_2 M$ tensoribundleille seuraavanlaiset konnektiokertoimet

$$\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^m}} (dx^i \otimes dx^j) \right)_{ab} = -\Gamma^i_{ma} \delta^j_b - \Gamma^j_{mb} \delta^i_a$$

$$\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^m}} \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \otimes dx^j \right) \right)_b^a = \Gamma^a_{mi} \delta^j_b - \Gamma^j_{mb} \delta^a_i$$

$$\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^m}} \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \otimes \frac{\partial}{\partial x^j} \right) \right)^{ab} = \Gamma^a_{mi} \delta^b_j + \Gamma^b_{mj} \delta^a_i$$

Kun tiedetään, kuinka vektoribundlen konnektiokertoimet määritellään, voidaan esittää mielivaltaisen (r,s) -vektoribundlen konnektio

Määritelmä 2.8.3 (r,s) -tensoribundlen $T_s^r M$ konnektio

(r,s) -tensoribundlen konnektio on kovariantti derivaatta $\nabla_X : \Gamma(T_s^r M) \rightarrow \Gamma(T_s^r M)$, jolla on seuraavat ominaisuudet

$$i) \quad \nabla_X(T + S) = \nabla_X T + \nabla_X S \quad (2.118)$$

$$ii) \quad \nabla_{X_1+X_2}(T) = \nabla_{X_1} T + \nabla_{X_2} T \quad (2.119)$$

$$ii) \quad \nabla_X(fT) = f\nabla_X T + \nabla_X(f)T \quad (2.120)$$

$$iv) \quad \nabla_{fX}(T) = f\nabla_X T \quad (2.121)$$

Esimerkki 2.8.1 $F = F_{ij} dx^i \otimes dx^j$ kovariantti derivaatta kartalla (\mathcal{U}, x) .

$$\nabla_X F = \left(X^m \partial_m F_{ab} - \Gamma_{ma}^i X^m F_{ib} - \Gamma_{mb}^j X^m F_{aj} \right) dx^a \otimes dx^b$$

missä ∂_m on lyhennetty notaatio merkinnästä $\frac{\partial}{\partial x^m}$.

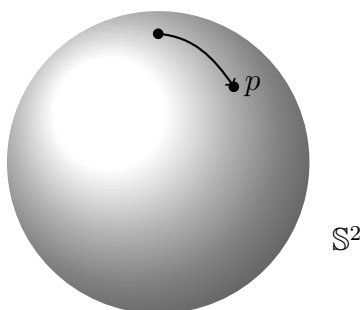
2.8.2 Konnektiokertoimet

Kaikkien vektoribundlien konnektio on siis johdannainen Gamma-symboleista Γ_{ij}^q , jotka määritellään tangenttibundlelle. Tangenttibundlen konnektion kautta pystymme laskemaan konnektiokertoimet mille tahansa bundlelle. Tangenttibundlen konnektiokertoimet kertovat, kuinka moniston eri pisteiden tangenttiavaruuksien vektoreita liikutellaan yhdensuuntaisesti monistolla. Euklidisessa avaruudessa ei konnektiosta tarvitse huolehtia, koska jokaisen pisteen tangenttiavaruudet ovat täysin samat. Toisin on esimerkiksi ympyrällä \mathbb{S}^1 , jossa tangenttivektoreita ei voida liikutella yhdensuuntaisesti elleimme saa siihen jonkinlaisia ohjeita - nämä ohjeet ovat juurikin kyseinen lisärakenne eli konnektio. Konnektiokertoimet ovat lisärakenne eli ne pitää ensiksi määritellä vektoribundlelle, ennen kuin niillä voidaan alkaa suorittamaan laskutoimituksia. Kun konnektio on määritelty,

voimme alkaa puhumaan sileän moniston muodosta. Konnektiokertoimet määrittävät siis pisteiden väliset suorimmat reitit.

Esimerkki 2.8.2 *Sileinä monistoina $(\mathbb{S}^2, \mathcal{O}, \mathcal{A})$ pallo, ellipsoidi ja sileä peruna ovat sama asia - puhutaan topologisesta isomorfismista. Jos tangenttibundlen konnektiota ei tiedetä, ei myöskään kyseisen moniston muodosta voida sanoa mitään. Jos haluamme määrittellä pallolle sen pyöreäyden sellaisena, kuten se yleisesti tunnetaan, voidaan tangenttibundlelle antaa esimerkiksi seuraavanlaiset konnektiokertoimet $\Gamma_{(x)jk}^i$, kartalla $(\mathcal{U}, x(p)) = (\theta, \varphi)$.*

$$\begin{aligned}\Gamma_{22}^1 &= -\sin(\theta) \cos(\theta) \\ \Gamma_{21}^2 &= \Gamma_{12}^2 = \cot(\theta) \\ \Gamma_{11}^1 &= \Gamma_{21}^1 = \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{11}^2 = \Gamma_{22}^2 = 0\end{aligned}$$



Kuva 2.37: Pyöreä pallo

Laskenta esimerkkejä konnektiokertoimilla seuraavassa kappaleessa 2.9 Vektorien yhdensuuntaissiirrot.

2.8.3 Konnektiokertoimet kartanvaihdossa

Jos $(M, \mathcal{O}, \mathcal{A}), (\mathcal{U}, x) \in \mathcal{A}$ on sileä monisto, niin Gamma-symbolit ovat kuvauksia

$$\Gamma^q_{ij} : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R} \quad (2.122)$$

$$p \longmapsto \left(dx^q \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} \right) \right) (p) \quad (2.123)$$

Konnektiokertoimet Γ^q_{ji} ovat siis funktioita, jotka riippuvat aina kartasta. Tämän takia olisi hyvä merkitä symboleihin kartta, missä ne esitetään, tarkoittaen $\Gamma^q_{(x)ji}$. Annetaan konnektiokertoimien kartanvaihdon kaava lahjaksi ilman johtoa

$$\begin{aligned} \Gamma^i_{(y)jk} &= dy^i \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial y^k}} \frac{\partial}{\partial y^j} \right) \\ &= \frac{\partial y^i}{\partial x^q} \frac{\partial x^s}{\partial y^j} \frac{\partial x^p}{\partial y^k} \Gamma^q_{(x)sp} + \frac{\partial y^i}{\partial x^q} \frac{\partial^2 x^q}{\partial y^k \partial y^j} \end{aligned} \quad (2.124)$$

Kuriositeettina kappaleen lopuksi divergenssin määritelmä konnektion avulla. Tätä voidaan verrata myöhemmin Metriikka kappaleessa 2.10 esiteltävään divergenssiin 2.10.7 nk. metrisen tensorin avulla, joka on luonnollisesti täysin vastaava asia vain eri tavalla nimettynä.

Vektorikentän divergenssi

Määritelmä 2.8.4 *Vektorikentän X , divergenssi*

$$\operatorname{div}(X) = \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} X \right)^i \quad (2.125)$$

2.9 Yhdensuuntaissiirrot

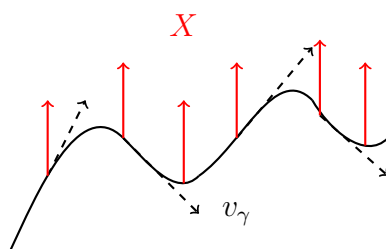
Kappaleessa tarkastellaan lähemmin edellisessä kappaleessa esiintynyttä tangenttibundlen konnektiota. Kyseisestä konnektiosta käytetään myös nimityksiä, affiini konnektio tai lineaarinen konnektio. Nyt oletamme, että sileällä monistolla on tangenttibundlen konnektio ∇ tarkoittaen, että täydellisyydessään merkittynä sileä monisto on $(M, \mathcal{O}, \mathcal{A}, \nabla)$.

2.9.1 Vektorikenttien yhdensuuntaisena siirtyminen

Määritelmä 2.9.1 *Tasaisesti saman suuntaisena siirtyvä vektorikenttä*

Vektorikenttä X sileällä monistolla M sanotaan olevan tasaisesti saman suuntaisena siirretty pitkin käyrää $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow M$ jos

$$\nabla_{v_\gamma} X = 0 \quad (2.126)$$



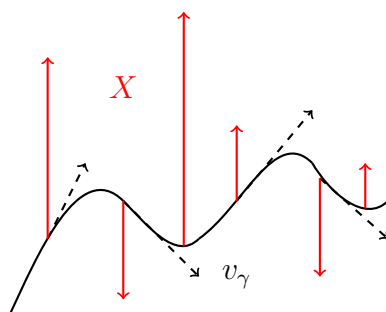
Kuva 2.38: Tasaisesti saman suuntaisena siirtyvä X

Määritelmä 2.9.2 *Saman suuntaisena siirtyvä vektorikenttä*

Vektorikenttä X sileällä monistolla M sanotaan olevan *saman suuntaisena siirretty* pitkin käyrää $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow M$ jos

$$\left(\nabla_{v_\gamma} X \right)_{\gamma(t)} = \mu X_{\gamma(t)} \quad (2.127)$$

missä $\mu : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.



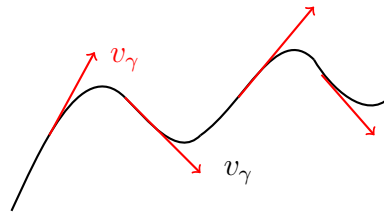
Kuva 2.39: Saman suuntaisena siirtyvä X

Mainittakoon itsestään selvyytensä, että jos $\mu = 0$, niin vektorikenttä on *tasaisesti* saman suuntaisena siirretty vektorikenttä. Saman suuntaisena siirretty vektorikenttä on siis heikempi määritelmä kuin 2.9.1.

Määritelmä 2.9.3 *Tasaisesti etenevä liike*

Kappale etenee tasaisella liikkeellä, jos sen muodostaman trajektorin eli käyrän $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow M$ tangenttivektoreiden muodostama vektorikenttä toteuttaa

$$\nabla_{v_\gamma} v_\gamma = 0 \quad (2.128)$$

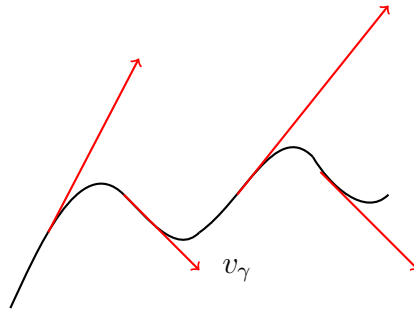


Kuva 2.40: Tasaisesti etenevä liike

Määritelmä 2.9.4 *Kiihtyvyydellä etenevä liike*

Kappale etenee pohun tangentin suuntaan kiihtyvällä liikkeellä, jos sen muodostaman trajektorin eli käyrän $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow M$ tangenttivektoreiden muodostama vektorikenttä toteuttaa

$$\nabla_{v_\gamma} v_\gamma = \mu v_\gamma \quad (2.129)$$



Kuva 2.41: Kiihtyvyydellä etenevä liike

2.9.2 Autoparalleeliyhtälöt

Tasaisesti etenevä partikkeli $\nabla_{v_\gamma} v_\gamma = 0$ muodostaa nk. autoparalleeliyhtälöt. Seuraavassa johdossa käytetään notaatiota $v_\gamma = v^a \frac{\partial}{\partial x^a} = \dot{\gamma}^a \frac{\partial}{\partial x^a}$

$$\begin{aligned}
\underline{0} &= \nabla_{v_\gamma} v_\gamma = \nabla_{v_\gamma} \left(v^a \frac{\partial}{\partial x^a} \right) = \underbrace{\nabla_{v_\gamma} (v^a)}_{\text{ks.2.90}} \frac{\partial}{\partial x^a} + v^a \nabla_{v_\gamma} \left(\frac{\partial}{\partial x^a} \right) \\
&= \ddot{\gamma}^a \frac{\partial}{\partial x^a} + v^a \nabla_{v^i} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{\partial}{\partial x^a} \right) = \ddot{\gamma}^a \frac{\partial}{\partial x^a} + v^a v^i \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \left(\frac{\partial}{\partial x^a} \right) \\
&= \ddot{\gamma}^a \frac{\partial}{\partial x^a} + v^a v^i \Gamma^a_{ia} \frac{\partial}{\partial x^a} = \ddot{\gamma}^a \frac{\partial}{\partial x^a} + \Gamma^a_{ia} \dot{\gamma}^a \dot{\gamma}^i \frac{\partial}{\partial x^a} \\
&= \left(\ddot{\gamma}^a + \Gamma^a_{ia} \dot{\gamma}^a \dot{\gamma}^i \right) \frac{\partial}{\partial x^a} = \underline{0}
\end{aligned}$$

Tämä on *autoparalleeliyhtälö* eli nk. *tasaisesti etenevän liikkeen yhtälö*, josta puhutaan mm. Newtonin 1. laissa. Autoparalleeliyhtälö on erittäin läheistä sukua nk. *geodeesiyhtälölle*.

Esimerkki 2.9.1 Käyrän γ suorin reitti 2-ulotteisessa Euklidisessa tasossa $(\mathbb{R}^2, \mathcal{O}, \mathcal{A}, \nabla_{EUK})$

$$\begin{aligned}
(\mathcal{U} = \mathbb{R}^2, x = id_{\mathbb{R}^2}), \\
\Gamma^a_{ia} = 0
\end{aligned}$$

$$\ddot{\gamma}^a(t) = 0 \implies \gamma^a(t) = k t + b \quad (k, b \in \mathbb{R})$$

Esimerkki 2.9.2 Käyrän γ suorin reitti 2-ulotteisen pallon pinnalla $(\mathbb{S}^2, \mathcal{O}, \mathcal{A}, \nabla_{pallo})$

$$\begin{aligned}
(\mathcal{U}, x(p) = (\theta, \varphi) \quad | \theta \in (0, \pi), \varphi \in (0, 2\pi)) \\
\Gamma^1_{22} = -\sin(\theta) \cos(\theta) \\
\Gamma^2_{21} = \Gamma^2_{12} = \cot(\theta) \\
\Gamma^1_{11} = \Gamma^1_{21} = \Gamma^1_{12} = \Gamma^2_{11} = \Gamma^2_{22} = 0
\end{aligned}$$

Autoparalleeliyhtälöiksi saadaan

$$\begin{aligned}\ddot{\theta} + \Gamma_{22}^1 \dot{\varphi} \dot{\varphi} &= 0 \\ \ddot{\varphi} + 2\Gamma_{12}^2 \dot{\theta} \dot{\varphi} &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\ddot{\theta} - \sin(\theta) \cos(\theta) \dot{\varphi} \dot{\varphi} &= 0 \\ \ddot{\varphi} + 2\cot(\theta) \dot{\theta} \dot{\varphi} &= 0\end{aligned}$$

Eli kaikki ratkaisut θ :lle ja φ :lle, jotka toteuttavat ylläolevat yhtälöt ovat ratkaisuja suorimmiksi reiteiksi. esim $\theta(t) = \frac{\pi}{2}$ ja $\varphi(t) = k \cdot t + \varphi_0$.

2.10 Metriikka

Tässä kappaleessa määrittelemme sileille monistoille (M, \mathcal{O}, A_{sm}) uuden lisärakenteen. Rakennetta kutsutaan **metriikaksi**. Metriikka määrittelee sileän moniston jokaisen pisteen tangenttiavaruuteen $T_p M$ keinon laskea vektoreiden *pituuksia* ja niiden välisiä *kulmia*. Vasta tämän lisärakenteen avulla voimme laskea käyrien pituuksia, jolloin pystymme myös tarkastelemaan kahden pisteen välisiä *lyhyimpiä* käyriä, joita kutsutaan *geodeeseiksi*.

Me tulemme vaatimaan, että lyhyimmät käyrät sopivat yhteen kappaleessa 2.8 esiteltyyn konnektioon ∇ , jonka tulemme määrittelemään metriikan kautta. Tässä tapauksessa lyhyimmät käyrät ovat myös suorimpia käyriä. Konnektiota, joka on metriikan määrittelemä, kutsutaan yleisesti *Levi-Civita* konnektioksi ∇^{LC} . Gamma-symbolit Γ ovat tällöin nk. Christoffelin symboleita.

Metriikka on itseasiassa jo lukiomatematiikasta tuttu sisätulo tai paremmin sanottuna *sisätulokenttä*, joka on yleistys differentiaaligeometrian ja monistojen teoriaan. Monistoilla tämä sisätulo on määritelty jokaiseen moniston pisteen tangenttiavaruuteen erikseen. Metriikka on 2. kertaluvun kovariantti tensori, joka määrittelee samalla isomorfismin $\flat : T_p M \rightarrow T_p^* M$ moniston tangentti- ja kotangenttiavaruuksien välille. Kyseinen isomorfismi tunnetaan myös metrisen tensorin ei-degeneroituvuus³⁹ predikaattina⁴⁰.

³⁹ei degeneroituvuus liittyy kuvauksen kääntyvyyteen. Tästä käytetään myös nimitystä ei-singulaarisuus

⁴⁰ominaisuus

2.10.1 Metrinen tensori

Määritelmä 2.10.1 *Metriikka g sileällä monistolla (M, \mathcal{O}, A_{sm}) on symmetrinen $(0,2)$ -tensori(kenttä), joka on seuraavanlainen multilineaarinen kuvaus*

$$\begin{aligned} g : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) &\longrightarrow C^\infty M \\ (X, Y) &\longmapsto g(X, Y) := \langle X, Y \rangle \end{aligned} \quad (2.130)$$

jota kutsutaan metrikseksi tensoriksi tai sisätulokentäksi. Sen on toteutettava seuraavat ehdot:

- i) **Symmetria** $g(X, Y) = g(Y, X) \quad \forall X, Y$
- ii) **Ei-degeneroituvuus** Jos $g(X, Y) = 0, \quad \forall Y \in T_p M \implies X = 0$

Jos kysymyksessä on erityisesti **Riemannin metriikka**, eli Riemannin metrinen tensori, niin vaaditaan lisäksi vielä kolmas ehto:

iii) **Positiivi-definiittisyys** $g(X, X) > 0 \quad \forall X \in T_p M \setminus \{0\}$

Tämä asettaa ehdon, että sisätulon on oltava positiivinen reaaliluku kussakin pisteessä (argumenttien ollessa $\neq 0$).

Tarkastellaan kohtaa *ii*) lähemmin. Ei-degeneroituvuus tarkoittaa isomorfismin muodostumista moniston tangentti- ja kotangenttiavaruuksien $T_p M$ ja $T_p^* M$ välille. Jotta tensori g pystyisi kuvaamaan kaksi vektoria reaaliluvuksi, sillä täytyy olla keino, jolla tämä voidaan tehdä. Ainoat objektit, jotka pystyvät kuvaamaan vektoreita lineaarisesti reaaliluvuksi ovat kovektoreita. Metrisen tensorin on siis ensiksi pakko luoda kovektori, jolla vektoria voidaan mitata. Näin sisätulo eli metrinen tensori toimii - se luo kuvauksen jolla toinen vektoreista muuntuu ensiksi kotangenttiavaruuden alkioksi, joka tämän jälkeen mittaa toista vektoria. Tämä kyseinen kuvaus on edellä mainittu isomorfismi, joka tunnetaan nk. flat-kuvauksena \flat , jonka notaatio muistuttaa nuottia⁴¹. Tämä on siis tensorin g luoma kuvaus. Flat kuvaus

⁴¹Kirjallisuudessa samasta kuvauksesta käytetään usein myös notaatiota \tilde{g}

määritellään seuraavasti:

$$\begin{aligned} \flat : \Gamma(TM) &\longrightarrow \Gamma^*(TM) \\ X &\longmapsto \flat(X) := g(X, \bullet) \end{aligned} \quad (2.131)$$

missä $\flat(X)(Y) := g(X, Y)$. Flat-kuvaus toimii siis ensiksi vektorikenttään X , kuvaten sen kovektorikentäksi $\flat(X)$, joka taas toimii vektorikenttään Y , kuvaten sen moniston funktioksi (reaaliluvuksi tietyssä pisteessä). Huomaa, että metriikka määritellään moniston jokaisessa pisteessä $p \in M$, jolloin g :n kuvaus moniston pisteessä p on $g_p : T_p M \times T_p M \longrightarrow \mathbb{R}$.

Huomio 7 *Riezin esityslause takaa, että Flat-kuvaus \flat on isomorfismi avaruuksien $\Gamma(TM)$ ja $\Gamma^*(TM)$ välillä. Jos $X \in \Gamma(TM)$ ja $\omega \in \Gamma^*(TM)$, ja haluamme määritellä kuvausten $(\flat(X))$ ja $(\flat^{-1}(\omega))$ komponentit $(\flat(X))_a$ ja $(\flat^{-1}(\omega))^a$, niin ne määriteltäisiin $(\flat(X))_a := g_{am}X^m$ ja vastaavasti kovektorikentille $(\flat^{-1}(\omega))^a := g^{ab}\omega_b$. Puhutaan indeksin nostamisesta ja laskemisesta metriikan g avulla. Huomaa, että summausnotaatio on käytössä. Muistutetaan myös mieleen aiemmista kappaleista, että vektorikenttien komponentit merkitään yläindeksillä ja kovektorikenttien alaindeksiä.*

Metrinen tensori voidaan esittää kartalla (\mathcal{U}, x) seuraavasti

$$g = g_{ij}dx^i \otimes dx^j \quad (2.132)$$

missä (g_{ij}) on symmetrinen kokoelma sileitä funktioita, joita voidaan ajatella matriisina.

Määritelmä 2.10.2 *Kometriikka g^{-1} , joka liittyy metriikkaan g on symmetrinen kuvaus,*

$$\begin{aligned} g^{-1} : \Gamma^*(TM) \times \Gamma^*(TM) &\longrightarrow C^\infty(M) \\ (\omega, \sigma) &\longmapsto g^{-1}(\omega, \sigma) := \omega\left(\overset{-1}{\flat}(\sigma)\right) \end{aligned} \quad (2.133)$$

Merkitsemme kometriikan komponentteja ilman $^{-1}$ notaatiota, kuten g^{ij} .

Määritelmä 2.10.3 *Euklidinen metriikka*

Metrinen tensori g on Euklidinen jos

$$\exists \left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n} \right) : g \left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right) = \delta_{ij} \quad (2.134)$$

Metrinen tensori on siis Euklidinen, jos on olemassa koordinaattiframe (ks. 2.7.6), jolla metrisen tensorin komponentit ovat δ_{ij} eli

$$g \left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right) = g_{ij} = \delta_{ij} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Tällöin sanotaan myös, että metrinen tensori on ”flat” tai että kyseinen koordinaattiframe on ⁴². Metrisen tensorin Euklidisuus on siis tensorin ominaisuus, jonka komponentit riippuvat valitusta framesta. Esim. Euklidinen metrinen tensori pallokoordinaateilla voisi olla

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2(\theta) \end{bmatrix}$$

On sanomattakin selvää, että läheskään kaikilla Riemannin monistoilla ei vastaavanlaista koordinaattiframea ole mahdollista löytää.

2.10.2 Signatuuri

Muistutetaan mieleen insinöörimatematiikan kursseilta tuttu matriisin ominaisarvojen laskeminen. Matriisin A ominaisarvot ovat reaali- tai kompleksilukuja λ , jolla yhtälö $Av = \lambda v$ on ekvivalentti. Komponenttimuodossa samainen yhtälö näyttää seuraavalta:

$$A^a{}_i v^i = \lambda v^a \quad (2.135)$$

Huomaa, että nämä tutut matriisit ovat itseasiassa (1,1)-tensoreita, eli niillä on yksi ylä- ja alaindeksi, toisin sanoen ne ovat multilineaarisia kuvauksia $A_p : \Gamma(T^*M) \times \Gamma(TM) \rightarrow \mathbb{R}$.

⁴²ortonormaali

Kuten tässä luvussa on tullut ilmi, voimme esittää myös metriikan g matriisimuodossa. Metrinen tensori pisteessä p oli (0,2)-tensori eli multilineaarinen kuvaus $g_p : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \rightarrow \mathbb{R}$. Yritetään seuraavaksi laskea metrisen tensorin g ominaisarvoja moniston pisteessä p . Komponenttimuodossa se näyttäisi seuraavalta:

$$g_{am} v^m = \lambda v^a \quad \text{Summausnotaatio ei toimi}$$

Huomaamme heti, että summausnotaatio ei toimi, joka on ensimmäinen vihje siitä, että metriikalla ei ole varsinaisia ominaisarvoja. Ei ole siis järkeä puhua (0,2)-tensorin ominaisvektoreista. Ominaisarvot voidaankin laskea vain (1,1)-tensoreille, joka tarkoittaa, että (1,1)-tensorille voidaan löytää vektoriavaruuden kanta

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Jossa diagonaalilla ovat (1,1)-tensorin ominaisarvot. (0,2)-tensoreille on kuitenkin olemassa hieman vastaavanlainen tulos. Sylvesterin⁴³ teorian mukaan, bilineaarisen⁴⁴ muodon matriisiesitykselle voidaan laskea ominaisarvot, jotka ovat aina muotoa

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \mathbf{1} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -\mathbf{1} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \dots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & -\mathbf{1} \end{bmatrix}.$$

Tämä on vektoriavaruuden kannan valinnasta riippumaton matriisiesitys, jossa diagonaalilla on lukujen 1, -1 sekoitus⁴⁵. Matriisista käytetään yleensä lyhennettyä notaatiota (r, s) , jossa r ja s ovat lukujen 1 ja -1 lukumäärät. Tätä

⁴³James Joseph Sylvester (1814 1897)

⁴⁴kahden argumenttipaikan suhteen multilineaarinen

⁴⁵diagonaalilla vois esiintyä myös lukuja nolla, jos tensorilta ei ole vaadittu eidegenetoituvuus ominaisuutta

kutsutaan $(0,2)$ -tensorin *signatuuriksi*. Esimerkiksi Riemannin metrisen tensorin signatuuri kolmessa ulottuvuudessa on $(3,0)$ eli se sisältää diagonaaliltaan pelkkiä positiivisia lukuja 1.

2.10.3 Riemannin monisto ja Riemannin metrinen tensori

Riemannin monisto on sileä monisto $(M, \mathcal{O}, A_{sm}, g_{Riem})$, missä g_{Riem} on Riemannin metrinen tensori. Yleisesti Riemannin monistoa merkitään (M, g) . Riemannin metrisen tensorin signatuuri on $(s,0)$, missä $s \in \mathbb{N}^+$.

Pseudo-Riemannian metriikka

Tämä on yleisempi määritelmä, kuin Riemannin metriikka. Pseudo-Riemannin metriikassa signatuuri voi olla $+$ - ja $-$ merkkien sekoitus. Jos Pseudo-Riemannin metriikka on erityisesti $(+ + \dots -)$ tai $(- + \dots +)$ eli $(3,1)$ niin kysymys on Lorenzin metriikasta.

2.10.4 Käyrän pituus

Jos γ on sileä käyrä. Osaamme laskea käyrän nopeuden eli polun tangentti-vektorin $v_{\gamma,p}$ sen jokaisessa pisteessä $\gamma(t) \in M$.

Määritelmä 2.10.4 Käyrän γ vauhti

Riemannin monistolla $(M, \mathcal{O}, A_{sm}, g)$ käyrän vauhti pisteessä $p := \gamma(t)$ on lukuarvo $S(t)$,

$$\sqrt{g(v_\gamma, v_\gamma)} \Big|_{\gamma(t)} = S(t) \quad (2.136)$$

Käyrän *vauhdin* määrittämiseen tarvitaan metriikkaa. Käyrän pituuden laskemiseen tarvitaan vauhtia.

Määritelmä 2.10.5 Jos $\gamma : (0, 1) \rightarrow M$ on sileä käyrä, niin silloin käyrän γ pituus on lukuarvo $L[\gamma] \in \mathbb{R}$.

$$L[\gamma] := \int_0^1 dt S(t) = \int_0^1 dt \sqrt{g(v_\gamma, v_\gamma)} \quad (2.137)$$

Esimerkki 2.10.1 Tarkastellaan pyöreätä palloa ja sen päiväntasaajaa, joka esitetään käyrällä γ . Pallon säde on R , ja sen metriikka on annettu lahjaksi muodossa:

$$g_{ij} := \begin{bmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & R^2 \sin^2(\theta) \end{bmatrix}$$

Käyrän γ komponentit esitettynä kartalla (U, x) ovat:

$$\theta(t) := (x^1 \circ \gamma)(t) = \frac{\pi}{2}$$

$$\varphi(t) := (x^2 \circ \gamma)(t) = 2\pi t^3$$

Lasketaan seuraavaksi komponenttifunktioiden derivaatat. Muistamme aikaisemmista kappaleista, että $v_{\gamma,p} := \dot{\gamma}_p := \dot{\gamma}_x^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_p := (x^i \circ \gamma)'(t_0) \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_p$

$$\theta(t)' := (x^1 \circ \gamma)'(t) = 0$$

$$\varphi(t)' := (x^2 \circ \gamma)'(t) = 6\pi t^2$$

Seuraavaksi käytämme yhtälöä (2.137) päiväntasaajan pituuden laskemiseksi.

$$\begin{aligned} L[\gamma] &:= \int_0^1 dt \sqrt{g(v_\gamma, v_\gamma)} \\ &= \int_0^1 dt \sqrt{\underbrace{g_{ij}(x^{-1}(\theta(t), \varphi(t)))}_{p \in M} (x^i \circ \gamma)'(t) (x^j \circ \gamma)'(t)}} \quad (2.138) \\ &= \int_0^1 dt \sqrt{R^2 \cdot 0 + R^2 \sin^2(\theta(\lambda)) \cdot 36\pi^2 t^4} \\ &= 6\pi R \int_0^1 t^2 dt = 6\pi R \left[\frac{1}{3} t^3 \right]_0^1 = 2\pi R \end{aligned}$$

Funktion vektorikenttägradientti $\text{grad}(f)$

Funktion gradientti on määritelty funktion differentiaalina df , joka on kovektori(kenttä). Insinöörimatematiikan kursseilla funktion gradienttiin viitataan aina tavallisena vektorikenttänä. Funktion vektorikenttägradientti voidaan määritellä metriikan g avulla, kun käytetään metriikan ei-degeneroituvuutta (kääntyvyyttä) hyväksi kuvaamalla df nuottikuvausten \flat^{-1} avulla tavalliseksi vektoriksi.

Määritelmä 2.10.6 *Olkoon (M, g) Riemannin monisto ja df funktion gradientti. Funktion f vektorikenttägradientti $\text{grad}(f)$ määritellään siten, että [1, s. 342]*

$$\text{grad}(f) = \flat^{-1}(df) := g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} \quad (2.139)$$

Vektorikentän divergenssi

Olkoon (M, g) Riemannin monisto. Vektorikentän X divergenssi $\text{div}(X)$ voidaan esittää myös metrisen tensorin avulla [1, s. 436]

$$\text{div}(X) = \frac{1}{\sqrt{\det(g)}} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(X^i \sqrt{\det(g)} \right) \quad (2.140)$$

Funktion Laplacian

Määritelmä 2.10.7 *Funktion $u \in C^\infty(M)$ Laplacian [1, s. 436]*

Olkoon (M, g) Riemannin monisto. Lineaarinen kuvaus $\Delta : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$ joka on määritelty $\Delta u := \text{div}(\text{grad}(u))$ on funktion u Laplacian tai Laplacen funktio

$$\Delta(u) := \text{div}(\text{grad}(u)) = -\frac{1}{\sqrt{\det(g)}} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(g^{ij} \sqrt{\det(g)} \frac{\partial u}{\partial x^j} \right) \quad (2.141)$$

2.10.5 Geodeesit

Tässä kappaleessa otetaan varaslähtö Lagrangen mekaniikkaan, mikä on tämän työn yksi pääaihe. Geodeeseja pitäisikin käsitellä vasta, kun Lagrangen formalismi on tuttua. Geodeesit liittyvät kuitenkin vahvasti metriikkaan, joten siinä mielessä ne ovat hyvä esitellä tässä vaiheessa. Kappaleessa esiintyviä uusia käsitteitä, kuten *stationäärinen* selvitetään paremmin Klassisen mekaniikan luvussa, Lagrangen mekaniikan osiossa. Tämän kappaleen pitäisi antaa kuitenkin suuntaa siitä, kuinka fundamentaalisesta teoriasta Lagrangen formalismissa on kysymys.

Määritelmä 2.10.8 *Käyrää $\gamma : (0, 1) \rightarrow M$ kutsutaan geodeesiksi Riemannin monistolla $(M, \mathcal{O}, A_{sm}, g)$, jos se on stationäärinen käyrä verrattuna sen pituusfunktionaaliin L .*

Teoreema 2.10.1 [5] *Käyrä γ on geodeesi jos se toteuttaa Euler-Lagrangen yhtälöt Lagrangianilla L , joka on*

$$\begin{aligned} L : TM &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (\gamma, \dot{\gamma}) &\longmapsto L(\gamma, \dot{\gamma}) := \sqrt{g(\dot{\gamma}, \dot{\gamma})} \end{aligned} \quad (2.142)$$

missä paikkariippuvaisuus γ tulee esiin metrisessä tensorissa g , tarkoittaen $g(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) = g_{ij}(\gamma(t)) \dot{\gamma}^i(t) \dot{\gamma}^j(t)$. Kartalla $(\mathcal{U} \in M, x)$ esitettyinä Euler-Lagrangen yhtälöt ovat:

$$\frac{\partial L}{\partial x^m} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^m} \right) = 0 \quad (2.143)$$

Luvussa 2.7 esittelimme tangenttikimpun TM kartan (x^m, \dot{x}^m) . Jos käyrän γ ja sen tangenttivektoreiden komponentit esitetään kyseisellä kartalla, ovat kuvaukset kokonaisuudessaan $(x^m \circ \gamma)(t)$ ja $\frac{d}{dt}(x^m \circ \gamma)(t)$, joista käytetään myös lyhennettyjä notaatioita $\dot{\gamma}^m(t)$ ja $\gamma^m(t)$ vastaavasti. Käytämme nyt kyseistä karttaa laskeaksemme Euler-Lagrangen yhtälöt edellä esitettyllä Lagrangianilla 2.142, joka on kartalla esitettyinä

$$L(\gamma, \dot{\gamma}) = \sqrt{g_p(\dot{\gamma}, \dot{\gamma})} = \sqrt{g_{ij}(\gamma(t)) \dot{\gamma}^i(t) \dot{\gamma}^j(t)} \quad (2.144)$$

Lasketaan yhtälö (2.143) Lagrangianilla 2.144 purkamalla se osiin. Tarkastellaan ensimmäiseksi jälkimmäistä termiä $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^m}\right)$.

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\gamma}^m} = \frac{1}{\sqrt{g_{ij}(\gamma(t)) \dot{\gamma}^i(t) \dot{\gamma}^j(t)}} g_{mj}(\gamma(t)) \dot{\gamma}^j(t)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\gamma}^m}\right) &= \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\sqrt{g_{ij}(\gamma(t)) \dot{\gamma}^i(t) \dot{\gamma}^j(t)}}\right) g_{mj}(\gamma(t)) \dot{\gamma}^j(t) \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{g_{ij}(\gamma(t)) \dot{\gamma}^i(t) \dot{\gamma}^j(t)}} \left(g_{mj}(\gamma(t)) \ddot{\gamma}^j(t) + \left(\frac{\partial g_{mj}}{\partial \gamma^s}\right)(\gamma(t)) \dot{\gamma}^s(t) \dot{\gamma}^j(t) \right) \end{aligned}$$

Huomaa, että tuloksen viimeistä termiä, jossa metriikkaa derivoidaan harvemmin nähdään, koska se on nolla \mathbb{R}^n :ssä, jossa metriikka on *flat*. Lasketaan seuraavaksi ensimmäinen termi $\frac{\partial L}{\partial x^m}$.

$$\frac{\partial L}{\partial \gamma^m} = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{g_{ij}(\gamma(t)) \dot{\gamma}^i(t) \dot{\gamma}^j(t)}} \left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial \gamma^m} \right) (\gamma(t)) \dot{\gamma}^i(t) \dot{\gamma}^j(t)$$

Käyrän pituus on parametrisoinnista riippumaton, joten voimme parametrisoida käyrän kuten haluamme. Tarkoittaen sitä, että käyrän pituuden kannalta on yhdentekevää millainen nopeus sillä on sen eri pisteissä. Jos määrittelemme sopivan parametrisoinnin, niin pääsemme ikävistä neliöjuuri lausekkeista eroon. Sopiva parametrisointi on

$$g(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) := g_{ij}(\gamma(t)) \dot{\gamma}^i(t) \dot{\gamma}^j(t) = 1 \quad (2.145)$$

Joka tarkoittaa, että käyrän vauhti on vakio polun jokaisessa pisteessä. Tällöin termit tiivistyvät muotoon

$$\frac{\partial L}{\partial \gamma^m} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial \gamma^m} \right) (\gamma(t)) \dot{\gamma}^i(t) \dot{\gamma}^j(t) \quad (2.146)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\gamma}^m}\right) = g_{mj}(\gamma(t)) \ddot{\gamma}^j(t) + \left(\frac{\partial g_{mj}}{\partial \gamma^s}\right)(\gamma(t)) \dot{\gamma}^s(t) \dot{\gamma}^j(t) \quad (2.147)$$

Jotka näyttävät ilman parametreja seuraavilta⁴⁶

$$\frac{\partial L}{\partial \gamma^m} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial \gamma^m} \right) \dot{\gamma}^i \dot{\gamma}^j \quad (2.148)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\gamma}^m} \right) = g_{mj} \ddot{\gamma}^j + \left(\frac{\partial g_{mj}}{\partial \gamma^s} \right) \dot{\gamma}^s \dot{\gamma}^j \quad (2.149)$$

2.10.6 Levi-Civita konnektio ja Christoffelin symbolit

Niputetaan seuraavaksi edellä saadut yhteen Euler-Lagrangen yhtälöihin 2.143. Saadaan seuraavaa

$$g_{mj} \ddot{\gamma}^j + \left(\frac{\partial g_{mj}}{\partial \gamma^s} \right) \dot{\gamma}^s \dot{\gamma}^j - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial \gamma^m} \right) \dot{\gamma}^i \dot{\gamma}^j = 0 \quad \left\| \cdot (g^{-1})^{qm} \right. \quad (2.150)$$

Yhtälöä (2.150) kerrotaan seuraavaksi ”käänteismetriikalla” eli *kometriikalla* valitsemalla indeksit sopiviksi. Ideana on saada metriikan komponentit tippumaan pois, koska muistetaan, että $g_{ai} g^{aj} = \delta_i^j$. Saadaan:

$$\begin{aligned} \ddot{\gamma}^a + g^{qm} \left(\left(\frac{\partial g_{mj}}{\partial \gamma^s} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{mj}}{\partial \gamma^s} \right) \right) \dot{\gamma}^i \dot{\gamma}^j &= 0 \\ \ddot{\gamma}^a + \underbrace{g^{qm} \left(\frac{\partial g_{mj}}{\partial \gamma^i} + \frac{\partial g_{mi}}{\partial \gamma^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial \gamma^m} \right)}_{\Gamma_{ij}^a} \dot{\gamma}^i \dot{\gamma}^j &= 0 \end{aligned} \quad (2.151)$$

Yhtälö on saatu jo entuudestaan tuttuun muotoon, joka esiteltiin luvussa 2.8 konnektio. Tämän yhtälön löytää suoraan wikipediasta, kun haetaan ohjeita christoffelin symbolien laskemiseksi. Konnektiokertoimet eli Γ -symbolit voidaan määritellä siis metriikan avulla. Näitä Γ -symboleita,

⁴⁶Jos E-L yhtälöihin kytketään pituusfunktioalan $\sqrt{g(\dot{\gamma}, \dot{\gamma})}$ sijasta liike-energia $\frac{1}{2}g(\dot{\gamma}, \dot{\gamma})$ saadaan sama tulos. Kertoimella $\frac{1}{2}$ ei ole merkitystä - tämä olla m.v. vakio

jotka ovat määritelty metriikan avulla kutsutaan erityisesti Christoffelin symboleiksi ja konnektiota Levi-Civita konnektioksi ∇^{LC} . Yleensä tämä valinta Levi-Civita konnektioksi tehdään eksplisiittisesti, kun metriikka g tunnetaan, tarkoittaen $(M, \mathcal{O}, A_{sm}, g) \rightarrow (M, \mathcal{O}, A_{sm}, g, \nabla^{LC})$. Puhutaan, että metriikka g indusoi konnektion ∇^{LC} .

Huomio 8 *Kun tunnetaan konnektio, tiedetään pisteiden väliset suorimmat reitit. Kun tunnetaan metriikka, tiedetään pisteiden väliset lyhyimmät reitit. Kun metriikka on luonut konnektion, kahden pisteen väliset suorimmat reitit ovat myös lyhyimpiä reittejä.*

Huomio 9 *Euler-Lagrangen yhtälöt minimoi funktionaalin⁴⁷ L , joka yhtälöihin kytketään, tarkoittaen että Euler-Lagrangen yhtälöiden ratkaisusta saadun differentiaaliyhtälösystemin ratkaisuna oleva polku⁴⁸, kuvastaa kyseessä olevan systeemin lyhintä/tehokkainta mahdollista reittiä avaruuden eri pisteiden välillä. Tästä lisää kappaleessa 3.2 Lagrangen mekaniikka.*

2.11 Symmetriat

Kappaleen aiheena on symmetria, mutta itse tarkoituksena on esitellä muutama uusi differentiaaligeometriian tekniikka, joita tarvitaan myöhemmin klassisen mekaniikan kappaleessa. Monissa mekaniikan tehtävissä on hyödyllistä löytää tarkasteltavasta systeemistä symmetrioita. Jos tarkasteltavien objektien liikeradoilla on symmetrioita suhteessa systeemin joihinkin ominaisuuksiin, voi likeyhtälöt ja laskentatyö helpottua huomattavasti. Symmetrian käsite ei kuitenkaan matemaattisformaalissa mielessä ei ole niin yksiselitteinen. Symmetrioiden määrittämiseksi meillä on tehokas työkalu nimeltään *Lien Derivaatta*, jolla rotationaalisten symmetrioiden tarkastelu tulee helpoksi. Jotta voisimme ymmärtää kyseistä tekniikkaa, meidän täytyy kuitenkin ensin esitellä differentiaaligeometriassa hyvin yleisesti käytetyt push-forward ja pull-back tekniikat. Meidän on myös otettava nopea katsaus laajaan aiheeseen nimeltä vektorikentän virtaus.

2.11.1 Push-Forward kuvaus

Jos $\phi : M \rightarrow N$, missä M ja N ovat sileitä monistoja. Niin kuvaus $\phi_* : TM \rightarrow TN$ on nk. *push-forward* kuvaus⁴⁹. Push-forward kuvaa mo-

⁴⁷Funktionaali on erityisnimi funktiolle, jonka lähtöjoukko on vektoriarvaruus ja maalijoukko \mathbb{R} . Myös vektorit ja kovektorit ovat funktionaaleja.

⁴⁸liikerata

⁴⁹ ϕ_* notaatiosta käytetään kirjallisuudessa myös merkintää $d\phi$

niston M tangentiavaruuden TM vektorin moniston N tangentiavaruuteen TN . Katsotaan alla olevaa diagrammia, jossa näkyvät edellä mainitut kuvaukset. Kaaviossa näkyvät selkeyden vuoksi myös *projektiokuvaukset* π , jotka esiteltiin vektorikenttien luvussa.

$$\begin{array}{ccccc}
 M & \xrightarrow{\phi} & N & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} \\
 \uparrow \pi_M & & \uparrow \pi_N & & \\
 TM & \xrightarrow{\phi_*} & TN & &
 \end{array}$$

Kuva 2.42: Diagrammi, push-forward kuvaus ϕ_*

Seuraavaksi määrittelemme push-forward kuvauksen ϕ_* . Jotta voimme ymmärtää kuvauksia yleisesti, meidän täytyy selvittää sen toimintaa. Jos on olemassa vektori $X \in TM$, niin selvästi $\phi_*(X) \in TN$. Tangentiavaruuden elementit eli vektorit pystyvät toimimaan funktion kuvaten ne reaaliluvuiksi. Ylläolevan kuvan mukaan funktio f on kuvaus $f : N \rightarrow \mathbb{R}$ eli $f \in C^\infty N$. Tällöin $\phi_*(X)$ pystyy toimimaan funktion f .

Määritelmä 2.11.1 (*Push-forward kuvaus*)

$$\begin{aligned}
 \phi_* : TM &\longrightarrow TN \\
 X &\longmapsto \phi_*(X)
 \end{aligned}$$

missä,

$$\phi_*(X)(f) := X(f \circ \phi) = X^a \frac{\partial}{\partial x^a} (f \circ \phi) \quad (2.152)$$

Push-forward kuvauksen indusoi monistojen välinen kuvaus $\phi : M \rightarrow N$. Push-forward työntää moniston M tangenttivektorit moniston N tangenttivektoreiksi. Jos käyrä γ sijaitsee monistolla M , niin monistolla N oleva käyrä on tällöin $\phi \circ \gamma$. Push-forward kuvauksella saamme siis kätevästi

käyrän $\phi \circ \gamma$ tangenttivektorit. Tarkoittaen

$$\phi_*(v_{\gamma, p}) = v_{\phi \circ \gamma, \phi(p)} \quad (2.153)$$

Esimerkki 2.11.1 Deformaatiogradientti F

Kontinuumimekaniikka eli jatkuvan aineen mekaniikka käsittelee kappaleen kinetiikka ja dynamiikkaa, kun sisäiset muodonmuutokset otetaan huomioon. Yksi ehkä tärkein kontinuumiteorian kulmakivi on nk. deformaatiogradientti. Deformaatiogradientilla ei ole tekemistä gradientin kanssa, vaan se on symmetrinen kaksi-piste tensori⁵⁰. Deformaatiogradientti kuvaa referenssitilassa olevia muutoksia deformaation tilan muutoksiin.

Jos tarkastellaan kappaleen deformaatiota, jossa alku- ja lopputila ennen deformaatiota ja deformaation jälkeen ovat molemmat sileitä monistoja. Kutsutaan näitä monistoja M ja N vastaavasti, niin deformaatiogradientti F on tällöin määritelty

$$\begin{aligned} F : T^*N \times TM &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (\omega, X) &\longmapsto F(\omega, X) := \omega(\phi_*(X)) \end{aligned} \quad (2.154)$$

missä

$$\begin{aligned} \omega(\phi_*(X)) &= \omega_a dy^a \phi_* \left(X^i \frac{\partial}{\partial x^i} \right) \\ &= \omega_a X^i dy^a \phi_* \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right) = \omega_a X^i \phi_* \left(\frac{\partial y^a}{\partial x^i} \right) \\ &= \omega_a X^i \frac{\partial}{\partial x^i} (y^a \circ \phi) \end{aligned}$$

2.11.2 Takaisinvento, Pull-Back

Push-forward kuvauksella on sukulainen. Sukulaisen nimi on *Pull-back kuvaus*. Kun push-forward toimii vektoreille ja vektorikentille, niin pull-back

⁵⁰Tensorin argumentteina vektori ja kov vektori, jotka ovat peräisin eri monistoilta

toimii sitä vastoin kovektorikentille. Jos meillä on sama kuvaus $\phi : M \rightarrow N$ joka toimii sileiden monistojen M ja N välillä, niin pull-back toimii vastakkaiseen suuntaan käyttäen kotangenttiavaruuksia T^*N ja T^*M . Ks. alla oleva kuva ja nuolten suunnat.

$$\begin{array}{ccccc}
 TM & \xrightarrow{\phi_*} & TN & & \\
 \pi_M \downarrow & & \downarrow \pi_N & & \\
 M & \xrightarrow{\phi} & N & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} \\
 \Pi_N \uparrow & & \uparrow \Pi_M & & \\
 T^*M & \xleftarrow{\phi^*} & T^*N & &
 \end{array}$$

Kuva 2.43: Pull-back kuvaus

Määritelmä 2.11.2 *Pull-back kuvaus ϕ^**

$$\begin{aligned}
 \phi^* : T^*N &\longrightarrow T^*M \\
 \omega &\longmapsto \phi^*(\omega)
 \end{aligned} \tag{2.155}$$

Missä pull-back toiminta vektorikenttään X on määritelty

$$\phi^*(\omega)(X) := \omega(\phi_*(X)) = \omega_a dy^a(\phi_*(X)) = \omega_a(\phi_*(X)) y^a \tag{2.156}$$

Pull-back määritellään siis push-forward kuvauksen kautta. Pull-back kuvauksen määritelmää voidaan ajatella niin, että takaisin vedetty kov vektori, joka toimii vektoriin, on sama kuin eteenpäin työnnetty vektori, johon kov vektori toimii.

Esimerkki 2.11.2 *Tarkastellaan kahta sileää monistoa $(\mathbb{S}^2, \mathcal{O}, \mathcal{A})$ ja $(\mathbb{R}^3, \mathcal{O}_{st}, \mathcal{B})$ ja niiden välistä nk. upotuskuvausta (engl. immersion, embedding) $\phi : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$. Upotuskuvaus ϕ on annettu kartoilla $(\mathcal{U}, x) \in \mathcal{A}$ ja*

$(\mathbb{R}^3, y = id_{\mathbb{R}^3}) \in \mathcal{B}$ seuraavasti

$$\begin{aligned} y \circ \phi \circ x^{-1} : \mathbb{S}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (\theta, \varphi) &\longmapsto (a \cos(\theta) \sin(\varphi), b \cos(\theta) \sin(\varphi), c \cos(\varphi)) \end{aligned}$$

missä $a, b, c \in \mathbb{R}^+$. Huomautettakoon kertauksena, että emme voi sanoa monistojen muodoista vielä mitään, koska konnektiota tai vaihtoehtoisesti metriikkaa, joka muodostaisi konnektion ei ole vielä määritetty.

Seuraavaksi määrittelemme monistolle $(\mathbb{R}^3, \mathcal{O}_{st}, \mathcal{B})$ Euklidisen metriikan g , jonka komponenttifunktiot näyttävät kartassa (\mathbb{R}^3, y) seuraavalta.

$$g_{ij}(p) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \delta_{ij} \quad \text{jokaisessa pisteessä } p \in \mathbb{R}^3$$

Nyt kun tiedämme metriikan g monistolla $(\mathbb{R}^3, \mathcal{O}_{st}, \mathcal{B})$, voimme määrittää metriikan \mathfrak{g} monistolle $(\mathbb{S}^2, \mathcal{O}, \mathcal{A})$ käyttämällä pull-back kuvausta ϕ^* . Tar koittaen $\mathfrak{g} = \phi^*(g)$. Metriikan komponentit \mathfrak{g}_{mn} ovat tällöin

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}_{mn} &= \mathfrak{g}\left(\frac{\partial}{\partial x^m}, \frac{\partial}{\partial x^n}\right) = \phi^*\left(g\left(\frac{\partial}{\partial y^i}, \frac{\partial}{\partial y^j}\right)\right) = g\left(\phi_*\frac{\partial}{\partial x^m}, \phi_*\frac{\partial}{\partial x^n}\right) \\ &= \delta_{ij} dy^i \otimes dy^j \left(\phi_*\frac{\partial}{\partial x^m}, \phi_*\frac{\partial}{\partial x^n}\right) = \delta_{ij} dy^i \left(\phi_*\frac{\partial}{\partial x^m}\right) dy^j \left(\phi_*\frac{\partial}{\partial x^n}\right) \\ &= \delta_{ij} \left(\phi_*\frac{\partial y^i}{\partial x^m}\right) \left(\phi_*\frac{\partial y^j}{\partial x^n}\right) = \delta_{ij} \left(\frac{\partial}{\partial x^m}(y^i \circ \phi)\right) \left(\frac{\partial}{\partial x^n}(y^j \circ \phi)\right) \\ &= \delta_{ij} (\partial_m(y^i \circ \phi \circ x^{-1})) (\partial_n(y^j \circ \phi \circ x^{-1})) \\ &= \delta_{ij} (\partial_m(y^i \circ \phi \circ x^{-1})) (\partial_n(y^j \circ \phi \circ x^{-1})) \end{aligned}$$

Tästä laskemalla saamme ellipsoidin metriikan komponentit

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}_{11} &= a^2 \cos^2(\theta) \cos^2(\varphi) + b^2 \sin^2(\theta) \cos^2(\varphi) + c^2 \sin^2(\varphi) \\ \mathfrak{g}_{12} &= a^2 \cos(\theta) \cos(\varphi) \sin(\theta) \sin(\varphi) + b^2 \sin(\theta) \cos(\varphi) \sin(\theta) \cos(\varphi) \\ \mathfrak{g}_{21} &= \mathfrak{g}_{12} \\ \mathfrak{g}_{22} &= a^2 \sin^2(\theta) \cos^2(\varphi) + b^2 \cos^2(\theta) \sin^2(\varphi) \end{aligned}$$

Vastaavalla tavalla lasketaan minkätahansa sileän moniston metriikan komponentit tietyllä kartalla, kun upotuskuvaus ϕ tunnetaan⁵¹. Idea esimerkki-tehtävään saatu lähteestä [5], jossa käsiteltiin samantyyllisiä tehtäviä. Vastava, mutta erityylinen tapa laskea ”pull-back”-metriikka löytyy esim. lähteestä [1, s. 331].

2.11.3 Vektorikentän virtaus

Differentiaaligeometriassa ollaan usein kiinnostuneita poluista⁵² γ , joiden tangenttivektorit v_γ tuottavat jonkin tietyn vektorikentän X .

Integraalikäyrä

Määritelmä 2.11.3 Integraalikäyrä⁵³

Jos $(M, \mathcal{O}, \mathcal{A})$ on sileä monisto ja X on vektorikenttä kyseisellä monistolla M , niin käyrää $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$ kutsutaan vektorikentän X integraalikäyräksi jos

$$v_{\gamma, \gamma(t)} = X_{\gamma(t)} \tag{2.157}$$

eli polun γ muodostamat tangenttivektorit vastaavat vektorikenttää X .

⁵¹Toruksen upotuskuvaus: $(\theta, \varphi) \mapsto ((R + r \cos(\theta)) \cos(\varphi), (R + r \cos(\theta)) \sin(\varphi), r \sin(\theta))$

Pallon upotuskuvaus: $(\theta, \varphi) \mapsto (r \cos(\theta) \cos(\varphi), r \cos(\theta) \sin(\varphi), r \cos(\varphi))$

⁵²Käyrä, polku, trajektorit ja liikerata ovat synonyymejä, joita käytetään eri asia yhteyksissä

⁵³Integraalipolku

Kokonainen vektorikenttä

Määritelmä 2.11.4 Kokonainen vektorikenttä

Vektorikentän X sanotaan olevan kokonainen (engl. complete) jos kaikki integraalikäyrät γ omaavat lähtöjoukkonaan koko reaalilukujen joukon \mathbb{R} , tarkoittaen $I = \mathbb{R}$.

Kokonaisen vektorikentän virtaus

Määritelmä 2.11.5 Täydellisen vektorikentän X virtaus

Täydellisen vektorikentän X virtaus h^X on kuvaus

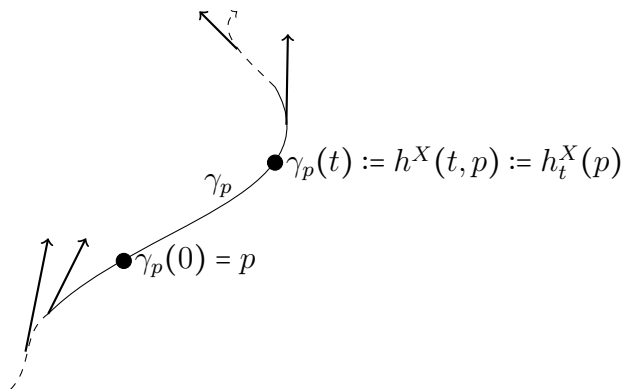
$$\begin{aligned} h^X : \mathbb{R} \times M &\longrightarrow M \\ (t, p) &\longmapsto \gamma_p(t) \end{aligned}$$

Siten, että $\gamma_p(0) = p$ ja $v_{\gamma_p, \gamma_p(t)} = X_{\gamma_p(t)}$ eli γ_p on vektorikentän X integraalikäyrä.

Virtaus ottaa argumentikseen lähtöpisteen p ja polun siirtymäparametrin t . Parametri t kertoo siis polun siirtymän lähtöpisteestä p . Ks. esim. 2.11.3. Edellinen määritelmä voidaan esittää myös kiinnittämällä argumentti t eli

$$\begin{aligned} h_t^X : M &\longrightarrow M \\ p &\longmapsto \gamma_p(t) \end{aligned}$$

Esimerkki 2.11.3 Jos valitsemme vektorikentän X integraalikäyriksi käyrän $\gamma_p : \mathbb{R} \rightarrow M$, missä $\gamma(0) = p$, niin esimerkkikuva voisi näyttää seuraavalta. Parametri t siirtää paikkaa integraalikäyrällä γ_p .



Kuva 2.44: Integraalikäyrä ja vektorikentän virtaus

2.11.4 Lien algebra

Otetaan aluksi esille kappaleessa 2.7 määrittelemäämme kaikkien vektorikenttien joukkoa $\Gamma(TM)$ (2.7.6). Tämä joukko oli $C^\infty(M)$ -moduli eli $C^\infty(M)$ -vektoriavaruus renkaassa. Tämä tarkoitti karkeasti sitä, että pystyit kertomaan joukon alkioita eli vektorikenttiä funktioilla. $C^\infty(M)$ -moduli on hyvin yleinen määritelmä. Voit rajoittaa modulin kertolaskun määrittelyaluetta käsittelemällä sitä vain sitä \mathbb{R} -modulina, koska se ”uppoaa” $C^\infty(M)$ -modulin määritelmän sisään. Tämä luonnollisesti siksi, että reaalivulla kertolaskua voidaan ajatella vakiofunktiolla kertolaskuksi. Tässä kappaleessa vektorikenttien joukkoa $\Gamma(TM)$ käsitellään \mathbb{R} -modulina

Määritellään nk. kommutaattori-operaattori $[\bullet, \bullet]$, joka on antisymmetrinen \mathbb{R} -bilineaarinen⁵⁴ kuvaus

Määritelmä 2.11.6 *Kommutaattori-operaattori*

$$\begin{aligned} [\bullet, \bullet] : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) &\longrightarrow \Gamma(TM) \\ (X, Y) &\longmapsto [X, Y] \end{aligned}$$

Joka toimii funktioihin $f \in C^\infty(M)$ seuraavasti

$$[X, Y](f) = X(Yf) - Y(Xf) \quad (2.158)$$

Esityksestä (2.158), voidaan johtaa kommutaattorin $[X, Y]$ koordinaatisto esitys

$$[X, Y] = \left(X^m \frac{\partial}{\partial x^m} Y^i - Y^m \frac{\partial X^i}{\partial x^m} \right) \frac{\partial}{\partial x^i} \quad (2.159)$$

Kommutaattorilla on seuraavat kolme ominaisuutta:

$$i) \quad [X, Y] = -[Y, X] \quad (2.160)$$

$$ii) \quad [\lambda X + Z, Y] = \lambda[X, Y] + [Z, Y] \quad (2.161)$$

$$iii) \quad [X, [Y, Z]] + [Z, [X, Y]] + [Y, [Z, X]] = 0 \quad (2.162)$$

⁵⁴Kahden argumenttipaikan suhteen multilineaarinen

missä $\lambda \in \mathbb{R}$. Kohta i) antisymmetrisyys, kohta ii) \mathbb{R} -lineaarisuus ja kohta iii) Jacobin identiteetti.

Algebraa $(\Gamma(TM), +, \cdot, [\bullet, \bullet])$ kutsutaan Lien Algebraksi, jossa kommutaattori toimii joukon alkioiden ”kertolaskuna”. Mainittakoon itsestään selvyytensä, että tässä joukossa on kaikki mahdolliset vektorikentät joita on ääretön määrä. Ks. Tangenttiavaruuksien kappaleesta 2.6 Algebran määritelmä 2.6.2.

2.11.5 Lien subalgebra

Valitaan seuraavaksi vektorikenttien kokoelmasta $\Gamma(TM)$ äärellinen joukko vektorikenttiä (X_1, \dots, X_s) , joita on yhteensä s kappaletta ja jotka sijaitsevat sileällä monistolla M . Jos vektorikentät on valittu siten, että ne toteuttavat

$$[X_i, X_j] = C^k_{ij} X_k \quad i, j, k = (1, \dots, s) \quad (2.163)$$

missä $C^k_{ij} \in \mathbb{R}$ kertoimia kutsutaan *rakennevakioiksi*, niin vektorikenttien kokoelma virittää tällöin $\Gamma(TM)$:n aliavaruuden $\text{span}_{\mathbb{R}}\{X_1, \dots, X_s\}$, jota merkitäkään notaatiolla L .⁵⁵

Koska kommutaattorin tulos pysyy viritetyssä avaruudessa, voidaan kyseistä joukkoa pitää algebrana, joka tunnetaan paremmin nimellä Lien subalgebra

Määritelmä 2.11.7 *Lien subalgebra*

$$\underbrace{(\text{span}_{\mathbb{R}}\{X_1, \dots, X_s\}, +, \cdot, [\bullet, \bullet])}_L \quad (2.164)$$

Lien subalgebran ideana on saada vektorikenttien joukon dimensio äärelliseksi ja muodostaa sitä kautta uusi algebra. Vektorikenttien lukumäärä s on useissa sovelluksissa kolme. Esimerkkejä Lien subalgebroista voi katsoa esim. lähteestä [24] tai [1].

⁵⁵vektorikenttien (X_1, \dots, X_s) kokoelmalla on seuraavanlainen ominaisuus: Jos otat kommutaattorin mistä tahansa kahdesta vektorikentästä kyseisestä joukosta, niin tulos voidaan aina esittää joukon vektorikenttien lineaarikombinaationa.

2.11.6 Symmetria

Määritelmä 2.11.8 *Lien subalgebra $(L, +, \cdot, [\bullet, \bullet])$, jonka dimensio on s , sanotaan olevan metrisen tensorikentän kanssa symmetriassa jos $\forall X \in L$*

$$\begin{aligned} & (h_t^X)^* g(A, B) = g(A, B) \\ \Rightarrow & g\left(\underbrace{(h_t^X)_*(A), (h_t^X)_*(A)}_{(h_t^X)^* g(A, B)}\right) = g(A, B) \end{aligned}$$

$\forall A, B \in L$ ja $\forall t \in \mathbb{R}$.

Edellinen voidaan esittää myös ilman argumentteja⁵⁶ A, B

$$\begin{aligned} & (h_t^X)^* g = g \\ \Rightarrow & (h_t^X)^* g - g = 0 \end{aligned}$$

Koska määritelmä 2.11.8 vaaditaan $\forall A, B \in L$.

2.11.7 Lien derivaatta

Edellisen kappaleen symmetrian määritelmä 2.11.8 voi olla intuitiivisesti selvä. Käytät vektorikentän X virtausta $(h_t^X : M \rightarrow M)$ hyväksi työntämällä vektoreita eteenpäin push-forward tekniikalla ja lasket sisätulon. Vertaata tätä saatua tulosta sisätuloon, joka on saatu vektoreilla ennen niiden siirtämistä push-forward kuvauksella⁵⁷. Tämä ei kuitenkaan ole välttämättä niin mukava laskea⁵⁸. On olemassa huomattavasti kätevämpi operaattori täysin vastaavalle symmetrian tarkastelulle, joka on hyvin yksinkertainen. Sen määritelmä muistuttaa huomattavasti edellistä symmetrian määritelmää.

Määritelmä 2.11.9 *Lien subalgebra $(L, +, \cdot, [\bullet, \bullet])$, jonka dimensio on s , sanotaan olevan metrisen tensorikentän kanssa symmetriassa jos $\forall X \in L$*

⁵⁶jotka ovat vektorikenttiä

⁵⁷Pull-back kuvaus määritellään push-forward kuvauksen avulla

⁵⁸Pitäisi varmistua, että tulos pätee kaikilla siirtymän $t \in \mathbb{R}$ arvoilla

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{(h_t^X)^* g - g}{t} = 0 \quad (2.165)$$

jossa vasemman puoleista termiä kutsutaan g :n Lien derivaataksi vektorikentän X suuntaan. Kyseisessä tapauksessa tästä käytettäisiin notaatiota $\mathcal{L}_X g = 0$.

Lien derivaatta ja sen käyttö laskennassa määritellään seuraavasti.

Määritelmä 2.11.10 *Lien derivaatta*

Lien derivaatta \mathcal{L} sileällä monistolla $(M, \mathcal{O}, \mathcal{A})$ on kuvaus

$$\mathcal{L} : \Gamma(TM) \times \Gamma(T_s^r M) \longrightarrow \Gamma(T_s^r M) \quad (2.166)$$

$$(X, T) \longmapsto \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(h_t^X)^* T_{\gamma_p(t)} - T_p}{t} \quad (2.167)$$

Lien derivaatta funktiolle

Lie derivaatta toimii funktioille $\in C^\infty(M)$ seuraavasti

$$i) \quad \mathcal{L}_X f = Xf \quad (2.168)$$

$$ii) \quad \mathcal{L}_X(f + g) = \mathcal{L}_X f + \mathcal{L}_X g \quad (2.169)$$

$$iii) \quad \mathcal{L}_X(fg) = g \mathcal{L}_X f + f \mathcal{L}_X g \quad (2.170)$$

$$iv) \quad \mathcal{L}_{X+Y} f = \mathcal{L}_X f + \mathcal{L}_Y f \quad (2.171)$$

Lien derivaatta vektorikentille

Vektorikentille

$$i) \quad \mathcal{L}_X Y = [X, Y] \quad (2.172)$$

$$ii) \quad \mathcal{L}_X (Y + Z) = \mathcal{L}_X Y + \mathcal{L}_X Z \quad (2.173)$$

$$iii) \quad \mathcal{L}_X (fY) = \mathcal{L}_X (f)Y + f \mathcal{L}_X (Y) \quad (2.174)$$

$$iv) \quad \mathcal{L}_{X+Y} Z = \mathcal{L}_X Z + \mathcal{L}_Y Z \quad (2.175)$$

missä $f \in C^\infty(M)$ ja $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$. Huomaa, että Lien derivaatalle ei vaadita ensimmäisen argumenttipaikan (ala-argumentti X) suhteen $C^\infty(M)$ -lineaarisuutta. Kohdassa i) kysymys on aikaisemmin määrittelemästämme kommutaattorioperaattorista 2.11.6.

Lien derivaatta kovektorikentille

$$i) \quad \mathcal{L}_X \omega = i_X d\omega + d(i_X \omega) \quad (2.176)$$

$$ii) \quad \mathcal{L}_X (\omega + \sigma) = \mathcal{L}_X \omega + \mathcal{L}_X \sigma \quad (2.177)$$

$$iii) \quad \mathcal{L}_X (f\omega) = \mathcal{L}_X (f)\omega + f \mathcal{L}_X (\omega) \quad (2.178)$$

$$iv) \quad \mathcal{L}_{X+Y} \omega = \mathcal{L}_X \omega + \mathcal{L}_Y \omega \quad (2.179)$$

missä $\omega, \sigma \in \Gamma(T^*M)$ ja $f \in C^\infty(M)$. Kohdassa i) on sovellettu myöhemmin esiteltävää Cartan'n kaavaa 2.12.4.

Lien derivaatta yleisille tensorikentille

Kun on esitelty kuinka Lien derivaatta toimii funktioihin, vektorikenttiin ja kovektorikenttiin, voidaan määritellä Lien derivaatan toiminta yleisesti (r,s)-tensorikenttiin. Lien derivaatan on toteutettava seuraavat neljä aksioomaa.

$$i) \quad \mathcal{L}_X f = Xf \quad (2.180)$$

$$ii) \quad \mathcal{L}_X (T \otimes S) = \mathcal{L}_X T \otimes S + S \otimes \mathcal{L}_X T \quad (2.181)$$

$$iii) \quad \mathcal{L}_X (T(\omega, Y)) = \mathcal{L}_X T(\omega, Y) + T(\mathcal{L}_X \omega, Y) + T(\omega, \mathcal{L}_X Y) \quad (2.182)$$

$$iv) \quad \mathcal{L}_X d\alpha = d\mathcal{L}_X \alpha \quad (2.183)$$

Missä $T, S \in \Gamma(T_g^r M)$. Kohta i) Lien derivaatan toiminta funktioihin. Kohta ii) Lien derivaatta toteuttaa Leibnizin säännön tensorikenttien tensorituloille. Kohta iii) Leibnizin sääntö tensorien määräämille kuville eli nk. tensorien kontraktioille. Kohta iv) Lien derivaatta kommutoi differentiaali-
muotojen kanssa.⁵⁹ Kohta iii) eli Leibnizin kontraktiosääntö pätee samaan tyyliin myös (r,s)-tensoreille. Edellä esitetty toiminta vain (1,1)-tensorille. Lien derivaatta ja kovariantti derivaatta ovat hieman samankaltaisia suuntaderivaatta operaattoreita. Molemmat ovat lineaarisia, toteuttavat Leibnizin säännön, ja toimivat funktioihin yhtäläisesti. Varsinaisen eron muodostaa niiden toiminta (ko)vektorikenttiin. Kovariantissa derivaatassa tarvitsimme tähän Γ -konnektiokertoimia, jotka ovat lisärakenne sileälle monistolle. Lien derivaatassa mitään lisäranteita ei tarvita. Lisäksi Lien derivaatta ei ole ensimmäisen argumenttipaikan suhteen $C^\infty(M)$ -lineaarinen.

Lien derivaatta on siinä mielessä ”parempi” suuntaderivaatta operaattori, että tila-avaruuksena oleva sileä monisto ei vaadi lisärakenteena konnektiota⁶⁰. Tämä on oire siitä, että Lien derivaatalta puuttuu tensoriaalisuus suunta-argumentin suhteen ja juuri tämä ominaisuus on se, mitä kovariantille derivaatalle on lisärakenteella hankittu.

Esimerkki 2.11.4 *Kovariantin derivaatan ja Lien derivaatan toiminta vektorikenttään $\in \Gamma(TM)$ - vertailu.*

$$\nabla_X Y = \left(X^i \frac{\partial Y^q}{\partial x^i} + \underbrace{\Gamma^q_{ij}}_{!!} X^i Y^j \right) \frac{\partial}{\partial x^q} \quad (2.184)$$

$$\mathcal{L}_X Y = \left(X^i \frac{\partial Y^q}{\partial x^i} - Y^i \frac{\partial X^q}{\partial x^i} \right) \frac{\partial}{\partial x^q} \quad (2.185)$$

Esimerkki 2.11.5 *Kovariantin derivaatan ja Lien derivaatan toiminta kovektorikenttään $\omega \in \Gamma(T^*M)$ - vertailu.*

⁵⁹differentiaalimuodot seuraavassa kappaleessa

⁶⁰tai metriikkaa, jossa metriikka määrittää konnektion (Levi-Civita)

$$\nabla_X \omega = \left(X^i \frac{\partial \omega_q}{\partial x^i} - \underbrace{\Gamma_{iq}^j}_{!!} X^i \omega_j \right) dx^q \quad (2.186)$$

$$\mathcal{L}_X \omega = \left(X^i \frac{\partial \omega_q}{\partial x^i} + \omega_i \frac{\partial X^i}{\partial x^q} \right) dx^q \quad (2.187)$$

Huutomerkeillä viitataan valittuun lisärakenteeseen (konnektioon). Huomaa, että kovariantti ja Lien derivaatta toimivat eri tyyliin, tarkoittaen että komponenttien jälkimmäiset termit ovat aina vastakkaismerkkiset. Kun otetaan kovariantti derivaatta kovektoreista, tuloksen etumerkki on negatiivinen, kun taas sitävastoin Lien derivaatassa etumerkki on positiivinen.

Esimerkki 2.11.6 Metrisen tensorikentän $g = g_{ij} dx^i \otimes dx^j$ Lien derivaatta vektorikentän X suuntaan - komponenttiesitys.

$$\left(\mathcal{L}_X g \right)_{ij} = X^m \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^m} + g_{mj} \frac{\partial X^m}{\partial x^i} + g_{im} \frac{\partial X^m}{\partial x^j} \quad (2.188)$$

Esimerkkiä voidaan soveltaa suoraan määritelmään 2.11.9, jolla voidaan tarkistaa, tuottaako metriikka symmetrian. Lien derivaatan avulla laskenta työ helpottuu.

Lisää Lien teoriasta lähteistä [1, s.150-161], [24], [23, s. 189-249].

2.12 Differentiaalimuodot

Esittelimme multilineaarisen algebran kappaleessa symmetrisen tensorin, jonka yksi tärkeä sovellus oli Metriikka kappaleessa esitelty metrinen tensori g . Tässä kappaleessa keskitytään kovariantteihin antisymmetrisiin tensoreihin, joita kutsutaan myös nimellä k -kovektori. Erityisesti kappaleessa tarkastellaan nk. differentiaalimuotoja, jotka ovat kovariantteja antisymmetrisiä tensorikenttiä sileillä monistoilla. Yksinkertaisin esimerkki differentiaalimuodosta on kovektorikenttä. Nämä antisymmetriset tensorikentät ovat paljon

käytetympiä objekteja fysiikassa, kuin edellä mainitut symmetriset tensorikentät. Tämän kappaleen keskeinen lineaarinen operaattori on nk. *exterior derivaatta* d , joka on funktion differentiaalikuvauksen yleistys. Tämä kuvaus ei siis toimi pelkästään sileisiin funktioihin, kuten df , vaan yleisesti antisymmetrisiin tensorikenttiin eli differentiaalimuotoihin. Tarkastellaan aluksi alternoivia eli antisymmetrisiä tensoreita yleisesti.

Antisymmetriset tensorit

Olkoon V vektoriavaruus. Kovariantin 2-tensorin $\beta : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ sanotaan olevan antisymmetrinen, jos sen määräämän kuvan arvon etumerkki vaihtuu, kun sen argumenttiparin järjestystä muutetaan, tarkoittaen

$$\omega(v, u) = -\omega(u, v)$$

missä $v, u \in V$. Yleisesti antisymmetriselle eli kovariantille k -tensorille tämä tarkoittaisi $\omega(X_1, \dots, X_i, \dots, X_j, \dots, X_n) = -\omega(X_1, \dots, X_j, \dots, X_i, \dots, X_n)$. Kappaleessa 2.4.10 määrittelimme symmetrisen tensorin. Tehdään nyt vastaavanlainen määritelmä antisymmetriselle tensorille. Tensorituloavaruus $T = V \otimes \dots \otimes V$, voitiin esittää sen symmetrisen ja antisymmetrisen tensorituloavaruuden (aliavaruuksien) *suorana summana*, jota merkittiin $T = \Sigma \oplus \Omega$. Tämä tarkoitti sitä, että jokainen tensori $\varphi \in T$, voitiin esittää sen symmetrisen osan ja antisymmetrisen osan summana. On siis olemassa kanoninen symmetrisointikuvaus $T \xrightarrow{Sym} \Sigma$ ja antisymmetrisointikuvaus, joka esitellään seuraavasti:

$$\begin{aligned} AntiSym : T &\rightarrow \Omega \\ \varphi &\mapsto AntiSym(\varphi) \end{aligned}$$

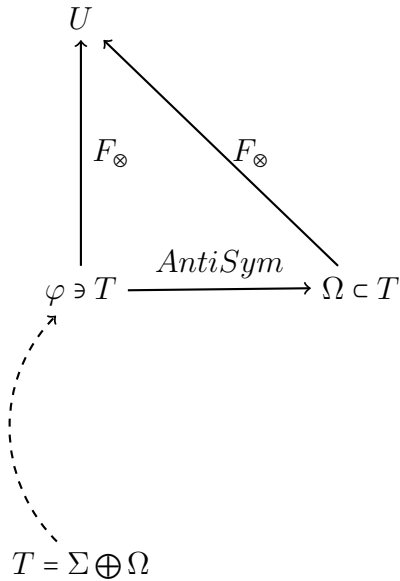
mikä φ :n ollessa kovariantti 2-tensori määritellään

$$AntiSym(\varphi)(X, Y) = \frac{1}{2}(\varphi(X, Y) - \varphi(Y, X)) \quad (2.189)$$

ja φ :n ollessa kovariantti k -tensori

$$AntiSym(\alpha)(v_1, \dots, v_k) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} (sgn \sigma) \alpha(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) \quad (2.190)$$

missä S_k on permutaatioiden $\{1, \dots, k\}$ ryhmä, $sgn \sigma$ on etumerkki, joka on ”-”-merkkinen, kun permutaation eli argumenttipaikkojen vaihdon määrä on parillinen, muulloin ”+”-merkkinen. Kuvaus $AntiSym$ on luonnollinen projektiokuvaus vektoriavaruuksien T ja $\Omega \subset T$ välillä.



Kuva 2.45: Antisymmetrisyys kuvaus

Esimerkki 2.12.1 α on yleinen kovariantti 2-tensori. Sen antisymmetrisen osan määräämä kuva on

$$AntiSym(\alpha)(X, Y) = \frac{1}{2}(\alpha(X, Y) - \alpha(Y, X))$$

Esimerkki 2.12.2 β on kovariantti 3-tensori. Sen antisymmetrisen osan määräämä kuva on

$$AntiSym(\beta)(X, Y, Z) = \frac{1}{6}(\beta(X, Y, Z) + \beta(Y, Z, X) + \beta(Z, X, Y) - \beta(Y, X, Z) - \beta(X, Z, Y) - \beta(Z, Y, X))$$

Kirjallisuudessa (2.190) esitetään seuraavassa muodossa, joka on antisymmetrisyyskuvauksen yleinen määritelmä

Määritelmä 2.12.1 *Antisymmetrisyyskuvaus*

$$\text{AntiSym}(\alpha) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} (\text{sgn } \sigma)^\sigma \alpha$$

missä ${}^\sigma \alpha$ on permutoitu tensori.

Esimerkki 2.12.3 *Jos α ja β ovat molemmat kovariantteja 1-tensoreita eli kovektoreita, niin $\text{AntiSym}(\alpha \otimes \beta)$ on*

$$\text{AntiSym}(\alpha \otimes \beta) = \frac{1}{2}(\alpha \otimes \beta - \beta \otimes \alpha) \quad (2.191)$$

Esimerkki 2.12.4 *Olkoon η kovariantti l -tensori ja φ kovariantti k -tensori. Tällöin $\text{AntiSym}(\eta \otimes \varphi)$ on*

$$\text{AntiSym}(\eta \otimes \varphi) = \frac{1}{(k+l)!} \sum_{\sigma \in S_k} (\text{sgn } \sigma)^\sigma \eta \sum_{\tau \in S_l} (\text{sgn } \tau)^\tau \varphi \quad (2.192)$$

$$= \frac{1}{(k+l)!} \sum_{\sigma \in S_k, \tau \in S_l} (\text{sgn } \sigma\tau)^{\sigma\tau} (\eta \otimes \varphi) \quad (2.193)$$

$$= \frac{1}{(k+l)!} \sum_{\gamma \in S_{k+l}} (\text{sgn } \gamma)^\gamma (\eta \otimes \varphi) \quad (2.194)$$

missä $\gamma = \sigma\tau$.

Määritelmä 2.12.2 *Antisymmetrinen tensori. Kovariantti k -tensori φ on antisymmetrinen jos ja vain jos,*

$$\text{AntiSym}(\varphi) = \varphi \quad (2.195)$$

Kovariantti k -tensori on yleinen tensori ja voi sisältää symmetrisen ja antisymmetrisen osan. Jos kyseinen tensori sisältää pelkän antisymmetrisen osan ilman symmetristä osaa, on kysymys antisymmetrisestä tensorista.

2.12.1 Wedge-tulo \wedge

Seuraavaksi määrittelemme antisymmetrisiä tensoreita koskevan operaattorin, jonka ideana on keventää antisymmetrisyyuskuvauksen notaatiota. Operaattorin nimi on wedge-tulo, jota merkitään \wedge . Jos katsotaan esimerkiksi 2.12.4, niin tuloksen eteen ilmestyy aina ikävän näköisiä osamaaria, jotka riippuvat tensoreiden valensseista, joille antisymmetrisyys kuvaus suoritetaan. Me haluamme nämä osamäärät siistimpään muotoon ja eroon ”AntiSym”-kuvauksen kirjoittamisesta. Se tapahtuu kirjoittamalla wedge-operaattori seuraavasti

$$\omega \wedge \varphi = \frac{(k+l)!}{k! l!} \text{Antisym}(\omega \otimes \varphi) \quad (2.196)$$

missä ω on kovariantti k -tensori ja φ kovariantti l -tensori. Vaikka esityksen 2.196 kerroin näyttääkin ikävältä, se helpottaa laskentaa huomattavasti. Jos puretaan tämä edellinen auki käyttämällä antisymmetrisyys kuvauksen määritelmää 2.12.1 ja katsomalla esimerkkiä 2.12.4 saadaan

$$\omega \wedge \varphi = \frac{(k+l)!}{k! l!} \frac{1}{(k+l)!} \sum_{\sigma \in S_{k+l}} (\text{sgn } \sigma)^\sigma (\omega \otimes \varphi) \quad (2.197)$$

$$= \frac{1}{k! l!} \sum_{\sigma \in S_{k+l}} (\text{sgn } \sigma)^\sigma (\omega \otimes \varphi) \quad (2.198)$$

Määritelmä 2.12.3 *Wedge-tulo [7, s. 105]*

Olko ω k -kovektori ja φ l -kovektori. Wedge-tulo $\omega \wedge \varphi$ määritellään

$$\omega \wedge \varphi = \frac{1}{k! l!} \sum_{\sigma \in S_{k+l}} (\text{sgn } \sigma)^\sigma (\omega \otimes \varphi) \quad (2.199)$$

joka voidaan kirjoittaa argumenteilla

$$\begin{aligned} & \omega \wedge \varphi(X_1, \dots, X_k, X_{k+1}, \dots, X_{k+l}) \\ &= \frac{1}{k! l!} \sum_{\text{all } \sigma} (\text{sgn } \sigma) \omega(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(k)}) \varphi(X_{\sigma(k+1)}, \dots, X_{\sigma(k+l)}) \end{aligned}$$

Wedge-tulosta paremmin lähteissä [1, s.354], [7, s. 105], [17, s. 102] ja [9, s. 203].

Differentiaalimuodot monistoilla

Kappaleessa 2.7.4 määrittelimme tensoribundlen $T_s^r M$. Kovariantit k-tensorit kuuluvat bundleen $T^k M$. Antisymmetriset kovariantit k-tensorit eli k-kovektorit kuuluvat sen osajoukkoon, jota merkitsemme $\Lambda^k M \subset T^k M$. Bundlen $\Lambda^k M$ kappaleet ovat antisymmetrisiä tensorikenttiä, joita kutsutaan *differentiaali k-muodoiksi*. Bundlen kappaleiden joukko oli nk. moduuli, joka määriteltiin kappaleessa 2.7.6. Me voisimme merkitä näiden antisymmetristen vektorikenttien joukkoa moduulien kappaleessa käytetyllä notaatiolla $\Gamma(\Lambda^k M)$, mutta yhdyimme usein kirjallisuudessa esiintyvään tyyliin ja käytämme tästä kyseisestä antisymmetristen tensorikenttien joukosta notaatiota

$$\Omega^k(M) = \Gamma(\Lambda^k M) \quad (2.200)$$

Differentiaali k-muoto ω voidaan kirjoittaa millä tahansa sileällä kartalla lokaalisti

$$\omega = \omega_{i_1, \dots, i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \quad (2.201)$$

Differentiaali k-mudon komponentit $\omega_{i_1, \dots, i_k} dx^{i_1}$ voidaan laskea antamalla sen toimia karttaframeen

$$\omega \left(\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^{i_k}} \right) \quad (2.202)$$

2.12.2 Interior-tulo

Määritelmä 2.12.4 *Interior-tulo [7, s. 106]*

Olkoon v on vektorikenttä sileällä monistolla M ja ω differentiaali k -muoto. Kun vektorikenttä v syötetään k -muodon ω ensimmäiseen argumenttipaikkaan, niin kyseessä on operaattori nimeltä interior-tulo. Se on kuvaus

$$\begin{aligned} i_v : \Omega^k(M) &\longrightarrow \Omega^{k-1}(M) \\ \omega &\longmapsto i_v \omega := \omega(v, X_1, \dots, X_{k-1}) \end{aligned} \quad (2.203)$$

$i_v \omega$ merkitään usein myös $v \lrcorner \alpha$. Interior-tulo laskee k -muodon valenssia yhdellä.

2.12.3 Exterior derivaatta d

Differentiaaligeometrian kolme tärkeintä derivaattoihin liittyvää operaattoria ovat kovariantti derivaatta, Lien derivaatta ja seuraavaksi esiteltävä exterior derivaatta. Exterior derivaatta on funktion f differentiaalini df yleistyminen. Se toimii sileisiin differentiaali k -muotoihin lisäten k -muodon valenssia yhdellä.

Määritelmä 2.12.5 *Exterior derivaatta d . Olkoon M sileä monisto. Exterior derivaatta d on kuvaus*

$$d : \Omega^k(M) \longrightarrow \Omega^{k+1}(M)$$

jonka on toteutettava seuraavat neljä ominaisuutta

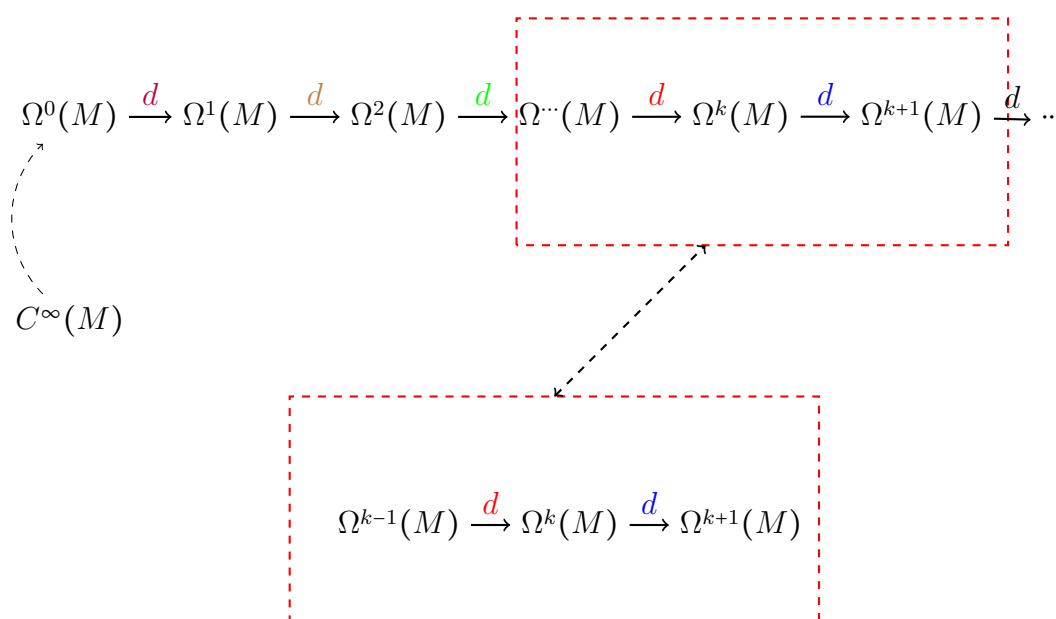
$$1) \quad d \text{ on } \mathbb{R} - \text{lineaarinen} \quad (2.204)$$

$$2) \quad df \text{ on funktion } f \in C^\infty(M) = \Omega^0(M) \text{ differentiaali} \quad (2.205)$$

$$3) \quad d \circ d = 0 \quad (2.206)$$

$$4) \quad d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^p(\alpha \wedge d\beta) \quad (2.207)$$

Funktiot ovat differentiaali 0-muotoja ja kuuluvat joukkoon $\Omega^0(M)$, tarkoittaen $C^\infty(M) = \Omega^0(M)$. Toinen exterior derivaatan ominaisuuksista $d(d\alpha) = 0$, mikä ilmoitetaan monesti ilman argumenttia $d^2 = 0$ tai $d \circ d = 0$ tarkoittaa, että minkä tahansa k -muodon exterior derivaatan exterior derivaatta on aina nolla.⁶¹ Tarkastellaan tätä exterior derivaatan ominaisuutta katsomalla kuvaa 2.46, jossa exterior derivaatan määritelmä 2.12.5 on purettu sekvenssiin



Kuva 2.46: exterior derivaatat

Kaikki exterior derivaatat d eri modulien välillä ovat eri kuvauksia. Tämän takia ne ovat merkittynä eri väreillä. Seuraavaksi määritellään kaksi Matriisilaskennan kursselta tuttua joukkoa, kuvauksen kuva-avaruus (Im) ja kernel (Ker).

Määritelmä 2.12.6 *Kuva-avaruus ja kernel. Olkoot P ja Q molemmat $C^\infty(M)$ -moduleja ja*

$$\phi : P \longrightarrow Q$$

⁶¹ks. todistus [1, s. 365]

niiden välinen kuvaus. Kuvauksen ϕ kuva-avaruus $Im(\phi)$ ja kernel $Ker(\phi)$ ovat seuraavanlaisia joukkoja

$$Q \ni Im(\phi) := \{ \phi(p) \mid p \in P \} \quad \text{Kuva-avaruus} \quad (2.208)$$

$$P \ni Ker(\phi) := \{ p \in P \mid \phi(p) = 0 \} \quad \text{Nolla-avaruus} \quad (2.209)$$

Voimme nyt katsoa kuvan 2.46 punaisella neliöllä merkittyä osaa, ja katsoa exterior derivaattojen $d : \Omega^k \rightarrow \Omega^{k+1}$ ja $d : \Omega^{k-1} \rightarrow \Omega^k$ kerneliä ja kuva-avaruutta vastaavasti

$$\begin{aligned} Ker(d) &\subseteq \Omega^k(M) \\ Im(d) &\subseteq \Omega^k(M) \end{aligned}$$

Huomaamme, että nämä molemmat kuvaukset (exterior derivaatat) ovat saman modulin aliavaruuksia. Joten ominaisuus $d \circ d = 0$ tarkoittaa, että d :n kuva-avaruus sijaitsee d :n kernelissä eli $Im(d) \subseteq Ker(d)$. Tästä pääsemme hyvin yleisesti käytettyyn terminologiaan koskien differentiaali k -muotoja.

$$\begin{array}{ccccc} \Omega^{k-1}(M) & \xrightarrow{d} & \Omega^k(M) & \xrightarrow{d} & \Omega^{k+1}(M) \\ \in \alpha & & \in \omega & & \end{array}$$

Kuva 2.47: eksakti, suljettu, potentiaali

Määritelmä 2.12.7 *Eksakti (engl. exact) ja suljettu (engl. closed). Differentiaali k -muoto $\omega \in \Omega^k(M)$ on eksakti, jos*

$$\omega \in Im(d)$$

ja suljettu jos,

$$\omega \in Ker(d)$$

Määritelmä 2.12.8 *Potentiaali.* Differentiaalimuoto $\alpha \in \Omega^{k-1}(M)$ on differentiaalimuodon $\omega \in \Omega^k(M)$ potentiaali jos,

$$d\alpha = \omega \quad (2.210)$$

Fysiikassa puhutaan konservatiivisista voimista ja systeemin energian säilyvyydestä. Voimakentät ovat tarkalleen ottaen kovektorikenttiä eli differentiaali 1-muotoja. Kovektorikenttä on *konservatiivinen*, jos kovektorikentässä olevan polun integraali riippuu vain sen alku- ja loppupisteistä - ei itse polusta. Tällöin sanotaan, että systeemin energia on säilynyt. Matemaattisesti tämä esitetään niin, että polun alku- ja loppupisteiden ollessa samat, on kovektorikentän df polkuintegraali nolla. Sanotaan, että kovektorikenttä on *konservatiivinen*.

Teoreema 2.12.1 *Kovektorikentän konservatiivisuus.* Differentiaali 1-muoto eli kovektorikenttä $\eta \in \Omega^1(M) = \Gamma(T^*M)$ on konservatiivinen, jos ja vain jos se on eksakti, tarkoittaen että,

$$\exists f \in C^\infty(M) : df = \eta$$

Todistus 2.12.1 *Ks. lähde [1, s.292-294]*

Exterior derivaatta esimerkkejä

Esimerkki 2.12.5 *Olkoon f funktio eli differentiaali 0-muoto. Differentiaali 1-muoto df eli funktion gradientti esitettynä kartalla x [1, s. 363]*

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i$$

Esimerkki 2.12.6 *Olkoon ω differentiaali 1-muoto. Differentiaali 2-muoto $d\omega$ esitettynä kartalla x [1, s. 363]*

$$\begin{aligned} d(\omega_j dx^j) &= \sum_{i,j} d\omega^i \wedge dx^j \\ &= \sum_{i,j} \frac{\partial \omega_j}{\partial x^i} dx^i \wedge dx^j \\ &= \sum_{i < j} \frac{\partial \omega_j}{\partial x^i} dx^i \wedge dx^j + \sum_{i > j} \frac{\partial \omega_j}{\partial x^i} dx^i \wedge dx^j \\ &= \sum_{i < j} \left(\frac{\partial \omega_j}{\partial x^i} - \frac{\partial \omega_i}{\partial x^j} \right) dx^j \wedge dx^i \end{aligned}$$

2.12.4 Cartanin kaava

Elie Cartan (1869-1951) oli raskalainen matemaatikko joka on differentiaali- ja geometrian kehittäjä. Yksi hänen tunnetuimmista teoreemista on nk. Cartanin kaava (engl. Cartan's magic formula). Tämä on hyvin käyttökelpoinen teoreema monien muiden teorioiden todistuksissa koordinaatistosta riippumattomalla tavalla. Cartanin kaavan teoreema on seuraava

Teoreema 2.12.2 [1, s. 372] *Sileällä monistolla M , mille tahansa sileälle vektorikentälle V ja sileälle differentiaalimuodolle ω pätee*

$$\mathcal{L}_V \omega = V \lrcorner (d\omega) + d(V \lrcorner \omega)$$

Todistus 2.12.2 *Ks. [1, s. 373]*

2.13 Symplektiset monistot

Symplektiset monistot ovat ehkä 1900-luvun suurin kontribuutio differentiaali- ja geometrian saralla. Nämä monistot ovat keskeisessä roolissa Hamiltonin mekaniikassa ja näyttävät myös suurta roolia fysiikan teorian kehityksessä. Hienoin asia symplektisissä monistoissa on se, että ne ovat kanonisesti eli luonnollisesti määriteltävissä sileän moniston jo olemassa olevien rakenteiden kautta. Mitään itse valittavia lisarakenteita ei tarvita. Kappaleessa 2.10 metriikka, lisäsimme sileälle monistolle (M, \mathcal{O}, A_{sm}) lisärakenteena metriikan g , eli nk. "mittatensorin". Metriikka oli symmetrinen kovariantti 2-tensori (kenttä), joka mahdollisti vektoreiden pituuksien mittaamisen. Metrinen tensorikenttä on nk. sisätulokenttä. Seuraavaksi esittelemme hieman metriikkaa muistuttavan otuksen, nimeltään symplektisen muodon ω . Erona metriseen tensoriin on symplektisen muodon antisymmetrisyys. Se on differentiaali 2. muoto (ks. 2.12) eli kontravariantti antisymmetrinen 2-tensorikenttä, joka mittaa pituuksien sijasta tilavuuksia⁶², jota kutsutaankin monesti tilavuus-muodoksi. Symplektinen muoto ω on ei-degeneroituva⁶³ kuvaus, kuten oli metrinen tensori g .

⁶²Myös pinta-aloja

⁶³Tensori generoi eli luo isomorfismin bundlien TM ja T^*M välille. Ei-degeneroituvuus on rinnastettavissa kääntyvyyteen.

Määritelmä 2.13.1 *Olkoon M sileä monisto. Symplektinen muoto ω on suljettu ei-degeneroituva differentiaali 2-muoto*

$$\omega : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \longrightarrow C^\infty M$$

jolla on seuraavat ominaisuudet

- 1) ω on suljettu, tarkoittaen $d\omega = 0$
- 2) ω on ei-degeneroituva, tarkoittaen että kuvaus

$$\begin{aligned} \tilde{\omega} : TM &\longrightarrow T^*M \\ x &\longmapsto \tilde{\omega}(X) := X \lrcorner \omega \end{aligned}$$

on kääntyvä.

Sileää monistoa M , joka on varustettu symplektisellä muodolla ω , kutsutaan symplektiseksi monistoksi, jota merkitään (M, ω) . Tärkeimpiä symplektisiä monistoja ovat kotangenttibundlet T^*M , mihin nk. tautologisen 1-muodon exterior derivaatta määrittelee symplektisen moniston rakenteen. Ennenkuin määrittelemme tautologisen 1-muodon, esittelemme nk. Darboux'n teoreeman.

2.13.1 Darboux'n koordinaatit

Teoreema 2.13.1 *Darboux'n teoreema [1, s. 571]. Olkoon (M, ω) symplektinen monisto ja $\dim M = 2n$. Tällöin jokaiselle pisteelle $p \in M$ voidaan löytää kartta*

$$(\mathcal{U}, x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^n) \tag{2.211}$$

jossa $p \in \mathcal{U}$ ja joilla symplektinen muoto ω voidaan esittää muodossa

$$\omega = \sum_i^n dx^i \wedge dy^i \tag{2.212}$$

Darboux'n teoreeman koordinaatteja kutsutaan *Darboux'n koordinaateiksi* tai *kanonisiksi koordinaateiksi*.

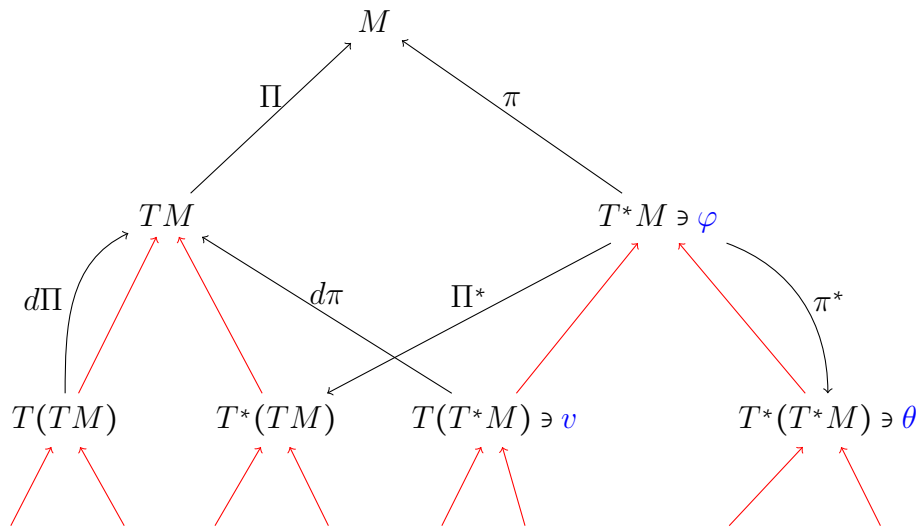
Todistus 2.13.1 *Ks. todistus [1, s. 571-574]*

Darboux'n teoreema sanoo, että symplektisen muodon ω komponentit voidaan aina esittää muodossa

$$\omega_{ab} \sim \left(\begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{array} \right) \tag{2.213}$$

Tämä on symplektisen muodon analoginen vastine Riemannin metrisen tensorin euklidisuudelle. Suurena erona on se, että tällaiset komponentit voidaan löytää aivan kaikilla symplektisillä monistoilla, kun taas Euklidista metristä tensoria on mahdotonta löytää kaikilla Riemannin monistoilla. Darboux'n teoreeman sanotaan olevan yksi symplektisen geometrian perustavanlaatuisimpia tuloksia, joka osoittaa suurimman eron symplektisten monistojen ja Riemannin monistojen välillä.

2.13.2 Tautologinen 1-muoto θ



Kuva 2.48: bundleit

Symplektinen muoto ω on kanonisesti määriteltävissä sileälle moniston kotangenttibundlelle T^*M , joka on myös sileä monisto. Symplektisen muodon ω määrittelyn ideaa alustaa kuva 2.48. Kappaleessa 2.7 määrittelimme sileän moniston tangenttibundlen (TM, Π, M) ja kotangenttibundlen (T^*M, π, M) , jotka olivat kolmikkoja (totaaliavaruus, projektiokuva, perusavaruus). Totaaliavaruus ja perusavaruus olivat sileitä monistoja. Bundleissa voidaan

mennä astetta korkeammalle ja toistaa samaa menetelmää siten, että T^*M toimiikin perusavaruutena ja totaaliavaruudeksi muodostetaan $T^*(T^*M)$. Samaa proseduuria voidaan jatkaa korkeammalle ja korkeammalle, jolloin edellisistä totaaliavaruuksista tulee seuraavien bundlien perusavaruuksia (ks. kuvaa 2.48). Kappaleessa 2.11 esitelimme push-forward- ja pull-back kuvaukset ($\phi_* := d\phi$) ja (ϕ^*) vastaavasti⁶⁴. Käytetään kyseistä tekniikkaa ja muodostetaan push-forward ja pull-back kuvaukset kotangenttibundlen T^*M projektiokuvaukselle π , joka näkyy kuvassa 2.48. Näiden kuvausten avulla määrittelemme nk. *tautologisen 1-muodon* $\theta \in T^*(T^*M)$, joka on kuvaus

$$\begin{aligned} \theta_{(x,\varphi)} : T_{(x,\varphi)}(T^*M) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ v &\longmapsto \theta_{(x,\varphi)}(v) := (\pi_{(x,\varphi)}^*\varphi)(v) := \varphi(d\pi_{(x,\varphi)}(v)) \end{aligned} \quad (2.214)$$

missä $\varphi \in T^*M$. Tautologinen 1-muoto θ määritellään siis $\theta := \pi^*\varphi$. Katsotaan seuraavaksi kotangenttibundlen T^*M projektiokuvausta π

$$\begin{aligned} \pi : T^*M &\longrightarrow M \\ (x, \varphi) &\longmapsto x \end{aligned} \quad (2.215)$$

Missä x on moniston pisteen koordinaattiesitys (x^i). φ :n koordinaatistoesitys on puolestaan $\varphi_i dx^i$. Jos laitetaan π^* toimimaan T^*M :n kantavektoriin dx^i , niin siitä seuraisi $\pi_{(x,\varphi)}^*(dx^i) = dx^i$. Tämä tarkoittaa, että tautologisen 1-muodon koordinaattiesitys on $\theta_{(x,\varphi)} = \pi_{(x,\varphi)}^*(\varphi_i dx^i) = \varphi_i dx^i$.

Symplektinen muoto määritellään $\omega = -d\theta = -d(\varphi_i dx^i)$ tarkoittaen

$$\omega = \sum_i dx^i \wedge d\varphi_i \quad (2.216)$$

missä x^i ja φ_i ovat kappaleessa 2.13.1 esitetyt Darboux'n koordinaatit. Klassisessa mekaniikassa hyvin yleinen tapa on esittää symplektinen muoto notaatiolla

$$\omega = dq^i \wedge dp_i \quad (2.217)$$

⁶⁴Push-forward kuvauksesta ϕ_* käytetään usein myös notaatiota $d\phi$

jossa summausmerkintä on jätetty pois. Koordinaatteja (p_i) kutsutaan *yleistetyn liikemäärän* koordinaateiksi ja koordinaatteja (q^i) *yleistetyn sijainnin* koordinaateiksi.

Se minkä takia symplektisen muoto $\omega = -d\theta$ määrittellään tautologisen 1-muodon θ kautta, juontuu pakonomaisesta tarpeesta. Hamiltonin mekaniikassa tila-avaruutena⁶⁵ toimii moniston kotangenttibundle T^*M ja edellä määritelty tilavuusmuoto $\omega \in \Omega^2(T^*M)$ on juurikin 2-muoto T^*M :llä. Jos olisimme ottaneet exterior derivaatan kovektorista $\varphi \in T^*M$ olisimme saaneet 2-muodon $d\varphi \in \Omega^2(M)$ monistolle M . Emme olisi enään pystynyt nostamaan saatua kovektoria ylemmäs käyttäen exterior derivaattaa d , koska $d(d\varphi) = 0$. Tämän takia kov vektori φ täytyi vetää ensin kuvauksella π^* yhtä bundlen astetta korkeammalle, (saatiin tautologinen 1-muoto θ) ja vasta sitten käyttää d :tä taut. 1-muotoon θ , jolloin saadaan kanonisesti käyttöön sopiva differentiaali 2-muoto eli symplektinen muoto ω .

2.13.3 Hamiltonin vektorikentät

Kuten jo mainittiin, motivaatio symplektisten monistojen esittelyyn on Hamiltonin mekaniikassa. Yksi merkittävä objekti symplektisillä monistoilla on Riemannin moniston vektorikenttägradienttiin $grad(f)$ 2.10.6 analoginen otus nimeltään funktion f Hamiltonin vektorikenttä X_f . Tätä vektorikenttää merkitään Hamiltonin mekaniikassa X_H , jossa H viittaa Hamiltonin funktioon. Se rakennetaan seuraavasti:

Määritelmä 2.13.2 *Hamiltonin vektorikenttä X_f [1, s. 574].*

Olkoon (M, ω) symplektinen monisto. Hamiltonin vektorikenttä X_f on

$$X_f = \tilde{\omega}^{-1}(df) \tag{2.218}$$

Missä $\tilde{\omega}$ on nk. bundle isomorfismi $\tilde{\omega} : TM \rightarrow T^*M$. Tämä isomorfismi tunnetaan myös symplektisen muodon ω ei-degeneroituvuus predikaattina. Edellisestä voidaan yhtä hyvin johtaa funktion gradientti df käyttäen interior-tuloa 2.12.4.

$$X_f \lrcorner \omega = df \tag{2.219}$$

⁶⁵Engl. state space

Symplektisellä muodolla ja Hamiltonin vektorikentällä saadaan otettua myös funktion f suunnattu derivaatta mv. vektorikentän Y suuntaan seuraavasti

$$\omega(X_f, Y) = df(Y) = Yf \quad (2.220)$$

Hamiltonin vektorikenttä X_f voidaan esittää Darboux-koordinaateissa seuraavasti

$$X_f = \sum_{i=1}^n \left(a^i \frac{\partial}{\partial x^i} + b^i \frac{\partial}{\partial y^i} \right) \quad (2.221)$$

Jos kytkemme tämän esityksen 2.221 kaavaan 2.219, saamme

$$df = X_f \lrcorner \omega = \sum_{i=1}^n \left(a^i \frac{\partial}{\partial x^i} + b^i \frac{\partial}{\partial y^i} \right) \lrcorner \sum_{i=1}^n dx^i \wedge dy^i = \sum_{i=1}^n (a^i dy^i - b^i dx^i) \quad (2.222)$$

Toisaalta funktion gradientti df on myös Darboux-koordinaateilla

$$df = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i + \frac{\partial f}{\partial y^i} dy^i \right) \quad (2.223)$$

Asetetaan nämä kaksi yhtälöä 2.222 ja 2.223 yhtäsuuriksi, jolloin saamme muodostettua nk. *Hamiltonin vektorikentän* X_f .

$$X_f = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial y^i} \frac{\partial}{\partial x^i} - \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial y^i} \right) \quad (2.224)$$

Sama vektorikenttä merkitään Hamiltonin formuloinnissa funktiolla H , jossa kartta (x^i, y^i) on korvattu notaatiolla (q^i, p_i)

$$X_H = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q^i} - \frac{\partial H}{\partial q^i} \frac{\partial}{\partial p_i} \right) \quad (2.225)$$

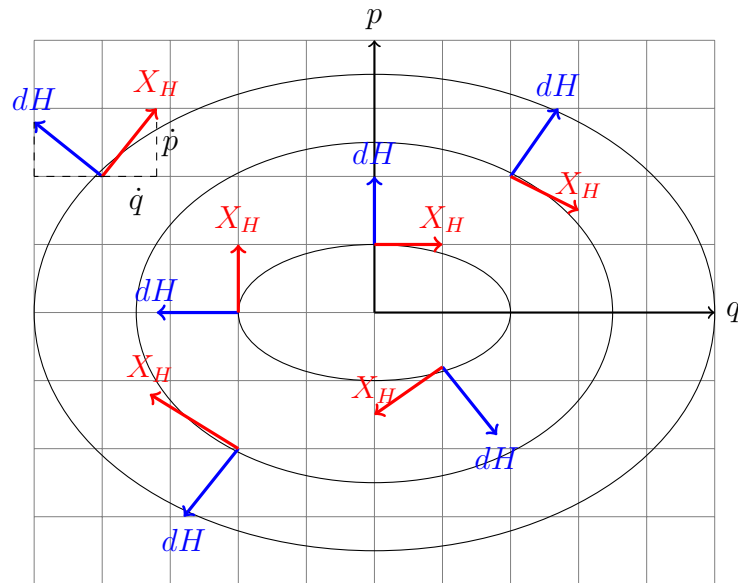
Symplektinen monisto (M, ω) varustettuna sileällä funktiolla $H \in C^\infty(M)$

on nimeltään Hamiltonin systeemi⁶⁶. Funktiota H kutsutaan systeemin Hamiltonin funktioksi, joka kuvastaa systeemin kokonaisenergiaa. Hamiltonin funktio ja systeemin kokonaisenergia ovat siis synonyymeja. Vektorikentän X_H integraalikäyrät ovat systeemin liikeratoja. Esityksen 2.224 mukaan nämä liikeradat eli käyrät $\gamma(t) = (x^i(t), y^i(t))$ voidaan muotoilla myös

$$\dot{x}^i(t) = \frac{\partial H}{\partial p_i}(x(t), y(t)) \quad (2.226)$$

$$\dot{y}^i(t) = -\frac{\partial H}{\partial q^i}(x(t), y(t)) \quad (2.227)$$

Näitä yhtälöitä kutsutaan *Hamiltonin yhtälöiksi*. Klassisessa mekaniikassa yhtälöissä x ja y on korvattu notaatiolla q ja p vastaavasti. Kuvassa 2.49 on piirrettynä systeemin kokonaisenergian eli Hamiltonin funktion H tasa-arvokäyriä Darboux'n koordinaateilla (q, p) . Hamiltonin vektorikenttä X_H on aina kohtisuorassa skalaarifunktion H gradienttia dH vastaan ja kiertosuunta on myötäpäivään. Vektorikentän X_H q -komponentit ovat gradienttikentän dH p -komponentteja ja X_H :n p -komponentit ovat dH :n q -komponentteja vastakkaisella etumerkillä.



Kuva 2.49: Hamiltonin vektorikenttä X_H

⁶⁶Huomaa Hamiltonin funktiossa $H \in C^\infty(M)$, että mekaniikan sovelluksissa monisto M on nk. faasiavaruus, eli kotangenttibundle T^*Q . Tällöin $H \in C^\infty(T^*Q)$. Lagrangen funktio L on tätävästoin $L \in C^\infty(TQ)$.

3

Klassinen mekaniikka

Mekaniikka on fysiikan yksi suurimmista ja vanhimmista tutkimuskohteista. Se on tieteenala, joka tutkii kappaleiden vuorovaikutuksia ja liikeilmiöitä. Mekaniikka on näytellyt suuressa osassa myös itse matematiikan kehityksessä. Laskemisoppi lähti liikkeelle Newtonin kehittämistä teorioista ja kehitys jatkuu edelleen sovellettaessa geometrian ja topologian teorioita erilaisiin mekaniikan ongelmiin.

Mekaniikka voidaan luokitella kahteen pääosa-alueeseen, klassiseen mekaniikkaan ja kvanttimekaniikkaan ja niiden yhteen tarkennukseen, suhteellisuusteorian eli relativistiseen mekaniikkaan. Jos tarkasteltavana olevan kappaleen nopeus lähestyy valonnopeutta, on otettava käyttöön relativistinen mekaniikka, jonka teorian Einstein esitti 1900-luvun alkupuoliskolla. Karkeasti sanottuna klassinen mekaniikka on apumalli, tarkoittaen sitä, että se ei ole äärimmäisen tarkka eikä yleispätevä. Epätarkkuus tulee kuitenkin esiin vain äärimmäisissä tilanteissa, ja klassinen mekaniikka onkin erittäin tärkeä osa insinöörien ja fyysikoiden koulutusta.

Klassisen mekaniikan tutkimus lähti käyntiin jo antiikin kreikasta, mutta sen nykyaikaisen muodon ja varsinaisen perustan loivat kuuluisat tiedemiehet, joista tärkeimpinä mainittakoon Newton, Galilei ja Kepler.

Tässä työssä keskitymme pääsääntöisesti vain klassiseen mekaniikkaan sivuamalla vain hieman relativistista mekaniikkaa. Kannattaa kuitenkin muistaa, että myöhemmin tekstissä esiteltävä Hamiltonin mekaniikka näyttää erittäin tärkeää roolia myös kvanttimekaniikassa.

Klassinen mekaniikka kuvaa siis kappaleiden liikkeitä kun ne ovat fyysikaalisten voimien vaikutusten alaisina. Se on käyttökelpoinen kuvaamaan kappaleiden liikkeitä hyvin suurella tarkkuudella, kun kysymys on yksittäistä atomia suuremmista kappaleista ja olettaen, että kappaleen nopeus on huomattavasti pienempi, kuin valon nopeus.

Klassinen mekaniikka voidaan muotoilla kolmella eri tavalla, jotka ovat: New-

tonin mekaniikka, Lagrangen mekaniikka ja Hamiltonin mekaniikka. Monesti Newtonin mekaniikkaa käytetään klassisen mekaniikan synonyyminä. Newtonilainen mekaniikka on kuitenkin vain yksi klassisen mekaniikan formalismi, joita on yhteensä nämä edellä mainitut kolme. Tämän kirjan yhtenä päämotiivina on esittää näiden kolmen eri lähestymistapojen erot ja selventää, milloin ja mitä näistä edellä mainituista mekaniikan eri muotoiluista kannattaa käyttää erilaisissa ongelmatilanteissa.

Lagrangen ja Hamiltonin lähestymistavat eivät sinänsä tuo mekaniikan teoriaan mitään uutta tai lisää sen yleispätevyyttä. Ne ovat paremminkin tehokkaita työkaluja, jotka helpottavat erilaisten ongelmien ratkaisuja, joita ei välttämättä Newtonilaisella mekaniikalla pystytä ainakaan helposti ratkaisemaan. Lagrangen ja Hamiltonin mekaniikkoja kutsutaan kuitenkin klassisen mekaniikan kahdeksi pääformalismiksi.

Klassinen mekaniikka on hyvin käytännöllinen, koska nämä mainitut tarkemat tunnetut teoriat, kuten suhteellisuusteoria ja kvanttimekaniikka korjaavat klassisen mekaniikan virheitä vain äärimmäisissä erikoistapauksissa (esim. mustat aukot, neutroni tähdet, atomirakenteet, suprajohtavuus jne.). Mielenkiintoista on myös se, että luultavasti kaikki ammattifyysikot soveltavat vieläkin klassista mekaniikkaa aina kuin mahdollista, johtuen teorian yksinkertaisuudesta ja käytännöllisyydestä verrattuna suhteellisuusteorian mekaniikkaan ja kvanttimekaniikkaan.

Seuraavaksi terminologiaa, joka on jatkuvassa käytössä klassisessa mekaniikassa.

Konfiguraatio avaruus Q

Konfiguraatioavaruus on sileä monisto josta käytetään merkintää Q .

Tila-avaruus ja nopeusavaruus TQ

Nopeusavaruus nimitystä käytetään harvemmin, mutta sillä viitataan edellä mainitun konfiguraatioavaruuden Q tangenttibundleen TQ . Usein tästä tangenttibundlesta käytetään yleisempää nimitystä *tila-avaruus*¹ (engl. state space). Konfiguraatioavaruuden tangenttibundlen koordinaatteja kutsutaan yleistetyiksi koordinaateiksi.

¹myös moniston Q kotangenttibundlesta T^*Q käytetään välillä nimitystä tila-avaruus. Kotangenttibundle tunnetaan paremmin nimellä faasiavaruus (eng. phase space)

Faasiavaruus T^*Q

Kun nopeusavaruus oli konfiguraatioavaruuden tangenttibundle, niin faasiavaruus (engl, phase space) on puolestaan konfiguraatioavaruuden Q kotangenttibundle T^*Q . Faasiavaruudella olevia koordinaatteja sanotaan yleistyiksi kanonisiksi koordinaateiksi tai Darboux'n koordinaateiksi.

Yleistetyt koordinaatit q^i

Lagrangen mekaniikassa käytetään usein nk. *yleistettyjä koordinaatteja* (q^i, \dot{q}^i) . Nämä ovat moniston Q tangenttibundlen TQ koordinaatteja. Koordinaatti q^i tarkoittaa partikkelin yleistettyä sijaintia ja \dot{q}^i yleistettyä nopeutta. Sana yleistys tulee siitä, että kyseisiä koordinaatteja ei ole rajattu mitenkään karteesisiin koordinaatteihin. Sivistyneellä koordinaattiframen valinnalla voimme usein vähentää yhden sijainti- ja nopeuskoordinaatin. Täysi kokoelma riippumattomia yleistettyjä koordinaatteja ilmoittaa myös kappaleen tai systeemin vapausasteen. Jos meillä on $N \in \mathbb{N}$ kappaletta partikkeleita, niin meillä on tyypillisesti $6N$ kappaletta yleistettyjä koordinaatteja (jos avaruutena on \mathbb{R}^3). Luku 6 tulee siis kolmesta avaruuden dimensiosta, joissa jokaiselle on dimension suuntainen nopeus. Monesti kannattaakin tutkia systeemin symmetrioita ennen ongelman varsinaista formulointia. Jos partikkeli liikkuu esimerkiksi pallon pinnalla, niin selvittää kahdella yleistetyllä sijainnilla ja kahdella yleistetyllä nopeudella. Tällöin yhden objektin vapausaste olisi neljä.

Kanoniset koordinaatit p_i

Hamiltonin mekaniikassa edellä mainitut yleistetyt koordinaatit on hyödyllistä muuntaa nk. kanonisiksi koordinaateiksi. Kanoniset koordinaatit ovat konfiguraatioavaruus moniston Q kotangenttibundlen T^*Q koordinaatteja. Ne kirjoitetaan yleensä muodossa (q^i, p_i) tai (x^i, p_i) missä q tai x viittaa alla olevan moniston Q koordinaatteihin. Koordinaatteja p_i kutsutaan konjugaattimomenteiksi, mitkä ovat differentiaali 1-muotoja kotangenttibundlessa T^*Q jossain moniston Q pisteessä q^i . Koska tämä joukko (q^i, p_i) muodostaa konfiguraatioavaruuden Q koordinaattisysteemin kotangenttibundlelle T^*Q , kutsutaan näitä koordinaatteja kanonisiksi koordinaateiksi.

3.1 Newtonin mekaniikka

Tämän kappaleen tarkoituksena ei ole varsinaisesti käsitellä Newtonin mekaniikkaa, vaan se oletetaan jo lukijalle tutuksi. Kappaleen motivaationa

on antaa johdantoa myöhemmin käsiteltävään Lagrangen mekaniikkaan. Lagrangen ja myös Hamiltonin mekaniikka liittyy vahvasti energian käsitteeseen. Kun fysikaalisia ongelmia formuloidaan Lagrangen mekaniikalla, ollaan kiinnostuneita systeemin energiasta, ei kiihtyvyyksistä tai voimista. Seuraavana tavoitteena on näyttää yhteys systeemin energioiden ja siinä vaikuttavien Newtonilaisten voimien välillä.

Palautetaan mieleen dynamiikan pääsääntö, eli Newtonin 2. laki:

$$F = m a \quad (3.1)$$

Jätämme sileät monistot hetkeksi ja tarkastelemme kappaleen liikettä Euklidisessa avaruudessa, jossa on karteesinen koordinaatisto \mathbb{R}^n . Kappaleen sijainti esitetään sileällä käyrällä q , joka riippuu ajasta $t \in \mathbb{R}$, joten se muodostaa kuvauksen

$$\begin{aligned} q : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ t &\longmapsto q(t) := (q^1(t), \dots, q^n(t)) \end{aligned} \quad (3.2)$$

Jossa $(q^1(t), \dots, q^n(t))$ ovat kappaleen sijainnin koordinaatit jollain ajan hetkellä t . Tästä kuvauksesta voimme määritellä käyrän nopeuden, jonka komponentit on kuvaus

$$\begin{aligned} v := \dot{q} : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ t &\longmapsto \dot{q}(t) := (\dot{q}^1(t), \dots, \dot{q}^n(t)) \end{aligned} \quad (3.3)$$

missä $\dot{q}^i = \frac{dq^i}{dt}$. Voimme edelleen määritellä myös käyrän kiihtyvyyden komponentit

$$\begin{aligned} a := \dot{v} := \ddot{q} : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ t &\longmapsto \ddot{q}(t) := (\ddot{q}^1(t), \dots, \ddot{q}^n(t)) \end{aligned} \quad (3.4)$$

Olkoon kappaleen massa $m > 0$ ja voima F kovektorikenttä \mathbb{R}^n :ssä. Newton esitti, että kappaleen liike toteuttaa yhtälön $F = ma$, joka on täydellisyydessään

$$m\ddot{q}(t) = F(q(t)) \quad (3.5)$$

Tämä on 2. asteen differentiaaliyhtälö käyrälle $q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, jolla on yksikäsitteinen ratkaisu, kun alkuehdot $q(t_0)$ ja $\dot{q}(t_0)$ tiedetään, kovektorikentän F ollessa sileä.

Määritellään seuraavaksi käsite liike-energia (kineettinen energia), josta käytetään notaatiota K

$$K(t) := \frac{1}{2}m\dot{q}(t) \cdot \dot{q}(t) \quad (3.6)$$

Liike-energian käsite on mielenkiintoinen, koska

$$\frac{d}{dt}(K(t)) := m \ddot{q}(t) \cdot \dot{q}(t) \text{ eli} \quad (3.7)$$

$$= m a(t) \cdot v(t) = F(q(t)) \cdot \dot{q}(t) \quad (3.8)$$

Joten kappaleen liike-energia kasvaa, kun siihen kohdistuu voimia sen nopeuden suuntaan, ja pienenee kun voimat kohdistuvat vastakkaiseen suuntaan. Edellä olevasta voimista johtaa käyttäen integraalia

$$K(t_1) - K(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} F(q(t)) \cdot \dot{q}(t) dt \quad (3.9)$$

Joten systeemin liike-energian muutos on suoraan verrannollinen voiman tekemään *työhön*, joka on voiman F integraali pitkin käyrää $q : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^n$. Stokesin lause viivaintegraaleille ja pintaintegraalien roottoreille osoittaa, että, liike-energian muutos $K(t_1) - K(t_0)$ on riippumaton käyrän reitistä alkupisteestä $q(t_0)$ loppupisteeseen $q(t_1)$ jos ja vain jos

$$\operatorname{curl}(F) = 0 \quad (3.10)$$

millä viitataan siihen, että voimakentällä ei saa olla pyörteisyyttä. Tämä on totta jos ja vain jos

$$F = -d(V) \quad (3.11)$$

Jossa V on funktio $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Funktiota V kutsutaan voiman F potentiaaliksi. Voimaa, jolla on tämä kyseinen ominaisuus, kutsutaan *konservatiiviseksi*. Konservatiivinen tarkoittaa säilyvää, ja jos tällainen funktio V on olemassa, voimme määrittää systeemin kokonaisenergian

$$E(t) := K(t) + V(q(t)) \quad (3.12)$$

Missä $V(t) := V(q(t))$ on kappaleen tai systeemin potentiaalienergia. Seuraavaksi voimme näyttää, että systeemin kokonaisenergia E säilyy, tarkoittaen, että se on ajasta riippumaton. Nähdäksemme tämän, lisätään kaavaan 3.7 potentiaalienergian V termi

$$\frac{d}{dt} (K(t) + V(q(t))) := F(q(t)) \cdot \dot{q}(t) + dV(q(t)) \cdot \dot{q}(t) \quad (3.13)$$

$$= 0 \quad \text{koska } d(V) = -F \quad (3.14)$$

Konservatiiviset voimat eli voimat joille löytyy jokin potentiaalifunktio V , sallivat meidän käyttää näitä tehokkaita työkaluja, kuten Newtonin, Lagrangen ja Hamiltonin mekaniikat. Tämä voidaan osoittaa käyttäen variaatiolaskentaa Ks. todistus [11, s. 4]. Voidaankin yleisesti sanoa, että kaikki luonnonvoimat ovat konservatiivisia.

Lagrangelaisessa formalismissa määritellään Lagrangen funktio L liike- ja potentiaalienergian erotuksen avulla seuraavasti

$$L := K(t) - V(q(t)) \quad (3.15)$$

Tämä on Lagrangen formalismin kulmakivi fysikaalisia ongelmia ratkottaessa, josta lisää seuraavassa kappaleessa 3.2 Lagrangen mekaniikka.

3.2 Lagrangen mekaniikka

Lagrangen mekaniikka on ranskalaisen matemaatikon Joseph-Louis Lagrangen vuonna 1788 esittelemä vaihtoehtoinen lähestymistapa klassiseen mekaniikkaan. Lagrangen mekaniikan formalismi perustuu havaintoon, että voimien tasapainolait, kuten Newtonin $F = ma$, nojautuvat nk. *variaatio-periaatteeseen*² [8, s.2]. Tämä kyseinen variaatioperiaate tunnetaan myös nimellä *pienimmän vaikutuksen periaate*, joka on täsmällisemmin ilmaistuna *stationaarisen vaikutuksen periaate*. Lagrangelainen mekaniikka on Newtonilaisesta mekaniikasta riippumaton, ja Newtonin mekaniikan liikelait voidaankin johtaa Lagrangelaisesta formalismista. Esitellään seuraavaksi Lagrangen formalismi.

Olkoon Q sileä monisto, jota kutsumme konfiguraatioavaruudeksi ja a ja b kaksi sen eri pistettä tarkoittaen $a \in Q \neq b \in Q$. Muodostetaan sileiden käyrien joukko \mathcal{C} , joissa a ja b toimivat näiden kaikkien käyrien alku- ja loppupisteinä vastaavasti. Käyrien joukko \mathcal{C} merkitään

$$\mathcal{C} := \{\gamma : [t_0, t_1] \longrightarrow Q \mid \gamma(t_0) = a, \gamma(t_1) = b\} \quad (3.16)$$

Käytetään käyrien koordinaattiesityksissä karttaa (q, Q) , jolloin \mathcal{C} :n tietyn käyrän pisteiden koordinaattiesitykset ovat muotoa $(q^i \circ \gamma)(t)$. Käytämme tästä lyhennettyä notaatiota $q^i(t)$. Näiden käyrien eri pisteisiin liittyvät

²Vaikka variaatioperiaate liittyy Lagrangelaiseen mekaniikkaan, on tämän periaatteen kehittänyt Hamiltonin mekaniikan kehittäjä William Hamilton

nopeudet eli tangenttivektorit kuuluvat kokonaisuudessaan konfiguraatioavaruuden Q tangenttibundleen TQ , jota kutsutaan nopeusavaruudeksi. Tangenttibundlen kartta on (TQ, q^i, \dot{q}^i) , jossa on tieto konfiguraatioavaruuden pisteisiin liitetystä nopeuksista. Tyypitetään kuvaus L , jota kutsumme Lagrangianiksi tai Lagrangen funktioksi.

Määritelmä 3.2.1 *Lagrangen funktio*

$$\begin{aligned} L : TQ &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (q^i, \dot{q}^i) &\longmapsto L(q^i, \dot{q}^i) \end{aligned}$$

Lagrangen funktio on siis kappaleen yleistettyjen paikkakoordinaattien q^i ja näitä vastaavien nopeusvektorien komponenttien \dot{q}^i funktio.³ Mekaniikan sovelluksissa Lagrangen funktioksi määritellään usein kineettinen energia K vähennettynä potentiaalienergialla V eli $L = K - V$. Lagrangen funktio on nk. funktionaali, joka kuuluu sileiden funktioiden joukkoon nopeusavaruudella TQ eli $L \in C^\infty(TQ)$.

Määritellään seuraavaksi nk. *vaikutusfunktio* S (engl. action)

Määritelmä 3.2.2 *Vaikutusfunktio S*

$$\begin{aligned} S : \mathcal{C} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \gamma &\longmapsto S(\gamma) := \int_{t_0}^{t_1} L(q^i, \dot{q}^i) dt \end{aligned}$$

Otetaan sileiden käyrien joukosta \mathcal{C} , yksi käyrä γ ja määritellään sen variaatio σ .

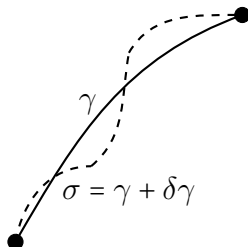
Määritelmä 3.2.3 *Käyrän γ variaatio σ*

$$\sigma : (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow \mathcal{C} \tag{3.17}$$

$$s \longmapsto \sigma(s) \tag{3.18}$$

³Voisi olla lisäksi myös ajan t funktio, jonka jätämme yksinkertaistamisen vuoksi pois.

s.e $\sigma(0) = \gamma$ ja $\sigma(s)(t)$ on sileä. Variaation lähtöjoukossa $\epsilon \in \mathbb{R}^+$ on infinide-simaalinen pieni muutos nolasta.



Kuva 3.1: Käyrän γ variaatio σ

Käyrän γ sanotaan noudattavan pienimmän vaikutuksen periaatetta tai toisin sanottuna olevan stationaarinen käyrä, jos se on vaikutusfunktion S kriittinen piste.

Määritelmä 3.2.4 Käyrä γ on vaikutusfunktion S kriittinen piste [6, s.206] jos

$$\left. \frac{d}{ds} S(\sigma(s)) \right|_{s=0} = 0$$

Millä tahansa käyrän γ variaatiolla σ .

Jatkossa käytämme merkinnän $\left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0}$ sijastaa merkintää δ , eli 3.19 voidaan kirjoittaa muodossa $\delta S(\sigma(s)) = 0$. Tämä variaatio-operaattori δ käyttäytyy differentiaalioperaattorin d tavoin.

Huomio 10 Tähän mennessä olemme olettaneet, että kartta q kattaa koko moniston Q . Vastaava johto voitaisiin luonnollisesti tehdä myös tarkastelemalla moniston osajoukkoa $U \in \mathcal{O}_Q$ käyttämällä vain tämän alueen peittävää karttaa.

3.2.1 Euler-Lagrangen yhtälöt

Suuri osa mekaniikan teorioista voidaan johtaa variaatioperiaatteella, jossa edellä saimme johdantoa. Variaatiomenetelmä on koordinaatistosta riippumaton ja sitä voidaan hyvin soveltaa myös relativistisessä mekaniikassa.

Teoreema 3.2.1 Käyrä $\gamma \in \mathcal{C}$ on vaikutusfunktion S kriittinen piste, jos ja vain jos se toteuttaa Euler-Lagrangen yhtälöt [6, s. 206]

$$\frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) = 0 \quad (3.19)$$

Todistus 3.2.1 Lähdetään tarkastelemaan vaikutusfunktiota S käyrän γ variaatiolla σ , joka määritellään seuraavasti

$$S(\sigma(s)) = \int_{t_0}^{t_1} L(q^i, \dot{q}^i) dt \quad (3.20)$$

Missä (q^i, \dot{q}^i) ovat varioidun käyrän σ_γ koordinaatteja nopeusavaruudella TQ . Varioidaan seuraavaksi kyseistä vaikutusfunktiota

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} S(\sigma(s)) \Big|_{s=0} &= \delta S(\sigma(s)) = \delta \int_{t_0}^{t_1} L(q^i, \dot{q}^i) dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \delta L(q^i, \dot{q}^i) dt = 0 \end{aligned} \quad (3.21)$$

Koska variaatio-operaattori käyttäytyy differentiaalioperaattorin tavoin saamme

$$\int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial L}{\partial q^i} \delta q^i + \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \delta \dot{q}^i}_{* \text{ Leibniz}} \right) dt = 0$$

Mistä saamme Leibnizin sääntöä soveltamalla

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \delta q^i \right) &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) \delta q^i + \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \delta \dot{q}^i}_* = 0 \\ \Rightarrow \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \delta \dot{q}^i}_* &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \delta q^i \right) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) \delta q^i \end{aligned}$$

Joten yhtälöt saavat muodon

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial L}{\partial q^i} \delta q^i + \underbrace{\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \delta q^i \right) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) \delta q^i}_{*} \right) dt &= 0 \\ \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) \right) \delta q^i + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \delta q^i \right) dt &= 0 \\ \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) \right) \delta q^i dt + \underbrace{\int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \delta q^i \right) dt}_{\text{päätytermi}} &= 0 \\ \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) \right) \delta q^i dt + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \underbrace{(\delta q^i(t_1) - \delta q^i(t_0))}_{0-0=0} &= 0 \\ \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) \right) \delta q^i dt &= 0 \\ \implies \frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) &= 0 \end{aligned}$$

Fyysikot kirjoittavat Euler-Lagrangen yhtälöt usein muotoon

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) = \frac{\partial L}{\partial q^i} \quad (3.22)$$

Euler-Lagrangen yhtälöt ovat liike-yhtälöitä, joissa tarkastelemme vektorisuureiden, kuten voimien ja kiihtyvyyksien sijaan systeemin energiaa. Edellä suoritettu Euler-Lagrangen yhtälöiden johto on suhteellisen abstrakti, joten herääkin kysymys, kuinka sovellamme Lagrangen mekaniikkaa kinemaattisiin ongelmiin? Annetaan yhtälöiden termeille ensiksi konkreettiset merkitykset

TERMI	TARCOITUS	SYMBOLI
$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}$	LIIKEMÄÄRÄ	p_i
$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right)$	LIIKEMÄÄRÄN MUUTOS	\dot{p}_i
$\frac{\partial L}{\partial q^i}$	VOIMA	F_i

$$\underbrace{\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right)}_{\dot{p}_i} = \underbrace{\frac{\partial L}{\partial q^i}}_{F_i} \quad (3.23)$$

Liikemäärän p kokonaisderivaatta \dot{p} on siis yhtäläinen systeemiin vaikuttavien voimien kanssa eli $\dot{p} = F$. Tästä voidaan nähdä välittömästi analogia Newtonilaiseen mekaniikkaan ja mekaniikan 2. peruslakiin. Karkeasti esitettyä $p = mv$ ja $\dot{p} = m\dot{v} = ma$. Tottakai voisimme ratkaista kaikki mekaniikan ongelmat käyttäen Newtonin lakeja, mutta Lagrangen mekaniikalla monista ongelmista tulee huomattavasti helpompia. Syy tähän on on seuraavan kappaleen otsikossa.

Koordinaatisto riippumattomuus

Teoreema 3.2.2 *Jos käyrä γ , jonka koordinaattiesitys on muotoa (q^1, q^2, \dots, q^n) toteuttaa Euler-Lagrangen yhtälöt (3.21), niin sama käyrä γ toteuttaa yhtälöt myös jossain toisissa koordinaateissa (x^1, x^2, \dots, x^n) . Tarkoittaen jos*

$$\frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) = 0 \quad (3.24)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial L}{\partial x^a} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^a} \right) = 0 \quad (3.25)$$

Todistus 3.2.2 *E-L yhtälöt ovat koordinaatistosta riippumattomia [5]. Tehdään aluksi koordinaatistonmuunnokset molemmille termeille ja johdetaan muutama aputulos*

$$\frac{\partial L}{\partial x^a} = \frac{\partial q^i}{\partial x^a} \frac{\partial L}{\partial q^i} + \frac{\partial \dot{q}^i}{\partial x^a} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^a} = \underbrace{\frac{\partial q^i}{\partial \dot{x}^a} \frac{\partial L}{\partial q^i}}_0 + \frac{\partial \dot{q}^i}{\partial \dot{x}^a} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} = \underbrace{\frac{\partial \dot{q}^i}{\partial \dot{x}^a}}_* \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}$$

$$*) \quad \frac{\partial \dot{q}^i}{\partial \dot{x}^a} = \frac{\partial}{\partial \dot{x}^a} \frac{d}{dt} q^i = \frac{\partial}{\partial \dot{x}^a} \frac{\partial q^i}{\partial x^b} \dot{x}^b = \frac{\partial q^i}{\partial x^b} \frac{\partial \dot{x}^b}{\partial \dot{x}^a} = \frac{\partial q^i}{\partial x^a}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^a} \right) &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \dot{q}^i}{\partial \dot{x}^a} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \dot{q}^i}{\partial \dot{x}^a} \right) \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} + \frac{\partial \dot{q}^i}{\partial \dot{x}^a} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) \\ &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial q^i}{\partial x^a} \right) \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} + \frac{\partial q^i}{\partial x^a} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) \end{aligned}$$

Euler-Lagrangen yhtälöt saavat muodon uusilla koordinaateilla

$$\frac{\partial L}{\partial x^a} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^a} \right) = \frac{\partial q^i}{\partial x^a} \frac{\partial L}{\partial q^i} + \frac{\partial \dot{q}^i}{\partial x^a} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial q^i}{\partial x^a} \right) \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial q^i}{\partial x^a} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right)$$

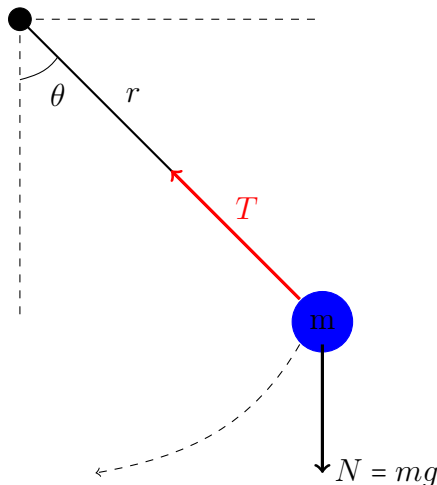
Josta yhdistelemällä termejä saadaan

$$\begin{aligned} &= \frac{\partial q^i}{\partial x^a} \underbrace{\left(\frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) \right)}_0 + \frac{\partial \dot{q}^i}{\partial x^a} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial q^i}{\partial x^a} \right) \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \\ &= \frac{\partial \dot{q}^i}{\partial x^a} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial q^i}{\partial x^a} \right) \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} = \left(\frac{\partial \dot{q}^i}{\partial x^a} - \underbrace{\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial q^i}{\partial x^a} \right)}_{**} \right) \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \\ * *) \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial q^i}{\partial x^a} \right) &= \frac{\partial^2 q^i}{\partial x^a \partial x^b} \dot{x}^b + \frac{\partial^2 q^i}{\partial x^a \partial t} = \frac{\partial}{\partial x^a} \underbrace{\left(\frac{\partial q^i}{\partial x^b} \dot{x}^b + \frac{\partial q^i}{\partial t} \right)}_{\dot{q}^i} = \frac{\partial \dot{q}^i}{\partial x^a} \\ \implies \underbrace{\left(\frac{\partial \dot{q}^i}{\partial x^a} - \frac{\partial \dot{q}^i}{\partial x^a} \right)}_0 \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} &= 0 \end{aligned}$$

Joten Euler-Lagrangen yhtälöt ovat koordinaatistosta riippumattomia

Tässä on juurikin Lagrangen mekaniikan ydin. Se on täysin koordinaatistosta riippumaton, joten se sallii käyttää koordinaatistoa, jonka parhaaksi näemme. Lagrangen formalismissa systeemin konfiguraatioavaruus Q voi olla minkäläinen sileä monisto hyvänsä, joka mahdollistaa systeemin liikkeen kuvaamisen pienemmällä määrällä riippumattomia koordinaatteja, jolloin koordinaatteja on käytössä vain systeemin todellisen vapausasteen lukumäärä. Näitä koordinaatteja kutsutaan yleistetyiksi koordinaateiksi. Yleistettyjen koordinaattien käyttö tarkoittaa käytännössä sitä, että liikeyhtälöiden ratkaisuna saadussa differentiaaliyhtälöryhmässä on aina pienin mahdollinen määrä yhtälöitä. Voidaankin sanoa, että Lagrangelaaisessa formalismissa selvittäään melkein aina pienemmällä määrällä differentiaaliyhtälöitä, kuin Newtonilaisella menetelmällä edetessä.

Toinen vähintään yhtä merkittävä ja hieman edelliseen liittyvä hyöty Lagrangen formalismissa liittyy systeemin rajoitusvoimiin. Rajoitusvoimia voivat olla esimerkiksi kitkavoimat ja sauvojen jännitysvoimat. Katsotaan kuvaa 3.2.1.



Kuva 3.2: yksinkertainen heiluri

Yksinkertaisessa heilurissa rajoitusvoimana toimii langan jännitysvoima T . Newtonilaisessa mekaniikassa nämä rajoitusvoimat on otettava huomioon eksplisiittisesti liikeyhtälöitä muodostettaessa. Lagrangelaaisessa formalismissa rajoitusvoimia ei tarvitse ottaa eksplisiittisesti huomioon. Nämä tulevat mukaan implisiittisesti käytettäessä järkevästi valittuja yleistettyjä koordinaat-

teja. Heilurin tapauksessa yleistettyinä koordinaatteina olisi vain heilahduskulma θ . Rajoitusvoimat tulevat esiin automaattisesti liikeyhtälöistä, kun määritetty Lagrangen funktio kytketään Euler-Lagrangen yhtälöihin. Tähän liittyvä esimerkki seuraavassa luvussa. Lagrangen menetelmän hyödyt tulevat kunnolla esiin moniulotteisissa systeemeissä, missä tarkasteltavia objekteja on paljon.

Voidaan sanoa, että monimutkaisissa fysikaalisissa ongelmissa Lagrangen (tai Hamiltonin) mekaniikan käyttö on miltein välttämätöntä. Lagrangen formalismi vapauttaa Newtonilaisesta voima-kiihtyvyyssuunta ajattelusta ja sallii keskittyä pelkästään systeemin energiaan. Näin tehtävän formulointi on huomattavasti helpompaa.

Ideana Lagrangen mekaniikan formuloinnissa on siis löytää systeemiä kuvaava Lagrangen energiafunktio L , joka formuloidaan klassisen mekaniikan tehtävissä usein $L = K - V$ eli kineettisen energian ja potentiaalienergian erotuksena. Jos energia on konservatiivinen eli säilyvä, voi energia vaihtaa tilaansa edestakaisin kineettisestä potentiaalisiksi. Lagrangen funktio on suuri, kun isoin osa energiasta on kineettisessä muodossa ja pieni, kun suurin osa energiasta on potentiaalisessa muodossa. Lagrangen funktion voidaankin sanoa kuvaavan systeemin "elävyyttä", koska kineettisen energian ollessa suuri, on systeemi elävämpi. Teoreema 3.2.1 yrittää siis kertoa, että luonto yrittää minimoida systeemin kokonaiselävyyden ajassa. Tämä voidaan muotoilla myös niin, että luonto on niin laiska, kuin mahdollista. [11, s. 7]

3.3 Hamiltonin mekaniikka

Teoriaosuuden kappaleessa 2.13 Symplektiset monistot todistimme, että Hamiltonin mekaniikka on täysin riippumaton Lagrangen mekaniikasta. Tämä tehtiin symplektisen muodon ω avulla. On kuitenkin hyvä ymmärtää, millainen yhteys Lagrangen ja Hamiltonin mekaniikkojen välillä vallitsee. Lagrangen formalismissa keskitytään kappaleen sijaintiin ja nopeuteen, jossa Lagrangen funktio oli $L \in C^\infty(TQ)$ eli kuvaus

$$L : TQ \longrightarrow \mathbb{R} \tag{3.26}$$

missä tangenttibundle TQ on sijainti-nopeus parien avaruus. Kun johdimme Euler-Lagrangen yhtälöt, määrittelimme yhtälön osille merkitykset, joista yksi oli liikemäärä

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}$$

Tästä näimme välittömästi, että $\dot{p}_i = \frac{\partial L}{\partial q^i}$ eli systeemin liikemäärän muutos on yhtäläinen siihen vaikuttavien voimien kanssa.

Hamiltonin formalismissa keskitytään sijaintiin ja liikemäärään. Symplektisten monistojen kappaleessa mainittu Hamiltonin funktio $H \in C^\infty(T^*Q)$ on kuvaus

$$H : T^*Q \longrightarrow \mathbb{R} \quad (3.27)$$

Missä kotangenttibundle T^*Q eli faasiavaruus on sijainti-liikemäärä parien avaruus. Sijaintien ja liikemäärien aikaderivaavat toteuttivat nk. Hamiltonin yhtälöt seuraavasti

$$\dot{q}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad (3.28)$$

$$\dot{p}_i = - \frac{\partial H}{\partial q^i} = \underbrace{\frac{\partial L}{\partial q^i}}_{E-L \text{ yht. } F_i} \quad (3.29)$$

Missä jälkimmäiseen on lisättynä yhteys Lagrangen formalismiin.

3.3.1 Legendre muunnos

Legendre muunnos⁴ on yksinkertainen tapa muuntaa Lagrangen funktio L Hamiltonin funktioksi H . Legendre muunnos ilman yksikäsitteistä määrittelyä on kuvaus λ

$$\begin{aligned} \lambda : TM &\longrightarrow T^*M \\ (q, \dot{q}) &\longmapsto \lambda(q, \dot{q}) := (q, p) \end{aligned} \quad (3.30)$$

⁴Legendre muunnoksesta käytetään kirjallisuudessa myös nimitystä Fiber-derivaatta

Eli se kuvaa tangenttibundlen TM koordinaatit kotangenttibundlen T^*M koordinaateiksi. Legendre muunnos voitaisiin esitellä monellakin eri tapaa, joista matemaattisesti yleispätevimmit löytyvät esim. lähteistä [6, s. 208] ja [11, s. 54]. Tässä työssä esittelemme kuitenkin vain perusidean, mistä Legendre muunnoksessa on käytännöllisesti katsoen kysymys.

Olkoon yhden muuttujan funktio $F(x)$ ja merkitään sen derivaattaa seuraavasti.

$$\frac{dF(x)}{dx} = s(x) \quad (3.31)$$

Legendre muunnoksen tarkoituksena on löytää uusi funktio G , joka vaihtaa x :n ja s :n roolit. Tarkoitetaan, että tavoitteena on löytää $G(s)$, siten että

$$\frac{dG(s)}{ds} = x(s) \quad (3.32)$$

Ilmeisin tapa olisi lähteä integroimaan yhtälöä käyttäen separointitekniikkaa, mutta Legendre muunnoksen idea on juurikin korvata tämä integrointi huomattavasti kätevämmällä tavalla. Jos tällainen funktio $G(s)$ on olemassa, niin voimme laskea yhteen nämä kaksi funktiota G ja F ja huomata seuraavaa

$$dF + dG = sdx + xds \quad (3.33)$$

$$d(F + G) = d(sx) \quad (3.34)$$

$$F + G = sx \quad (3.35)$$

$$G = sx - F \quad (3.36)$$

$$= \frac{dF}{dx}x - F \quad (3.37)$$

Kun G esitetään sille kuuluvalla argumentilla s , tulee yhtälö muotoon

$$G(s) = sx(s) - F(x(s)) \quad (3.38)$$

Jossa funktio $G(s)$ on funktion $F(x)$ Legendre muunnos. Sama tekniikka

voidaan yleistää myös usean muuttujan funktioille. Tässä abstraktissa esityksessä meillä oli nelikko G, F, x, s . Vaihdetaan kyseisen nelikon symbolit H, L, \dot{q}, p , ja lisätään yksimuuttuja q , joka esiintyy molemmissa funktioissa, niin saadaan

$$H(q, p) = p\dot{q}(q, p) - L(q, \dot{q}(q, p)) \quad (3.39)$$

Jossa H on siis Lagrangen funktion L Legendre-muunnos. Jos nyt otamme osittaisderivaatan p :n suhteen Hamiltonin funktiosta saamme

$$\begin{aligned} \frac{\partial H(q, p)}{\partial p} &= \frac{\partial(p\dot{q}(q, p))}{\partial p} - \frac{\partial L(q, \dot{q}(q, p))}{\partial p} \\ &= p \frac{\partial \dot{q}(q, p)}{\partial p} + \dot{q}(q, p) \frac{\partial p}{\partial p} - \frac{\partial \dot{q}(q, p)}{\partial p} \frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}} - \underbrace{\frac{\partial q}{\partial p} \frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial q}}_0 \\ &= p \frac{\partial \dot{q}(q, p)}{\partial p} + \dot{q}(q, p) - \frac{\partial \dot{q}(q, p)}{\partial p} \underbrace{\frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}}}_p \\ &= p \frac{\partial \dot{q}(q, p)}{\partial p} + \dot{q}(q, p) - \frac{\partial \dot{q}(q, p)}{\partial p} p \\ \frac{\partial H(q, p)}{\partial p} &= \dot{q}(q, p) \end{aligned}$$

Mikä täsmää ensimmäiseen Hamiltonin yhtälöistä 3.28. Luonnollisesti sama voidaan tehdä ottamalla osittaisderivaatta myös paikan q suhteen, jolloin saadaan myös toinen Hamiltonin yhtälöistä $\dot{p} = -\frac{\partial H(q, p)}{\partial q}$.

On tärkeää muistaa edellä käytetty yhteys E-L yhtälöistä eli $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$. Seuraavassa esimerkissä muodostamme Hamiltonin funktion Lagrangen funktiosta käyttäen Legendre muunnosta.

Esimerkki 3.3.1 Legendre-muunnos 1D harmonisen oskillaattorin Lagrangen funktiosta

$$L = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 - \frac{1}{2}kq^2 \quad (3.40)$$

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = m\dot{q} \Rightarrow \dot{q} = \frac{p}{m} \quad (3.41)$$

$$H(q, p) = p\dot{q} - \frac{1}{2}m\dot{q}^2 + \frac{1}{2}kq^2 \quad (3.42)$$

$$= p\frac{p}{m} - \frac{1}{2}m\left(\frac{p}{m}\right)^2 + \frac{1}{2}kq^2 \quad (3.43)$$

$$= \frac{p^2}{m} - \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kq^2 \quad (3.44)$$

$$= \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kq^2 \quad (3.45)$$

Jos nyt katsomme kappaleen alussa esitettyä Legendre muunnoksen kuvaus-tyypitystä 3.30 olisi, se yksikäsitteisesti määriteltynä

$$\lambda : TM \longrightarrow T^*M$$

$$(q, \dot{q}) \longmapsto \lambda(q, \dot{q}) := \left(q, \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) \quad (3.46)$$

missä siis $\frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}} = p$. Muistutetaan vielä kappaleen lopuksi Euler-Lagrange yhtälöiden merkitykset

$$\underbrace{\frac{d}{dt} \left(\underbrace{\frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}}}_p \right)}_{\dot{p}} = \underbrace{\frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial q}}_{\dot{p}} \quad (3.47)$$

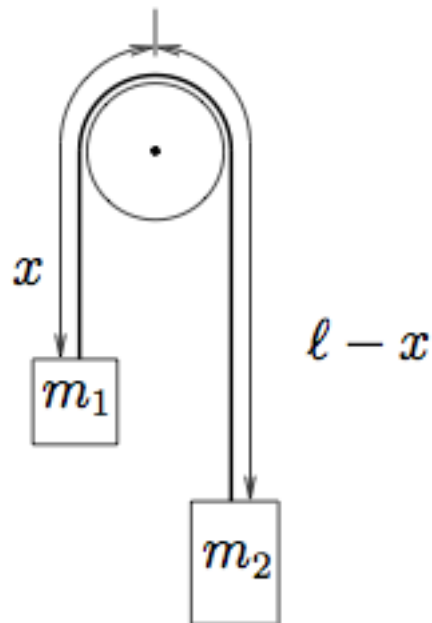
Liikemäärän aikaderivaatat \dot{p} voidaan rinnastaa systeemiin vaikuttaviin voimiin. Jos ajatellaan puhtaasti fyysikaalisen ongelman alustavaa formulointia, ei Newtonilainen voima-kiihtyvyys-vektori lähestymistapa ole välttämätöntä. Sovellettiin sitten Lagrange tai Hamiltonin konseptia, voidaan voimia ja kiihtyvyyksiä tutkia johtopäätöksenä, kun tehtävä on saatu ratkaistua.

4

Mekaniikkojen sovellutukset

Esimerkki 4.0.2 *Atwoodin kone [11, s. 35]*

Kitkaton väkipyörän ympärillä on langa, jonka päissä ovat massat m_1 ja m_2 .



Kuva 4.1: Atwoodin kone

$$Q = (0, l) \ni x \quad \text{Konfiguraatioavaruus}$$

$$TQ = (0, l) \times \mathbb{R} \ni (x, \dot{x}) \quad \text{Nopeusavaruus}$$

$$K = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\left(\frac{d}{dt}(l - x)\right)^2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{x}^2$$

$$V = -m_1gx - m_2g(l - x)$$

$$L = K - V = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{x}^2 + m_1gx + m_2g(l - x)$$

Euler-Lagrangen yhtälöiden ratkaisut on määritelty vain tietylle ajalle $t \in \mathbb{R}$, kunnes systeemi on saavuttanut konfiguraatioavaruuden Q reunan. Sijoittamalla Lagrangian L , Euler-Lagrangen yhtälöihin saadaan Liikemääräksi p

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = (m_1 + m_2)\dot{x}$$

Ja voimaksi F

$$F = \frac{\partial L}{\partial x} = (m_1 - m_2)g$$

Euler-Lagrangen yhtälöiden $\left(\frac{\partial L}{\partial x^i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} = 0\right)$ ratkaisut tuottavat

$$\dot{p} = F$$

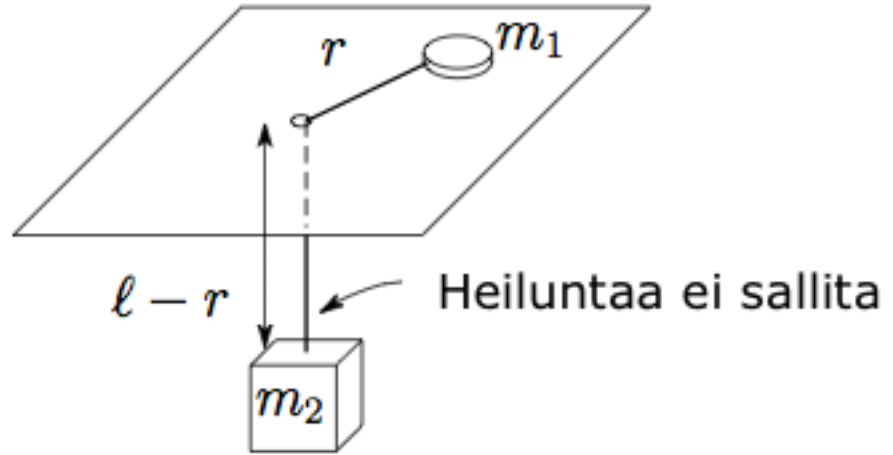
$$(m_1 + m_2)\dot{x} = (m_1 - m_2)g$$

$$\ddot{x} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}g$$

Tämä on siis alaspäin putoava systeemi, jonka kiihtyvyys on $a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}g$. Tässä tehtävässä on täysin yhdentekevää lähteä ratkaisemaan liikeratoja differentiaaliyhtälöistä jollain tietyillä alkuarvoilla, koska liikerata on suoraan nähtävissä jo tehtävän alustuksesta ja myös \ddot{x} :n lausekkeesta. Huomio, että $\ddot{x} = 0$, kun $m_1 = m_2$ ja $\ddot{x} = g$, kun $m_2 = 0$.

Esimerkki 4.0.3 *Putoavan massan vetämä kiekko [11, s. 36]*

Kitkattoman pöydän keskellä on reikä. Reiästä on pujoitettu lanka siten, että langan toisessa päässä on kiekko ja toisessa päässä punnus. Tarkastele kiekon kohdistuvia voimia, kun punnuksen annetaan vapaasti tippua alaspäin. Voidaan olettaa, että kiekolla on alkunopeutta kohtisuoraan langan muodostamaa sädettä vastaan.



Kuva 4.2: Putoavan massan vetämä kiekko [11]

Ensimmäiseksi muodostamme moniston Q , nopeusavaruuden TQ , systeemin kineettisen energian K ja potentiaalin V . Kineettisestä energiasta ja potentiaalista saamme Lagrangianin $L = K - V$.

$$Q = (0, l) \times \mathbb{S}^1 \ni (r, \theta)$$

$$TQ = (0, l) \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \ni (r, \theta, \dot{r}, \dot{\theta})$$

$$K = \frac{1}{2}m_1(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + \frac{1}{2}m_2\left(\frac{d}{dt}(l - r)\right)^2$$

$$V = gm_2(r - l)$$

$$L = \frac{1}{2}m_1(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + \frac{1}{2}m_2\dot{r}^2 + gm_2(l - r)$$

Missä l on vakio joten $\frac{d}{dt}(l - r) = -\dot{r}$. Liikemääräksi saamme,

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = (m_1 + m_2)\dot{r} \quad (4.1)$$

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m_1 r^2 \dot{\theta} \quad (4.2)$$

Huomaa, että koordinaatti θ voidaan sivuuttaa - se ei esiinny Lagrangianissa L . Tämä viittaa liikeradan symmetriasta. Kysymys on rotaationaalisesta symmetriasta, jossa θ on nk. *syklinen koordinaatti*. Se merkitsee, että konjugaattiliikemäärä p_θ on konservatiivinen eli pysyy vakiona. Voimat ovat seuraavat

$$F_r = \frac{\partial L}{\partial r} = m_1 r \dot{\theta}^2 - m_2 g$$

$$F_\theta = \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0, \quad (\theta \text{ voidaan sivuuttaa})$$

Huomautus: Voiman F_r termissä $m_1 r \dot{\theta}^2$ tunnetaan nk. centrifugaali- eli keskipakovoimana. Tämä voima työntää massaa m_1 radiaalisesti ulospäin, kun taas sitävastoin termi $-m_2 g$ on painovoima, joka vetää massaa m_2 alaspäin ja näin ollen vetäen massaa m_1 radiaalisesti sisäänpäin. Euler-Lagrange'n yhtälöt antavat

$$\dot{p}_r = F_r, \quad (m_1 + m_2)\ddot{r} = m_1 r \dot{\theta}^2 - m_2 g$$

$$\dot{p}_\theta = 0, \quad p_\theta = m_1 r^2 \dot{\theta} = J = \text{vakio}$$

Käytetään seuraavaksi liikemäärän p_θ konservatiivisuutta eliminoidaksemme $\dot{\theta}$ ensimmäisestä yhtälöstä:

$$\dot{\theta} = \frac{J}{m_1 r^2}$$

$$\Rightarrow (m_1 + m_2)\ddot{r} = \frac{J^2}{m_1 r^3} - m_2 g$$

Näinollen meillä on kappale reaalityöväälillä $(0, l)$, jolla on massa $m = m_1 + m_2$, joka tuntee voiman

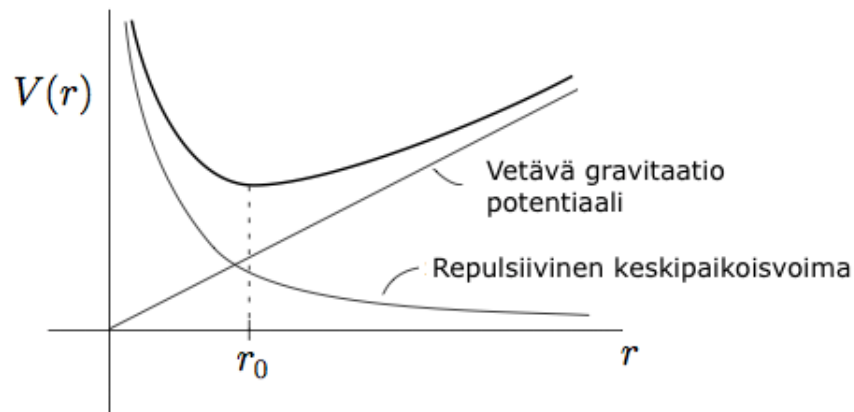
$$F_r = \frac{J^2}{m_1 r^3} - m_2 g \quad (4.3)$$

Mikä voisi tulla nk. efektiivisestä potentiaalista $V(r)$, siten että $\frac{dV}{dr} = -F_r$.

Integroidaan $-F_r$ löytääksemme potentiaalin $V(r)$:

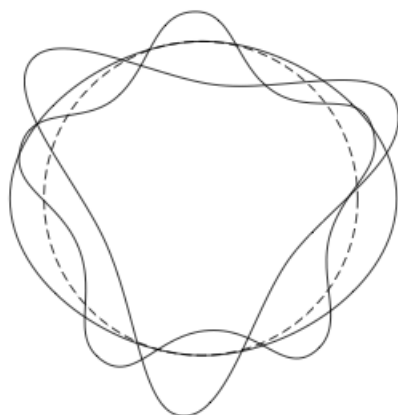
$$V(r) = \frac{J^2}{2m_1 r^2} + m_2 g r \quad (4.4)$$

Tämä on kahden termin summa jotka näkyvät kuvassa 4.3



Kuva 4.3: Potentiaalifunktio pöydän kiekolle [11]

Jos $\dot{\theta}(t = 0) = 0$ niin silloin keskipaikoisvoimaa ei ole ja kiekko vedetään reikään kunnes se on jumittunut. Kun kiekko saavuttaa pöydän keskellä olevan reiän, niin kiekko on osunut moniston Q rajoihin ja ratkaisua ei tällöin ole enään olemassa. Kohdassa $r = r_0$, eli potentiaalin $V(r)$ minimissä - kiekko m_1 on tasaisella ympyrämaisellä kiertoradalla, jonka säde on r_0 (Joka riippuu J :stä). Muulloin kiekon kiertorata näyttää kuten kuvassa 4.4



Kuva 4.4: Kiekon kiertoradat [11]

Esimerkki 4.0.4 *Harmoninen oskillaattori*

Lagrangen funktio yksinkertaiselle harmoniselle oskillaattorille on

$$L = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 - \frac{1}{2}kq^2 \quad (4.5)$$

Vastaava Hamiltonin funktio¹ on

$$H = \frac{1}{2m}p^2 + \frac{1}{2}kq^2 \quad (4.6)$$

Euler-Lagrangen yhtälöt antavat

$$m\ddot{q} = -kq \Rightarrow \ddot{q} = -\frac{k}{m}q \quad (4.7)$$

ja Hamiltonin yhtälöt tuottavat vastaavan tuloksen

¹Lagrangen funktio on yksinkertainen muuntaa Hamiltonin funktioksi käyttämällä Legendre muunnosta. E-L yhtälöistä tiedetään, että $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = p \Rightarrow p = m\dot{q} \Rightarrow \dot{q} = \frac{p}{m}$. Sijoittamalla saatu \dot{q} Hamiltonin Legendre muunnokseen $H(q, p) = p\dot{q}(q, p) - L(q, \dot{q}(q, p))$ saadaan haluttu Hamiltonin funktio H .

$$\dot{q} = \frac{p}{m} \quad (4.8)$$

$$\dot{p} = -kq \quad (4.9)$$

$$\Rightarrow \ddot{q} = -\frac{k}{m}q \quad ; \quad \ddot{p} = \frac{k}{m}p \quad (4.10)$$

Ratkaistaan systeemin liikerata q , joka on 2. asteen differentiaaliyhtälö. Tämä voidaan tehdä insinöörimatematiikan kursseilta tutuilla menetelmillä. Tehdään se lyhyesti ja merkitään $\omega^2 = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

$$\ddot{q}(t) = -\omega^2 q(t), \quad \text{oletetaan ratkaisun olevan } q(t) = Ce^{\lambda t} \quad (4.11)$$

$$\dot{q}(t) = \lambda Ce^{\lambda t} \quad ; \quad \ddot{q}(t) = \lambda^2 Ce^{\lambda t} \quad \text{kytketään yhtälöön (4.11)} \quad (4.12)$$

$$\lambda^2 Ce^{\lambda t} = -\omega^2 Ce^{\lambda t} \Rightarrow \lambda^2 = -\omega^2 \Rightarrow \lambda = \pm i\omega \quad (4.13)$$

Tämä tarkoittaa, että ratkaisuja on kaksi, ja yleinen ratkaisu on näiden kahden lineaarikombinaatio

$$q_1(t) = C_1 e^{i\omega t} \quad \text{ja} \quad q_2(t) = C_2 e^{-i\omega t} \quad (4.14)$$

$$\Rightarrow q(t) = C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t} \quad (4.15)$$

Eulerin identiteettiä (ks. 1) käyttäen ratkaisut voidaan kirjoittaa muotoon

$$q(t) = \underbrace{(C_1 + C_2)}_A \cos(\omega t) + i \underbrace{(C_1 - C_2)}_B \sin(\omega t) \quad (4.16)$$

$$q(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t) \quad (4.17)$$

$$= A \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + B \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) \quad (4.18)$$

Ratkaisu on siis sinimuotoinen liike, missä kertoimet A, B voidaan ratkaista, kun sopivat alkuehdot tiedetään. Alkuehdot voitaisiin määritellä seuraavasti

$$q(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$$

$$q(0) = q_0 = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t) \Rightarrow A = q_0$$

$$\dot{q}(t) = -\omega A\sin(\omega t) + \omega B\cos(\omega t)$$

$$\dot{q}(0) = \dot{q}_0 = \frac{p_0}{m} = \omega B\cos(\omega t) \Rightarrow B = \frac{p_0}{m\omega}$$

Josta saadaan

$$q(t) = q_0\cos(\omega t) + \frac{p_0}{m\omega}\sin(\omega t) \quad (4.19)$$

Voimme toistaa täsmälleen saman toimenpiteen liikemäärälle $p(t)$, jolloin saamme vastaavasti

$$p(t) = p_0\cos(\omega t) + m\omega q_0\sin(\omega t) \quad (4.20)$$

Jos nämä kaksi edellä ratkaistua differentiaaliyhtälöä kytkettäisiin takaisin Hamiltonin funktioon 4.6 saataisiin

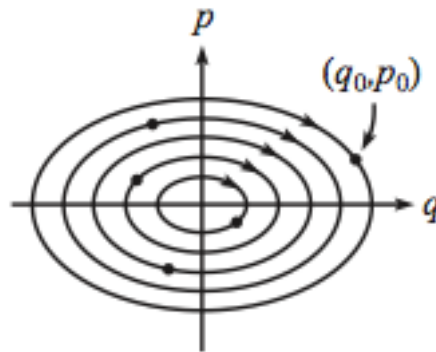
$$H = \frac{1}{2m}p_0^2 + \frac{1}{2}kq_0^2 \quad (4.21)$$

Tästä voidaan tehdä päätelmä, että Hamiltonin funktio on vakiofunktio, joka riippuu vain alkuehdoista.

Edellinen esimerkki oli hyvin yksinkertainen, mutta mekaaninen työ systeemin ratkaisujen ja loppupäätelmien suhteen oli vaivalloinen. Samat loppu päätelmät oltaisiin voitu tehdä paljon yksinkertaisemmin. Kun mallintajan silmä kehittyi, hän voi nähdä seuraavaa. Systeemin kokonaisenergia eli Hamiltonin funktio 4.6 H ei riipu ajasta t eli $\frac{d}{dt}H = 0$, mikä tarkoittaa, että H on vakiofunktio $H = c$. Darboux'n koordinaatit ovat aina toisistaan riippumattomia ja jos verrataan H :ta yleiseen ellipsin yhtälöön, jonka keskipiste on origossa

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \frac{kq_0^2}{2} + \frac{p_0^2}{2m} = c \quad (4.22)$$

jossa a ja b ovat puoliakselien pituuksia. Systeemi liikkuu siis (q, p) tasossa ellipsin muotoista rataa, jonka muodon on riipputtava vain alkuehdoista, koska systeemin energia on vakio. Tämä ellipsin muotoinen rata on siis energiafunktion H tasa-arvokäyrä, joka tarkoittaa, että käyrän jokaisessa pisteessä kokonaisenergia on sama.



Kuva 4.5: Harmoninen oskillaattori, faasiavaruus (q, p)

Hamiltonin formulointi tarjoaa siis mahdollisuuden tutkia systeemiä enemmän geometrisesta näkökulmasta. Kun systeemin energiafunktion tasa-arvokäyrät saadaan kuvattua (q^i, p_i) -tasolle, voidaan tehdä nopeita päätelmiä systeemin nopeudesta, käännepisteistä, liikemääristä, kulkusuunnista ja muista sen ominaisuuksista. Monesti mallintajat eivät ole kiinnostuneita pelkästään kappaleen liikeradasta eli trajektorista kun se etenee ajassa. Jo pelkästään Hamiltonin funktion muodosta voi tehdä nopeita päätelmiä, kuinka systeemi käyttäytyy.

Esimerkki 4.0.5 [20] *Dynaaminen palkkiyhtälö on seuraavanlaisen toimintafunktion S kriittinen piste*

$$S = \int_0^L \left(\underbrace{\frac{1}{2}\mu\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2}_K - \underbrace{\frac{1}{2}EI\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2}_{V_1} + \underbrace{Q(x)w(x, t)}_{V_2} \right) dx \quad (4.23)$$

Missä Lagrangen funktio L on

$$L = \underbrace{\frac{1}{2}\mu\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2}_K - \underbrace{\frac{1}{2}EI\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2}_{V_1} + \underbrace{Q(x)w(x,t)}_{V_2} \quad (4.24)$$

missä μ on massa pituusyksikköä kohti, w palkin taipuma, E kimmomoduuli ja I neliömomentti. Ensimmäinen termi on kineettinen energia K , toinen termi on sisäisten voimien aiheuttama potentiaalienergia V_1 ja kolmas termi kuvastaa ulkoisten voimien aiheuttamaa potentiaalienergiaa V_2 . Kun L kytketään Euler-Lagrangen yhtälöihin saadaan

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EI\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) = \mu\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + q(x) \quad (4.25)$$

Palkkiyhtälö on staattinen palkkiyhtälö, jos edellä olevan yhtälön oikealla puolella on pelkkä voimajakauma Q , tarkoittaen

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EI\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) = Q \quad (4.26)$$

5

Yhteenveto

Teoriaosuus perustui matemaattisten rakenteiden esittelyyn. Määrittelimme rakenteen, jonka päälle lisäsimme uuden rakenteen, jonka päälle lisäsimme taas uuden rakenteen. Lisäsimme siis aina kerroksia rakenteiden päälle. Aloitimme joukosta, jonka päälle rakensimme topologian, edeten aina Riemannin monistoille asti. Rakenteiden esittelyn motivaatio oli puhtaasti fysiikassa. Fysikaalinen luonto omaa myös tietynlaisen rakenteen. Erilaisten fysikaalisten ilmiöiden mallintamiseen tarvitaan erilaisia rakenteita. Käsittelemämme rakenteet voitaisiin listata seuraavasti:

MERKINTÄ	RAKENTEET	NIMITYS
(M)	JOUKKO	JOUKKO
(M, \mathcal{O})	JOUKKO + TOPOLOGIA	TOPOLOGINEN AVARUUS
$(M, \mathcal{O}, \mathcal{A})$	JOUKKO + TOP. + KARTASTO	TOPOLOGINEN MONISTO
$(M, \mathcal{O}, \mathcal{A}_{sm})$	JOUKKO + TOP. + SILEÄ KARTASTO	SILEÄ MONISTO
$(M, \mathcal{O}, \mathcal{A}_{sm}, \nabla)$	JOUKKO + TOP. + S. KART. + KONNEKTIO	S. MON. + KONN.
$(M, \mathcal{O}, \mathcal{A}_{sm}, \nabla, g)$	JOUKKO + TOP. + S. KART. + KONN. + METRIikka	RIEMANNIN MONISTO

Lisäksi tietynlaisena erikoistapauksena symplektinen monisto, jossa symplektinen muoto ω ei ole varsinainen lisärakenne.

$(M, \mathcal{O}, \mathcal{A}_{sm}, \omega)$ JOUKKO + TOP. + S. KART. + S.MUOTO. SYMPLEKTINEN MONISTO

Rakenteen lisäys perustuu aina omaan valintaamme, joten rakenne ei ole jotain, mikä on automaattisesti olemassa. Mitä enemmän rakennetta avaruudelle valitaan, sitä enemmän mallintaja on ottanut vastuuta. Fysikaalisia ongelmia mallinnettaessa on luonnollisesti paras valita kevyin mahdollinen

rakenne. Jos mallintajan täytyy laskea partikkelin liikeratojen pituuksia, on valittava Riemannin monisto. Riemannin monisto on rakenteena vahva. Polkujen differentoituvuuden tarkasteluun riittää sileän moniston rakenne.

Kun haluamme mallintaa klassisen mekaniikan ilmiöitä fysikaalisesta luonnosta, on meillä vaihtoehtoina kolme formalismia: Newton, Lagrange ja Hamilton. Klassisen mekaniikan pääformalismeja ovat Lagrange ja Hamilton, koska Newtonin mekaniikka on näistä molemmista johdettavissa. Voidaan ajatella, että edellä mainitut kaksi muotoilua ovat astetta fundamentaalimpia lähetymistapoja verrattuna Newtonin mekaniikkaan. Nämä kaikki 3 muotoilua tarvitsevat tietynlaisen matemaattisen rakenteen.

Mitä formalismia kannattaa käyttää ja millainen rakenne avaruudelle tarvitaan? Käytännön tehtävissä rakenteeksi on monesti valittava Riemannin monisto. Lagrangen ja Hamilton mekaniikat keskittyvät molemmat systeemin energiaan. Tämä vapauttaa voima-vektori ajattelusta ja mahdollistaa formuloida ongelman koordinaatistosta riippumattomalla tavalla. Riippumattomia muuttujia on pienimmillään systeemin todellisen vapausasteen lukumäärä. Kuten esimerkeistä saattoi huomata, on haastavimpien ongelmien ratkaisu Newtonin mekaniikalla todella monimutkaista. Voidaan sanoa, että Lagrangen ja Hamiltonin lähestymistavat ovat välttämättömyys haastavimpien tehtävien formuloinneissa.

Syvämpi kysymys vielä on Lagrangen ja Hamiltonin mekaniikkojen eroissa. Molemmat mekaniikat ovat toisistaan täysin riippumattomia, mutta kuten huomasimme, kulkevat ne aivan käsikädessä ja molemmat muotoilut voidaan johtaa toisesta. Molemmat lähestymistavat ovat myös täysin koordinaatistosta riippumattomia.

Lagrangen mekaniikan ytimessä oli *variaatioperiaate* ja *Euler-Lagrangen* yhtälöt eli E-L-yhtälöt. Kun E-L-yhtälöihin kytketään mallintajan määräämä *Lagrangen funktio* L , saadaan differentiaaliyhtälösystemi, joista objektien liikeradat ovat laskettavissa. Lagrangen funktio eli Lagrangian voitiin usein muotoilla kineettisen- ja potentiaalienergian erotuksena eli $L=K-V$. Intuitiivisesti Lagrangen funktion voidaan sanoa kuvastavan systeemin ”elävyyttä”. Hamiltonin mekaniikka perustui puolestaan kokonaisenergian käsitteeseen ja nk. *symplektisiin monistoihin*, joissa määriteltiin *Hamiltonin vektorikentät*. Näistä vektorikentistä saadaan *Hamiltonin yhtälöt*. Hamiltonin yhtälöihin kytketään nk. *Hamiltonin funktio* H , joka kuvastaa systeemin kokonaisenergiaa. Systeemin kokonaisenergia on usein ilmoitettu kineettisen- ja potentiaalienergian summana eli $H = K+V$. Hamiltonin yhtälöistä saadaan muodostettua liikeyhtälöt, eli differentiaaliyhtälösystemi, joista objektien liikeradat ovat laskettavissa.

Puhtaasti liikeratojen differentiaaliyhtälöiden formulointeja ajatellen erot

ovat aika pieniä. Monesti Lagrangen yhtälön muodostaminen on nopeampaa ja Euler-Lagrangen yhtälöt tuottavat aina pienemmän määrän liikeyhtälöitä. Euler-Lagrangen yhtälöistä nähdään myös nopeasti yhteys Newtonin 2. sääntöön. Kun Lagrangen mekaniikassa keskitytään paikkaan ja nopeuteen, niin Hamiltonin mekaniikassa paikkaan ja liikemäärään. Lagrangen mekaniikan tila-avaruutena toimii sileän moniston eli konfiguraatioavaruuden tangenttibundle TM , joissa koordinaatteina toimivat edellä mainitut sijainti ja nopeus (q^i, \dot{q}^i) . Hamiltonin mekaniikassa tila-avaruutena on faasiavaruus eli moniston kotangenttibundle T^*M , jonka koordinaatteina ovat paikka ja liikemäärä (q^i, p_i) . Nämä Hamiltonin mekaniikassa käytetyt Darboux'n koordinaatit ovat toisistaan täysin riippumattomia, missä sitä vastoin Lagrangen muotoilussa käytetyt koordinaatit ovat hyvinkin toisistaan riippuvia. Darboux'n koordinaatit ja kokonaisenergian käsite mahdollistavat systeemin geometrisen tarkastelun, jonka perusteella voidaan tehdä nopeita päätelmiä tarkasteltavan systeemin ominaisuuksista. Vastaava tarkastelu ei ole mahdollista Lagrangelaissä mekaniikassa. Tässä ovat käytännön erot hyvin tiiviisti muotoiltuna.

Puhtaasti teoreettisella tasolla suurin ero näissä kahdessa mekaniikan muotoilussa on niissä tarvittava matemaattinen rakenne [14]. Tämä rakenteellinen eroavaisuus on siinä mielessä merkittävä, jos ajatellaan fyysikaalisen luonnon kantavan tietynlaista rakennetta. Hamiltonin mekaniikan muotoilussa abstraktilla tasolla selvittää nimittäin kevyemmällä rakenteella, kuin Lagrangen formalismissa. Tässä mielessä voidaan sanoa Hamiltonin mekaniikan olevan fundamentalisempi, kuin Lagrangen mekaniikan. Hamiltonin mekaniikka muotoillaan symplektisillä monistoilla, ja Lagrangen mekaniikka Riemannin monistoilla. Symplektiset monistot ovat yleisempi rakenne, kuin Riemannin monistot, koska metriikan valintaa lisärakenteena ei symplektisille monistoille tarvita.

Käytännöllisesti katsoen molemmat mekaniikat tarvitsevat kuitenkin Riemannin moniston rakenteen. Nimittäin todellisen maailman systeemien tarkastelu sisältää aina liikkuvien objektien vauhtien mittaamista. Liikkeessä olevat objektit omaavat aina liike-energian, eli termin K , jota tarvitaan välttämättömyytenä molemmissa mekaniikan muotoiluissa. Kineettinen energia muotoillaan Lagrangen mekaniikassa yleisesti

$$K(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} m \mathbf{g}(\dot{q}, \dot{q}) \quad (5.1)$$

jossa $\mathbf{g}(\bullet, \bullet)$ on Riemannin moniston metrinen tensori. Hamiltonin mekaniikassa kineettisen energian termi muotoillaan

$$K(q, p) = \frac{1}{2m} \mathfrak{g}^{-1}(p, p) \quad (5.2)$$

Jossa $\mathfrak{g}^{-1}(\bullet, \bullet)$ on Riemannin moniston kometriikka.

Tämän työn tarkoituksena oli toimia johdantona mekaniikkojen pääformalismeihin ja tarjota viitettä tarvittavista matemaattisista rakenteista näiden kahden esitystavan yleispätevään ymmärtämiseen.

Lähteet

- [1] John M. Lee, *Introduction to Smooth Manifolds* (Second edition, Springer, New York, 2013)
- [2] John M. Lee, *Introduction to Topological Manifolds* (Second edition, Springer, New York, 2011)
- [3] John M. Lee, *Riemannian Manifolds* (First edition, Springer, New York, 1997)
- [4] Timo Tarhasaari, *Matemaattisen mallintamisen fysiikka 2* (Luentomuis-tiinpanot, Tampereen teknillinen yliopisto, 2015)
- [5] Timo Tarhasaari, *Matemaattisen mallintamisen fysiikka 3* (Luentomuis-tiinpanot, Tampereen teknillinen yliopisto, 2015)
- [6] Leonor Godinho; Jose Natario *An Introduction to Riemannian Geometry (First edition, Springer, New York, 2014)*
- [7] Jerrod E. Marsden; Thomas J.R. Hughes *An Introduction to Mechanics and Symmetry* (First edition, Dover, New Jersey, 1994)
- [8] Jerrod E. Marsden; Tudor S. Ratiu *An Introduction to Mechanics and Symmetry (Second edition, 1998)*
- [9] Michael Spivak, *Comp. Intr. to Diff. Geometry* (Third edition, Publish or Perish Inc., Texas, 2005)
- [10] wwwf.imperial.ac.uk/~epsegal/manifolds/Section%205.pdf
- [11] John C. Baez, *Lectures on Classical Mechanics* (2005)
- [12] Frank W. Warner, *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups* (1994)
- [13] Olli Tuohenmaa, *Symmetria ja liikevakiot Hamiltonin mekaniikassa* (Diplomityö, Tampereen teknillinen yliopisto, 2014)

- [14] Jill North, *The “Structure” of Physics: A Case Study* (Journal of Philosophy 106 (2009): 57–88)
- [15] Herbert Goldstein, *Classical Mechanics*, s. 369 (Third edition, Addison-wesley)
- [16] Stephen H. Friedberg, *Linear algebra* (Fourth edition, Pearson education inc., New Jersey 2003)
- [17] Ralph Abraham; Jerrod E. Marsden *Foundations of Mechanics* (Second edition, Addison-Wesley, 1987)
- [18] Joel A. Shapiro *Classical Mechanics* (prel. ver. book, 2010)
- [19] David Morin *Introduction to Classical Mechanics, With Problems and Solutions* (Cambridge University Press, 2008)
- [20] Euler-Bernoulli beam theory *Wikipedia*
- [21] W. Greub *Multilinear Algebra* (Springer-Verlag, 1967)
- [22] Steven Roman *Advanced Linear Algebra* (Third edition, Springer, 2007)
- [23] Jeffrey M. Lee *Manifolds and Differential Geometry* (Volume 107, American Math. Society, 2009)
- [24] Peter J. Oliver *Applicatios of Lie Groups to Differential Equations* (Second edition, Springer, 2000)
- [25] R. A. Hayden *On the application of tensor products of vector spaces to the representation theory of finite groups*

LIITE A Määritelmiä, todistuksia, kaavoja

Määritelmä .0.1 *Kunta*

Kunta on kolmikko $(K, +, \cdot)$ *missä*

- i)* K *on joukko*
- ii)* $+$: $K \times K \rightarrow K$
- iii)* \cdot : $K \times K \rightarrow K$

Joka toteuttaa seuraavat aksioomat

K^+	Kommutatiivisuus	$a + b = a + b$
A^+	Assosiatiivisuus $+$	$(a + b) + c = a + (b + c)$
N^+	Neutraali elementti	$\exists 0 \in K : \forall s \in K : a + 0 = a$
I^+	Inverssi elementti	$\forall a \in K : \exists (-a) : a + (-a) = 0$
$K\cdot$	Kommutatiivisuus	$a \cdot b = b \cdot a$
$A\cdot$	Assosiatiivisuus \cdot	$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
$N\cdot$	Neutraali elementti	$\exists 1 \in K \setminus \{0\} : \forall a \in K : a \cdot 1 = a$
$I\cdot$	Inverssi elementti	$\forall a \in K \setminus \{0\} : \exists i : a \cdot i = 1$
$D^{+/\cdot}$	Distribuuttisuus	$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$

Määritelmä .0.2 *Renkas*¹

Renkas on kolmikko $(R, +, \cdot)$ *missä*

¹Jos renkaan kertolaskulla on kommutatiivisuus ominaisuus, on kysymys kommutatiivisesta renkaasta

- i) R on joukko
- ii) $+: R \times R \rightarrow K$
- iii) $\cdot: R \times R \rightarrow K$

Joka toteuttaa seuraavat aksioomat

- K^+ **Kommutatiivisuus** $a + b = a + b$
- A^+ **Assosiatiivisuus** $+$ $(a + b) + c = a + (b + c)$
- N^+ **Neutraali elementti** $\exists 0 \in R : \forall s \in K : a + 0 = a$
- I^+ **Inverssi elementti** $\forall a \in R : \exists (-a) : a + (-a) = 0$

- A^\cdot **Assosiatiivisuus** \cdot $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
- N^\cdot **Neutraali elementti** $\exists 1 \in R \setminus \{0\} : \forall a \in R : a \cdot 1 = a$

- $D^{+/\cdot}$ **Distributiivisuus** $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$

Määritelmä .0.3 Ryhmä

Ryhmä on kaksikko (G, \bullet) missä

- i) G on joukko
- ii) $\bullet: G \times G \rightarrow G$ binäärioperaatio

Joka toteuttaa seuraavat aksioomat

- K^\bullet **Kommutatiivisuus**² $a \bullet b = b \bullet a$
- A^\bullet **Assosiatiivisuus** $(a \bullet b) \bullet c = a \bullet (b \bullet c)$
- N^\bullet **Neutraali elementti** $\exists_1 e \in G : \forall a \in G : a \bullet e = a$
- I^\bullet **Inverssi elementti** $\forall a \in G : \exists_1 i \in G : a \bullet i = e$

Teoreema .0.1 (A, \mathcal{O}_A) ja (B, \mathcal{O}_B) ja (C, \mathcal{O}_C) ovat topologisia avaruuksia. Jos kaksi kuvausta $f: A \rightarrow B$ ja $g: B \rightarrow C$ ovat jatkuvia, niin $g \circ f: A \rightarrow C$ on jatkuva.

Todistus .0.1 Jos $\mathcal{V} \in \mathcal{O}_C$

$$\begin{aligned} \text{preim}_{g \circ f}(\mathcal{V}) &= \{a \in A \mid (g \circ f)(a) \in \mathcal{V}\} \\ &= \{a \in A \mid f(a) \in \text{preim}_g(\mathcal{V})\} \\ &= \text{preim}_f(\underbrace{\text{preim}_g(\mathcal{V})}_{\in \mathcal{O}_B}) \quad \square \\ &\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\in \mathcal{O}_M} \end{aligned}$$

Määritelmä .0.4 Isomorfiset joukot

Kaksi joukkoa A ja B ovat isomorfisia (joukko-opillisesti),

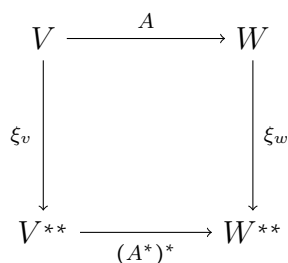
$$A \cong B$$

Jos niiden välille löytyy bijektio $\phi : A \rightarrow B$. Bijektioita ϕ voi löytyä monia, mutta vain yksikin riittää. Intuitiivisesti voidaan sanoa, että joukot A ja B ovat saman kokoiset, ja niiden alkioille löytyy omat parinsa. (Huomiona, että isomorfisista joukoista voidaan puhua myös, jos joukot ovat äärettömiä joukkoja).

Esimerkki .0.6 V ja W ovat kaksi äärellisulotteista vektoriavaruutta ja $A : V \rightarrow W$ on lineaarinen kuvaus näiden avaruuksien välillä. ξ_V ja ξ_W ovat isomorfismeja, siten että $\xi(v) : V^* \rightarrow \mathbb{R}$, $\xi(v)(\varphi) = \varphi(v)$, missä $\varphi \in V^*$. Lisäksi V :n ja W duaalivektoriavaruuksien välillä on olemassa lineaarinen transpoosikuvaus $A^* : W^* \rightarrow V^*$. Osoita, että alla oleva diagramma kommutoi, eli $\xi_W \circ A = (A^*)^* \circ \xi_V$.

Todistus .0.2

$$\begin{aligned} ((\xi_W \circ A)(v))(\omega) &= ((A^{**} \circ \xi_V)(v))(\omega) \\ \omega(Av) &= (\xi_V(v))(A^*\omega) \\ (A^*\omega)(v) &= (A^*\omega)(v) \end{aligned}$$



Kuva 1: Diagrammin kommutointi

Kaava 1 *Eulerin identiteetti*

$$\begin{aligned}
 e^{i\omega} &= \cos(\omega) + i \sin(\omega) \\
 e^{-i\omega} &= \cos(\omega) - i \sin(\omega)
 \end{aligned}$$

Kaava 2 *Leibnizin integrointisääntö*

1) *Kun integroimisrajat vakioita*

$$\frac{d}{d\lambda} \int_a^b F(\lambda, \alpha) d\alpha = \int_a^b \frac{\partial}{\partial \lambda} F(\lambda, \alpha) d\alpha \tag{3}$$

2) *Kun integroimisrajat funktioita*

$$\frac{d}{d\lambda} \int_{a(\lambda)}^{b(\lambda)} F(\lambda, \alpha) d\alpha = \int_{a(\lambda)}^{b(\lambda)} \frac{\partial}{\partial \lambda} F(\lambda, \alpha) d\alpha + F(\lambda, b(\lambda)) \frac{db(\lambda)}{d\lambda} - F(\lambda, a(\lambda)) \frac{da(\lambda)}{d\lambda}$$

Diagrammi 1 *Operaattoreiden välinen yhteys*

$$\begin{array}{ccccccc}
C^\infty(M) & \xrightarrow{\text{grad}} & \Gamma(TM) & \xrightarrow{\text{curl}} & \Gamma(TM) & \xrightarrow{\text{div}} & C^\infty(M) \\
\downarrow \text{id} & & \downarrow \flat & & \downarrow \beta & & \downarrow * \\
\Omega^0 M & \xrightarrow{d} & \Omega^1 M & \xrightarrow{d} & \Omega^2 M & \xrightarrow{d} & \Omega^3 M
\end{array}$$

Kuva 2: div, grad, curl - Diagrammi

Määritelmä .0.5 Riemannin tilavuusmuoto ω_g

Olkoon (M, g) Riemannin monisto³. Missä tahansa orientoiduissa paikallisissa koordinaateissa (\mathcal{U}, x^i) , Riemannin tilavuusmuoto ω_g voidaan kirjoittaa muodossa

$$\omega_g = \sqrt{\det(g_{ij})} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n \quad (4)$$

missä g_{ij} on Riemannin metrisen tensorin komponentit.

³orientoitu Riemannin monisto