TAMPEREEN TEKNILLINEN YLIOPISTO
TAMPERE UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

MINNA SEPPÄLÄ
HILATEORIAN PERUSTEET

Diplomityö

Tarkastaja: Prof. Esko Turunen
Tarkastaja ja aihe hyväksytty
Luonnontieteiden tiedekuntaneuvoston
kokouksessa 4.5.2016

TIIVISTELMÄ

MINNA SEPPÄLÄ: Hilateorian perusteet
Tampereen teknillinen yliopisto
Diplomityö, 81 sivua
Toukokuu 2016
Teknis-luonnontieteellinen koulutusohjelma
Pääaine: matematiikka
Tarkastajat: Prof. Esko Turunen
Avainsanat: hilatyypit, distributiivisuus, modulaarisuus, hila aksioomat, logiikat

Hilateoriat ovat saaneet alkunsa 1850-luvulla englantilaisen matemaatikon George Boolen (1815-1864) tutkimuksista, joista muodostui Boolen algebra. 1900-luvun alkupuolella Boolen algebra kehittyi hilateorian osaksi. Varsinaiset hilateorian tutkimukset aloittivat mm. amerikkalainen Garrett Birkhoff (1911-1996) ja norjalainen Oystein Ore (1899-1968) 1930-luvulla. Hilateoriasta on tullut yksi osa matemaattista tutkimusta, jolla on omat sovelluksensa esim. kuvankäsittelyssä.

Tässä diplomityössä tarkastellaan Garrett Birkhoffin Lattice Theory kirjan kolmannen painoksen keskeisiä käsitteitä hilateorian perusteista ja sovelluksia, luoden näin pohjan ymmärtää hilateorioita käsittelevää matematiikkaa.

ABSTRACT

MINNA SEPPÄLÄ: Basics of lattice theory
Tampere University of Technology
Thesis, 81 pages
May 2016
Master's Degree Programme in Science and Engineering Technology
Major: Mathematics
Examiner: Prof. Esko Turunen
Keywords: types of lattices, distributivity, modylarity, lattice postulates, logics

Lattice theories have originated in the 1850s, an English mathematician George Boolean (1815-1864) tests, which consisted of a Boolean algebra. In the early 20th Century Boolean algebra developed lattice theory. The actual lattice theory investigations launched, for example American Garrett Birkhoff (1911-1996) and the Norwegian Oystein Ore (1899-1968) in the 1930s. Lattice theory has become one part of mathematical research, which has its own applications for example lattice structures in image algebra in image processing.

The key concepts of lattice theory criteria and applications of Garrett Birkhoff's book Lattice Theory, third edition are examined in this thesis. Thus we create a basis for understanding of lattice theory dealing with mathematics.

ALKUSANAT

Tämä diplomityö on kirjoitettu Tampereen teknillisen yliopiston matematiikan laitokselle. Työn ohjaajana ja tarkastajana on toiminut professori Esko Turunen, jolle haluan esittää kiitokseni mielenkiintoisesta työn aiheesta sekä kaikista työn aikana saamistani neuvoista ja tuesta. Kiitos myös perheelleni kärsivällisyydestä.

Tampere, 9.5.2016

Minna Seppälä

SISÄLLYS

KUVALUETTELO

LYHENTEET JA MERKINNÄT

$a \neq b$	a on erisuuri kuin b
$(abc)\beta$	alkio b on alkioiden a ja c välissä
$x \in X$	alkio x kuuluu joukkoon X
x'	alkion x duaali
$x \leqq y$	alkio x on pienempi kuin alkio y, alkio y sisältää alkion x
$\circ$	binääri operaatio
$d[x]$	dimensio
$\sim$	ekvivalenssirelaatio
$\mid$	esijärjestävä relaatio
$\rightarrow$	implikaatio
$\cong$	isomorfismi
$\wedge$	joukko-opillinen leikkaus
$\vee$	joukko-opillinen unioini
$p_\infty[S]$	joukon S apriorinen todennäköisyys
S'	joukon S komplementti
Π	karteesinen tulo
$\equiv$	kongruenssirelaatio
ϕ, ψ	kuvaus
$\mathbb{Z}^+$	positiivisten kokonaislukujen joukko
$\breve{\rho}$	käänteisrelaatio
$\bigcap_A$	leikkaus
$S^\perp$	ortogonaalinen komplementti
$\subset$	osajoukko
$P = \{2, 4, 8\}$	osittain järjestetty joukko
O	pienin alkio
$x \prec y$	polku solmusta x solmuun y
$\vdash P$	propositio P on tosi
$\mathbb{Q}$	rationaalilukujen joukko
ρ	relaatio
$\mid$	Sheffersin kauttaviiva tai Sheffersin viiva
I	suurin alkio
$\bigcup_A$	yhdiste
$\mathbb{R}/2\pi$	yksikköympyrä

$\bigwedge$	äärellisten määrän termien kohtaaminen
$\bigvee$	äärellisten määrän termien liitto
$\sum$	äärellisten määrän termien summa

1. JOHDANTO

1800-luvun puolivälissä englantilainen George Boole loi formaalin propositiologiikan. Teoksessaan An Investigation of the Laws of Thought [3] Boole käsittelee logiikkaa algebrallisin merkinnöin ja menetelmin, joista myöhemmin muodostui käsite Boolen algebra. 1800- ja 1900-luvun vaihteessa Boolen algebran tutkimusta jatkoivat mm. Charles C. Pierce [23] ja Ernst Schröder [26], jotka tutkimuksissaan päätyivät hilan käsitteeseen. Samaan aikaan Richard Dedekind [5] tutki erilaisista lähtökohdista algebrallisten lukujen ideaaleja ja moduleita päätyen myös hilan käsitteeseen.

1930-luvulle asti hilateorian tutkimus oli lähinnä Boolen algebrojen tutkimista, mutta tapahtui muutos, kun Garrett Birkhoff osoitti hilateorian merkityksen. Hän julkaisi ensimmäisen painoksen teoksestaan Lattice Theory 1940, toisen painoksen 1948 ja kolmannen painoksen 1967 [1]. Tämä työ käsittelee juuri kolmannen painoksen keskeisiä sisältöjä. Hilateorioiden kehitystä voi hyvin seurata tarkkailemalla Birkhoffin eri painosten kehitystä. Garrett Birkhoffia voidaankin pitää yhtenä merkittävimmistä hilateorioiden uranuurtajista.

Hilateorioiden merkitystä matematiikassa ei voi väheksyä. Monet matematiikan osa-alueet kuten ryhmät, renkaat tai vektoriavaruudet omaavat operaatioiden lisäksi jonkin sisäisen järjestyksen. Näiden järjestysten ymmärtämiseksi on hyödyllistä tuntea hilateorian perusteita ja tuloksia.

Hila on osittain järjestetty joukko, jossa jokaisella kahdella alkiolla on yksikäsitteiset pienin yläraja ja suurin alaraja. Hilateoriaa voidaan tutkia juuri järjestysteoreettisesti tai algebrallisesti. Luku 2 käsittelee hilatyyppejä, esitellen järjestysteoreettisesti osittain järjestetyt joukot, ketjut ja diagrammit sekä algebrallisesti hila-algebraa. Keskeisenä asiana on myös modulaarisuus hiloissa. Modulaariset hilat ovat hilojen erityistyyppejä noudattaen tiettyjä ehtoja.

Luvussa 3 käsitellään aksioomat hiloille eli tietyt lainalaisuudet. Näin muodostetaan mm. esijärjestykset, hilapolynomit, välissä-relaatio ja ortohilat. Luku 4 käsittelee logiikan ja todennäköisyyden sovelluksista esim. Brouwerian ja modaalit logiikat sekä klassisen todennäköisyyden. Työssä keskitytään juuri hilateorian perusteiden ja tulosten esittelyyn Birkhoffin mukaan [1] ja näin luomaan käsitystä tärkeästä matemaattisesta osa-alueesta. Teksti on kirjoitettu niin, että kaikki asiasta kiinnostuneet, jotka omaavat perustietämyksen algebrasta ja diskreetistä matematiikasta voivat sitä lukea. Tekstin todistuksia on täydennetty ja lisätty sekä määritelmiä on täsmennetty.

2. HILATYYPIT

2.1 Osittain järjestetyt joukot; ketjut

Hilateoria käsittelee mm. binäärisen relaation $\leqq$ määräämiä ominaisuuksia (*sisältyy, on osa* tai *pienempi tai yhtäsuuri kuin*). Tällä relaatiolla oletetaan olevan seuraavat ominaisuudet, jotka johtavat peruskäsitteeseen *osittain järjestetyistä joukoista (partially order set, partly order set tai poset).*

Määritelmä. Osittain järjestetty joukko P on joukko, jossa on binäärinen relaatio $\leqq$, joka toteuttaa kaikilla x, y ja $z \in P$ seuraavat ehdot:

P1. $x, \quad x \leqq x$, (Refleksiivinen)
P2. jos $x \leqq y$ ja $y \leqq x$, niin $x = y$, (Antisymmetrinen)
P3. jos $x \leqq y$ ja $y \leqq z$, niin $x \leqq z$. (Transitiivinen)

Jos $x \leqq y$ ja $x \neq y$ kirjoitetaan $x < y$ ja sanotaan, että x *on pienempi kuin* y tai y *sisältää alkion* x *aidosti.* Relaatio $x \leqq y$ kirjoitetaan myös $y \geqq x$ ja luetaan y *sisältää alkion* x. Samalla tavoin $x < y$ voidaan myös kirjoittaa $y > x$. Edellä esitetyt notaatio ja terminologia ovat standardeja.

On lukematon määrä tavanomaisia esimerkkejä osittain järjestetyistä joukoista, toisin sanoen matemaattisista relaatioista, jotka täyttävät ehdot P1-P3. Kolme yksinkertaisinta lienevät seuraavat:

Esimerkki 1. Koostukoon $\sum(I)$ kaikista joukon I osajoukoista, sisältäen joukon I itse ja tyhjän joukon $\emptyset$ ja tarkoittakoon $x \leqq y$, että x on joukon y osajoukko.

Esimerkki 2. Olkoon $\mathbb{Z}^+$ positiivisten kokonaislukujen joukko ja tarkoittakoon $x \leqq$

y, että x jakaa luvun y.

Esimerkki 3. Koostukoon F kaikista yhden muuttujan funktioista $f(x)$, jotka ovat määritelty välillä $-1 \leqq x \leqq 1$ ja tarkoittakoon $f \geqq g$, että $f(x) \geqq g(x)$ kaikilla x, kun $-1 \leqq x \leqq 1$.

Annamme seuraavaksi ilman todistusta kaksi yleistä lakia sisältymisrelaatioille, jotka seuraavat ehdoista P1-P3.

Lemma 1. *Mielivaltaisessa osittain jäjestetyssä joukossa ei millään alkiolla x päde $x < x$. Edelleen, kun $x < y$ ja $y < z$ on $x < z$. Käänteisesti, jos binäärinen relaatio $<$ täyttää kaksi yllä olevaa ehtoa, niin määritellään $x \leqq y$ tarkoittamaan, että $x < y$ tai $x = y$. Silloin relaatio $\leqq$ täyttää ehdot* P1-P3.

Toisin sanoen aito sisältyminen kuvataan antirefleksiivisyys- ja transitiivisuuslaeilla.

On helppo osoittaa, että osittain järjestetty joukko P voi sisältää enintään yhden alkion a, joka täyttää ehdon $a \leqq x$ kaikilla $x \in P$. Jos a ja b ovat kaksi tällaista alkiota niin, että $a \leqq b$ ja myös $b \leqq a$, niin $a = b$ ehdon P2 mukaan. Tällainen alkio, jos se on olemassa, merkitään symbolilla O ja sitä kutsutaan *pienimmäksi alkioksi (the least element)*. Duaalisesti joukon P *suurin alkio (the greatest element)*, jos se on olemassa, merkitään symbolilla I. Alkioita O ja I, kun ne ovat olemassa, kutsutaan joukon P *rajoiksi (universal bounds)*, koska $O \leqq x \leqq I$ kaikilla $x \in P$.

Lemma 2. *Jos $x_1 \leqq x_2 \leqq \ldots \leqq x_n \leqq x_1$, niin $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$. (Antikehämäisyys)*

Esimerkki 4. Olkoon $\mathbb{R}$ reaalilukujen joukko ja olkoon $x \leqq y$ tavanomainen järjestysrelaatio. Sisältymisrelaatio tässä ja muissa tärkeissä osittain järjestetyissä joukoissa täyttää ehdon:

P4. Kaikilla x ja y, joko $x \leqq y$ tai $y \leqq x$.

Määritelmä. Osittain järjestetty joukko on *täydellisesti järjestetty (totally ordered)* tai *ketju (chain)*, jos se täyttää ehdon P4.

Toisin sanoen kahdesta ketjun alkiosta toinen on pienempi ja toinen on suurempi tai alkiot ovat samat. Selvästikin osittain järjestetyt joukot Esimerkeissä 1-3 eivät ole ketjuja. Ne sisältävät alkioparin x ja y, joita ei voi vertailla eli, joko $x \leqq y$ tai $y \leqq x$ ei päde.

Kuten edellä mainituissa Esimerkeissä 1-4, moni muukin osittain järjestetty joukko voidaan esittää osajoukkoina. Tarkemmin sanoen olkoon P mikä tahansa osittain järjestetty joukko ja olkoon S mielivaltainen joukon P osajoukko. Määritellään relaatio $x \leqq y$ joukossa S tarkoittamaan, että $x \leqq y$ joukossa P. Silloin ehdot P1-P3 täyttyvät joukossa P relaatiolla $\leqq$, ne täyttyvät a fortiori joukossa S. Samankaltainen havainto pätee ehtoon P4. Tästä seuraa triviaalisti

Teoreema 1. *Minkä tahansa osittain järjestetyn joukon P osajoukko S on itse osittain jäjestetty joukko samoin sisältymisrelaatioin (rajoitettuna joukoon S). Minkä tahansa ketjun osajoukko on ketju.*

Siten positiivisten kokonaislukujen joukko $\mathbb{Z}^+$ on ketju, kun järjestysrelaatio on reaalilukujen luonnollinen järjestys kuten Esimerkissä 4. Toisaalta, jos $\leqq$ määritellään kuten Esimerkissä 2 ei $\mathbb{Z}^+$ ole ketju.

Esimerkki 5. (a) Joukko $\{1, 2, \ldots, n\}$ muodostaa ketjun $\mathbf{n}$ (järjestysluvut n:n asti) luonnollisessa järjestyksessään. (b) Toisaalta järjestämättömänä joukkona $\{1, 2, \ldots, n\}$, siten että mitkään kaksi alkiota eivät ole vertailtavissa, se muodostaa toisen osittain järjestetyn joukon (kardinaaliluvut n:n asti).

Esimerkki 6. Koostukoon P renkaan R ideaaleista $H, J, K, \ldots$; tarkoittakoon $H \leqq K$, että H on ideaalin K osajoukko (toisin sanoen $H \subset K$).

2.2 Isomorfismi;duaalisuus

Funktiota $\theta : P \to Q$ osittain järjestetystä joukosta P osittain järjestetylle joukolle Q kutsutaan *järjestyksen säilyttäväksi (order-preserving)* tai *isotoniseksi (isotone)*, jos

$$\text{ehdosta } x \leqq y \text{ seuraa } \theta(x) \leqq \theta(y). \tag{2.1}$$

Isotonista funktiota, jolla on isotoninen kaksipuoleinen inverssi, kutsutaan *isomorfismiksi (isomorphism)*. Toisaalta isomorfismi kahden osittain järjestetyn joukon P ja Q välillä on bijektio, joka täyttää ehdon (2.1) ja

$$\text{ehdosta } \theta(x) \leqq \theta(y) \text{ seuraa } x \leqq y. \tag{2.2}$$

Isomorfismia osittain järjestetyltä joukolta P itselleen kutsutaan *automorfismiksi (automorphism)*.

Kaksi osittain järjesttettyä joukkoa P ja Q ovat *isomorfiset* (symbolein $P \cong Q$), jos niiden välillä on olemassa isomorfismi.

Relaation ρ *käänteisrelaatio (converse)* määritellään siten, että $x\breve{\rho}y$ (luetaan *x ja y ovat relaatiossa $\breve{\rho}$*), jos $y\rho x$. Täten käänteisrelaatio relaatiolle *sisältää* on *sisältyy*; vastaavasti relaatiolle *suurempi kuin* on *pienempi kuin*. Ehtojen P1-P3 perusteella on selvää, että

Teoreema 2. (Duaalisuusperiaate). *Mielivaltaisen osittaisen järjestyksen käänteinen järjestys on itse osittainen järjestys.*

Määritelmä. Osittain järjestetyn joukon X *duaali (dual)* on osittain järjestetty joukko $\breve{X}$, joka on määritelty samojen alkioiden käänteisellä osittaisella järjestysrelaatiolla. Koska $X \cong \breve{\breve{X}}$, tämä terminologia on ristiriidaton duaalisuus relaatio on symmetrinen.

Määritelmä. Funktio $\theta : P \to Q$ on *antitoninen (antitone)*, jos

$$\text{ehdosta } x \leqq y \text{ seuraa } \theta(x) \geqq \theta(y), \tag{2.3}$$

$$\text{ehdosta } \theta(x) \leqq \theta(y) \text{ seuraa } x \geqq y. \tag{2.4}$$

Bijektiota (yksi-yhteen vastaavuus) θ, joka täyttää ehdot (2.3)-(2.4) kutsutaan *duaali isomorfismiksi (dual isomorphism).*

Tulemme käsittelemään isomorfisia järjestelmiä, kuten $\check{X}$ "duaali"joukolle X. Selvästi osittain järjestetyt joukot ovat duaaleja pareittain aina, kun ne eivät ole itse-duaaleja. Samalla tavoin osittain järjestettyjen joukkojen määritelmät ja teoreemat ovat duaaleja pareittain aina, kun ne eivät ole itse-duaaleja; ja aina jos teoreema on tosi kaikilla osittain järjestetyillä joukoilla, niin on myös sen duaali.

Monet tärkeät osittain järjestetyt joukkot ovat itse-duaaleja (toisin sanoen itse anti-isomorfisia). Esimerkiksi kappaleen 2.1 Esimerkki 1 on itse-duaali; vastaavuus, joka vie osajoukolta sen komplementille on injektiivinen ja kääntää sisältymisen. Samalla tavoin n-dimensioisen Euclidisen avaruuden kaikkien lineaaristen aliavaruuksien joukko, joka sisältää origon on itse-duaali: vastaavuus saadaan kuvaamalla aliavaruus sen ortogonaaliselle komplementille, kuva on injektiivinen ja kääntää sisältymisrelaation.

Näissä tapauksissa itse-duaalisuus on kaksivaiheinen: mielivaltaisen alkion x kuvan x' kuva $(x')'$ on taas x. Tällaista itse-duaalisuutta (duaali automorfismia) kutsutaan *involuutioksi (involution).*

2.3 Diagrammit; osittain järjestettyjen joukkojen luokittelu

Hierarkinen *välitön seuraaja* -käsite voidaan määritellä kaikille osittain järjestetyille joukoille seuraavasti.

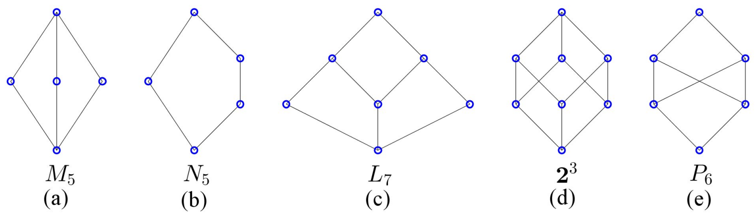
Määritelmä. Osittain järjestetyssä joukossa P *a peittää b:n*, jos $a > b$, mutta ei ole olemassa $x \in P$ siten, että $a > x > b$, siis a on b:n välitön seuraaja.

Osittain järjestetyn joukon P *kardinaalilla (order)* $n(P)$ tarkoitetaan sen alkioiden lukumäärää. Kun tämä luku on äärellinen, joukkoa P kutsutaan äärelliseksi osittain järjestetyksi joukoksi. Käytettäessä peittämisrelaatiota on voimassa seuraavanlainen minkä tahansa osittain järjestetyn joukon P graaffinen esitys.

Piirrä pieni ympyrä kuvaamaan joukon P jokaista alkiota, aseta a ylemmäksi kuin b

aina, kun $a > b$. Piirrä jana ympyrästä a ympyrään b aina, kun a peittää b:n. Saatua kuvaa kutsutaan joukon P *diagrammiksi*: esimerkkinä Kuvat 2.1a- 2.1e.

Siten $a > b$, jos ja vain jos voidaan siirtyä alaspäin ympyrästä a ympyrään b jotakin janojen muodostamaa murtoviivaa pitkin. On selvää, että äärellisen osittain järjestetyn joukon isomorfismi voidaan määritellä sen diagrammista. On myös selvää, että osittain järjestetyn joukon P duaalin $\breve{P}$ diagrammi muodostetaan kääntämällä jälkimmäisen diagrammi ylösalaisin.



Kuva 2.1 *Esimerkit diagrammeista.*

Määritelmä. Joukon P mielivaltaisen osajoukon X *pienimmällä alkiolla (a least element)* tarkoitamme alkiota $a \in X$ siten, että $a \leqq x$ kaikilla $x \in X$. Osajoukon X *suurimmalla alkiolla (a greatest element)* tarkoitamme alkiota $b \in X$ niin, että $b \geqq x$ kaikilla $x \in X$.

Esitettyjä käsitteitä ei tule sekoittaa käsitteisiin *minimaalinen (minimal)* ja *maksimaalinen (maximal) alkio*. Osittain järjestetyn joukon P osajoukon X minimaalinen alkio on alkio a siten, että milläään $x \in X$ ei ole, $x < a$; maksimaalinen alkio määritellään duaalisesti. Selvästi pienimmän alkion tulee olla minimaalinen alkio ja suurimman alkion maksimaalinen alkio, mutta käänteinen väite ei ole tosi.

Teoreema 3. *Osittain järjestetyn joukon mielivaltaisella äärellisellä ei-tyhjällä osajoukolla X on minimaalinen ja maksimaalinen jäsen.*

Todistus. Muodostukoon X alkioista $x_1, \ldots, x_n$. Määritellään $m_1 = x_1$ ja m_k kuin x_k, jos $x_k < m_{k-1}$ ja m_{k-1} muulloin. Silloin m_n on joukon minimaalinen alkio. Vastaavalla tavalla joukolla X on maksimaalinen alkio. Esimerkiksi olkoon osittain järjestetty joukko $P = \{2, 4, 8, 16, 32, 64, 128\}$ ja tarkoittakoon $x \leqq y$, että x jakaa luvun y. Olkoon $X = \{64, 4, 16, 2, 8\}$ joukon P osajoukko, missä sisältymisrelaatio on alkuperäinen. Nyt $m_1 = x_1 = 64$ $m_2 = x_2$, jos $x_2 < m_1$ muulloin $m_2 = m_1$ siis $m_2 = x_2 = 4$. Vastaavasti $m_3 = 4, m_4 = 2$ ja $m_5 = 2$, joten joukon X minimaali on $m_5 = 2$. Vastaavasti saadan joukon X maksimaalinen alkio $m_5 = 64$. □

Teoreema 4. *Ketjuilla käsitteet osajoukon minimaalinen ja pienin (maksimaalinen ja suurin) alkio ovat ekvivalentit. Täten mielivaltaisella äärellisellä ketjulla on pienin (ensimmäinen) ja suurin (viimeinen) alkio.*

Todistus. Jos ei millään $x \in X$ päde $x < a$, niin ehdon P4 mukaan $x \geqq a$ kaikilla $x \in X$. □

Teoreema 5. *Jokainen n:n alkion ketju on isomorfinen järjestyslukujen* **n** *joukon kanssa (kokonaislukuketju* $1, \ldots, n$*)*

toisin sanoin: on olemassa bijektio ϕ *ketjulta* X *joukolle* $\{1, \ldots, n\}$ *siten, että* $x_1 \leqq x_2$*, jos ja vain jos* $\phi(x_1) \leqq \phi(x_2)$*; äärelliset ketjut ovat äärellisiä järjestyslukujen joukkoja.*

Todistus. Olkoon ϕ kuvaus siten, että $\phi(x) = 1$, kun x on pienin alkio ja jäljelle jäävistä alkioista $\phi(y) = 2$, kun y on pienin alkio ja jne. □

Ketjun **n** *pituus* on $n - 1$ (ks. diagrammista). Yleisesti määritellään osittain järjestetyn joukon P *pituus (length) l(P)* määritellään joukon P sisältämien ketjujen pituuksien pienimpänä ylärajana. Kun $l(P)$ on äärellinen sanotaan, että P on *äärellispituinen (finite length)*. Äärellispituinen mielivaltainen osittain järjestetty joukko määritellään (isomorfismia vaille) sen peittämisrelaation avulla: $a > b$, jos ja vain jos esiintyy äärellinen jono $x_0, x_1, \ldots, x_n$ siten, että $a = x_0, b = x_n$ ja x_{i-1} peittää x_i:n, kun $i = 1, \ldots, n$.

Kahden äärellisen osittain järjestetyn joukon isomorfismi tai ei-isomorfismi voidaan usein testata hyvin yksinkertaisesti piirtämällä niiden diagrammit. Minkä tahansa isomorfismin pitää olla injektiivinen pienempien alkioiden välillä, seuraavaksi pienempien alkioiden välillä ja niin edelleen. Vastaavien alkioiden tulee peittyä alkioiden samalla lukumäärällä ja peittävien alkioiden tulee myös vastata. Nämä periaatteet tekevät helpoksi luetella eri (esim. ei-isomorfiset) $n = 4$ alkioista osittain järjestettyä joukkoa; niitä on täsmälleen 16 kappaletta.

Osittain järjestetyssä joukossa P, jossa on pienin alkio O, alkion $x \in P$ *korkeus (height)* tai ulottuvuus eli dimensio $h[x]$ on määritelmän mukaan, välillä O ja x olevien ketjujen $O = x_0 < x_1 < \ldots < x_l = x$ pituuksien pienin yläraja. Jos joukolla P on universaali yläraja I, niin selvästi $h[I] = l[P]$. Selvästi myös $h[x] = 1$, jos ja vain jos x peittää alkion O, tällaisia alkioita kutsutaan joukon P (atomeiksi tai pisteiksi).

Korkeusfunktio on erittäin tärkeä *asteittaisissa osittain järjestetyissä joukoissa (graded poset)*. Nämä on määritelty kuten osittain järjestetyt joukot P funktiolla $g : P \to \mathbb{Z}$ joukolta P kaikkien kokonaislukujen ketjulle (niiden luonnollisessa järjestyksessä) siten, että:

G1. ehdosta $x > y$ seuraa $g[x] > g[y]$ (aito isotonisuus).
G2. Jos x peittää y:n, niin $g[x] = g[y] + 1$.

Mikä tahansa asteistettu osittain järjestetty joukko täyttää seuraavan ehdon:

Jordan-Dedekindin ketjuehto. Kaikilla maksimaalisilla ketjuilla samojen päätepisteiden välillä on sama äärellispituus.

Lemma 3. *Olkoon P alkion O sisältävä mielivaltainen osittain järjestetty joukko, jonka kaikki ketjut ovat äärellisiä. Joukko P täyttää Jordan-Dedekindin ketjuehdon, jos ja vain jos se on järjestetty korkeuden $h[x]$ mukaan.*

Todistus. Jos joukko P on järjestetty korkeuden $h[x]$ mukaan, niin Jordan-Dedekindin ketjuehto seuraa ilmeisesti: mielivaltaisen maksimaalisen ketjun päätepisteiden a ja b, $b > a$ pituus on $h[b] - h[a]$. Käänteisesti, jos Jordan-Dedekindin ketjuehto pätee, niin $h[x]$ on kaikkien maksimaalisten ketjujen pituus alkiolta O alkioon x, josta ehdot G1 ja G2 seuraavat välittömästi. □

2.4 Hilat

Osittain järjestetyn joukon P osajoukon X *yläraja (upper bound)* on alkio $a \in P$, $x \leqq a$ jokaisella $x \in X$. *Pienin yläraja* on pienin kaikista ylärajoista; sitä merkitään $\sup X$. Ehdon P2 mukaan $\sup X$ on yksikäsitteinen, jos se on olemassa. Käsittet joukon X *alaraja (lower bound)* ja *suurin alaraja* ($\inf X$) määritellään duaalisesti. Ehdon P2 mukaan $\inf X$ on yksikäsitteinen, jos se on olemasssa.

Määritelmä. *Hila*[1] *(lattice)* on osittain järjestetty joukko P, jonka kahdella mielivaltaisella alkiolla on inf tai *kohtaaminen* (merkitään $x \wedge y$) ja sup tai *liitto* (merkitään $x \vee y$). Hila L on *täydellinen (complete)*, kun sen jokaisella osajoukolla X on inf ja sup hilassa L.

Asettamalla $X = L$ näemme, että epätyhjä täydellinen hila sisältää pienimmän alkion O ja suurimman alkion I. Selvästikin mielivaltaisen hilan duaali on hila ja mielivaltaisen täydellisen hilan duaali on täydellinen hila kohdata ja liitto vaihdannaisuudella. Kaikki äärelliset hilat ovat täydellisiä hiloja.

Kaikki ketjut ovat hiloja, joissa $x \wedge y$ on yksinkertaisesti pienempi ja $x \vee y$ suurempi alkioista x ja y. Kaikki hilat eivät ole täydellisiä: rationaalilukujen joukko $\mathbb{Q}$ ei ole täydellinen luonnollisen järjestyksen suhteen esim. $\inf \{x | \pi < x, x \in \mathbb{Q}\} \notin \mathbb{Q}$ ellei sovita, että $-\infty$ ja ∞ toimivat kuin *yleiset rajat*.

Annetun joukon X (Esimerkki 1. Kappaleessa 2.1) kaikkien osajoukkojen hila on täydellinen; tyhjä joukko $\emptyset$ on O, joukko X itse on I. Jokaisella joukon X osajoukkojen $S_\alpha \subset X$ kokoelmalla A on $\inf A$ osajoukkojen S_α leikkaus $\bigcap_A S_\alpha$ ja $\sup A$ on yhdiste $\bigcup_A S_\alpha$.

Määritelmä. Hilan L *osahila (sublattice)* on hilan L osajoukko X siten, että ehdoista $a \in X,\ b \in X$ seuraa $a \wedge b \in X$ ja $a \vee b \in X$.

Osahila on hila samoilla (alkuperäisillä) kohtaamis- ja liittooperaatioilla varustettuna. Tyhjä osajoukko on osahila; niin ovat myös kaikki yksialkioiset osajoukot.

[1]Hila käsitettä ("Dualgruppe") on ensimmäisenä syvällisemmin tutkinut Dedekind [5]. Tämän täydellisen hilan määritelmän esitteli G. Birkhoff itse [2].

Yleisesti, jos hilassa L on annettu *suljettu väli (closed interval)* $[a, b], a \leqq b$, joukko $\{x \in L | a \leqq x \leqq b\}$ on hilan L osahila. Osittain järjestetyn joukon P *konveksi* osajoukko on osajoukko, joka sisältää suljetun välin $[a, b]$ aina, kun se sisältää alkiot a ja b, $a \leqq b$. Hilan L osajoukko S on *konveksi osahila*, kun ehdosta $a, b \in S$ seuraa $[a \wedge b, a \vee b] \subset S$.

Hilan L osajoukko voi itse olla hila saman (relatiivisen) järjestyksen suhteen olematta kuitenkaan osahila. Seuraava esimerkki on tyypillinen tällaisten (täydellisten) hilojen laajasta joukosta.

Esimerkki 7. Muodotukoon $\sum$ mielivaltaisen ryhmän G aliryhmistä ja tarkoittakoon relaatio $\leqq$ joukkoinkluusiota. Sillä $\sum$ on täydellinen hila, kun määritellään $H \wedge K = H \cap K$ (joukko-opillinen leikkaus) ja $H \vee K$ pienin aliryhmä hilassa $\sum$ sisältäen H ja K (joka ei ole niiden joukkoteoreettinen unioni).

Esitetyssä esimerkissä kahden vertailukelvottaman aliryhmän joukko-opillinen unioni ei ole koskaan osaryhmä; täten Esimerkin 7 hila ei ole ryhmän G kaikista osajoukoista muodostuneen hilan osahila. Esimerkit 6 ja 7 ovat tyypillisiä täydellisten hilojen laajasta joukosta ja luonnehdittu seuraavan käsitteen termein.

Määritelmä. *Sulkeuma (closure)* on joukon I osajoukkojen ominaisuus, kun (i) joukolla I on ominaisuus ja (ii) osajoukkojen, joilla on itsellään annettu ominaisuus, leikkauksella on tämä ominaisuus.

Esitykseksi sulkeuman ominaisuuksista kirjaamme vain seuraavan tuloksen.

Teoreema 6. *Olkoon L mielivaltainen täydellinen hila ja olkoon S mielivaltainen hilan L osahila siten, että (i) $I \in S$ ja (ii) ehdosta $T \subset S$ seuraa* $\inf T \in S$. *Silloin S on täydellinen hila.*

Todistus. Joukon S mielivaltaisella (ei-tyhjällä) osajoukolla T selvästi $\inf T$ (hilassa L) on joukon S alkio ehdon (ii) mukaan ja se on osajoukon T suurin alaraja joukossa S. Duaalisti, olkoon $U \subset S$ kaikkien osajoukon T ylärajojen joukko joukossa S. Se on ei-tyhjä, koska $I \in S$. Siten $\inf U \in S$ on myös osajoukon T yläraja, tarkemmin sanottuna pienin yläraja, koska $\inf U \leqq u$ kaikilla $u \in U$. Tämä todistaa, että S on täydellinen hila. □

Korollaari. *Olkoon annettu joukko X. Ne joukon X osajoukot, joilla on tietty sulkeumaominaisuus muodostavat täydellisen hilan. Tässä hilassa minkä tahansa osajoukkokokoelman $\{S_\alpha | \alpha \in \Gamma\}$ kohtaus on niiden leikkaus. Niiden yhdiste on joukko $\bigcap\{T_\beta | T_\beta \subseteq S_\alpha$ kaikilla $\alpha \in \Gamma\}$.*

Suorat tulot (direct products). Matematiikassa luonnollisesti esiintyvien hilojen rinnalla uusia hiloja voidaan myös konstruoida jonkin annetun prosessin mukaan annetuista hiloista. Yksi tällainen prosessi koostuu suoran tulon muodostuksesta. Tämä on ryhmistä muodostuneiden suorien tulojen prosessin ja renkaista muodostuneiden suorien summien prosessin vastaavuus.

Määritelmä. Kahden osittain järjestetyn joukon P ja Q suora tulo PQ on kaikkien parien (x, y) $x \in P, y \in Q$ joukko, joka on osittain järjestetty ehdolla $(x_1, y_1) \leqq (x_2, y_2)$, jos ja vain jos $x_1 \leqq x_2$ joukossa P ja $y_1 \leqq y_2$ joukossa Q.

Teoreema 7. *Minkä tahansa kahden hilan L ja M suora tulo LM on hila.*

Todistus. Minkä tahansa kahden alkion (x_i, y_i) joukossa LM $(i = 1, 2)$ alkio $(x_1 \vee x_2, y_1 \vee y_2)$ sisältää molemmat alkiot (x_i, y_i), siten se on parien yläraja. Sitäpaitsi kahden alkion (x_i, y_i) kaikki muut ylärajat (u, v) täyttää ehdon $u \geqq x_i (i = 1, 2)$ ja siten (pienimmän ylärajan määrityksen mukaan) $u \geqq x_1 \vee x_2$; samaten $v \geqq y_1 \vee y_2$ ja siten $(u, v) \geqq (x_1 \vee x_2, y_1 \vee y_2)$. Tämä osoittaa, että

$$(x_1 \vee x_2, y_1 \vee y_2) = (x_1, y_1) \vee (x_2, y_2). \tag{2.5}$$

Duaalisesti,

$$(x_1 \wedge x_2, y_1 \wedge y_2) = (x_1, y_1) \wedge (x_2, y_2), \tag{2.6}$$

joka todistaa, että L on hila. □

2.5 Hila-algebraa

Hiloissa binäärisillä operaatioilla $\wedge$ ja $\vee$ on tärkeitä algebrallisia ominaisuuksia, jotkut näistä vastaavat perinteisiä kerto- ja vähennyslaskuja ($\cdot$ ja $+$). Aluksi esitellään:

Lemma 4. *Mielivaltaisessa osittain järjestetyssä joukossa P operaatiot kohtaaminen ja liitto täyttävät seuraavat ehdot aina, kun lausekkeet ovat mielekkäitä:*

L1. $x \wedge x = x$, $x \vee x = x$. *(Idempotenttisuuslait)*
L2. $x \wedge y = y \wedge x$, $x \vee y = y \vee x$. *(Vaihdantalait)*
L3. $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$, $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$. *(Liitäntälait)*
L4. $x \wedge (x \vee y) = x \vee (x \wedge y) = x$. *(Absorptiolait)*

Lisäksi $x \leqq y$ on ekvivalentti ehtojen

$x \wedge y = x$ *ja* $x \vee y = y$ *kanssa.* *(Yhteensopivuus)*

Todistus. Idempotenttisuus- ja vaihdantalait ovat ilmeiset. Liitäntälait L3 ovat myös ilmeisiä, jos $x \wedge (y \wedge z)$ ja $(x \wedge y) \wedge z$ ovat molemmat yhtäpitäviä $\inf \{x, y, z\}$ kanssa aina, kun lausekkeet ovat mielekkäitä. Ekvivalenttisuus ehtojen $x \geqq y$, $x \wedge y = y$ ja $x \vee y = x$ välillä on helppo todentaa ja ne seuraavat ehdosta L4. $\square$

Lemma 5. *Jos osittain järjestetyllä joukolla P on alaraja O, niin*

$$O \wedge x = O \text{ ja } O \vee x = x \text{ kaikilla } x \in P.$$

Duaalisesti, jos joukolla P yläraja I, niin

$$x \wedge I = x \text{ ja } x \vee I = I \text{ kaikilla } x \in P.$$

Todistus. Kun alkiot I ja O ovat olemassa, silloin kaikilla $x \in P$ pätee $O \leqq x \leqq I$, josta saadaan yhteensopivuuden nojalla $O \wedge x = O, O \vee x = x$ ja edelleen $x \wedge I = x, x \vee I = I$ $\square$

Lemma 6. *Mielivaltaisessa hilassa operaatiot liitto ja kohdata ovat isotoniset:*

$$\textit{jos } y \leqq z, \textit{ niin } x \wedge y \leqq x \wedge z \textit{ ja } x \vee y \leqq x \vee z. \tag{2.7}$$

Todistus. Ristiriidattomuuden ja ehtojen L1-L4 mukaan ehdosta $y \leqq z$ seuraa

$$x \wedge y = (x \wedge x) \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge (x \wedge z),$$

mistä vastaavuuden nojalla $x \wedge y \leqq x \wedge z$. Toinen epäyhtälö ehdosta (2.7) vodaan todistaa duaalisti (Duaalisuusperiaate). □

Lemma 7. *Mielivaltaisessa hilassa pätevät distributiivisuus epäyhtälöt*

$$x \wedge (y \vee z) \geqq (x \wedge y) \vee (x \wedge z), \tag{2.8}$$

$$x \vee (y \wedge z) \leqq (x \vee y) \wedge (x \vee z). \tag{2.9}$$

Todistus. Selvästi $x \wedge y \leqq x$ ja $x \wedge y \leqq y \leqq y \vee z$, siten $x \wedge y \leqq x \wedge (y \vee z)$. Myös $x \wedge z \leqq x, x \wedge z \leqq z \leqq y \vee z$, joten $x \wedge z \leqq x \wedge (y \vee z)$. Lauseke $x \wedge (y \vee z)$ on lausekkeiden $x \wedge y$ ja $x \wedge z$ yläraja, mistä seuraa ehto (2.8). Distributiivisuus epäyhtälö (2.9) seuraa duaalisesti epäyhtälöstä (2.8). □

Lemma 8. *Mielivaltaisen hilan alkiot täyttävät modulaarisuus epäyhtälön:*

$$\textit{ehdosta } x \leqq z \textit{ seuraa } x \vee (y \wedge z) \leqq (x \vee y) \wedge z. \tag{2.10}$$

Todistus. $x \leqq x \vee y$ ja $x \leqq z$, siten $x \leqq (x \vee y) \wedge z$. Myös $y \wedge z \leqq y \leqq x \vee y$ ja $y \vee z \leqq z$. Siksi $y \wedge z \leqq (x \vee y) \wedge z$, mistä seuraa, että $x \vee (y \wedge z) \leqq (x \vee y) \wedge z$. □

Lemmojen 4-8 mukaan on ilmeistä, että hilateorialla on vahva algebrallinen sävy. Nyt osoitamme, että sitä voidaan pitää yhtenä universaalialgebran haarana: *identi-*

teetit ehtojen L1-L4 välillä karakterisoivat täysin hilarakennetta.[2] Tämän ja useiden muiden yhteyksien todistamisessa seuraavasta käsitteestä on apua.

Määritelmä. Järjestelmää, jossa on yksittäinen binäärinen, idempotenttinen, vaihdanta ja liitäntä operaatio kutsutaan *semihilaksi (semilattice).*

Lemmalla 4 on seuraava välitön seuraus; liitto-operaatiolle $\vee$ pätee myös duaalinen korollaari.

Korollaari. *Olkoon P mielivaltainen osittain järjestetty joukko, jonka kahdella alkiolla on kohtaamisoperaatio. Silloin P on semihila, joka sisältää binäärisen operaation $\wedge$.*

Tällaisia semihiloja kutsutaan *kohtaamis*-semihiloiksi (*meet*-semilattice). Käänteisesti:

Lemma 9. *Määrittelemällä mielivaltaisessa semihilassa binäärisen operaation $\circ$ ehdolla*

$$x \leqq y, \text{ jos ja vain, jos } x \circ y = y,$$

pätee $x \circ y = \inf\{x, y\}$.

Todistus. Idempotenttisyyslaista $x \circ x = x$ seuraa refleksiivisyyslaki $x \leqq x$. Vaihdantalain $x \circ y = y \circ x$ nojalla $x \leqq y$ (t.s. $x \circ y = x$) ja $y \leqq x$ (t.s. $y \circ x = y$, joista seuraa $x = x \circ y = y \circ x = y$ eli antisymmetrisyyslaki P2. Liitäntälain nojalla $x \leqq y$ ja $y \leqq z$, joista seuraa

$$x = x \circ y = x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z = x \circ z, \text{ mistä saadan } x \leqq z,$$

joka todistaa transitiivisyyslain P3. Olkoon $x \circ y = (x \circ x) \circ y$ idempotenttisuuslain nojalla, josta liitäntä- ja vaihdantalain avulla saadaan $x \circ (x \circ y) = (x \circ y) \circ x$ mistä

[2] Itse asiassa Dedekind käytti ehtoja L1-L4 määrittelemään hilat. Inf:n ja sup:n käyttöä osittain järjestetyissä joukoissa on ensimmäisenä tutkinut C. S. Peirce [23]. E. Schröder [26] korjasi Peircen virheellisen painoksen, että kaikki hilat ovat distributiivisia.

yhteensopivuuden nojalla saadaan $x \circ y \leqq x$ ja $x \circ y \leqq y$ saadaan vastaavasti. Lopuksi, jos $z \leqq x$ ja $z \leqq y$, niin $z \circ (x \circ y) = (z \circ x) \circ y = z \circ y = z$, mistä saadaan $z \leqq x \circ y$, todistaen, että $x \circ y = \inf\{x, y\}$. □

Teoreema 8. *Mielivaltainen järjestelmä L, jossa on kaksi binääristä ehdot L1-L4 täyttävää operaatiota on hila. Myös käänteinen tulos pätee.*

Todistus. Lemman 9 mukaan mielivaltainen joukko L, joka täyttää ehdot L1-L4 on osittain järjestetty joukko, jossa $x \wedge y = \inf\{x, y\}$ siten, että $x \leqq y$ tarkoittaa $x \wedge y = x$. Toiseksi, ehdon L4 mukaan ehdosta $x \wedge y = x$ seuraa $x \vee y = (x \wedge y) \vee y = y$ ja kääntäen (duaalisuuden mukaan). Siitä johtuen, että $x \leqq y$ on myös ekvivalentti $x \vee y = y$ kanssa ja duaalisesti seuraa, että $x \vee y = \sup\{x, y\}$; täten L on hila. Käänteinen tulos todistettiin Lemmassa 4. □

2.6 Distributiivisuus

Useissa hiloissa vastaavuus hilaoperaatioiden $\wedge$, $\vee$ ja aritmeettisten operaatioiden $\cdot$, $+$ välillä sisältää distributiivilain $x(y + z) = xy + xz$. Tällaisissa hiloissa distributiiviset epäyhtälöt (2.8)-(2.9) voidaan tarkentaa yhtälöihin. Nämä yhtälöt eivät päde kaikissa hiloissa, esimerkiksi hiloissa M_5 ja N_5 ne eivät päde (Kuvat 2.2 (a) ja 2.2 (b)).

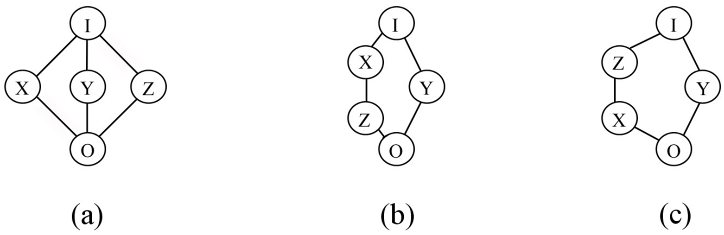
Seuraavaksi tutkimme disributiivisuutta, ensiksi todistamme tuloksen, jolla ei ole vastaavuutta perinteisessä algebrassa (koska $a + (bc) \neq (a + b)(a + c)$ yleisesti).

Teoreema 9. *Mielivaltaisessa hilassa seuraavat identiteetit ovat ekvivalentteja:*

$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z) \text{ kaikilla } x,y,z, \tag{2.11}$$

$$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z) \text{ kaikilla } x,y,z. \tag{2.12}$$

Huomautus. Jos (2.11) pätee vain joillekkin tietyille hilan alkioille x, y, z, niin välttämättä ei (2.12) niille päde kuten Kuvat 2.2 (b)- 2.2 (c) osoittavat.



Kuva 2.2 *Hila esimerkit.*

Todistus. Tulee todistaa, että ehdosta (2.11) seuraa (2.12). Käänteinen implikaatio (2.12) $\Rightarrow$ (2.11) seuraa duaalisesti.

Mielivaltaisilla x, y ja z samme,

$$\begin{aligned}
(x \vee y) \wedge (x \vee z) &= [(x \vee y) \wedge x] \vee [(x \vee y) \wedge z] && \text{ehdon (2.11) mukaan}\\
&= x \vee [z \wedge (x \vee y)] && \text{ehtojen L4 ja L2 mukaan}\\
&= x \vee [(z \wedge x) \vee (z \wedge y)] && \text{ehdon (2.11) mukaan}\\
&= [x \vee (z \wedge x)] \vee (z \wedge y) && \text{ehdon L3 mukaan}\\
&= x \vee (z \wedge y) && \text{ehdon L4 mukaan.} \quad \square
\end{aligned}$$

Määritelmä. Hila on *distributiivinen (distributive)*, jos identiteetti (2.11) (ja siten (2.12)) pätee hilassa.

Kappaleen 1 Esimerkit 1-5 ovat kaikki distributiivisia hiloja; Esimerkkien 6-7 hilat eivät kuitenkaan ole yleisesti distributiivisia. Täten reaaliluvut (Esimerkki 4) muodostavat distributiivisen hilan seuraavan helposti todistettavan tuloksen perusteella.

Lemma 10. *Mielivaltaienen ketju on distributiivinen hila.*

Itseasiassa $x \wedge y$ on pienempi alkioista x tai y; $x \vee y$ on suurempi alkioista x tai y; $x \wedge (y \vee z)$ ja $(x \wedge y) \vee (x \wedge z)$ ovat molemmat yhtäsuuria kuin x, jos x on pienempi kuin y tai z; ja molemmat ovat yhtäsuuria kuin $y \vee z$ vaihtoehtoisessa tapauksessa, että x on suurempi kuin y ja z.

Mielivaltaisen distributiivisen hilan duaali on distributiivinen ja distributiivisen hilan mielivaltainen osahila on distributiivinen. Distributiivisen hilan mielivaltainen suora tulo on distributiivinen. Esimerkin 1 hila on distributiivinen, tämä tulos voidaan yleistää seuraavasti.

Määritelmä. Joukkojen *rengas (ring)* on joukon J osajoukkojen perhe Φ, jolla on ominaisuus: jos $S, T \in \Phi$, niin $S \cap T \in \Phi$ ja $S \cup T \in \Phi$. Joukkojen *kunta (field)* on joukkojen kommutatiivinen rengas sisältäen mielivaltaisen joukon S, sekä myös sen komplementtijoukon S'.

Mielivaltainen joukkojen rengas luonnollisen järjestyksen $S \subset T$ suhteen on distributiivinen hila. Täten avoimet joukot topologisessa avaruudessa muodostavat distributiivisen hilan; samoin tekevät myös suljetut joukot.

Esimerkin 2 hila on myös distributiivinen hila. Tässä $x \vee y$ on alkioiden x ja y suurin yhteinen tekijä (s.y.t.) ja $x \wedge y$ on niiden pienin yhteinen jakaja (p.y.j.). Jos kirjoitamme x, y ja z kaikkien alkulukujen p_i potenssien tulona $\prod p_i^{e_i}$ jakaen alkion x, y tai z eksponentilla $e_i = 0$, kun alkuluku p_i ei jaa lukua, niin $e_i(x \wedge y) = \min\{e_i(x), e_i(y)\}, e_i(x \vee y) = \max\{e_i(x), e_i(y)\}$ ja siten kaikilla i, $e_i(x \wedge (y \vee z)) = e_i((x \wedge y) \vee (x \wedge z))$ on kolmen eksponentin $e_i(x), e_i(y), e_i(z)$ mediaani.

Seuraava on tärkeä distributiivisten hilojen ominaisuus.

Teoreema 10. *Distributiivisissa hiloissa pätee, jos* $c \wedge x = c \wedge y$ *ja* $c \vee x = c \vee y$, *niin* $x = y$.

Todistus. Käyttäen toistuvasti hypoteesia ja ehtoja L4, L2, (2.11) ja (2.12) saamme

$$\begin{aligned} x &= x \wedge (c \vee x) = x \wedge (c \vee y) = (x \wedge c) \vee (x \wedge y) \\ &= (c \wedge y) \vee (x \wedge y) = (c \vee x) \wedge y = (c \vee y) \wedge y = y, \end{aligned}$$

käänteinen todistus on kuten Teoreeman 13 Korollaari. □

2.7 Modulaarisuus

Asettamalla $x \leqq y$ ehdoilla (2.11) ja (2.12) siten, että $z = x \vee z$ saamme itseduaalin *modulaarisuusyhtälön*:

L5. Jos $x \leqq z$, niin $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge z$.

Täten mielivaltainen distributiivinen hila täyttää ehdon L5.

Määritelmä. Hila on modulaarinen, kun se täyttää modulaarisuusyhtälön L5. Asian esitellyt R. Dedekind [5] ja E. Schröder [26]

Kaikki hilat eivät ole modulaarisia: viiden alkion hila N_5 Kuvassa 2.2 (b) ei ole modulaarinen. Edelleen kaikki distributiiviset hilat ovat modulaarisia, viisi alkioinen hila M_5 Kuvassa 2.2 (a) on modulaarinen, mutta kuitenkaan ei distributiivinen. Hila M_5 on isomorfinen kaikkien nelialkioisen-ryhmän normaalien aliryhmien hilan kanssa. Seuraavan teoreeman korollaarina voidaan pitää sitä, että M_5 on modulaarinen.

Teoreema 11. *Mielivaltaisen ryhmän G normaali aliryhmä muodostaa modulaarisen hilan.*

Todistus. Ryhmän G normaali aliryhmä varmasti muodostaa hilan, jossa $M \wedge N = M \cap N$ on aliryhmien M ja N leikkaus ja $M \vee N = MN \neq M \cup N$ on tulojen xy, $x \in M$ ja $y \in N$ joukko. Todistaaksemme, että hila on modulaarinen, riittää osoittaa, että modulaarisen epäyhtälön (2.10) mukaan ehdosta $L \subset N$ seuraa $(L \vee M) \cap N \subset L \vee (M \cap N)$. Tämän osoittamiseksi oletetaan, että $a \in (L \vee M) \cap N$. Silloin, jos $LM = ML$ siten, että $L \vee M = LM$ saamme $a = bc$ missä $b \in L, c \in M$ ja $bc \in N$. Siten $c = b^{-1}a$, missä $b^{-1} \in L \subset N$ ja $a \in (L \vee M) \cap N \subset N$ todistaen, että $c \in N$. Koska $c \in M$ päätellään, että $c \in M \cap N$ ja siten $a = bc \in L \vee (M \cap N)$. Tämä todistaa, että $(L \vee M) \cap N \subset L \vee (M \cap N)$ kuten väitettiin. $\square$

Huomautus. Edellä oleva osoittaa myös, että jos ryhmän G aliryhmät L, M, N täyttävät ehdot $LM = ML$ ja $L \subset N$, niin $L \vee (M \cap N) = (L \vee M) \cap N$.

Modulaarisen hilan mielivaltainen osahila on modulaarinen. Sen tähden minkä tahansa vektoriavaruuden aliavaruudet ja minkä tahansa renkaan ideaalit (Esimerkki 6, kappaleessa 2.1) muodostavat modulaarisia hiloja ja ovat sopivan additiivisen ryhmän kaikkien (normaalien) aliryhmien modulaarisen hilan aliryhmiä. Samaten modulaaristen hilojen mielivaltainen suora tulo on modulaarinen.

Kuvan 2.2 (b) hila on helposti todennettavissa ei-modulaariseksi. Nyt osoitamme, että Kuvan 2.2 (b) hila on ainoa ei-modulaarinen viiden alkion hila. Tosiasiassa tulemme osoittamaan paljon enemmän.

Teoreema 12. *Mielivaltainen modulaarinen hila sisältää Kuvan 2.2 (b) N_5 hilan osahilanaan.*

Todistus. Määritelmän mukaan L sisältää elementit x, y ja z siten, että $x < z$ ja $x \vee (y \wedge z) < (x \vee y) \wedge z$. Silloin hila muodostuu alkioista $y, x \vee y, y \wedge z, (x \vee y) \wedge z$ ja $x \vee (y \wedge z)$ ja on isomorfinen hilan N_5 kanssa. Triviaalisti $y \wedge z \leqq x \vee (y \wedge z) < (x \vee y) \wedge z \leqq x \vee y$ samalla, kun $[x \vee (y \wedge z)] \vee y = x \vee y$ ja duaalisesti. Sitäpaitsi $y \wedge z = x \vee (y \wedge z)$ on mahdoton, sillä siitä seuraisi $x \leqq y \wedge z$, mistä saadaan $(x \vee y) \wedge z = x \vee (y \wedge z)$, joka on ristiriidassa hypoteesin kanssa. $\square$

Modulaaristen hilojen perusominaisuus on seuraava *transponointi periaate* Dedekindin [6] mukaan.

Teoreema 13. *Mielivaltaisessa modulaarisessa hilassa M kuvaukset $\phi_a : x \to x \wedge a$ ja $\psi_b : y \to y \vee b$ ovat inverssisti isomorfismisia väliltä $[b, a \vee b]$ välille $[a \wedge b, a]$ ja päinvastoin.*

Todistus. Jos $x \in [b, a \vee b]$, niin $x\phi_a \in [a \wedge b, a]$ kuvauksen ϕ_a isotonisuuden mukaan. Sitäpaitsi $(x \wedge a) \vee b = x \wedge (a \vee b)$ ehdon L5 mukaan, koska $x \in [b, a \vee b]$. Siten $x\phi_a\psi_b = x$ todistaa, että $y\psi_b\phi_a = y$ kaikilla $y \in [a \wedge b, a]$ on duaali. $\square$

Korollaari. *Mielivaltaisessa modulaarisessa hilassa L pätee:*

(ξ) *Jos $a \neq b$ ja sekä a että b peittävät alkion c, niin $a \vee b$ peittää alkion a kuten myös alkion b.*

(ξ') *Duaalisesti, jos $a \neq b$ ja c peittää sekä alkion a että alkion b, niin alkiot a ja b molemmat peittävät alkion $a \wedge b$.*

(Luvun 3 kappaleen 3.8 Teoreemassa 16 osoitetaan, että ehdot (ξ) $-$ (ξ') riittävät täyttämään myös äärellispituisen hilan modulaarisuuden.)

Todistus. Jos a ja $b \neq a$ peittää alkion c, niin $c = a \wedge b$. Siten teoreeman mukaan $[a, a \vee b] \cong [a \wedge b, a] \cong 2$ ja siten $a \vee b$ peittää alkion a. Samoin argumentein $a \vee b$ peittää alkion b. Samoin, jos c peittää alkiot a ja $b \neq a$, niin $c = a \vee b$ ja $[a \wedge b, a] \cong [a \vee b, a \wedge b] \cong 2$. Siten a peittää $a \wedge b$ samalla tavoin b peittää alkion $a \wedge b$.$\square$

Teoreemalla 13 on monia muita seurauksia, joiden formulointi on yksinkertaistettu seuraavasta määritelmästä.

Määritelmä. Kahta hilan suljettua väliä kutsutaan *transpooseiksi (transposes)*, jos ne voidaan kirjoittaa muodossa $[a \wedge b, a]$ ja $[b, a \vee b]$ sopivilla alkioilla a, b. Samoin kahta väliä $[x, y]$ ja $[x', y']$ kutsutaan *projektiiviseksi (projective)* (symboolein $[x, y] \sim [x', y']$), jos on olemassa äärellinen jono $[x, y], [x_1, y_1], [x_2, y_2], \ldots, [x', y']$, jossa mitkä tahansa kaksi perättäistä osaväliä (quotients) ovat transpoosit.

Korollaari 1. *Teoreemassa 13 välien $[a \wedge b, a]$ ja $[a, a \vee b]$ osavälit kuvautuvat (isomorfisille) transponoiduille väleille ψ_b ja ϕ_a, mainitussa järjestyksessä.*

Korollaari 2. *Kaikissa modulaarisissa hiloissa projektiiviset välit ovat isomorfisia.*

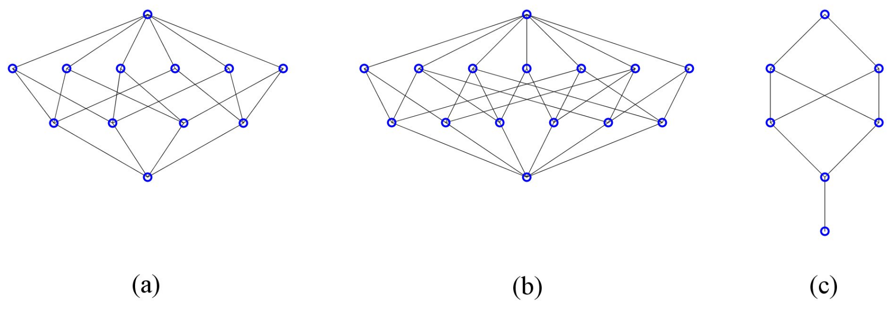
2.8 Semimodulaarisuus

Äärellispituiset hilat, jotka täyttävät ehdon (ξ) tai (ξ') kutsutaan semimodulaarisiksi. Tarkemmin sanoen äärellispituista hilaa, joka täyttää ehdon (ξ) kutsutaan (ylä) *semimodulaariksi (semimodular)*. Vastaavasti hilaa, joka täyttää ehdon (ξ') kutsutaan *ala semimodulaariksi (lower semomodular)* tai duaaliseksi semimodulaariksi.

On helppo osoittaa, että mikä tahansa osahilan väli tai (ylä) semimodulaarisen hilan suora tulo on itse (ylä) semimodulaarinen. Koska kuitenkin jokainen ei-modulaarinen hila sisältää osahilan, joka on isomorfinen Kuvan 2.1 (b) hilan N_5 kanssa, joka ei täytä ehtoa (ξ) tai (ξ'), (ylä) semimodulaarisen hilan osahilan ei tarvitse olla semimodulaarinen. Erityisesti tämä on tosi Kuvan 2.1 (c) seitsen-alkioisella hilalla. Itseasiassa Dilworthin [7] mukaan jokainen äärellispituinen hila on isomorfinen semimodulaarisen hilan osahilan kanssa.

Seuraavat kaksi esimerkkiä määrittelevät tyypilliset äärellispituiset ylä semimodulaariset hilat.

Esimerkki 8. Olkoon F mielivaltainen kunta ja olkoon $A(F;n)$ kunnan F yli olevan n-dimensionaalisen affiinisen avaruuden kaikkien *osa-avaruuksien (subspaces)*joukko (osajoukot, jotka sisältävät mitkä tahansa kaksi pistettä, jotka ehjä suora viiva yhdistää). Siten $A(F;n)$ on ylä semimodulaarinen hila, pituudeltaan $n+1$, jossa $d[x]$ on yhtä pienmpi kuin geometrinen dimensio. Kuva 2.3 (a) kuvaa joukon $A(\mathbb{Z}_2;2)$ diagrammia.



Kuva 2.3 *Semimodulaarinen hila, luokiteltu hila ja osittain järjestetty joukko.*

Esimerkki 9. Olkoon S n alkioinen joukko. $n-1$ pituinen symmetrinen *ositushila* *(partition lattice)* on ekvivalenssien relaatioiden (ositusten) joukossa S osittain järjestetty joukko $\prod_n$. Osittain järjestetty siten, että $\rho \leqq \tau$ tarkoittaa, että ehdosta $x\rho y$ seuraa $x\tau y$. Toisin sanoen, että ositus $\pi(\rho)$ on karkeistus/hienonnus osituksesta $\pi(\tau)$.

Edelleen τ peittää ρ osittain järjestetyssä joukossa $\prod_n$ jos ja vain jos $\pi(\tau)$ on saatavissa osituksesta $\pi(\rho)$ kokoamalla kaksi ekvivalenssia luokkaa. Lopuksi, $h[\rho] = n - \nu(\rho)$, missä $\nu(\rho)$ on ekvivalenssien luokkien lukumäärä, jotka ρ osittelee joukosta S. Siten $\prod_n$ on *luokiteltu hila (graded lattice)* kaikilla äärellisillä arvoilla n. Kuva 2.3 (b) kuvaa luokiteltua hilaa $\prod_4$.

Läheisesti samansukuinen osittain järjestetty joukko on seuraava.

Esimerkki 10. Olkoon $\mu : N = m_1 + \ldots + m_r$ ja $\nu : N = n_1 + \ldots + n_s$ kaksi mielivaltaista positiivisten kokonaislukujen jakoa N, missä positiivista kokonailukua m_i vastaa luku n_j. Määritellään $\mu \leqq \nu$ tarkoittamman, että ositus ν voidaan muodostaa osituksesta μ (mahdollisten uudelleenjärjestelyjen jälkeen) ryhmittelemällä sopivat summat.

Saatu osittain järjestetty joukko P_N ei voi täyttää ehtoa (ξ), kun $N > 4$, koska se ei ole hila (Kuva 2.3 (c) kuvaa osittan järjestettyä joukkoa P_5). Kuitenkin se täyttää Jordan-Dedekindin ketjuehdon; katso Luku 3 kappale 3.8.

2.9 Komplementoidut modulaariset hilat

Alkion x *komplementilla (complement)* hilassa L, joka sisältää alkiot O ja I, tarkoitetaan alkiota $y \in L$ siten, että $x \wedge y = O$ ja $x \vee y = I$. Hilaa L sanotaan *komplementoiduksi (complemented)*, jos sen kaikilla alkiolla on kompelementit. Hilaa kutsutaan *relatiivisesti komplementoiduksi (relatively complemented)*, jos sen kaikki (suljetut) osavälit ovat komplementoituja. Teoreema 10. osoittaa, että distributiivisen hilan annetulla osavälillä $[a, b]$ alkiolla c voi olla enintään yksi relatiivinen komplementti.[3]

Kappaleessa 2.1 vain Esimerkki 1. on selvästi komplementoitu. n-dimensioisen vektoriavaruuden $F^n = V_n(F)$ yli mielivaltaisen kunnan (tai jaetun renkaan) F kaikkien aliavaruuksien modulaarinen hila on komplementoitu. Tapauksessa $V_2(\mathbb{Z}_2)$ muodostuu Kuvan 2.1 (a) modulaarinen hila M_5.

[3] Yleisemmät määritykset, katso G. Szasz [35].

Teoreema 14. *Mielivaltainen komplementoitu modulaarinen hila M on relatiivisesti komplementoitu.*

Todistus. Ensiksi, jos $O \leqq x \leqq b$ hilassa M, niin $x \wedge (x' \wedge b) = (x \wedge x') \wedge b = O$ triviaalisti, samalla ehdon L5 mukaan

$$x \vee (x' \wedge b) = (x \vee x') \wedge b = I \wedge b = b.$$

Siten $[O, b]$ on hilan M komplementoitu modulaarinen osahila B. Duaalisesti, $[a, b] \subset B$ on osahilan B komplementoitu modulaarinen osahila. $\square$

Ei-modulaarinen viiden alkion hila N_5 Kuvassa 2.1 (b) on komplementoitu, mutta ei relatiivisesti komplementoitu.

Teoreema 15. *Äärellispituisessa relatiivisesti komplementoidussa hilassa L jokaisella alkiolla a on liitto niiden pisteiden kanssa joihin se sisältyy.*

Todistus. Annettu $a > O$, jolloin joko a on piste(atomi) tai $a > b > O$ jollekin $b \in L$. Olkoon c pisteen b relatiivinen komplementti piteessä a. Välin $[O, a]$ pituuden induktiolla voimme olettaa, että b ja c ovat kumpikin pisteiden liittoja; siten $a = b \vee c$. $\square$

Korollaari. *Äärellispituisessa komplementoidussa modulaarisessa hilassa jokaisella alkiolla on liitto niiden pisteiden kanssa joihin se sisältyy.*

Esimerkki 11. Olkoon M euklidisen n-ulotteisen avaruuden E_n kaikkien osa-avaruuksien hila. Silloin M on Teoreeman 11 mukaan modulaarinen ja komplementoitu, koska mielivaltaisen osa-avaruuden S ortogonaalinen komplementti $S^\perp$ täyttää ehdon $S \cap S^\perp = 0, S + S^\perp = E_n$.

2.10 Boolen hilat; Boolen algebrat

Määritelmän mukaan Boolen hila on komplementoitu distributiivinen hila. Palauttaen mieliin Teoreemasta 10, että komplementit ovat yksiselitteisiä mielivaltaisessa distributiivisessa hilassa. Tästä seuraa

Teoreema 16. *Mielivaltaisessa Boolen hilassa jokaisella alkiolla x on yksi ja vain yksi komplementti x'. Lisäksi*

L8.	$x \wedge x'$	$=$	$O,$	$x \vee x'$	$=$	$I,$
L9.	$(x')'$	$=$	$x,$			
L10.	$(x \wedge y)'$	$=$	$x' \vee y',$	$(x \vee y)'$	$=$	$x' \wedge y'.$

Todistus. Olemme nähneet, että vastaavuus $x \to x'$ on yksikäsitteinen ja komplementin määritelmän symmetrisyyden mukaan x on alkion x' komplementti. Siten yksiselitteisyyden nojalla $x = (x')'$, joka todistaa ehdon L9. Sen tähden vastaavuus $x \to x'$ on yksi-yhteen.

$$x \wedge a = O \text{ jos ja vain jos } x \leqq a'. \tag{2.13}$$

Tämä seuraa siitä, että (i) jos $x \leqq a'$, niin $x \wedge a \leqq a' \wedge a = O$, ja (ii) jos $x \wedge a = O$, niin

$$x = x \wedge I = x \wedge (a \vee a') = (x \wedge a) \vee (x \wedge a') = O \vee (x \wedge a') = x \wedge a'.$$

Ehdosta (2.13) seuraa, että $a \leqq b$, josta selvästi seuraa, että $b' \wedge a \leqq b' \wedge b = O$ sekä $b' \leqq a'$. Yksi-yhteen vastaavuus $x \to x'$ on antitoninen (käänteisesti järjestynyt). Myös pätee vastaavuus $x' \to (x')' = x$, mistä seuraa, että $x \to x'$ on duaalisesti isomorfinen todistaen ehdon L10. □

Teoreemasta 16 seuraa, että mielivaltainen Boolen hila on duaalisesti isomorfinen itsensä kansssa (itse-duaali), koska komlementit ovat *yksikäsitteisiä (unique)* Boolen hilassa, jälkimmäistä voidaan pitää kahden binäärioperaation $(\wedge, \vee)$ ja yhden unarioperaation (') algebrana. Näitä on alettu kutsua Boolen *algebraksi (algebra).*

Määritelmä. *Boolen algebra (Boolean algebra)* on ei-tyhjä joukko A, jossa operaatiot $\wedge, \vee, '$ täyttävät ehdot L1-L10. Boolen algebran A (Boolen) *alialgebra (subalgebra)* on joukon A ei-tyhjä osajoukko B, joka toteuttaa millä tahansa alkioilla $a, b \in B$ myös $a \wedge b, a \vee b$ ja $a' \in B$.

Siten jokainen joukon A väli, $[a, b]$ vaikkakin on Boolen osahila ei välttämättä ole Boolen alialgebra.

Seuraavaksi osoitamme, että mielivaltainen distributiivinen hila, jossa on rajat O ja I sisältää suurimman Boolen alialgebran.

Teoreema 17. *Mielivaltaisen rajat I ja O sisältävän distributiivisen hilan komplementoidut alkiot muodostavat Boolen alialgebran.*

Todistus. Jos alkiot x ja y ovat komplementoidut, niin

$$(x \wedge y) \wedge (x' \vee y') = (x \wedge y \wedge x') \vee (x \wedge y \wedge y') = O \vee O = O.$$

Ehdon L8 mukaan alkion $x \wedge y$ komplementti on silloin alkio $x' \vee y'$. Duaalisesti alkion $x \vee y$ komplementti on $x' \wedge y'$. □

Mikä tahansa joukoista muodostunut kunta on Boolen algebra. Yksityiskohtaisesti, annetun joukon kaikkien osajoukkojen kunta on yksi tällainen. Edelleen, mielivaltainen Boolen algebran alialgebra on myös Boolen algebra. Niin on myös Boolen algebrojen mielivaltainen suora tulo tai osahilan väli.

Esimerkki 12. Kahden luokan I ja J alkioiden välisten binäärirelaatioiden luokka on Boolen algebra, koska tämä luokka on isomorfinen luokan kanssa, joka muodostuu suoran tulon $I \times J$ kaikista osajoukoista; vastaavuuden nojalla jokainen relaatio ρ kuvautuu graafikseen: joukoksi, joka muodostuu kaikista pareista (x, y) relaatiolla $x\rho y$.

3. AKSIOOMAT HILOILLE

3.1 Esijärjestykset

Tyypillisimmät algebralliset systeemit voidaan esittää useiden erilaisten ehtojen joukkona. Kuten saatoimme nähdä Luvun 2. kappaleessa 2.1, yleisimmät ehdot P1-P3 osittain järjestetyille joukoille ovat ekvivalentit seuraavien kahden ehdon kanssa, (aidosti sisältyen):

P1'. Mikään alkio x ei toteuta $x < x$. (Antirefleksiivinen)
P3'. Jos $x < y$ ja $y < z$, niin $x < z$. (Transitiivinen)

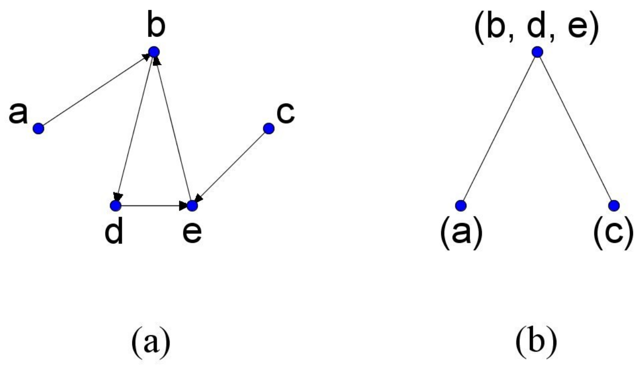
Muut osittain järjestettyjen joukkojen aksioomajäjestelmät on voitu suunnitella kuvaamaan esimerkiksi 3 paikkaisen välissä-relaation $(axb)\beta$ ominaisuuksia, jotka on määritelty tarkoittamaan, että $a \leqq x \leqq b$ tai $b \leqq x \leqq a$; katso Luvun 3. kappaleesta 3.9.

Tällaiset aksioomajärjestelmät, vaikkakin ovat jännittäviä, eivät ehkä ole kovin käyttökelpoisia. Tässä luvussa tulemme opiskelemaan muutamaa aksioomajoukkoa erityyppisille hiloille, jotka ovat käyttökelpoisia. Tulemme myös tutkimaan näiden aksioomajoukkojen yhden tai useamman aksiooman poisjäännin vaikutuksia.

Tässä hengessä määrittelemme ensin joukon S *esijärjestys (quasi-ordering)* relaatio $\prec$, joka täyttää ehdot P1 ja P3, mutta ei välttämättä ehtoa P2. Paria $(S, \prec)$ kutsutaan *esijärjestetyksi joukoksi (quasi-ordered set)*.

Esijäjestetyt joukot voidaan konstruoida *suunnattuina graafeina (directed graphs)*. Nämä ovat pisteiden joukkoja, jotka on yhdistetty suunnatuilla janoilla. Kuva 3.1 (a) kuvaa tällaista suunnattua graafia.

Esitelty suunnattu graafi solmuin $x, y, \ldots, x \prec y$ määritellään tarkoittamaan, että



Kuva 3.1 *Suunnattu graafi ja osittain järjestettyjen joukkojen diagrammi.*

joko $x = y$ tai on olemassa nuolilla kuvattu suunnattu polku solmusta x solmuun y. Täten Kuvassa 3.1 (a) pätee $b \prec e$, koska on olemassa polku $b \to d, d \to e$. Tämä relaatio on selvästi transitiivinen. Toisaalta Kuvassa 3.1 (a) pätee sekä $b \prec e$ että $e \prec b$, joten antisymmetrialaki ei päde.

Näytämme nyt kuinka konstruoidaan osittain järjestetty joukko mistä tahansa esijärjestyksestä.

Lemma 1. *Missä tahansa esijärjestetyssä joukossa $Q = (S, \prec)$, määritellään $x \sim y$, kun $x \prec y$ ja $y \prec x$. Silloin:*

(i) $\sim$ on ekvivalenssirelaatio joukossa S;

(ii) jos E ja F ovat kaksi relaation $\sim$ ekvivalenssiluokkaa, niin $x \prec y$ joko ei millään $x \in E$, $y \in F$ tai kaikilla $x \in E$, $y \in F$;

(iii) osamääräjoukko $S/\sim$ on osittain järjestetty joukko, jos $E \leqq F$ määritellään tarkoittamaan, että $x \prec y$ jollakin (eli kaikilla) $x \in E$, $y \in F$.

Todistus (i): Koska $x \prec x$ kaikilla $x \in S$, $\sim$ on refleksiivinen.

Ehdoista $x \sim y$ ja $y \sim z$ seuraa, että $x \prec y$ ja $y \prec z$ (määritelmän mukaan), siten ehdon P3 mukaan $x \prec z$. Samoin $z \prec x$ ja siten $x \sim z$, mistä saadaan, että $\sim$ on transitiivinen. Määritelmän mukaan relaatio $\sim$ on symmetrinen.

(ii): Jos $x \prec y$ joillakin $x \in E, y \in F$ ja silloin $x_1 \prec x \prec y \prec y_1$ kaikilla $x_1 \in E, y_1 \in F$, mistä saadaan $x_1 \prec y_1$ transitiivisuuden mukaan.

(iii): Selvästikkin $E \sim E$ (koska $x \sim x$) kaikilla E. Edelleen ehdoista $E \leqq F$ ja $F \leqq G$ seuraa, että $x \prec y \prec z$ kaikilla $x \in E, y \in F, z \in G$ mistä saadaan $x \prec z$ ehdon P3 mukaan eli relaatiot $\prec$ ja $\leqq$ ovat transitiiviset. Lopuksi ehdoista $E \leqq F$ ja $F \leqq E$ seuraa, että kaikilla $x \in E, y \in F$ $x \prec y$ ja $y \prec x$, mistä saadaan, että $x \sim y$ ja $E = F$. □

Kuvan 3.1 (a) suunnatussa graaffissa ekvivalentit luokat ovat joukot $\{a\}, \{b, d, e\}, \{c\}$ ja vastaavat osittain järjestetyt joukot on hahmoteltu diagrammiin Kuvassa 3.1 (b).

Lemmalla 1 on monia sovelluksia.

Esimerkki 1. Kommutatiivisessa puoliryhmässä S ykkösalkiolla tarkoittakoon $a \mid b$, että $ax = b$ jollakin $x \in S$. Relaatio $\mid$ esijärjestää ryhmän S. Ryhmän S alkiot ovat Lemman 1 mukaisesti ekvivalenttaja, jos ja vain jos ne ovat lukuteorian mukaisesti liitännäisiä.

3.2 Hila-aksioomat; semihilat

Aksioomat L1-L4 hiloille eivät ole toisistaan riippumattomia: idempotenttisuuslait seuraavat ehdosta L4. Siten

$$x \vee x = x \vee [x \wedge (x \vee x)] = x,$$

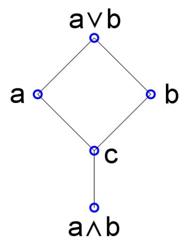
missä ensimmäinen yhtäpitävyys seuraa ensimmäisestä kontraktiolaista $x = x \wedge (x \vee y)$ ehdolla $x = y$ ja seuraava seuraa duaalisuuslaista ehdolla $y = x \vee x$. Duaalisesti voidaan todistaa $x \wedge x = x$.

Jäljelle jääneet kuusi ehtojen L2-L4 yhtälöistä ovat riippumattomia, sillä yhtäkään niistä ei voida todistaa jäljelle jääneiden avulla. On työlästä dualisuuden nojalla asettaa määritellyt, asianmukaiset joukot ja operaatiot, jotka täyttävät viisi kuudesta ehtojen L2-L4 yhtälöistä. Tämän me nyt teemme.

Esimerkki 2. Olkoon $\mathbb{Z}^+$ positiivisten kokonaislukujen joukko. Määritellään $x \vee y =$

$\max(x, y)$ ja $x \wedge y = x$. Näin kaikki ehtojen L2-L4 identiteetit täyttyvät paitsi $x \wedge y = y \wedge x$.

Esimerkki 3. Ajatellaan Kuvan 3.2 diagrammia. Olkoon operaatio liitto määritelty kuten yleensä ja kohtaaminen myös, paitsi, että $a \wedge b$ on pienin alkio eikä alkio c. Saatu algebrallinen järjestelmä täyttää aksioomat L2, L4 ja ehdon $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$, mutta ei ehtoa $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$; se ei päde kolmikolle a, b, c.



Kuva 3.2 *Ei-assosiatiivinen hila.*

Esimerkki 4. Olkoon $\mathbb{Z}^+$ positiivisten kokonaislukujen joukko. Asetetaan $x \vee y = \max(x, y), x \wedge y = 1$. Silloin kontraktiolaki $x \wedge (x \vee y) = x$ ei päde, mutta muut viisi ehtojen L2-L4 identiteettiä täyttyvät. □

Teoreema 1. *Aksioomista L2-L4 hiloille seuraa aksiooma L1, mutta aksioomien L2-L4 kuusi identiteettiä ovat riippumattomia.*

Määritelmä. Tärkein algebrallisen hilan käsitteen yleistys on semihila. Kuten Luvussa 2, Kappaleessa 2.5 määritellään *semihila (semilattice)* [16] joukkona S, jolla on binäärinen operaattori $\circ$, joka on idempotenttinen, vaihdannainen ja liitännäinen.

Lemma 2. *Mielivaltainen semihila S on osittain järjestetty joukko järjestysrelaationa jaollisuusrelaatio $a \mid b$ ts. $a \circ x = b$ jollakin $x \in S$, lisäksi tässä osittain järjestetyssä joukossa $c \circ d = c \vee d$ mille tahansa $c, d \in S$.*

Todistus. Kuten Esimerkissä 1, S on esijärjestetty relaatiolla $a \mid b$; $a \mid a$, koska $\circ$ on idempotenttinen. Sen lisäksi ehdosta $a \circ x = b$ seuraa, että

$$a \circ b = a \circ (a \circ x) = (a \circ a) \circ x = a \circ x = b,$$

käänteinen tulos on triviaalia, siten $a \mid b$ jos ja vain jos $a \circ b = b$. Siten relaatioista $a \mid b$ ja $b \mid a$ yhdessä seuraa, että $a = b \circ a = a \circ b = b$ eli esijärjestys on osittainen järjestys. Lopuksi $c \mid c \circ d$ triviaalisti (koska $c \circ d = c \circ d$), $d \mid c \circ d$ samalla tavoin (vaihdannaisuuden nojalla), samalla kun relaatioista $c \mid x$ ja $d \mid x$ seuraa, että $x = c \circ x = c \circ d \circ x$, mistä saadaan, että $(c \circ d) \mid x$; siten $c \circ d = c \vee d$. □

Määritelmä. Lemman 2 osittain järjestetty joukko on *liitto-semihila (join-semilattice)* määritelty semihilalla S; sen duaali on *kohtaamis-semihila (meet-semilattice)* määritelty semihilalla S.

Selvästikin mielivaltainen hila L on sekä liitto-semihila relaatiolla $\vee$ että kohtaamis-semihila relaatiolla $\wedge$, eli edellä määritelty terminologia on ristiriidaton.

Monet semihilat ovat myös hiloja. Esimerkiksi tämä pätee, jos kohtaamis-semihilalla L on yleinen yläraja I ja sen pituus on äärellinen.

Todistus. Olkoon $U = U(a, b)$ kohtaamis-semihilan L osajoukko koostuen annettujen kahden alkion a ja b kaikista ylärajoista. Joukko U sisältää ylärajan I ja siihen sisältyy mitkä tahansa kaksi alkiota x ja y sekä $x \wedge y$, koska $x \geqq a$ ja $y \geqq a$, mistä seuraa, että $x \wedge y \geqq a$ määritelmän mukaan. vastaavasti myös alkion b kanssa. Seuraavaksi konstruoimme ketjun joukossa U rekursiivisesti.

Olkoon $x_0 = I$. Jos x_n ei ole pienin alkio joukossa U otetaan mikä tahansa $y \in U$, joka ei täytä ehtoa $y \geqq x_n$ ja olkoon $x_{n+1} = x_n \wedge y < x_n$. Kuten edellä esitettiin, ketju $x_0 > x_1 > x_2 > \ldots$ on joukossa U, sillä jokainen ketju kohtaamis-semihilassa L on äärellinen, jolla on pienin alkio $x_n \in U$. Tämä x_n on joukon U pienin alkio, siten $x_n = a \vee b$ esiintyy ja kohtaamis-semihila L on hila. □

Esimerkki 5. Olkoon Q_n n alkioisen joukon S kaikkien esijärjestyksien joukko; siten Q_n on täydellinen hila. Osajoukko P_n, joka muodostuu joukon S kaikista osajärjestyksistä on kohtaamis-semihila, mutta ei hila.

3.3 Morfismit ja ideaalit

Yleisellä *morfismi* määritelmällä on neljä erilaista (vaikkakin samansukuista) tulkintaa hiloissa, jokaisella on omat tärkeät sovelluksensa. Ne tullaan kuvailemaan nyt.

Määritelmä. Olkoon $\theta : L \to M$ funktio hilalta L hilalle M. Funktio θ on *isotoninen (isotone)*, kun ehdosta $x \leqq y$ seuraa $\theta(x) \leqq \theta(y)$; *liitto*-morfismi (*join*-morphism), kun

$$\theta(x \vee y) = \theta(x) \vee \theta(y) \text{ kaikilla } x, y \in L; \tag{3.1}$$

kohtaamis-morfismi (*meet*-morphism), kun dualisesti pätee:

$$\theta(x \wedge y) = \theta(x) \wedge \theta(y) \text{ kaikilla } x, y \in L; \tag{3.2}$$

ja *morfismi (morphism)* (tai hila-morfismi), kun molemmat ehdot (3.1) ja (3.2) pätevät.

Yleensä morfismia kutsutaan (i) *iso*morfismiksi, jos on bijektio, (ii) *epi*morfismiksi, jos on surjektiivinen, (iii) *mono*morfismiksi, jos on injektio, (iv) *endo*morfismiksi, jos $L = M$, (v) *auto*morfismiksi, jos $L = M$ ja se on isomorfinen.

Selvästi liitto- ja kohtaamis-morfismin määritelmiä sovelletaan yleisemmin liitto-semihilojen ja kohtaamis-semihilojen kanssa kyseisessä järjestyksessä, kun taas isotonista funktiota sovelletaan mihin tahansa osittain järjestettyyn joukkoon. Seuraavat tulokset ovat myös ilmeisiä.

Lemma 3. *Mikä tahansa liitto-morfismi liitto-semihilojen välillä on isotoninen; niin on myös kohtaamis-morfismi kohtaamis-semihilojen välillä.*

Lemma 4. *Mikä tahansa isotoninen bijektio isotonisen inversin kanssa on hila-isomorfismi.*

Edellä esitetyt erityispiirteet ovat bijektiolle tarpeettomia. Kuitenkin ne ovat tarpeelliset surjektiolle ja injektiolle. (Esimerkiksi yksi niistä voi vahvistaa järjestystä hilassa niin, että saadaan aikaiseksi liitto-monomorfistinen kuva ja sulkeuma operaatiot ovat liitto-epimorfisia, jotka eivät ole yleensä kohtaamis-epimorfisia.)

Morfismin ydinmääritelmällä, tuttu joukkoteoriasta, on monivivahteisempia ominaisuuksia, kun sitä sovelletaan hiloihin. Seuraava määritelmä on relevantti. Ideaalin konseptin esitteli Stone teoksissaan [31] ja [32], asiaa käsitteli myös Tarski teoksissaan [37] ja [38]. Eroavaisuuden liitto-morfismin ja kohtaamis-morfismin välillä muodosti Ore [22].

Määritelmä. *Ideaali (ideal)* on hilan (tai liitto-semihilan) L epätyhjä osajoukko J, jolla on seuraavat ominaisuudet

$$a \in J, x \in L, x \leqq a \text{ seuraa } x \in J, ; \tag{3.3}$$

$$a \in J, b \in J \text{ seuraa } a \vee b \in J; \tag{3.4}$$

Duaalista määritelmää (hiloille tai kohtaamis-semihiloille) kutsutaan *duaali ideaaliksi (a dual ideal)* (tai kohtaamis-ideaaliksi).

On helppo osittaa, että J on ideaali, kun $a \vee b \in J$ pätee, jos ja vain jos $a \in J$ ja $b \in J$.

Esimerkki 6. Joukon E kaikkien osakoukkojen muodostamaa *potenssijoukkoa* $P(E)$, duaali ideaalia (ei joukko $P(E)$ itse) kutsutaan joukkojen *suodattimeksi (filter)*.

Teoreema 2. *Liitto-semihilan L mielivaltaisen liitto-morfismin θ mukaan liitto-semihila M alkion O kanssa muodostama alkion O korrelaattien joukko Ker θ (liitto-morfismin θ ydin) on ideaali liitto-semihilassa L.*

Todistus. Jos $a\theta = O$ ja $b\theta = O$, niin $(a \vee b)\theta = a\theta \vee b\theta = O$. Käänteisesti, jos $a(\vee b)\theta = O$, niin $a\theta \vee b\theta = O$; mutta tästä seuraa, että $a\theta = b\theta = O$. Täten joukko on ideaali edellä mainitun määritelmän perusteella. □

Ideaalien epätyhjyysehdosta on sekä etuja että haittoja. Vaatimuksen etuna voidaan pitää, kun ideaali J on epätyhjä niin, Teoreeman 2 käänteinen lause pätee; katso

Teoreema 4. Suurimpana haittana voidaan pitää sitä, että hilan epätyhjien ideaalien ilman pienintä alkiota O äärettömien perheiden leikkaus voi olla tyhjä. Jos hila sisältää alkion O, kuitenkin kaikki ideaalit sisältävät tämän alkion O ja näin tätä haittaa ei muodostu.

Annettu alkio a missä tahansa hilassa L, kaikkien alkioiden $x \leqq a$ muodostama joukko $L(a)$ on ilmiselvästi ideaali; jota kutsutaan *hilan L pääasialliseksi ideaaliksi (principal ideal of L.)* Missä tahansa äärellispituisessa hilassa jokainen (epätyhjä) ideaali on pääasiallinen. Vielä yleisemmin, tämä pätee, jos jokainen nouseva ketju hilassa L on äärellinen.

Jos $J = L(a)$ on pääasiallinen ideaali hilassa L muodostuen alkiosta a, kuvaus $x \to \theta(x) = x \vee a$ on liitto-endomorfismi ideaalin J ytimen kanssa, koska

$$\theta(x \vee y) = (x \vee y) \vee a = (x \vee a) \vee (y \vee a) = \theta(x) \vee \theta(y).$$

Myös, jos $z \in J$, $z \leqq a$ ja $z \vee a = a$, mistä seuraa, että $\theta(z) = a$. Kaikilla $x \in L$, $\theta(x) = x \vee a \geqq a$, siten $z \in J$ mistä seuraa, että $\theta(z) \leqq \theta(x)$. Täten joukon Im θ alkio a on O ja $J =$ Ker θ on liitto-endomorfismin ydin.

Teoreema 3. *Minkä tahansa hilan L kaikkien ideaalien joukko, sulkeuman mukaan järjestettynä, itse muodostaa hilan $\hat{L}$. Kaikkien pääasiallisten ideaalien hilassa L muodostama joukko muodostaa tämän hilan osahilan, joka on isomorfinen hilan L kanssa.*

Todistus. Hilan L mielivaltaiset kaksi ideaalia J ja K, joilla on yhteinen alkio, koska jos $a \in J$ ja $b \in K$, niin $a \wedge b \in J \wedge K$. Koska voimme pitää $J \wedge K$ ideaalien J ja K joukkoleikkauksena; tämä on selvästikkin ideaali.

Edelleen, mikä tahansa ideaali, joka sisältää ideaalit J ja K täytyy sisältää myös joukko M, joka muodostuu alkioista x siten, että $x \leqq a \vee b$ joillakin $a \in J$ ja $b \in K$. Joukko M on ideaali, jos $x \in M$ ja $y \leqq x \leqq a \vee b$, niin ehdon P3 mukaan $y \leqq a \vee b$ ja, jos $\{x, y\} \subset M$ niin, koska $x \leqq a \vee b$ ja $y \leqq a_1 \vee b_1$ joillakin $a, a_1 \in J$ ja $b, b_1 \in K$ joten

$$x \vee y \leqq (a \vee b) \vee (a_1 \vee b_1) = (a \vee a_1) \vee (b \vee b_1),$$

missä $a \vee a_1 \in J$ ja $b \vee b_1 \in K$ sillä J ja K ovat ideaaleja. Siten $M =$ sup (J, K)

kaikkien hilan L ideaalien muodostamassa joukossa.

Jos J ja K ovat hilan L pääasiallisia ideaaleja generaattorien a ja b kanssa, niin $J \vee K$ ja $J \wedge K$ ovat pääasiallisia ideaaleja muodostuen alkioista $a \vee b$ ja $a \wedge b$ mainitussa järjestyksessä. Täten muodostuneet pääasialliset ideaalit muododtavat hilan $\hat{L}$ osahilan, joka on isomorfinen hilan L kanssa. □

Kun hila L on äärellinen, niin $\hat{L}$ on isomorfinen hilan L kanssa; hilan $\hat{L}$ rakenne on ensisijaisesti tärkeä äärettömien hilojen tapauksessa.

3.4 Kongruenssirelaatiot

Kongruenssirelaatio (congruence relation) algebrallisessa systeemissä A on ekvivalenssirelaation θ kanssa systeemissä A, jolla on korvaavuus ominaisuus operaatioilleen. Jos A on liitto-semihila, se tarkoittaa, että

$$\text{ehdosta } a \equiv b (\mathrm{mod}\ \theta) \text{ seuraa } a \vee x \equiv b \vee x \text{ kaikilla } x \in A. \tag{3.5}$$

Hilassa se tarkoittaa, että lauseen (3.5) duaali pätee myös.

Lemma 5. *Olkoon J mielivaltainen ideaali annetussa liitto-semihilassa S. Siten relaatio*

$$a \equiv b(\ mod\ J) \ kun\ a \vee d \equiv b \vee d \ jollakin\ d \in J \tag{3.6}$$

on kongruenssirelaatio liitto-semihilassa S.

Todistus. Helposti nähdään, että lause (3.6) on ekvivalenssirelaatio ja se on kongruenssirelaatio kunnioittaen liitto ominaisuuksia $(a \vee c) \vee d = (b \vee c) \vee d$, kun $a \vee d = b \vee d$, mistä saadaan, että

$$\text{ehdosta } a \equiv b(\mod J) \text{ seuraa } a \vee c \equiv b \vee c(\mod J).$$

□

Lemma 5 alentuu ikään kuin korollaariksi seuraavalle teoreemalle, joka on Teoreeman 2 käänteinen lause.

Teoreema 4. *Jos J on ideaali liitto-semihilassa S alkion O kanssa, on olemassa hilan L liitto-epimorfismi θ liito-semihilalle T siten, että* $\operatorname{Ker}\theta = J$.

Todistus. Ajatellaan ekvivalenssiluokkia, jotka ovat muodostettu liitto-kongruensseistä $a \equiv b(\text{mod } J)$. Kuvaus, joka kuvaa liitto-semihilan S alkion ekvivalenssiluokan alkioksi, joka on liitto-homomorfinen kongruenssirelaation korvaavuus ominaisuuden takia. Ekvivalenssiluokkien joukko T on liitto-semihila. Koska joukko J muodostuu yhdestä ekvivalenssiluokasta ja koska liitto-semihilan S alkio O on joukossa J, niin $\operatorname{Ker}\theta = J$. □

Teoreema 5. *Distributiivisen hilan annettu ideaali J sekä kongruenssirelaatio $a \equiv b(mod\ J)$ määrittävät epimorfismin θ hilalta L hilalle M alkion O kanssa siten, että* $J = \operatorname{Ker}\theta$

Todistus. Olemme juuri todistaneet, että ehdosta $a \equiv b(\text{mod } J)$ seuraa $a \vee c \equiv b \vee c(\text{mod } J)$ millä tahansa $c \in J$. Todistus päätetään todistamalla, että ehdosta $a \equiv b(\text{mod } J)$ seuraa $a \wedge c \equiv b \wedge c(\text{mod } J)$ millä tahansa $c \in J$. Tämä seuraa sillä, jos $a \vee d = b \vee d$ jollakin $d \in J$, niin

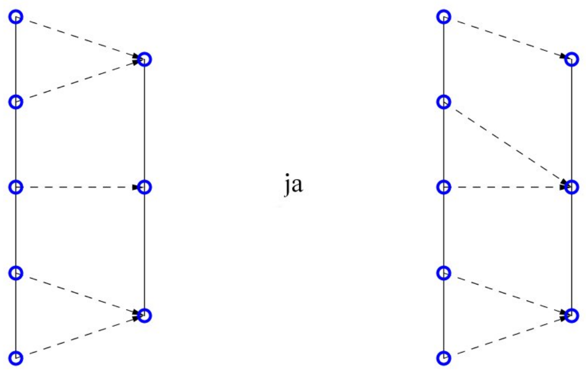
$$(a \wedge c) \vee d = (a \vee d) \wedge (c \vee d) = (b \vee d) \wedge (c \vee d) = (b \wedge c) \vee d.$$

□

On tärkeää huomata, että hila-morfismin ydin ei yleisesti ja yksikäsitteisesti määrää liitäntä kongruenssirelaatiota. Esimerkiksi Kuva 3.3 kuvaa kahta morfismia ketjujen välillä sisältäen samat ytimet, mutta eri kongruenssirelaatiot. Toisessa esimerkissä epimorfiset kuvat eivät ole ei-isomorfisia.

Kuitenkin edellä kuvattu moniselitteisyys ei voi syntyä missään relatiivisesti komplementoidussa hilassa.

Lemma 6. *Jos $u \equiv v(mod\ \theta)$ hilassa L, niin $x \equiv y(mod\ \theta)$ kaikilla x, y välillä* $[u \wedge v, u \vee v]$.



***Kuva* 3.3** *Eri morfismit, mutta samat ytimet.*

Todistus. Oletuksen mukaan $x = x \vee (u \wedge v) \equiv x \vee (u \wedge u) \equiv x \vee u (\text{mod } \theta)$, ja duaalisesti $x \equiv x \wedge u (\text{mod } \theta)$. Siten

$$u = u \wedge (u \wedge x) \equiv u \wedge x \equiv x (\text{mod } \theta).$$

Samalla tavoin $u \equiv y(\text{mod } \theta)$ mistä saadaan transitiivisesti $x \equiv y(\text{mod } \theta)$. □

Vakioideaalit (standard ideal). Relatiivisesti komplementoiduissa hiloissa yksi voi todellakin konstruoida tyydyttävää bijektiota kongruenssirelaatioiden ja ideaalien osaluokkien välillä seuraavin tavoin. Teoreemasta 5 on helppo havaita, että $a \equiv b(\text{mod } J)$, jos ja vain jos $(a \wedge b) \vee c = a \vee b$ jollakin $c \in J$. Yleisessä hilassa L ideaalia J kutsutaa vakioksi, kun tällä ekvivalenssirelaatiolla on sijoitus ominaisuus kohtaamiselle yhtä hyvin kuin liitolle (vertaa Lemma 5:tä); tämä pätee, kun relaatio on kongruenssirelaatio. Teoreema 5 väittää, että distributiivisen hilan jokainen ideaali on vakio; käänteinen väite on myös tosi: jos hilan L jokainen ideaali on vakio, niin hila L on distributiivinen.

Määritelmän mukaan hila on *lohkoen komplementoitu (sectionally complemented),* kun hilalla on alkio O ja jokainen osaväli $[O, a]$ on komplementoitu. Selvästikkin jokainen relatiivisesti komplementoitu hila alkion O kanssa on lohkoen komplementoitu.

Teoreema 6. *Olkoon θ mielivaltainen kongruenssirelaatio lohkoen komplementoidulle hilalle L. Silloin $x \equiv O$ muodostaa vakioideaalin $J(\theta)$ hilassa L ja $x \equiv y(\theta)$, jos ja vain jos $(x \wedge y) \vee a = x \vee y$ jollekin $a \in J(\theta)$. Käänteisesti, jokainen hilan L vakioideaali J määrittää kongruenssirelaation hilalle L tällä tavoin.*

Todistus. Missä tahansa hilassa ehdosta $x \vee a = y \vee a$ jollakin $a \equiv O$ seuraa, että $x = x \vee O \equiv x \vee a = y \vee a \equiv y \vee O = y(\theta)$. Käänteisesti oletuksesta, että $x \equiv y(\theta)$ lohkoen komplementoidussa hilassa ja olkoon a alkion $x \wedge y$ komplementti välillä $[O, x \vee y]$ niin, että $x \wedge y \wedge a = O$ ja $(x \wedge y) \vee a = x \vee y$. Niin $a \leqq x \vee y$; siten

$$a = (x \vee y) \wedge a \equiv x \wedge y \wedge a = O(\theta),$$

samalla $x \vee y \geqq x \vee a \geqq (x \wedge y) \vee a = x \vee y$. Tämä aikaan saa $x \vee a = x \vee y$ samalla tavoin $y \vee a = x \vee y = x \vee a$. $\square$

Korollaari. *Äärellispituisessa mielivaltaisessa relatiivisesti komplementoidussa hilassa jokaista kongruenssirelaatiota θ vastaa alkio a siten, että $x \equiv y(\theta)$, jos ja vain jos $x \vee a = y \vee a$.*

Teoreeman 6 mukaan alkio a on (pääasiallisen) ideaalin J suurin alkio.

Jaoton ja maksimaalinen ideaali (prime and maximal ideals). Hilan L ideaalia kutsutaan *jaottomaksi*, kun sen komplementtijoukko on duaali ideaali. Tämä on selvästi ekvivalentti ehdon kanssa, että $a \wedge b \in P$ seuraa $a \in P$ tai $b \in P$; siten distributiivisessa hilassa pääasiallinen ideaali (c) on jaoton ideaali, jos ja vain jos c on *kohtaamis-supistamaton (meet-irreducible)*. Samoin kelvollista ideaalia kutsutaan *maksimaaliseksi*, kun hila L ei sisällä suurempaa kelvollista ideaalia (t.s. kun se on hilan $\hat{L}$ duaaliatomi). Teoreemista 2 ja 4 voimme johtaa seuraavan tärkeän huomion

Korollaari. *Annetun hilan L jaottomat ideaalit ovat hila epimorfismien θ: $L \to 2$ ytimiä.*

Toisin kuin asema renkaissa, maksimaalisten ideaalien ei tarvitse olla yleisesti jaottomia eikä käänteisen suhteen tarvitse toteutua. Huomioiden kuitenkin

Teoreema 7. (Stone [34]) *Ei-triviaalin Boolen hilan A ideaali on jaoton, jos ja vain jos se on maksimaalinen.*

Todistus. Jos P on hilan A jaoton ideaali, niin millä tahansa $a \notin P$ saamme $a' \in P$ sillä $a \wedge a' = O \in P$; siten mielivaltainen ideaali $J > P$ sisältää alkiot $a \notin P$ ja a' ja niin $I = a \vee a'$. Käänteisesti, olkoon M maksimaalinen ideaali. Oletuksesta, että $x \wedge y \in M$ ja $x \notin M$, niin $x \vee M > M$ täytyy sisältää alkio I. Siten jollakin alkiolla $z \in M, x \vee z = I$ ja niin

$$y = y \wedge I = y \wedge (x \vee z) = (y \wedge x) \vee (y \wedge z) \in M \vee M = M.$$

Näin M on jaoton. □

3.5 Hilapolynomit

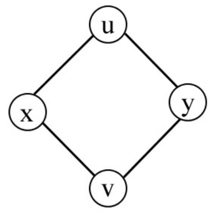
Lauseke, joka on muodostunut symbooleista $\wedge$, $\vee$ ja kirjaimista kutsutaan *hilapolynomiksi (lattice polynomials)*. Tarkemmin sanoen, määrittelemme yksittäiset kirjaimet $x, y, z, \ldots$ *painollisina (weight)* polynomeina. Rekursiivisesti, jos p ja q ovat hilapolynomeja painoin w ja w', silloin kumpikin $p \wedge q$ ja $p \vee q$ ovat hilapolynomeja painolla $w + w'$.

Tässä määritelmässä muodot $x \wedge x$ ja $x \vee (y \wedge x)$ kuvataan eri polynomeina (painoltaan kaksi ja kolme, mainitussa järjestyksessä) vaikka ne olisivat ekvivalentit, sen tähden, että ne edustavat samaa funktiota $p : L \to L$ missä tahansa hilassa. Tosiaan alkioiden x ja y eri hilapolynomifunktiot ovat helposti lueteltavissa, koska

Lemma 7. *Mielivaltaisessa hilassa L on olemassa osahila S muodostuen kahdesta alkiosta x ja y sisältäen x, y, $x \vee y = u$ ja $x \wedge y = v$ symbolein $\vee$ ja $\wedge$ kuten Kuvassa 3.4*

Todistus. Ehdon L4 mukaan $x \wedge u = x$, sekä ehdoista L3 ja L1 seuraa, että $x \vee u = x \vee (x \vee y) = (x \vee x) \vee y = x \vee y = u$. Toisina tapauksina ovat vastaavuudet, käyttäen symmetriaa alkioissa x ja y ja dualisuutta. (Ehdon L4 perusteella $u \vee v =$

$x \vee y \vee (x \wedge y) = x \vee y = u.)$ □



Kuva *3.4 Hila* $\mathbf{2}^2$

Korollaari. *Olkoon* $F_2 = \mathbf{2}^2$ *Kuvan 3.4 mukainen hila ja olkoon annetut* $a, b \in L$ *(missä* L *on mielivaltainen hila). Silloin kuvaus* $x \to a, y \to b$*, voidaan laajentaan morfismiin* $\theta : F_2 \to L$.

Edellä esitetyt tulokset useasti aikaansaadaan lauseesta, että F_2 on *vapaa hila (free lattice)* generaattorein x, y; sillä on juuri neljä alkiota ja on ditributiivinen (tosiasiassa Boolen hila).

Hilapolynomit kolmella tai useammalla muuttujalla voivat olla äärettömän monimutkaisia. Kuitenkin niillä on muutamia yksinkertaisia ominaisuuksia.

Lemma 8. *Missä tahansa liittosemihilassa jokainen polynomi* r*:ssä symbolein* $x_1, \ldots, x_r$ *on ekvivalenntti symbolien* x_i *ei tyhjän osajoukon liitolle* $\bigvee_S x_i$.

Todistus. Ehtojen L1-L3 mukainen jokainen polynomi on ekvivalentti symbolien $x_1, x_2, \ldots, x_r$ mainitussa järjestyksessä toistettujen esiintymien liiton kanssa. Ehdon L1 mukaan saman symbolin toistetut esiintymät voidaan korvata saman symbolin yksittäisellä esiintymällä. □

Toisin sanoen vapaalla semihilalla generaattorein r on $2^r - 1$ alkiota.

Lemma 9. *Mielivaltaisessa distributiivisessa hilassa jokainen polynomi on ekviva-*

lentti kohtaamisen liitolle ja duaalisesti

$$p(x_1, \dots, x_r) = \bigvee_{\alpha \in A} \left\{ \bigwedge_{S_\alpha} x_i \right\} = \bigwedge_{\delta \in D} \left\{ \bigvee_{T_\delta} x_j \right\}, \tag{3.7}$$

missä S_α, T_δ ovat ei-tyhjiä merkkien joukkoja.

Todistus. Jokainen x_i voidaan kirjoittaa niin, että A (tai D) on joukkojen perhe muodostuen yksittäisestä yhden alkion joukosta x_i. Toisaalta, kuten Lemmassa 7 saamme ehdoista L1-L3

$$\bigvee_{\alpha \in A} \left\{ \bigwedge_{S_\alpha} x_i \right\} \vee \bigvee_{\beta \in B} \left\{ \bigwedge_{S_\beta} x_i \right\} = \bigvee_{A \cup B} \left\{ \bigwedge_{S_\gamma} x_i \right\}. \tag{3.8}$$

Käyttäen disrtibutiivisuuslakia saadaan samalla tavoin

$$\bigvee_{\alpha \in A} \left\{ \bigwedge_{S_\alpha} x_i \right\} \wedge \bigvee_{\beta \in B} \left\{ \bigwedge_{S_\beta} x_i \right\} = \bigvee_{A \times B} \left\{ \bigwedge_{S \cup S_{\alpha\beta}} x_i \right\}, \tag{3.9}$$

missä $\bigwedge$ symboloi äärellisen määrän termien kohtaamista ja $\bigvee$ liittoa, kuten $\sum$ ja $\prod$ edustaa äärellisen määrän termien summaa ja tuloa. Tämä on edelleen tavallisesta algebrasta tutun ja yleisen distributiivisuuslain hila analogian yleistys

$$\left(\sum_{\alpha \in A} x_\alpha \right) \left(\sum_{\beta \in B} y_\beta \right) = \sum_{A \times B} x_i y_j.$$

Se seuraa ehdoista L2 ja (2.11) yhdessä ralaation $\{\bigwedge_S x_i\} \wedge \{\bigwedge_T x_i\} = \bigwedge_{S \cup T} x_i$ kanssa, joka seuraa ehdoista L1-L3 kuten Lemma 8. $\square$

Luvun 2 kappaleen 2.5 Lemman 6 isotonisuus periaate voidaan ulottaa painon induktioon seuraavin tuloksin.

Lemma 10. *Jos $y_i \leqq z_i (i = 1, \dots, r)$, niin $p(y_1, \dots, y_r) \leqq p(z_1, \dots, z_r)$ millä tahansa hila polynomilla p.*

Yleisemmin, on olemassa *minimax periaate (minimax principle)*:

$$\bigwedge_{\gamma \in C} \Big(\bigvee_{B(\gamma)} x_{\gamma,\beta} \Big) \geqq \bigvee_{P} \Big(\bigwedge_{\gamma} x_{\gamma,\beta(\gamma)} \Big). \tag{3.10}$$

Tässä jokainen $\gamma \in C$ määrittää indeksien β indeksoidun joukon $B(\gamma)$ siten, että alaindeksit γ ja β skaalaavat läpi karteesisen tulon $\prod_C B(\gamma)$. Ensimmäisten kaarisulkeiden sisällä γ on määritetty, kun taas β skaalaa yli funktion $\beta(\gamma)$; oikealla puolella $\beta(\gamma)$ tarkoittaa mitä tahansa funktiota viitaten jokaiseen $\gamma \in C, \beta(\gamma) \in B(\gamma)$; P on kaikkien näiden funktioiden joukko. Esimerkiksi, kun $C = \{1,2\}, B(1) = \{1,2\}$ ja $B(2) = \{1,2,3\}$ minimax epäyhtälä (3.10) on

$$(x_{11} \vee x_{12}) \wedge (x_{21} \vee x_{22} \vee x_{23}) \geqq \Big[\bigvee_{j=1}^{3} (x_{11} \wedge x_{2j}) \Big] \vee \Big[\bigvee_{k=1}^{3} (x_{12} \wedge x_{2k}) \Big].$$

Todistus. Jokainen termi $\bigvee_{B(\gamma)} x_{\gamma,\beta}$ on yläraja jokaiselle $\bigwedge_y x_{\gamma,\beta(\gamma)}$ termille ehdon (3.10) oikealla puolella, koska niillä on joitakin yhteisiä termejä $x_{\gamma,\beta(\gamma)}$. Näin ollen vasemman puolen termien suurin alaraja on myös kuin yläraja, koska se on oikean puolen termien pienimmän ylärajan yläraja. □

3.6 Distributiivisuus

Kuten Luvun 2 kappaleessa 2.6 hila on distributiivinen, kun se täyttää jommankummman (tästä lähin molemmat) ekvivalentit distributiivisuuslait (2.11) ja (2.12). Nyt todistamme saman suuntaisen pidemmälle viedyn tuloksen.

Teoreema 8. *Hila on distributiivinen, jos ja vain jos se täyttää itse-duaalin mediaanilain*

L6. $(x \wedge y) \vee (y \wedge z) \vee (z \wedge x) = (x \vee y) \wedge (y \vee z) \wedge (z \vee x)$.

Todistus. Asettamalla $x \geqq z$ ehdossa L6, niin vasen puoli supistuu muotoon $(x \wedge y) \vee [(y \wedge z) \vee z] = (x \wedge y) \vee z$ ehdon L4 mukaan; duaalisesti oikea puoli supistuu muotoon $(x \vee y) \wedge (y \vee z) \wedge x = [x \wedge (x \vee y)] \wedge (y \vee z) = x \wedge (y \vee z)$, sillä ehto L6 sisältää modulaarisuus lain L5. Edelleen lyhentäen ehtoa L6 muotoon $u = v$ saamme identiteetin $x \wedge u = x \wedge v$, missä (ehtojen L2-L4 mukaan)

$$x \wedge u = x \wedge [(y \wedge z) \vee (x \wedge y) \vee (x \wedge z)] = (x \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge y) \vee (x \wedge z),$$

$$x \wedge v = [x \wedge (x \vee y)] \wedge (y \vee z) \wedge (z \vee x) = x \wedge (z \vee x) \wedge (y \vee z) = x \wedge (y \vee z)$$

viimeinen vaihe perustuu ehtoon L5. Käyttäen ehtoa L4 viimeisen lausekkeen kahteen ensimmäiseen termiin saadaan $x \wedge u = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$. Sijoittaen saatu tulos identiteettiin $x \wedge u = x \wedge v$ saadaan ehto (2.11).

Kääntäen, käyttämällä ehtoa (2.11) ehdon L6 oikealle puolelle saadaan

$$[(x \vee y) \wedge (y \vee z) \wedge z] \vee [(x \vee y) \wedge (y \vee z) \wedge x] = [z \wedge (x \vee y)] \vee [x \wedge (y \vee z)],$$

viimeisessä vaiheessa ehtoja L4 ja L2 on käytetty vapaasti. Käyttäen taas ehtoa (2.11) viimeisen lausekkeen jokaiseen termiin, saadaan

$$(z \wedge x) \vee (z \wedge y) \vee (x \wedge y) \vee (x \wedge z) = (x \wedge y) \vee (y \wedge z) \vee (z \wedge x),$$

käytten vapaasti ehtoja L2-L4. Koska ehdosta (2.11) seuraa ehto L6 voidaan todistus päättää. □

Lemma 11.*Missä tahansa distributiivisessa hilassa osahila, joka on muodostunut kolmesta annetusta alkiosta x_1, x_2, x_3 koostuen alkioista x_j, $i = x_1 \vee x_2 \vee x_3, o = x_1 \wedge x_2 \wedge x_3, u_1 = x_2 \vee x_3$ jne., $v_1 = x_2 \wedge x_3$ jne., $c_1 = u_2 \wedge u_3$ jne., $d_1 = v_2 \vee v_3$ jne. ja*

$$e = (x_1 \wedge x_2) \vee (x_2 \wedge x_3) \vee (x_3 \wedge x_1) = (x_1 \vee x_2) \wedge (x_2 \vee x_3) \wedge (x_3 \vee x_1). \quad (3.11)$$

Selitys. Lausekkeen jne. tarkoittaa aina kahta vastaavaa alkiota (esim. $u_2 = x_3 \vee x_1, u_3 = x_1 \vee x_2$) muodostuen syklisesti permutoitaessa samoin yksilöityjä alaindeksejä.

Todistus. Voidaan tarkasti supistaa jokaisen lausekeparin liitto ja kohtaaminen määrittäen yhden näistä lausekkeista, käyttämällä ehtoja L1-L6. Pitäen mielessä kuusi alaindeksien permutaatiota ja dualisuus, jokainen joka supistaa tuotosta ja yksinkertaistaa laskemista. Lisäksi millä tahansa $j \neq k$ saadaan

$$o \leqq v_j \leqq d_k \leqq x_k, \; e \leqq c_k \leqq u_j \leqq i.$$

Koska vastaavien alkioiden liitot ja kohtaamiset ovat triviaaleja, tarvitsee vain osoittaa seuraavat relaatiot $(j \neq l, k \neq l)$:

$$x_j \vee u_j = u_j \vee u_k = i, \; u_j \wedge c_j = e, \; x_j \vee e = c_j, \; x_h \wedge c_k = d_j, \; x_j \vee c_k = u_l, \quad (3.12)$$

ja niiden duaalit. □

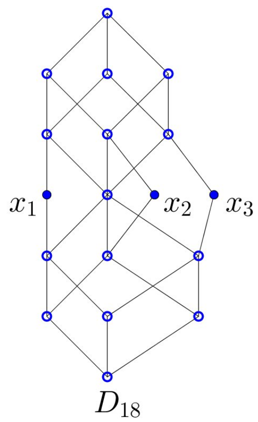
Lemma 12. *On olemassa distributiivinen hila D_{18} kolmella generaattorilla, jonka kaikki 18 Lemma 11 ilmaisua edustavat eri alkiota.*

Todistus. Muodostetaan hila D_{18} joukkojen renkaana. Olkoon $X_j (j = 1, 2, 3)$ neljän funktion $\mathbf{f} : \{1, 2, 3\} \to \{0, 1\}$ mukaan lukien $f_j = 1$ joukko. Jokainen funktio $\mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3)$ voidaan samaistaa kolmois vektoriin merkinnöin $\mathbf{2} = \{0, 1\}$. Siten $X_1 \cup X_2$ on kaikkien funktioiden $\mathbf{f}$ mukaan lukien $f_1 \vee f_2 = 1$ joukko U_3; $X_1 \cap X_2$ on kaikkien funktioiden $\mathbf{f}$ mukaan lukien $f_1 \vee f_2 = 1$ joukko jne. jaksoittain. Tästä seuraa, että $C_1 = U_2 \cap U_3$ on kaikkien funktioiden $\mathbf{f}$ mukaan lukien $f_1 \wedge (f_2 \vee f_3) = 1$ joukko jne. jaksoittain. Lopuksi $E = U_1 \cap U_2 \cap U_3 = V_1 \cup V_2 \cup V_3$ on joukko muodostuen kaikista funktioista $\mathbf{f}$ mukaan lukien vähintään kaksi 1 komponenttia. Nämä $\mathbf{2}^3$ osajoukot ovat kaikki erilaisia keskenään ja erilaisia kuin $O = \{(1, 1, 1)\}$ ja $I = X_1 \cup X_2 \cup X_3$, joukon $\{(0, 0, 0)\}$ komplementti. □

Hilan D_{18} diagrammi on esitetty Kuvassa 3.5; sillä on hyvin merkittävä ominaisuus.

Teoreema 9. *Olkoon D_{18} Kuvan 3.5 mukainen hila seuraavin alkioin x_1, x_2, x_3 ja olkoon a_1, a_2, a_3 minkä tahansa distributiivisen hilan mielivaltaisia alkioita. Silloin on olemassa morfismi $\phi : D_{18} \to L$ mukaa lukien $\phi(x_1) = a_i (i = 1, 2, 3)$.*

Todistus. Lemma 12 mukaan voidaan identisoida jokainen distributiivisen hilan D_{18} alkio $p_j(X_1, X_2, X_3)$ tarkalleen yksi 18:sta polynomista $p_j(x_1, x_2, x_3)$ rakentuen Lem-



Kuva 3.5 *Distributiivinen hila D_{18}.*

man 11 todistukseen. Asetetaan

$$\phi(p_j(x_1, x_2, x_3)) = p_j(a_1, a_2, a_3) = p_j(\phi(a_1), \phi(a_2), \phi(a_3)); \tag{3.13}$$

osoitetaan, että tämä on morfismi. Todellakin jokainen Lemma 11 mukaisesta 648 yhtälöstä $p_j \vee p_k = p_l$ ja $p_j \wedge p_k = p_m$, jotka on päätelty Lemma 11 todistuksesta käyttäen ehtoja L1-L6 ja määritetty kertolasku taulukko operaattoreille $\vee$ ja $\wedge$ hilassa D_{18} ovat tosia missä tahansa distributiivisessa hilassa ja sen tähden myös hilassa L. Tästä seuraa $\phi(p_j) \vee \phi(p_k) = \phi(p_j \vee p_k)$ hilassa L ja dualisesti. □

Teoreemassa 9 kuvattujen ominaisuuksien vuoksi hilaa D_{18} kutsutaan *vapaaksi* distributiiviseksi hilaksi kolmella generaattorilla.

Seuraavaksi todistamme tuloksen, joka osoittaa, että distributiiviselle hilalle alkiolla I ehdot L1-L4 ja L6 ovat tarpeettomia. Tämä tulos, josta saimme jo käsitystä Luvussa 2 osoittaessamme ehtojen L2-L4 keskenäistä riippumattomuutta, havainnollistaa distributiivisuuslain voimakkuutta.

Teoreema 10. *Seuraavat neljä aksioomaa systeemille, jossa on kaksi binääristä operaatiota ja erityisalkio I, joista seuraa, että kyseinen systeemi on distributiivinen hila:*

D1. $a \wedge a = a$ *kaikilla* a*,*

D2. $a \vee I = I \vee a = I$ *kaikilla* a*,*
D3. $a \wedge I = I \wedge a = a$ *kaikilla* a
D4. $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$ *ja* $(b \vee c) \wedge a = (b \wedge a) \vee (c \wedge a)$*.*

Todistus. Aluksi osoitamme, että kaikilla a, b, pätee

D5. $a = a \wedge I = a \wedge (a \vee I) = (a \wedge a) \vee (a \wedge I) = a \vee a$,
D6. $(a \wedge b) \vee a = (a \wedge b) \vee (a \wedge I) = a \wedge (b \vee I) = a \wedge I = a$,

samalla tavoin

D6'. $a \vee (a \wedge b) = a \vee (b \wedge a) = (b \wedge a) \vee a = a$.

Nyt voimme todistaa käyttäen aksioomia D4 ja D1 sekä ehtoa D6',

D7. $a \wedge (a \vee b) = (a \wedge a) \vee (a \wedge b) = a \vee (a \wedge b) = a$,

ja samalla tavoin

D7'. $a \wedge (b \vee a) = (a \vee b) \wedge a = (b \vee a) \wedge a = a$.

Seuraavaksi voimme todistaa vaihdantalain ehtojen D7-D7' ja aksiooman D4 avulla

D8. $a \vee b = [a \wedge (b \vee a)] \vee [b \wedge (b \vee a)] = (a \vee b) \wedge (b \vee a)$

$$= [(a \vee b) \wedge b] \vee [(a \vee b) \wedge a] = b \vee a$$

Alustava todistus liitäntälaista liitolle osoittaa aksiooman D4 ja ehtojen D7 ja D6' mukaan

$$a \wedge [(a \vee b) \vee c] = [a \wedge (a \vee b)] \vee [a \wedge c] = a \vee (a \wedge c) = a$$

D9. $$b \wedge [(a \vee b) \vee c] = [b \wedge (a \vee b)] \vee [b \wedge c] = b \vee (b \wedge c) = b,$$

samalla tavoin aksioomien D4 ja D1 sekä ehdon D6 mukaan

$$c \wedge [(a \vee b) \vee c] = [c \wedge (a \vee b)] \vee [c \wedge c] = [c \wedge (a \vee b)] \vee c = c$$

Nyt todistamme liitäntälain liitolle ehdon D9 mukaan,

$$a \vee (b \vee c) = \{a \wedge [(a \vee b) \vee c]\} \vee (\{b \wedge [(a \vee b) \vee c]\} \vee \{c \wedge [(a \vee b) \vee c]\})$$

Käyttäen aksioomaa D4 kahdesti saadaan

D10. $a \vee (b \vee c) = [a \vee (b \vee c)] \wedge [(a \vee b) \vee c]$

samalla tavoin vasen-oikea symmetrialla

$$a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c.$$

Nyt todistamme aksiooman D4 dualin, nimittäin aksiooman D4 mukaan

$$(a \vee b) \wedge (a \vee c) = [a \wedge (a \vee c)] \vee [b \wedge (a \vee c)]$$

D11. $$= a \vee [(b \wedge a) \vee (b \wedge c)]$$

ehtojen D10 ja D6' mukaan

$$= [a \vee (b \wedge a)] \vee (b \wedge c) = a \vee (b \wedge c)$$

vasen-oikea symmetrialla saadaan

D11'. $(a \wedge b) \vee c = (a \vee c) \wedge (b \vee c)$.

Olemme jo todistaneet aksiooman D1 duaalin ehdon D5, samoin ehdot D6 ja D7 ovat duaaleja keskenään. Nämä olivat ainoat ehdot, joita käytetiiin todistaessa ehtoja D8 ja D10, koska tarkat ehtojen D8 ja D10 todistusten duaalit ovat vaihdanta- ja liitäntälakien tuotokset kohtaamiselle.

D12. *$a \wedge b = b \wedge a$ ja $a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$.*

Tämä lopettaa ehtojen L1-L4 todistuksen; ehto L6 oli oletus samoin kuin aksiooma D4. □

Saman sukuinen nerokas tulos on seuraava

Teoreema 10' (Sholander [29]) *Mielivaltainen systeemi varustettuna kahdella binäärisellä operaatiolla $\wedge$ ja $\vee$, jotka täyttävät ehdot $a \wedge (a \vee b) = a$ ja $a \wedge (b \vee c) = (c \wedge a) \vee (b \wedge a)$ on distributiivinen hila.*

Mediaanit (medians). Silmäys Kuvaan 3.5 osoittaa, että symmetria ja itse-duaali kolmiarvoinen mediaani operaatio

$$(a, b, c) = (a \wedge b) \vee (b \wedge c) \vee (c \wedge a) = (a \vee b) \wedge (b \vee c) \wedge (c \vee a), \tag{3.14}$$

omaa ainutlaatuisen roolin disributiivisissa hiloissa. Muun muassa voidaan osoitaa

Teoreema 11. *Mielivaltainen systeemi M, jossa on alkiot O ja I sekä kolmipaikkainen operaatio täyttäen ehdot*

$$(O, a, I) = a, \qquad (a, b, a) = a,$$

$$(a, b, c) = (b, a, c) = (b, c, a), \tag{3.15}$$
$$((a, b, c), d, e) = ((a, d, e), b, (c, d, e))$$

on distributiivisen hilan sukulainen binäärioperaatioille $a \wedge b = (a, O, b)$ ja $a \vee b = (a, I, b)$.

Sholander on myös osoittanut, että aksioomat

$$(O, a, (I, b, I)) = a \text{ ja } (a, (b, c, d), e) = ((a, c, e), d, (b, a, e)) \tag{3.16}$$

ovat riittävät. Mediaani operaatio on myös sukua useille välissä-relaation käsitteen käsittelytavoille, katso edempänä kappaleessa 3.9.

3.7 Modulaarisuus

Nyt käännämme huomoimme distributiivisuudesta mudulaarisuuteen. Kuten Luvussa 2 kappaleessa 2.7 korostimme modulaarisuusyhtälö L5 on distributiivisuuslain L6 erityistapaus. M. Kolibiar [18] ja J. Riecan [25] ovat konstruoineet merkittävän joukon aksioomia modulaarisille hiloille, jonkinlaiset vastaavuudet Teoreemille 10-10'.

Modulaarisuuden seuraukset ovat aavistettavampia kuin distributiivisuuden, kuten tulemme näkemään. Ensiksi todistamme yksinkertaisen lemman.

Lemma 13. *Modulaarisessa hilassa $x = y$ saadaan ehdoista $a \wedge x = a \wedge y$ ja $a \vee x = a \vee y$ todistaen, että x ja y ovat vertailtavia (toisin sanoen, että $x \geqq y$ tai $y \geqq x$).*

Todistus. Jos $x \geqq y$, niin vastakohtaisesta johtopäätöksestä $x \neq y$ seuraisi $x > y$ ja näin alkiot a, x, y muodostaisivat viisi alkioisen ei-modulaarisen hilan N_5 kuten Kuvassa 2.1 (b) Luvussa 2 kappaleessa 2.3, vastakohtana hypoteesille. Tapaus $x \leqq y$ voidaan käsitellä samalla tavoin, joko alkioiden x ja y vaihtoehtoisuudella tai duaalisuudella. □

Luvun 2 kappaleen 2.7 Teoreema 12 osoittaa, että Lemman 13 johtopäätös ei voi olla voimassa missään ei-modulaarisessa hilassa.

Distributiivinen kolmikko (distributive triples). Modulaarisessa hilassa moni alkioiden $\{x, y, z\}$ kolmikko muodostaa distributiivisen osahilan, joka merkitään $(x, y, z)D$ ja kutsutaan $\{x, y, z\}$ distributiiviseksi kolmikoksi.

Teoreema 12. *Annetut alkiot a, b, c modulaarisessa hilassa M, joko ehdosta*

$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c) \text{ tai } a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$$

seuraa, että $\{a, b, c\}$ on distributiivinen kolmikko.

Todistus. Ensin oletamme $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$ ja sovellamme aiempaa lemmaa kolmeen alkioon a, $x = (a \wedge b) \vee c$ ja $y = (a \vee c) \wedge (b \vee c)$. Nämä alkiot täyttävät ehdon $x \leqq y$ distributiivisuuden eriarvoisuudella. Myös

$$a \vee x = a \vee (a \wedge b) \vee c = a \vee c,$$

$$\begin{aligned} a \vee y &= y \vee a \\ &= [(a \vee c) \wedge (b \vee c)] \vee a \\ &= (a \vee c) \wedge [(b \vee c) \vee a] \qquad \text{(ehdon L5 mukaan)} \\ &= a \vee c \qquad \text{(ehdon L4 mukaan)}. \end{aligned}$$

Samalla tavoin myös

$$\begin{aligned} a \wedge x = x \wedge a = [(a \wedge b) \vee c] \wedge a &= (a \wedge b) \vee (c \wedge a) \text{ (ehdon L5 mukaan)} \\ &= (a \wedge b) \vee (a \wedge c) \\ &= a \wedge (b \vee c) \text{ (hypoteesin mukaan)}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a \wedge y &= a \wedge [(a \vee c) \wedge (b \vee c)] \\ &= [a \wedge (a \vee c)] \wedge (b \vee c) \\ &= a \wedge (b \vee c). \end{aligned}$$

Koska Lemman 13 mukaan $x = y$. Tiivistäen ehdosta, $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$ seuraa, että $c \vee (a \wedge b) = (c \vee a) \wedge (c \vee b)$.

Tuloksesta, että $c \vee (a \wedge b) = (c \vee a) \wedge (c \vee b)$ seuraa $b \wedge (c \vee a) = (b \wedge c) \vee (b \wedge a)$ dualisuus säännön mukaan. Yhdistellen edellä todistettua tulosta näemme, että $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$ seuraa $b \wedge (c \vee a) = (b \wedge c) \vee (b \wedge a)$. □

Tämä on modulaarisessa hilassa distributiivisuuslaki yhdelle joukon $\{a, b, c\}$ järjestykselle, mistä seuraa yhtäpitävyys joukon syklisesti permutoidulle järjestykselle

$\{b, c, a\}$. Toistaen ja käyttäen edellä esitettyjä perusteluja saamme kaikki kuusi distributiivisuus lakia joukolle $\{a, b, c\}$. Se, että joukko $\{a, b, c\}$ muodostaa distributiivisen hilan seuraa välittömästi.

Jälleen Luvun 2 kappaleen 2.7 Teoreema 12 osittaa, että modulaarisuuden hypoteesi on välttämätön yhtä hyvin kuin riittävä Teoreemassa 12.

Myöhemmin esitettävä Teoreema 16 osoittaa myös, että modulaarisuuden hypoteesi on oleellinen Teoreemassa 12. Kuitenkin meillä on

Teoreema 12'. *Mille tahansa kolmelle alkiolle a, b ja c hilassa L, $(a \wedge b, b \wedge c, c \wedge a)D$ ja $(a \vee b, b \vee c, c \vee a)D$.*

Todistus. Olkoon $p = a \wedge b, q = b \wedge c, r = c \wedge a$ ja $o = a \wedge b \wedge c$ ja olkoon $u = p \vee q, v = p \vee r, w = q \vee r, i = p \vee q \vee r$. Osoitamme, että joukko $\{o, p, q, r, u, v, w, i\}$ muodostaa osahilan, jossa liitto ja kohtaaminen muodostuu Boolen algebran $\mathbf{2}^3$ mukaan kaikille joukon $\{p, q, r\}$ osajoukoille. Todellakin:

$$p \leqq u \wedge v = [(a \wedge b) \vee (b \wedge c)] \wedge [(a \wedge b) \vee (c \wedge a)]$$

$$\leqq [b \vee b] \wedge [a \vee a] = b \wedge a = p,$$

mistä saadaan $u \wedge v = p$. Symmetrialla $u \wedge w = q$ ja $v \wedge w = r$. Lopulta triviaalisti $p \wedge q = q \wedge r = r \wedge p = o$ ja

$$u \vee v = u \vee r = u \vee w = p \vee w = v \vee w = v \vee q = i.$$

□

Lemma 14. *Mielivaltaisessa modulaarisessa hilassa kaikilla x, y, z,*

$$[x \wedge (y \vee z)] \vee [y \wedge (z \vee x)] = (x \vee y) \wedge (y \vee z) \wedge (z \vee x). \tag{3.17}$$

Todistus. Koska $x \wedge (y \vee z) \leqq x \leqq z \vee x$ ja $y \leqq y \vee z$, ehdon L5 toistuva käyttö antaa

$$[x \wedge (y \vee z)] \vee [y \wedge (z \vee x)] = \{[x \wedge (y \vee z)] \vee y\} \wedge (z \vee x)$$

$$= [(y \vee z) \wedge (x \vee y)] \wedge (z \vee x).$$

Nyt kaava (3.17) seuraa ehdoista L2-L3. □

Käyttäen duaalisuus sääntöä kaavaan (3.17) saamme

Korollaari. *Missä tahansa modulaarisessa hilassa pätee myös*

$$[x \vee (y \wedge z)] \wedge [y \vee (z \wedge x)] = (x \wedge y) \vee (y \wedge z) \vee (z \wedge x) \tag{3.18}$$

kaikille alkioille x, y, z.

Lemma 15. *Modulaarisessa hilassa olkoon*

$$e = (y \wedge z) \vee [x \wedge (y \vee z)] = [(y \wedge z) \vee x] \wedge (y \vee z) \qquad \textit{ehdon L5 mukaan,}$$

ja olkoon f ja g määritelty samalla tavoin permutoimalla x, y, z (siten $f = (z \wedge x) \vee [y \wedge (z \vee x)]$ *ja* $g = (x \wedge y) \vee [z \wedge (x \vee y)]$*). Silloin*

$$e \wedge f = f \wedge g = g \wedge e = (x \wedge y) \vee (y \wedge z) \vee (z \wedge x), \tag{3.19}$$

ja

$$e \vee f = f \vee g = g \vee e = (x \vee y) \wedge (y \vee z) \wedge (z \vee x). \tag{3.20}$$

Todistus. Määrittelyllä ja ehdoista L2-L3, sekä käyttäen Lemma 14 saadaan

$$e \vee f = (y \wedge z) \vee [x \wedge (y \vee z)] \vee [y \wedge (z \vee x)] \vee (z \wedge x)$$

$$= (y \wedge z) \vee [(x \vee y) \wedge (y \vee z) \wedge (z \vee x)] \vee (z \wedge x).$$

Mutta molemmat $y \wedge z$ ja $z \wedge x$ sisältyvät hakasulkeissa olevaan lausekkeeseen, sillä ne ovat alarajoja joukoille $x \vee y, y \vee z$ ja $z \vee x$ yksilöllisesti. Tästä seuraa (3.20), mistä taas seuraa (3.19) dualisesti. □

Lemma 16. *Lemmassa 15, jos mitkä tahansa kaksi alkiota alkioista e, f, g ovat yhtäsuuret, niin $(x, y, z)D$.*

Todistus. Jos mitkä tahansa kaksi alkiota ovat yhtäsuuret, sanotaan että e ja f, niin $e \wedge f = e \vee f$ ja niin kaavojen (3.19) ja (3.20) mukaan

$$(x \wedge y) \vee (y \wedge z) \vee (z \wedge x) = (x \vee y) \wedge (y \vee z) \wedge (z \vee x). \tag{3.21}$$

Mutta, kuten Teoreeman 6 todistuksessa:

$$x \wedge [(x \wedge y) \vee (y \wedge z) \vee (z \wedge x)] = (x \wedge y) \vee (x \wedge z),$$

$$x \wedge [(x \vee y) \wedge (y \vee z) \wedge (z \vee x)] = x \wedge (y \vee z),$$

pätee kaikissa modulaarisissa hiloissa. Siten Teoreeman 12 mukaan saamme $(x, y, z)D$, jos kaava (3.21) pätee. □

Teoreema 13. *Mielivaltainen modulaarinen ei distributiivinen hila M sisältää Luvun 2 Kuvan 2.1 (a) mukaisen isomorfisen osahilan M_5.*

Todistus. Ellei hila M ole distributiivinen, se sisältää ei distributiivisen kolmikon $\{x, y, z\}$. Lemma 16 mukaan alkiot e, f, g ovat erityiset; Lemma 15 mukaan ne kehittävät isomorfisen osahilan M_5. □

Korollaari. *Jotta hila olisi distributiivinen on seuraava ehto välttämätön ja riittävä:*

$$a \wedge x = a \wedge y \text{ ja } a \vee x = a \vee y \text{ seuraa } x = y. \tag{3.22}$$

Ehto takaa, että suhteelliset komplementit ovat yksikäsitteisiä.

3.8 Semimodulaarisuus ja pituus

Olkoon P mikä tahansa äärellispituinen osittain järjestetty joukko alkiolla O. Voimme kutsua joukkoa P (ylä) *semimodulaariseksi (semimodular)*, kun se täyttää seuraavan ehdon:

(σ) Jos $a \neq b$ sekä molemmat peittävät c, niin on olemassa $d \in P$, joka peittää molemmat a ja b. [21]

Ala semimodulaarinen äärellispituinen osittain järjestetty joukko määritellään dualisesti. Äärellispituinen osittain järjestetty joukko, joka on sekä ylä, että ala semimodulaarinen kutsutaan *modulaariseksi (modular)*.

Ehto (σ) on läheistä sukua luvun 2. kappaleen 2.7 ehdolle (ξ). Todellakin, ensin todistamme

Lemma 17. *Jos osittain järjestetty joukko P on hila, niin (σ) on ekvivalentti ehdon (ξ) kanssa.*

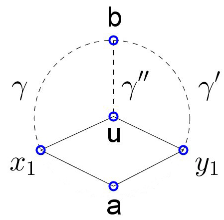
Ehdosta (σ) saadaan $d \geqq a \vee b$, koska d on yläraja joukolle $\{a, b\}$. Ehto $d > a \vee b$ on mahdoton, jos $a \neq b$, koska muuten $d > a \vee b > a$ ja d ei voi peittää alkiota a. Siten ehdosta (σ) seuraa ehto (ξ) hilassa; käänteinen suhde on triviaali. Duaaliset tulokset ja todistukset myös pätevät. $\square$

Teoreema 14. *Jordan-Dedekindin ketjuehto pätee missä tahansa (ylä tai ala) semimodulaarisessa äärellispituisessa osittain järjestetyssä joukossa.*

Todistus. Dualisuuden perusteella riittää todistaa, että ehdosta (σ) seuraa Jordan-Dedekindin ketjuehto äärellispituisesssa osittain järjestetyssä joukossa alkiolla O. Tämän me todistamme induktiolla (katso Kuvaa 3.6).

Kaikilla kokonaisluvuilla m, olkoon $P(m)$ väite, että yhdistetyn ketjun $\gamma : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_m = b$ on pituus m, niin kaikilla yhdistetyillä ketjuilla välillä a ja b on pituus m. Nyt $P(1)$ on triviaali. Tulemme osoittamaan, että ehdosta $P(m-1)$ seuraa $P(m)$. Olkoon $\gamma' : a = y_0 < y_1 < \ldots < y_m = b$ mikä tahansa toinen (äärellinen) yhdistetty ketju yhdistäen alkiot a ja b. Näin ehdon (σ) mukaan on olemassa alkio u, joka peittää alkiot x_1 ja y_1, poiketen triviaalitaapauksessa, että $x_1 = y_1 = I$. Millä tahansa yhdistetyllä ketjulla γ'' yhdistäen u ja b, väitteen

$P(m-1)$ mukaan yhdistetyllä ketjulla (x_1, γ'') on pituus $m-1$, koska yhdistetyllä ketjulla $x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_m = b$ on. Siten ketjulla γ'' on pituus $m-2$ ja näin (y_1, γ'') on pituus $m-1$, siten väitteen $P(m-1)$ mukaan yhdistetyllä ketjulla $y_1 < y_2 < \ldots < y_n = b$ on pituus $m-1$ ja näin $m = n$. □



Kuva 3.6 *Äärellispituinen osittain järjestetty joukko.*

Viitaten Luvun 2. kappaleeseen 2.3 saamme seuraavan korollaarin

Korollaari. *Mielivaltainen äärellispituinen modulaarinen tai semimodulaarinen osittain järjestetty joukko on järjestetty sen korkeusfunktion $h[x]$ mukaan.*

Tärkeämpi ja kauskantoisempi seuraus on

Teoreema 15. *Dimensioitu äärellispituinen hila on semimodulaarinen, jos ja vain jos*

$$h[x] + h[y] \geqq h[x \vee y] + h[x \wedge y]. \tag{3.23}$$

Dualisesti, se on ala semimodulaarinen, jos ja vain jos

$$h[x] + h[y] \leqq h[x \vee y] + h[x \wedge y]. \tag{3.24}$$

Todistus. Välittömästi havaitaan, että ehdosta (3.23) seuraa ehto (ξ) dimensioidussa äärellispituisessa hilassa. Kääntäen, olkoon L äärellispituinen semimodulaarinen hila. Tällöin on olemassa kaksi äärellistä yhdistettyä ketjua

$$x \wedge y = x_0 < x_1 < \ldots < x_m = x,$$

$$x \wedge y = y_0 < y_1 < \ldots < y_n = y,$$

yksi alkioiden $x \wedge y$ ja x välissä ja toinen alkioiden $x \wedge y$ ja y välissä. Jos oletamme induktiolla $i + j - 1$, että $x_{i-1} \vee y_j$ ja $x_i \vee y_{j-1}$ enintään peittää $x_{i-1} \vee y_{j-1}$ (nimittäin kumpikaan ei peitä tai ole yhtä suuri kuin $x_{i-1} \vee y_{j-1}$) niin, koska L on ylä semimodulaarinen tiedämme, että

$$x_i \vee y_j = (x_{i-1} \vee y_j) \vee (x_i \vee y_{j-1})$$

enintään peittää $x_{i-1} \vee y_j$ ja $x_i \vee y_{j-1}$. Näin induktiolla

$$h[x \vee y_j] - h[x \vee y_{j-1}] \leqq 1,$$

ja nimenomaan $d[x \vee y_j]$ on äärellinen kaikilla j. Summaus yli j:n antaa

$$h[x \vee y] - h[x] \leqq n = h[y] - h[x \wedge y],$$

joka todistaa, että semimodulaarisuudesta seuraa ehto (3.23). Toinen väite seuraa dualisesti. □

Korollaari. *Missä tahansa äärellispituisessa modulaarisessa hilassa pätee:*

$$h[x] + h[y] = h[x \vee y] + h[x \wedge y]. \tag{3.25}$$

Teoreema 16. *Olkoon L äärellispituinen hila. Siten seuraavat ehdot ovat ekvivalentit:*

(i) modulaarisuusyhtälö L5,

(ii) L on sekä ylä, että ala semimodulaarinen,

(iii) Jordan-Dedekindin ketjuehto ja ehto (3.25).

Todistus. Implikaatio $(i) \to (ii)$ on jo todistettu Luvussa 2. kappaleessa 2.8, kun taas $(ii) \to (iii)$ seuraa Teoreemasta 14. ja edellisestä Lemmasta 17. Täten jää jäljelle todistaa että $(iii) \to (i)$. Jordan-Dedekindin ketjuehto tekee korkeusfunktion $d[x]$ hyvin määritellyksi. Jos L on ei modulaarinen, luvun 2. kappaleen 2.7 Teoreeman 12. mukaan se sisältää osahilan N_5 alkioin $x < z$ ja y siten, että $x \wedge y = z \wedge y$ ja $x \vee y = z \vee y$. Jos ehto (iii) pätee, niin ehdon (3.25) mukaan

$$h[x] + h[y] = h[x \wedge y] + h[x \vee y] = h[z \wedge y] + h[z \vee y] = h[z] + h[y]$$

kiistäen $x < z$. Siten ehdosta (iii) seuraa (i). □

3.9 Välissä-relaatio

Välissä-relaatio käsitteen ominaisuutta ketjuissa on melko helppo kuvailla [13]. Ensin tarkkailemme seuraavia ehtoja

Lemma 18. *Alkioiden kolmikolle mielivaltaisessa ketjussa seuraavat ehdot ovat ekvivalentit:*

(i) $a \leqq b \leqq c$ *tai* $c \leqq b \leqq a$,

(ii) $b \in [a \wedge c, a \vee c]$,

(iii) $(a, b, c) = b$.

Jos Lemman 18. ehdoista yksi (siten kaikki) toteutuu, niin alkion b sanotaan olevan alkioiden a ja c *välissä (between)*, kolmiarvoinen suhde kirjoitetaan $(abc)\beta$. Se selvästi omaa seuraavat ominaisuudet:

(B1) ehdosta $(abc)\beta$ seuraa $(cba)\beta$,
(B2) ehdoista $(abc)\beta$ ja $(acb)\beta$ seuraa $b = c$,
(B3) ehdoista $(abc)\beta$ ja $(axb)\beta$ seuraa $(axc)\beta$,

(B4) ehdoista $(abc)\beta$, $(bcd)\beta$ ja $b \neq c$ seuraa $(abd)\beta$,
(B5) ehdoista $(abc)\beta$ ja $(acd)\beta$ seuraa $(bcd)\beta$.

Valitettavasti Lemma 18 ei ole voimassa hiloissa yleisesti, vaikka (ii) ja (iii) ovat ekvivalentit missä tahansa distributiivisessa hilassa. Siten on olemassa kolme ei ekvivalenttia välissä-relaatio käsitettä hiloissa, jotka jokainen omaa ketjuissa monia välissä-relaation käsitteen ominaisuuksia (B1)-(B5). Mikä ei päde on

(B6) Annetuille alkioille $a, b, c \in S$, yksi seuraavista ehdoista on tosi: $(abc)\beta, (bca)\beta$ tai $(cab)\beta$.

On mielenkiintoista, että mikään Lemma 18. ehdoista ei ole tavallisesti käytetty määriteltäessä välissä-relaation käsitettä hiloissa. Sen sijaan seuraavaa neljättä Glivenkon [10] [11] mukaista ehtoa käytetään.

Määritelmä. Hilassa kirjoitetaan $(abc)\beta$, kun

$$(a \wedge b) \vee (b \wedge c) = b = (a \vee b) \wedge (b \vee c). \tag{3.26}$$

Näin on ehkä osoitettu, että (3.26) on ekvivalentti kaikissa äärellispituisissa modulariisissa hiloissa M ehdon kansaa, että b on a:n ja c:n välissä metrisessä avaruudessa, joka on määritelty graafisesti niin, että jokaisen osan pituutena pidetään yhtä. (Tässä välissä tarkoittaa $\partial(a, b) + \partial(b, c) = \partial(a, c)$.)

Ehdon (3.26) välissä-relaation käsitteellä on monia mielenkiintoisia näennäis geometrisia ominaisuuksia. Esimerkiksi distribitiivisessa hilassa mediaani (a, b, c) on yksikäsitteinen alkio, joka on minkä tahansa kahden alkion välissä kolmesta alkiosta a, b, c. Ne lukijat, jotka ovat kiinostuneita näistä ominaisuuksista voivat tutkia niitä alan kirjallisuudesta [17] [30] [28].

3.10 Boolen algebrat

Boolen hila (Boolean lattice) on määritelty Luvussa 2. kappaleessa 10 kuten komplementoitu distributiivinen hila, määrittelemällä siten, että hilan pitää sisältää yleiset rajat O ja I. Kuten on osoitettu, komplementit Boolen hilassa ovat yksikäsitteisiä ja funktio $a \to a'$ on kahden pisteen dualinen automorfismi:

$$(a \wedge b)' = a' \vee b', \; (a \vee b)' = a' \wedge b', \tag{3.27}$$

$$(a')' = a \text{ kaikilla } a \in L. \tag{3.28}$$

Nämä totuudet ovat hyvin tunnettuja vuodesta 1900; katso Schröder [26].

Vaihtoehtoinen Boolen algebran postulaatien ryhmittelyä on opiskeltu intensiivisesti vuosikymmeninä 1900-1940. E. V. Huntington [15] kirjoitti vaikuttavan artikkelin tästä aiheesta. Nyt ei ole tarkoitus kirjoittaa laajaa selvitystä tällaisista postulaatti ryhmittelyistä; sillä tyypillinen tulos on seuraava.

Huntingtonin teoreema. *Olkoon joukolla A yksi binäärinen operaatio* $\vee$ *ja yksi unaarinen operaatio* $'$, *ja määritetään* $a \wedge b = (a' \vee b')'$. *Edellyttäen, että*

$$a \vee b = b \vee a, \tag{3.29}$$

$$a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c, \tag{3.30}$$

$$(a \wedge b) \vee (a \wedge b') = a \tag{3.31}$$

on A Boolen algebra.

Vaikka onkin jotakuinkin ilmeistä ehtojen (3.27)-(3.28) perusteella, että voidaan eliminoida operaatio $\wedge$ määrittelemättömien (primitiivien) operaatioiden joukosta. On hämmästyttävää, että ehdot L1-L4, L6 ja L8-L10 ovat kaikki seurausta kolmelle identiteetille (3.29)-(3.31), toisin sanoen puolet ehdoista L2-L3 ja yksi identiteettikomplementeille.

Luvussa 2 osoitettiin, että komplementit ovat yksikäsitteisiä missä tahansa distributiivisessa hilassa; nyt mietimme käänteistä kysymystä. Tässä todistamme heikomman tuloksen.

Teoreema 17. *Jos kaikilla hilan L alkioilla on yksikäsitteinen koplementti a' ja jos ehto (3.27) pätee, niin hila L on Boolen hila.*

Todistus. Vaihdannaisuuden nojalla $a \wedge a' = O$ ja $a \vee a' = I$, joista seuraa $a' \wedge a = O$ ja $a' \vee a = I$, siten ehto (3.28) pätee. Seuraavaksi osoitamme, että

$$b \geqq a \text{ seuraa } (b \wedge a') \vee a = b. \tag{3.32}$$

Todellakin asettelu $c = b \wedge a'(b \geqq a), c \wedge a \leqq a' \wedge a = O$ on välitön. Vielä lisäksi ehdoista (3.27)-(3.28) seuraa

$$O = (b' \vee a) \wedge (a' \wedge b) = [(b' \vee a) \wedge a'] \wedge b,$$

ja $(b' \vee a) \wedge a' = (b \wedge a')' \wedge a' = [(b \wedge a') \vee a]' = (c \vee a)'$. Sijoittaen saadaan tulos $O = (c \vee a)' \wedge b$, toisaalta $c \vee a = (b \wedge a') \vee a \leqq b \vee a = b$, niin $(c \vee a)' \vee b \geqq b' \vee b = I$. Yhdistellen $(c \vee a)'$ on komlementti alkiolle b ja niin

$$b = (b')' = ((c \vee a)')' = c \vee a = (b \wedge a') \vee a.$$

Tämä todistaa ehdon (3.32), koska hypoteesit ovat itse-dualeja, ehdon (3.32) duali pätee myös.

Todistaaksemme distributiivisuuden käytämme nyt Teoreema 13 korollaaria. Olettaen, että $x \wedge y = a, x \vee y = b$; ja olkoon $e = b' \vee (x \wedge a')$. Koska $y = a \vee y = b \vee y$, saamme ehdon L4 mukaan ehdon (3.32) ja sen dualin:

$$e \vee y = b' \vee (x \wedge a') \vee a \vee y = b' \vee x \vee y = b' \vee b = I,$$

$$e \wedge y = [b' \vee (x \wedge a')] \wedge b \wedge y = x \wedge a' \wedge y = a' \wedge a = O.$$

Siitä johtuen, että y on yksikäsitteinen, alkion e komplementti on e'. Samoin $x = e'$ ja $x = y$; relatiivikomplementit ovat yksiselitteisiä. Siten ehto (3.22) pätee ja L on distributiivinen. □

H.M. Sheffer [27] osoitti 1913, että kaikki Boolen funktiot voidaan saada yksittäisellä binäärisellä "hylkäys"operaattorilla.

$$a|b = a' \wedge b'. \tag{3.33}$$

(Viivaa | kutsutaan Sheffersin kauttaviivaksi.) Nimittäin:

$$a' = a|a, \qquad a \vee b = (a|b)|(a|b), \qquad a \wedge b = (a|a)|(b|b). \tag{3.34}$$

Boolen algebra on voimassa seuraavien kahden nerokkaan postulaatin oletuksella:

I. $$(b|a)|(b'|a) = a,$$

II. $$a|(b|c) = [(c'|a)|(b'|a)]'.$$

Valitettavasti nämä jokseenkin asiakohtaiset postulaatit eivät ole kovin helppoja käyttää.

3.11 Brouwerian hilat

Missä tahansa Boolen algebrallisessa joukossa A, a' on suurin alkio x siten, että $a \wedge x = O$ (t.s. siten, että a ja x ovat "ei kohtaavia"(disjoint)). Yleisemmin, $a \wedge x \leqq b$, jos ja vain jos $a \wedge x \wedge b' = O$, joka on $(a \wedge b') \wedge x = O$ tai $x \leqq (a \wedge b')' = b \vee a'$. On olemassa suurin alkoio $c = b \vee a'$ siten, että $a \wedge c \leqq b$, koska annetut $a, b \in A$.

Yhteyden logiikan pohjustuksiin (katso Luku 4), Brouwer ja Heyting karakterisoi tärkeän Boolen algebran yleistyksen edellä olevan ominaisuuden lisäyksen avulla.

Määritelmä. *Brouwerian hila (Brouwerian lattice)* [9] [4] on hila L, jossa millä tahansa annetuilla alkioilla a ja b ja kaikkien $x \in L$ joukolla siten, että $a \wedge x \leqq b$ on suurin alkio $b : a$, a:n relatiivi pseudokomplementti b:ssä.

Teoreema 18. *Mielivaltainen Brouwerian hila on distributiivinen.*

Todistus. Annetut a, b, c muodostavat $d = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$, ja huomioi $d : a$. Koska $a \wedge b \leqq d$ ja $a \wedge c \leqq d$ saamme $b \leqq d : a$ ja $c \leqq d : a$. Siten $b \wedge c \leqq d : a$ ja näin $a \wedge (b \vee c) \leqq a \wedge (d : a) \leqq d = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$. Tämä seuraa distributiivisesti Luvun 2 kappaleen 2.6 Teoreeman 9 ja distributiivisuusepäyhtälön mukaan.□

Helposti todennetaan, että mikä tahansa Boolen algebra on Brouwerian hila, jossa $b : a = a' \vee b$ on alkion a relatiivinen komplementti joukossa $[a \wedge b, I]$. Samoin mielivaltainen, äärellinen ja distributiivinen hila L on Brouwerian hila, koska alkioiden x_a liitto $u = \bigvee x_a$ niin, että $a \wedge x_a \leqq b$ täyttää ehdon $a \wedge u = a \wedge \bigvee x_a = \bigvee(a \wedge x_a) \leqq b$. Mielivaltianen ketju on myös Brouwerian hila.

Minkä tahansa topologisen avaruuden kaikkien avoimien osajoukkojen täydellinen distributiivinen hila on myös Brouwerian hila. Kuitenkin, suoran kaikkien suljettujen osajoukkojen täydellinen distributiivinen hila ei ole Brouwerian hila, koska siinä ei ole suurinta suljettua joukkoa, joka täyttäisi ehdon $p \wedge x = \emptyset$. Siten kaikki distributiiviset hilat eivät ole Brouwerian hiloja.

Brouwerian hila alkiolla O, jossa alkiota $O : a$ kutsutaan alkion a *pseudo komplementiksi (pseudo-complement)* ja merkitään a^*. Pseudo komplementeilla Brouwenian hiloissa on monia mielenkiintoisia formaaleja ominaisuuksia.

3.12 Boolen renkaat

Boolesta [3] lähtien ovat matemaatikot korostaneet analogiaa loogisen algebran ja perinteisen algebran välillä. Kuitenkin M. H. Stone [34] noin vuonna 1935 oli ensimmäinen, joka teki selväksi täsmällisen yhteyden Boolen algebran ja renkaiden välillä.

Olkoon rengas muodostettu mielivaltaisen Boolen algebran alkioista määrittäen kertolaskun kohtaamisena ja yhteenlaskun kuin "symmetrisenä vastakohtaisuutena":

$$ab = a \wedge b \text{ ja } a + b = (a \wedge b') \vee (a' \wedge b). \tag{3.35}$$

On itsestään selvää, että molemmat operaatiot ovat kommutatiivisia. Seuraavaksi tarkistamme liitäntälain yhteenlaskulle:

$$(a + b) + c = \{[(a \wedge b') \vee (a' \wedge b)] \wedge c'\} \vee \{[(a \wedge b') \vee (a' \wedge b)]' \wedge c\}.$$

Yksinkertaistettuna käyttäen toistuvasti distributiivisuutta saadaan

$$(a + b) + c = (a' \wedge b \wedge c') \vee (a \wedge b' \wedge c') \vee (b' \wedge c \wedge a') \vee (a \wedge b \wedge c)$$

joka on symmetrinen alkioilla a, b ja c. Tästä symmetrisyydestä seuraa

$$(a+b)+c = a+(b+c). \tag{3.36}$$

Boolen algebran alkio O toimii renkaissa kuin yhteenlakettava nolla:

$$a + O = (a \wedge O') \vee (a' \wedge O) = (a \wedge I) \vee (a' \wedge O) = a \vee O = a.$$

Alkion a summattava käänteisalkio on olemassa ja se on alkio a, koska ehdosta (3.35) seuraa

$$a + a = O \vee O = O. \tag{3.37}$$

On jäljellä osoittaa distributiivisuus lait. Määritelmän

$$a(b+c) = a \wedge [(b \wedge c') \vee (b' \wedge c)] = (a \wedge b \wedge c') \vee (a \wedge b' \wedge c),$$

mukaan ja koska

$$\begin{aligned} ab + ac &= (a \wedge b \wedge (a \wedge c)') \vee ((a \wedge b)' \wedge a \wedge c) \\ &= (a \wedge b \wedge (a' \vee c')) \vee ((a' \vee b') \wedge a \wedge c) \\ &= (a \wedge b \wedge a') \vee (a \wedge b \wedge c') \vee (a' \wedge a \wedge c) \vee (b' \wedge a \wedge c) \\ &= (a \wedge b \wedge c') \vee (b' \wedge a \wedge c), \end{aligned}$$

saadaan, että $a(b+c) = ab + ac$, joka päättää todistuksen. □

Triviaalisti renkaan rakenteella on kertolaskullinen neutraalialkio, nimittäin alkio I, koska $I \wedge a = a \wedge I = a$ kaiklla a. Myös triviaalisti renkaassa $aa = a$ kaikilla a ehdon (3.35) mukaan. Siten, jos määreittelemme Boolen renkaan kuin (liitäntä) renkaana, jossa

$$aa = a \text{ kaikilla } a \tag{3.38}$$

(t.s. kertolasku on idempotenttinen), voimme tehdä yhteenvedon tuloksista ja todistaa sekä yllä esitetty, että seuraava tulos.

Teoreema 19. *Ehdossa (3.35) määretettyjen operaatioiden mukaan jokainen Boolen algebra on Boolen rengas, jossa on neutaalialkio.*

Mistä tahansa Boolen renkaasta, jossa on neutraalialkio voimme käänteisesti konstruoida Boolen algebran määrityksellä

$$a \wedge b = ab \text{ ja } a \vee b = a + b + ab. \tag{3.39}$$

Jos määritetään $x \geqq y$ tarkoittaa $xy = y$, niin selvästi

(i) $1 \geqq x \geqq 0$ kaikilla x,

(ii) $x \geqq x$ idempotentin mukaan,

(iii) jos $x \geqq y$ ja $y \geqq x$, niin $x = xy = yx = y$ hypoteesin ja vaihdantalain nojalla,

(iv) jos $x \geqq y$ ja $y \geqq x$, siten $x = xy = x(yz) = (xy)z = xz$ ja niin $x \geqq z$,

(v) $x \geqq xy$, sillä $x(xy) = (xx)y = xy$,

(v') samalla tavoin käyttäen vaihdantalakia $y \geqq xy$,

(vi) jos $x \geqq z$ ja $y \geqq z$, niin $xyz = xz = z$ ja myös $xy \geqq z$,

(vii) vastaavuus $x \to 1 - x$ on selvästi yksi yhteen.

Lisäksi, koska ehdosta $xy = y$ saadaan $(1 - y)(1 - x) = 1 - y - x + xy = (1 - x)$ se kääntää sulkeuman, joten se on dualisesti automorfinen.

Siten määritelmämme mukaan R muodostuu osittain järjestetyksi joukoksi alkioilla O ja I ehtojen (i)-(iv) mukaan, jossa $x \wedge y$ on olemassa ja on xy ehtojen (v)-(vi) mukaan ja ehdosta (vii) seuraa, että $x \vee y$ on olemassa ja on

$$1 - (1 - x)(1 - y) = x + y + xy,$$

kuten ehdossa (3.39). Myös, jos määrittelemme $x' = 1-x$, niin $x \wedge x' = x(1-x) = 0$ ja $x \vee x' = x + (1 - x) + x(1 - x) = 1$, siten määritelmämme muodostaa joukon R

komplementoiduksi hilaksi. Lopuksi

$$x \wedge (y \vee z) = x(y + z - yz) = xy + xz - xyz$$

$$= xy + xz - xyxz = (x \wedge y) \vee (x \wedge z),$$

ja niin R on Boolen hila.

Millä tahansa Boolen renkaalla $R(B)$ neutraaliakiolla saavutettu Boolen algebrasta B määritelmän (3.35) mukaan, Boolen hila $B(R(B))$ saavutettu raenkaasta $R(B)$ ehdon (3.39) mukaan on isomorfinen Boolen algebran B kanssa.

Stone [34] on määrittänyt Boolen algebran yleistyksen kuin relatiivisen komplementoidun distributiivisen hilan alkiolla O (mutta ei välttämättä alkiolla I) kuten seuraavat esimerkit.

Esimerkki 8. Positiivisten kokonaislukujen joukon $\mathbb{Z}^+ = \omega$ kaikkien äärellisten osajoukkojen hila $2^{(\omega)}$ on yleistys Boolen algebrasta. Vastaava karakteristinen funktio (arvoalueella $\mathbb{Z}_2$) muodostaen Boolen renkaan, joka on joukon $\mathbb{Z}_2$ numeroitavan monen kopion rajoitettu suoran summa (tulo). Huomaa, että $2^{(\omega)}$ on ideaali joukossa 2^ω, joukon ω kaikkien osajoukkojen joukko. Yleistetyssä Boolen algebrassa yhä määritämme $a + b$ ehdon (3.39) mukaan, missä b' ja a' ovat relatiivisia komplementteja joukossa $[O, c]$ kaikilla $c \geqq a \vee b$.

On olemassa myös epäliitännäisiä Boolen renkaita, kuten seuraava esimerkki osoittaa.

Esimerkki 9. Ajatellaan ei liitännäistä lineaarista algebraa R yli kokonaislukujen mod 2 kunnan $\mathbb{Z}_2$ perus alkiolla 1 (neutraalialkio), alkioilla a, b, c ja kertolaskusäännöillä

$$a^2 = a, ab = ba = c \text{ ja syklisesti.} \tag{3.40}$$

Niin $(a + b)^2 = a^2 + 0 + b^2 = a + b$ jne.

3.13 Ortohilat

Lopuksi mietimme Boolen algebran *epädistributiivista (nondistributive)* analogiaa (kuin Boolen hilojen vastakohtana katso Luvun 2 kappale 2.10), jossa unaari *komple-*

menttinen (complementation) operaatio $a \to a^\perp$ on annettu samoin kuin osittain järjestyksessä, jossa mielivaltaisella kahdella alkiolla on suurin alaraja ja pienin yläraja.

Määritelmä. *Ortohila (ortholattice)* on hila yleisillä rajoilla ja unaari operaariolla $a \to a^\perp$ tyydyttäen ehdot:

$$\begin{array}{llcllcl}
\textbf{L8.} & a \wedge a^\perp & = & O, & a \vee a^\perp & = & I, \text{ kaikilla } a \\
\textbf{L9.} & (a^\perp)^\perp & = & a, & & & \\
\textbf{L10.} & (a \wedge b)^\perp & = & a^\perp \vee b^\perp, & (a \vee b)^\perp & = & a^\perp \wedge b^\perp.
\end{array}$$

Triviaalisti mikä tahansa ortohila on komplementoitu ja distributiivinen ortohila on Boolen algebra. Tavallisin epädistributiivinen ortohila on äärellis dimensioisen euklidisen avaruuden osa avaruuksista muodostettu hila (Luvun 2 kappaleen 2.9 Esimerkki 11) on modulaarinen. Nyt kuvaamme erittäin tärkeän epämodulaarisen ortohilan.

Esimerkki 10. Olkoon $L(\mathfrak{H})$ (separoituvan) Hilbert avaruuden $\mathfrak{H} = L^2(0,1)$ kaikkien suljettujen osa avaruuksien muodostama hila. Jokaisella tällaisella suljetulla osa avaruudella S olkoon sen orttogonaalinen komplementti $S^\perp$. Näin L on ortohila.

Määritelmä. Ortohilassa kirjoitamme aCb (sanoin; a kommutoi b:n kanssa), niin $a = (a \wedge b) \vee (a \wedge b^\perp)$.

Lemma 19. *Mielivaltaisessa ortohilassa ehdosta $a \leqq b$ seuraa aCb.*

Todistus. Jos $a \leqq b$, niin $(a \wedge b) \vee (a \wedge b^\perp) = a \vee (a \wedge b^\perp) = a$ supistuslain L4 mukaan.□

Esimerkissä 10 SCT tarokittaa, että E_S ja E_T projektiot osa avaruuksiin S ja T kommutoi: $E_S E_T = E_T E_S$. Tässä esimerkissä siis ehdosta aCb seuraa bCa ja lisäksi ehdosta $a \leqq b$ seuraa aCb.

Teoreema 21. *Mielivaltaisessa ortohilassa L seuraavat kaksi ehtoa ovat ekvivalentit*

[20]:

$$x \leqq y \text{ seuraa } x \vee (x^{\perp} \wedge y) = y \text{ toisin sanoen } yCx \tag{3.41}$$

$$xCy \text{ seuraa } yCx \text{ (vaihdannaisuus on symmetrinen).} \tag{3.42}$$

Ortohila, joka täyttää jomman kumman (tästä lähtien kummankin) edellä esitetyistä ekvivalentti ehdoista (3.41) ja (3.42) sanotaan *ortomodulaariseksi hilaksi (orthomodular lattice).* Ehdon (3.41) mukaan mikä tahansa modulaarinen ortohila on ortomodulaarinen hila. Kääntäen, mielivaltaisessa ortomodulaarisessa hilassa jokainen ortogonaalinen pari on modulaarinen pari, vaikkakin modulaarisuus lain ei tarvitse päteä.

Korollaari. *Mielivaltainen ortomodulaarinen hila on suhteellisesti komplementoitu.*

Teoreema 22 (Foulis-Holland). *Missä tahansa ortomodulaarisessa hilassa L, mielivaltaisella alkiolla $a \in L$, kaikkien alkioiden x siten, että aCx joukko $C(a)$ on osaortohila [14] [8].*

Teoreema 23. *Mielivaltaisessa ortomodulaarisessa hilassa L olkoon aCb ja aCc, niin joukko $\{a, b, c\}$ luo hilan L distributiivisen osahilan.*

Korollaari 1. *Ortomodulaarisessa hilassa L olkoon a_iCa_j kaikilla $a_i \in S$, niin $a_i \in S$ luo Boolen algebran hilan L operaatioilla $\wedge, \vee, a^{\perp}$.*

Korollaari 2. *Mielivaltaisessa ortomodulaarisessa hilassa L mikä tahansa ketju luo hilan L Boolen alialgebran.*

Korollaari 3. *Mielivaltaisessa ortomodulaarisessa hilassa jokainen välin $[a, b]$ osahila on ortomodulaarinen ja suljettu operaatioiden $\wedge, \vee$ ja suhteellisesti komplementoidun operaation $c^* = (a \vee c^{\perp}) \wedge b = a \vee (c^{\perp} \wedge b)$ suhteen.*

4. LOGIIKAN JA TODENNÄKÖISYYDEN SOVELLUKSET

4.1 Boolen isomorfismi

Boolen algebra ja siten myös hilateoria sai alkunsa lähes 200 vuotta sitten kokeilusta, kuten George Boole kirjoittaa:"kokeilusta selvittää fundamentaliset lait operaatioille, joilla päättely on tarkoitus esittää; antaa niille lausekkeet kalkyylin symbolisella kielellä ja pohjaksi osoittaa logiikan tieteellisyys ja konstruoida menetelmä, tehdä itse menetelmästä perusta yleisille menetelmille todennäköisyys laskennan matemaattisissa sovelluksissa [3]."

Boolen oivalsi, että joukot tai luokat muodostavat Boolen algebran operaatioilla leikkaus, joukkounioni ja komplementti. Hän ennusti ([3] s. 42 ja s. 49), että on olemassa yleispätevä luokka siten, että "stones"ja "not stones"in luokat ovat molemmat hyvin määritetyt. Hän oivalsi myös, että tavallisessa puheessa käsitys luokasta on vaihdannainen käsitysten kanssa laatu tai atribuutti ja tämän tiedon nojalla ennusti, että näitä voidaan käyttää keskenään vaihdannaisesti. Täten voimme yhdistää hänen kaksi perusolettamustaan seuraavasti.

BOOLEN ENSIMMÄINEN LAKI. Olkoon atribuutit määritetty kirjaimin; sanat ”ja”, ”tai” ja ”ei” symboolein $\wedge, \vee, '$ ja ”x:stä seuraa y” symboolilla $x \leqq y$. Niin atribuutit muodostavat Boolen algebran.

BOOLEN TOINEN LAKI. Vastaavuus $x \to \hat{x}$ atribuuteista kappaleiden luokkaan aikaan saa, että annettu atribuutti on *isomorfismi (isomorphism)* atribuuttien Boolen algebran ja luokkien Boolen algebran välissä:

$$\widehat{x \wedge y} = \hat{x} \cap \hat{y},\ \widehat{x \vee y} = \hat{x} \cup \hat{y},\ \widehat{(x')} = (\hat{x})'. \tag{4.1}$$

Boolen osoitti, että tärkeä osa atribuuttien ja luokkien kombinaatiologiikkaa voidaan johtaa algebrallisesti edellä esitetyistä faktoista. On mielenkiintoista havaita, että käänteinen tulos, että jokainen Boolen algebra on isomorfinen luokkien algebralle ("joukkojen kunta") oli todistettu vasta 1933 ja todistus edellytti valinta-aksioomaa.

Itseasiassa Boolen ei ajatellut edellä esitettyjä lakeja logiikan oletuksina, eikä liioin ajatellut niitä joukkoteorian tai algebrallisen systeemien muodostamien luokkien postulaatteina. Sen sijaan hän tarkateli niitä kuin ihmisajatusten tieteellisenä sääntönä ja hän tarkasteli Boolen algebraa työväliineenä, jota voidaan soveltaa loogisten ongelmien ratkaisemiseen.

Kysymys lakien mahdollisesta epäjohdonmukaisuudesta ilmiselvästi ei tuntunut häiritsevän häntä. Kuitenkin nykyisin yleisesti tiedetään, että ne liittyvät seuraavaan Cantorin paradoksiin, joka ratkaistiin lähes viisikymmentä vuotta Boolen kuoleman jälkeen. Olkoon A kaikkien atribuuttien oletettu "universaali luokka", missä jokainen atribuuttien joukko $S \subset A$. Voimme järjestää kaikkien (todellisten tai keksittyjen) objektien luokan sisältäen joukon S atribuutteja; tämä antaa $2^{n(A)}$ luokkia missä $n(A)$ on luokan A kardinaliteetti. Käänteisesti, olkoon U kaikkien objektien oletettu "universaali luokka". Jokaisen osaluokan $X \subset U$ voimme järjestää niin, että atribuutit ovat osaluokan X alkioita. Tämä antaa $2^{n(U)}$ eri atribuutein. Tästä seuraa

$$n(U) \geqq 2^{n(A)} \text{ ja } n(A) \geqq 2^{n(U)}, \tag{4.2}$$

on ristiriidassa hyvin tunnetun Cantorin teoreeman kanssa.

Esitetty paradoksi kuvaa vielä kerran epätietoisuutta, joka kiusaa äärettömien joukkojen teoriaa. Tämän kappaleen tarkoitus ei ole käsitellä tätä epätietoisuutta enempää vaan antaa lyhyt katsaus Boolen algebran ja hilateorian sovelluksiin, joita on tehty sen jälkeen, kun Boole on kirjoittanut oman kirjansa.

4.2 Lause kalkyyli; kritiikki

Boolen algebra soveltaa myös lauseita ([3]Luku XI). Täten mielivaltaiset kaksi propositiota P ja Q ja niiden lauseet voidaan merkitä "P ja Q", "P tai Q" ja "ei P" symboolein $P \wedge Q$, $P \vee Q$ ja P' noudattaen yleisiä tulkintoja.

BOOLEN KOLMAS LAKI. Lauseet muodostavat Boolen algebran. Boolen algebran sovellukset ehkä muodostivat lausekalkyylin samoin kuin ne, jotka on kuvattu Luvun 2 lopussa. Yhteenlaskussa, (kaksiarvoisessa) logiikassa kaikki lauseet ovat joko tosia tai epätosia eivät koskaan molempia. Lisäksi $P \wedge Q$ on tosi jos ja vain jos P ja Q ovat molemmat tosia; $P \vee Q$ on tosi, jos P tai Q on tosi; P ja P', kun toinen on tosi, niin toinen on epätosi. Tästä saamme

BOOLEN NELJÄS LAKI. Tosi lause muodostaa (asianmukaisen) *dualisen jaottoman ideaalin (dual prime ideal)* Boolen algebrassa kaikilla propositioilla: komplementti jaoton ideaali muodostuu epätosi lauseista.

Näiden oletusten valossa yhdistetty lause "P:sta seuraa Q" (toisin sanoen "jos P, niin Q"), joka merkitään $P \to Q$ omaa erityismerkityksen. Se on tosi tai epätosisen sen mukaan onko "Q tai ei P" tosi vai epätosi. Siten voidaan tulkita $P \to Q$ kuin $P' \vee Q$, näin vähennetään määrittämättömien operaatioiden määrää loogisessa algebrassa.

Kaksiarvoisessa logiikassa voidaan samoin symboloida lausetta "P on ekvivalentti Q:n kanssa" merkein $P \sim Q$ ja korvata se lauseella "P:sta seuraa Q ja Q:sta seuraa P" toisin sanoen symmetrisen vastakohtaisuus operaation kanssa $(P' \vee Q) \wedge (Q' \vee P) = (P+Q)'$ eli komplementoitu Boolen renkaan yhteenlasku (Luvun 3 kappaleessa 3.12).

Voidaan myös osoittaa, että monet yhdistetyt propositiot P ovat "tautologisia". Tämä on tosi vain niiden loogisen rakenteensa vuoksi. Algebrallisesti summaten tämä tarkoittaa, että $P \to I$. Yksinkertaisin tautologia on $P \vee P'$, ("P tai ei P"). Boolen algebrassa on helppo osittaa, että seuraavat lauseet ovat myös tautologisia kaksiarvo logiikalla:

$$O \to P, P \to I, P \to P, P \sim P, P \to (Q \to P), (P \sim Q) \sim (Q \sim P),$$
$$(P \sim O) \vee (P \sim I), (P \sim Q) \vee (Q \to P). \tag{4.3}$$

Toisaalata voidaan nostaa monia intuitiviisia vastaväitteitä esittämään loogisia sääntöjä aina äärimmäisyyksiin asti. Näin tautologia $O \to P$ lauseessa (4.3) väittää, että "epätodesta propositiosta seuraa kaikki propositiot", mutta mitä tämä oikein tarkoittaa. Proposition O negaatio O' on aina tosi, näin $O \to P$ on aina tosi. Samoin voidaan kyseenalaistaa tautologian $(P \to Q) \vee (Q \to P)$ oikeellisuus, joka väittää, että "millä tahansa kahdella propositiolla P ja Q, joko P:sta seuraa Q tai Q:sta seuraa P".

Voidaa aavistella ja epäillä myös ristiriitatodistuksen oikeellisuutta. Miksi pitäisi "ei P:n" ristiriitatodistuksesta seurata tosi P? Tällainen negatiivinen todistus näyttää erityisen heikolta, kun P vakuuttaa annetuin ominaisuuksin olevan numeroituva ja voidaan todistaa, että "ei P" on itse ristiriitainen, mutta ei voida kuitenkaan rakentaa esimerkkiä numerosta, jolla olisi annetut ominaisuudet.

Sen sijaan on helppo rakentaa looginen systeemi, missä on ratkaisemattomia propositioita. Itse asiassa Skolem ja Gödel [12] ovat rakentaneet vakuuttavan ja johdonmukaisen loogisen systeemin, jossa esiintyy ratkaisemattomia propositioita liittyen luonnollisiin kokonaislukuihin. Kuitenkin oikeassa oleva todistus edellyttää korjatun loogisen systeemin hyväksymisen, mukaan lukien Zermelo-Freankelin joukkoteorian aksioomat. Birkhoffin mielipide on, että hyvän mielikuvituksen omaavat matemaatikot, kuten Cantor, kehittelevät aavistuksia ja jopa fysikaalisia analogeja ja voivat keksiä uusia loogisia algoritmejä, jotka voivat ratkaista kysymyksiä, joita ennen pidettiin ratkaisemattomina. Tämä huomio soveltuu myös "epämääräisille hypoteeseille." Se vaikuttaa hyvin asiaankuuluvalta, koska standardit loogiset systeemit itse sisältävät numeroituvat totuudet, kun taas vaikeimmat matemaattiset kysymykset koskevat kaikkien reaalilukujen joukkoa, *kontinuumia (continuum).*

Oli miten oli, tämänhetkinen näkemys näyttää suosivan ajatusta, että on monia aidosti ratkaisemattomia propositioita, joiden totuus voidaan johdonmukaisesti joko myöntää tai kiistää.

4.3 Brouwerian ja modaalilogiikat

Kuten jo todettiin Boole-Whiteheadin propositionaali kalkyyli soveltuu kaksiarvoiselle logiikalle, jossa jokaisen proposition oletetaan olevan osoitettu todeksi tai epätodeksi. Algebran kielellä se vakuuttaa "kaikkien" **2**:n propositioiden Boolen algebran *epimorfismin (epimorphism)* olemassaolon. Kuitenkin moniarvologiikat (niin kutsutut "modaalilogiikat") palaavat takaisin muinaisiin aikoihin. Tämä aristotelilainen logiikka tunnustaa neljä tilaa: välttämättömyys, riippuvuus, mahdollisuus ja mahdottomuus.

Lukasiewicz ja Tarski [19] sekä Post [24] ovat esittäneet varsin moderneja algebrallisia systeemejä kuvaamaan propositionaali kalkyylia.

Ei ole vaikeaa luoda keskustelua näistä asioista. Keskustelujen pääkysymys liittyy laajuuteen, mikä on aito (yksiarvoinen) epimorfismi Boolen algebran "kaikkien" proposition esitetyn algebran totuusalueella. (Lukasiewicz ja Tarski esittävät täksi väliä $[0, 1]$, kun taas Post esittää kokonaislukujen väliä $0, \ldots, n-1$ $(n > 2)$.) Tämä vaikeus tulee ilmeiseksi, kun tarkastellaan todennäköisyyden ominaisuuksia (katso kappale 4.4): luonnolliset funktiot (todennäköisyyden mitat) propositioille välillä $[0, 1]$ eivät ole epimorfisia operaatioilla $\wedge, \vee$, tai $\rightarrow$, vaikka ovat operaatiolla $'$, koska $p[x'] = 1 - p[x]$.

Antoisampi muunnos kaksiarvoiselle logiikalle on tapa, jossa ristiriita todistuksen voimassaolo ei ole oletettu, jonka on keksinyt Luitzen Egbertus Jan Brouwer. Brouwerin propositionaalisessa kalkyylissa vaikkakin implikaatio $P \rightarrow (P')$ sallitaan, niin implikaatiota $(P') \rightarrow P$ ei sallita. Tämän takia merkitään "ei$X$" Brouwerian logiikassa $P*$, P' tilalla.

Stone [33] ja Tarski [36] oivalsivat, että on suljettu analogia Brouwerin logiikan ja topologisen avaruuden avointen joukkojen distributiivisen hilan välillä. Kuitenkin erityinen korrelaatio "Brouwerian hilojen" (Luku 3 kappale 3.11) kanssa näyttää ensimmäisenä loppunkäsitelty tämän kirjan ensimmäisessä painoksesa. Missä relatiivinen "pseudokomplementti" tai "residuaali" $A : P$ esiintyy kuin implikaation operaatio $P \rightarrow Q$, joka on ekvivalentti operaatiolle $P' \vee Q$ Boolen algebrassa. Yhteys on silloin muodostettu seuraavasti.

Määritelmä. *Brouwerian logiikka (Brouwerian logic)* on lausekalkyyli, joka on hila rajoilla O ja I, siten

B1. $(P \rightarrow Q) = I$ jos ja vain jos $P \leqq Q$,

B2. $P \rightarrow (Q \rightarrow R) = (P \vee Q) \rightarrow R$ kaikilla P, Q, R.

Lause $P \rightarrow O$ on merkitty P^* ("ei P") ja relaatio $P = I$ ("P on tosi") on merkitty $\vdash P$. (Siten B1. on ekvivalentti merkinnän $\vdash (P \rightarrow Q)$ kanssa, jos ja vain jos $P \leqq Q$).

Teoreema 1. *Brouwerian logiikka L on Brouwerian hila. jossa operaatio $Q : P$ merkitään $P \rightarrow Q$.*

Todistus. Ehdon B1. mukaan $t \leqq (x \to y)$ ja $\vdash t \to (x \to y)$ sekä ehdon B2. mukaan myös $\vdash (t \to x) \to y$ ovat ekvivalentteja, samoin taas ehdon B1. mukaan $t \leqq (x \to y)$ ja $t \wedge x \leqq y$ ovat ekvivalentteja. Summaten, $t \wedge x \leqq y$ jos ja vain jos $t \leqq (x \to y)$, täten $x \to y = y : x$. Koska $x \to y$ on olemassa kaikilla $x, y \in L$ hypoteesin mukaan, siitä seuraa, että mikä tahansa Brouwerian logiikka on Brouwerian hila.

On mielenkiintoista nähdä kuinka ehdoista B1.-B2. seuraa, että L on distributiivinen hila. Luvun 2. kappaleen 2.5 ehtojen (2.8)-(2.9) ja Teoreeman 9. mukaan riittää todistaa, että $x \wedge (y \vee z) \leqq u$, missä u tarkoittaa $(x \wedge y) \vee (x \wedge z)$. Triviaalisti $x \wedge y \leqq u$ ja $x \wedge z \leqq u$ eli siis hypoteesin mukaan $y \leqq x \to u = u : x$ ja $z \leqq x \to u$. Tästä seuraa, että $y \vee z \leqq x \to u$, siten $x \wedge (y \vee z) \leqq u$. □

4.4 Klassinen todennäköisyys

Kuten logiikka, todennäköisyyslaskennan teoria toteutuu kyseenalaisin filosofisin perustein. Yleisin matemaatikkojen hyväksymä lähtökohta on seuraava.

Määritelmä. *Todennäköisyys on joidenkin Borel algebran atribuuttien todennäköisyyden mitta.*

Loomisin teorian mukaan mikä tahansa sellainen Borel algebra voidaan ymmärtää modulo σ-ideaaliien muodostamien joukkojen σ-kuntana; annetun todennäköisyyden mitan Lebesgue laajennus voidaan siis olettaa määritetyn joukkojen σ-kuntana. Useimmissa teksteissä näin on.

Osaltaan äärelliset todennäköisyyden algebrat voidaan selittää edellä esitetyn määritelmän mukaan hyvin helposti käyttämällä representaatio teoreemaa. Voidaan nimittäin esittää mikä tahansa äärellinen todennäköisyyden algebra sopivilla alkeisjoukoilla, jotka edustavat kutakin ydin atribuuttia α (pienin mahdollinen sopiva), *ruletti renkaan (roulette wheel)* sektorilla $S(\alpha)$, joka on kulman $2\pi p[\alpha]$ vastakkainen kulma radiaaneina. Todennäköisyys, että renkaan pyöriminen pysähtyy niin, että nuoli osoittaa sektorin $S(\alpha)$ vastakkaiselle puolelle on silloin $p[\alpha]$.

Filosofinen perusongelma koskee edellä esitetyn määritemän yhtenäisyyttä yksinkertaisimman tilastomatematiikan määritelmän todennäköisyyden kuten frekvenssin kanssa.

Esimerkki 1. Muodostukoon todistettava testi E satunnaisesti valituista pisteistä yksikköympyrällä $\mathbb{R}/(2\pi)$ ja olkoon se suoritettu (numeroituvalla) aikojen jaksolla. Annetulla Borel osajoukolla $S \subset E$ tarkoittakoon $p_n[S]$ ensimmäisten kokeiden n, muodostuen testin E pisteistä, murto-osaa. Olkoon $p_\infty = \mathrm{Lim}_{n\to\infty} p_n[S]$, niin raja-arvo on olemassa. Täten kaikilla sovituilla osajoukoilla $S \subset E$ on olemassa $p_\infty[S]$ ja on yhtä suuri $[S]/2\pi$ kanssa apriorinsella todennäköisyydellä yksi suurten lukujen lakien mukaan.

Valitettavasti, mikään annetuista testeissä muodostuneista jonoista, selvästi myöskään $p_\infty[S]$ ei ole numeroituvasti yhteenlaskettava (vain äärellisesti yhteenlaskettava), edes määritettynä. Lisäksi triviaalisti esiintyy (numeroituva) osajoukko S_e alkioilla $m[S_e] = 0$ ja $p_\infty[S] = 1$.

Onneksi nämä selvät epäjohdonmukaisuudet voidaan ratkaista käyttämällä separoituvan tavallisen todennäköisyyden mitan konseptia. Nimittäin järjestämällä apriorisen numeroituvan avoimista joukoista muodostunut kanta (tai osakanta) - lausumalla kaikkien suljetun välin $[\alpha, \beta]$ alkioiden joukko rationaalisilla päätepisteillä. Siten apriorisella todennäköisyydellä yksi, $p_\infty[C] = m[C]/2\pi = (\beta - \alpha)/2\pi$ kaikilla $C \in \mathscr{C}$. (Tämä todennäköisyys viittaa "tulomittaan" kaikkien koe jonojen avaruudessa.)

Sen lisäksi Borel osa-algebra aikaansaatiin joukolla $C \in \mathscr{C}$ sisältäen kaikki ympyrän $\mathbb{R}/(2\pi)$ Borel-osajoukot. Edelleen aposteriorinen todennäköisyys $p_\infty[C] = m[C]/2\pi$ voi ulottua todennäköisyyden mittaan tässä Borel algebrassa vain yhdellä tavalla, Borel kombinaatiolla. Tämän *Lebesgue täydellistymä (Lebesgue completion)* antaa yleisen tavallisen todennäköisyyden mitan $\mathbb{R}/(2\pi)$. Lopuksi, edellistä rakennetta voidaan soveltaa mihinkä tahansa topologiseen avaruuteen X, jolla on numeroituva Borel-joukkojen Borelin perhe. Seuraavat teoreema ja korollaari antavat lopullisen päätelmän.

Teoreema 2. *Olkoon p mielivaltainen tavallinen todennäköisyyden mitta topologisessa avaruudessa X standardi Borel rakenteella. Olkoon $\mathscr{C}$ mikä tahansa Borel joukkojen $C_k \subset X$ muodostama numeroituva Boolen osa-algebra, joka luo Borel algebran*

$\mathscr{B}$ muodostuen avaruuden X kaikista Borel-joukoista. Siten $p_\infty[C_k]$ on joukkojen C_k apriorinen todennäköisyys lähes kaikille itsenäisten kokeiden jonoille, toisin sanoen todennäköisyydellä yksi tulomitassa tuloavaruudessa X.

Korollaari. *Borel laajennuksen p_∞ osa-algebrasta $\mathscr{C}$ algebraan $\mathscr{B}$ Lebesgue täydellistymä on todennäköisyys ja antaa todennäköisyyden mitan p apriorisella todennäköisyydellä yksi.*

5. YHTEENVETO

Tässä diplomityössä tutustuttiin Garrett Birkhoffin Lattice Theory kirjan hilateorian perusteisiin ja joihinkin Boolen algebran logiikoihin. Hilat ovat järjestettyjä, rajoitettuja joukkoja. Niinpä ensiksi määriteltiin osittain järjestetyt joukot ja sitä kautta päästiin hilan käsitteeseen. Hiloja voidaan kuvata diagrammeilla, niistä muutamia esimerkkejä Luvussa 2. Samassa luvussa määritettiin modulaariset hilat. Kaikki hilat eivät ole modulaarisia, vaan niiden pitää täyttää modulaarisuusehto.

Luvussa 3 esitettiin algebralliset aksiomaat eli tietyt ehdot esim. esijärjestykselle, distributiivisuudelle ja ortohiloille. Tässä luvussa kuvatiin Boolen algebran muodostamat Boolen hilat, Boolen renkaat ja ortohilat. Luku 4 käsitteli Boolen algebran kaksiarvo logiikan muotoja kuten Brouwerian ja modaalit logiikat. Lopuksi käsiteltiin vielä todennäköisyyttä Borel algebran avulla.

Tämän diplomityön tarkoituksena on antaa pohja hilateorioiden perusteiden ymmärtämiseen ja siten ymmärtämys erilaisten järjestettyjen joukkojen moniin muotoihin ja sovelluksiin.

LÄHTEET

[1] G. Birkhoff, Lattice Theory, 3rd ed. Providence, RI: Amer. Math. Soc. (1967).

[2] G. Birkhoff, On the combination of subalgebras, Proc. Cambridge Philos. Soc. 29 (1933), 441-464.

[3] G. Boole, An investigation into the laws of thought, London (1854). Saatavilla: `https://archive.org/details/investigationofl00boolrich`

[4] J. R. Büchi, Die Boole'sche Partialordnung und die Paarung von Gefügen, Portugal. Math. 7 (1948), 119-178.

[5] R. Dedekind, Über Zerlegungen von Zahlen durch ihre grössten gemeinsamen Teiler, Festschrift Techn. Hoch. Branuschweig (1897) Vol. 2, 103-148.

[6] R. Dedekind, Über die von drei Moduln erzeugte Dualgrouppe, Math. Anu. 53 (1900), 371-403.

[7] R. P. Dilworth and Peter Crawley, Deromposition theory for lattices without chain condition, Trans. AMS 96 (1960), 1-22. Saatavilla: `http://www.ams.org/journals/tran/1960-096-01/S0002-9947-1960-0118690-9/S0002-9947-1960-0118690-9.pdf`

[8] D. J. Foulis, A note on orthomodular lattices, Portugal. Math. 21 (1962), 65-72.

[9] O. Frink, Pseudo-complements in semi-lattices, Duke Math. J. 29 (1962) 505-514.

[10] V. Glivenko, Contribution a L'Etude des Systemes de Choses Normees, Amer. J. Math. 59 (1937), 941-956.

[11] V. Glivenko, Geometrie Des Systemes De Choses Normees, Amer. J. Math. 58 (1936), 799-828.

[12] K. Gödel, Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I, Monatsh. Math. Phys. 38 (1931), 173-198. Saatavilla: `http://link.springer.com/article/10.1007%2FBF01700692`

[13] D. Hilbert, Grundlagen der Geometrie, 7th ed. (1903), 5. Saatavilla: `https://archive.org/details/grunddergeovon00hilbrich`

[14] S. S. Holland, JR., Randon-Nikodym theorem for dimension lattices, Trans. ASMS 108 (1963), 66-87.

[15] E. V. Huntington, New sets of independent postulates for the algebra of logic, with special reference to Whitehead and Russell's Principia Mathematica, Trans, AMS 35 (1933), 274-304. Saatavilla: http://www.ams.org/journals/tran/1933-035-01/S0002-9947-1933-1501684-X/S0002-9947-1933-1501684-X.pdf

[16] E. V. Huntington, Sets of independent postulates for algebra of logic, Trans. AMS 5 (1904), 288-309. Saatavilla: http://www.jstor.org/stable/1986459?seq=1#page_scan_tab_contents

[17] L. M. Kelly, The geometry of normed lattices, Duke Math. J. 19 (1952), 661-669.

[18] M. Kolibiar, On the axiomatics of modular lattices, Czechoslovak Math. J. 6 (81) (1956), 381-386.

[19] J. Lukasiewicz and A. Tarski, Untersuchungen über den Aussagenkalkül, C. R. Soc. Sci. Lett. Varsovie III 23 (1930), 30-50.

[20] M. Nakamura, The Permutability in a Cartain Orthocomplemented Lattice, Kodai Math. Sem. Rep. 9 (1957), 158-160.

[21] O. Ore, Chains in partially ordered sets, Bull. AMS 49 (1943), 558-566. Saatavilla: http://www.ams.org/journals/bull/1943-49-08/S0002-9904-1943-07970-0/S0002-9904-1943-07970-0.pdf

[22] O. Ore, On the foundations of abstract algebra, I, Ann. of Math. 36 (1935), 406-437.

[23] C. S. Peirce, On the algebra of logic, Amer. J. Math. 3 (1880), 15-57. Saatavilla: http://www.jstor.org/stable/2369451?seq=1#page_scan_tab_contents

[24] E. Post, Introduction to a General Theory of Elementary Propositions, Amer. J. Math. 43 (1921), 163-185. Saatavilla: http://www.jstor.org/stable/2370324?origin=crossref&seq=1#page_scan_tab_contents

[25] J. Riecan, To the axiomatics of modular lattices (in Slovak), Acta Fac. Natur. Univ. Comenian 2 (1958), 257-262.

[26] E. Schröder, Algebra der Logik, 3 vols. Leipzig, (1890-1895). Saatavilla: http://gdz.sub.uni-goettingen.de/dms/load/img/?PPN=PPN717195317

[27] H. M. Sheffer, A set of five independent postulates for Boolean algebras with application to logical constans, Trans. AMS 14 (1913), 481-488.

[28] M. Sholander, Medians and betweenness, Proc AMS 5 (1954), 801-812. http://www.ams.org/journals/proc/1954-005-05/S0002-9939-1954-0064749-7/S0002-9939-1954-0064749-7.pdf

[29] M. Sholander, Postulates for distributive lattices, Canad. J. Math. vol. 3, no 1 (1951), 28-30.

[30] M. Sholander, Trees, lattices, order, and betweenness, Proc AMS 3 (1952), 369-381. Saatavilla: http://www.ams.org/journals/proc/1952-003-03/S0002-9939-1952-0048405-5/S0002-9939-1952-0048405-5.pdf

[31] M. H. Stone, Boolean Algebras and Their Application to Topology, Proc. Natl. Acad. Sci. USA 20 (1934), 197-202. Saatavilla: https://www.ncbi.nlm.nih.gov/pmc/articles/PMC1076376/?page=1

[32] M. H. Stone, Subsumption of the Theory of Boolean Algebras under the Theory of Rings, USA 21 (1935), 103-105. Saatavilla: http://www.ncbi.nlm.nih.gov/pmc/articles/PMC1076539/?page=1

[33] M. H. Stone, Topological representations of distributive lattices and Brouwerian logics, Cas. Mat. Fys. 67 (1937), 1-25. Saatavilla: http://dml.cz/bitstream/handle/10338.dmlcz/124080/CasPestMatFys_067-1938-1_1.pdf

[34] M. H. Stone, The theory of representations for Boolean algebras, Trans. AMS 40 (1936), 37-111. Saatavilla: http://www.ams.org/journals/tran/1936-040-01/S0002-9947-1936-1501865-8/S0002-9947-1936-1501865-8.pdf

[35] G. Szasz, Introduction to lattice theory, 3d ed. Academic Press and Akademiai Kiado (1963).

[36] A. Tarski, Der Aussagenkalkül und die Topologie, Fund, Math. 31 (1938), 103-134.

[37] A. Tarski, Sur les d'ensembles classes closes par rapport à certaines opérations élémentaires, Fund. Math. 16 (1920), 181-305. Saatavilla: `http://matwbn.icm.edu.pl/ksiazki/fm/fm16/fm16118.pdf`

[38] A. Tarski, Zur Grundlegung der Boole'schen Algebra, I, ibid. 24 (1935), 177-198. Saatavilla: `http://matwbn.icm.edu.pl/ksiazki/fm/fm24/fm24119.pdf`