



TAMPEREEN TEKNILLINEN YLIOPISTO

JANI HAUTAMÄKI

**HÄIRIÖTÖN RATALIIKE SATELLIITNAVIGOINTIJÄRJESTEL-
MÄSSÄ**

Diplomityö

Tarkastajat: prof. Jarmo Takala
Tkt Jussi Collin
Tarkastaja ja aihe hyväksytty
Tieto- ja sähkötekniikan tiedekunta-
neuvoston kokouksessa 7. kesäkuu-
ta 2006

TIIVISTELMÄ

TAMPEREEN TEKNILLINEN YLIOPISTO

Tietotekniikan koulutusohjelma

HAUTAMÄKI, JANI: Häiriötön rataliike satelliittinavigointijärjestelmässä

Diplomityö, 181 sivua, 11 liitesivua

Toukokuu 2016

Pääaine: Ohjelmistotiede

Tarkastajat: prof. Jarmo Takala ja TKT Jussi Collin

Avainsanat: taivaanmekaniikka, Newtonin painovoimalaki, kahden kappaleen ongelma, Keplerin ongelma, kartioleikkaukset, ellipsi, rataelementit, ratageometria, rataliike, GPS, navigointiviesti

Työssä selvitetään satelliittinavigointijärjestelmän Global Positioning System (GPS) vanhemman navigointiviestin mukaisen ratamallin yhtälöiden teoreettinen tausta. Aiheen laajuuden vuoksi selvitys tehdään ainoastaan häiriöttömän rataliikkeen osalta.

Työ esittelee ja ratkaisee Keplerin ongelman, joka on kahden kappaleen ongelman erikoistapaus. Keplerin ongelman ratkaisu eli Keplerin liike tarjoaa ideaalin häiriöttömälle rataliikkeelle sekä lähtökohdan häiritylle rataliikkeelle. Häiriöttömän rataliikkeen keskeiset yhtälöt kootaan kolmeksi algoritmiksi, jotka osoittavat tilavektorin, integroimisvakioiden ja Keplerin rataelementtien yhdenvertaisuuden ellipsiradan tapauksessa. Työn tuloksena on kytkentä GPS:n vanhemman navigointiviestin mukaisen ratamallin yhtälöiden ja häiriöttömän rataliikkeen yhtälöiden välillä niiltä osin kuin se on mahdollista.

Häiriöttömän rataliikkeen teorian avulla työ kykenee perustelemaan GPS:n vanhemman navigointiviestin ratamallin yhtälöistä $9/17$. Vastaavasti ratamallin yhtälöistä $8/17$ ei ole perusteltavissa tämän työn puitteissa. Yhtälöt, joita ei tämän työn puitteissa voida perustella, edellyttävät vähintään häirityn rataliikkeen teoriaa.

Työssä kuitenkin ilmeni, että viime kädessä GPS:n vanhemman navigointiviestin ratamalli on kokeellisesti muodostettu. Näin ollen sen yhtälöitä ei voida perustella kokonaan, ei ainakaan klassisella Maan keinotekoisten satelliittien ensimmäisen kertaluvun gravitaatiollisella teorialla, joka on GPS:n tapauksessa keskeisin häirityn rataliikkeen teoria.

ABSTRACT

TAMPERE UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

Master's Degree Programme in Information Technology

HAUTAMÄKI, JANI: Unperturbed orbital motion within a satellite navigation system

Master of Science Thesis, 181 pages, 11 appendix pages

May 2016

Major: Computer Science

Examiners: Prof. Jarmo Takala, Dr. Jussi Collin

Keywords: celestial mechanics, Newton's law of universal gravitation, two-body problem, Kepler's problem, conic sections, ellipse, orbital elements, orbital geometry, orbital motion, GPS, broadcast ephemeris

This study attempts to explain the theoretical background of the equations in the broadcast ephemeris model as specified by Global Positioning System (GPS) legacy navigation message. The scope is restricted to consider only the theory of unperturbed orbital motion.

The study introduces and solves Kepler's problem, which is a special case of the two-body problem. The solution to Kepler's problem is Keplerian motion which provides an ideal model for unperturbed orbital motion, and a good reference model for perturbed orbital motion. The relevant equations of the unperturbed orbital motion are compiled into three algorithms. These three algorithms demonstrate the equivalence of the state vector, the integration constants, and the Keplerian orbital elements, in the elliptic orbit's case. The result of the study is a binding between the equations of GPS legacy navigation message's broadcast ephemeris model and unperturbed orbital motion in such cases where it is possible.

With the theory of unperturbed orbital motion, the study is able to explain 8/17 equations of the ephemeris model. Consequently, the study is unable to explain 9/17 equations of the ephemeris model. Theory of perturbed orbital motion is needed at least to explain the remaining equations.

However, this study found that ultimately the broadcast ephemeris model is experimentally established. Consequently, the equations cannot be explained thoroughly, at least not by the classical first-order gravitational theory for artificial Earth satellites, which, for GPS, is the most relevant theory of perturbed orbital motion.

ALKUSANAT

Tämän opinnäytetyön kirjoittaminen alkoi virallisesti vuonna 2006, jolloin aihe hyväksyttiin tiedekuntaneuvoston kokouksessa. Suurin osa tässä työssä nähtävästä materiaalista on peräisin aikaisintaan kesältä 2010, jolloin diplomityöprojekti koki uudelleenkäynnistymisen. Tämän jälkeen työn kirjoittaminen jatkui satunnaisprojektina muutamina kesinä. Vauhtiinsa opinnäytetyön tekeminen pääsi vasta alkuvuodesta 2014, jolloin tekijä koki tärkeitä oivalluksia Keplerin ongelman suhteen. Työn tekeminen jatkui tämän jälkeen intensiivisesti aina vuoden 2015 kesän loppuun asti. Tämän jälkeen työhön ei tehty enää merkittäviä muutoksia.

Maaliskuussa 2014 allekirjoittaneesta tuli isä ihastuttavalle tytölle (Linnea). Sen jälkeen opinnäytetyön kirjoittaminen tapahtui pääasiassa arkipäivisin kello 06–08 välisenä aikana päivätyön ohessa ja toisinaan myös viikonloppuisin, jolloin aamuiset kirjoitushetket saattoivat jatkua jopa kello 10–11 asti.

Vaikka tämän opinnäytetyön kirjoittaminen kesti todella pitkään, ovat useimmat tämän työn parissa vietetyistä hetkistä olleet nautinnollisia. Työ on edellyttänyt huomattavat määrät itsenäistä opiskelua ja lähdemateriaalin lukemista, mikä vuorostaan on ollut varsin mielenkiintoista ja tarjonnut riittävästi sekä älyllistä haastetta että tyydytystä. Huolimatta siitä, että tämän opinnäytetyön tekeminen vei ylettömästi aikaa (virallisesti melkein 10 vuotta), on lopputuloksena kuitenkin teos, joka ongelmistaan huolimatta on kaiken siihen nähdyn vaivan arvoinen.

Työtä tarkastivat ja kommentoivat aikajärjestyksessä professorit Ilkka Haikala (vuosina 2006–2010), Kai Koskimies (vuosina 2011–2014), Kari Systä (vuonna 2014) ja lopulta (vuosina 2014–2016) professori Jarmo Takala ja tekniikan tohtori Jussi Collin. Kiitokset kuuluvat kaikille tarkastukseen osallistuneille, joiden antamat palautteet ovat vaikuttaneet työn lopulliseen muotoon. Hyvin lämpimät muistot allekirjoittaneelle jäivät edesmenneen Ilkka Haikalan kanssa käydyistä diplomityöpalavereista, jotka olivat todella kannustavia ja motivoivia.

Kiitoksen ansaitsevat myös kaikki ystävät ja läheiset, joiden tuen ja kannustuksen ansiosta työ valmistui. Suurimmat kiitokset kuuluvat perheelleni Satulle ja Linnealle sekä vanhemmilleni. Erityisesti vanhempieni pyyteetön rakkaus, tuki ja ymmärrys ovat olleet minulle tärkeämpiä kuin mitä sanoin voi kuvailla.

Tampereella, 18.4.2016

Jani Hautamäki

SISÄLLYS

1	Johdanto	1
1.1	Työn tavoite	1
1.2	Työn uutuusarvo	4
1.3	Työn relevanssi	5
1.4	Työn kirjoitustyyli.....	5
1.5	Työn rakenne.....	7
2	Ellipsi	9
2.1	Kartiroleikkaukset	9
2.2	Ellipsi	13
2.3	Eksentrisyys ja litistyneisyys	16
2.4	Semi-latus rectum.....	22
2.5	Urapisteen määrittäminen kulmalla	23
2.6	Eksentrisen kulma.....	24
2.7	Sentraalikulma ja fokaalikulma.....	27
2.8	Yhtälöt fokaalikulman ja eksentrisen kulman välillä.....	37
2.9	Sektoriaalinen kulma.....	41
2.10	Hyperbeli lyhyesti	46
3	Keplerin ongelma	51
3.1	Newtonin painovoimalaki	51
3.2	Keplerin ongelma	54
3.3	Liiketyhtälöt	57
4	Integrointi	62
4.1	Ratkaisuperiaatteet	62
4.2	Integraali 1 (pyörimismäärävektori)	66
4.3	Integraali 2 (eksentrisyysvektori).....	67
4.4	Integraali 3 (energia)	70
4.5	Liiketyhtälön esitys sylinterikoordinaatistossa	73
4.6	Integraali 4 (pintanopeus)	86
4.7	Integraali 5 (eksentrisyys ja perisentrikulma).....	87
4.8	Integraali 6 (perisentriaika)	91
4.9	Todistus: integraali 6.....	95
5	Ratkaisun yksilöinti ja Keplerin lait.....	106
5.1	Ratkaisukäyrän yksilöinti.....	106
5.2	Integraalien analysointia	111
5.3	Keplerin lait.....	118
6	Ratageometria	121
6.1	Peruskäsitteet.....	122
6.2	Radan asento	129
6.3	Koordinaattimuunnosten matriisit.....	134
6.4	Sijainti radalla	137

6.5	Ekvaattori- ja ympyrärata.....	142
6.6	Pyörivä keskuskappale	143
7	Häiriötön rataliike	147
7.1	Peruskäsitteitä	147
7.2	Keplerin ongelman ratkaisu	150
7.3	Matemaattinen malli (ellipsin tapauksessa)	155
7.4	Algoritmit.....	156
8	GPS-satelliitin rataliike	163
8.1	Peruskäsitteitä	163
8.2	GPS-satelliitin rataliike navigointiviestin mukaan	166
8.3	Algoritmin tarkastelu	173
8.4	Häiritty rataliike: suuntaviivoja	174
9	Yhteenveto ja loppusanat	176
	Lähdeluettelo.....	177
	Liite A: Trigonometrisia identiteettejä.....	182
	Liite B: Luonnollinen ja eksentrisen anomalia.....	184
	Liite C: Nopeusvektori ja derivaatat ajan suhteen	187

LYHENTEET JA MERKINNÄT

a	ellipsin isoakselin puolikas, hyperbelin poikittaisakselin puolikas
b	ellipsin pikkuakselin puolikas, hyperbelin liittoakselin puolikas
e	kartioleikkauksen, yleensä ellipsin, eksentrisyys
ε	kartioleikkauksen eksentrisyys
\mathbf{e}	eksentrisyysvektori, integroimisvakio
E	eksentriinen kulma, eksentriinen anomalia
f	ellipsin litistyneisyys
F	hyperbolinen kulma
G	gravitaatiovakio
\mathbf{h}	pyörimismäärävektori, integroimisvakio
i	inklinaatio
ν	fokaalikulma, luonnollinen anomalia
M	sektoriaalinen kulma, keskianomalia
M_0	sektoriaalinen kulma epookilla t_0 (yleensä $t_0 = 0$)
μ	gravitaatiovakion ja systeemin kokonaismassan tulo
n	sektoriaalinen kulmanopeus, keskiliike
\mathbf{n}	solmuvektori
ω	periapsin argumentti
Ω	nousevan solmun pituus
p	kartioleikkauksen semi-latus rectum (eli kylkisuoran puolikas), ellipsin parametri
P	kiertoaika
t_p	perisentriaika, integroimisvakio
u	leveyden argumentti, $u = \omega + \nu$
CNAV	uudempien GPS-satelliittisukupolvien lähettämä siviilinaavigointidata, englanniksi civil navigation data, josta lyhenne.
GPS	Global Positioning System; maailmanlaajuinen satelliitinavigointijärjestelmä.
LAN	nousevan solmun pituus, englanniksi longitude of ascending node, josta lyhenne.
LNAV	kaikkien GPS-satelliittisukupolvien lähettämä perusnavigointidata, englanniksi legacy navigation data, josta lyhenne.
RAAN	nousevan solmun rektaskensio, englanniksi right ascension of ascending node, josta lyhenne.

1 JOHDANTO

1.1 Työn tavoite

Alkuperäinen idea opinnäytetyöksi oli teoreettisen kehyksen tuottaminen ohjelmistolle, joka generoisi aidoilta näyttäviä GPS-mittauksia (pseudoetäisyys, Doppler-siirtymä ja kantoaallon vaihe), kun GPS-satelliittien kiertoradat ja GPS-vastaanottimen liikerata tunnettiin. Ohjelmistossa käytettäisiin GPS-satelliittien kiertoratojen mallina navigointiviestin sisältämää ratamallia. Tämä idea osoittautui liian laajaksi aiheeksi, minkä johdosta aihetta rajattiin merkittävästi, ja päätettiin keskittyä pelkästään GPS:n vanhemman navigointiviestin mukaisen ratamallin selittämiseen, ja tämäkin pelkästään häiriöttömän rataliikkeen osalta.

GPS:n navigointiviestien sisältämät ratamallit määritellään *rajapintaspesifikaatiossa* (engl. *interface specification*) IS-GPS-200 [59]. Mainitussa rajapintaspesifikaatiossa määritellään sekä vanhempi navigointiviesti LNAV [59, s. 73–133] että uudempi navigointiviesti CNAV [59, s. 134–87], joita GPS-satelliitit lähettävät taajuuksilla L1 ja L2.

Vanhemman navigointiviestin mukainen ratamalli [59, s. 99–101] käsittää 17 yhtälöä, joilla tietyistä lähtösuureista lasketaan satelliitin sijainti halutulla ajanhetkellä. Ratamallin yhtälöt esitetään algoritmissa 1.1 (sivulla 2) sellaisina ja siinä järjestyksessä kuin ne rajapintaspesifikaatiossa IS-GPS-200 [59, s. 99–101] annetaan. Algoritmin 1.1 yhtälöt jättävät taivaanmekaniikkaan perehtymättömän lukijan pohtimaan, että mistä nämä tulevat ja miksi ne ovat juuri sellaisia kuin ovat?

Näihin kysymyksiin työ pyrkii antamaan kattavan vastauksen. Erityisesti työn tavoitteena on selvittää kirjallisuudesta algoritmin 1.1 yhtälöiden taustalla oleva teoria. Työtä tehdessä kävi kuitenkin ilmi, että näiden yhtälöiden taustalla oleva teoria on niin laaja, että sen kattava selittäminen mahtuisi vasta kahteen 150-sivuiseen opinnäytetyöhön sillä tarkkuudella, mitä tässä työssä on käytetty. Yhtälöiden taustalla olevan teorian kattava selvitys edellyttäisi tässä työssä esitetyn häiriöttömän rataliikkeen teorian lisäksi myös häirityn rataliikkeen teoriaa, mutta se vuorostaan vaatisi toisen 150-sivuisen opinnäytetyön.

Ei liene liioiteltua sanoa, että algoritmin 1.1 yhtälöihin tiivistyy yli 400 vuotta matemaattis-fysikaalista tutkimusta. Sen vuoksi yhtälöiden selittäminen vie pitkälle matkalle, joka alkaa Keplerin laeista 1600-luvun alusta ja päättyy työn kirjoitushetkellä maailmanlaajuisiin satelliittinavigointijärjestelmiin kuten GPS ja Galileo.

Algoritmi 1.1. GPS-satelliitin sijainnin laskeminen spesifikaation [59] mukaan.

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & A = (\sqrt{A})^2. \\
 (2) \quad & n_0 = \sqrt{\frac{\mu}{A^3}}. \\
 (3) \quad & t_k = t - t_{oe}. \\
 (4) \quad & n = n_0 + \Delta n. \\
 (5) \quad & M_k = M_0 + nt_k. \\
 (6) \quad & M_k = E_k - e \sin E_k. \\
 (7) \quad & v_k = \text{atan } 2 \left(\sqrt{1 - e^2} \sin E_k, \cos E_k - e \right). \\
 (8) \quad & \Phi_k = v_k + \omega. \\
 (9) \quad & \delta u_k = c_{us} \sin 2\Phi_k + c_{uc} \cos 2\Phi_k. \\
 (10) \quad & \delta r_k = c_{rs} \sin 2\Phi_k + c_{rc} \cos 2\Phi_k. \\
 (11) \quad & \delta i_k = c_{is} \sin 2\Phi_k + c_{ic} \cos 2\Phi_k. \\
 (12) \quad & u_k = \Phi_k + \delta u_k. \\
 (13) \quad & r_k = A(1 - e \cos E_k) + \delta r_k. \\
 (14) \quad & i_k = i_0 + \delta i_k + (IDOT)t_k. \\
 (15) \quad & \begin{bmatrix} x'_k \\ y'_k \end{bmatrix} = r_k \begin{bmatrix} \cos u_k \\ \sin u_k \end{bmatrix}. \\
 (16) \quad & \Omega_k = \Omega_0 + (\dot{\Omega} - \dot{\Omega}_e)t_k - \dot{\Omega}_e t_{oe}. \\
 (17) \quad & \begin{bmatrix} x_k \\ y_k \\ z_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \Omega_k & -\cos i_k \sin \Omega_k \\ \sin \Omega_k & \cos i_k \cos \Omega_k \\ 0 & \sin i_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'_k \\ y'_k \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

(Algoritmi päättyy)

Algoritmin 1.1 yhtälöiden taustalla oleva teoria on pääasiassa taivaanmekaniikkaa. Teoria voidaan jakaa karkeasti kahteen melko itsenäiseen osa-alueeseen, häiriöttömään ja häirittyyn rataliikkeeseen. Tämä kahtiajako on toiminut määräävänä tekijänä työn aiheen rajaamisessa.

Rataliike (engl. *orbital motion*) tarkoittaa tässä työssä mitä tahansa liikettä, joka syntyy, kun pistemäiseen kappaleeseen vaikuttaa ajasta riippumattomia voimia. Kappaleeseen vaikuttavien voimien konservatiivisuudella ei ole väliä, eikä radan tarvitse olla suljettu kiertorata. Määritelmä soveltuu siten sekä häiriöttömälle että häiritylle rataliikkeelle. Häirityssä rataliikkeessä voidaan ottaa huomioon myös epäkonservatiivisia kontaktivoimia kuten ilmakehän kitka. Määritelmän rajoituksesta kuitenkin seuraa, että fyysisen systeemin on oltava autonominen. Tämä poissulkee epäautonomiset systeemit, joissa esiintyy ajasta eksplisiittisesti riippuvia voimia kuten työntövoima.

Häiriötön rataliike (engl. *unperturbed orbital motion*) tarkoittaa tässä työssä liikettä, joka syntyy kun pistemäiseen kappaleeseen vaikuttaa käänteisen neliön lakia noudattava keskeisvoima. Tämä liike on Keplerin liikettä, ja sitä voidaan kuvata Keplerin ongelmallalla. Keplerin ongelma on kahdesta kappaleesta koostuva systeemi, jossa (i) kappaleet ovat massapisteitä, (ii) ulkoisia voimia ei ole, ja (iii) kappaleet vetävät toisiaan puoleensa Newtonin painovoimalain mukaisesti. Matemaattisesti Keplerin ongelma on kolmiulotteinen toisen kertaluvun differentiaaliyhtälö,

$$\ddot{\mathbf{r}}_{AB} = -\frac{\mu}{r^3} \mathbf{r}_{AB}.$$

Tämän differentiaaliyhtälön integrointi tuottaa 6 keskenään riippumatonta integroimisvakiota, jotka yksilöivät ratkaisukäyrän. Ratkaisukäyrän yksilöintiin käytetään usein kuitenkin edellä mainittujen integroimisvakioiden sijasta Keplerin rataelementtejä. Keplerin rataelementit ovat parametrijoukko, joka kuvaa radan geometriaa varsin havainnollisella tavalla.

Edellä esitettyä häiriötöntä rataliikettä voidaan pitää teoreettisena lähtökohtana esimerkiksi Auringon ja sitä kiertävän planeetan liikkeelle tai Maan ja sitä kiertävän keinoitekoisen satelliitin liikkeelle. Keplerin ongelmassa on kuitenkin tehty yksinkertaistavia oletuksia, minkä vuoksi Keplerin liike ei vastaa satelliitin tai planeetan todellista liikettä. Todellisuudessa systeemi ei ole suljettu, kappaleita saattaa olla enemmän kuin kaksi, eikä kappaleita voida välttämättä kohdella massapisteinä. Planeettoihin ja satelliitteihin vaikuttaa keskuskappaleen painovoiman lisäksi myös muita voimia, ja tarkasteltavat kappaleet eivät ole massatiheydeltään pallosymmetrisiä, jolloin kappaleiden kohtelu massapisteinä on pelkkä approksimaatio.

Häiritty rataliike (engl. *perturbed orbital motion*) tarkoittaa tässä työssä liikettä, joka syntyy, kun pistemäiseen kappaleeseen vaikuttaa käänteisen neliön lakia noudattavan keskeisvoiman lisäksi muita voimia, joita kutsutaan häiriövoimiksi. Matemaattisesti häiritty rataliike on kolmiulotteinen toisen kertaluvun differentiaaliyhtälö

$$\ddot{\mathbf{r}}_p = -\frac{\mu}{r^3} \mathbf{r}_p + \mathbf{a}_p,$$

jossa yhtälön oikealla puolella ensimmäinen termi on kiertolaisen keskeiskiihtyvyys ja jälkimmäinen termi kokonaishäiriökiihtyvyys. Häirityn rataliikkeen differentiaaliyhtälö on hyvin samankaltainen kuin häiriöttömän rataliikkeen differentiaaliyhtälö, mistä johdetaan on luontevaa ajatella, että häiritty rataliike olisi mahdollista kuvata samoilla yhtälöillä kuin häiriöttömän rataliikkeen tapauksessa, mutta häiriöttömän liikeradan yksilöivät rataelementit korvattaisiin ajan funktioilla, joiden arvot muuttuisivat hitaasti. Tähän ideaan parametrien variointina tunnettu perturbaatiomenetelmä perustuu. Menetelmä johtaa rataelementtien ensimmäisen kertaluvun kytkettyyn differentiaaliyhtälöryhmään (Gaussin häiriöyhtälöt tai Lagrangen planetaariset yhtälöt).

Niin sanottu ensimmäisen kertaluvun gravitaatiollinen teoria Maan keinotekoisille satelliiteille saadaan, kun (i) rataelementtien differentiaaliyhtälöryhmän ratkaisua approksimoidaan ensimmäisen kertaluvun Taylorin sarjalla, ja (ii) satelliittiin vaikuttavaksi häiriöpotentiaaliksi huomioidaan pelkästään Maan gravitaatiopotentiaalın J_2 -termi (yleensä vielä keskiarvotettuna kiertoajan ylitse yhtälöiden yksinkertaistamiseksi). Tämä teoria johtaa tärkeisiin tuloksiin koskien rataelementtien periodisia ja sekulaarisia häiriöitä. Erityisesti teorian tulosten mukaan radan apsidiviiva ja solmuviiva prekessoiivat.

Aiheen laajuuden johdosta tämä työ on rajattu koskemaan pelkästään häiriötöntä rataliikettä. Työ on siten kirjallisuustutkimus tai -katsaus algoritmin 1.1 – eli GPS:n rajapintaspesifikaatiossa [59, s. 99–101] ja Galileon rajapinnan kontrollidokumentissa [19, s. 45–6] annettujen – yhtälöiden taustalla olevasta teoriasta pelkästään häiriöttömän rataliikkeen osalta. Yhtälöiden taustalla olevan teorian kattava selvitys edellyttäisi myös häirityn rataliikkeen teoriaa, mutta se vuorostaan vaatisi toiset 150 sivua lisää pituutta työlle.

Yhtälöiden taustalla oleva teoria on pääasiassa taivaanmekaniikkaa. Teoria voidaan jakaa karkeasti kahteen osa-alueeseen, häiriöttömään ja häirittyyn rataliikkeeseen. Häiriötön rataliike muodostaa taivaanmekaniikan perusteet, ja häiritty rataliike kuuluu edistyneeseen taivaanmekaniikkaan. Koska tämä työ on rajattu pelkästään häiriöttömään rataliikkeeseen, voidaan sanoa, että tämä työ on myös kirjallisuuskatsaus taivaanmekaniikan perusteisiin.

1.2 Työn uutuusarvo

Häiriöttömän rataliikkeen teorian ytimessä oleva Keplerin ongelma ja sen ratkaisu ovat tunnettu jo vuosisatojen ajan. Ei siis ole yllättävää, että tämä työ ei varsinaisesti sisällä mitään uusia tuloksia. Teoreettisen uutuusarvon puute itse työn aihepiirin osalta voidaan oikeuttaa opinnäytetyön lajityypillä. Tämä perustelu esitetään seuraavaksi.

Lajityypiltään tämä opinnäyte on kirjallisuustutkimus tai -katsaus. Kirjallisuustutkimukselta odotetaan teoreettista uutuusarvoa, kun taas kirjallisuuskatsaukselta ei odoteta uusia tuloksia aihepiirin osalta. Sen sijaan kirjallisuuskatsaukselta voidaan kohtuudella odottaa uutuusarvoista dialogia eri lähteiden välille.

Vaikka häiriötön rataliike ei tarjoa teoreettista uutuusarvoa, on edelleen mahdollista tavoitella kirjallista uutuusarvoa. Tässä työssä pyritään erityisesti kirjalliseen uutuusarvoon. Kirjallista uutuusarvoa tavoitellaan kirjallisuuskatsaukselle tavanomaiseen tapaan lähteiden välillä käytävän, kriittisen dialogin kautta. Sen lisäksi kirjallista uutuusarvoa tavoitellaan esityksen omaperäisyyden kautta.

1.3 Työn relevanssi

Työn relevanssin kannalta on tärkeää selvittää työn suhde sekä (i) GPS:n uudempaan navigointiviestiin että (ii) Galileon navigointiviestiin. Näitä kysymyksiä tarkastellaan seuraavaksi.

Ensimmäiseen kysymykseen voidaan todeta, että työn teoreettinen osuus pysyy yhtä relevanttina, vaikka tarkasteltaisiin GPS:n uudempaa navigointiviestiä (CNAV) vanhemman navigointiviestin (LNAV) sijaan. Perustelu on seuraava. GPS:n uudemman navigointiviestin (CNAV) mukainen ratamalli sisältää algoritmin 1.1 yhtälöt häiriöttömän rataliikkeen osalta, mutta tarkentaa häirittyyn rataliikkeeseen liittyviä korjaustermejä. Tämä työ kykenee selittämään yhtä monta yhtälöä kummankin navigointiviestin ratamallista, mutta selittämättä jääneiden yhtälöiden lukumäärä kasvaa siirryttäessä vanhemmasta navigointiviestistä uudempaan.

Toiseen kysymykseen voidaan todeta, että tämä työ on kaikilta osin yhtä relevantti sekä GPS:lle että Galileolle. Perustelu esitetään täsmällisemmin seuraavissa kahdessa kappaleessa, mutta voidaan tiivistää siihen, että Galileon navigointiviestien ratamalli on identtinen GPS:n vanhemman navigointiviestin ratamallin kanssa.

Eurooppalaisen Galileon navigointiviestien sisältämä ratamalli määritellään alustavasti *rajapinnan kontrollidokumentissa* (engl. *interface control document*) OS-SIS-ICD-1.1 [19]. Tässä rajapinnan kontrollidokumentissa määritellään navigointiviestit F/NAV ja I/NAV, joita Galileo-navigointisatelliitit lähettävät taajuuksilla E1 ja E5. Galileon edellä mainitut navigointiviestit ovat ratamallin [19, s. 45–6] osalta yhtenäiset.

Kun vertaillaan keskenään Galileon navigointiviestien ratamallia [19, s. 45–6] ja GPS:n vanhemman navigointiviestin ratamallia [59, s. 99–101], todetaan niiden olevan keskenään identtisiä. Tämä tarkoittaa, että algoritmi 1.1 (sivulla 2) on yhtä relevantti sekä Galileon että GPS:n kannalta.

1.4 Työn kirjoitustyyli

Seuraavaksi esitellään työssä käytettyä kirjoitustyyliä ja kirjoitustyylin tukena käytettyjä tyylikeinoja ja esitysteknisiä mekanismeja. Keskeisimpiä tyylikeinoja ovat käsitteiden esittelyt ja niiden käännökset. Keskeisimpiä esitysteknisiä mekanismeja ovat jatkoyhtälöt.

Keskeiset käsitteet pyritään esittelemään ennen niiden varsinaista käyttöä. Käsitteen *esittely* (engl. *introduction*) merkitään käyttämällä kursiivia kirjasintyyliä käsitteelle. Esittelyn yhteydessä käsitteet pyritään myös määrittelemään.

Käsitteen määrittely tehdään mahdollisimman lähellä esittelyä. Määrittely voidaan tehdä joko epämuodollisesti tai muodollisesti. *Epämuodollinen määrittely* (engl. *informal definition*) on narratiivinen, helppolukuinen selitys kappaleen sisällä, ja se voi olla hyvin lyhyt ja epätäsmällinen. *Muodollinen määrittely* (engl. *formal definition*) on vuorostaan ympäröivästä muusta tekstistä irrotettu Määritelmä-kappale, jollaista käytetään usein matemaattisessa tekstissä ja sillä voidaan korostaa määritelmän täsmällisyyttä. Määritelmät pyritään ottamaan lähdekirjallisuudesta aina, kun se on mahdollista. Lähteet merkitään määritelmiin tavalliseen tapaan lähdeviitteinä.

Muodolliset määritelmät lisäävät tekstin selkeyttä, viitattavuutta ja täsmällisyyttä, mutta samalla heikentävät tekstin luettavuutta. Epämuodolliset määritelmät vuorostaan lisäävät tekstin luettavuutta, mutta samalla heikentävät keskeisten määritelmien löydettävyyttä. Näin ollen esityksessä on pakko käydä vaihtokauppaa luettavuuden ja selkeyden välillä. Tässä työssä on haettu helppolukuisuutta, mikä selittää kirjoitustyyliksi valitun epämuodollisen lähestymistavan ja muodollisten määritelmien poissaolon.

Käsitteen *käännös* (engl. *translation*) annetaan esittelyn yhteydessä suomenkielisen nimen jälkeen suluissa ja kursivoituna. Englanninkielinen nimi annetaan systemaattisesti aina esittelyn yhteydessä huolimatta siitä, voidaanko lukijan olettaa tuntevan käännöstä vai ei. Mikäli käsitteellä ei ole tekijän tiedossa olevaa englanninkielistä käännöstä, on esittelyn yhteydessä annettu käännös tekijän ehdotus mahdollisesta englanninkielisestä käännöksestä.

Englanninkielisiä nimiä kuljetetaan tekstissä mukana, koska työssä käytetty lähdekirjallisuus on pääasiassa englanninkielistä, eikä kaikille englanninkielisessä kirjallisuudessa esiintyville käsitteille ole vakiintuneita suomennoksia. Tällä menettelyllä pyritään (i) helpottamaan käsitteiden suomenkielisten nimien ymmärtämistä, ja (ii) vähentämään käsitteiden suomenkielisten nimitysten horjuvuutta.

Tässä työssä käytetään nimeä *yhtälö* (engl. *equation*) mille tahansa omalla rivillään esitetylle yhtälölle, epäyhtälölle, kaavalle tai lausekkeelle. Pitkien yhtäläisyysketjujen esittämiseen on paikoin käytetty jatkoyhtälöitä. Tässä työssä *jatkoyhtälö* (engl. *continuation equation*) tarkoittaa omalla rivillään olevaa yhtälöä, joka alkaa yhtäläisyysmerkillä (=). Tällöin yhtälön vasemmaksi puoleksi tulkitaan edellinen omalla rivillään esitetty yhtälö, vaikka yhtälöiden välissä on leipätekstiä. Esimerkiksi lauseke

$$\frac{a + b}{a^2 - b^2}$$

voidaan sieventää muotoon

$$= \frac{1}{a - b}$$

hyödyntämällä binomikaavaa $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$. Esimerkin ensimmäinen yhtälö on tavallinen, ja jälkimmäinen yhtälö on jatkoyhtälö, koska se alkaa yhtäläisyysmerkillä. Jatkoyhtälön vasemmaksi puoleksi luetaan edellinen omalla rivillään esiintynyt yhtälö.

1.5 Työn rakenne

Seuraavaksi esitellään työn rakenne luku kerrallaan. Kukin luku esitellään lyhyesti yhdellä kappaleella. Nykyistä lukua ei esitellä.

Luku 2 (Ellipsi) esittelee ellipsin keskeiset ominaisuudet ja urapisteen määrittämisen erilaisilla kulmasuureilla. Aluksi määritellään kartioleikkaukset ja sen jälkeen ellipsi. Ellipsi käsitellään perusteellisesti. Erityisesti ellipsin eksentrisyys ja litistyneisyys saa kattavan ja systemaattisen käsittelyn. Sen jälkeen ellipsin urapiste määritellään erilaisilla kulmasuureilla. Lopuksi tarkastellaan kulmasuureiden vastaavuuksia. Luku päättää esittelemällä hyperbelin lyhyesti niiltä osin kuin sitä tarvitaan.

Luku 3 (Keplerin ongelma) muotoilee Keplerin ongelman matemaattisesti. Aluksi esitellään Newtonin painovoimalaki ja kahden kappaleen ongelma. Sen jälkeen määritellään Keplerin ongelma, joka on kahden kappaleen ongelman erikoistapaus. Lopuksi Keplerin ongelma muotoillaan matemaattisesti kolmiulotteisena 2. kertaluvun epälineaarisen differentiaaliyhtälönä.

Luku 4 (Integrointi) näyttää, kuinka Keplerin ongelman differentiaaliyhtälö ratkaistaan integroimalla. Ensin löydetään kolme integraalia karteesisessa koordinaatistossa. Sen jälkeen differentiaaliyhtälö siirretään sopivasti valittuun sylinterikoordinaatistoon. Sylinterikoordinaatistossa löydetään vielä kolme integraalia lisää. Viimeisessä integraalissa päästään käsiksi ajan ja sijainnin väliseen kytkentään. Integraali on kuitenkin matemaattisesti haastava, minkä vuoksi sen laskeminen tehdään lopuksi omassa alaluvussa.

Luku 5 (Ratkaisun yksilöinti ja Keplerin lait) kehittää yhtälöt, joilla integroimisvakioista voidaan laskea radan muodon, koon ja alkusijainnin määrittävät Keplerin rataelementit. Lopuksi tarkastellaan, kuinka Keplerin lait voidaan johtaa työssä kehitetyistä tuloksista, jotka pohjautuvat Newtonin mekaniikkaan ja painovoimalakiin.

Luku 6 (Ratageometria) kehittää yhtälöt, joilla integroimisvakioista voidaan laskea radan asennon määrittävät Keplerin rataelementit. Aluksi määritellään useita rataliikkeen geometriaan liittyviä astronomisia käsitteitä. Käsitteiden määritelmien pohjalta rakennetaan yhtälöt. Lopuksi tarkastellaan sijainnin ajanhetkellä määrittävien kulmasuureiden laskemista tilavektorista.

Luku 7 (Häiriötön rataliike) rakentaa häiriöttömän rataliikkeen matemaattisen mallin. Rakentaminen alkaa määrittelemällä, mitä oikeastaan tarkoitetaan häiriöttömän rataliikkeen matemaattisella mallilla. Keplerin ongelman ratkaisu kerrataan, sillä siitä saadaan häiriöttömän rataliikkeen matemaattinen malli. Lopuksi työn keskeiset yhtälöt kootaan kolmeksi laskenta-algoritmiksi, jotka osoittavat, että tilavektori, integroimisvakiot ja Keplerin rataelementit ovat erilaisia, mutta keskenään yhdenvertaisia (ellipsin erikoistapauksessa) ratkaisun yksilöinnin kannalta.

Luku 8 (GPS-satelliitin rataliike) antaa vastauksen johdannossa asetettuun tutkimusongelmaan koskien algoritmin 1.1 yhtälöiden taustalla oleva teoriaa. GPS:n vanhemman navigointiviestin (LNAV) mukaisen rataliikkeen mallin yhtälöt yhdistetään tässä työssä

johdettuihin yhtälöihin siltä osin kuin se on mahdollista häiriöttömän rataliikkeen teori-
alla.

Luku 9 (Yhteenveto ja loppusanat) toistaa edellisissä luvuissa löydetyt tulokset var-
sin lyhyesti. Yhteenveto on lyhyt ja ytimekäs. Työ päättyy loppusanoihin.

2 ELLIPSI

Ellipsi on tärkein yksittäinen ratkaisukäyrä Keplerin ongelmalle. Esimerkiksi Aurinkokunnan planeettojen kiertoradat ovat ensimmäisessä approksimaatiossa ellipsiradoilla Auringon ympäri. Vastaavasti Maan keinotekoiset satelliitit, kuten GPS-satelliitit, ovat ensimmäisessä approksimaatiossa ellipsiradoilla Maan ympäri.

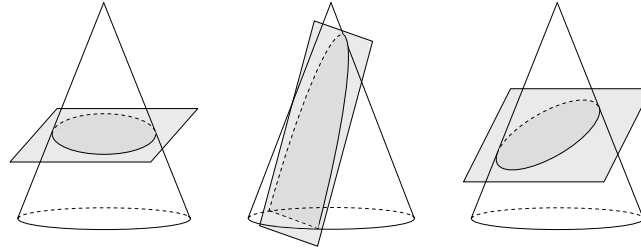
Aluksi esitellään ja määritellään kartioleikkaukset yleisesti (luku 2.1). Kartioleikkaukset ovat klassisia geometrisia käyriä, minkä vuoksi työssä esitellään lyhyesti niiden historiaa. Seuraavaksi esitellään ja määritellään ellipsi (luku 2.2). Ellipsisistä esitellään yksityiskohtaisemmin lineaarinen eksentrisyys ja litistyneisyys sekä eksentrisyyden ja litistyneisyyden ensimmäiset ja toiset muodot (luku 2.3). Sen jälkeen tarkastellaan semilatus rectumia ellipsin tapauksessa (luku 2.4). Ellipsin perusominaisuuksien jälkeen johdatellaan ideaan, jossa urapiste määritellään geometris–matemaattisella kulmasuureella (luku 2.5). Ensimmäisenä kulmasuureena urapisteen määrittämiseen käytetään eksentristä kulmaa (luku 2.6), toisena kulmasuureena sentraalikulmaa ja kolmantena fokaalikulmaa (luku 2.7). Näiden jälkeen tarkastellaan eksentrisen kulman ja fokaalikulman välisiä kytkentöjä (luku 2.8). Neljäntenä kulmasuureena urapisteen määrittämiseen käytetään sektoriaalista kulmaa (luku 2.9). Lopuksi esitellään hyperbeli lyhyesti (luku 2.10).

2.1 Kartioleikkaukset

Kartioleikkausten historiaa

Kartioleikkausten historia alkaa antiikin Kreikasta. Menaikhnus (n. 375–325 eaa.) käsitteli ensimmäisenä kartioleikkauksia ja jakoi ne kolmeen luokkaan. Hän tutki kartioleikkauksia pitäen leikkaustason suorassa kulmassa kartion sivuviivaa vasten ja vaihdellen leikattavaa kartiota. Kartioleikkaukset olivat siten terävä-, suora- ja tylppäkulmaisen kartion leikkauksia. [6, s. 47]

Seuraavaksi aiheita käsitteli Apollonios Pergeläinen (n. 260–200 eaa.). Hän tutki kartioleikkausten ominaisuuksia niin perinpohjaisesti, että hänen jälkeläisilleen jäi hyvin vähän lisättävää. Hänen kartioleikkauksia käsittelevä päätyö sisälsi neljäsataa teoremaa jaettuna kahdeksaan eri kirjaan, joista vain seitsemän ensimmäistä on säilynyt nykypäivään asti. Apollonios aloitti suorasta ympyräkartiosta, minkä jälkeen hän tarkasteli siitä otettuja eri tasoleikkauksia (kuva 2.1). Hän näytti, että käyrät voidaan jakaa kolmeen ryhmään, joille hän antoi niiden nykyaikaiset nimet ellipsi, paraabeli ja hyperbeli. [6, s. 77–9]



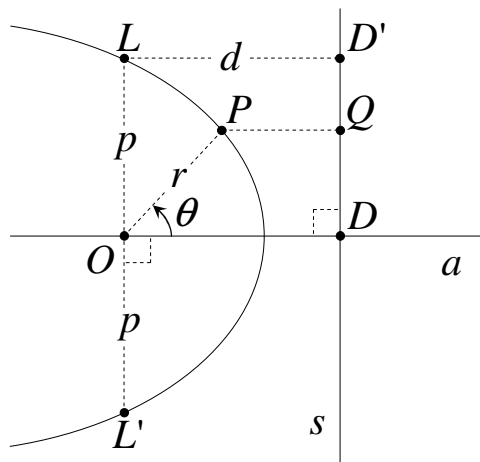
Kuva 2.1. Erilaisia kartioleikkauksia Apollonioksen käyttämällä tekniikalla. Samaa kartiota on leikattu eri asennossa olevilla tasoilla.

Myöhäisantiikin Pappos Aleksandrialainen, joka eli ja opetti Egyptin Aleksandriassa n. 300-luvulla, löysi kartioleikkauksiin liittyvän johtosuoran [6, s. 100]. Pappos sovitti Menaikhuksen käyttämät erilaiset määritelmät eri kartioleikkauksille yhdeksi määritelmäksi, joka perustuu johtosuoran hyödyntämiseen [13, s. 116].

Viimeisenä mainittakoon modernin astronomian isä Johannes Kepler (1571–1630), joka esitteli polttopisteelle sen nykyaikaisen nimen (focus). Hän hyödynsi polttopisteen käsitettä muun muassa osoittaessaan, että paraabeli saadaan sekä hyperbelin että ellipsin rajatapauksena, kun toinen polttopisteistä siirretään äärettömyyteen. [6, s. 256]

Kartioleikkaus

Kartioleikkaus voidaan määritellä monella eri tavalla. Tässä annetaan Pappoksen käyttämä (metrinen) määritelmä kartioleikkaukselle, ja seuraavassa aliluvussa määritelmästä johdetaan kartioleikkauksen yleinen napakoordinaattiyhtälö. Käsittely seuraa Coxeterin [13, s. 116] esitystä niiltä osin, jossa ei muuta mainintaa ole.



Kuva 2.2. Kartioleikkaus napakoordinaateissa. Polttopiste O , johtosuora s , latus rectum LL' .

Kartioleikkaus (engl. *conic section*) on kuvan 2.2 mukainen ura, jonka pisteiden P etäisyys OP kiinteästä pisteestä O on ε -kertainen ($\varepsilon > 0$) niiden etäisyyteen PQ kiinteään suoraan s nähden. Matemaattisesti esitettynä kartioleikkauksen pisteet P toteuttavat yhtälön

$$OP = \varepsilon PQ, \quad \varepsilon > 0. \quad (2.1)$$

Tätä kutsutaan Gibsonin [23, s. 76–8] mukaan *fokaalikonstruktiksi* (engl. *focal construction*), ja näin syntyviä kartioleikkauksia *konstruoitaviksi* (engl. *constructible*). Määritelmän jälkeen Gibson osoittaa, että ympyrä ei ole konstruoitavissa oleva kartioleikkaus.

Kiinteää pistettä O sanotaan *polttopisteeksi* (engl. *focus*, mon. *foci*), ja kiinteää suoraa s sanotaan *johtosuoraksi* (engl. *directrix*). Suhdelukua ε kutsutaan *eksentrisyydeksi* (engl. *eccentricity*). Kiinteää suoraa a , joka on kohtisuorassa johtosuoraan ja kulkee polttopisteestä, kutsutaan *pääakseliksi* (engl. *principal axis*) [14, s. 79]. Jänne LL' , joka kulkee polttopisteen kautta ja on yhdensuuntainen johtosuoran s kanssa, on nimeltään latinaksi *latus rectum* (mon. *latera recta*). Suomeksi *latus* tarkoittaa kylkeä tai sivua ja *rectum* suoraa. Jänteen LL' puolikkaita LO ja $L'O$ kutsutaan kumpaakin nimellä *semi-latus rectum*. Niiden pituutta merkitään p , josta seuraa koko jänteen LL' eli *latus rectum*in pituudeksi $2p$. Johtosuoran etäisyyttä $OD = L'D'$ (polttopisteestä) merkitään d .

Nimityksen *latus rectum* aikaisimmat esiintymät vaikuttavat olevan Kendigin [37, s. 85] mukaan henkilön nimeltä Gilles Personne de Roberval (1602–1675) kirjoittamissa luennoissa, jotka käsittelevät kartioleikkauksia ja jotka julkaistiin hänen kuolemansa jälkeen.

Kirjoittajan parhaan tietämyksen mukaan sanalle *latus rectum* ei valitettavasti ole suomenkielistä vastinetta. Tekijä ehdottaa nimityksiä ”kylkisuora” ja ”kylkisuoran puolikas”, sillä *latus rectum* on suora, joka yhdistää kartioleikkauksen kyljet.

Kartioleikkauksen yleinen yhtälö

Tavoitteena on etsiä kartioleikkauksen yhtälölle (2.1) napakoordinaattiesitys. Käsittely seuraa edelleen Coxeterin [13, s. 116] esitystä niiltä osin, jossa ei muuta mainintaa ole.

Ratkaistaan aluksi, kuinka *semi-latus rectum* p riippuu johtosuoran etäisyydestä d . Urapistelle L pätee yhtälön (2.1) mukaisesti $OL = \varepsilon LD'$. Koska $p = OL$ ja $d = OD = LD'$ saadaan johtosuoran etäisyyden d ja *semi-latus rectum*in p välille yhtälö

$$p = \varepsilon d. \quad (2.2)$$

Etsitään seuraavaksi itse napakoordinaattiesitys. Kuvan 2.2 tapaan napakoordinaatisto kiinnitetään polttopisteeseen O , ja nollakulman suunnaksi valitaan johtosuoran ja pääakselin leikkauspiste D . Napakoordinaateissa $r = OP$ ja $d - r \cos \theta = PQ$. Sijoittamalla nämä yhtälöön (2.1) ja hyödyntämällä yhtälöä (2.2) saadaan

$$r = p - \varepsilon r \cos \theta. \quad (2.3)$$

Ratkaistaan yhtälö (2.3) napasäteen r suhteen. Saadaan tulos, kartioleikkauksen yleinen yhtälö napakoordinaateissa

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \theta}. \quad (2.4)$$

Tätä kutsutaan kartioleikkauksen *fokaali-* tai *polttopisteyhtälöksi* (engl. *focal equation*) [4, s. 39]. Jos yhtälö ei ole entuudesta tuttu, on siitä vaikea päätellä, että sen kuvaaja on nimenomaan kartioleikkaus. Tämän vuoksi on perusteltua opetella yhtälö (2.4).

Yhtälön (2.1) kuvaaja vastaa eri kartioleikkauksia eksentrisyyden ε eri arvoilla. Kartioleikkaus on

$$\text{ellipsi, jos } \varepsilon < 1, \quad (2.5)$$

$$\text{paraabeli, jos } \varepsilon = 1, \quad (2.6)$$

$$\text{hyperbeli, jos } \varepsilon > 1. \quad (2.7)$$

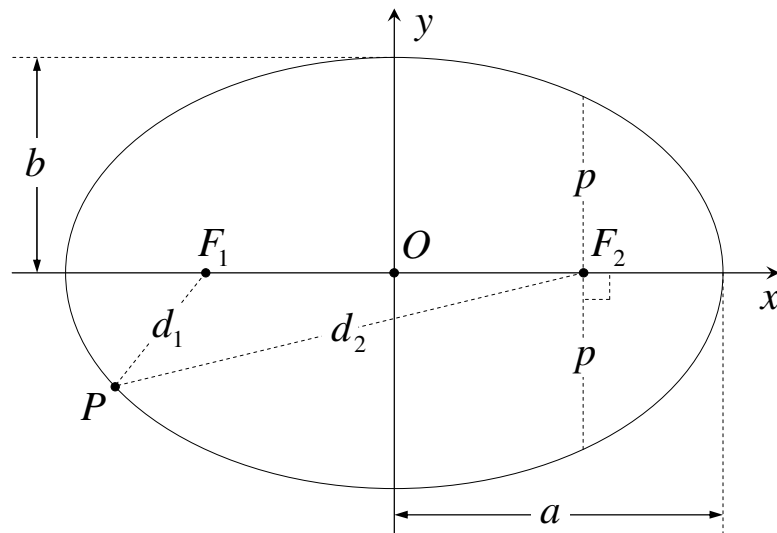
Coxeter [13, s. 116–8] jatkaa tästä vielä eteenpäin ja näyttää, kuinka kartioleikkauksen fokaaliyhtälöstä johdetaan ellipsin, hyperbelin ja paraabelin standardiyhtälöt. Mikäli näitä standardiyhtälöitä ei tiedettäisi kartioleikkauksiksi, pitäisi vielä osoittaa Coxeterin tavoin, että niiden määrittämät urat todella vastaavat kartion ja tason leikkauksia. Näiden urien osoittaminen kartioleikkauksiksi rajataan työn ulkopuolelle.

2.2 Ellipsi

Ellipsin määritelmä, polttopisteet ja puoliakselit

Ellipsin ura voidaan rakentaa useilla eri menetelmillä. Seuraavaksi esitellään yksi rakentamismenetelmä, jota kutsutaan ellipsin *lankakonstruktio*ksi (engl. *string construction*) [23, s. 111]. Menetelmää selitetään kuvaa 2.3 avulla. Kiinnitetään alustalle kaksi neulaa (F_1 ja F_2), sidotaan neulojen välille venymätöntä lankaa, ja kiristetään lanka kynällä (P). Nyt ellipsi voidaan piirtää liikuttelemalla kynää ja samalla huolehtien, että lanka pysyy kireänä. Koska lanka pidetään kireänä, täytyy neulasta kynän kautta toiseen neulaan lasketun etäisyyden $d_1 + d_2$ vastata langan pituutta, ja koska lanka on venymätön, täytyy langan pituuden pysyä vakiona.

Tässä työssä käytettävä ellipsin määritelmä perustuu nimenomaan ellipsin lankakonstruktioon. Määritelmä esitellään seuraavaksi.



Kuva 2.3. Ellipsi: urapiste P , isoakselin puolikas a , pikkuakselin puolikas b , semi-latus recta p ja polttopisteet F_1 ja F_2 .

Ellipsi (engl. *ellipse*) koostuu tason pisteistä P , joille kahdesta kiinteästä pisteestä F_1 ja F_2 laskettujen etäisyyksien summa $d_1 + d_2$ on jokin vakio ja suurempi kuin kiinteiden pisteiden välinen etäisyys [11, s. 109]. Tämä on ellipsin metrinen määritelmä, koska se perustuu ellipsin ominaisuuteen, joka edellyttää etäisyyden käsitettä eli metriikkaa.

Kiintopisteitä F_1 ja F_2 sanotaan ellipsin *polttopisteiksi* (engl. *focus*, mon. *foci*). Urapisteen P ja polttopisteiden välisiä janoja PF_1 ja PF_2 kutsutaan *polttosäteiksi* (engl. *focal radius*, mon. *focal radii*) [55, s. 393]. Ellipsillä on kaksi latus rectumia, koska polttopisteitä on kaksi [23, s. 90]. Ellipsin *akselit* ovat ne kaksi suoraa, joiden suhteen ellipsi on symmetrinen ja jotka ovat kohtisuorassa toisiinsa [23, s. 68]. Pidempää akselia sanotaan ellipsin *isoakseliksi* (engl. *major axis*) ja lyhyempää *pikkuakseliksi* (engl. *minor axis*). Polttopisteiden puolivälissä oleva piste O on ellipsin *keskipiste* (engl. *centre*) [24, s. 34; 11, s. 111]. Keskipiste puolittaa jokaisen sen kautta kulkevan jänteen [23, s. 44]. Erityisesti keskipiste on symmetria-akselien leikkauspiste.

josta ilmenee suoraan, että yhdistävän akselin pituus $2a$ on sama kuin ellipsin konstruoinnissa käytetyn langan pituus $2d$. Yhtälöstä (2.8) seuraa, että puoliakselin OA pituus $a = d$. Koska koko akselin pituus voidaan identifioida langan pituudeksi, käytetään jatkossa puoliakselin pituutta a kummankin suureen esittämiseen.

Ratkaistaan seuraavaksi puolittavan akselin pituus. Tarkastellaan kuvan 2.4 urapistettä B , joka on puolittavan akselin ja ellipsin uran leikkauspisteessä. Merkitään puoliakselin OB pituutta $b = OB$. Langan muodostaman tasakylkisen kolmion sivujen pituudet ovat $d_1 = d_2 = a$ edellä esitetyn yhtälön (2.8) perusteella. Muodostetaan kuvan 2.4 perusteella Pythagoraan lause

$$a^2 = E^2 + b^2, \quad (2.9)$$

josta tarkasteltavan puoliakselin OB pituudeksi seuraa tulos

$$b^2 = a^2 - E^2. \quad (2.10)$$

Tämän tuloksen perusteella on ilmeistä, että $0 < b < a$ aina, koska määritelmän mukaan $0 < E < a$. Polttopisteet yhdistävä akseli on aina ellipsin isoakseli ja puolittava akseli aina ellipsin pikkuakseli. Lisäksi aikaisempi tulos voidaan nyt muotoilla seuraavasti: urapisteen polttosäteiden summa on yhtä suuri kuin ellipsin isoakselin pituus.

Ellipsin standardiyhtälö

Johdetaan ellipsin standardiyhtälö lähtien tässä työssä käytettävästä ellipsin määritelmästä. Standardiyhtälö johdetaan Weissteinin [61, s. 518] esitystä seuraten.

Olkoon suorakulmaisen koordinaatiston origo ellipsin keskipisteessä ja koordinaattiakselit yhteneviä ellipsin akseleiden kanssa, kuten standardiyhtälön muotoilu edellyttää. Olkoon $d_1 + d_2 = 2a$, polttopisteet x -akselilla ja E polttopisteiden etäisyys origosta kuten aiemmin. Mielivaltaisen urapisteele P koordinaateille (x, y) voidaan nyt muodostaa ellipsin määritelmän mukainen yhtälö

$$d_1 + d_2 = \sqrt{(x-E)^2 + y^2} + \sqrt{(x+E)^2 + y^2} = 2a.$$

Neliöjuurista hankkiudutaan eroon yksi kerrallaan. Ratkaistaan yhtälö aluksi jälkimmäisen neliöjuuritermin suhteen, ja korotetaan yhtälö puolittain toiseen potenssiin,

$$(x+E)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-E)^2 + y^2} + (x-E)^2 + y^2.$$

Ratkaistaan yhtälö jäljelle jääneen neliöjuuritermin suhteen ja sievennetään,

$$\begin{aligned} \sqrt{(x-E)^2 + y^2} &= a + \frac{1}{4a} \left((x-E)^2 - (x+E)^2 \right) \\ &= a - \frac{E}{a} x \end{aligned}$$

Korotetaan vielä kerran puolittain toiseen potenssiin, jotta päästään eroon jäljelle jääneestä neliöjuuresta. Sievennetään, ja yhdistetään x^2 -termit. Saadaan yhtälö

$$x^2 \frac{a^2 - E^2}{a^2} + y^2 = a^2 - E^2,$$

joka voidaan yksinkertaistaa muotoon

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - E^2} = 1.$$

Merkitään yhtälön (2.10) mukaisesti lyhyemmän puoliakselin pituutta $b^2 = a^2 - E^2$, jolloin saadaan hyvin tunnettu *ellipsin standardiyhtälö* (engl. *standard equation of an ellipse*)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (2.11)$$

jossa vakio a on isoakselin puolikas, vakio b pikkuakselin puolikas, ja

$$0 < b < a. \quad (2.12)$$

Jos polttopisteet ovat y -akselilla, vaihdetaan ellipsin standardiyhtälössä (2.11) vakioiden a ja b paikat keskenään, jotta epäyhtälöt (2.12) on voimassa.

Tästä eteenpäin ellipsiä tarkastellaan standardiyhtälöstä (2.11) lähtien. Näkökulman vaihto tarkoittaa, että jatkossa ellipsin oletetaan olevan määritelty puoliakselien pituuksilla a ja b , jotka standardiyhtälössä esiintyvät.

Ellipsi määräytyy puoliakselien pituuksista tavalla, jossa sekä muoto että koko kytkeytyvät toisiinsa. Puoliakselien pituuksien sijasta ellipsi on yleensä miellyttävämpää määritellä sellaisilla kahdella parametrilla, joista toinen määrää pelkästään koon ja toinen pelkästään muodon. Ellipsin koon määräävänä parametrina käytetään tavallisesti isoakselin puolikasta, ja muodon parametrina joko eksentrisyyttä tai litistyneisyyttä, jotka esitellään seuraavaksi.

2.3 Eksentrisyys ja litistyneisyys

Eksentrisen eli epäsamankeskinen

Ellipsiin liittyy suureita, jotka ovat nimetty käyttäen adjektiivia “eksentrisen” sen jossain muodossa. Tämän erikoisen adjektiivin merkitystä ei pahemmin selitellä sitä hyödyntävässä kirjallisuudessa, vaikka sen avulla nimetyt suureet ja käsitteet ovatkin tärkeässä asemassa niin taivaanmekaniikassa kuin geodesiassa. Tässä työssä sanan syntyhistoriaa ei ohiteta, vaan se käsitellään lyhyesti, jotta ilmenee, miksi tietyt käsitteet kantavat nimessään tätä erikoista sanaa.

Klaudios Ptolemaios (n. 100–170 jaa.) oli kreikkalainen astronomi, joka eli Egyptin Aleksandriassa ja kirjoitti historiallisesti hyvin merkittävän *Almagestin*. Hän tarvitsi eksentrisen käsitteen tarkentamaan planeettojen kiertoratoja Maa-keskeisessä maailmankaikkeuden mallissa. Ptolemaioksen *eksentri* (engl. *eccentric* tai *excentric*) tarkoittaa ympyrän keskipistettä, joka ei ole sama kuin Maan keskipiste, mutta on lähellä sitä. [44, s. 123, 323]

Ptolemaioksen *Almagest* selitti Auringon liikkeen Maan ympäri käyttäen eksentrejä ja episyklejä. Teos on loistava osoitus tekijänsä kyvyistä. Siitä tuli välittömästi astronomian merkittävin lähde-teos. Se säilyi astronomian merkittävimpana lähde-teoksena aina siihen asti, kunnes Kopernikus ja Kepler osoittivat, että Maa kiertää Aurinkoa eikä päinvastoin. [6, s. 96–7]

Adjektiivi *eksentrinen* (engl. *eccentric*) tarkoittaa matematiikan nykykielessä *epäsamankeskistä* (engl. *not concentric*) [61, s. 506]. Tässä työssä adjektiivi eksentrinen pyritään tulkitsemaan ellipsien yhteydessä epäsamankeskisyytenä nimenomaan ellipsin polttopisteiden kanssa, ei keskipisteen kanssa. Tulkinta sovittaa yhteen sekä Ptolemaioksen eksentrin että sanan nykymerkityksen.

Lineaarinen eksentrisyys ja lineaarinen litistyneisyys

Lineaarinen eksentrisyys (engl. *linear eccentricity*) E määrittää ellipsin polttopisteiden etäisyyden keskipisteeseen [54, s. 64]. Lineaarisen eksentrisyyden ja ellipsin puoliakselien välinen yhteys on jo aiemmassa yhtälössä (2.9), joka toistetaan tässä

$$a^2 = E^2 + b^2.$$

Yhtälö muodostettiin soveltamalla Pythagoraan lausetta tilanteessa, joka toistuu kuvassa 2.5. Ratkaistaan yhtälö lineaarisen eksentrisyyden suhteen,

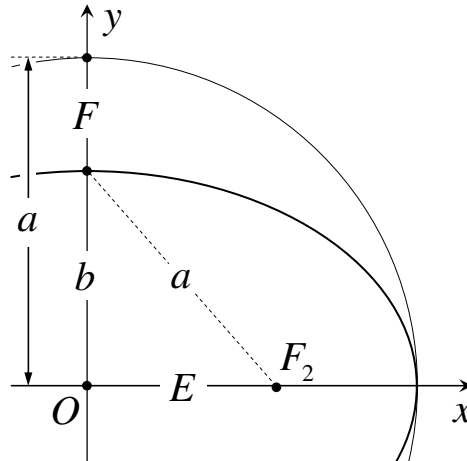
$$E = \sqrt{a^2 - b^2}. \quad (2.13)$$

Tekijän käytössä olleessa lähdemateriaalissa litistyneisyydelle ei esitetä lineaarista vastinetta. Tässä työssä kuitenkin pyritään tarkoituksellisesti käsittelemään eksentrisyyttä ja litistyneisyyttä duaalisena parina, minkä vuoksi seuraavaksi esitetään suure, jota tekijä kutsuu lineaariseksi litistyneisyydeksi. Tekijä ei ole tietoinen lähdekirjallisuudesta, jossa tällaista vastaavaa suuretta olisi esitelty.

Lineaarinen litistyneisyys (engl. *linear flattening*) F on ellipsin puoliakselien erotuksen itseisarvo. Tarkastelunäkökulmasta riippuen suureen voidaan tulkita kertovan, kuinka paljon pidempi isoakselin puolikas on tai, näkökulmaa vaihtaen, kuinka paljon lyhyempi pikkuakselin puolikas on. Lineaarinen litistyneisyys määritellään yhtälöllä

$$F = a - b, \quad (2.14)$$

kun $a > b$, kuten ellipsin määritelmän yhteydessä on sovittu.



Kuva 2.5. Ellipsiin liittyvät lineaariset suureet: lineaarinen eksentrisyys E ja lineaarinen litistyneisyys F .

Kuvassa 2.5 on havainnollistettu molempia lineaarisia suureita. Lineaarinen eksentrisyys E on ellipsin keskipisteen O ja polttopisteen F_2 välinen etäisyys. Lineaarinen litistyneisyys F on esitetty käyttäen apuna a -säteistä ympyrää. Suure voidaan yhtä hyvin havainnollistaa käyttäen apuna b -säteistä ympyrää. Näitä ympyröitä kutsutaan ellipsin apuympyröiksi, ja ne esitellään myöhemmin. Apuympyröiden esittelyn yhteydessä olevan kuvan 2.7 avulla voi hahmottaa, kuinka lineaarinen litistyneisyys F esitettäisiin pienempää apuympyrää käyttäen.

Eksentrisyyden ja litistyneisyyden kaksi muotoa

Seuraavaksi esitettäviin suureisiin, eksentrisyyteen ja litistyneisyyteen, liittyy tietynlainen dualismi, joka syntyy siitä, että lineaariset suureet suhteutetaan puoliakselin pituuteen. Koska ellipsillä on kaksi puoliakselia, voidaan kumpaa tahansa käyttää mitan perusyksikkönä, ja näin ollen sekä eksentrisyydestä että litistyneisyydestä on olemassa kaksi versiota, joista toinen käyttää mitan perusyksikkönä isoakselin puolikasta ja toinen pikkuakselin puolikasta. Tekijä kutsuu näitä versioita nimillä *ensimmäinen muoto* ja *toinen muoto* (engl. *first form* ja *second form*), jotka tarkoittavat vastaavasti iso- ja pikkuakselin puolikkaita mitan perusyksikköinä käytäviä versioita. Matemaattisesti kummankin suureen ensimmäisen muodon s ja toisen muodon s' välillä vallitsee yhteys

$$s' = \frac{a}{b} s. \quad (2.15)$$

Tekijän käyttämässä lähdekirjallisuudessa ei tuoda erityisesti esille eksentrisyyteen ja litistyneisyyteen liittyvää dualismia eikä muotojen välistä samanlaisuutta. Sen sijaan ensimmäiset ja toiset muodot esitellään tavallisesti toisistaan irrallisina suureina vailla erityisempää yhteyttä toisiinsa, nimeä lukuun ottamatta. Dualismin selkeä esille tuonti on kuitenkin varsin hyödyllistä, sillä sen avulla on mahdollista ymmärtää syvällisempiä yhteyksiä tavallisesti irrallisina esiteltävien käsitteiden välillä.

Eksentrisyys

Ensimmäinen eksentrisyys (engl. *first eccentricity*) e ilmaisee ellipsin polttopisteiden etäisyyttä keskipisteestä isoakselin puolikkaan a suhteen. Se toimii koosta riippumattomana muotoparametrina ja mittana ellipsin polttopisteiden ”epäkeskisyydestä”. Ellipsin yhteydessä pelkkä *eksentrisyys* (engl. *eccentricity*) ilman lisämääreitä tarkoittaa ensimmäistä eksentrisyyttä. Tämä nimitys otetaan välittömästi käyttöön.

Eksentrisyys e on laaduton luku, jolla kerrottuna isoakselin puolikas a antaa polttopisteiden etäisyyden keskipisteestä. Tämän perusteella eksentrisyyden ja lineaarisen eksentrisyyden välillä on yhtälö

$$E = ae, \quad (2.16)$$

jossa $0 < e < 1$. Jos eksentrisyyden e sallittaisiin olevan nolla yhtälössä (2.16), ellipsin molemmat polttopisteet olisivat keskipisteessä ja kyseessä olisi ympyrä. Sijoittamalla (2.16) yhtälöön (2.13) voidaan puoliakselien pituuksista ratkaista eksentrisyys

$$e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}. \quad (2.17)$$

Myöhemmin näytetään vielä, että ellipsin ensimmäinen eksentrisyys e on itse asiassa sama kuin yleisen kartioleikkauksen yhtälössä esiintyvä eksentrisyys ε . Ellipsi voidaan määrittää antamalla isoakselin puolikas a , joka määrää ellipsin koon, ja eksentrisyys e , joka määrää ellipsin muodon. Tällöin pikkuakselin puolikas määräytyy yhtälön (2.17) perusteella

$$b = a\sqrt{1 - e^2}. \quad (2.18)$$

Tästä yhtälöstä nähdään, että mikäli eksentrisyyden sallittaisiin olevan yksi, polttopisteet olisivat isoakselin päissä ja pikkuakselin pituus olisi nolla. Toisin sanoen ellipsi pelkistyisi yksiulotteiseksi janaksi.

Toinen eksentrisyys (engl. *second eccentricity*) e' ilmaisee ellipsin polttopisteiden etäisyyttä keskipisteestä pikkuakselin puolikkaan b suhteen. Yhteys lineaariseen eksentrisyyteen on siten

$$E = be', \quad (2.19)$$

jossa $e' > 0$ ilman ylärajaa. Sijoittamalla (2.19) yhtälöön (2.13) kuten aiemmin voidaan toinen eksentrisyys ilmaista puoliakselien pituuksilla:

$$e' = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{b} = \sqrt{\frac{a^2}{b^2} - 1}. \quad (2.20)$$

Ellipsi voidaan määrittää antamalla pikkuakselin puolikas b , joka määrää ellipsin koon, ja toinen eksentrisyys e' , joka määrää ellipsin muodon. Tällöin isoakselin puolikas yhtälön (2.20) perusteella

$$a = b\sqrt{1 + e'^2}. \quad (2.21)$$

Toisen eksentrisyyden arvolle ei ole ylärajaa, ja tämä yhtälö antaa vastauksen miksi. Jos pikkuakselin puolikkaan pituus kiinnitetään, niin isoakselin puolikkaalle on tällöin vain alaraja, mistä seuraa, ettei polttopisteiden välistä etäisyyttä ei ole myöskään ylhäältä rajoitettu.

Yhteys ensimmäisen ja toisen eksentrisyyden välillä noudattaa ensimmäisen ja toisen muodon välistä yhtälöä (2.15). Tarkistetaan asia merkitsemällä yhtälöt (2.16) ja (2.19) yhtä suuriksi,

$$ae = E = be', \quad (2.22)$$

ja ratkaisemalla toisen eksentrisyyden e' suhteen. Saadaan tulos

$$e' = \frac{a}{b}e, \quad (2.23)$$

joka vastaa yhtälöä (2.15).

Lisää yhtälöitä eksentrisyyden ensimmäisen ja toisen muodon välille saadaan, kun sijoitetaan yhtälö (2.21) pikkuakselin puolikkaan yhtälöön (2.18). Supistamalla molemmilla puolilla esiintyvä pikkuakselin puolikas ja korottamalla puolittain toiseen potenssiin päästään yhtälöön

$$1 = (1 + e'^2)(1 - e^2). \quad (2.24)$$

Muutaman laskutoimituksen jälkeen tästä saadaan ensimmäisen ja toisen eksentrisyyden välille yhtälöt

$$e'^2 = \frac{e^2}{1 - e^2} \quad \text{ja} \quad e^2 = \frac{e'^2}{1 + e'^2}. \quad (2.25)$$

Tämä päättää eksentrisyyden tarkastelun.

Litistyneisyys

Ensimmäinen litistyneisyys (engl. *first flattening*) f ilmaisee ellipsin puoliakselien välisen pituuseron isoakselin puolikkaan a suhteen. Se toimii koosta riippumattomana muotoparametrina ja mittana ellipsin ”litistyneisyydestä”. Luku kertoo, kuinka litistynyt ellipsi on a -säteiseen ympyrään verrattuna (esitetty kuvassa 2.7). Ellipsin yhteydessä pelkkä *litistyneisyys* (engl. *flattening*) ilman lisämääreitä tarkoittaa ensimmäistä litistyneisyyttä. Tämä nimitys otetaan välittömästi käyttöön.

Litistyneisyys f on laaduton luku, joka isoakselin puolikkaalla a kerrottuna antaa puoliakselien välisen pituuseron. Yhteys lineaariseen litistyneisyyteen on siten

$$F = af, \quad (2.26)$$

jossa $0 < f < 1$. Jos litistyneisyyden sallittaisiin olevan nolla yhtälössä (2.26), ellipsin molemmat puoliakselit olisivat yhtä pitkiä ja kyseessä olisi ympyrä. Sijoittamalla (2.26) yhtälöön (2.14) voidaan puoliakselien pituuksista ratkaista litistyneisyys

$$f = \frac{a-b}{a}. \quad (2.27)$$

Ellipsi voidaan määrittää antamalla isoakselin puolikas a , joka määrää ellipsin koon, ja litistyneisyys f , joka määrää ellipsin muodon. Tällöin pikkuakselin puolikas määräytyy yhtälön (2.27) perusteella

$$b = a(1 - f). \quad (2.28)$$

Tästä yhtälöstä nähdään, että mikäli litistyneisyyden sallittaisiin olevan yksi, pikkuakselin pituus olisi nolla. Toisin sanoen ellipsi pelkistyisi yksiulotteiseksi janaksi.

Maata jäljittelevän vertausellipsoidin muoto määrätään tyypillisesti antamalla sen ekvaattorisäde a ja litistyneisyyden käänteisluku $1/f$. Litistyneisyys annetaan käänteislukuna luultavasti siksi, että Maan tapauksessa se on lukijaystävällisempi luku (n. 298,26) kuin varsinainen litistyneisyys (n. 0,0033528).

Toinen litistyneisyys (engl. *second flattening*) f' ilmaisee ellipsin puoliakselien välisen pituseron pikkuakselin puolikkaan b suhteen. Se toimii koosta riippumattomana muotoparametrina ja mittana ellipsin ”pullistuneisuudesta”. Luku kertoo, kuinka pullistunut ellipsi on b -säteiseen ympyrään verrattuna (esitetty kuvassa 2.7). Yhteys lineaariseen litistyneisyyteen on siten

$$F = bf', \quad (2.29)$$

jossa $f' > 0$ ilman ylärajaa. Sijoittamalla (2.29) yhtälöön (2.14) voidaan puoliakselien pituuksista ratkaista toinen litistyneisyys

$$f' = \frac{a-b}{b}. \quad (2.30)$$

Ellipsi voidaan määrittää antamalla pikkuakselin puolikas b , joka määrää ellipsin koon, ja toinen litistyneisyys f' , joka määrää ellipsin muodon. Tällöin isoakselin puolikas määräytyy yhtälön (2.30) perusteella

$$a = b(1 + f'). \quad (2.31)$$

Toisen litistyneisyyden arvolle ei ole ylärajaa, ja tämä yhtälö antaa vastauksen miksi. Jos pikkuakselin puolikas kiinnitetään, niin isoakselin puolikkaalle on tällöin vain alaraja, mistä seuraa, ettei puoliakselien välistä pituseroa ei ole myöskään ylhäältä rajoitettu.

Lisäksi tämä yhtälö osoittaa selkeästi, että toinen litistyneisyys ilmaisee, kuinka paljon pidempi isoakseli on pikkuakseliin nähden. Toista litistyneisyyttä voitaisiin siten perustellusti kutsua *pullistuneisuudeksi* (engl. *bulging*).

Yhteys ensimmäisen ja toisen litistyneisyyden välillä noudattaa ensimmäisen ja toisen muodon välistä yhtälöä (2.15). Tarkistetaan muotojen välinen yhteys. Merkitään yhtälöt (2.26) ja (2.29) yhtä suuriksi,

$$af = F = bf',$$

ja ratkaistaan toisen litistyneisyyden f' suhteen. Saadaan tulos

$$f' = \frac{a}{b} f, \quad (2.32)$$

joka vastaa yhtälöä (2.15).

Toimimalla samalla tavoin kuin eksentrisyyden tapauksessa, voidaan litistyneisyyden ensimmäisen ja toisen muodon välille etsiä lisää yhtälöitä. Sijoitetaan yhtälö (2.28) isoakselin puolikkaan yhtälöön (2.31). Supistetaan isoakselin puolikas puolittain, jolloin päästään yhtälöön

$$1 = (1 + f')(1 - f). \quad (2.33)$$

Muutamien laskutoimitusten jälkeen tästä saadaan ensimmäisen ja toisen litistyneisyyden välille yhtälöt

$$f' = \frac{f}{1 - f} \quad \text{ja} \quad f = \frac{f'}{1 + f'}. \quad (2.34)$$

Tämä päättää litistyneisyyden tarkastelun.

Eksentrisyyden ja litistyneisyyden väliset yhtälöt

Eksentrisyyden ja litistyneisyyden ensimmäisten muotojen välinen yhteys löydetään, kun merkitään pikkuakselin puolikkaan määrittävien yhtälöiden (2.18) ja (2.28) oikeat puolet yhtä suuriksi. Ratkaistaan sekä eksentrisyyden että litistyneisyyden suhteen, jolloin tuloksena ovat yhtälöt

$$e^2 = f(2 - f), \quad (2.35)$$

$$f = 1 - \sqrt{1 - e^2}. \quad (2.36)$$

Vastaavasti eksentrisyyden ja litistyneisyyden toisten muotojen välinen yhteys löydetään, kun merkitään isoakselin puolikkaan määrittävien yhtälöiden (2.21) ja (2.31) oikeat puolet yhtä suuriksi. Ratkaistaan sekä toisen eksentrisyyden että toisen litistyneisyyden suhteen, jolloin tuloksena ovat yhtälöt

$$e'^2 = f'(2 + f'), \quad (2.37)$$

$$f' = \sqrt{1 + e'^2} - 1. \quad (2.38)$$

Tämä päättää eksentrisyyden ja litistyneisyyden välisten yhtälöiden suhteiden tarkastelun.

2.4 Semi-latus rectum

Ellipsin yhteydessä semi-latus rectumia p kutsutaan myös nimellä *ellipsin parametri* (engl. *the parameter of ellipse*) [7, s. 20; 54, s. 64; 12, s. 203]. Ratkaistaan, kuinka ellipsin semi-latus rectum p määräytyy isoakselin puolikkaasta ja eksentrisyydestä. Standar-

dyhtälön (2.11) ellipsiä tarkasteltaessa *latus rectum* on *y*-akselin kanssa yhdensuuntainen suora. Ellipsin ja *latus rectum*in leikkauspisteen *y*-koordinaatti on siten *p* määrittelmän mukaisesti. Sen polttopisteen, jonka kautta *latus rectum* kulkee, etäisyys origosta on yhtälön (2.16) perusteella *ae*, joka vastaa suoraan leikkauspisteen *x*-koordinaattia. Tehdään nämä sijoitukset standardiyhtälöön (2.11), ja ilmaistaan pikkuakselin puolikas eksentrisyyttä käyttäen yhtälöllä (2.18),

$$\frac{(ae)^2}{a^2} + \frac{p^2}{(a\sqrt{1-e^2})^2} = 1.$$

Ratkaistaan ellipsin parametrin *p* suhteen. Saadaan yhtälö

$$p = a|1 - e^2|. \quad (2.39)$$

Koska ellipsin eksentrisyys on välillä $0 < e < 1$, voidaan itseisarvomerkkit poistaa ilman toimenpiteitä. Saadaan tulos

$$p = a(1 - e^2). \quad (2.40)$$

Tämän avulla voidaan näyttää, että ellipsin ensimmäinen eksentrisyys *e* on ekvivalentti kartioleikkauksen eksentrisyyden ε kanssa. Osoittaminen tehdään seuraavasti. Sijoitetaan tulos (2.40) kartioleikkauksen yleiseen yhtälöön (2.4) ja tarkastellaan *x*-akselin ja ellipsin uran leikkauspistettä $(a, 0)$. Etäisyys polttopisteestä leikkauspisteeseen, eli napasäde *r*, on yksinkertaisesti $a(1 - e)$. Vastaavasti kulma positiivisesta *x*-akselista leikkauspisteen, eli napakulma θ , on yksinkertaisesti 0° . Ratkaisemalla yhtälö jommankumman eksentrisyyden suhteen osoittautuu, että $\varepsilon = e$.

Koska eksentrisyydet ovat samat, voidaan yhtälö (2.39) tulkita toisin päin seuraavasti. Jos kartioleikkaus on ellipsi eli $0 < \varepsilon < 1$, määrittävät kartioleikkauksen semi-*latus rectum* *p* ja eksentrisyys ε ellipsin isoakselin puolikkaan

$$a = \frac{p}{|1 - \varepsilon^2|}. \quad (2.41)$$

Lopuksi on syytä huomauttaa, että myös hyperbelillä on myös isoakseli, mutta hyperbelin tapauksessa kartioleikkauksen eksentrisyys $\varepsilon > 1$. Yhtälössä (2.41) esiintyvien itseisarvomerkkien vuoksi se on kelvallinen sekä ellipsin että hyperbelin isoakselin puolikkaalle. Paraabelin tapauksessa kartioleikkauksen eksentrisyys $\varepsilon = 1$, jolloin yhtälön (2.41) perusteella paraabelin isoakselin pituus voidaan mieltää äärettömäksi.

2.5 Urapisteen määrittäminen kulmalla

Ellipsin urapiste on mahdollista määritellä useilla eri kulmasuureilla. Astronomiassa urapiste määritellään tavanomaisesti kulmasuureella, jota kutsutaan anomaliaksi. Ellipsiradan tapauksessa anomalia on kolme erilaista: luonnollinen anomalia, eksentrisen anomalia ja keskianomalia. Geodesiassa meridiaaniellipsin urapiste määritellään tavan-

omaisesti kulmasuureella, jota kutsutaan latitudiksi. Latituedeja on myös kolme erilaista: geosentrinen latitudi, geodeettinen latitudi ja redusoitu latitudi.

Edellä mainittujen kulmasuureiden perusteella eri tieteenaloilla, erityisesti astronomialla ja geodesialla, vaikuttaa olevan omat termistönsä erilaisille ellipsin urapisteen määrittäville kulmasuureille. Toisinaan eri tieteenalojen käyttämät kulmasuureet ovat matemaattisesti samoja, mutta käsitteellisiltä määritelmiltään erilaiset. Esimerkiksi astronomian eksentrisen anomalia ja geodesian redusoitu latitudi määrittävät saman urapisteen.

Astronomian ja geodesian käyttämät nimitykset eri kulmasuureista ovat mitä luultavimmin lähtöisin sovelluksista ja käytännöstä. Tämä näkyy nimityksissä siten, että ne ovat tavallisesti ankkuroitu sovellusympäristöön. Esimerkiksi geodesiassa käytettävät geodeettinen ja geosentrinen latitudi ovat sidottu Maahan (etuliite geo-), ja ilman Maata nimitykset eivät ole mielekkäitä. Vastaavasti astronomiassa anomaliat edellyttävät perisentriä, eivätkä nimitykset ole mielekkäitä ilman keskuskappaletta ja kiertolaista. Eri-tyisesti luonnollinen anomalia on luonnollinen ainoastaan ellipsin varatussa polttopisteessä olevan keskuskappaleen näkökulmasta, ja ilman keskuskappaletta nimitys ei ole mielekäs.

Tekijän parhaan tietämyksen mukaan geodesian ja astronomian käyttämille, ellipsin urapisteen määrittäville kulmasuureille ei ole vakiintuneita, puhtaasti sovellusalueerippumattomia nimityksiä. Seuraava esitys pyrkii luomaan näille kulmasuureille matemaattisesti mielekkään termistön, joka on sovellusalueesta riippumaton.

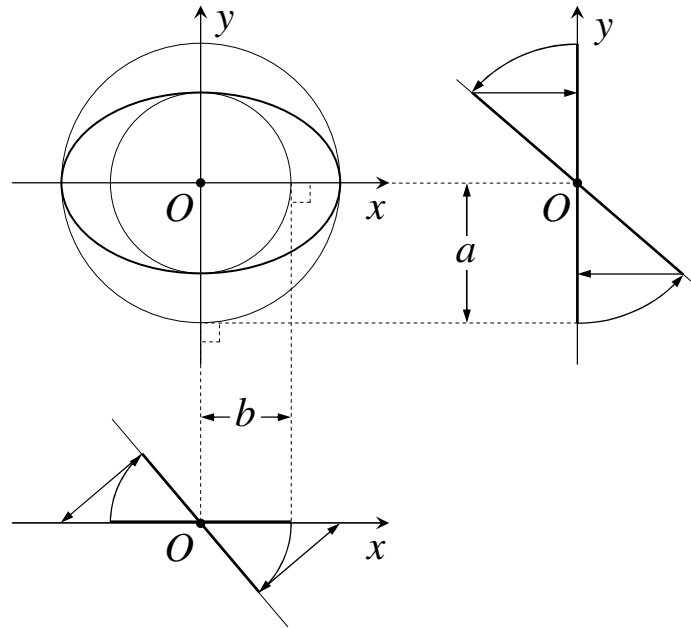
2.6 Eksentrisen kulma

Apuympyrät

Ellipsiin liittyvä *apuympyrä* (engl. *auxiliary circle*) on ellipsin kanssa samankeskinen ympyrä, jonka säde vastaa pituudeltaan joko iso- tai pikkuakselin puolikasta. Apuympyrä, jonka säde vastaa isoakselin puolikasta a , on nimeltään *iso apuympyrä* (engl. *major auxiliary circle*). Vastaavasti apuympyrä, jonka säde vastaa pikkuakselin puolikasta b , on nimeltään *pieni apuympyrä* (engl. *minor auxiliary circle*). [23, s. 48]

Apuympyröitä on kaksi, vaikka pieni apuympyrä jätetään toisinaan esittelemättä. Huomautus koskee ainakin lähdeoteoksia Fitzpatrick [20, s. 63], Bate et al. [7, s. 183], Casey [12, s. 206] ja Weisstein [61, s. 88], joissa apuympyrä määritetään tarkoittamaan pelkästään isoa apuympyrää. Muutamat lähdeoteoksista, edellä siteerattu Gibson [23, s. 48], Slichter [55, s. 155] sekä Crawley ja Evans [14, s. 131], esittelevät sekä pienen että ison apuympyrän.

Kuvissa 2.6 ja 2.7 on esitetty ellipsi ja molemmat siihen liittyvät apuympyrät. Ellipsi ja sen apuympyrät ovat määritelmän mukaisesti samankeskisiä. Niiden yhteinen keskipiste on ellipsin piste O . Kuvaan 2.7 on piirretty apuympyröiden lisäksi kulmassa t lähtevä suora, joka liittyy hetken päästä esiteltävään eksentriseen kulmaan.



Kuva 2.6. Ellipsi, sen iso ja pieni apuympyrät. Yhdellä tasolla olevan pienen tai ison apuympyrän projektio toiselle, sopivassa kulmassa olevalle tasolle on ellipsi.

Kuvassa 2.6 on havainnollistettu, kuinka ellipsi syntyy apuympyröiden projektioista. Erityisesti yhdellä tasolla olevan ison apuympyrän ortogonaaliprojektio toiselle, eri kulmassa olevalle tasolle on ellipsi [12, s. 206; 55, s. 153]. Yleisemmin ellipsi on yhdellä tasolla olevan pienen tai ison apuympyrän muodostama varjo toiselle, eri kulmassa olevalle tasolle.

Kolmiulotteisten projektiotulkintojen lisäksi ellipsiä voidaan tulkita kaksiulotteisesti yhdessä tasossa pitäytyen. Ellipsi voidaan muodostaa joko ison apuympyrän litistykseenä tai pienen apuympyrän venytyksenä (”pullistuksena”). Ensimmäinen vastaa y -akselin suuntaisesti kutistavaa ja toinen x -akselin suuntaisesti suurentavaa skaalausta. Vastavasti iso ja pieni apuympyrä voidaan muodostaa ellipsistä kutistamalla tai venyttämällä sitä päinvastaisesti. Tätä ajattelutapaa hyödynnetään laskettaessa ellipsiin liittyviä pinta-aloja.

Eksenttrinen kulma

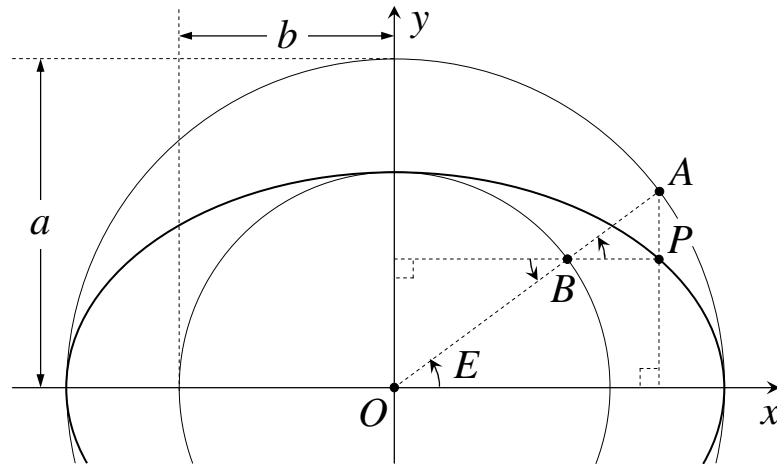
Ellipsin keskipisteestä kulmassa E lähtevä suora leikkaa a -säteisen, ison apuympyrän pisteessä A ja b -säteisen, pienen apuympyrän pisteessä B . Apuympyröiden leikkauspisteiden koordinaatit voidaan laskea, esimerkiksi kuvan 2.7 avulla. Leikkauspisteiden A koordinaatit ovat $(a \cos E, a \sin E)$, ja leikkauspisteiden B koordinaatit ovat $(b \cos E, b \sin E)$.

Apuympyröiden leikkauspisteet määrittävät kolmannen pisteen P , joka on pisteiden A ja B kautta vastaavasti kulkevien pysty- ja vaakasuoran leikkauspiste. Pisteiden P koordinaatit ovat

$$\begin{aligned} x &= a \cos E \\ y &= b \sin E \end{aligned} \quad (2.42)$$

Kuvassa 2.7 on havainnollistettu pisteen P määrittämistä. Apuympyröiden leikkauspisteisiin liittyvät suorat on piirretty näkyviin katkoviivoin.

Sijoittamalla pisteen P koordinaatit ellipsin standardiyhtälöön (2.11) voidaan osoittaa (esimerkiksi [55, s. 156]), että leikkauspisteiden määrittämä piste P on itse asiassa ellipsin urapiste, koska koordinaatit toteuttavat ellipsin standardiyhtälön. Yhtälö (2.42) on ellipsin yksi mahdollinen parametrisointi, mutta luultavasti tärkein ja helpoiten keksittävässä oleva, koska se muistuttaa hyvin läheisesti ympyrän parametrisointia. Tämän parametrisoinnin keskeisyyttä korostaa se, että kyseessä on Gibsonin [24, s. 34] mukaan ellipsin *standardiparametrisointi* (engl. *standard parametrization*).



Kuva 2.7. Ellipsi ja siihen liittyvät iso ja pieni apuympyrä. Urapisteen P eksentrisen kulma on E , ja kaikki merkityt kulmat ovat yhtä suuria sen kanssa.

Eksentrisen kulma (engl. *eccentric angle*) on yhtälön (2.42) kulma E , joka parametrisoi ellipsin [23, s. 36; 55, s. 156]. Eksentrisen kulma E määrittää kuvan 2.7 mukaisesti ellipsin urapisteen P , joka on pienen ja ison apuympyrän leikkauspisteiden kautta kulkevien suorien leikkauspiste. Käänteisesti tarkastellen ellipsin urapiste P määrittää eksentrisen kulman E , joka on urapistestä muodostetun projektiopisteen ja positiivisen isoakselin puolikkaan välinen kulma. Projektiopiste muodostetaan joko vaakaprojektiolla pikkuakselia päin pienelle apuympyrälle tai pystyprojektiolla isoakselista pois päin isolle apuympyrälle. Eksentrisestä kulmasta käytetään myös nimitystä *parametrinen kulma* (engl. *parametric angle*) [55, s. 401].

Vastin pisteet (engl. *corresponding points*) tarkoittavat tässä työssä urapisteen ja urapistettä vastaavien apuympyröiden pisteiden kolmikkoa A , B ja P . Tämä määritelmä eroaa Crawleyn ja Evansin [14, s. 132] vastin pisteiden määritelmästä siten, että tässä otetaan huomioon pisteiden A ja P lisäksi myös piste B pienellä apuympyrällä. Vastin pisteiden avulla Crawley ja Evans [14, s. 133] määrittelevät, että urapisteen P eksentrisen kulma on ison apuympyrän vastin pisteen A ja keskipisteen O yhdistävän suoran ja isoakselin välinen kulma. Caseyn [12, s. 206] määritelmä vastin pisteille on oleellisesti sama kuin Crawleyn ja Evansin. Määritelmät ovat selvästi yhteensopivia edellä annetun, tässä työssä käytettävän määritelmän kanssa.

Astronomiassa eksentristä kulmaa vastaava käsite on eksentrisen anomalia. Geodesiassa vastaava käsite on redusoitu latitudi. Eksentrisen anomalian käsite on lähteen [7, s. 181] mukaan peräisin Kepleriltä, joka esitteli sen ellipsiratojen yhteydessä. Matematiikassa esiintyvä termi eksentrisen kulma onkin alkujaan astronomiasta lainattu [12, s. 206]. Parametrinen kulma saattaisi olla matemaattisesti puhtaampi nimitys eksentriselle kulmalle, mutta se olisi luultavasti liian yleismaailmallinen ja jäisi vaille geometrista sisältöä. Lisäksi eksentrisellä kulmalla on selvästi vakiintuneempi asema tässä työssä käytetyn lähdekirjallisuuden perusteella kuin parametrisella kulmalla. Näiden perustelujen nojalla työssä pitäydytään nimityksessä eksentrisen kulma.

Edellä sovittiin, että adjektiivi eksentrisen tulkitaan epäsamankeskisyydeksi nimenomaan ellipsin polttopisteiden kanssa. Ellipsin apuympyrät ovat samankeskisiä itse ellipsin kanssa, mutta ne ovat epäsamankeskisiä ellipsin polttopisteiden kanssa. Apuympyrät ovat siten *eksentrisiä ympyröitä* (engl. *eccentric circles*) ellipsille. Tätä tulkintaa tukee esimerkiksi Roy [53, s. 75], joka kutsuu isoa apuympyrää nimellä eksentrisen ympyrä. Esitetyllä tulkinnalla eksentrisen kulma on looginen nimitys eksentriseen apuympyrään liittyvälle napakulmalle.

Joissakin lähteissä pikkuakselin puolikas b korvataan isoakselin puolikkaan a ja eksentrisyyden e avulla. Kun yhtälössä (2.42) esiintyvä pikkuakselin puolikas b korvataan yhtälöä (2.18) käyttäen, saadaan eksentrisen kulman E määrittävän ellipsin urapisteen koordinaateiksi

$$\begin{aligned} x &= a \cos E \\ y &= a\sqrt{1-e^2} \sin E \end{aligned} \quad (2.43)$$

Tämä päättää eksentrisen kulman käsittelyn.

2.7 Sentraalikulma ja fokaalikulma

Sentraali- ja fokaalikoordinaatisto

Seuraavaksi esitellään ellipsin sentraalikoordinaatisto ja fokaalikoordinaatisto. Koordinaatistot ovat nimetty sen mukaan, onko origo sijoitettu ellipsin keskipisteeseen (sentraalikoordinaatisto) vai polttopisteeseen (fokaalikoordinaatisto). Koordinaatistoja hyödynnetään ellipsin urapisteen sentraalikulman ja fokaalikulman määrittämiseen. Kulmat ovat urapisteen aitoja napakulmia vastaavissa koordinaatistoissa.

Sentraalikoordinaatisto (engl. *central coordinate system*) määritetään seuraavalla tavalla. Origo kiinnitetään ellipsin keskipisteeseen. Koordinaatiston perussuunnaksi kiinnitetään jompikumpi ellipsin isoakselin puolikkaista keskipisteestä poispäin. Positiivinen kiertosuunta kiinnitetään vastapäivään. Ellipsi voidaan esittää näin muodostetussa koordinaatistossa ellipsin standardiyhtälöä (2.11) käyttäen.

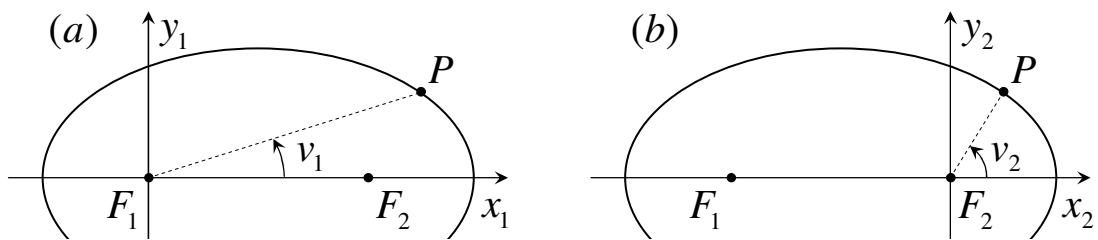
Vaihtoehtoisesti sentraalikoordinaatisto voidaan määritellä tämän ominaisuuden avulla, jolloin sentraalikoordinaatisto on sellainen koordinaatisto, jossa ellipsi voidaan esittää standardiyhtälöllä. Koska ellipsin yhtälö saa sentraalikoordinaatistossa standar-

diyhälön muodon, voidaan sentraalikoordinaatistoa kutsua myös ellipsin *standardi-koordinaatistoksi* (engl. *standard coordinate system*).

Sentraalikoordinaatistossa ellipsin polttopisteet voidaan erotella toisistaan koordinaatiston perussuunnan avulla. Origosta katsoen perussuunnassa olevaa polttopistettä merkitään F_2 ja kutsutaan nimellä *oikea polttopiste* (engl. *right-hand side focus*). Origosta katsoen perussuunnan vastakkaisessa suunnassa olevaa polttopistettä merkitään F_1 ja kutsutaan nimellä *vasen polttopiste* (engl. *left-hand side focus*).

Fokaalikoordinaatisto (engl. *focal coordinate system*) määritetään seuraavalla tavalla. Koordinaatiston perussuunnaksi kiinnitetään ellipsin isoakselin puolikas keskipisteestä poispäin. Tämän kiinnityksen perusteella ellipsin polttopisteet voidaan erotella, ja koordinaatiston origo kiinnitetään joko vasempaan tai oikeaan polttopisteeseen. Positiivinen kiertosuunta kiinnitetään vastapäivään.

Koska polttopisteitä on kaksi, on fokaalikoordinaatistojakin kaksi (kuvat 2.8a ja 2.8b). Koordinaatistot erotellaan toisistaan origona käytetyn polttopisteeseen perusteella. Jos origo on vasen polttopiste, kutsutaan koordinaatistoa nimellä *vasen fokaalikoordinaatisto* (engl. *left-hand side focal coordinate system*). Vastaavasti, jos origo on oikea polttopiste, kutsutaan koordinaatistoa nimellä *oikea fokaalikoordinaatisto* (engl. *right-hand side focal coordinate system*).



Kuva 2.8. (a) vasen fokaalikoordinaatisto, ja vasen fokaalikulma v_1 ,

(b) oikea fokaalikoordinaatisto ja oikea fokaalikulma v_2 .

Fokaalikulmat ovat samalle urapisteelle P.

Edellä annetut määritelmät vasemmalle ja oikealle fokaalikoordinaatistolle perustuvat siihen, että polttopisteet voidaan erotella toisistaan koordinaatiston perussuunnan avulla. Tämä ei kuitenkaan ole välttämätöntä. Vaihtoehtoisesti origo kiinnitetään mielivaltaiseen polttopisteeseen, jolloin perussuunta valitaan joko toista polttopistettä kohti tai siitä poispäin. Jos perussuunta kiinnitetään kohti toista polttopistettä (kuva 2.8a), saadaan vasen fokaalikoordinaatisto. Jos perussuunta kiinnitetään poispäin toisesta polttopisteestä (kuva 2.8b), saadaan oikea fokaalikoordinaatisto.

Oikea fokaalikoordinaatisto vastaa astronomian perifokaalikoordinaatistoa, ja vasen tässä työssä määriteltävää apofokaalikoordinaatistoa. Nimitykset peri- ja apofokaalikoordinaatisto eivät kuitenkaan ole mielekkäitä pelkän ellipsin tapauksessa, koska asetelmaan ei sisälly keskuskappaletta eikä kiertolaista, joiden perusteella etuliitteet peri- ja apo- merkityksensä.

Esitetään lopuksi yhtälöt koordinaattimuunnoksille. Koska sentraali- ja fokaalikoordinaatistojen välinen yhteys on pelkkä translaatio x -akselia pitkin, ovat koordinaattimuunnoksiin tarvittavat yhtälöt yksinkertaisia.

Koordinaattimuunnos $(x, y) \rightarrow (x_F, y_F)$ sentraalikoordinaatistosta fokaalikoordinaatistoon tehdään yhtälöllä

$$\begin{aligned} x_F &= x \pm ae \\ y_F &= y \end{aligned} \quad (2.44)$$

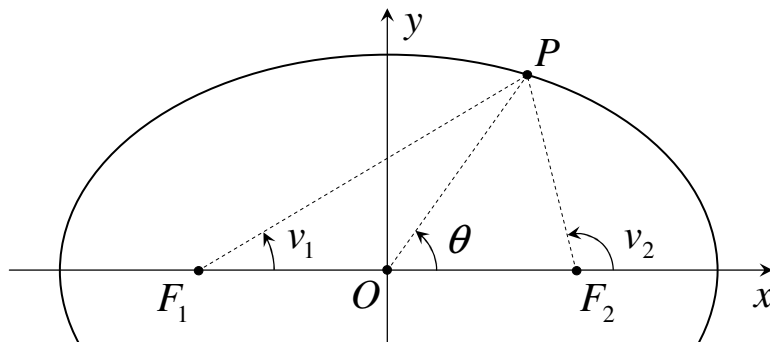
Päinvastainen koordinaattimuunnos $(x_F, y_F) \rightarrow (x, y)$ fokaalikoordinaatistosta sentraalikoordinaatistoon tehdään vastaavasti yhtälöllä,

$$\begin{aligned} x &= x_F \mp ae \\ y &= y_F \end{aligned} \quad (2.45)$$

Yhtälöissä (2.44) ja (2.45) symbolien \pm ja \mp ylempi operaatio vastaa vasemman fokaalikoordinaatiston tapausta, ja alempi operaatio vastaa oikean fokaalikoordinaatiston tapausta.

Sentraalikulma ja fokaalikulma – koordinaatistojen napakulmat

Seuraavaksi määritellään urapisteen napakulma sekä sentraali- että fokaalikoordinaatistossa. Urapisteen napakulmaa kutsutaan vastaavasti sentraalikulmaksi ja fokaalikulmaksi koordinaatiston mukaan. Fokaalikulmia on kaksi, ja nämä erotellaan toisistaan kuten polttopisteet. Kuvaan 2.9 on merkitty näkyviin urapisteen P napakulmat eri koordinaatistoissa.



Kuva 2.9. Ellipsin urapisteen P aidot napakulmat: vasen ja oikea fokaalikulma v_1 ja v_2 sekä sentraalikulma θ .

Sentraalikulma (engl. *central angle*) θ tarkoittaa tässä työssä ellipsin keskipisteestä positiiviseen kiertosuuntaan mitattua napakulmaa perussuunnaksi valitun isoakselin puolikkaan ja ellipsin urapisteen välillä. Jokaisella ellipsin urapisteellä on vain yksi sentraalikulma. Sentraalikulma on urapisteen napakulma sentraalikoordinaatistossa.

Englannin kielen *central angle* ja suomen kielen *keskuskulma* tarkoittavat ympyrän kehällä olevien pisteiden välistä kulmaa ympyrän keskipisteestä nähtynä [61, s. 217]. Edellä esitetty nimitys sentraalikulma voidaan tietyssä mielessä ymmärtää synonyymina termille keskuskulma. Suomenkielisessä kirjallisuudessa nimitystä sentraalikulma ei

tekijän parhaan tietämyksen mukaan kuitenkin esiinny, joten sekaannuksen vaara sanan merkityksen suhteen pitäisi siten olla vähäinen.

Fokaalikulma (engl. *focal angle*) v tarkoittaa tässä työssä ellipsin polttopisteestä positiiviseen kiertosuuntaan mitattua napakulmaa perussuunnan ja ellipsin urapisteen välillä. Koska ellipsillä on kaksi polttopistettä, on jokaisella urapisteellä kaksi fokaalikulmaa. Fokaalikulma on urapisteen napakulma fokaalikoordinaatistossa.

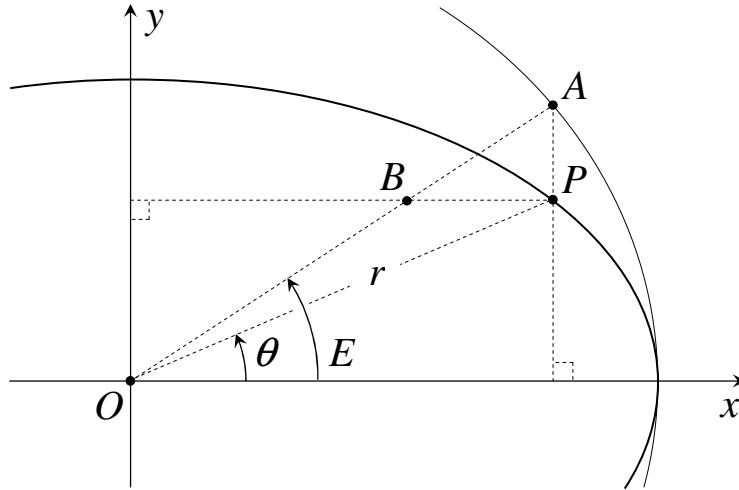
Urapisteen fokaalikulmat erotellaan toisistaan samoin kuin polttopisteet. Jos fokaalikulma on mitattu vasemmassa polttopisteessä, kutsutaan kulmaa nimellä *vasen fokaalikulma* (engl. *left-hand side focal angle*) ja merkitään v_1 . Jos fokaalikulma on mitattu oikeassa polttopisteessä, kutsutaan kulmaa nimellä *oikea fokaalikulma* (engl. *right-hand side focal angle*) ja merkitään v_2 .

Sentraalikulma vastaa geosentristä latitudia (esimerkiksi lähteen [43, s. 99] määritelmän mukaan). Oikean fokaalikulman ja eksentrisen kulman välinen yhteys on sama kuin luonnollisen ja eksentrisen anomalian (esimerkiksi lähteen [43, s. 121] määritelmien mukaan), minkä perusteella tässä määritelty oikea fokaalikulma vastaa astronomian luonnollisen anomalian käsitettä.

Vaikka astronomian käsite eksentrisen anomalia voidaan nähdä matematiikan eksentrisen kulman käsitteen edeltäjänä, ei astronomian käsitettä luonnollinen anomalia voida irrottaa yhtä vaivattomasti sovellusympäristöstään matematiikkaan ”luonnollisen kulman” käsitteeksi. Ellipsillä on kaksi polttopistettä, ja ilman kahden kappaleen ongelmaa, jossa keskuskappale varaa ellipsin polttopisteistä toisen, ei kumpikaan urapisteen fokaalikulmista ole toistaan ”luonnollisempi” tai ”todellisempi”. Tämän vuoksi luonnollista anomaliaa ei voida yleistää ”luonnolliseksi kulmaksi”, vaan sitä vastaava matemaattinen käsite on tässä työssä fokaalikulma.

Sentraalikulman yhtälöt

Rakennetaan kuvaus $\theta \rightarrow (x, y)$. Kuvaus rakennetaan siten, että ratkaistaan sentraalikulmaa θ vastaavan urapisteen P koordinaatit (x, y) . Tuntemattomia on kaksi (koordinaatit), joten ratkaisuun tarvitaan kaksi yhtälöä. Yksi yhtälö saadaan ellipsin standardiyhtälöstä (2.11). Toiseksi yhtälöksi tarvitaan yhtälö, joka kytkee koordinaatit (x, y) toisiinsa sentraalikulmaa θ käyttäen. Tähän soveltuu sentraalikulman tangentin määritelmä $\tan \theta = y/x$. Tuntemattomia koordinaatteja (x, y) sitoo nyt kaksi yhtälöä, ja yhtälöpari voidaan ratkaista tavanomaiseen tapaan.



Kuva 2.10. Ellipsin urapisteen P sentraalikulma θ , sentraalisäde r ja eksentrisen kulma E .

Ratkaistaan aluksi y -koordinaatti. Yhtälöstä $\tan \theta = y/x$ saadaan y -koordinaatille yhtälö

$$y = x \tan \theta. \quad (2.46)$$

Ratkaistaan sitten x -koordinaatti. Sijoitetaan (2.46) ellipsin standardiyhtälöön (2.11),

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{x^2 \tan^2 \theta}{b^2} = 1. \quad (2.47)$$

Kerrotaan puolittain termillä $a^2 b^2 \cos^2 \theta$, otetaan x^2 yhteiseksi tekijäksi, ja jaetaan yhteisen tekijän kertoimella. Otetaan neliöjuuri. Varsinainen tulos sentraalikulman θ ja vastaavan x -koordinaatin väliseksi yhtälöksi on

$$x = \frac{ab \cos \theta}{\sqrt{b^2 \cos^2 \theta + a^2 \sin^2 \theta}}, \quad (2.48)$$

jossa nimittäjä on määritelty kaikilla kulman θ arvoilla.

Sijoitetaan x -koordinaatin ratkaisu (2.48) takaisin ellipsin standardiyhtälöön (2.11), ja ratkaistaan vuorostaan y -koordinaatin yhtälö. Aloitetaan sijoittamalla ratkaisu ellipsin standardiyhtälöön,

$$\frac{1}{a^2} \frac{a^2 b^2 \cos^2 \theta}{b^2 \cos^2 \theta + a^2 \sin^2 \theta} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (2.49)$$

Supistetaan a^2 ensimmäisestä termistä, viedään ensimmäinen termi yhtälön toiselle puolelle ja merkitään b^2 yhteiseksi tekijäksi,

$$y^2 = b^2 \left(1 - \frac{b^2 \cos^2 \theta}{b^2 \cos^2 \theta + a^2 \sin^2 \theta} \right). \quad (2.50)$$

Lavennetaan oikean puolen ensimmäinen termi jälkimmäisen termin nimittäjällä, jolloin osoittajien kosinitermit hävittävät toisensa. Otetaan neliöjuuri. Sentraalikulman θ ja vastaavan y-koordinaatin välinen yhtälö on

$$y = \frac{ab \sin \theta}{\sqrt{b^2 \cos^2 \theta + a^2 \sin^2 \theta}}. \quad (2.51)$$

Yhdistämällä tulokset (2.48) ja (2.51) saadaan sentraalikulmaa θ vastaavan urapisteen koordinaateiksi

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta \\ y &= r \sin \theta \end{aligned} \quad (2.52)$$

jossa

$$r = \frac{ab}{\sqrt{b^2 \cos^2 \theta + a^2 \sin^2 \theta}} \quad (2.53)$$

on urapisteen *sentraalisäde* (engl. *central radius*). Sentraalikulma ja -säde ovat urapisteen napakulma ja -säde sentraalikoordinaatistossa.

Sentraalisäteen yhtälöä (2.53) voidaan vielä sieventää, kun siinä esiintyvät pikkuakselin puolikkaat b ilmaistaan yhtälön (2.18) avulla. Sievennetyksi sentraalisäteen yhtälöksi saadaan

$$r = \frac{a\sqrt{1-e^2}}{\sqrt{1-e^2 \cos^2 \theta}}. \quad (2.54)$$

Tämä päättää sentraalikulman yhtälöiden tarkastelun.

Sentraalikulman ja eksentrisen kulman välinen yhteys

Ratkaistaan sentraalikulman θ ja eksentrisen kulman E välinen yhteys. Kuvan 2.10 avulla nähdään, että urapisteen P kulmien välillä on voimassa yhtälö

$$\tan \theta = \frac{y}{x}. \quad (2.55)$$

Ilmaistaan koordinaatit eksentristä kulmaa käyttäen yhtälön (2.42) mukaisesti. Kulmien väliseksi yhteydeksi saadaan tulos

$$\tan \theta = \frac{b}{a} \tan E. \quad (2.56)$$

Korvataan lopuksi pikkuakselin puolikas b yhtälöllä (2.18), jolloin tulos saa muodon

$$\tan \theta = \sqrt{1-e^2} \tan E. \quad (2.57)$$

Tämä päättää kulmien välisen yhteyden tarkastelun.

$$\left(x \pm \frac{ae(1 - \cos^2 v)}{1 - e^2 \cos^2 v}\right)^2 = \frac{a^2(\cos^2 v - e^2)}{1 - e^2 \cos^2 v} + \left(\frac{ae(1 - \cos^2 v)}{1 - e^2 \cos^2 v}\right)^2. \quad (2.62)$$

Yhdistetään oikean puolen termit laventamalla ensimmäinen termi nimittäjällään. Sen jälkeen lasketaan sulut auki ja yhdistellään termejä. Osa termeistä kumoaa toisensa, ja jäljelle jää

$$\left(x \pm \frac{ae(1 - \cos^2 v)}{1 - e^2 \cos^2 v}\right)^2 = \frac{a^2(\cos^2 v - 2e^2 \cos^2 v + e^4 \cos^2 v)}{(1 - e^2 \cos^2 v)^2}. \quad (2.63)$$

Oikean puolen osoittajassa otetaan $\cos^2 v$ yhteiseksi tekijäksi. Jäljelle jäänyt polynomi muutetaan neliömuotoon, ja sen jälkeen oikea puoli on valmis juurettavaksi. Otetaan neliöjuuri puolittain,

$$x \pm \frac{ae(1 - \cos^2 v)}{1 - e^2 \cos^2 v} = \frac{a(1 - e^2)\cos v}{1 - e^2 \cos^2 v}. \quad (2.64)$$

Siirretään vasemman puolen vakiotermi oikealle puolelle,

$$x = \frac{a(1 - e^2)\cos v}{1 - e^2 \cos^2 v} \mp \frac{ae(1 - \cos^2 v)}{1 - e^2 \cos^2 v}. \quad (2.65)$$

Lasketaan sulut auki, ja yhdistellään termejä. Saadaan yhtälö

$$x = \frac{a(\cos v \mp e \pm e \cos v(\cos v \mp e))}{1 - e^2 \cos^2 v} = \frac{a(\cos v \mp e)(1 \pm e \cos v)}{(1 - e \cos v)(1 + e \cos v)} \quad (2.66)$$

Supistetaan nimittäjän termeistä toinen, jolloin jäljelle jäävän merkki on vastakkainen kuin osoittajassa olleen tekijän. Varsinainen tulos fokaalikulman v ja vastaavan x -koordinaatin väliseksi yhtälöksi on

$$x = \frac{a(\cos v \mp e)}{1 \mp e \cos v}, \quad (2.67)$$

jossa symbolien \pm ja \mp ylempi operaatio vastaa vasemman fokaalikulman $v = v_1$ ja alempi operaatio oikean fokaalikulman $v = v_2$ tapausta.

Sijoitetaan x -koordinaatin ratkaisu (2.67) takaisin ellipsin standardiyhtälöön (2.11), ja ratkaistaan vuorostaan y -koordinaatin yhtälö. Aloitetaan sijoittamalla ratkaisu ellipsin standardiyhtälöön,

$$\frac{a^2(\cos v \mp e)^2}{a^2(1 \mp e \cos v)^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (2.68)$$

Ratkaistaan termin y^2 suhteen,

$$y^2 = b^2 \left(1 - \frac{(\cos v \mp e)^2}{(1 \mp e \cos v)^2}\right). \quad (2.69)$$

Lavennetaan vakio sulkujen sisältä nimittäjällä. Lasketaan termien osoittajat yhteen. Sievennyksen jälkeen

$$y^2 = b^2 \left(\frac{(\cos^2 v - 1)(e^2 - 1)}{(1 \mp e \cos v)^2} \right). \quad (2.70)$$

Hyödynnetään trigonometristä identiteettiä $\cos^2 v - 1 = -\sin^2 v$. Viedään sinin edessä oleva miinusmerkki jäljelle olevan sulutetun termin sisälle. Sijoitetaan yhtälö (2.18) pikkuakselin puolikkaan b tilalle. Nyt yhtälö on neliömuotoinen ja valmis juurettavaksi. Ottamalla neliöjuuri puolittain saadaan tulos. Fokaalikulman v ja vastaavan y -koordinaatin välinen yhtälö on

$$y = \frac{a(1 - e^2)\sin v}{1 \mp e \cos v}, \quad (2.71)$$

jossa symboli \mp ylempi operaatio vastaa vasemman fokaalikulman $v = v_1$ ja alempi operaatio oikean fokaalikulman $v = v_2$ tapausta.

Kootaan lopuksi tulokset yhteen. Sentraalikoordinaatistossa ellipsin urapisteen x - ja y -koordinaatit voidaan laskea fokaalikulmasta v yhtälöillä (2.67) ja (2.71) vastaasti,

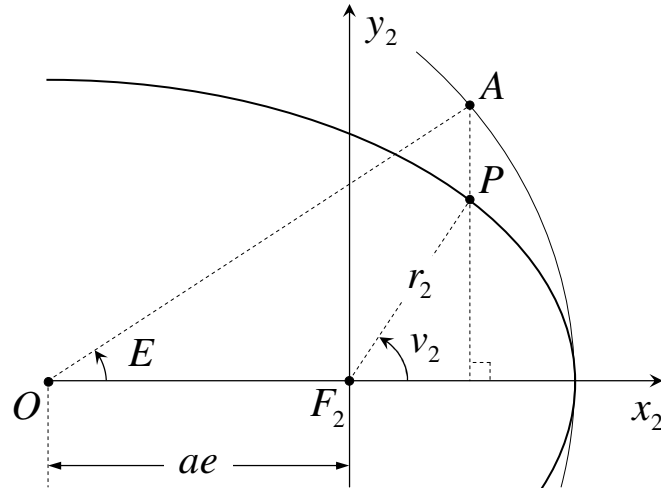
$$x = \frac{a(\cos v \mp e)}{1 \mp e \cos v},$$

$$y = \frac{a(1 - e^2)\sin v}{1 \mp e \cos v},$$

joissa symbolin \mp ylempi operaatio vastaa vasemman fokaalikulman $v = v_1$ ja alempi operaatio oikean fokaalikulman $v = v_2$ tapausta.

Fokaalikulman yhtälöt fokaalikoordinaatistossa

Rakennetaan kuvaus $v \rightarrow (x_F, y_F)$. Kuvaus rakennetaan siten, että fokaalikulmaa v (vasen tai oikea) vastaavat sentraalikoordinaatiston koordinaatit (x, y) muunnetaan fokaalikulmaa v vastaavan (vasemman tai oikean) fokaalikoordinaatiston koordinaateiksi (x_F, y_F) . Muunnos tehdään yhtälön (2.44) mukaisesti. Kuvassa 2.12 on hahmoteltu koordinaatistojen ja kulmien välisiä suhteita oikeanpuoleisen fokaalikulman osalta.



Kuva 2.12. Oikeanpuoleiset fokaalikulma v_2 ja fokaalisäde r_2 oikeanpuoleisessa fokaalikoordinaatistossa.

Koska $y_F = y$, voidaan keskittyä pelkästään x -koordinaatin muuntamiseen. Sijoitetaan x -koordinaatin yhtälö (2.67) fokaalikoordinaatiston x_F -koordinaatin yhtälöön (2.44),

$$x_F = \frac{a(\cos v \mp e)}{1 \mp e \cos v} \pm ae. \quad (2.72)$$

Lavennetaan jälkimmäinen termi ensimmäisen termin nimittäjällä. Lasketaan sulut auki, ja sievennetään. Saadaan tulos

$$x_F = \frac{a(1-e^2)\cos v}{1 \mp e \cos v}. \quad (2.73)$$

Yhdistämällä tulokset (2.71) ja (2.73) saadaan fokaalikulmaa v vastaavan urapisteen fokaalikoordinaatiston x_F - ja y_F -koordinaateiksi

$$\begin{aligned} x_F &= r_F \cos v \\ y_F &= r_F \sin v \end{aligned} \quad (2.74)$$

jossa

$$r_F = \frac{a(1-e^2)}{1 \mp e \cos v} \quad (2.75)$$

on urapisteen *fokaalisäde* (engl. *focal radius*). Symbolin \mp ylempi operaatio vastaa tavalliseen tapaan vasemman fokaalikulman ($F=1$) ja alempi oikean fokaalikulman ($F=2$) tapausta. Fokaalikulma ja -säde ovat urapisteen napakulma ja -säde fokaalikoordinaatistossa. Fokaalisäteen yhtälö (2.75) on muodoltaan sama kuin aiemmin tarkasteltu kartioleikkauksen yleinen yhtälö (2.4) napakoordinaatistossa.

2.8 Yhtälöt fokaalikulman ja eksentrisen kulman välillä

Fokaalisäteen ja eksentrisen kulman välinen yhteys

Kehitetään muunnosyhtälö $E \rightarrow r_F$, jolla voidaan laskea vasen tai oikea fokaalisäde r_F , kun eksentrisen kulma E tunnetaan. Fokaalisäteen r_F pituudelle pätee fokaalikoordinaatistossa Pythagoraan lauseen mukaan

$$r_F^2 = x_F^2 + y_F^2. \quad (2.76)$$

Korvataan yhtälön (2.76) koordinaatit (x_F, y_F) sentraalikoordinaatiston koordinaateilla (x, y) . Tämä tehdään sijoittamalla koordinaattimuunnos (2.44) yhtälöön (2.76). Sen jälkeen koordinaatit (x, y) esitetään yhtälön (2.42) mukaisesti eksentrisen kulman E lausekkeina. Saadaan yhtälö

$$r_F^2 = (a \cos E \pm ae)^2 + b^2 \sin^2 E, \quad (2.77)$$

jossa symbolin \pm (ja jatkossa myös symbolin \mp) ylempi operaatio vastaa vasemman fokaalikoordinaatiston ja alempi operaatio oikean fokaalikoordinaatiston tapaista.

Lasketaan ensin binomin potenssi auki. Korvataan sitten pikkuakselin puolikas b yhtälöä (2.18) käyttäen. Lopuksi otetaan a^2 yhteiseksi tekijäksi. Sievennysten jälkeen yhtälö (2.77) on saatu muotoon

$$r_F^2 = a^2 (1 \pm 2e \cos E + e^2 \cos^2 E). \quad (2.78)$$

Yhtälö (2.78) voidaan vaivattomasti muuttaa binomin neliöksi. Neliöinnin jälkeen yhtälöstä otetaan neliöjuuri puolittain. Koska fokaalisäde on aina ei-negatiivinen, voidaan negatiivinen ratkaisu hylätä suoraan. Saadaan tulos

$$r_F = a(1 \pm e \cos E), \quad (2.79)$$

jossa symbolin \pm ylempi operaatio vastaa vasenta fokaalikoordinaatistoa ja alempi oikeaa.

Fokaalikulman trigonometriset funktiot eksentrisellä kulmalla

Kehitetään yhtälöt, joilla fokaalikulman v trigonometriset funktiot voidaan esittää eksentrisen kulman E funktiona. Ensinnäkin kehitetään yhtälöt fokaalikulman kosinille ja sinille. Sen jälkeen näitä hyödyntäen kehitetään yhtälö fokaalikulman tangentille.

Kuvan 2.12 perusteella on helppo vakuuttua, että urapisteen P fokaalikulman kosinille ja sinille ovat voimassa niiden määritelmien mukaiset yhtälöt

$$\cos v = \frac{x_F}{r_F}, \quad (2.80)$$

$$\sin v = \frac{y_F}{r_F}. \quad (2.81)$$

Korvataan määritelmien sisältämät koordinaatit (x_F, y_F) sentraalikoordinaatiston koordinaateilla (x, y) . Tämä tehdään sijoittamalla koordinaattimuunnos (2.44) yhtälöihin (2.80) ja (2.81). Sen jälkeen koordinaatit (x, y) ja fokaalisäde r_F esitetään vastaavasti yhtälöiden (2.42) ja (2.79) mukaisesti eksentrisen kulman E lausekkeina. Seuraavaksi y -koordinaatin lausekkeessa esiintyvä pikkuakselin puolikas b korvataan yhtälön (2.18) mukaisesti. Lopuksi molemmista yhtälöistä supistetaan sekä nimittäjissä että osoittajissa esiintyvä isoakselin puolikas a . Saadaan tulokset

$$\cos v = \frac{\cos E \pm e}{1 \pm e \cos E}, \quad (2.82)$$

$$\sin v = \frac{\sqrt{1 - e^2} \sin E}{1 \pm e \cos E}, \quad (2.83)$$

joissa symbolin \pm ylempi operaatio vastaa vasenta fokaalikoordinaatistoa ja alempi oikeaa. Nämä yhtälöt ovat yleistyksiä esimerkiksi lähteiden [60, s. 214; 20, s. 64] tuloksista.

Näiden tulosten perusteella fokaalikulman v tangentille voidaan vaivattomasti muodostaa esitys eksentrisen kulman E funktiona. Jaetaan sinin yhtälö (2.83) puolittain kosinin yhtälöllä (2.82), ja sievennetään. Saadaan tulos

$$\tan v = \frac{\sqrt{1 - e^2} \sin E}{\cos E \pm e}, \quad (2.84)$$

jossa symbolin \pm ylempi operaatio vastaa vasenta fokaalikoordinaatistoa ja alempi oikeaa.

Eksentrisen kulman trigonometriset funktiot fokaalikulmalla

Kehitetään yhtälöt, joilla eksentrisen kulman E trigonometriset funktiot voidaan esittää fokaalikulman v funktiona. Käsittely tehdään samoin kuin aiemmin. Ensin kehitetään yhtälöt eksentrisen kulman kosinille ja sinille. Sen jälkeen näitä hyödyntäen kehitetään yhtälö fokaalikulman tangentille.

Ellipsin standardiparametrisoinnin (2.42) perusteella urapisteen (x, y) eksentrisen kulman kosinille ja sinille ovat voimassa yhtälöt

$$\cos E = \frac{x}{a}, \quad (2.85)$$

$$\sin E = \frac{y}{b}. \quad (2.86)$$

Korvataan määritelmien sisältämät koordinaatit (x, y) fokaalikoordinaatiston koordinaateilla (x_F, y_F) . Tämä tehdään sijoittamalla koordinaattimuunnos (2.45) yhtälöihin (2.85) ja (2.86). Sen jälkeen koordinaatit (x_F, y_F) esitetään vastaavasti yhtälöiden (2.71) ja (2.73) mukaisesti fokaalikulman v lausekkeina. Seuraavaksi y -koordinaatin

lausekkeessa esiintyvä pikkuakselin puolikas b korvataan yhtälön (2.18) mukaisesti. Lavennetaan molemmat yhtälöt koordinaattilausekkeiden (2.71) ja (2.73) nimittäjällä $1 \mp e \cos \nu$. Lopuksi molemmista yhtälöistä supistetaan sekä nimittäjissä että osoittajissa esiintyvä isoakselin puolikas a . Näiden askeleiden jälkeen yhtälöt (2.85) ja (2.86) ovat saatettu muotoon

$$\cos E = \frac{(1 - e^2) \cos \nu \mp e(1 \mp e \cos \nu)}{1 \mp e \cos \nu}, \quad (2.87)$$

$$\sin E = \frac{(1 - e^2) \sin \nu}{\sqrt{1 - e^2} (1 \mp e \cos \nu)}. \quad (2.88)$$

Kosinin yhtälön (2.87) osoittajan tulojen sulut lasketaan auki. Erityisesti jälkimmäisestä tulosta saadaan lauseke $(\mp e)(\mp e \cos \nu) = e^2 \cos \nu$, joka kumoaa ensimmäisestä tulosta saadun lausekkeen $-e^2 \cos \nu$. Sinin yhtälö (2.88) supistetaan nimittäjän neliöjuurella, jonka jälkeen nimittäjän lauseke on neliöjuurista vapaa. Näiden askeleiden jälkeen saadaan tulokset

$$\cos E = \frac{\cos \nu \mp e}{1 \mp e \cos \nu}, \quad (2.89)$$

$$\sin E = \frac{\sqrt{1 - e^2} \sin \nu}{1 \mp e \cos \nu}, \quad (2.90)$$

joissa symbolin \mp ylempi operaatio vastaa vasenta fokaalikoordinaatistoa ja alempi oikeaa. Nämä yhtälöt ovat yleistyksiä esimerkiksi lähteen Vallado [60, s. 213] tuloksista.

Näiden tulosten perusteella eksentrisen kulman E tangentialille voidaan vaivattomasti muodostaa esitys fokaalikulman ν funktiona. Jaetaan sinin yhtälö (2.90) puolittain kosinin yhtälöllä (2.89), ja sievennetään. Saadaan tulos

$$\tan E = \frac{\sqrt{1 - e^2} \sin \nu}{\cos \nu \mp e}, \quad (2.91)$$

jossa symbolin \mp ylempi operaatio vastaa vasenta fokaalikoordinaatistoa ja alempi oikeaa.

Eksentrisen kulman ja fokaalikulman välinen yhteys

Kehitetään yhtälöt, joilla eksentrisen kulma E ja (vasen tai oikea) fokaalikulma ν voidaan muuntaa toisikseen. Näiden yhtälöiden kehittäminen nojaa edellä muodostettujen tangenttifunktioiden $\tan \nu$ ja $\tan E$ esityksiin (2.84) ja (2.91) vastaavasti.

Kehitetään ensin muunnosyhtälö $E \rightarrow \nu$, jonka avulla (vasen tai oikea) fokaalikulma ν voidaan ratkaista, kun eksentrisen kulma E tunnetaan. Edellä kehitettiin tähän tarkoitukseen sopiva yhtälö (2.84), josta fokaalikulman arvoksi saadaan ratkaistua

$$\nu = \operatorname{atan} 2\left(\sqrt{1 - e^2} \sin E, \cos E \pm e\right). \quad (2.92)$$

Astronomiassa yhtälöt (2.84) ja (2.92) vastaavat eksentrisen anomalian ja luonnollisen anomalian välistä yhteyttä. Erityisesti yhtälöä (2.92) hyödynnetään satelliitin sijainnin laskemisessa.

Kehitetään sitten päinvastainen muunnosyhtälö $\nu \rightarrow E$, jonka avulla eksentrisen kulma E voidaan ratkaista, kun (vasen tai oikea) fokaalikulma ν tunnetaan. Edellä kehitettiin tähän tarkoitukseen sopiva yhtälö (2.91), josta eksentrisen kulman arvoksi saadaan ratkaistua

$$E = \operatorname{atan} 2\left(\sqrt{1-e^2} \sin \nu, \cos \nu \mp e\right). \quad (2.93)$$

Yhtälöt (2.91) ja (2.93) vastaavat astronomian luonnollisen anomalian ja eksentrisen anomalian välistä yhteyttä.

Verrataan keskenään muunnosyhtälöitä (2.92) ja (2.93). Havaitaan, että yhtälöt ovat algebrallisesti lähes identtisiä. Kulmasuureet ν ja E vaihtavat yhtälöissä paikkaansa, ja symboli \mp vaihtuu vastakkaiseksi operaatioksi \pm . Tämä muunnosyhtälöiden algebrallinen samankaltaisuus ei ole lähtökohtien perusteella mitenkään itsestään selvää. Sen vuoksi tulosta voidaan pitää yllätyksellisenä. Liitteessä B nämä samat muunnosyhtälöt johdetaan eri yhtälöstä lähtien, ja tällöin muunnosyhtälöiden samankaltaisuus käy ilmeiseksi.

Puolitetun fokaalikulman ja eksentrisen kulman tangenttien yhteys

Lopuksi muodostetaan erityinen yhtälö puolitetun fokaalikulman $\nu/2$ ja puolitetun eksentrisen kulman $E/2$ tangenttifunktioiden välille. Tätä varten tarvitaan trigonometristä identiteettiä, jonka mukaan puolitetun kulman tangentti voidaan esittää yksinkertaisen kulman sinin ja kosinin avulla yhtälöllä

$$\tan \frac{x}{2} = \pm \frac{\sin x}{1 + \cos x}. \quad (2.94)$$

Sovelletaan trigonometristä identiteettiä (2.94) fokaalikulmalle ν . Korvataan fokaalikulman kosini- ja sinifunktiot yhtälöillä (2.82) ja (2.83). Lavennetaan sen jälkeen yhtälön oikeaa puolta molemmille esityksille yhteisellä nimittäjällä $1 \pm e \cos E$. Näiden toimenpiteiden jälkeen on muodostettu yhtälö

$$\tan \frac{\nu}{2} = \pm \frac{\sqrt{1-e^2} \sin E}{1 \pm e \cos E + \cos E \pm e}. \quad (2.95)$$

Ryhmitellään yhtälön nimittäjää. Erityisesti $\pm e \cos E \pm e = \pm e(1 + \cos E)$, jolloin lauseke $1 + \cos E$ voidaan ottaa nimittäjän yhteiseksi tekijäksi. Ryhmittelyn jälkeen yhtälö (2.95) on muodossa

$$\tan \frac{\nu}{2} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{1 \pm e} \left(\pm \frac{\sin E}{1 + \cos E} \right). \quad (2.96)$$

Sovelletaan uudestaan trigonometristä identiteettiä (2.94), mutta tällä kertaa toiseen suuntaan eli eksentriseen kulmaan E yhtälön (2.96) oikealla puolella. Sievennetään

vielä tangentin eteen jäävää vakiokerrointa. Saadaan tulos, fokaalikulman ν ja eksentrisen kulman E tangenttifunktiot toisiinsa kytkevä yhtälö

$$\tan \frac{\nu}{2} = \sqrt{\frac{1 \mp e}{1 \pm e}} \tan \frac{E}{2}, \quad (2.97)$$

jossa symbolien \pm ja \mp ylempi operaatio vastaa vasenta fokaalikulmaa $\nu = \nu_1$ ja alempi operaatio oikeaa fokaalikulmaa $\nu = \nu_2$.

2.9 Sektoriaalinen kulma

Sektoriaalinen kulma

Ellipsin, yleisemmin minkä tahansa sopivan muotoisen kuvion, urapiste voidaan määrittää yksikäsitteisesti sektorin pinta-alan avulla. Seuraavaksi esitettävä urapisteen sektoriaalinen kulma perustuu tähän ajatukseen.

Sektoriaalinen kulma (engl. *sectorial angle*) on tässä työssä sektorin ja täyden kierroksen pinta-alojen suhde muunnettuna kulmaksi. Sektori muodostetaan koordinaatiston perussuunnan ja urapisteen välille. Kierto tehdään koordinaatiston positiiviseen kiertosuuntaan. Täyden kierroksen pinta-ala vastaa koko kuvion pinta-alaa. Yksikäsitteinen vastaavuus sektorin pinta-alan ja urapisteen välillä on mahdollista vain sopivan muotoisella kuviolla. Kuvion on oltava valitun napakoordinaatiston suhteen sen muotoinen, että urapisteen napasäde voidaan parametrisoida yksikäsitteisesti napakulman suhteen.

Olkoon sektorin pinta-ala ΔA ja koko kuvion pinta-ala A . Alojen suhde voidaan tällöin tulkita sektoriaaliseksi kulmaksi

$$M = 2\pi \frac{\Delta A}{A}. \quad (2.98)$$

Vastaavasti sektoriaalinen kulma M voidaan tulkita sektorin pinta-alaksi

$$\Delta A = \frac{M}{2\pi} A, \quad (2.99)$$

kun koko kuvion pinta-ala A tunnetaan. Sektoriaalinen kulma määrittää sektorin pinta-alan ja päinvastoin. Sektorin pinta-ala riippuu urapisteen lisäksi napakoordinaatiston origon sijainnista kuvion sisäpuolella. Näin ollen ellipsin urapiste ei määräydy yksikäsitteisesti pelkästään sektorin pinta-alasta, vaan myös siitä, minkä napakoordinaatiston suhteen sektori on muodostettu.

Erikoistetaan yhtälöt ellipsille. Sijoitetaan ellipsin pinta-ala $A = \pi ab$ yhtälöihin (2.98) ja (2.99). Nähdään, että ellipsin tapauksessa sektoriaalinen kulma M saadaan sektorin alasta ΔA yhtälöllä

$$M = \frac{2}{ab} \Delta A. \quad (2.100)$$

Vastaavasti nähdään, että sektorin ala ΔA saadaan sektoriaalisesta kulmasta M yhtälöllä

$$\Delta A = \frac{ab}{2} M. \quad (2.101)$$

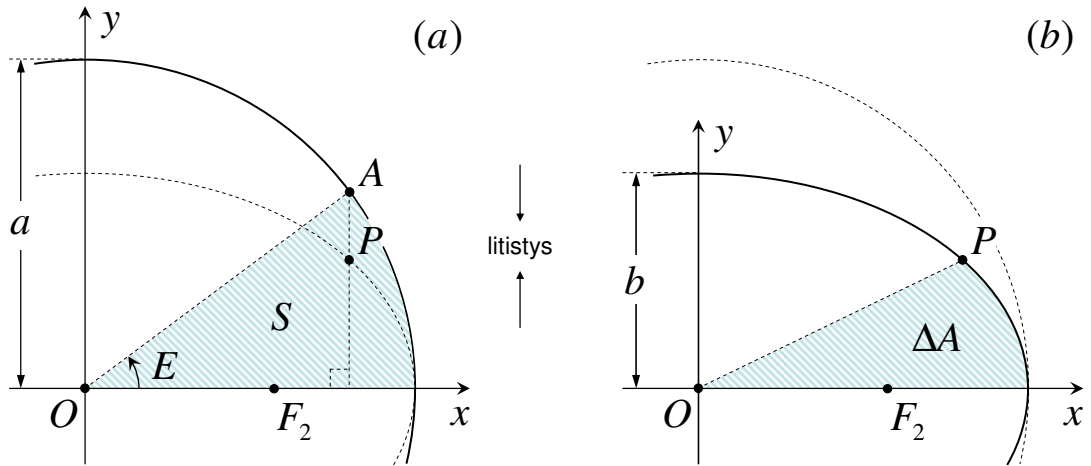
Ellipsiin liittyy kolme keskeistä koordinaatistoa: yksi sentraali- ja kaksi fokaalikoordinaatistoa. Kussakin koordinaatistossa urapisteen napakulma määrittää erimuotoisen sektorin, jota vastaa oma sektoriaalinen kulmansa. Sektoriaaliset kulmat voitaisiin erotella toisistaan nimeämällä ne koordinaatiston origon sijainnin mukaisesti. Tällöin sektoriaaliset kulmat olisivat seuraavat: sektoriaalinen sentraalikulma, sektoriaalinen vasen fokaalikulma ja sektoriaalinen oikea fokaalikulma. Käy kuitenkin ilmi, että urapisteen sektoriaalinen kulma sentraalikoordinaatistossa (eli ”sektoriaalinen sentraalikulma”) on sama asia kuin eksentrisen kulma. Tämän vuoksi nimitys ”sektoriaalinen kulma” sovitaan ensisijaisesti tarkoittamaan urapisteen sektoriaalista kulmaa fokaalikoordinaatistossa.

Seuraavaksi muodostetaan yhtälöt kunkin sektoriaalisen kulman M ja sitä vastaavan eksentrisen kulman E välille. Yhtälöiden muodostaminen edellyttää ellipsin sektorin pinta-alan määrittämistä. Tämä tehdään ratkaisemalla ensin ison apuympyrän vastaavan sektorin ala, ja sen jälkeen skaalaamalla tulos ellipsille. Skaalaus vastaa ison apuympyrän ”litistämistä” ellipsiksi.

Sektoriaalinen kulma sentraalikoordinaatistossa

Tarkastellaan urapisteen sektoriaalista kulmaa sentraalikoordinaatistossa. Käy ilmi, että urapisteen sektoriaalinen kulma sentraalikoordinaatistossa on sama kuin urapisteen eksentrisen kulma.

Kuvassa 2.13a vinoviivoin täytetty alue S on ison apuympyrän sektori, ja oikealla puolella vinoviivoin täytetty alue ΔA on sama alue y -akselin skaalauksen $b/a < 1$ (eli litistyksen) jälkeen. Kuvassa 2.13b oleva alue ΔA on ellipsin urapistettä P vastaava sektori, jonka pinta-alasta urapisteen sektoriaalinen kulma M_E muodostetaan. Ellipsin urapiste P määrittää isolla apuympyrällä olevan vastinpisteen A . Vastinpiste A vuorostaan määrittää ellipsin urapistettä vastaavan ison apuympyrän sektorin S . Kuvasta 2.13a käy selvästi ilmi, että ison apuympyrän sektorin kulma E on sama kuin urapisteen P eksentrisen kulma.



Kuva 2.13. Ellipsin urapisteen P määrittämän sektorin ΔA pinta-ala saadaan ison apuympyrän vastinpisteen A määrittämän sektorin S pinta-alasta skaalamalla (litistämällä).

Lasketaan ensin ison apuympyrän sektorin S ala. Koska ison apuympyrän pinta-ala on πa^2 ja kulman E osuus koko ympyrästä $E/2\pi$, saadaan nämä keskenään kertomalla ympyräsektorin pinta-alaksi

$$S = \frac{a^2 E}{2}. \quad (2.102)$$

Tätä ison apuympyrän sektorin S pinta-alan yhtälöä hyödynnetään vielä toistamiseen, kun tarkastellaan urapisteen sektoriaalista kulmaa fokaalikoordinaatistossa.

Skaalaamalla yhtälön (2.102) mukainen ympyräsektorin S ala kertoimella b/a saadaan ellipsin sektorin pinta-alaksi

$$\Delta A = \frac{ab}{2} E. \quad (2.103)$$

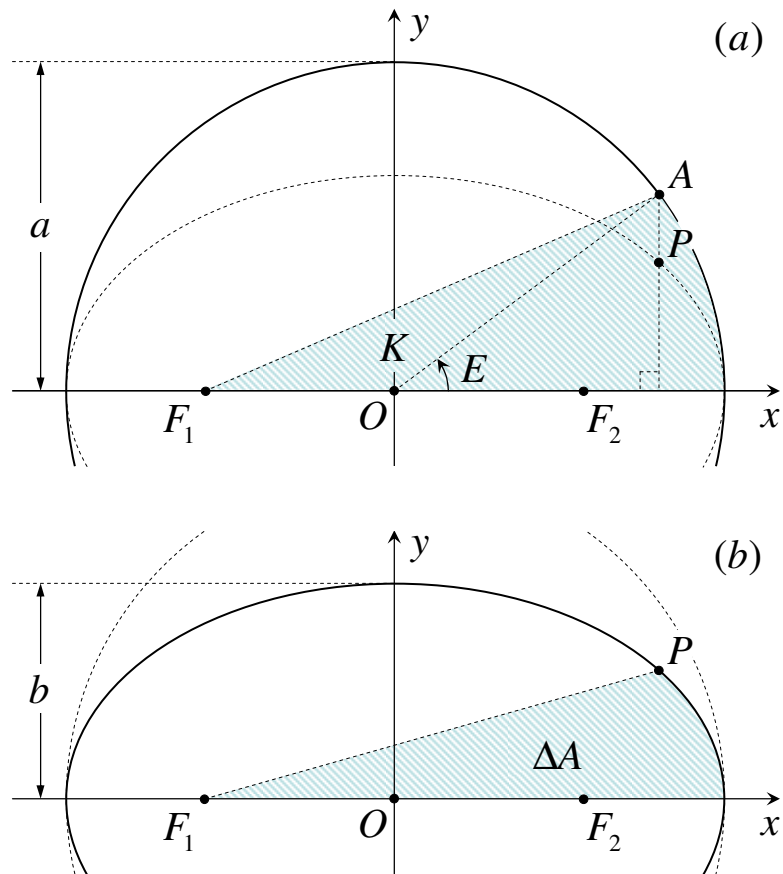
Ellipsin sektorin pinta-ala ΔA muunnetaan sektoriaaliseksi kulmaksi M_E sijoittamalla se yhtälöön (2.100). Sentraalikoordinaatistossa urapisteen P sektoriaalinen kulma

$$M_E = E. \quad (2.104)$$

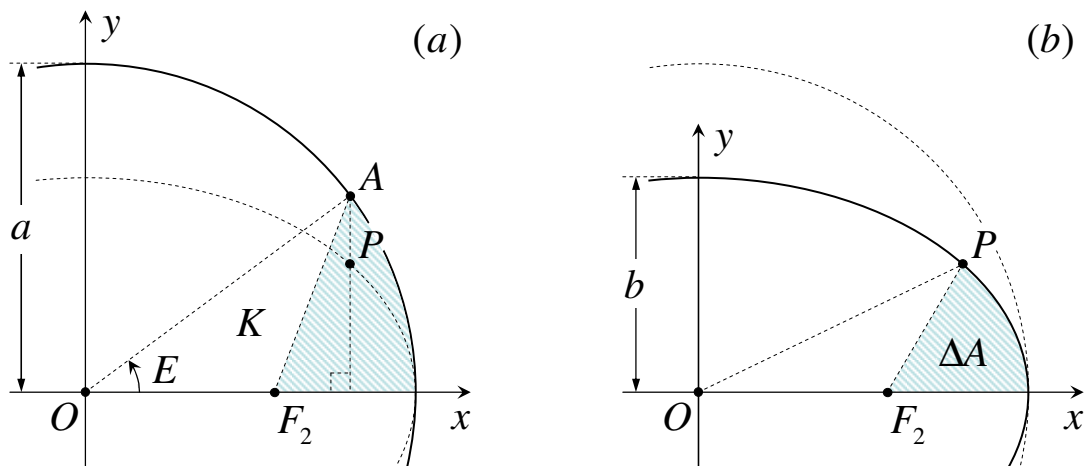
Urapisteen sektoriaalinen kulma M_E on siten sama kuin sen eksentrisen kulma E .

Sektoriaalinen kulma fokaalikoordinaatistossa

Tarkastellaan urapisteen sektoriaalista kulmaa fokaalikoordinaatistossa. Sekä vasen että oikea fokaalikoordinaatisto käsitellään samanaikaisesti. Käsittelyssä ilmenee, että fokaalikoordinaatistossa urapisteen eksentristä kulmaa E ja sektoriaalista kulmaa M yhdistää kuuluisa Keplerin yhtälö.



Kuva 2.14. Sektoriaalista kulmaa vasemmassa fokaalikoordinaatistossa vastaava sektori (a) isolla apuympyrällä ja (b) ellipsillä.



Kuva 2.15. Sektoriaalista kulmaa oikeassa fokaalikoordinaatistossa vastaava sektori (a) isolla apuympyrällä ja (b) ellipsillä.

Kuvissa 2.14a ja 2.14b vinoviivoin merkityt sektorit havainnollistavat vasemman fokaalikoordinaatiston sektoriaalista kulmaa. Vastaavasti kuvissa 2.15a ja 2.15b vinoviivoin merkityt sektorit havainnollistavat oikean fokaalikoordinaatiston sektoriaalista kulmaa.

Olkoon S kuten aiemmin eli ison apuymyrän sektorin pinta-ala. Kuvan 2.14a vinoviivoin täytetyn alueen pinta-ala saadaan ympyräsektorin S ja kolmion F_1OA summana ja kuvan 2.15a ympyräsektorin S ja kolmion OF_2A erotuksena. Olkoon K ympyräsektoriin S lisättävän tai siitä vähennettävän kolmion pinta-ala. Tällöin sektoriaalista kulmaa M fokaalikoordinaatistossa vastaavan sektorin pinta-ala

$$\Delta A = \frac{b}{a}(S \pm K), \quad (2.105)$$

jossa ylempi operaatio vastaa vasenta fokaalikoordinaatistoa (kuva 2.14b) ja alempi operaatio oikeaa fokaalikoordinaatistoa (kuva 2.15b).

Kuvien 2.14 ja 2.15a kolmioiden F_1OA ja OF_2A kannat ja korkeudet ovat vastaavat toisiaan, jolloin niiden pinta-alatkin vastaavat toisiaan ja saman merkinnän K käyttäminen molempien pinta-alalle on oikeutettua. Kolmioiden kannan pituudeksi saadaan yhtälön (2.16) nojalla $F_1O = ae = OF_2$. Kolmioiden korkeudeksi saadaan isolla apuymyrällä olevan vastinpuheen A koordinaattien perusteella $a \sin E$. Näin ollen kolmioiden F_1OA ja OF_2A pinta-alaksi saadaan

$$K = \frac{a^2 e \sin E}{2}. \quad (2.106)$$

Sijoitetaan yhtälöön (2.105) ympyräsektorin pinta-ala S ja kolmioiden pinta-ala K yhtälöiden (2.102) ja (2.106) mukaisesti. Sektoriaalista kulmaa M fokaalikoordinaatistossa vastaavan sektorin pinta-alaksi saadaan

$$\Delta A = \frac{ab}{2}(E \pm e \sin E). \quad (2.107)$$

Yhtälö (2.107) sijoitetaan ellipsin sektoriaalisen kulman M määritelmään (2.100). Saadaan tämän aliluvun päätulos, joka kytkee urapisteen eksentrisen kulman E ja sektoriaalisen kulman M fokaalikoordinaatistossa toisiinsa:

$$M = E \pm e \sin E, \quad (2.108)$$

jossa ylempi operaatio vastaa vasenta fokaalikoordinaatistoa ja alempi operaatio oikeaa fokaalikoordinaatistoa.

Keplerin yhtälö

Yhtälön (2.108) nojalla oikean fokaalikoordinaatiston tapauksessa (kuva 2.15) urapisteen P eksentrisen kulma E ja sektoriaalinen kulma M kytkeytyvät toisiinsa yhtälöllä

$$M = E - e \sin E, \quad (2.109)$$

joka tunnetaan paremmin nimellä *Keplerin yhtälö* (engl. *Kepler's equation*) [54, s. 73; 7, s. 185; 35, s. 188; 43, s. 122]. Jos eksentrisen kulma E tunnetaan, saadaan sektoriaalinen kulma M laskettua suoraan yhtälöstä. Päinvastainen tehtävä, jossa yhtälö pitäisi ratkaista eksentrisen kulman E suhteen, on merkittävästi vaikeampi. Tehtävän vaikeu-

den tunnisti jo Kepler itse. Hän oli hyvin vakuuttunut siitä, että yhtälöä ei voida ratkaista eksentrisen kulman E suhteen. Hallin [28] mukaan Kepler kirjoitti teoksessaan *Astronomia Nova* (engl. *New Astronomy*) seuraavasti:

“I am sufficiently satisfied that it [Kepler’s equation] cannot be solved a priori, on account of the different nature of the arc and the sine. But if I am mistaken, and any one shall point out the way to me, he will be in my eyes the great Apollonius.”

Hänen uskomuksensa yhtälön luonteesta osuivat oikeaan. Keplerin yhtälöä (2.109) ei nimittäin ole mahdollista ratkaista eksentrisen kulman E suhteen suljetussa muodossa [49, s. 125]. Ratkaisu voidaan kuitenkin ilmaista sarjakehitelmällä tai laskea iteratiivisin tekniikoin [43, s. 122]. Keplerin yhtälö on pieni, mutta varsin haastava yhtälö.

Fitzpatrick [20, s. 73–7] esittää iteratiivisen menetelmän muuttujan E ratkaisemiseksi ja todistaa menetelmän konvergoitumisen hyvin seikkaperäisesti. Hänen esittämä iteratiivinen menetelmä on seuraava. Kirjoitetaan Keplerin yhtälö (2.109) muotoon

$$E = M + \psi, \quad (2.110)$$

jossa lukua ψ estimoidaan jonolla

$$\psi_{k+1} = e \sin(M + \psi_k). \quad (2.111)$$

Jono (2.111) suppenee tasaisesti yksikäsitteiseen lukuun ψ , joka toteuttaa yhtälön

$$\psi = e \sin(M + \psi). \quad (2.112)$$

Eksentrisen kulma E ratkaistaan iteroimalla ensin yhtälöä (2.111), kunnes haluttu tarkkuus on saavutettu. Iteroimalla saatu luku ψ sijoitetaan sen jälkeen yhtälöön (2.110), josta E saadaan.

2.10 Hyperbeli lyhyesti

Tarkastellaan vielä hyperbeliä lyhyesti. Tärkein tulos, joka hyperbelin osalta tarvitaan, on urapisteen hyperbolisen kulman $F/2$ ja fokaalikulman $\nu/2$ tangenttifunktioiden välinen yhteys.

Hyperbeli, poikittaisakseli ja liittoakseli

Hyperbeli (engl. *hyperbola*) koostuu tason pisteistä P , joille kahdesta kiinteästä pisteestä F_1 ja F_2 laskettujen etäisyyksien erotus $|d_1 - d_2|$ on jokin positiivinen vakio ja pienempi kuin kiinteiden pisteiden välinen etäisyys [11, s. 109]. Tämä on hyperbelin metrisen määritelmä, koska se perustuu hyperbelin ominaisuuteen, joka edellyttää etäisyyden käsitettä eli metriikkaa.

Kiinteät pisteet F_1 ja F_2 ovat hyperbelin *polttopisteet* (engl. *focus*, mon. *focii*). Polttopisteiden yhdysjanan puolivälin piste on hyperbelin *keskipiste* (engl. *center*). Poltto-

pisteet yhdistävä suora on hyperbelin *poikittaisakseli* (engl. *transverse axis*). Keskipisteen kautta kulkeva poikittaisakselin normaali on hyperbelin *liittoakseli* (engl. *conjugate axis*). [11, s. 115]

Standardiyhtälö ja puoliakselit

Hyperbelin *standardiyhtälö* (engl. *standard equation of a hyperbola*) [23, s. 34; 11, 113] on

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (2.113)$$

jossa a ja b ovat positiivisia vakioita. Vakioita a ja b kutsutaan nimillä *poikittaisakselin puolikas* (engl. *transverse semi-axis*) ja *liittoakselin puolikas* (engl. *conjugate semi-axis*) vastaavasti.

Ellipsin tapauksessa $a > b$ eli isoakselin puolikas on aina suurempi kuin pikkuakselin puolikas. Hyperbelin tapauksessa puoliakselien pituuksilla ei ole kiinteää suuruusjärjestystä, vaan tilanteet $a > b$ ja $a < b$ ovat yhtä mahdollisia. Tästä johtuen hyperbelin akseleista ei ole mielekäästä käyttää suuruusjärjestystä implikoivia nimityksiä isoakseli ja pikkuakseli.

Negatiivinen ja positiivinen haara

Koska liittoakseli ja hyperbeli eivät leikkaa toisiaan, jakaa liittoakseli hyperbelin kahteen erilliseen pistejoukkoon. Näitä erillisiä pistejoukkoja kutsutaan hyperbelin haaroiksi.

Standardiyhtälön (2.113) mukaisen hyperbelin haarat jaetaan urapisteiden x -koordinaattien mukaan seuraavasti. *Negatiivinen haara* (engl. *negative branch*) koostuu pisteistä, joille $x \leq -a$ [23, s. 35]. *Positiivinen haara* (engl. *positive branch*) koostuu pisteistä, joille $x \geq a$ [23, s. 35]. Selvästikin urapiste kuuluu vastaavaan haaraan sen mukaan, onko x -koordinaatti negatiivinen vai positiivinen.

Hyperbelin tapauksessa standardikoordinaatisto on kiinnitetty siten, että kartioleikkauksen johtosuora kulkee origon kautta. Negatiivisesta polttopisteestä katsoen johtosuora on oikealla. Positiivisesta polttopisteestä katsoen johtosuora on vasemmalla. Kartioleikkauksen yleisen yhtälön (2.4) tapauksessa koordinaatisto on kiinnitetty siten, että johtosuora on origosta katsoen oikealla. Hyperbelin kannalta kartioleikkauksen yleisen yhtälön (2.4) koordinaatiston origo on kiinnitetty negatiivisen haaran polttopisteeseen.

Eksentrisyys

Hyperbelin *eksentrisyys* (engl. *eccentricity*) määräytyy puoliakselien pituuksista a ja b yhtälöllä [23, s. 85; 61, s. 859]

$$e = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}. \quad (2.114)$$

Hyperbelin standardiyhtälön (2.113) toteuttavat urapisteeet toteuttavat myös kartioleikkauksen fokaaliyhtälön (2.4), kun kartioleikkauksen eksentrisyys ε ja semi-latus rectum p määrätään seuraavasti. Kartioleikkauksen eksentrisyys $\varepsilon = e$ yhtälön (2.114) mukaan. Kartioleikkauksen semi-latus rectum p yhtälön (2.39) mukaan samoin kuin ellipsin yhteydessä. Itseisarvomerkkien poistamisen jälkeen semi-latus rectumin lauseke saa kuitenkin erilaisen muodon riippuen siitä, onko kyseessä ellipsi ($e < 1$) vai hyperbeli ($e > 1$).

Ratkaistaan yhtälö (2.114) liittoakselin puolikkaan suhteen, jolloin

$$b = a\sqrt{e^2 - 1}. \quad (2.115)$$

Koska hyperbelin tapauksessa $e > 1$, nähdään tästä yhtälöstä helposti, että liittoakselin puolikas voi olla suurempi kuin poikittaisakselin puolikas. Epäyhtälö $b > a$ toteutuu, kun $e > \sqrt{2}$. Lopuksi on syytä havaita, että yhtälöt (2.18) ja (2.115) ellipsin pikkuakselin puolikkaalle ja hyperbelin liittoakselin puolikkaalle poikkeavat toisistaan.

Hyperbolinen kulma

Hyperboliselle kosinille on voimassa erityinen ominaisuus

$$\cosh x \geq 1. \quad (2.116)$$

Tämän ominaisuuden johdosta hyperbeliä ei voi parametrisoida yhdellä yhtälöparilla kuten ellipsin yhtälöparilla (2.42). Kun parametrisoinnissa pitäydytään hyperbolisessa sinissä ja kosinissa, on negatiivinen ja positiivinen parametrisoitava erikseen, koska ominaisuus (2.116) rajaa parametrisoinnin toiseen haaraan.

Hyperbelin haarat voidaan parametrisoida muuttujalla F yhtälöpareilla [23, s. 36],

$$\begin{aligned} x^{\mp} &= \mp a \cosh F \\ y &= b \sinh F \end{aligned} \quad (2.117)$$

jossa symbolin \mp ylempi operaatio parametrisoi negatiivisen haaran ja alempi operaatio positiivisen haaran. Tässä työssä parametria F kutsutaan nimellä *hyperbolinen kulma* (engl. *hyperbolic angle*). Se on hyperbelin vastine ellipsin eksentriselle kulmalle.

Tästä nimityksestä on loogisesti lyhyt askel yhtenäiseen nimeämiskäytäntöön koskien kartioleikkausten parametrisoivia muuttujia. Edellä esitettyä nimeämistapaa seuraten ellipsin eksentristä kulmaa voitaisiin johdonmukaisesti kutsua nimellä *elliptinen kulma* (engl. *elliptic angle*). Vastaavasti paraabelin tapauksessa parametrisoivaa muuttujaa voitaisiin samaa käytäntöä seuraten kutsua nimellä *parabolinen kulma* (engl. *parabolic angle*). Kartioleikkauksen *parametrinen kulma* (engl. *parametric angle*) voitaisiin yleis-tää tarkoittamaan kartioleikkauksesta riippuen elliptistä, hyperbolista tai parabolista kulmaa.

Urapisteen fokaalisäde

Seuraavaksi keskitytään vain hyperbelin negatiivisen haaran tarkasteluun. Koska hyperbelillä on kaksi polttopistettä, liittyy myös hyperbeliin kaksi fokaalikoordinaatistoa,

vasen ja oikea. Kun fokaalikoordinaatisto (vasen/oikea) valitaan riippumattomasti haaraista (negatiivinen/positiivinen) saadaan kaikkiaan neljä erilaista yhdistelmää. Tästä seuraa kaksinkertainen määrä yhtälöitä ellipsiin verrattuna. Yhtälöiden runsauden rajoittamiseksi keskitytään vain toiseen haaraan (negatiivinen haara) vapaasti valitussa fokaalikoordinaatistossa.

Negatiivisen haaran koordinaatit fokaalikoordinaatistossa (vasen tai oikea) ovat,

$$\begin{aligned} x_F &= -a \cosh F \pm ae \\ y_F &= b \sinh F \end{aligned} \quad (2.118)$$

jossa ylempi operaatio vastaa vasenta fokaalikoordinaatistoa ja alempi oikeaa.

Fokaalikoordinaatistossa (vasen tai oikea) urapisteen napasäde on

$$r_F^2 = x_F^2 + y_F^2. \quad (2.119)$$

Negatiivisen haaran koordinaatit fokaalikoordinaatistossa (2.118) sijoitetaan tähän yhtälöön. Sijoitusten jälkeen yhtälö on

$$r_F^2 = a^2 (-\cosh F \pm e)^2 + a^2 (e^2 - 1) \sinh^2 F. \quad (2.120)$$

Lasketaan ensimmäisen termin binomin neliö auki. Otetaan yhtälön oikean puolen yhteiseksi tekijäksi a^2 . Yhdistellään sulkujen sisällä termejä hyödyntäen hyperbolista identiteettiä $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$. Sievennysten jälkeen saadaan

$$r_F^2 = a^2 (1 \mp 2e \cosh F + e^2 \cosh^2 F). \quad (2.121)$$

Yhtälön oikean puolen sulutettu osuus vastaa binomin neliötä,

$$r_F^2 = a^2 (1 \mp e \cosh F)^2. \quad (2.122)$$

Nyt yhtälön molemmat puolet ovat neliömuotoja ja yhtälö on valmis juurettavaksi. Otetaan puolittain neliöjuuri,

$$r_F = \pm a |1 \mp e \cosh F|. \quad (2.123)$$

Oikean puolen ensimmäinen symboli \pm ilmaisee neliöjuuren negatiivista ja positiivista tapausta, ja se on riippumaton jälkimmäisestä symbolista. Koska $r_F \geq 0$, voidaan negatiivinen tapaus hylätä. Koska $e \cosh F \geq 1$, itseisarvomerkkien poisto edellyttää vastalukua vain ylemmän operaation eli vasemman fokaalikoordinaatiston tapauksessa. Tämä tarkoittaa unaarisen etumerkkioperaation \mp suorittamista itseisarvon binomilausekkeelle. Saadaan tulos, hyperbelin negatiivisen haaran urapisteen fokaalisäde hyperbolisen kulman lausekkeena,

$$r_F = a(e \cosh F \mp 1), \quad (2.124)$$

jossa symbolin \mp ylempi operaatio vastaa vasenta ja alempi oikeaa fokaalikoordinaatistoa.

Puolitetun fokaalikulman ja hyperbolisen kulman yhtälö

Ryhdytään muodostamaan hyperbelin osalta tärkeintä tulosta. Toimitaan kuten ellipsin tapauksessa. Aloitetaan trigonometrisestä identiteetistä (2.94), jota sovelletaan fokaalikulmalle. Korvataan sen fokaalikulman kosini ja sini määritelmillään (2.80) ja (2.81) vastaavasti, ja lavennetaan oikean puolen murtolauseke napasäteellä. Tuloksena on yhtälö

$$\tan \frac{\nu}{2} = \pm \frac{y_F}{r_F + x_F}, \quad (2.125)$$

jossa etumerkki \pm on riippumaton valitusta fokaalikoordinaatistossa. Sijoitetaan tähän yhtälöön hyperbelin negatiivista haaraa fokaalikoordinaatistossa koskeva napasäde (2.124) ja koordinaatit (2.118). Sijoitusten jälkeen yhtälö on

$$\tan \frac{\nu}{2} = \pm \frac{a\sqrt{e^2 - 1} \sinh F}{a(e \cosh F \mp F) + a(-\cosh F \pm e)}. \quad (2.126)$$

Supistetaan yhtälön oikeaa puolta tekijällä a . Ryhmitellään nimittäjän termejä, jolloin

$$\tan \frac{\nu}{2} = \pm \frac{\sqrt{e^2 - 1} \sinh F}{(e - 1) \cosh F \pm (e - 1)}. \quad (2.127)$$

Otetaan vakio $e - 1$ nimittäjän yhteiseksi tekijäksi. Koska $e - 1 > 0$, voidaan nimittäjän yhteinen tekijä viedä osoittajan neliöjuuren sisään tavanomaiseen tapaan toiseen potenssiin korottamalla. Yhtälö on nyt sievennetty muotoon

$$\tan \frac{\nu}{2} = \sqrt{\frac{e+1}{e-1}} \left(\pm \frac{\sinh F}{\cosh F \pm 1} \right). \quad (2.128)$$

Sulkujen sisällä oleva etumerkki \pm on riippumaton nimittäjässä olevasta symbolista \pm , jonka ylempi operaatio vastaa vasempaa ja alempi oikeaa fokaalikoordinaatistoa.

Yhtälön (2.128) sulkujen sisällä olevan termin sieventäminen riippuu fokaalikoordinaatistosta. Yhtälö sievennetään tapauskohtaisesti seuraavalla tavalla. Vasemmassa fokaalikoordinaatistossa sulutettu termi sievenee hyperboliseksi tangentiksi,

$$\tan \frac{\nu_1}{2} = \sqrt{\frac{e+1}{e-1}} \tanh \frac{F}{2}. \quad (2.129)$$

Oikeassa fokaalikoordinaatistossa sulutettu termi sievenee hyperboliseksi kotangentiksi,

$$\tan \frac{\nu_2}{2} = \sqrt{\frac{e+1}{e-1}} \coth \frac{F}{2}. \quad (2.130)$$

Nämä yhtälöt ovat voimassa vain hyperbelin negatiiviselle haaralle. Positiivisen haaran tapauksessa vasemmalle ja oikealle fokaalikulmalle saadaan vastaavasti yhtälöitä (2.129) ja (2.130) vastaavat tulokset, joissa oikean puolen vakiokerroin on käänteisluku.

3 KEPLERIN ONGELMA

Satelliitin liikettä Maan painovoimakentässä voidaan mallintaa Keplerin ongelmalla. Keplerin ongelmassa tarkastellaan kahta kappaletta, jotka vetävät toisiaan puoleensa Newtonin painovoimalain mukaisesti. Tässä luvussa formuloidaan Keplerin ongelma matemaattisesti.

Aluksi esitellään taivaanmekaniikkaa, ja sen pohjana toimiva Newtonin painovoimalaki (luku 3.1). Sen jälkeen määritellään kahden kappaleen ongelma, ja sen erikoistapauksena saatava Keplerin ongelma, jossa vuorovaikutusvoimat ovat Newtonin painovoimalain mukaisia (luku 3.2). Lopuksi formuloidaan Keplerin ongelma matemaattisesti toisen kertaluvun differentiaaliyhtälönä (luku 3.3).

3.1 Newtonin painovoimalaki

Taivaanmekaniikkaa

Modernin taivaanmekaniikan juuret ovat vuodessa 1687, jolloin Newton julkaisi kuuluisan teoksensa *Principian*. Tässä teoksessa Newton esittelee liikelait ja painovoimalain ensimmäistä kertaa. Seuraavan 300 vuoden aikana taivaanmekaniikka ei kokenut merkittäviä edistysaskeleita. Vasta ensimmäisen satelliitin laukaisu ja tehokkaat tietokoneet antoivat alkusysäyksen uusille ideoille. Nykyään klassisten suorien havaintojen lisäksi voidaan mitata sekä etäisyyksiä että etäisyyksien muutosnopeuksia. [54, s. 63]

Karttusen ja muiden [35, s. 172] mukaan taivaanmekaniikka on taivaankappaleiden liikettä tutkiva tiede. Fitzpatrick [20, s. 1] tarkentaa, että taivaanmekaniikka tutkii taivaankappaleiden liikettä soveltaen matematiikan ja mekaniikan käsitteitä. Roy ja Clarke [52, s. 170] sijoittavat taivaanmekaniikan osaksi suurempaa kuvaa nimeämällä sen astronomian erääksi alahaaraksi. Seeberin [54, s. 62] satelliittigeodesian kirjassa taivaanmekaniikan perustehtäväksi nimetään taivaankappaleiden liikkeen tutkiminen niiden keskinäisessä vetovoimakentässä. Lisäksi Seeber esittelee taivaanmekaniikan perustehtävän yksinkertaisimmaksi muodoksi niin sanotun kahden kappaleen ongelman. Kahden kappaleen ongelma tarjoaa mallin, jota käytetään perustana Maata kiertävän satelliitin liikeradalle.

Newtonin painovoimalaki

Cambridgen yliopiston Trinity Collegea pidettiin kiinni vuosina 1665 ja 1666 alueella riehuneen mustansurman johdosta, ja Newton eli tänä aikana useita kuukausia kotonaan. Tätä ajanjaksoa hänen elämässään leimaavat useat merkittävät keksinnöt. Yksi näistä kyseisellä ajanjaksolla syntyneistä ideoista oli painovoimalain peruserätykset. Hän

kertoi keksinnöistään ystävilleen ja oppilailleen, mutta julkaisi tulokset vasta vuosien jälkeen. [6, s. 321, 334]

Vuonna 1687 Newton julkaisi kuuluisan teoksensa *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* (engl. *Mathematical Principles of Natural Philosophy*) [39, s. 260–1]. Hänen teostaan kutsutaan myös lyhyemmin nimellä *Principia*. Tässä teoksessa Newton julkaisee ensimmäistä kertaa painovoimalakinsa [54 s. 63], jonka peruseriaatteet hän oli ideoinut yli kaksikymmentä vuotta aiemmin.

Principian [46, s. 411] kolmannessa kirjassa, *The system of the world*, Newton esittää havaintoaineistoon vedoten, että kaikki taivaankappaleet vetävät toisiaan puoleensa voimalla, joka on suoraan verrannollinen massojen tuloon ja kääntäen verrannollinen etäisyyden neliöön. Tämän jälkeen hän yleistää esityksensä koskemaan kaikkia kappaleita maailmankaikkeudessa. Yleistyksessään Newton vetoaa päättelysääntöön, jonka hän esittelee kolmannen kirjan alkusivuilla [46, s. 399] seuraavasti:

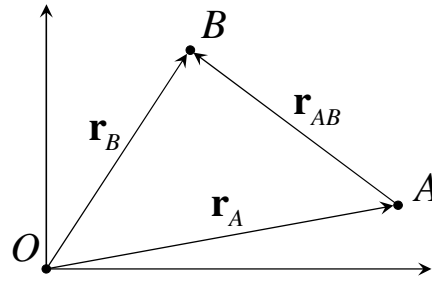
“Lastly, if it universally appears, by experiments and astronomical observations, that all bodies about the earth gravitate towards the earth, and that in proportion to the quantity of matter which they severally contain [...] we must, in consequence of this rule, universally allow that all bodies whatsoever are endowed with a principle of mutual gravitation.”

Aikaansa nähden tässä ehdotettu päätelmä universaalista gravitaatiosta vaikuttaa rohkealta ja vallankumoukselliselta. Päättelysäännön varsinainen sovellus nähdään kolmannen kirjan teoreemassa VII [46, s. 414], jossa Newton yleistää painovoimalakinsa:

“That there is a power of gravity pertaining to all bodies, proportional to the several quantities of matter which they contain.”

Näistä sanoista on kulunut aikaa yli 300 vuotta. Teoria tunnetaan nykyisin nimillä kuten Newtonin *painovoimalaki*, *vetovoimalaki* ja *gravitaatiolaki*. Englanniksi sitä kutsutaan nimellä *law of universal gravitation* [57, s. 182, 54, s. 67]. Näillä nimityksillä viitataan nykyisin poikkeuksetta painovoimalain matemaattiseen muotoon, jonka vektoriesitys annetaan seuraavaksi.

Tarkastellaan kuvan 3.16 mukaisesti kappaleita A ja B . Kuvaan on kappaleiden A ja B lisäksi havainnollistettu koordinaatistoa, jonka origo on pisteessä O ja jonka oletetaan olevan inertiaalinen. Kappaleet sijaitsevat nimiensä mukaisissa pisteissä, ja niiden paikkavektorit ovat \mathbf{r}_A ja \mathbf{r}_B . Vektori $\mathbf{r}_{AB} = \mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A$ vastaa alaindekseistä lukusuuntaan muodostettua vektoria \overrightarrow{AB} ja ilmaisee kappaleen B sijainnin kappaleen A suhteen. Vektorin \mathbf{r}_{AB} pituus vastaa kappaleiden välistä etäisyyttä $r_{AB} = \|\mathbf{r}_{AB}\|$.



Kuva 3.16. Newtonin painovoimalakiin liittyvät vektorit. Vektori \mathbf{r}_{AB} on alaindekseistä lukusuuntaan muodostettu vektori \overrightarrow{AB} .

Kappaleiden A ja B massat ovat m_A ja m_B . Näillä merkinnöillä Newtonin painovoimalaki voidaan esittää vektoryhtälönä [5, s. 388; 57, s. 182; 21, s. 25]

$$\mathbf{F}_{AB} = G \frac{m_A m_B}{\|\mathbf{r}_{AB}\|^3} \mathbf{r}_{AB}, \quad (3.1)$$

jossa vektori \mathbf{F}_{AB} on kappaleen A kokema vetovoima kappaleen B osalta. Voiman suunta on sama sen alaindekseistä lukusuuntaan muodostetun vektorin kanssa. Yhtälössä esiintyvä G on *gravitaatiovakio* (engl. *gravitational constant*) [5, s. 388]. Vaikka se on yksi pisimpään tunnetuista vakioista, niin se on samalla myös yksi epätarkimmin tunnetuista vakioista [57, s.182]. Painovoimalain antamaa vetovoimaa \mathbf{F}_{AB} kutsutaan myös nimellä *gravitaatiovoima* (engl. *gravitational force*) [5, s. 388]. Mekaanisten systeemien yhteydessä Newtonin painovoimalain mukaisia kappaleiden välisiä vuorovaikutusvoimia voidaan kutsua käänteisen neliön lakia noudattaviksi keskeisvoimiksi.

Tarkastellaan samaa tilannetta seuraavaksi kappaleen B näkökulmasta, ja tutkitaan sen kokemaa vetovoimaa kappaletta A kohtaan. Koska kappaleiden sijainnit toistensa suhteen noudattavat yhtälöä $\mathbf{r}_{BA} = -\mathbf{r}_{AB}$ ja koska kappaleiden välinen etäisyys on sama tarkastelunäkökulmasta riippumatta $\|\mathbf{r}_{BA}\| = \|\mathbf{r}_{AB}\|$, saadaan painovoimalaista (3.1) gravitaatiovoimia koskeva tulos

$$\mathbf{F}_{BA} = -\mathbf{F}_{AB}. \quad (3.2)$$

Toisin sanoen kumpikin kappale kokee yhtä suuren, mutta vastakkaisuuntaisen vetovoiman.

Tulos (3.2) vastaa Newtonin kolmatta liikelakia sen *heikossa muodossa* (engl. *weak form*) [5, s. 296]. Tässä muodossa kolmas liikelaki edellyttää, että voimaan liittyvä vastavoima on (i) yhtä suuri ja (ii) suunnaltaan vastakkainen. Nämä ehdot eivät kuitenkaan takaa, että vuorovaikuttaviin kappaleisiin liittyvä voima ja vastavoima olisivat yhdensuuntaisia kappaleita yhdistävän suoran kanssa. Sen vuoksi Newtonin kolmannesta liikelaista on vielä *vahva muoto* (engl. *strong form*) [5, s. 296], joka lisää vaatimuksen (iii) voima ja vastavoima ovat yhdensuuntaisia kappaleet yhdistävän suoran kanssa. Yhtälö (3.2) edellyttää ns. *etävaikutuksen* (engl. *action at distance*) olemassaoloa, mikä tarkoit-

taa, että riippumatta siitä kuinka kaukana vuorovaikuttava kappale on, vastavoima on välittömästi läsnä.

Einsteinin yleinen suhteellisuusteoria muutti käsitystä gravitaatiosta hyvin merkittäväällä tavalla. Yleisen suhteellisuusteorian mukaan gravitaatio on avaruuden geometri- nen ominaisuus, ja avaruuden geometria määräytyy vuorostaan avaruuden massa- ja energiajakaumasta [35, s. 610]. Kappaleet eivät vedä toisia puoleensa, vaan kaareuttavat avaruutta epäeuklidiseksi, ja avaruuden kaarevuus vaikuttaa kappaleiden liikkeisiin.

Newtonin teoriassa ainoa gravitaation lähde on massa (yhtälö 3.1). Energiaa ei huomioida lainkaan, mikä tarkoittaa, että Newtonin teorian mukaan esimerkiksi lepo- massattomat fotonit eivät kokisi tai aiheuttaisi gravitaatiovoimaa. Lisäksi Newtonin kolmannen lain edellyttämää etävaikutusta ei ole olemassa, sillä suhteellisuusteoria rajoittaa kaiken etenemisen valonnopeuteen.

Nykytiedon perusteella Newtonin mekaniikka ja painovoimalaki näyttävät puut- teellisina. Newtonin teoriassa avaruus on euklidinen, aika on riippumaton suure ja gra- vitaation ainoa lähde on massa. Siitä huolimatta ne ovat edelleenkin erittäin käyttökel- poisia, koska ne ovat matemaattisesti yksinkertaisia ja useimpiin sovelluksiin aivan riit- tävän tarkkoja approksimaatioita.

3.2 Keplerin ongelma

Kahden kappaleen ongelma

Klassisessa mekaniikassa *kahden kappaleen systeemi* (engl. *two-body system*) koostuu kappaleista A ja B , joiden massat m_A ja m_B tunnetaan. Kappaleisiin vaikuttaa sekä niiden keskinäiset vuorovaikutusvoimat että muut voimat. Kahden kappaleen systeemiä nimitetään toisinaan *kahden kappaleen ongelmaksi* (engl. *two-body problem*), kun halutaan erityisesti painottaa kappaleiden sijaintien ja nopeuksien ratkaisemista.

Newtonin toisen liikelain mukaan kappaleiden liikettä hallinnoi toista kertalukua oleva differentiaaliyhtälösystemi

$$\begin{cases} m_A \ddot{\mathbf{r}}_A = \mathbf{F}_A + \mathbf{F}_{AB}(\mathbf{r}_A, \mathbf{r}_B) \\ m_B \ddot{\mathbf{r}}_B = \mathbf{F}_B + \mathbf{F}_{BA}(\mathbf{r}_B, \mathbf{r}_A) \end{cases}, \quad (3.3)$$

jossa ratkaistavat funktiot \mathbf{r}_A ja \mathbf{r}_B esittävät kappaleiden sijaintia inertiaalikoordinaatis- tossa ajan suhteen. Voimat \mathbf{F}_{AB} ja \mathbf{F}_{BA} ovat kappaleiden toisiinsa kohdistamat vuoro- vaikutusvoimia, ja voimat \mathbf{F}_A ja \mathbf{F}_B ovat muita kappaleisiin kohdistuvia, yleensä sys- teemin ulkopuolisia voimia.

Vuorovaikutusvoimien alaindeksit tulkitaan siten, että esimerkiksi voima \mathbf{F}_{AB} lue- taan kappaleeseen A kokemaksi ja kappaleesta B aiheutuvaksi. Alaindeksien lukujär- jestys on selkeyssyistä ja epäsäännöllisyyksien välttämiseksi hyvä pitää normaalin luku- suunnan mukaisena vasemmalta oikealle etenevänä. Alaindeksissä olevien kirjainten

merkintäjärjestys vuorostaan tähtää siihen, että voima \mathbf{F}_{AB} on yleensä samansuuntainen alaindekseistä lukusuuntaan muodostetun vektorin \overrightarrow{AB} kanssa.

Yleisemmin *usean kappaleen systeemissä* (engl. *many-body system* tai *n-body system*) jokaiseen kappaleeseen $I = 1..n$ vaikuttaa samalla tavalla sekä keskinäiset vuorovaikutusvoimat \mathbf{F}_{IJ} kappaleiden I ja J välillä että muut voimat \mathbf{F}_I . Kappaleiden liikettä hallinnoiva differentiaaliyhtälösystemi koostuu n differentiaaliyhtälöstä, jossa kussakin esiintyy $n-1$ vuorovaikutusvoimaa.

Kappaleiden väliset vuorovaikutusvoimat \mathbf{F}_{AB} ja \mathbf{F}_{BA} ovat systeemin *sisäisiä voimia* (engl. *internal forces*). Systeemin sisäisiä voimia ovat kaikki ne voimat, joiden lähde kuuluu systeemiin [57, s. 331]. Tästä seuraa, että sisäiset voimat ovat sama asia kuin kappaleiden väliset vuorovaikutusvoimat. Voimat \mathbf{F}_A ja \mathbf{F}_B ovat systeemin *ulkoisia voimia* (engl. *external forces*), niihin on yhteenlaskettu kaikki kappaleisiin kohdistuvat voimat, jotka eivät aiheudu mallinnettujen kappaleiden keskinäisestä vuorovaikutuksesta [57, s. 331]. Esimerkiksi kitkavoima on ulkoinen voima. Jos systeemiin ei vaikuta ulkoisia voimia, sanotaan systeemin olevan *suljettu* (engl. *closed*) tai *eristetty* (engl. *isolated*).

Systeemin sisäisistä voimista voidaan erotella yksi merkittävä voimien luokka. Sisäisen voiman sanotaan olevan *keskeisvoima* (engl. *central force*), mikäli sen vaikutussuora on yhdensuuntainen kappaleet yhdistävän suoran kanssa [5, s. 238]. Jos keskeisvoiman suuruus riippuu pelkästään kappaleiden välisestä etäisyydestä, keskeisvoima on *isotrooppinen* (engl. *isotropic*) [5, s. 238]. Suljetun systeemin kulmaliikemäärän säilymlaki pätee vain, jos kaikki sisäiset voimat ovat isotrooppisia keskeisvoimia (todistettu esimerkiksi [57, s. 337] ja [5, s. 297]). Tässä työssä keskeisvoimat oletetaan isotrooppisiksi, ellei muuta sanota. Jos systeemin sisäinen voima ei ole keskeisvoima, on tällöin kyseessä *epäkeskeisvoima* (engl. *non-central force*).

Epäkeskeisvoimia ei välttämättä tule helposti mieleen. Esimerkiksi kumpikin kahdesta liikkeessä olevasta varatusta hiukkasesta synnyttää magneettikentän, joka kohdistaa toiseen hiukkaseen voiman $\mathbf{F} = \mathbf{v} \times \mathbf{B}$. Nämä voimat ovat kyllä vastakkaissuuntaiset, mutta eivät yleisessä tapauksessa yhdensuuntaisia hiukkaset yhdistävän suoran kanssa. Näin ollen ne ovat epäkeskeisvoimia.

Systeemiin vaikuttavat voimat, jotka eivät ole keskeisvoimia, ovat epäkeskeiset sisäiset voimat ja ulkoiset voimat. Niitä nimitetään yhteisesti *häiriövoimiksi* (engl. *perturbing forces*) erotuksena keskeisvoimista [54, s. 83]. Kun Maata ja sitä kiertävää satelliittia mallinnetaan kahden kappaleen ongelmana, voidaan satelliittiin vaikuttaviksi häiriövoimiksi huomioida esimerkiksi Auringon säteilypaineesta aiheutuva voima, Kuun vetovoima ja Maan vetovoiman epäkeskeinen komponentti, joka johtuu Maan massan epätasaisesta jakautumisesta ja Maan ellipsoidimuodosta.

Koska systeemissä (3.3) differentiaaliyhtälöt riippuvat toistensa ratkaisuihin, sanotaan yhtälöiden olevan *kytketty* (engl. *coupled*) toisiinsa. Yhtälöiden kytkentä tapahtuu vuorovaikutusvoimissa \mathbf{F}_{AB} ja \mathbf{F}_{BA} , jotka voivat yleisesti ottaen riippua jollain mahdol-

lisesti hyvin monimutkaisella tavalla ratkaisuisista \mathbf{r}_A ja \mathbf{r}_B . Lineaaristen, vakiokertoimisten differentiaaliyhtälösystemien $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ ratkaiseminen perustuu kytkennän purkamiseen sopivasti valitulla koordinaattimuunnoksella. Sen jälkeen toisistaan riippumattomat, yksiulotteiset differentiaaliyhtälöt voidaan ratkaista integroimalla.

Kahden kappaleen systeemin (3.3) analysoinnin kannalta merkittävä keskeisvoimien luokka muodostuu voimista, joiden suuruus on verrannollinen kappaleiden välisen etäisyyden murto- tai kokonaislukupotenssiin. Näiden keskeisvoimien suuurudet ovat toisin sanoen muotoa

$$F = kr^n, \quad (3.4)$$

jossa k on jokin vakio, r kappaleiden välinen etäisyys ja n etäisyyden murto- tai kokonaislukupotenssi. Merkittäväksi yhtälön (3.4) muotoiset keskeisvoimat tekee se, että tietyillä harvoilla potenssin n arvoilla suljetun kahden kappaleen systeemin (3.3) ratkaisu pystytään ilmaisemaan elliptisten tai trigonometristen funktioiden avulla [57, s. 291; 25, s. 88–9].

Tästä keskeisvoimien luokasta tarkastellaan erikseen vielä kahta tärkeää aliluokkaa kirjan [5, s. 251] esitystä seuraten. Ensimmäinen merkittävä voimien aliluokka saadaan valitsemalla $n=1$ ja $k < 0$. Tällaisia voimia sanotaan *lineaariseksi palautusvoimiksi* (engl. *linear restoring force*). Näiden voimien muodostamat systeemit ovat harmonisia (yksitaajuuksisia) värähtelijöitä [5, s. 122]. Toinen merkittävä, mahdollisesti jopa kaikista tärkein, keskeisvoimien aliluokka saadaan valitsemalla $n = -2$. Näitä voimia sanotaan *käänteisen neliön lakia* (engl. *inverse-square law*) noudattaviksi voimiksi. Tätä lakia noudattavien keskeisvoimien suuruus on kääntäen verrannollinen vuorovaikuttavien massapisteiden etäisyyden neliöön eli $F_{ij} \propto 1/r_{ij}^2$. Voimat, kuten massapisteiden välinen vetovoima (Newtonin gravitaatio) ja varattujen hiukkasten välinen elektrostaattinen vetovoima (Coulombin voima), ovat käänteisen neliön lakia noudattavia keskeisvoimia.

Keplerin ongelma

Kaikista kuuluisin klassisen mekaniikan ratkaisema ongelma on Keplerin ongelma [29, s. 130]. Ei ole kohtuutonta liioittelua sanoa, kuten Hand ja Finch [29, s. 130] arvioivat, että Newtonin mekaniikka kehitettiin tämän ongelman ratkaisemiseksi. Seuraavaksi esitellään Keplerin ongelma sekä sanallisesti että matemaattisesti.

Keplerin ongelma (engl. *Kepler's problem*) on kahden kappaleen ongelma, jossa systeemi on suljettu ja jossa vuorovaikutusvoimat noudattavat Newtonin painovoimalakia [56, s. 301; 25, s. 92; 57, s. 300]. Lisäksi ongelman käsittelyssä tehdään tavallisesti yksinkertaistava oletus, että kappaleet ovat massajakaumaltaan pallosymmetrisiä, jolloin Gaussin lain nojalla kappaleita voidaan käsitellä massapisteinä [7, s. 11; 20, s. 4, 43, s. 118].

Pistemäisen kappaleen häiriötöntä liikettä Newtonin painovoimakentässä kutsutaan vastaavasti nimellä *Keplerin liike* (engl. *Keplerian motion*) [54, s. 63]. Keplerin liike toteuttaa Keplerin ongelman liikeyhtälöt.

3.3 Liiketyhtälöt

Liiketyhtälöt Keplerin ongelmassa

Muodostetaan Keplerin ongelman liiketyhtälöt inertiaalikoordinaatistossa. Määritelmän mukainen kahden kappaleen systeemi erikoistetaan siten, että (i) systeemi on suljettu, (ii) vuorovaikutusvoimat ovat Newtonin painovoimalain mukaisia, ja (iii) kappaleet ovat massapisteistä. Seuraavassa esityksessä voidaan ajattelun apuna käyttää mielikuvaa, että kappaleet ovat esimerkiksi Maa (kappale A) ja sitä kiertävä satelliitti (kappale B).

Yleisen kahden kappaleen systeemin liiketyhtälöt (3.3) ovat

$$\begin{cases} m_A \ddot{\mathbf{r}}_A = \mathbf{F}_A + \mathbf{F}_{AB}(\mathbf{r}_A, \mathbf{r}_B) \\ m_B \ddot{\mathbf{r}}_B = \mathbf{F}_B + \mathbf{F}_{BA}(\mathbf{r}_B, \mathbf{r}_A) \end{cases}.$$

Koska systeemi on suljettu, ulkoisia voimia \mathbf{F}_A ja \mathbf{F}_B ei ole. Näin ollen

$$\mathbf{F}_A = \mathbf{F}_B = \mathbf{0}. \quad (3.5)$$

Vuorovaikutusvoimat \mathbf{F}_{AB} ja \mathbf{F}_{BA} noudattavat Newtonin painovoimalakia (3.1), ja ne ovat Newtonin kolmannen liikelain (3.2) mukaisesti keskenään yhtä suuret ja vastakkaisuuntaiset,

$$\mathbf{F}_{AB} = G \frac{m_A m_B}{\|\mathbf{r}_{AB}\|^3} \mathbf{r}_{AB}, \quad (3.6)$$

$$\mathbf{F}_{BA} = -\mathbf{F}_{AB}. \quad (3.7)$$

Kahden kappaleen systeemin liiketyhtälöt (3.3) voidaan edellä esitettyjen oletusten perusteella kirjoittaa muotoon

$$\begin{cases} m_A \ddot{\mathbf{r}}_A = G \frac{m_A m_B}{\|\mathbf{r}_{AB}\|^3} \mathbf{r}_{AB} \\ m_B \ddot{\mathbf{r}}_B = -G \frac{m_A m_B}{\|\mathbf{r}_{AB}\|^3} \mathbf{r}_{AB} \end{cases}. \quad (3.8)$$

Differentiaaliyhtälösystemi (3.8) on Keplerin ongelma sen matemaattisessa muodossa. Ratkaisuksi kelpaavat vektoriarvoiset funktiot $\mathbf{r}_A(t)$ ja $\mathbf{r}_B(t)$, jotka toteuttavat differentiaaliyhtälösystemin (3.8). Ratkaisut kuvaavat kappaleiden A ja B sijaintia ajan suhteen.

Massakeskipisteen liiketyhtälö

Määritelmällisesti systeemin massakeskipiste \mathbf{r}_M saadaan painotettuna keskiarvona,

$$\mathbf{r}_M = \frac{m_A \mathbf{r}_A + m_B \mathbf{r}_B}{m_A + m_B}. \quad (3.9)$$

Derivoidaan massakeskipisteen yhtälö (3.9) puolittain ajan suhteen. Saadaan yhtälö

$$\ddot{\mathbf{r}}_M = \frac{m_A \ddot{\mathbf{r}}_A + m_B \ddot{\mathbf{r}}_B}{m_A + m_B}. \quad (3.10)$$

Sijoitetaan (3.8) yhtälöön (3.10). Yhtälön (3.10) oikea puoli häviää. Saadaan tulos, jonka mukaan systeemin massakeskipisteelle on voimassa yhtälö

$$\ddot{\mathbf{r}}_M = \mathbf{0}. \quad (3.11)$$

Tämä tulos tarkoittaa, että käytetyssä koordinaatistossa systeemin massakeskipiste \mathbf{r}_M ei ole kiihtyvässä liikkeessä suhteessa koordinaatiston origoon. Yhtälö (3.11) on itse asiassa seuraus siitä, että systeemi oletettiin suljetuksi ja koordinaatisto inertiaaliseksi.

Massakeskipisteen differentiaaliyhtälö (3.11) voidaan ratkaista suoralla integroinnilla. Kaksinkertainen integrointi ajan suhteen tuottaa yhteensä 6 integroimisvakiota,

$$\mathbf{r}_M = \mathbf{x}_M + \mathbf{v}_M t, \quad (3.12)$$

jossa vakiovektori \mathbf{x}_M on massakeskipisteen alkusijainti, ja vakiovektori \mathbf{v}_M on massakeskipisteen tasainen etenemisnopeus. Keplerin ongelman differentiaaliyhtälösystemin (3.8) ratkaiseminen edellyttää kuitenkin yhteensä 12 integroimisvakiota, joten massakeskipisteen likeyhtälön ratkaisu (3.12) on vasta puolet Keplerin ongelman ratkaisusta.

Redusointi

Tavoitteena on redusoida kahden tuntemattoman funktion differentiaaliyhtälösystemi vain yhden tuntemattoman funktion differentiaaliyhtälöksi. Saatu tulos voidaan tulkita yhden kappaleen ongelman kuvaavaksi differentiaaliyhtälöksi. Tästä syystä sanotaan, että kahden kappaleen ongelma redusoidaan yhden kappaleen ongelmaksi.

Supistetaan yhtälöistä (3.8) molemmilla puolilla esiintyvät massat, ensimmäisestä m_A ja toisesta m_B . Vähennetään sen jälkeen ylempi yhtälö alemmasta yhtälöstä. Näillä toimenpiteillä kahden differentiaaliyhtälön systeemi saadaan muunnettua yhdeksi differentiaaliyhtälöksi

$$\ddot{\mathbf{r}}_B - \ddot{\mathbf{r}}_A = -G(m_A + m_B) \frac{\mathbf{r}_{AB}}{\|\mathbf{r}_{AB}\|^3}. \quad (3.13)$$

Muistetaan, että yhtälön oikealla puolella esiintyvä vektori $\mathbf{r}_{AB} = \mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A$. Näin ollen yhtälössä esiintyy edelleen kaksi tuntematonta funktiota $\mathbf{r}_A(t)$ ja $\mathbf{r}_B(t)$, vaikka differentiaaliyhtälöitä on enää yksi.

Yhtälön (3.13) vasen puoli $\ddot{\mathbf{r}}_B - \ddot{\mathbf{r}}_A$ voidaan esittää vektoria \mathbf{r}_{AB} käyttäen, jolloin tuloksena on vain yhtä tuntematonta funktiota $\mathbf{r}_{AB}(t)$ sisältävä differentiaaliyhtälö. Osoitetaan, että $\ddot{\mathbf{r}}_B - \ddot{\mathbf{r}}_A$ on itse asiassa vektorin \mathbf{r}_{AB} toinen derivaatta ajan suhteen,

$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{r}}_B - \ddot{\mathbf{r}}_A &= \frac{d^2}{dt^2}[\mathbf{r}_B] - \frac{d^2}{dt^2}[\mathbf{r}_A] \\ &= \frac{d^2}{dt^2}[\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A] = \frac{d^2}{dt^2}[\mathbf{r}_{AB}] = \ddot{\mathbf{r}}_{AB}\end{aligned}\quad (3.14)$$

Tätä tulosta käyttäen differentiaaliyhtälö (3.13) sievennetään muotoon, jossa esiin-tyy vain yhtä tuntematonta funktiota $\mathbf{r}_{AB}(t)$. Kahden kappaleen ongelmaa kuvaava diffe-rentiaaliyhtälösystemi on nyt yksinkertaistettu muotoon

$$\ddot{\mathbf{r}}_{AB} = -\mu \frac{\mathbf{r}_{AB}}{\|\mathbf{r}_{AB}\|^3}, \quad (3.15)$$

jossa

$$\mu = G(m_A + m_B). \quad (3.16)$$

Kahden kappaleen ongelma on nyt redusoitu yhden kappaleen ongelmaksi. Differentiaa-liyhtälö (3.15) on epälineaarinen, mutta harhaanjohtavan yksinkertaisen näköinen.

Näennäinen, todellinen ja kuvitteellinen kiihtyvyys

Vektori \mathbf{r}_{AB} voidaan tulkita kappaleen B sijainniksi, kun koordinaatiston origo on kiin-nitetty kappaleeseen A . Vaikka vektori $\ddot{\mathbf{r}}_{AB}$ voidaan vastaavasti tulkita kappaleen B kiihtyvyydeksi samassa koordinaatistossa, jää epäselväksi mitä tällä todella tarkoitetaan. Tulkinta vaatii huolellisempaa tarkastelua koskien kappaleen kiihtyvyyttä eri koordinaa-tistoissa.

Koska $\ddot{\mathbf{r}}_A \neq \mathbf{0}$ ja $\ddot{\mathbf{r}}_B \neq \mathbf{0}$, ovat molemmat kappaleet kiihtyvässä liikkeessä inertiaali-koordinaatiston origoon nähden. Tämän seurauksena koordinaatisto, jonka origo kiinni-tetään jompaankumpaan kappaleeseen, on myös kiihtyvässä liikkeessä inertiaalikoor-dinaatistoon nähden ja siten epäinertiaalinen koordinaatisto.

Kappaleen kiihtyvyys tulisi aina tulkita tarkoittamaan kappaleen näennäistä kiihty-vyyttä. Näennäinen kiihtyvyys määritellään lähdeettä [5, s. 9] seuraten todellisen ja ku-vitteellisen kiihtyvyyden avulla seuraavasti. *Näennäinen kiihtyvyys* (engl. *apparent ac-celeration*) on summa todellisesta ja kuvitteellisesta kiihtyvyydestä. *Todellinen kiihty-vyys* (engl. *true acceleration*) on kappaleen kiihtyvyys, joka aiheutuu kappaleeseen vai-kuttavista voimista Newtonin toisen lain mukaisesti. *Kuvitteellinen kiihtyvyys* (engl. *fictitious acceleration*) aiheutuu koordinaatiston liikkeistä ja häviää inertiaalikoordinaa-tistoon siirryttäessä. Näin ollen inertiaalikoordinaatistossa kappaleen näennäinen kiihty-vyys on sama kuin sen todellinen kiihtyvyys.

Uuden tiedon perusteella vektori $\ddot{\mathbf{r}}_{AB}$ on mielekästä tulkita kappaleen B näennäi-seksi kiihtyvyydeksi, kun havaitsija on kappaleella A . Suhteellinen sijainti on tulkinta-na mielekkäämpi kuin kappaleiden sijantien erotusvektori.

Lisämääreetön kiihtyvyys tarkoittaa näennäistä kiihtyvyyttä

Esitettyjen määritelmien mukaan pelkkä kiihtyvyys tarkoittaa aina näennäistä kiihtyvyyttä. Näennäinen ja todellinen kiihtyvyys kuitenkin samaistuvat inertiaalikoordinaatistossa, mikä mahdollistaa sen, että pelkällä kiihtyvyydellä voidaan myös viitata inertiaalikoordinaatistossa todelliseen kiihtyvyyteen. Tämä piirre saattaa olla tekstistä riippuen hyvinkin toivottavaa. Toisaalta se voi myös hankaloittaa merkittävästi oikean tulkin tekemistä, kun puhutaan pelkästä kiihtyvyydestä. Pelkkä kiihtyvyys tulisi aina tulkita näennäiseksi kiihtyvyydeksi.

Tämän kielellisen ongelman seuraus on se, että vaikka esitettyjen määritelmien mukaan pelkkä kiihtyvyys tarkoittaa aina näennäistä kiihtyvyyttä, tulkitaan lisämääreen poisjääminen käsitteen lavenemisena, mikä on luonnollisin tulkinta. Tällöin kiihtyvyyttä ryhdytään lukemaan näennäisen, todellisen ja kuvitteellisen kiihtyvyyden yläkäsitteenä, mistä voi aiheutua epäselvyyttä tekstiin. Tässä työssä mainitaan tarpeen vaatiessa erikseen, tarkoitetaanko kiihtyvyydellä näennäistä, todellista vai kuvitteellista kiihtyvyyttä.

Epäinertiaalisen ja inertiaalisen muodon samanlaisuus

Koordinaatiston origon liike vaikuttaa liikeradan näennäiseen muotoon. Jo siirtyminen inertiaalikoordinaatistosta toiseen vääristää liikeradan näennäistä muotoa, vaikka muunnos säilyttää koordinaatiston inertiaalisena. Selvitetään, millä tavalla liikeradan näennäinen muoto vääristyy siirryttäessä yhdestä inertiaalikoordinaatistosta toiseen.

Galilein ryhmä (engl. *Galilean group*) on algebrallinen ryhmä, joka koostuu niistä aika-avaruuden koordinaattimuunnoksista, joiden suhteen Newtonin toinen laki on invariantti eli säilyttää matemaattisen muotonsa. Jos muunnos kuuluu Galilein ryhmään, sanotaan sen olevan *Galilein muunnos* (engl. *Galilean transformation*). Jokainen Galilein muunnos on mahdollista koostaa käyttäen ajan kiinteää siirtoa, avaruuden kiinteää siirtoa, kiinteää kiertoa ja tasaista liikettä. [4, s. 6–9]

Siirtyminen yhdestä inertiaalikoordinaatistosta toiseen on yllä esitetyn perusteella Galilein muunnos. Muunnos vaikuttaa liikeradan näennäiseen muotoon. Muunnoksen aiheuttama vääristys on kuitenkin hyvin rajattu, sillä avaruuden jäykät muunnokset eli kiinteä translaatio ja rotaatio eivät vaikuta muotoon. Ainoastaan inertiaalikoordinaatistojen tasainen liike suhteessa toisiinsa vääristää muotoja. Vääristyminen, joka aiheutuu tasaisesta liikkeestä, on nimeltään *leikkaus* (engl. *shearing*).

Inertiaalikoordinaatistossa voidaan, leikkausvääristymää lukuun ottamatta, havaita liikeradan todellinen muoto. Näin ollen kappaleen B liikeradan todellinen muoto voidaan selvittää, kun systeemiä tarkastellaan sen massakeskipisteeseen kiinnitetystä inertiaalikoordinaatistossa.

Redusoidun liikeyhtälön (3.15) ratkaisu on vektoriarvoinen funktio $\mathbf{r}_{AB}(t)$, joka kuvaa kappaleen B liikettä koordinaatistossa, jonka origo on kiinnitetty kappaleeseen A . Selvitetään seuraavaksi, kuinka kappaleeseen A kiinnitetty epäinertiaalikoordinaatisto vaikuttaa kappaleen B liikeradan näennäiseen muotoon. Tämä tehdään muuntamalla

liikeyhtälöä (3.15) siten, että sen ratkaisu on vektoriarvoinen funktio $\mathbf{r}_{MB}(t)$, joka kuvaa kappaleen B liikettä systeemin massakeskipisteen \mathbf{r}_M suhteen.

Muodostetaan vektori

$$\mathbf{r}_{MB} = \mathbf{r}_B - \mathbf{r}_M. \quad (3.17)$$

Sijoitetaan massakeskipisteen määritelmä (3.9) yhtälöön (3.17), ja ratkaistaan vektorin \mathbf{r}_{AB} suhteen. Saadaan tulos, jonka perusteella vektori \mathbf{r}_{AB} voidaan esittää vektorin \mathbf{r}_{MB} avulla seuraavasti:

$$\mathbf{r}_{AB} = k\mathbf{r}_{MB}, \quad (3.18)$$

jossa

$$k = \frac{m_A + m_B}{m_A}. \quad (3.19)$$

Sijoitetaan (3.18) redusoituun liikeyhtälöön (3.15),

$$\frac{d^2}{dt^2} [k\mathbf{r}_{AB}] = -G(m_A + m_B) \frac{k\mathbf{r}_{AB}}{\|k\mathbf{r}_{AB}\|^3}. \quad (3.20)$$

Yhtälöt voidaan jakaa puolittain k :lla. Tämän jälkeen kerrointa k esiintyy ainoastaan oikean puolen nimittäjässä olevan normin sisällä. Tuodaan kerroin k normin ulkopuolelle,

$$\ddot{\mathbf{r}}_{MB} = -\frac{G(m_A + m_B)}{k^3} \frac{\mathbf{r}_{MB}}{\|\mathbf{r}_{MB}\|^3}. \quad (3.21)$$

Nimittäjässä esiintyvä k korvataan yhtälöä (3.19) käyttäen ja sievennetään. Saadaan tulos

$$\ddot{\mathbf{r}}_{MB} = -\mu' \frac{\mathbf{r}_{MB}}{\|\mathbf{r}_{MB}\|^3}, \quad (3.22)$$

jossa

$$\mu' = G \frac{m_A^3}{(m_A + m_B)^2}. \quad (3.23)$$

Vertaamalla keskenään kappaleen B liikeyhtälöitä (3.15) ja (3.22) nähdään, että yhtälöt ovat samaa muotoa. Tämä tarkoittaa, että kappaleen B liikeradan muoto systeemin massakeskipisteeseen kiinnitettyssä inertiaalikoordinaatistossa on, skaalausta lukuun ottamatta, sama kuin kappaleeseen A kiinnitettyssä epäinertiaalikoordinaatistossa. Tuloksen perusteella liikeradan muotoa inertiaalikoordinaatistossa voidaan tutkia analysoimalla redusoitua liikeyhtälöä (3.15).

4 INTEGROINTI

Keplerin ongelman differentiaaliyhtälö ratkaistaan etsimällä kuusi integroimisvakioita, jotka yksilöivät ratkaisun. Tässä luvussa esitellään kuusi integraalia, jotka Keplerin ongelmalle voidaan löytää.

Aluksi (luku 4.1) esitellään (i) differentiaaliyhtälön ratkaisemiseen liittyviä peruskäsitteitä, (ii) liikeyhtälöiden integroinnissa syntyvien liikevakioiden merkitys ja yhteys symmetrioihin, ja (iii) Keplerin ongelman kannalta tärkeä piilosymmetria, Laplace–Runge–Lenz-vektori. Sitten muodostetaan kolme integraalia karteesisessa koordinaatistossa: pyörimismäärävektori (luku 4.2), eksentrisyysvektori (luku 4.3) ja energia (luku 4.4). Sen jälkeen Keplerin yhtälö muunnetaan sylinterikoordinaatistoon (luku 4.5). Lopuksi muodostetaan kolme integraalia sylinterikoordinaatistossa: pinnanopeus (luku 4.6), eksentrisyys ja perisentrikulma (luku 4.7), ja perisentriaika (luku 4.8). Viimeisen integraalin laskeminen on haastavaa, mistä johtuen sen laskemista käsitellään erikseen (luku 4.9).

4.1 Ratkaisuperiaatteet

Muodollinen ratkaiseminen eli redusointi neliöinneiksi

Differentiaaliyhtälön sanotaan olevan *ratkaistu* (engl. *solved*), kun riippuvan muuttujan arvo on esitetty riippumattoman muuttujan funktiona. Funktio voi sisältää integraaleja, joiden laskeminen ei välttämättä ole mahdollista tunnettujen alkeisfunktioiden avulla. [22, s. 6]

Jos differentiaaliyhtälön ratkaisu voidaan esittää eksplisiittisesti pelkästään alkeisfunktioita käyttäen, sanotaan ratkaisun olevan *suljetussa muodossa* (engl. *closed-form*) [3, s. 151]. Jos ratkaisu sisältää vielä integraaleja, sanotaan differentiaaliyhtälöön olevan ratkaistu *neliöintejä vaille* (engl. *up to quadratures*) [42, s. 6] riippumatta siitä, voidaanko integraaleja laskea alkeisfunktioita käyttäen. Englanninkielisessä kirjallisuudessa tavataan myös sanoa, että probleema tai sen ratkaisu on *reduoitu neliöinneiksi* (engl. *reduced to quadratures*) [20, s. 46; 3, s. 151].

Antiikin kreikkalaiset tarkoittivat termillä *neliöinti* (engl. *quadrature*) sitä, että pyrittiin muodostamaan neliö, jonka pinta-ala vastasi jonkin toisen kuvion, esimerkiksi ympyrän, pinta-alaa [42, s. 6]. Nykyisessä merkityksessään neliöinti tarkoittaa integraalin ratkaisemista joko analyttisesti tai numeerisesti [61, s. 1486].

Useasti Keplerin ongelmaa käsiteltäessä ratkaistaan aluksi yhden kappaleen ongelman neliöintejä vaille. Kappaleeseen vaikuttavan keskeisvoiman muotoa ei yleisessä tarkastelussa vielä kiinnitetä. Vasta sen jälkeen, kun probleeman muodollinen ratkaisu

on löydetty eli ratkaisu on redusoitu neliöinneiksi, kiinnitetään voimalaki ja jatketaan käsittelyä. Näin tehdään esimerkiksi teoksissa Fitzpatrick [20, s. 45–7], Arya [5, s. 244–51], Ardema [3, s. 179–82], Goldstein [25, s. 72–6], Marion ja Thornton [57, s. 291–3], McCauley [41, s. 126–8]. Tyypillisimmät tarkasteltavat keskeisvoimat ovat lineaarinen palautusvoima ja käänteisen neliön lakia noudattava vetovoima.

Keskeisvoimakentässä olevan yhden kappaleen ongelman muodollisen ratkaisun integraalit voidaan esittää alkeisfunktioiden avulla vain muutamissa erityistapauksissa. Jos kappaleeseen vaikuttava voimalaki $F(r) \propto r^n$, voidaan ratkaisu esittää eksplisiittisesti trigonometristen funktioiden avulla, kun $n = 1, -2$ tai -3 [25, s. 88–9].

Tässä työssä Keplerin ongelma ratkaistaan suoraan. Yhden kappaleen ongelmaa yleisessä keskeisvoimakentässä ei käsitellä. Keplerin ongelman eli differentiaaliyhtälön (3.15) ratkaisu on kuvaus

$$\mathbf{r}_{AB} = \mathbf{r}_{AB}(c_1, \dots, c_6, t), \quad (4.1)$$

jossa c_1, \dots, c_6 ovat keskenään riippumattomia integroimisvakioita. Integroimisvakiot yksilöivät ratkaisun. Ne voidaan määrittää esimerkiksi differentiaaliyhtälön alkuarvoehdoista. Ratkaisua \mathbf{r}_{AB} ei ole lainkaan mahdollista antaa suljetussa muodossa [49, s. 119].

Tarpeettoman toiston välttämiseksi sijainti- ja nopeusvektoreista \mathbf{r}_{AB} ja $\dot{\mathbf{r}}_{AB}$ pudotetaan alaindeksit pois. Tästä eteenpäin vektoreita \mathbf{r}_{AB} ja $\dot{\mathbf{r}}_{AB}$ merkitään yksinkertaisesti \mathbf{r} ja $\dot{\mathbf{r}}$.

Liikevakiot ja liikeyhtälön yleinen ratkaisuperiaate

Tämän osion tavoitteena on muodostaa käsitys yleisemmästä metodista, johon nojautuen voidaan Keplerin ongelmaa lähteä systemaattisesti ratkaisemaan. Tärkeä käsite systemaattisen metodin kannalta on liikevakio, joka esitellään seuraavaksi.

Liikevakio (engl. *constant of the motion*) on mikä tahansa yleistettyjen koordinaattien \mathbf{q} , yleistettyjen nopeuksien $\dot{\mathbf{q}}$ ja ajan t funktio $\phi(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$, jonka arvo pysyy vakiona liikkeen aikana [17, s. 575]. Englanninkielisessä kirjallisuudessa liikevakiota voidaan kutsua myös liikkeen *ensimmäiseksi integraaliksi* (engl. *first integral*) [3, s. 150].

Yleistetyt koordinaatit ja nopeudet kuuluvat Lagrangen mekaniikan käsitteistöön. Tämän työn puitteissa riittää, että yleistetyt koordinaatit ja nopeudet tulkitaan kappaleen sijainniksi ja nopeudeksi, ja näin tehdään jatkossa. Täsmällisemmin tässä työssä liikevakio on vakioarvoinen funktio

$$\phi(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) = c, \quad (4.2)$$

jossa vakio c on kytköksissä differentiaaliyhtälön ratkaisun yksilöiviin integroimisvakioihin. Määritelmän mukaan liikevakion arvo ei muutu liikkeen aikana, mistä seuraa [16, s. 121]

$$\frac{d\phi}{dt} = 0. \quad (4.3)$$

Differentiaaliyhtälöiden ratkaisemisen kannalta liikevakioiden löytämisellä on hyvin suuri merkitys. Liikevakio muodostaa relaation sijainnin, nopeuden ja ajan välille. Relaatiota voidaan käyttää yhden muuttujan eliminointiin. Näin ollen kukin liikevakio vähentää dynaamisen systeemin muuttujien määrää yhdellä ja tuo siten differentiaaliyhtälöiden ratkaisun askeleen lähemmäksi [29, s. 172]. Liikevakioiden merkitystä ei voi väheksyä. Desloge [16, s. 122] nostaakin liikevakioiden etsimisen koko dynamiikan pätehtäväksi.

Jos dynaamisella systeemillä on f vapausastetta, niin systeemillä on $2f$ keskenään riippumatonta liikevakioita [17, 575–6]. Jos kaikki $2f$ keskenään riippumatonta liikevakioita $\phi_i(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) = c_i$ löydetään, voidaan löydettyjen liikevakioiden avulla muodostaa differentiaaliyhtälöiden ratkaisu eli sijainnin \mathbf{r} koordinaattifunktiot $r_j(c_1, \dots, c_{2f}, t)$, joita on vapausasteiden verran eli f kappaletta [16, s. 247–8]. Yleisesti ottaen liikevakioiden löytäminen on kuitenkin hyvin vaikeaa [61, s. 911].

Jos dynaamisen systeemin määrittävä Lagrangen funktio $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ ei riipu ajasta t , niin systeemillä on $2f - 1$ keskenään riippumatonta liikevakioita $\phi(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$, jotka eivät riipu ajasta t [17, 575–6]. Tällöin liikeyhtälöiden ratkaisu eli sijainnin \mathbf{r} koordinaattifunktiot voidaan kirjoittaa muodossa $r_j(c_1, \dots, c_{2f-1}, t + t_0)$, jossa c_1, \dots, c_{2f-1} ja t_0 ovat ratkaisun yksilöivät vakiot [16, s. 122].

Ajasta riippumattomat liikevakiot voidaan ymmärtää faasiavaruuden hyperpintoina, jotka ovat reunaehtoja ratkaisukäyrälle. Liikeyhtälön ratkaisu on tällöin kaikkien ratkaisua rajoitavien faasiavaruuden hyperpintojen leikkauskäyrä. Leikkauskäyrä määrittää ratkaisun geometrisen muodon, mutta ei sitä, kuinka systeemin tila etenee leikkauskäyrällä ajan suhteen.

Keplerin ongelmalla on 3 vapausastetta (kappaleen kolmiulotteinen sijainti). Edellä esitetyn teorian perusteella sille on mahdollista löytää 6 toisistaan riippumatonta liikevakioita. Näistä liikevakioista 5 on ajasta riippumattomia ja 1 on ajasta riippuva. Keplerin ongelma ratkaistaan löytämällä riittävästi toisistaan riippumattomia liikevakioita. Jokaista löydettyä liikevakioita voidaan käyttää systeemin muuttujien määrän vähentämiseen.

Nöetherin teoreema

Vielä ei kuitenkaan ole selvää, millä tavoin liikevakioita kannattaisi lähteä etsimään. Suuntavihteitä liikevakioiden etsimiseen antaa seuraava erityisen syvä tulos.

Nöetherin teoreema (engl. *Nöether's theorem*). Jos Lagrangen funktio on invariantti jatkuvan koordinaattimuunnoksen suhteen, liittyy symmetriaan liikevakioita, yksi jokaista koordinaattimuunnoksen parametria kohden. Teoreema löytyy ainakin lähteistä Hand ja Finch [29, s. 174], Goldstein [25, s. 589–98], Arnold [4, s. 88–9], Desloge [17, s. 581–4] ja McCauley [41, s. 63–70].

Teoreeman mukaan jokaista symmetriaa vastaa jokin säilymislaki. Tämä mahdollistaa heuristisen menetelmän liikevakioiden etsimiseen: löydä symmetria, niin löydät liikevakion.

Klassisen mekaniikan hyvin tunnetut säilymislait ovat seurauksia tavallisimmista symmetrioista. Avaruuden homogeenisuudesta seuraa liikemäärän säilymislaki, avaruuden isotrooppisuudesta seuraa kulmaliikemäärän säilymislaki, ja ajan homogeenisuudesta seuraa energian säilymislaki [5, s. 494; 57, s. 260–265].

Piilosymmetria: Laplace–Runge–Lenz-vektori

Keplerin ongelmalla on edellä mainittujen, tavanomaisten symmetrioiden lisäksi vielä yksi ylimääräinen, epätriviaali symmetria. Tätä symmetriaa on vaikea nähdä suoraan, minkä vuoksi sen voidaan sanoa olevan *piilosymmetria* (engl. *hidden symmetry*) [41, s. 138; 50, s. 587]. Tähän piilosymmetriaan liittyvä liikevakio on *Laplace–Runge–Lenz-vektori* (engl. *Laplace–Runge–Lenz vector*) [25, s. 102–3; 41, s. 140; 50]

$$\mathbf{A} = \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{h} - \frac{\mu}{r} \mathbf{r}. \quad (4.4)$$

Suuretta kutsutaan myös lyhyemmin nimellä *Runge–Lenz-vektori* (engl. *Runge–Lenz vector*) [41, s.140].

Princen ja Elizerin artikkelin [50] mukaan Laplace–Runge–Lenz-vektoria ei ole mahdollista löytää Nöetherin teoreemalla ilman teoreeman laajentamista. Kyseisen liikevakion olemassaolo implikoi, että Keplerin ongelma sisältää kolmiulotteista rotaatioryhmää suuremman symmetriaryhmän, johon kolmiulotteinen rotaatioryhmä sisältyy aliryhmänä. Suuremman symmetriaryhmän löytämiseksi tarvitaan Lie-algebrat ja Poissonin sulut [41, s. 141]. Tarvittavien työkalujen jälkeen on mahdollista näyttää [41, s. 394], että Keplerin ongelman symmetriaryhmä on neliulotteisen euklidisen avaruuden rotaatioryhmä $O^+(4)$. Tämä piilosymmetria on epäintuitiivinen, koska abstrakti neljäkulottuvuus ole suoraan yksi konfiguraatioavaruuden tai faasiavaruuden dimensioista [41, s. 394].

Keplerin ongelman ratkaiseminen kahdella säilymislaila

Keplerin ongelma voidaan ratkaista kahdella eri tavalla. Ratkaiseminen on mahdollista, jos tiedetään, että (a) energia ja kulmaliikemäärä säilyvät, tai (b) Laplace–Runge–Lenz-vektori ja kulmaliikemäärä säilyvät [41, s. 141].

Tässä työssä Keplerin ongelma ratkaistaan jälkimmäistä tapaa käyttäen. Ensin hyödynnetään kulmaliikemäärän säilymistä. Kulmaliikemäärän säilymisestä seuraa, että liikeradan täytyy pysyä tasossa. Sen jälkeen hyödynnetään Laplace–Runge–Lenz-vektoria, mistä seuraa, että tasossa pysyvän liikeradan täytyy olla muodoltaan kartioleikkaus. Tämän jälkeen näytetään vielä, että energian säilymislaista ei ole enää näiden kahden jälkeen lisähyötyä tehtävän ratkaisemisessa. Lopulta lasketaan integraali, joka johtaa relaatioon ajan ja sijainnin napakulman välille.

Viimeisen integraalin laskemista varten liikeyhtälöt muunnetaan sylinterikoordinaatistoon. Sylinterikoordinaatistossa suoritetaan kaksi ylimääräistä integrointia ennen kuin päästään käsiksi viimeiseen integraaliin. Nämä kaksi ylimääräistä integraalia sylinterikoordinaatistossa eivät tuota uusia liikevakioita.

4.2 Integraali 1 (pyörimismäärävektori)

Integrointi

On mahdollista näyttää [35, s. 174; 54, s. 75; 7, s. 16], että

$$\frac{d}{dt}[\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}] = \mathbf{0}. \quad (4.5)$$

Tämä voidaan integroida suoraan ajan suhteen. Seuraa tulos

$$\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{h}, \quad (4.6)$$

jossa vektori \mathbf{h} on integroimisvakio.

Yhtälö (4.6) vastaa kulmaliikemäärän säilymistä. Tämä todetaan kertomalla yhtälö (4.6) puolittain kappaleen massalla. Vasen puoli tulkitaan kulmaliikemääräksi $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$, jossa $\mathbf{p} = m\dot{\mathbf{r}}$ on (lineaarinen) liikemäärä. Oikean puolen mukaan kulmaliikemäärä on vakio $m\mathbf{h}$.

Pyörimismäärävektori

Integroimisvakio \mathbf{h} on kappaleen *ominaiskulmaliikemäärä* (engl. *specific angular momentum*) eli kulmaliikemäärä massayksikköä kohden [7, s. 17]. Integroimisvakion \mathbf{h} täsmällinen nimi, ”ominaiskulmaliikemäärävektori”, on varsin pitkä, mistä johtuen sen käyttö johtaisi vaikealukaiseen tekstiin. Poutanen [49, s. 119] käyttää vektorista \mathbf{h} nimitystä *impulssimomentti* (engl. *angular momentum*). Karttunen ja muut [35, s. 174–5] käyttävät vektorista \mathbf{h} vuorostaan nimitystä *pyörimismäärä* (engl. *angular momentum*). Molemmat nimitykset ovat epätasällisiä samalla tavalla, sillä nimitykset eivät ala ominais-etuliitteellä. Kyseinen epätasällisyys lienee välttämätön hinta helppolukuisemmasta käsitlenimestä.

Tässä työssä vektorista \mathbf{h} käytetään nimitystä *pyörimismäärävektori* (engl. *angular momentum vector*). Nimitys seuraa Karttusen ja muiden [35, s. 174] nimeämistapaa, ja sisältää siten saman epätasällisyyden. Toisin sanoen tässä työssä pyörimismäärävektori voi periaatteessa tarkoittaa joko nimensä mukaisesti pyörimismäärävektoria (dimensio kgm^2/s) tai sitten ominaispyörimismäärävektoria (dimensio m^2/s). Taivaanmekaniikassa käsitellään kuitenkin lähes aina ominaispyörimismäärävektoria, minkä vuoksi etuliitteen ”ominais-” poisjättäminen ei aiheuta suurempia sekaannuksia.

Ratataso, rata-akseli ja ratakoordinaatisto

Tulos (4.6) voidaan tulkita siten, että kappaleen sijainti \mathbf{r} ja nopeus $\dot{\mathbf{r}}$ pysyvät koko liikkeen ajan samassa tasossa, jonka integroimisvakion \mathbf{h} suunta määrittää. Tämän havainnon pohjalta on mielekästä määritellä käsitteet ratataso ja rata-akseli.

Ratataso (engl. *orbital plane*) on taso, joka (i) on kohtisuorassa integroimisvakioon \mathbf{h} , ja (ii) kulkee toisen kappaleen massakeskipisteen (eli valitun origon) kautta [7, s. 17; 20, s. 40]. Tuloksen (4.6) perusteella kappaleen liikerata pysyy ratatasossa.

Rata-akseli (engl. *orbital axis*) määritellään tässä työssä akseliksi, joka (i) on kohtisuorassa ratatasoon, (ii) kulkee origoksi valitun massakeskipisteen kautta, ja jonka (iii) positiivinen suunta ilmaisee kappaleen kiertoliikkeen suunnan ratatasossa oikean käden säännöllä. Tämän määritelmän mukainen rata-akseli on samansuuntainen integroimisvakion \mathbf{h} kanssa.

Ratakoordinaatisto (engl. *orbital coordinate frame*) määritellään tässä työssä tarkoittamaan mitä tahansa oikeakätistä koordinaatistoa, jonka (i) origo on keskuskappaleen massakeskipisteessä, (ii) xy -taso on ratataso, ja (iii) xy -tason positiivinen kiertosuunta (eli $+z$ -akselin suunta) määräytyy pyörimismäärävektorin \mathbf{h} suunnasta oikean käden säännöllä. Määritelmä on rakennettu siten, että ratakoordinaatiston $+z$ -akseli on samansuuntainen pyörimismäärävektorin \mathbf{h} kanssa. Määritelmä ei kuitenkaan kiinnitä koordinaatiston perussuuntaa (eli $+x$ -akselin suuntaa), minkä vuoksi useat eri koordinaatistot voivat täyttää ratakoordinaatiston määritelmän. Ratakoordinaatisto määritellään usein nimellä *ratajärjestelmä* (engl. *orbital system*), kuten esimerkiksi lähteessä Fitzpatrick [20, s. 102]. Koordinaatiston määrittämiseen liittyviä käsitteitä, kuten perustaso ja perustason positiivinen kiertosuunta, esitellään yksityiskohtaisesti myöhemmin (luvussa 6.1).

4.3 Integraali 2 (eksentrisyysvektori)

Integrointi

On mahdollista näyttää [35, s. 175; 54, s. 76; 7, s. 19–20, 25], että

$$\frac{d}{dt} \left[-\frac{1}{r} \mathbf{r} - \frac{1}{\mu} \mathbf{h} \times \dot{\mathbf{r}} \right] = \mathbf{0}. \quad (4.7)$$

Tämä voidaan integroida suoraan ajan suhteen. Seuraa tulos

$$-\frac{1}{r} \mathbf{r} - \frac{1}{\mu} \mathbf{h} \times \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{e}, \quad (4.8)$$

jossa vektori \mathbf{e} on integroimisvakio.

Yhtälö (4.8) vastaa Laplace–Runge–Lenz-vektorin säilymistä. Tämä voidaan todeta osoittamalla ensin, että integroimisvakio \mathbf{e} on itse asiassa Laplace–Runge–Lenz-vektori \mathbf{A} skaalattuna. Sen jälkeen vektori \mathbf{A} derivoidaan ajan suhteen, ja näytetään, että aika-derivaatta $d\mathbf{A}/dt$ häviää identtisesti. Tämä on osoitettu esimerkiksi lähteessä Goldstein [25, s. 103].

Eksentrisyysvektori

Integroimisvakio \mathbf{e} on nimeltään *eksentrisyysvektori* (engl. *eccentricity vector*) [49, s. 119; 7, s. 25; 40, s. 38]. Se on yhdensuuntainen Laplace–Runge–Lenz-vektorin \mathbf{A} kanssa. Tämä voidaan todeta vertaamalla yhtälöitä (4.4) ja (4.8) keskenään, jolloin huomataan, että

$$\mathbf{e} = \frac{1}{\mu} \mathbf{A}. \quad (4.9)$$

Integroimisvakion \mathbf{e} geometrista merkitystä ei ole mielekästä tulkita vielä mitenkään, vaikka integroimisvakiolle annettu nimi, eksentrisyysvektori, mahdollistaakin sen geometrisen merkityksen ennakoinnin. Vektorin geometrinen merkitys ilmenee hetken kuluttua.

Integraalin 1 ja 2 välinen riippuvuus

Integroimisvakiot, vektorit \mathbf{h} ja \mathbf{e} , eivät ole keskenään riippumattomia, joten niitä ei voida valita täysin mielivaltaisesti. Vektorien keskinäinen riippuvuus käy ilmi, kun lasketaan niiden välinen pistetulo.

Integraalin 2 yhtälön (4.8) perusteella,

$$\mathbf{h} \cdot \mathbf{e} = \mathbf{h} \cdot \left(-\frac{1}{r} \mathbf{r} - \frac{1}{\mu} \mathbf{h} \times \dot{\mathbf{r}} \right). \quad (4.10)$$

Kun vektori \mathbf{h} viedään yhtälön oikealla puolella sulkujen sisälle, jälkimminen termi häviää, koska kyseessä on skalaarikolmitulo, jossa vektori \mathbf{h} esiintyy kahteen kertaan. Oikealle puolelle jää jäljelle vain ensimmäinen termi, josta vektori \mathbf{h} korvataan yhtälöä (4.6) käyttäen. Yhtälö on nyt sievennetty muotoon

$$\mathbf{h} \cdot \mathbf{e} = -\frac{1}{r} \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}. \quad (4.11)$$

Yhtälön oikea puoli koostuu pelkästään skalaarikolmitulosta, jossa vektori \mathbf{r} esiintyy kahteen kertaan. Oikea puoli häviää nolllaksi. Saadaan tulos

$$\mathbf{h} \cdot \mathbf{e} = 0. \quad (4.12)$$

Tulos (4.12) voidaan tulkita siten, että integroimisvakioiden \mathbf{h} ja \mathbf{e} tulee olla kohtisuorassa toisiinsa nähden. Kun vektoreista yksi valitaan mielivaltaisesti, rajoittaa se toisen vektorin valintaa. Toinen vektori tulee valita siten, että se on kohtisuorassa ensimmäiseen nähden, jolloin yhtälö (4.12) toteutuu.

Yleensä integroimisvakion \mathbf{h} katsotaan määräytyvän mielivaltaisesti, jolloin sen kiinnittämiseksi tarvitaan 3 riippumatonta suuretta: kaksi suuntakulmaa ja pituus. Tämän jälkeen integroimisvakion \mathbf{e} kiinnittämiseksi tarvitaan yhtälön (4.12) johdosta vain 2 riippumatonta suuretta: pituus ja suuntakulma integroimisvakion \mathbf{h} määräämässä tasossa.

Sijainnin napakulman ja napasäteen välinen riippuvuus

Vektori \mathbf{e} on kohtisuorassa vektoriin \mathbf{h} nähden, mistä seuraa tästä, että eksentrisyysvektori \mathbf{e} ja sijaintivektori \mathbf{r} ovat samassa tasossa. Koska vektorit ovat samassa tasossa, voidaan niiden välinen pistetulo

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{e} = \|\mathbf{r}\| \|\mathbf{e}\| \cos(\theta_r, \mathbf{e}) \quad (4.13)$$

laskea käyttäen joko napakoordinaatiston suureita tai vektorin \mathbf{e} määritelmää (4.8). Seuraavaksi pistetulo lasketaan molemmilla tavoilla, ja lopuksi pistetulon eri esitykset merkitään yhtä suuriksi, jolloin päästään haluttuun tulokseen, joka kytkee sijainnin napakulman ja napasäteen toisiinsa.

Lasketaan pistetulo ensin napakoordinaatiston suureita käyttäen. Tällöin pistetulolle (4.13) saadaan ensimmäinen esitys

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{e} = re \cos(\theta_r - \theta_e), \quad (4.14)$$

jossa θ_r ja θ_e ovat vektorien \mathbf{r} ja \mathbf{e} napakulmat, r ja e ovat vektorien napasäteet vastaavasti. Vektorien napasäteet vastaavat suoraan vektorien normeja eli $r = \|\mathbf{r}\|$ ja $e = \|\mathbf{e}\|$.

Toisaalta, pistetulo (4.13) voidaan laskea vektorin \mathbf{e} määritelmää (4.8) käyttäen. Tämä on pistetulon vektoriaalinen evaluointi. Yhtälön (4.8) perusteella

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{e} = -\frac{1}{r} \mathbf{r} \cdot \mathbf{r} - \frac{1}{\mu} \mathbf{r} \cdot \mathbf{h} \times \dot{\mathbf{r}}. \quad (4.15)$$

Lasketaan yhtälön (4.15) oikean puolen pistetulot erikseen. Ensimmäiselle termille saadaan aputulokset

$$-\frac{1}{r} \mathbf{r} \cdot \mathbf{r} = -r. \quad (4.16)$$

Jälkimmäisen termin sieventämistä varten hyödynnetään skalaarikolmitulon ominaisuutta, että pisteen ja ristin paikka voidaan vaihtaa. Tämän ominaisuuden avulla voidaan laskea aputulokset

$$\mathbf{h} \times \dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r} = \mathbf{h} \cdot \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{r} = -\mathbf{h} \cdot \mathbf{h} = -h^2. \quad (4.17)$$

Sijoittamalla aputulokset (4.16) ja (4.17) yhtälöön (4.15) saadaan pistetulolle toinen esitys

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{e} = -r + \frac{h^2}{\mu}. \quad (4.18)$$

Merkitään pistetulon (4.13) molemmat esitykset (4.14) ja (4.18) yhtä suuriksi. Saadaan yhtälö

$$re \cos(\theta_r - \theta_e) = -r + \frac{h^2}{\mu}. \quad (4.19)$$

Ratkaistaan yhtälö napasäteen r suhteen. Saadaan tulos, joka kytkee sijainnin napasäteeseen r ja napakulman θ_r toisiinsa,

$$r = \frac{p}{1 + e \cos(\theta_r - \theta_e)}, \quad (4.20)$$

jossa

$$p = \frac{h^2}{\mu}. \quad (4.21)$$

Tulos (4.20) vastaa kartioleikkauksen yleistä yhtälöä napakoordinaateissa (2.4), kun $\varepsilon = e$ ja $\theta = \theta_r - \theta_e$. Tämän tuloksen perusteella voidaan tehdä päätelmä, että Keplerin ongelman ratkaisuradat ovat muodoltaan kartioleikkauksia. On tärkeää huomata, että yhtälö (4.20) ei kerro, kuinka kappale etenee kartioleikkauksen uralla ajan suhteen.

Yhtälöstä (4.20) saadaan selitys sille, miksi vektoria \mathbf{e} kutsutaan eksentrisyysvektoriksi. Nimi perustuu siihen, että eksentrisyysvektorin pituus e määrittää ratkaisuna olevan kartioleikkauksen eksentrisyyden.

4.4 Integraali 3 (energia)

Integrointi

On mahdollista näyttää [35, s. 176; 54, s. 74], että

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \dot{\mathbf{r}}^2 - \frac{\mu}{r} \right] = \mathbf{0}. \quad (4.22)$$

Tämä voidaan integroida suoraan ajan suhteen. Seuraa tulos

$$\frac{1}{2} \dot{\mathbf{r}}^2 - \frac{\mu}{r} = E, \quad (4.23)$$

jossa E on integroimisvakio. Tämä yhtälö tunnetaan myös nimellä *vis-viva-yhtälö* (engl. *vis-viva equation*) [60, s. 109].

Yhtälö (4.23) vastaa energian säilymistä. Tämä voidaan todeta kertomalla yhtälö (4.23) puolittain kappaleen massalla. Vasemman puolen ensimmäinen termi tulkitaan kappaleen liike-energiaksi, ja jälkimmäinen termi tulkitaan kappaleen potentiaalienergiaksi käänteisen neliön lakia noudattavassa keskeisvoimakentässä, kun nollopotentiaali on asetettu äärettömyyteen [20, s. 47; 7, s. 16].

Mekaaninen ominaisenergia

Integroimisvakio E on kappaleen *mekaaninen ominaisenergia* (engl. *specific mechanical energy*) eli kappaleen mekaaninen energia massayksikköä kohden [7, s. 16; 60, s. 109].

Edellisen integraalin perusteella tiedetään, että kiertolaisen rata on kartioleikkauksikäyrä. Kartioleikkauksen tyyppi (ellipsi, paraabeli tai hyperbeli) on mahdollista selvittää

pelkästään kappaleen mekaanisen ominaisenergian E etumerkin perusteella. Tämä näytetään esimerkiksi lähteissä Bate ja muut [7, s. 26–9] ja Seeber [54, s. 78–9].

Mainitun tuloksen todistamiseksi tarvitaan yhtälö, joka kytkee mekaanisen ominaisenergian E kartioleikkauksen tyypin määrittävään suureeseen. Tällaisia suureita ovat esimerkiksi isoakselin puolikas a ja eksentrisyys e . Seuraavassa alaluvussa kehitetään yksi tällainen yhtälö.

Integraalien 1, 2 ja 3 välinen riippuvuus

Seuraavaksi näytetään, että integroimisvakion E arvo määräytyy jo aiemmin löydetyistä integroimisvakioista \mathbf{h} ja \mathbf{e} . Lasketaan vektorin \mathbf{e} pistetulo itsensä kanssa käyttäen määritelmää (4.8),

$$\mathbf{e} \cdot \mathbf{e} = \left(-\frac{1}{r} \mathbf{r} - \frac{1}{\mu} \mathbf{h} \times \dot{\mathbf{r}} \right) \cdot \left(-\frac{1}{r} \mathbf{r} - \frac{1}{\mu} \mathbf{h} \times \dot{\mathbf{r}} \right). \quad (4.24)$$

Sulkujen avaamisen jälkeen yhtälö saa muodon

$$e^2 = 1 + \frac{2}{r\mu} \mathbf{h} \times \dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r} + \frac{1}{\mu^2} \mathbf{h} \times \dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{h} \times \dot{\mathbf{r}}. \quad (4.25)$$

Lasketaan aputulokset keskimmaiselle ja viimeiselle termille.

Yhtälön (4.25) keskimmaiselle termille lasketaan aputulos

$$\mathbf{h} \times \dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r} = \mathbf{h} \cdot \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{r} = -\mathbf{h} \cdot \mathbf{h} = -h^2. \quad (4.26)$$

Yhtälön (4.25) viimeiselle termille lasketaan aputulos lähtien lausekkeesta

$$\mathbf{h} \times \dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{h} \times \dot{\mathbf{r}}. \quad (4.27)$$

Vaihdetaan aluksi pisteen ja jälkimmäisen ristin paikkaa. Sen jälkeen käytetään ristitulon antikommutatiivisuutta, jolloin

$$= -\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{h} \times (\mathbf{h} \times \dot{\mathbf{r}}). \quad (4.28)$$

Hyödynnetään seuraavaksi ristitulon BAC-CAB-sääntöä, jonka perusteella

$$= -\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{h} (\mathbf{h} \cdot \dot{\mathbf{r}}) + \dot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}} (\mathbf{h} \cdot \mathbf{h}). \quad (4.29)$$

Vektorit \mathbf{h} ja $\dot{\mathbf{r}}$ ovat kohtisuorassa toisiinsa nähden, mistä seuraa $\mathbf{h} \cdot \dot{\mathbf{r}} = 0$. Tämän pistetulon häviäminen poistaa ensimmäisen termin kokonaan, ja jäljelle jää pelkästään jälkimmäinen termi, joka sievenee muotoon

$$= h^2 \dot{\mathbf{r}}^2. \quad (4.30)$$

Tehdään yhteenveto. Viimeiselle termille on laskettu aputulos

$$\mathbf{h} \times \dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{h} \times \dot{\mathbf{r}} = h^2 \dot{\mathbf{r}}^2. \quad (4.31)$$

Käytetään aputuloksia (4.26) ja (4.31) yhtälöön (4.25),

$$e^2 - 1 = -\frac{2h^2}{r\mu} + \frac{h^2}{\mu^2} \dot{\mathbf{r}}^2. \quad (4.32)$$

Ratkaistaan yhtälö termin $\dot{\mathbf{r}}^2$ suhteen,

$$\dot{\mathbf{r}}^2 = \frac{\mu^2}{h^2}(e^2 - 1) + \frac{2\mu}{r}. \quad (4.33)$$

Sijoitetaan (4.33) integroimisvakion E yhtälöön (4.23). Saadaan tulos

$$E = \frac{\mu^2}{2h^2}(e^2 - 1). \quad (4.34)$$

Tuloksesta (4.34) nähdään, että integroimisvakion E arvo määräytyy integroimisvakioista \mathbf{h} ja \mathbf{e} . Tämä osoittaa, että integroimisvakio E ei ole riippumaton jo löydettyistä integroimisvakioista. Näin ollen tähän mennessä on löydetty yhteensä 5 keskenään riippumatonta integroimisvakioita: vektorit \mathbf{h} ja \mathbf{e} , joille on voimassa yhtälö $\mathbf{h} \cdot \mathbf{e} = 0$. Kaikki käsitellyt liikevakiot ovat olleet ajasta riippumattomia, ja aiemmin annetun teorian perusteella Keplerin ongelmassa voidaan löytää korkeintaan 5 toisistaan riippumatonta liikevakioita, jotka eivät sisällä aikaa muuttujana. Näin ollen kaikki ajasta riippumattomat liikevakiot on nyt löydetty.

Kartioleikkauksen tyyppi

Tulos (4.34) kytkee mekaanisen ominaisenergian E ja kartioleikkauksen tyypin määrittävän suureen, eksentrisyyden e , toisiinsa. Tämä on esimerkki yhtälöstä, joka mahdollistaa kartioleikkauksen tyypin päättämisen kappaleen mekaanisen ominaisenergian E etumerkistä. Päättely tehdään seuraavalla tavalla.

Kartioleikkauksia käsittelevän luvun 2.1 yhtälöiden (2.5), (2.6) ja (2.7) perusteella tiedetään vastaavasti, että ellipsillä $e < 1$, paraabelilla $e = 1$ ja hyperbelillä $e > 1$. Näiden yhtälöiden korottaminen puolittain toiseen potenssiin ei vaikuta epäyhtälöiden suuntaan. Näin ollen saadaan tulokset, että ellipsillä $e^2 < 1$, paraabelilla $e^2 = 1$ ja hyperbelillä $e^2 > 1$.

Ratkaistaan yhtälö (4.34) eksentrisyyden toisen potenssin e^2 suhteen,

$$e^2 = 1 + \frac{2h^2}{\mu^2} E. \quad (4.35)$$

Koska yhtälössä (4.34) mekaanista ominaisenergiaa E edeltävä kerroin $2h^2 / \mu^2$ on ei-negatiivinen vakio, ei kerroin vaikuta ominaisenergian E etumerkkiin. Näin ollen ominaisenergian E etumerkki määrää suoraan eksentrisyyden toisen potenssin e^2 arvon, joka vuorostaan määrää suoraan kartioleikkauksen tyypin. Eksentrisyyden toiselle potenssille saadaan epäyhtälöt: (i) $e^2 < 1$, kun $E < 0$, (ii) $e^2 = 1$, kun $E = 0$, ja (iii) $e^2 > 1$, kun $E > 0$. Näiden perusteella kappaleen radan tyyppi ja mekaaninen ominai-

senergia kytkeytyvät toisiinsa seuraavasti: rata on (i) ellipsi, (ii) paraabeli tai (iii) hyperbeli, jos ja vain jos vastaavasti (i) $E < 0$, (ii) $E = 0$ tai (iii) $E > 0$.

4.5 Liiketyhtälön esitys sylinterikoordinaatistossa

Integroimisvakion \mathbf{h} komponentit ovat liikevakioita ja niitä voidaan hyödyntää differentiaaliyhtälön muuttujien määrän eliminointiin. Koska liike pysyy tasossa, on perusteltua siirtyä sellaiseen koordinaatistoon, jossa $+z$ -akseli on samansuuntainen integroimisvakion \mathbf{h} kanssa, ja käyttää sylinterikoordinaatteja. Edellä määritelty ratakoordinaatisto on tällainen koordinaatisto.

Siirtyminen sopivaan koordinaatistoon vähentää differentiaaliyhtälön (3.15) muuttujien määrää, koska sopivassa koordinaatistossa esitettyä sijainnin z -koordinaatti on identtisesti nolla. Viimeiseen integraaliin (perisentraaika) päästään käsiksi vasta, kun muuttujia on eliminoitu tarpeeksi, ja tämä onnistuu helpoiten sylinterikoordinaatistossa.

Differentiaaliyhtälön (3.15) muuntaminen sylinterikoordinaatistoon edellyttää kahta kannanvaihtoa. Nämä kannanvaihdot ovat: (i) viitekoordinaatiston kannasta siirtyminen ratakoordinaatiston kantaan ja (ii) ratakoordinaatiston kannasta siirtyminen sylinterikoordinaatiston kantaan.

Vektorin komponentit ja komponenttivektorit

Kerrataan lyhyesti ja tiivistetysti vektoreihin liittyviä käsitteitä, ja esitellään tässä työssä käytettäviä merkintätapoja. Kertaus painottaa erityisesti sitä, että vektori itsessään on vektoriavaruuden kannasta riippumaton, kun taas vektorin komponentit ja niiden muodostama komponenttivektori ovat vektoriavaruuden kannasta riippuvia. Erottelu vektorien ja komponenttivektorien välillä tulee oleelliseksi, kun tarkastellaan kannanvaihtoja, jotka muuttavat ainoastaan vektorien komponenttiesityksiä.

Olkoon V dimension n vektoriavaruus kunnan F ylitse, ja olkoon järjestetty joukko $S = (\mathbf{e}_1^S, \dots, \mathbf{e}_n^S)$ vektoriavaruuden V kanta. Tällöin jokaista vektoria $\mathbf{v} \in V$ kohden on olemassa yksi ja vain yksi kiinteämittainen jono (v_1^S, \dots, v_n^S) kunnan F alkioita siten, että [51, s. 47]

$$\mathbf{v} = \sum_{j=1}^n v_j^S \mathbf{e}_j^S. \quad (4.36)$$

Linearikombinaation (4.36) skalaareita $v_j^S \in F$ kutsutaan tässä työssä vektorin $\mathbf{v} \in V$ *komponenteiksi* (engl. *components*) kannan S suhteen. Vektorin komponentit v_j^S riippuvat kannasta S , mutta vektori \mathbf{v} itsessään on kannasta riippumaton, geometrinen objekti. Tässä työssä yhtälön (4.36) oikean puolen lineaarikombinaatiota kutsutaan nimellä vektorin $\mathbf{v} \in V$ *esitys* (engl. *representation*) kannan S suhteen.

Vektorin $\mathbf{v} \in V$ komponenttien $v_j^S \in F$ muodostama kiinteämittainen jono (v_1^S, \dots, v_n^S) voidaan tulkita vektoriavaruuden F^n vektoriksi esitettyinä sen standardi-

kannassa. Tämän havainnon ohjaamana määritellään vektorille $\mathbf{v} \in V$ kannan S indusoima kuvaus $\phi_S : V \rightarrow F^n$ yhtälöllä [51, s. 51]

$$\phi_S(\mathbf{v}) = [\mathbf{v}]_S = \begin{bmatrix} v_1^S \\ \vdots \\ v_n^S \end{bmatrix}. \quad (4.37)$$

Tässä työssä kuvauksesta ϕ_S käytetään nimeä *komponenttikuvaus* (engl. *component map*) kannan S suhteen, ja kuvauksen tuottamasta vektorista $[\mathbf{v}]_S \in F^n$ nimeä *komponenttivektori* (engl. *component vector*) kannan S suhteen.

Komponenttikuvaus $\phi_S : V \rightarrow F^n$ on bijektiivinen ja säilyttää vektoriavaruuden rakenteen eli kyseessä on isomorfinen kuvaus [51, s. 51, 62]. Kun vektoriavaruudelle V on valittu kanta S , voidaan vektoriavaruudet V ja F^n samaistaa keskenään yhtälön (4.37) määrittämän isomorfian $\phi_S : V \rightarrow F^n$ avulla. Vektoriavaruuksien alkoiden $\mathbf{v} \in V$ ja $[\mathbf{v}]_S \in F^n$ välille saadaan näin ollen keskinäinen yksi–yhteen-vastaavuus,

$$\mathbf{v} \leftrightarrow \begin{bmatrix} v_1^S \\ \vdots \\ v_n^S \end{bmatrix}. \quad (4.38)$$

Keskinäisen vastaavuuden (4.38) vuoksi soveltavassa kirjallisuudessa ei yleensä erotella notaation keinoin, että tulisiko $n \times 1$ pystymatriisi tulkita vektoriksi $\mathbf{v} \in V$ itsekseen vai komponenttivektoriksi $[\mathbf{v}]_S \in F^n$. Samasta syystä soveltavassa kirjallisuudessa ei myöskään yleensä erotella, tarkoittaako merkintä \mathbf{v} vektoria $\mathbf{v} \in V$ vai vektoria $\mathbf{v} \in F^n$.

Tässä työssä vektori ja komponenttivektori erotellaan toisistaan tarpeen vaatiessa yhtälön (4.37) määrittämällä merkintätavalla. Erottelua käytetään erityisesti silloin, kun on syytä korostaa, että komponenttivektori muuttuu, mutta vektori itsessään pysyy samana. Tällaisia tilanteita ovat esimerkiksi vektoreille suoritettavat kannanvaihdot, jotka esitellään seuraavaksi.

Vektoriavaruuden V kanta $S = (\mathbf{e}_1^S, \dots, \mathbf{e}_n^S)$ voidaan esittää lohkomatriisilla

$$\mathbf{E}_S = [\mathbf{e}_1^S \ \dots \ \mathbf{e}_n^S]. \quad (4.39)$$

Yhtälön (4.39) mukaisesta vektoriavaruuden kannan S kuvaavasta lohkomatriisista \mathbf{E}_S käytetään tässä nimitystä *kantamatriisi* (engl. *basis matrix*). Vektorin $\mathbf{v} \in V$ lineaarikombinaatio (4.36) voidaan esittää nyt kantamatriisin \mathbf{E}_S ja komponenttivektorin $[\mathbf{v}]_S \in F^n$ matriisitulona,

$$\mathbf{v} = \sum_{j=0}^n v_j^S \mathbf{e}_j^S = \mathbf{E}_S [\mathbf{v}]_S. \quad (4.40)$$

Yhtälön (4.40) perusteella kantamatriisia \mathbf{E}_S voidaan pitää komponenttikuvauksen käänteisfunktion $(\phi_S)^{-1}$ matriisiesityksenä. Kun yhtälö (4.40) kerrotaan puolittain vasemmalta kantamatriisin inverssillä \mathbf{E}_S^{-1} , saadaan yhtälö

$$[\mathbf{v}]_S = \mathbf{E}_S^{-1} \mathbf{v}, \quad (4.41)$$

jonka perusteella kantamatriisin inverssiä \mathbf{E}_S^{-1} voidaan pitää komponenttikuvauksen ϕ_S matriisiesityksenä.

Kannanvaihto ja siirtymämatriisi

Jos A ja B ovat vektoriavaruuden V kantoja, voidaan näiden kantojen indusoimien komponenttikuvausten $\varphi_A : V \rightarrow F^n$ ja $\varphi_B : V \rightarrow F^n$ avulla määrittellä lineaarikuvaus $\varphi_{A,B} : F^n \rightarrow F^n$ komponenttivektoreille yhtälöllä [51, s. 65]

$$\varphi_{A,B} = \varphi_B \circ \varphi_A^{-1}. \quad (4.42)$$

Lineaarikuvauksesta $\varphi_{A,B}$ käytetään tässä työssä nimitystä *kannanvaihto* (engl. *change of basis*). Kannanvaihto on isomorfinen kuvaus, ja tarkemmin ottaen se on vektoriavaruuden F^n automorfismi eli isomorfismi itseensä [51, s. 65].

Koska kannanvaihto on lineaarikuvaus, voidaan se esittää matriisina [51, s. 65]. Merkitään vektoriavaruuden V vanhaa kantaa $A = (\mathbf{e}_1^A, \dots, \mathbf{e}_n^A)$ ja uutta kantaa $B = (\mathbf{e}_1^B, \dots, \mathbf{e}_n^B)$. Yhtälön (4.40) perusteella vektorin $\mathbf{v} \in V$ esitykset eri kannoissa ovat ekvivalentit,

$$\mathbf{E}_B [\mathbf{v}]_B = \mathbf{v} = \mathbf{E}_A [\mathbf{v}]_A. \quad (4.43)$$

Ratkaistaan yhtälö (4.43) komponenttivektorin $[\mathbf{v}]_B$ suhteen. Kerrotaan yhtälö puolittain vasemmalta kantamatriisin \mathbf{E}_B inverssillä. Saadaan yhtälö

$$[\mathbf{v}]_B = \mathbf{E}_B^{-1} \mathbf{E}_A [\mathbf{v}]_A. \quad (4.44)$$

Yhtälön (4.44) matriisituloa $\mathbf{E}_B^{-1} \mathbf{E}_A$ voidaan pitää yhtälön (4.42) mukaisen kannanvaihdon $\varphi_{A,B}$ matriisiesityksenä.

Merkitään kannanvaihdon $\varphi_{A,B}$ matriisiesitystä matriisilla $\mathbf{P}_{B \leftarrow A}$. Yhtälön (4.44) perusteella kannanvaihdon $\varphi_{A,B}$ matriisiesitys

$$\mathbf{P}_{B \leftarrow A} = \mathbf{E}_B^{-1} \mathbf{E}_A. \quad (4.45)$$

Matriisia $\mathbf{P}_{B \leftarrow A}$ kutsutaan tässä työssä nimellä *siirtymämatriisi* (engl. *transition matrix*). Siirtymämatriisin alaindeksiin merkitään vanha ja uusi kanta normaaliin lukusuuntaan nähden poikkeuksellisesti käänteisessä järjestyksessä. Käänteinen järjestys vastaa määritelmässä (4.45) esiintyvien kantamatriisien järjestystä ja helpottaa hahmottamaan oi-

keaa järjestystä siirtymämatriisien yhdisteissä. Siirtymämatriisia (4.45) käyttäen yhtälö (4.44) voidaan esittää muodossa

$$[\mathbf{v}]_B = \mathbf{P}_{B \leftarrow A} [\mathbf{v}]_A. \quad (4.46)$$

Yhtälöstä (4.46) käytetään tässä työssä nimitystä *kannanvaihtoyhtälö* (engl. *change of basis equation*).

Muodostetaan yhtälön (4.45) määrittämälle siirtymämatriisille mielekäs tulkinta. Kirjoitetaan yhtälön (4.45) kantamatriisi \mathbf{E}_A määritelmän (4.39) mukaisesti lohkomatriisina, ja viedään inverssi \mathbf{E}_B^{-1} lohkomatriisin sisään. Tällöin

$$\mathbf{P}_{B \leftarrow A} = [\mathbf{E}_B^{-1} \mathbf{e}_1^A \ \dots \ \mathbf{E}_B^{-1} \mathbf{e}_n^A]. \quad (4.47)$$

Sovelletaan yhtälön (4.47) lohkomatriisiin alkioihin yhtälöä (4.41), jolloin siirtymämatriisille saadaan tulkinta

$$\mathbf{P}_{B \leftarrow A} = \left[\begin{bmatrix} \mathbf{e}_1^A \end{bmatrix}_B \ \dots \ \begin{bmatrix} \mathbf{e}_n^A \end{bmatrix}_B \right], \quad (4.48)$$

jonka mukaan siirtymämatriisin $\mathbf{P}_{B \leftarrow A}$ pystyvektorit ovat vanhan kannan A kantavektorit esitettynä komponenttivektoreina uuden kannan B suhteen. Tulkinta (4.48) vastaa lähteen [51, s. 65] antamaa tulkintaa.

Siirtymämatriisin esitys pysty- ja vaakavektoreilla

Kannanvaihdon määritelmän (4.42) nojalla suoran kannanvaihdon $\varphi_{A,B}$ ja käänteisen kannanvaihdon $\varphi_{B,A}$ kompositio on identiteettikuvaus. Tällöin kannanvaihtojen matriisiesityksille eli siirtymämatriiseille $\mathbf{P}_{B \leftarrow A}$ ja $\mathbf{P}_{A \leftarrow B}$ pätee identiteetti

$$(\mathbf{P}_{A \leftarrow B})(\mathbf{P}_{B \leftarrow A}) = \mathbf{I} = (\mathbf{P}_{B \leftarrow A})(\mathbf{P}_{A \leftarrow B}). \quad (4.49)$$

Yhtälö (4.49) vastaa itse asiassa matriisin inverssin määritelmää. Voidaan todeta, että suora siirtymämatriisi $\mathbf{P}_{B \leftarrow A}$ ja käänteinen siirtymämatriisi $\mathbf{P}_{A \leftarrow B}$ ovat toistensa inverssejä. Käänteinen siirtymämatriisi saadaan tällöin suoran siirtymämatriisin inverssinä,

$$(\mathbf{P}_{A \leftarrow B}) = (\mathbf{P}_{B \leftarrow A})^{-1}. \quad (4.50)$$

Jos vektoriavaruuden V kannan S kantavektorit \mathbf{e}_j muodostavat ortonormaalijoukon, pätee kantavektorien välisille pistetuloille yhtälö

$$\mathbf{e}_j \bullet \mathbf{e}_k = \delta_{jk}. \quad (4.51)$$

Ominaisuudesta (4.51) seuraa, että kantamatriisin inverssi $(\mathbf{E}_S)^{-1}$ vastaa itse asiassa kantamatriisin transpoosia $(\mathbf{E}_S)^T$. Tämä vuorostaan tarkoittaa, että komponenttikuvauksen ϕ_S matriisiesitys on kannan S kantamatriisin transpoosi. Tiivistetään esitystä käyt-

tämällä merkintää $\mathbf{E} = \mathbf{E}_s$. Suoraan laskemalla voidaan näyttää, että transpoosi \mathbf{E}^T on kantamatriisin vasemmanpuoleinen inverssi,

$$\mathbf{E}^T \mathbf{E} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{e}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 & \cdots & \mathbf{e}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 \bullet \mathbf{e}_1 & \cdots & \mathbf{e}_1 \bullet \mathbf{e}_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{e}_n \bullet \mathbf{e}_1 & \cdots & \mathbf{e}_n \bullet \mathbf{e}_n \end{bmatrix} = \mathbf{I}. \quad (4.52)$$

Toisaalta, kun oletetaan (4.52), voidaan näyttää, että transpoosi \mathbf{E}^T on kantamatriisin oikeanpuoleinen inverssi,

$$\mathbf{E} \mathbf{E}^T = \mathbf{E}^T (\mathbf{E} \mathbf{E}^{-1}) = \mathbf{E} (\mathbf{E}^T \mathbf{E}) \mathbf{E}^{-1} = \mathbf{E} \mathbf{E}^{-1} = \mathbf{I}. \quad (4.53)$$

Yhdessä tulokset (4.52) ja (4.53) osoittavat, että jos vektoriavaruuden kantavektorit ovat ortonormaaleja, niin kantamatriisi ja sen transpoosi ovat toistensa inversejä.

Jos A ja B ovat vektoriavaruuden V ortonormaaleja kantoja, niin käänteinen siirtymämatriisi $\mathbf{P}_{A \leftarrow B} = (\mathbf{P}_{B \leftarrow A})^{-1}$ vastaa itse asiassa suoran siirtymämatriisin transpoosia $(\mathbf{P}_{B \leftarrow A})^T$. Tiivistetään esitystä käyttämällä siirtymämatriisille merkintää $\mathbf{P} = \mathbf{P}_{B \leftarrow A}$ sekä kantamatriiseille merkintöjä $\mathbf{A} = \mathbf{E}_A$ ja $\mathbf{B} = \mathbf{E}_B$. Suoraan laskemalla voidaan näyttää, että \mathbf{P}^T on siirtymämatriisin vasemmanpuoleinen inverssi

$$\mathbf{P}^T \mathbf{P} = \mathbf{A}^T (\mathbf{B}^T)^{-1} (\mathbf{B})^{-1} \mathbf{A} = \mathbf{A}^T (\mathbf{B} \mathbf{B}^T)^{-1} \mathbf{A} = \mathbf{A}^T \mathbf{A} = \mathbf{I}. \quad (4.54)$$

Ensimmäinen ekvivalenssi seuraa siirtymämatriisin määritelmästä (4.45), transpoosin viemisestä matriisitulon sisäpuolelle sekä inverssin ja transponoinnin järjestyksen vaihtamisesta. Toinen ekvivalenssi seuraa, kun inverssit tuodaan keskimmäisen matriisitulon ulkopuolelle. Kolmas ekvivalenssi seuraa ortonormaalin kannan B ominaisuudesta (4.53). Neljäs ekvivalenssi seuraa ortonormaalin kannan A ominaisuudesta (4.52).

Toisaalta, kun oletetaan yhtälö (4.54), voidaan näyttää, että \mathbf{P}^T on siirtymämatriisin oikeanpuoleinen inverssi. Todistus seuraa identtisesti yhtälöä (4.53),

$$\mathbf{P} \mathbf{P}^T = \mathbf{P} \mathbf{P}^T (\mathbf{P} \mathbf{P}^{-1}) = \mathbf{P} (\mathbf{P}^T \mathbf{P}) \mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P} \mathbf{P}^{-1} = \mathbf{I}. \quad (4.55)$$

Yhdessä tulokset (4.55) ja (4.54) osoittavat, että jos vektoriavaruuden kannat A ja B ovat ortonormaleja, niin siirtymämatriisi ja sen transpoosi ovat toistensa inversejä. Suoran siirtymämatriisin inverssi saadaan sen transpoosina,

$$\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}^T. \quad (4.56)$$

Sovelletaan tulosta (4.56) yhtälöön (4.50). Seurauksena on yhtälö, jonka mukaan käänteinen siirtymämatriisi saadaan suoran siirtymämatriisin transpoosina,

$$\mathbf{P}_{A \leftarrow B} = (\mathbf{P}_{B \leftarrow A})^T. \quad (4.57)$$

Otetaan yhtälöstä (4.57) puolittain transpoosi, ja tulkitaan siirtymämatriisit yhtälöt (4.48) mukaisesti. Saadaan yhtälö, jonka perusteella suora siirtymämatriisi $\mathbf{P}_{A \leftarrow B}$ voidaan tulkita sekä pysty- että vaakavektorien lohkomatriisiksi,

$$\left[\begin{bmatrix} \mathbf{e}_1^A \end{bmatrix}_B \quad \cdots \quad \begin{bmatrix} \mathbf{e}_n^A \end{bmatrix}_B \right] = \mathbf{P}_{B \leftarrow A} = (\mathbf{P}_{A \leftarrow B})^T = \begin{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} \mathbf{e}_1^B \end{bmatrix}_A \right)^T \\ \vdots \\ \left(\begin{bmatrix} \mathbf{e}_n^B \end{bmatrix}_A \right)^T \end{bmatrix}. \quad (4.58)$$

Yhtälöstä (4.58) ilmenee suoran siirtymämatriisiin $\mathbf{P}_{B \leftarrow A}$ duaalinen tulkintapa. Matriisi voidaan tulkita joko (i) pystyvektoreina tai (ii) vaakavektoreina. Pystyvektoreina ovat vanhat kantavektorit esitettynä uudessa kannassa. Vaakavektorit ovat uudet kantavektorit esitettynä vanhassa kannassa.

Viitekoordinaatistosta siirtyminen ratakoordinaatistoon

Merkitään viitekoordinaatistoa symbolilla O (iso o-kirjain), ja ratakoordinaatistoa symbolilla H . Lisäksi lähtö- ja ratakoordinaatiston kantoja merkitään vastaavasti koordinaatistojen symboleilla $O = (\hat{\mathbf{x}}^O, \hat{\mathbf{y}}^O, \hat{\mathbf{z}}^O)$ ja $H = (\hat{\mathbf{x}}^H, \hat{\mathbf{y}}^H, \hat{\mathbf{z}}^H)$. Molemmat kannat ovat ortonormaaleja. Tässä tapauksessa siirtymää $O \rightarrow H$ pidetään suorana, ja siirtymää $H \rightarrow O$ käänteisenä.

Muodostetaan suoran kannanvaihdon $O \rightarrow H$ matriisiesitys $\mathbf{P}_{H \leftarrow O} = [\varphi_{O,H}]$ siten, että ratakoordinaatiston $+z$ -akseli kiinnitetään integroimisvakion \mathbf{h} suuntaiseksi. Tällöin vaaditaan, että integroimisvakio \mathbf{h} voidaan esittää ratakoordinaatiston kannassa H yhtälöllä

$$\mathbf{h} = h \hat{\mathbf{z}}^H. \quad (4.59)$$

Suora kannanvaihto $O \rightarrow H$ voidaan esittää millä tahansa ortonormaalilla siirtymämatriisilla $\mathbf{P}_{H \leftarrow O}$, joka toteuttaa yhtälön

$$h \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{z}}^H \end{bmatrix}_H = \mathbf{P}_{H \leftarrow O} \begin{bmatrix} \mathbf{h} \end{bmatrix}_O. \quad (4.60)$$

Kun yhtälö (4.60) kerrotaan puolittain vasemmalta ortonormaalilla siirtymämatriisin transpoosilla $(\mathbf{P}_{H \leftarrow O})^T = \mathbf{P}_{O \leftarrow H}$, saadaan yhtälö

$$\begin{bmatrix} \mathbf{h} \end{bmatrix}_O = h \mathbf{P}_{O \leftarrow H} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{z}}^H \end{bmatrix}_H, \quad (4.61)$$

jossa matriisi $\mathbf{P}_{O \leftarrow H}$ on käänteinen siirtymämatriisi ratakoordinaatiston kannasta H takaisin viitekoordinaatiston kantaan O . Sopiva kannanvaihto voidaan vaihtoehtoisesti määrittellä käänteisesti millä tahansa ortonormaalilla käänteisellä siirtymämatriisilla $\mathbf{P}_{O \leftarrow H}$, joka toteuttaa yhtälön (4.61).

Seuraavaksi näytetään yksi tapa, jolla yhtälön (4.61) toteuttava, käänteinen siirtymämatriisi $\mathbf{P}_{O \leftarrow H}$ on mahdollista muodostaa. Ortonormaali siirtymämatriisi $\mathbf{P}_{O \leftarrow H}$ voidaan muodostaa kahden rotaatiomatriisin sekvenssinä [20, s. 43],

$$\mathbf{P}_{O \leftarrow H} = \mathbf{R}_Z(\alpha) \mathbf{R}_X(\beta). \quad (4.62)$$

Yhtälön (4.62) rotaatiomatriisit \mathbf{R}_z ja \mathbf{R}_x kiertävät alaindeksissä mainittua akselia vastassa olevaa tasoa vastapäivään, kun katsotaan akselia pitkin kohti origoa. Kirjoitetaan rotaatiomatriisit komponenteittain tämän määritelmän mukaisesti, jolloin saadaan yhtälö

$$\mathbf{P}_{O \leftarrow H} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \beta & -\sin \beta \\ 0 & \sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix}. \quad (4.63)$$

Lasketaan yhtälön (4.63) matriisitulo. Saadaan käänteisen kannanvaihdon $H \rightarrow O$ matriisiesitys eli siirtymämatriisi

$$\mathbf{P}_{O \leftarrow H} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \cos \beta & \sin \alpha \sin \beta \\ \sin \alpha & \cos \alpha \cos \beta & -\cos \alpha \sin \beta \\ 0 & \sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix}. \quad (4.64)$$

Sijoitetaan käänteinen siirtymämatriisi (4.64) yhtälöön (4.61). Koska $[\hat{\mathbf{z}}^H]_H = [0, 0, 1]^T$, seuraa yhtälö

$$\begin{bmatrix} h_x \\ h_y \\ h_z \end{bmatrix} = h \begin{bmatrix} \sin \alpha \sin \beta \\ -\cos \alpha \sin \beta \\ \cos \beta \end{bmatrix}. \quad (4.65)$$

Kulmat α ja β voidaan ratkaista yhtälöstä (4.65), kun integroimisvakio $[\mathbf{h}]_O = [h_x, h_y, h_z]^T$ tunnetaan. Kulmalle α saadaan tangentin yhtälö x - ja y -komponenttien yhtälöistä, ja kulmalle β saadaan kosinin yhtälö z -komponentin yhtälöstä. Kulmien ratkaisuksi saadaan

$$\alpha = \arctan \frac{h_x}{-h_y}, \quad (4.66)$$

$$\beta = \arccos \frac{h_z}{h}. \quad (4.67)$$

Ratageometriaa käsittelevässä luvussa (luku 6) ilmenee, että yhtälöt (4.66) ja (4.67) ovat itse asiassa radan ensimmäisen ja toisen asentokulman, nousevan solmun pituuden Ω ja inkliinaation i , yhtälöt (6.14) ja (6.17) vastaavasti.

Ratakoordinaatiston määritelmässä (sivulla 67) kiinnitetään ainoastaan z -akselin asento ja suunta. Määritelmä ei kiinnitä xy -tason perussuuntaa. Tämän vuoksi on syytä huomauttaa, että yhtälön (4.62) määrittämä siirtymämatriisi ei ole ainoa mahdollinen, joka täyttää vaatimuksen (4.61), vaan yleisemmin ottaen mikä tahansa siirtymämatriisi

$$\mathbf{P}_{O \leftarrow H} = \mathbf{R}_z(\alpha) \mathbf{R}_x(\beta) \mathbf{R}_z(\gamma), \quad (4.68)$$

jossa kulma γ on mielivaltainen, toteuttaa yhtälön (4.61). Tämä johtuu siitä, että rotaatiosekvenssin alkuun (eli oikealle) lisätty rotaatio z -akselin ympäri, $\mathbf{R}_z(\gamma)$, ei vaikuta siirtymämatriisiin (4.64) kolmanteen sarakkeeseen. Tästä vuorostaan seuraa se, että ylimääräinen rotaatio ei vaikuta yhtälöihin (4.66) ja (4.67), mikä vuorostaan takaa yhtälön (4.61) toteutumisen.

Käänteinen siirtymämatriisi $\mathbf{P}_{O \leftarrow H}$ saadaan määriteltyä yksikäsitteisesti, jos ratakoordinaatiston $+z$ -akselin suunnanlisäksi kiinnitetään $+x$ -akselin suunta. Tavanomaisesti yksikäsitteisen ratakoordinaatiston $+x$ -akseli kiinnitetään integroimisvakion \mathbf{e} suuntaiseksi. Tällöin vaaditaan, että integroimisvakio \mathbf{e} voidaan esittää yksikäsitteisen ratakoordinaatiston kannassa H yhtälöllä

$$\mathbf{e} = e\hat{\mathbf{x}}^H. \quad (4.69)$$

Käänteinen kannanvaihto $H \rightarrow O$ voidaan nyt esittää yhtälön (4.68) mukaisella orthonormaalilla siirtymämatriisilla $\mathbf{P}_{H \leftarrow O}$, joka toteuttaa yhtälön (4.61) lisäksi myös yhtälön

$$[\mathbf{e}]_O = e\mathbf{P}_{O \leftarrow H} [\hat{\mathbf{x}}^H]_H, \quad (4.70)$$

jossa integroimisvakio $[\mathbf{e}]_O = [e_x, e_y, e_z]^T$.

Sijoitetaan yhtälön (4.68) mukainen käänteinen siirtymämatriisi $\mathbf{P}_{H \leftarrow O}$ yhtälöön (4.70). Koska integroimisvakion \mathbf{e} komponenttivektori $[\mathbf{e}^H]_H$ on $[1, 0, 0]^T$, yhtälön oikean puolen matriisitulo sieppaa siirtymämatriisin ensimmäisen pystyvektorin. Saadaan yhtälö

$$\begin{bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{bmatrix} = e \begin{bmatrix} \cos \alpha \cos \gamma - \sin \alpha \cos \beta \sin \gamma \\ \sin \alpha \cos \gamma - \cos \alpha \cos \beta \sin \gamma \\ \sin \beta \sin \gamma \end{bmatrix}. \quad (4.71)$$

Kulma γ voidaan ratkaista yhtälöstä (4.71), kun kulmat α ja β sekä integroimisvakio $[\mathbf{e}]_O = [e_x, e_y, e_z]^T$ tunnetaan. Kulman γ sini saadaan ratkaistua suoraan z -komponentista,

$$\sin \gamma = \frac{e_z}{e \sin \beta}. \quad (4.72)$$

Kulman γ kosini ratkaistaan seuraavasti. Ensin kerrotaan x - ja y -komponenttien yhtälöt puolittain tekijöillä $\cos(\alpha)/e$ ja $\sin(\alpha)/e$ vastaavasti. Sen jälkeen yhtälöt lasketaan puolittain yhteen. Yhtälöiden oikeiden puolten jälkimmäiset termit kumoavat toisensa, ja ensimmäiset termit summautuvat yhteen kulman γ kosiniksi. Saadaan yhtälö

$$\cos \gamma = \frac{e_x \cos \alpha + e_y \sin \alpha}{e}. \quad (4.73)$$

Kulman γ tangenti voidaan nyt laskea sinin ja kosinin yhtälöiden (4.72) ja (4.73) avulla. Saadaan yhtälö

$$\tan \gamma = \frac{e_z}{e_x \cos \alpha \sin \beta + e_y \sin \alpha \sin \beta}. \quad (4.74)$$

Nimittäjässä esiintyvät trigonometrinen funktioiden tulot saadaan suoraan integroimisvakion \mathbf{h} yhtälöstä (4.65), jonka perusteella $\cos \alpha \sin \beta = -h_y / h$ ja $\sin \alpha \sin \beta = h_x / h$. Kun nämä sijoitetaan yhtälöön (4.74), saadaan kulman γ tangentin yhtälö

$$\tan \gamma = \frac{he_z}{h_x e_y - h_y e_x}, \quad (4.75)$$

josta kulman γ ratkaisuksi saadaan

$$\gamma = \arctan \frac{he_z}{h_x e_y - h_y e_x}. \quad (4.76)$$

Kulman γ oikea neljännes ratkeaa kosinin etumerkistä. Ratageometriaa käsittelevässä luvussa (luku 6) ilmenee, että yhtälö (4.76) on itse asiassa radan kolmannen asentokulman, periapsin argumentin ω , yhtälö (6.30).

Yksikäsitteisen ratakoordinaatiston H kantavektorien $\hat{\mathbf{x}}^H$, $\hat{\mathbf{y}}^H$ ja $\hat{\mathbf{z}}^H$ esitykset komponenttivektoreina $[\hat{\mathbf{x}}^H]_O$, $[\hat{\mathbf{y}}^H]_O$ ja $[\hat{\mathbf{z}}^H]_O$ viitekoordinaatiston kannan O suhteen voidaan tulkinnan (4.58) perusteella lukea käänteisen siirtymämatriisin $\mathbf{P}_{O \leftarrow H}$ pystyvektoreista,

$$\mathbf{P}_{O \leftarrow H} = \begin{bmatrix} [\hat{\mathbf{x}}^H]_O & [\hat{\mathbf{y}}^H]_O & [\hat{\mathbf{z}}^H]_O \end{bmatrix}. \quad (4.77)$$

Toisaalta, yhtälöiden (4.59) ja (4.69) perusteella

$$\mathbf{P}_{O \leftarrow H} = \begin{bmatrix} \left[\frac{1}{h} \mathbf{h} \right]_O & \left[\frac{1}{he} \mathbf{h} \times \mathbf{e} \right]_O & \left[\frac{1}{e} \mathbf{e} \right]_O \end{bmatrix}, \quad (4.78)$$

jossa kantavektori $\hat{\mathbf{y}}^H = \hat{\mathbf{x}}^H \times \hat{\mathbf{z}}^H$ täydentää koordinaatiston oikeakätiseksi.

Ratakoordinaatistosta siirtyminen sylinterikoordinaatistoon

Merkitään mielivaltaista ratakoordinaatistoa symbolilla H , ja sylinterikoordinaatistoa symbolilla S . Merkitään lisäksi rata- ja sylinterikoordinaatiston kantoja vastaavasti koordinaatistojen symboleilla $H = (\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{z}})$ ja $S = (\mathbf{u}_r, \mathbf{u}_\theta, \mathbf{u}_z)$. Ratakoordinaatiston kantavektorit eivät enää edellytä yläindeksiin merkintää kannasta, sillä ne erottuvat sylinterikoordinaatiston kantavektoreista muutenkin. Molemmat kannat ovat ortonormaalieja. Tässä tapauksessa siirtymää $H \rightarrow S$ pidetään suorana, ja siirtymää $S \rightarrow H$ käänteisenä.

Määritellään aluksi kytkentä $\mathbf{r} = \mathbf{r}(r, \theta, z)$ ratakoordinaatiston H suorakulmaisten koordinaatien (x, y, z) ja ratakoordinaatiston H sylinterikoordinaattien (r, θ, z) välille yhtälöillä

$$\begin{aligned}x &= r \cos \theta \\y &= r \sin \theta, \\z &= z\end{aligned}\tag{4.79}$$

jossa r ja θ ovat vastaavasti sijainnin napasäde ja -kulma ratakoordinaatiston xy -tasossa. Kun yhtälön (4.79) määrittämä koordinaattimuunnos $\mathbf{r} = \mathbf{r}(r, \theta, z)$ derivoidaan kunkin sylinterikoordinaatin suhteen, saadaan *koordinaattikanta* (engl. *coordinate basis*). Näin muodostettu kanta ei koostu yksikkövektoreista, mutta kantavektorit ovat kuitenkin kohtisuorassa toisiinsa. Näin ollen ortonormaali kannan muodostamiseksi riittää kantavektorien normeeraus. Normeerauksen tuloksena saadaan sijainnista \mathbf{r} riippuva sylinterikoordinaatiston kanta $S = (\mathbf{u}_r, \mathbf{u}_\theta, \mathbf{u}_z)$, joka kytkeytyy ratakoordinaatiston kantaan $H = (\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{z}})$ yhtälöillä

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_r &= \hat{\mathbf{x}} \cos \theta + \hat{\mathbf{y}} \sin \theta \\ \mathbf{u}_\theta &= -\hat{\mathbf{x}} \sin \theta + \hat{\mathbf{y}} \cos \theta, \\ \mathbf{u}_z &= \hat{\mathbf{z}}\end{aligned}\tag{4.80}$$

jossa $\hat{\mathbf{z}}$ on integroimisvakion \mathbf{h} kanssa samansuuntainen yksikkövektori. Ratakoordinaatiston H kantavektorien $\hat{\mathbf{x}}$ ja $\hat{\mathbf{y}}$ suunnat ovat muuten mielivaltaiset, mutta ne ovat kohtisuorassa toisiinsa ja kantavektoriin $\hat{\mathbf{z}}$ nähden.

Yhtälön (4.58) perusteella suoran siirtymämatriisin $\mathbf{P}_{S \leftarrow H}$ vaakavektorit voidaan tulkita uuden kannan S kantavektoreiksi $(\mathbf{u}_r, \mathbf{u}_\theta, \mathbf{u}_z)$ esitettynä vanhan kannan H kantavektorien $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{z}})$ suhteen. Näin ollen suoran siirtymämatriisin $\mathbf{P}_{S \leftarrow H}$ komponentit voidaan lukea sellaisenaan yhtälöstä (4.80). Tällä tavoin suoraksi siirtymämatriisiksi saadaan

$$\mathbf{P}_{S \leftarrow H} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.\tag{4.81}$$

Yhtälöstä (4.81) havaitaan, että suora siirtymämatriisi $\mathbf{P}_{S \leftarrow H}$ on itse asiassa xy -tason rotaatio myötäpäivään.

Yhtälön (4.57) nojalla käänteinen siirtymämatriisi $\mathbf{P}_{H \leftarrow S}$ saadaan suoran siirtymämatriisin (4.81) transpoosina. Edellä tehdyn havainnon perusteella käänteinen siirtymämatriisi on xy -tason rotaatio vastapäivään,

$$\mathbf{P}_{H \leftarrow S} = \mathbf{R}_Z(\theta).\tag{4.82}$$

Yleisin mahdollinen käänteinen siirtymämatriisi $\mathbf{P}_{O \leftarrow S}$ sylinterikoordinaatistosta S takaisin viitekoordinaatistoon O saadaan näin ollen ketjuttamalla yhtälöiden (4.68) ja (4.81) siirtymämatriisit $\mathbf{P}_{O \leftarrow H}$ ja $\mathbf{P}_{H \leftarrow S}$. Käänteiseksi siirtymämatriisiksi saadaan

$$\mathbf{P}_{O \leftarrow S} = \mathbf{R}_Z(\alpha)\mathbf{R}_X(\beta)\mathbf{R}_Z(\gamma + \theta), \quad (4.83)$$

jossa kulmat α , β ja γ ovat vakioita ja kulma θ on sijainnin napakulma. Siirtymämatriisia (4.83) käyttäen sijaintivektorin kannanvaihtoyhtälöksi saadaan

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \mathbf{R}_Z(\alpha)\mathbf{R}_X(\beta)\mathbf{R}_Z(\gamma + \theta) \begin{bmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (4.84)$$

jossa sijaintivektorin esitys viitekoordinaatistossa $[\mathbf{r}]_O = [x, y, z]^T$ ja sylinterikoordinaatistossa $[\mathbf{r}]_S = [r, 0, 0]^T$.

Sijainnista riippuvien kantavektorien aikaderivaatat

Likeyhtälön muuntaminen sylinterikoordinaatistoon edellyttää sekä sijaintivektorin \mathbf{r} että kiihtyvyyksvektorin $\ddot{\mathbf{r}}$ esittämistä sylinterikoordinaatiston kannassa. Kiihtyvyyksvektorin $\ddot{\mathbf{r}}$ esittämiseksi tarvitaan sijaintivektorin toista aikaderivaattaa kannassa, joka muuttuu ajan suhteen. Tämä vuorostaan edellyttää kantavektorien (4.80) aikaderivaattoja. Koska kaikki suureet halutaan esittää samassa kannassa, pitää kantavektorien derivaatat ilmaista kantavektorien itsensä avulla. Muodostetaan seuraavaksi kantavektorien derivaatat ajan suhteen.

Suoritetaan esimerkin vuoksi kantavektori \mathbf{u}_r derivointi ajan t suhteen seikkaperäisesti. Koska kantavektori ei suoraan riipu ajasta, vaan koordinaattien kautta, muunnetaan derivaattaoperaattori d/dt ketjusäännön perusteella seuraavasti,

$$\frac{d}{dt}[\mathbf{u}_r] = \left(\frac{d}{dr} \frac{dr}{dt} + \frac{d}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} + \frac{d}{dz} \frac{dz}{dt} \right) [\mathbf{u}_r]. \quad (4.85)$$

Suoritetaan derivoinnit. Napakoordinaattien aikaderivaatat dr/dt ja $d\theta/dt$ ovat vakioita koordinaattien r , θ ja z suhteen, ja lisäksi z -koordinaatin aikaderivaatta $dz/dt = 0$. Tästä seuraa, että jäljelle jäävät vain kantavektorin derivoinnit eri koordinaattien suhteen,

$$\frac{d}{dt}[\mathbf{u}_r] = \dot{r} \frac{d}{dr}[\mathbf{u}_r] + \dot{\theta} \frac{d}{d\theta}[\mathbf{u}_r]. \quad (4.86)$$

Derivoidaan kantavektori \mathbf{u}_r sekä napasäteen r että napakulman θ suhteen, ja esitetään derivaatat kantavektoreita käyttäen. Derivoidaan ensin napasäteen r suhteen. Koska kantavektori ei riipu napasäteestä, saadaan

$$\frac{d}{dr}[\mathbf{u}_r] = \mathbf{0}. \quad (4.87)$$

Derivoidaan kantavektori \mathbf{u}_r napakulman θ suhteen. Tällä kertaa saadaan

$$\frac{d}{d\theta}[\mathbf{u}_r] = -\hat{\mathbf{x}} \sin \theta + \hat{\mathbf{y}} \cos \theta = \mathbf{u}_\theta. \quad (4.88)$$

Tulos seuraa sijoittamalla (4.87) ja (4.88) yhtälöön (4.86). Kantavektorien aikaderivaatat ovat koottu seuraavaan kappaleeseen.

Ensimmäisen kantavektorin \mathbf{u}_r aikaderivaataksi saadaan

$$\frac{d}{dt}[\mathbf{u}_r] = \dot{\theta} \mathbf{u}_\theta. \quad (4.89)$$

Toisen kantavektorin \mathbf{u}_θ aikaderivaataksi saadaan vastaavalla menettelyllä

$$\frac{d}{dt}[\mathbf{u}_\theta] = -\dot{\theta} \mathbf{u}_r. \quad (4.90)$$

Kolmannen kantavektorin \mathbf{u}_z aikaderivaataksi saadaan

$$\frac{d}{dt}[\mathbf{u}_z] = \mathbf{0}. \quad (4.91)$$

Tämä päättää kantavektorien aikaderivaattojen muodostamisen.

Sijainti-, nopeus- ja kiihtyvyyksvektorin esitys sylinterikoordinaatistossa

Muodostetaan seuraavaksi sijainnin \mathbf{r} , nopeuden $\dot{\mathbf{r}}$ ja kiihtyvyyden $\ddot{\mathbf{r}}$ esitykset sylinterikoordinaatiston kannassa $S = (\mathbf{u}_r, \mathbf{u}_\theta, \mathbf{u}_z)$. Kantavektorien määritelmien perusteella sijaintivektorin esitykseksi saadaan

$$\mathbf{r} = r\mathbf{u}_r + z\mathbf{u}_z. \quad (4.92)$$

Yhtälössä (4.92) esiintyvä r ei ole sijaintivektorin normi, vaan sijaintivektorin napasäde xy -tasossa, ja se vastaa normia vain, jos z -komponentti on nolla.

Derivoidaan yhtälö (4.92) puolittain ajan suhteen,

$$\frac{d}{dt}\mathbf{r} = \frac{d}{dt}[r]\mathbf{u}_r + r \frac{d}{dt}[\mathbf{u}_r] + \frac{d}{dt}[z]\mathbf{u}_z + z \frac{d}{dt}[\mathbf{u}_z]. \quad (4.93)$$

Lausekkeessa esiintyvät kantavektorien aikaderivaatat saadaan yhtälöistä (4.89) ja (4.91). Nopeusvektorin esitykseksi saadaan

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{r}\mathbf{u}_r + r\dot{\theta}\mathbf{u}_\theta + \dot{z}\mathbf{u}_z. \quad (4.94)$$

Derivoidaan yhtälö (4.94) puolittain ajan suhteen,

$$\frac{d}{dt}\dot{\mathbf{r}} = \frac{d}{dt}[\dot{r}\mathbf{u}_r] + \frac{d}{dt}[r\dot{\theta}\mathbf{u}_\theta] + \frac{d}{dt}[\dot{z}\mathbf{u}_z]. \quad (4.95)$$

Tulon derivointisäännön perusteella,

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{r}} &= \frac{d}{dt} [\dot{r}] \mathbf{u}_r + \dot{r} \frac{d}{dt} [\mathbf{u}_r] + \ddot{z} \mathbf{u}_z \\ &+ \left(\frac{d}{dt} [r] \dot{\theta} + r \frac{d}{dt} [\dot{\theta}] \right) \mathbf{u}_\theta + r \dot{\theta} \frac{d}{dt} [\mathbf{u}_\theta] + \ddot{z} \mathbf{u}_z. \end{aligned} \quad (4.96)$$

Sievennysten jälkeen saadaan tulos, kiihtyvyydsvektorin esitys sylinterikoordinaatistossa

$$\ddot{\mathbf{r}} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \mathbf{u}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) \mathbf{u}_\theta + \ddot{z} \mathbf{u}_z. \quad (4.97)$$

Tämä päättää sijainti-, nopeus- ja kiihtyvyydsvektorin sylinterikoordinaatistoesityksen muodostamisen.

Liikkeyhtälön esitys sylinterikoordinaatistossa

Sijoitetaan sijainnin ja kiihtyvyyden lausekkeet (4.92) ja (4.97) liikkeyhtälöön (3.15), joka toistetaan tässä selkeyden vuoksi:

$$\ddot{\mathbf{r}}_{AB} = -\mu \frac{\mathbf{r}_{AB}}{\|\mathbf{r}_{AB}\|^3}.$$

Koska sylinterikoordinaatistossa sijainnin z -komponentti on vakio $z = 0$, täytyy myös kiihtyvyyden z -komponentin olla vakio $\ddot{z} = 0$. Näin ollen z -komponentit eliminoituvat yhtälön molemmilta puolilta. Liikkeyhtälön (3.15) muuttujien määrä vähenee kahdella, koska sijainnin ja nopeuden z -komponentit eliminoituvat. Päästään tulokseen eli liikkeyhtälön (3.15) esitykseen sylinterikoordinaatistossa

$$(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \mathbf{u}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) \mathbf{u}_\theta = -\frac{\mu}{r^2} \mathbf{u}_r. \quad (4.98)$$

Koska kantavektorit ovat keskenään riippumattomia, voidaan kustakin kantavektorista muodostaa oma differentiaaliyhtälönsä. Näin menetelmällä liikkeyhtälön esitys sylinterikoordinaatistossa (4.98) johtaa differentiaaliyhtälösystemiin

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -\frac{\mu}{r^2}, \quad (4.99)$$

$$2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = 0. \quad (4.100)$$

Napasäteen r korkein derivaatta esiintyy ensimmäisessä yhtälössä (4.99) ja napakulman θ korkein derivaatta jälkimmäisessä yhtälössä (4.100). Ensimmäistä differentiaaliyhtälöä (4.99) kutsutaan nimellä *radiaalinen liikkeyhtälö* (engl. *radial equation of motion*) ja jälkimmäistä differentiaaliyhtälöä (4.100) nimellä *tangentialinen liikkeyhtälö* (engl. *tangential equation of motion*) [21, s. 40].

Ratakoordinaatiston (ja sen johdosta myös sylinterikoordinaatiston) perustason asento on valittu integroimisvakion \mathbf{h} suunnan perusteella. Integroimisvakion pituutta ei hyödynnetty mitenkään. Muunnos ratakoordinaatistoon vastaa muuttujien määrän vähentämistä integroimisvakiota \mathbf{h} hyödyntäen. Muuttujien määrä ei kuitenkaan vähene

kolmella vaan kahdella, koska vektorin suunnan määrittämiseksi riittää kaksi toisistaan riippumatonta kulmaa, eikä vektorin pituutta hyödynnetty.

4.6 Integraali 4 (pintanopeus)

Integrointi

On mahdollista näyttää [54, s. 69–70; 20, s. 46; 45, s. 147], että tangenciaalinen liikeyhtälö (4.100) on sama kuin yhtälö

$$\frac{d}{dt}[r^2\dot{\theta}] = 0. \quad (4.101)$$

Tämä voidaan integroida suoraan ajan suhteen. Seuraa tulos

$$r^2\dot{\theta} = h', \quad (4.102)$$

jossa h' on integroimisvakio.

Yhtälö (4.102) vastaa kulmaliikemäärän säilymistä sylinterikoordinaateissa esitettyinä. Tuloksen mielekästä tulkittamista varten tarvitaan pintanopeuden käsite. Tämä käsite esitellään seuraavaksi.

Pintanopeus

Kun kappaleen napakulma muuttuu määrän $d\theta$ ajassa dt , pyyhkäisee kappaleen napasäde r hyvin kapean sektorin, joka on lähes suorakulmaisen kolmion muotoinen. Napasäteen pyyhkäisemän infinitesimaalisen sektorin pinta-ala

$$dA = (r \times rd\theta)/2. \quad (4.103)$$

Pinta-alan lauseke on muodostettu kolmion pinta-alan laskukaavasta ($kanta \times korkeus$)/2. Kun yhtälö jaetaan puolittain ajalla dt , saadaan napasäteen pyyhkäisemän pinta-alan aikaderivaatta

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta}. \quad (4.104)$$

Tätä suuretta, napasäteen pyyhkäisemän pinta-alan aikaderivaattaa, kutsutaan nimellä *pintanopeus* (engl. *areal velocity*) [25, s. 73; 57, s. 290; 35, s. 181; 45, s. 16].

Yhtälön (4.102) perusteella kappaleen pintanopeus on vakio

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} h'. \quad (4.105)$$

Koska pintanopeus on vakio, pyyhkii napasäde samassa aikavälissä aina pinta-alaltaan samansuuruisen sektorin. Tuloksen (4.102) tulkinta voidaan nyt tiivistää lauseeksi: kappaleen pintanopeus on vakio.

Integraalien 1 ja 4 välinen riippuvuus

Näytetään, että integroimisvakion h' arvo vastaa jo löydetyn integroimisvakion h normaalia. Tämä tehdään esittämällä integraalin 1 yhtälö (4.6) sylinterikoordinaatiston kannassa.

Yhtälön (4.6) mukaan

$$\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{h}.$$

Vektorit esitetään sylinterikoordinaatiston kannassa hyödyntäen sijaintivektorin \mathbf{r} esitystä (4.92) ja nopeusvektorin $\dot{\mathbf{r}}$ esitystä (4.94). Nämä sijoitetaan yhtälöön (4.6), jolloin

$$r\mathbf{u}_r \times (\dot{r}\mathbf{u}_r + r\dot{\theta}\mathbf{u}_\theta) = h\mathbf{u}_z. \quad (4.106)$$

Viedään ristitulo sulkujen sisälle,

$$r\dot{r}\mathbf{u}_r \times \mathbf{u}_r + r^2\dot{\theta}\mathbf{u}_r \times \mathbf{u}_\theta = h\mathbf{u}_z. \quad (4.107)$$

Ensimmäinen termi yhtälön vasemmalla puolella on ristitulon ominaisuuksien perusteella nollavektori, ja jäljelle jää vain jälkimmäinen termi. Yhtälö sievenee muotoon

$$r^2\dot{\theta}\mathbf{u}_z = h\mathbf{u}_z. \quad (4.108)$$

Korvataan vasemman puolen termi integraalin 4 yhtälöä (4.102) käyttäen. Seuraa tulos,

$$h' = h. \quad (4.109)$$

Tämä tulos osoittaa, että integrointi ei tuottanut aiemmista riippumatonta liikevakiota.

4.7 Integraali 5 (eksentrisyys ja perisentrikulma)

Napakulman aikaderivaatan eliminointi differentiaaliyhtälöstä

Ratkaistaan edellä löydetty integroimisvakio (4.102) muuttujan $\dot{\theta}$ suhteen,

$$\dot{\theta} = \frac{h}{r^2}. \quad (4.110)$$

Eliminoidaan muuttuja $\dot{\theta}$ radiaalisesta liikeyhtälöstä. Tämä tehdään sijoittamalla (4.110) radiaaliseen liikeyhtälöön (4.99). Saadaan differentiaaliyhtälö

$$\ddot{r} - \frac{h^2}{r^3} = -\frac{\mu}{r^2}. \quad (4.111)$$

Tämä differentiaaliyhtälö on epälineaarinen, koska siinä esiintyy tuntemattoman funktion r potensseja.

Epälineaarisuus hankaloittaa differentiaaliyhtälön integrointia huomattavasti, ja sen vuoksi differentiaaliyhtälö (4.111) linearisoidaan ensin käyttäen sopivaa muuttujanvaihtoa. Sen jälkeen lineaarinen toisen kertaluvun differentiaaliyhtälö ratkaistaan tavanomaisin menetelmin.

Differentiaaliyhtälön linearisointi

Suoritetaan napasäteelle r muuttujanvaihto $r \rightarrow u$,

$$r = u^{-1}. \quad (4.112)$$

Differentiaaliyhtälössä (4.111) esiintyy muuttujan r lisäksi sen toinen aikaderivaatta \ddot{r} . Näin ollen pitää vielä selvittää toisen aikaderivaatan \ddot{r} lauseke muuttujanvaihtoa (4.112) käyttäen. Toisen aikaderivaatan laskemiseksi vaihdetaan riippumaton muuttuja. Tämän seurauksena aikaderivaatta voidaan suorittaa koordinaattiderivaattana.

Suoritetaan riippumattomalle muuttujalle t muuttujanvaihto $t \rightarrow \theta$. Yhtälön (4.102) perusteella,

$$\frac{d}{dt} = \frac{h}{r^2} \frac{d}{d\theta}. \quad (4.113)$$

Korvataan vielä muuttuja r käyttäen muuttujanvaihtoa (4.112). Aikaderivaatta voidaan suorittaa nyt koordinaattiderivaattana,

$$\frac{d}{dt} = hu^2 \frac{d}{d\theta}. \quad (4.114)$$

Lasketaan muuttujan r aikaderivaatta. Derivoidaan yhtälön (4.112) puolittain ajan suhteen,

$$\frac{d}{dt}[r] = \frac{d}{dt}[u^{-1}]. \quad (4.115)$$

Korvataan oikean puolen aikaderivaatta yhtälöllä (4.114),

$$\frac{d}{dt}[r] = hu^2 \frac{d}{d\theta}[u^{-1}]. \quad (4.116)$$

Suoritetaan derivoinnit. Saadaan tulos

$$\dot{r} = -h \frac{du}{d\theta}. \quad (4.117)$$

Jotta muuttujan \ddot{r} esitys saadaan muuttujan u lausekkeena, derivoidaan yhtälö (4.117) vielä kertaalleen ajan suhteen. Toimimalla samoin kuin edellä saadaan yhtälö

$$\frac{d}{dt}[\dot{r}] = hu^2 \frac{d}{d\theta} \left[-h \frac{du}{d\theta} \right]. \quad (4.118)$$

Suoritetaan derivoinnit. Saadaan tulos

$$\ddot{r} = -h^2 u^2 \frac{d^2 u}{d\theta^2}. \quad (4.119)$$

Yhtälöt (4.112) ja (4.119) antavat esityksen sekä napasäteelle r että sen toiselle aikaderivaatalle \ddot{r} muuttujan u lausekkeena. Näiden avulla differentiaaliyhtälö (4.111)

saadaan muunnettua muuttujan u lineaariseksi differentiaaliyhtälöksi. Lineaarinen, toisen kertaluvun differentiaaliyhtälö voidaan ratkaista tavanomaisia menetelmiä käyttäen.

Sijoitetaan (4.112) ja (4.119) differentiaaliyhtälöön (4.111). Sievennysten jälkeen saadaan muuttujan u lineaarinen differentiaaliyhtälö

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = -\frac{\mu}{h^2}. \quad (4.120)$$

Differentiaaliyhtälön (4.120) homogeeninen muoto vastaa yksinkertaisen harmonisen värähtelijän (engl. *simple harmonic oscillator*, SHO) liikeyhtälöä [29, s. 87–90; 5, s. 62–7, 267; 56, s. 163–7; 61, s. 1635].

Integrointi

Toisen kertaluvun lineaarinen differentiaaliyhtälö (4.120) integroidaan tavanomaisin menetelmin, jotka ovat esitelty esimerkiksi lähteessä Grossman [26, s. 756–9, 780–3] tai Desloge [16, s. 436–40]. Koska differentiaaliyhtälö (4.120) on epähomogeeninen, yleinen ratkaisu on summa sekä homogeenisen muodon yleisestä ratkaisusta että epähomogeenisen muodon yksityisratkaisusta. Yksityisratkaisu voidaan löytää vakioiden variointilla tai valistuneella arvauksella. Edellä mainitut lähteet etsivät yksityisratkaisun valistuneella arvauksella.

Differentiaaliyhtälön (4.120) yleiseksi ratkaisuksi saadaan edellä mainittujen lähteiden nojalla

$$u = \frac{\mu}{h^2} (1 + e \cos(\theta - \theta_0)), \quad (4.121)$$

jossa e ja θ_0 ovat integroimisvakioita. Yhtälön (4.121) oikean puolen ensimmäinen termi on epähomogeenisen muodon yksityisratkaisu ja jälkimmäinen termi homogeenisen muodon yleinen ratkaisu.

Suoritetaan muuttujanvaihto $u \rightarrow r$ yhtälöä (4.112) käyttäen. Seuraa tulos,

$$r = \frac{p}{1 + e \cos(\theta - \theta_0)}, \quad (4.122)$$

jossa

$$p = \frac{h^2}{\mu}. \quad (4.123)$$

Tulos (4.122) vastaa kartioleikkauksen yleistä yhtälöä napakoordinaateissa (2.4), kun kartioleikkauksen (2.4) eksentrisyys $\varepsilon = e$ ja urapisteen napakulma $\theta' = \theta - \theta_0$. Tämän vastaavuuden perusteella integroimisvakio θ_0 voidaan tulkita kartioleikkauksen napakulman nollasuunnaksi ratakoordinaatistossa. Nollasuunta määrittää kartioleikkauksen pääakselin asennon ja suunnan, jossa pääakseli leikkaa johtosuoran. Toisin sanoen integroimisvakio θ_0 määrää kartioleikkauksen asennon ratakoordinaatiston perustasossa.

Koska tulos (4.122) vastaa kartioleikkausten yleistä yhtälöä, voidaan tämän tuloksen perusteella tehdä sama päätelmä kuin aiemman tuloksen (4.20) yhteydessä tehtiin: Keplerin ongelman ratkaisukäyrät ovat muodoltaan kartioleikkauksia. Jälleen voidaan huomauttaa, että yhtälö (4.122) ei sisällä tietoa siitä, kuinka kappale etenee kartioleikkauksikäyrällä ajan suhteen.

Perisentrikulma

Integroimisvakion θ_0 on mahdollista löytää vielä mielekkäämpi tulkinta. Kun kartioleikkauksen urapisteen napakulma $\theta = \theta_0$, saavuttaa yhtälön (4.122) kosinifunktio maksiminsa, mistä seuraa, että kappaleen napasäde r saavuttaa vastaavasti miniminsä. Radan pistettä, jossa kiertolainen (eli kappale) on lähinnä keskuskappaletta (eli polttopistettä), kutsutaan perisentriksi (määritellään myöhemmin). Näin ollen integroimisvakio θ_0 vastaa perisentrin suuntaa ratakoordinaatiston perustasossa. Tässä työssä napakulmaa θ_0 kutsutaan nimellä *perisentrikulma* (engl. *angle of pericenter passage*).

Jos ratakoordinaatiston perustason nollasuunnaksi valitaan solmuviiva, niin integroimisvakio θ_0 vastaa periapsin argumenttia ω [20, s. 50]. Tällöin urapisteen napakulma θ voidaan korvata leveyden argumentilla $u = \nu + \omega$, jossa ν on urapisteen fokaalikulma [20, s. 50]. Käsitteet solmuviiva, periapsin argumentti ja leveyden argumentti määritellään myöhemmin ratageometriaa käsittelevässä luvussa (luku 6).

Integraalien 2 ja 5 välinen riippuvuus

Näytetään, että nyt löydetyt integroimisvakiot e ja θ_0 vastaavat jo löydetyn integroimisvakion \mathbf{e} geometrista sisältöä. Integroimisvakion \mathbf{e} geometrinen sisältö tarkoittaa tässä yhteydessä sen muista integroimisvakioista riippumattomia suureita, jotka ovat (i) pituus ja (ii) suunta ratakoordinaatiston xy -tasossa. Integroimisvakioon \mathbf{e} ei sisälly toista suuntakulmaa, joka olisi muista integroimisvakioista riippumaton. Yhtälön (4.12) mukaan integroimisvakiot \mathbf{h} ja \mathbf{e} ovat kohtisuorassa toisiinsa, jolloin integroimisvakio \mathbf{h} määrää tason, jossa integroimisvakion \mathbf{e} tulee olla. Näin ollen integroimisvakio \mathbf{e} määräytyy yksikäsitteisesti pituuden e ja xy -tason suuntakulman θ_0 perusteella.

Merkitään integraalin 2 yhtälössä (4.21) esiintyviä muuttujia r ja e vastaavasti muuttujilla r' ja e' , jotka vastaavat vektorien \mathbf{r} ja \mathbf{e} normeja. Verrataan näin esitettyä integraalin 2 yhtälöä (4.21) ja integraalin 5 yhtälöä (4.122) toisiinsa. Havaitaan, että yhtälöt ovat identtiset, kun muuttujat samaistetaan seuraavasti:

$$r' = r \quad \text{ja} \quad \theta_r = \theta, \quad (4.124)$$

$$e' = e \quad \text{ja} \quad \theta_e = \theta_0. \quad (4.125)$$

Tämän perusteella integraalissa 5 syntyneet integroimisvakiot e ja θ_0 vastaavat jo integraalissa 2 löydettyä integroimisvakiota \mathbf{e} . Integrointi ei tuottanut uusia, aikaisemmista riippumattomia integroimisvakioita.

4.8 Integraali 6 (perisentraaika)

Integrointi

Eliminoidaan muuttuja r yhtälöstä (4.102), joka toistetaan tässä luettavuuden vuoksi,

$$h = r^2 \frac{d\theta}{dt}.$$

Eliminointi tehdään sijoittamalla (4.122) yhtälöön (4.102). Kerrotaan yhtälö puolittain differentiaalilla dt . Saadaan riippuvan muuttujan θ ja riippumattoman muuttujan t välinen differentiaaliyhtälö

$$\frac{\mu^2}{h^3} dt = \frac{d\theta}{(1 + e \cos(\theta - \theta_0))^2}. \quad (4.126)$$

Integroidaan yhtälö (4.126) puolittain, jolloin

$$\frac{\mu^2}{h^3} \int dt = \int \frac{d\theta}{(1 + e \cos(\theta - \theta_0))^2}. \quad (4.127)$$

Differentiaaliyhtälö (4.126) on nyt ratkaistu neliöintejä vaille.

Yhtälön (4.127) oikean puolen integraalin laskeminen on hyvin haastavaa, ja se esitetään seikkaperäisesti luvussa 4.9. Integraalin tulos riippuu integroimisvakion e arvosta eli Keplerin ongelman ratkaisukäyränä olevan kartioleikkauksen tyypistä. Integraaliksi saadaan eri tulokset riippuen siitä, onko kyseessä ellipsi ($e < 1$), paraabeli ($e = 1$) vai hyperbeli ($e > 1$).

Integrointi ellipsiradan tapauksessa

Ellipsiradan tapauksessa ($0 < e < 1$) yhtälön (4.127) oikea puoli saatetaan integroinnin kannalta helpompaan muotoon muuttujanvaihoilla $\theta \rightarrow \nu$ ja $\nu \rightarrow E$. Tulevassa luvussa 4.9 nämä muuttujanvaihdot suoritetaan seikkaperäisesti, mutta tässä alaluvussa muuttujanvaihoista esitellään vain yhtälöt, joilla ne määritellään, ja niiden geometriset tulokset.

Muuttujien θ ja ν välinen kytkentä määritellään luvussa 4.9 yhtälöllä (4.140),

$$\nu = \theta - \theta_0.$$

Tämän yhtälön mukainen muuttujanvaihto $\theta \rightarrow \nu$ voidaan tulkita geometrisesti koordinaatiston xy -tason kierroksi, jolla mielivaltaisessa asennossa olevasta ratakoordinaatistosta siirrytään tiettyssä asennossa olevaan ratakoordinaatistoon. Integraalin 5 yhtälön (4.122) perusteella uudessa ratakoordinaatistossa napa-akseli (eli napakulman nollasuunta) osoittaa kohti kartioleikkauksen pääakselin ja johtosuoran leikkauspistettä. Näin ollen muuttuja ν voidaan tulkita geometrisesti yhtälön (2.4) mukaisesti kartioleikkauksen urapisteen napakulmaksi. Ellipsin tapauksessa kartioleikkauksen urapisteen napakulma on sama kuin oikea fokaalikulma.

Muuttujien ν ja E välinen kytkentä määritellään luvussa 4.9 yhtälöillä (4.144) ja (4.155), jotka yhdistettynä vastaavat luvun 4.9 yhtälöä (4.164),

$$\tan \frac{\nu}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \tan \frac{E}{2}.$$

Tämä yhtälö vastaa luvun 2.8 yhtälöä (2.97) oikean fokaalikulman tapauksessa, minkä perusteella muuttuja E voidaan tulkita geometrisesti ellipsin urapisteen eksentriseksi kulmaksi.

Liitteessä B ratkaistaan luvun 4.9 yhtälöstä (4.164) muuttujat ν ja E suljetussa muodossa toistensa suhteen. Muuttujien ratkaisuksi saadaan liitteen yhtälöiden (B.16) ja (B.18) mukaan vastaavasti

$$\begin{aligned} \nu &= \operatorname{atan} 2 \left(\sqrt{1-e^2} \sin E, \cos E - e \right), \\ E &= \operatorname{atan} 2 \left(\sqrt{1-e^2} \sin \nu, \cos \nu + e \right). \end{aligned}$$

Nämä yhtälöt vastaavat luvun 2.8 yhtälöitä (2.92) ja (2.93) vastaavasti oikean fokaalikulman tapauksessa.

Muuttujanvaihdot $\theta \rightarrow \nu$ ja $\nu \rightarrow E$ edellyttävät yhtälön (4.127) tapauksessa, että muuttujanvaihtojen yhtälöistä (4.140) ja (4.164) ratkaistaan kosinifunktion $\cos \nu = \cos(\theta - \theta_0)$ ja differentiaalin $d\nu = d\theta$ esitykset muuttujan E ja sen differentiaalin dE lausekkeina. Kun esitykset on ratkaistu, sijoitetaan ne yhtälöön (4.127), jolloin oikean puolen integraali yksinkertaistuu alkeisfunktioilla integroitavaan muotoon. Saadaan yhtälöstä (4.179) ellipsiradan tapaus $e < 1$,

$$\int \frac{d\theta}{(1 + e \cos(\theta - \theta_0))^2} = (1 - e^2)^{-\frac{3}{2}} \int (1 - e \cos E) dE.$$

Sovelletaan yhtälöstä (4.179) ellipsiradan tapausta yhtälöön (4.127). Saadaan riippumattoman muuttujan t ja riippuvan muuttujan E välinen yhtälö, jonka integraalit on mahdollista esittää alkeisfunktioita käyttäen,

$$\frac{\mu^2}{h^3} \int dt = (1 - e^2)^{-\frac{3}{2}} \int (1 - e \cos E) dE. \quad (4.128)$$

Lasketaan integraalit. Saadaan tulos

$$\frac{\mu^2}{h^3} (t - t_p) = (1 - e^2)^{-\frac{3}{2}} (E - e \sin E), \quad (4.129)$$

jossa t_p on integroimisvakio.

Keplerin yhtälö

Siirretään yhtälön (4.129) oikean puolen eksentrisyydestä riippuva vakiokerroin vasemmalle puolelle. Saadaan tämän alaluvun päätulos, ajan ja kappaleen sijainnin toisiinsa kytkevä yhtälö,

$$n(t - t_p) = E - e \sin E, \quad (4.130)$$

jossa vakio

$$n = \frac{\mu^2}{h^3} (1 - e^2)^{\frac{3}{2}}. \quad (4.131)$$

Tavanomaisesti yhtälöstä (4.126) puolittain integroimalla muodostettu tulos esitetään seuraavasti. Ensin kaikki vakio kertoimet viedään samalle puolelle aikamuuttujan kanssa. Sen jälkeen yhtälön arvoa merkitään uudella apumuuttujalla. Uusi apumuuttuja on siten ekvivalentti muodostetun yhtälön sekä oikean että vasemman puolen kanssa. Uusi apumuuttuja kytkeytyy vanhaan aikamuuttujaan lineaarisesti käyrätyypistä riippumatta. Tämän lineaarisen kytkennän johdosta apumuuttuja voidaan tulkita uudeksi aikamuuttujaksi, ja apumuuttujan yhtälö aikamuuttujan muuttujanvaihdoksi.

Ellipsiradan tapauksessa yhtälöstä (4.126) integroimalla muodostettu tulos (4.130) esitetään seuraavilla kahdella yhtälöllä. Suoritetaan ensin aikamuuttujalle t muuttujanvaihto $t \rightarrow M$. Uusi aikamuuttuja M määritellään vastaamaan yhtälön (4.130) vasenta puolta,

$$M = n(t - t_p). \quad (4.132)$$

Tämän alaluvun päätulos (4.130) voidaan esittää nyt muodossa

$$E - e \sin E = M. \quad (4.133)$$

Tässä muodossa päätulos kytkee aikamuuttujan M ja sijaintimuuttujan E toisiinsa. Yhtälö (4.133) on esitetty poikkeuksellisesti käänteisessä järjestyksessä, jossa muuttuja, jonka suhteen yhtälö on ratkaistu suljetussa muodossa, esiintyy yhtälön oikealla puolella. Käänteinen esitystapa perustellaan alla.

Yhtälön (4.133) muodossa päätulos vastaa itse asiassa Keplerin yhtälöä (2.109). Tämä vastaavuus mahdollistaa päätuloksen muuttujien geometrisen tulkinnan seuraavalla tavalla. Yhtälön (4.132) määrittämä aikamuuttuja M voidaan tulkita kappaleen sijainnin sektoriaaliseksi kulmaksi M , ja aikaisemman perustelun nojalla sijaintimuuttuja E voidaan tulkita kappaleen sijainnin eksentriseksi kulmaksi E . Näitä tulkintoja hyödyntäen integraalin 6 tulos voidaan esittää sanallisesti varsin ytimekkäässä muodossa: ellipsiradan tapauksessa kappaleen sektoriaalinen kulma M kasvaa lineaarisesti ajan t suhteen.

Luvussa 2 tarkasteltiin ellipsiä ja ellipsin urapisteen määrittäviä kulmasuureita. Tuolloin (luku 2.9 sivu 45) Keplerin yhtälöön (2.109) päädyttiin geometrisella päättelyllä. Tässä alaluvussa tarkasteltiin Newtonin mekaniikalla muodostetusta Keplerin on-

gelmasta (3.15) analyttisesti johdettua differentiaaliyhtälöä (4.126) ellipsiradan tapauksessa. Nyt Keplerin yhtälöön (4.133) päädyttiin analyttisellä päättelyllä.

Yhtälössä (4.133) käytetty käänteinen esitysjärjestys perustellaan tässä työssä seuraavasti. Käänteisen järjestyksen johdosta yhtälöissä (4.132) ja (4.133) tunnettu muuttuja esiintyy lukusuunnan suhteen aina samalla puolella yhtälöitä ja tuntematon muuttuja aina toisella puolella yhtälöitä. Yhtälöt voidaan lukea joko normaalin lukusuunnan myötäisesti (ylhäältä alas ja vasemmalta oikealle) tai vastaisesti (alhaalta ylös ja oikealta vasemmalle), ja lukusuunnan suhteen tuntematon muuttuja esiintyy aina ennen yhtäläisyysmerkkiä ja tunnettu muuttuja aina yhtäläisyysmerkin jälkeen.

Jos yhtälöt luetaan normaalin lukusuunnan myötäisesti, esiintyvät tuntemattomat yhtälöiden vasemmalla puolella. Tällöin yhtälöt määrittävät kuvauksen $E = E(t)$, joka edellyttää yhtälön (4.133) ratkaisemista tuntemattoman muuttujan E suhteen, mikä on aikaisemman (luku 2.9 sivu 45) perusteella mahdotonta suljetussa muodossa. Jos yhtälöt luetaan normaalin lukusuunnan vastaisesti, esiintyvät tuntemattomat yhtälöiden oikealla puolella. Tällöin yhtälöt määrittävät kuvauksen $t = t(E)$, joka edellyttää yhtälön (4.132) ratkaisemista tuntemattoman muuttujan t suhteen.

Perisentriaika

Lasketaan napakulman θ arvo ajanhetkellä $t = t_p$. Integraalin 6 ensimmäisestä yhtälöstä (4.132) lasketaan helposti, että muuttujaa $t = t_p$ vastaa muuttuja $M = 0$. Integraalin 6 toisesta yhtälöstä (4.133), joka vastaa Keplerin yhtälöä, voidaan päätellä melko vaivattomasti, että muuttujaa $M = 0$ vastaa muuttuja $E = 0$. Vastaavasti muuttujanvaihdon $\nu \rightarrow E$ yhtälö (4.164) voidaan ratkaista muuttujan ν suhteen, mikä on tehty liitteessä B. Kulman ν ratkaisuksi saadaan yhtälö (B.16), josta voidaan helposti laskea, että muuttujaa $E = 0$ vastaa muuttuja $\nu = 0$. Lopuksi muuttujanvaihdon $\theta \rightarrow \nu$ yhtälöstä (4.140) voidaan ratkaista, että muuttujaa $\nu = 0$ vastaa napakulma $\theta = \theta_0$. Yhteenvedona todetaan, että ajanhetkellä $t = t_p$ kappaleen sijainnin napakulma $\theta = \theta_0$ ratakoordinaatistossa.

Kun kappaleen sijainnin napakulma $\theta = \theta_0$, voidaan tehdä seuraavat kaksi päätelmää. Integraalin 2 yhtälön (4.20) perusteella (i) kappaleen sijainti on eksentrisuusvektorin osoittamassa suunnassa, ja (ii) kappaleen napasäde r saavuttaa miniminsä. Näin ollen ajanhetkellä $t = t_p$ kappale on lähimpänä kartioleikkauksen polttopistettä.

Radan pistettä, jossa kiertolainen (eli kappale) on lähimpänä keskuskappaletta (eli polttopistettä), kutsutaan perisentriksi (määritellään myöhemmin). Ajanhetkeä, jolloin kappale ohittaa perisentrin, kutsutaan nimellä *perisentriaika* (engl. *time of pericenter passage*) [49, s. 122; 35, s. 177; 20, s. 50]. Integroimisvakio t_p on kappaleen perisentriaika.

4.9 Todistus: integraali 6

Tässä alaluvussa näytetään seikkaperäisesti, kuinka integraali

$$\int \frac{d\theta}{(1 + e \cos(\theta - \theta_0))^2} \quad (4.134)$$

saatetaan yksinkertaisempaan muotoon, jonka integraali voidaan esittää alkeisfunktioiden avulla. Työväline, jolla integraali yksinkertaistetaan, on muuttujanvaihto. Integraali saatetaan helpommin laskettavaan muotoon kolmella muuttujanvaihdolla. Viimeinen muuttujanvaihto riippuu kartioleikkauksen eksentrisyydestä e . Se käsitellään tapauskohtaisesti erikseen ellipsille, hyperbelille ja paraabelille. Kun muuttujanvaihdot ovat suoritettu, voidaan integraali laskea kussakin tapauksessa alkeisfunktioita käyttäen.

Eryyisesti tämän alaluvun keskeinen tavoite on näyttää seikkaperäisesti, kuinka ellipsiradan tapauksessa ($0 < e < 1$) integraalille (4.134) saadaan tulos

$$\int \frac{d\theta}{(1 + e \cos(\theta - \theta_0))^2} = (1 - e^2)^{-\frac{3}{2}} (E - e \sin E). \quad (4.134)$$

Esityksen täydellisyyden vuoksi myös hyperbelin ja paraabelin tapaukset käsitellään.

Tarvittavat apuyhtälöt

Määritellään uusi vakio

$$\varepsilon = \frac{1 - e}{1 + e}. \quad (4.135)$$

Vakion ε etumerkki riippuu eksentrisyyden e arvosta eli kartioleikkauksen tyypistä seuraavalla tavalla:

- jos ellipsi ($e < 1$), niin $\varepsilon > 0$,
- jos paraabeli ($e = 1$), niin $\varepsilon = 0$,
- jos hyperbeli ($e > 1$), niin $\varepsilon < 0$.

Vakion ε määritelmästä (4.135) saadaan suoraan laskemalla apuyhtälöt

$$\varepsilon + 1 = \frac{2}{1 + e}, \quad (4.136)$$

$$\varepsilon - 1 = \frac{-2e}{1 + e}. \quad (4.137)$$

Lisäksi vakion ε määritelmästä (4.135) suoraan laskemalla saadaan myös apuyhtälö

$$\varepsilon^3 (1 + e)^6 = (1 - e^2)^3. \quad (4.138)$$

Tarvittavat apuyhtälöt ovat nyt koossa. Seuraavaksi integroitavana olevaa differentiaalimuotoa ryhdytään yksinkertaistamaan sarjalla muuttujanvaihtoja.

Muuttujanvaihto 1

Integroitavana oleva differentiaalimuoto on integraalilausekkeen (4.134) integrandi,

$$\frac{d\theta}{(1 + e \cos(\theta - \theta_0))^2}. \quad (4.139)$$

Tämä saatetaan helpommin integroitavaan muotoon kolmella muuttujanvaihdolla. Muuttujanvaihtoista ensimmäinen on yksinkertaisin ja kaksi muuta selvästi monimutkaisempia.

Esitellään ensimmäinen muuttujanvaihto $\theta \rightarrow \nu$. Merkitään uutta muuttujaa

$$\nu = \theta - \theta_0. \quad (4.140)$$

Differentiaalimuodon (4.139) tapauksessa muuttujanvaihdon $\theta \rightarrow \nu$ toteuttaminen edellyttää sekä (i) vanhan muuttujan θ esittämistä uuden muuttujan ν lausekkeena että (ii) vanhan differentiaalin $d\theta$ esittämistä uuden muuttujan ν ja sen differentiaalin $d\nu$ lausekkeena.

Muodostetaan (i) vanhan muuttujan θ esitys uuden muuttujan ν lausekkeena. Differentiaalimuodossa (4.139) vanha muuttuja θ esiintyy ainoastaan kosinifunktion argumentissa, joka vastaa suoraan yhtälön (4.140) oikeaa puolta. Näin ollen muuttujanvaihdon $\theta \rightarrow \nu$ toteuttamiseksi on helpompaa korvata suoraan koko kosinifunktion argumentin lauseke muuttujanvaihdon (4.144) mukaisesti, kuin muodostaa vanhan muuttujan θ esitys uuden muuttujan ν lausekkeena, ja korvata vanha muuttuja ν integroitavana olevasta differentiaalimuodosta.

Muodostetaan (ii) vanhan differentiaalin $d\theta$ esitys uuden muuttujan ν ja sen differentiaalin $d\nu$ lausekkeena. Differentioidaan yhtälö (4.140) puolittain. Saadaan aputuloks,

$$d\theta = d\nu. \quad (4.141)$$

Toteutetaan muuttujanvaihto. Sijoitetaan (4.140) ja (4.141) integroitavana olevaan differentiaalimuotoon (4.139), jolloin

$$\frac{d\theta}{(1 + e \cos(\theta - \theta_0))^2} = \frac{d\nu}{(1 + e \cos \nu)^2}. \quad (4.142)$$

Tämä on ensimmäisen muuttujanvaihdon tulos.

Yhtälön (4.140) mukainen muuttujanvaihto $\theta \rightarrow \nu$ voidaan tulkita geometrisesti koordinaatiston xy -tason kierroksi. Kun tämä muuttujanvaihto suoritetaan integraalin 5 yhtälölle (4.122), saadaan kartioleikkauksen yleinen yhtälö (2.4). Tämän vastaavuuden perusteella muuttujanvaihto voidaan tulkita koordinaatistomuunnokseksi, jolla mielivaltaisessa asennossa olevasta ratakoordinaatistosta siirrytään tietyssä asennossa olevaan ratakoordinaatistoon. Uudessa ratakoordinaatistossa napa-akseli (eli napakulman nol-lasuunta) on yhdensuuntainen kartioleikkauksen pääakselin kanssa ja osoittaa kohti pääakselin ja johtosuoran leikkauspistettä. Uusi muuttuja ν voidaan tämän perusteella tulkita kartioleikkauksen urapisteen napakulmaksi.

Muuttujanvaihto 2

Integroitavana oleva differentiaalimuoto on nyt yhtälön (4.142) oikealla puolella esiintyvä lauseke

$$\frac{dv}{(1 + e \cos v)^2}. \quad (4.143)$$

Yksinkertaistamista jatketaan toisella muuttujanvaihdolla. Tämä muuttujanvaihto on selvästi ensimmäistä muuttujanvaihtoa monimutkaisempi.

Esitellään toinen muuttujanvaihto $v \rightarrow x$. Merkitään uutta muuttujaa

$$x = \tan \frac{v}{2}. \quad (4.144)$$

Differentiaalimuodon (4.143) tapauksessa muuttujanvaihdon $v \rightarrow x$ toteuttaminen edellyttää sekä (i) vanhan muuttujan v esittämistä uuden muuttujan x lausekkeena että (ii) vanhan differentiaalin dv esittämistä uuden muuttujan x ja sen differentiaalin dx lausekkeena.

Muodostetaan (i) vanhan muuttujan v esitys uuden muuttujan x lausekkeena. Kun muuttujanvaihdon yhtälö (4.144) ratkaistaan vanhan muuttujan v suhteen, saadaan yhtälö $v = 2 \arctan x$. Jos vanha muuttuja v korvattaisiin differentiaalimuodosta (4.143) edellä mainitun yhtälön mukaisesti, johtaisi se hankalasti evaluoitavaan lausekkeeseen $\cos(2 \arctan x)$.

Integroitavana olevassa differentiaalimuodossa (4.143) vanha muuttuja v esiintyy ainoastaan kosinifunktion argumenttina. Näin ollen muuttujanvaihdon $v \rightarrow x$ toteuttamiseksi on helpompaa muodostaa kosinifunktion $\cos v$ esitys tangenttifunktion $\tan(v/2)$ lausekkeena ja korvata tangenttifunktio muuttujanvaihdon (4.144) mukaisesti, kuin muodostaa vanhan muuttujan v esitys uuden muuttujan x lausekkeena ja korvata vanha muuttuja integroitavana olevasta differentiaalimuodosta.

Muodostetaan kosinifunktion $\cos v$ esitys uuden muuttujan x lausekkeena edellä kuvatulla tavalla. Trigonometrisen identiteetin (A.8) nojalla

$$\cos v = \frac{1 - \tan^2(v/2)}{1 + \tan^2(v/2)}. \quad (4.145)$$

Korvataan yhtälössä (4.145) esiintyvät tangenttifunktiot muuttujalla x määritelmän (4.144) mukaisesti. Saadaan aputuloksena, muuttujan v kosinin esitys muuttujan x lausekkeena,

$$\cos v = \frac{1 - x^2}{1 + x^2}. \quad (4.146)$$

Muodostetaan (ii) vanhan differentiaalin dv esitys uuden muuttujan x ja sen differentiaalin dx lausekkeena. Differentioidaan yhtälö (4.144) puolittain muuttujan v suhteen. Sen jälkeen hyödynnetään uuden muuttujan x määritelmää (4.144). Tämän määri-

telmän avulla differentioidusta yhtälöstä saadaan korvattua vanhan muuttujan v sisältämät termit uuden muuttujan x lausekkeina. Saadaan yhtälö

$$\frac{dx}{dv} = \frac{1}{2} \left(1 + \tan^2 \frac{v}{2} \right) = \frac{1}{2} (1 + x^2). \quad (4.147)$$

Ratkaistaan differentiaalilin dv suhteen,

$$dv = \frac{2}{1+x^2} dx. \quad (4.148)$$

Toteutetaan muuttujanvaihto $v \rightarrow x$. Sijoitetaan (4.148) ja (4.146) integroitavana olevaan differentiaalimuotoon (4.143),

$$\frac{1}{(1+e \cos v)^2} dv,$$

jolloin

$$= \frac{1}{\left(1 + e \frac{1-x^2}{1+x^2} \right)^2} \frac{2}{1+x^2} dx. \quad (4.149)$$

Tavoitteena on sieventää tätä lauseketta siten, että nimittäjään saadaan termin x^2 kertoimeksi määritelmän (4.135) mukainen vakio ε . Lavennetaan ensin lausekkeella $1+x^2$, ja sievennetään sitten nimittäjää,

$$= \frac{2(1+x^2)}{\left((1-e)x^2 + 1+e \right)^2} dx. \quad (4.150)$$

Sen jälkeen otetaan nimittäjän yhteiseksi tekijäksi $(1+e)$ ja tuodaan se potenssilausekkeen ulkopuolelle,

$$= \frac{2(1+x^2)}{(1+e)^2 \left(\frac{1-e}{1+e} x^2 + 1 \right)^2} dx. \quad (4.151)$$

Nyt nimittäjässä esiintyy vakio ε . Kun nimittäjä sievennetään vakion ε määritelmän (4.135) perusteella, saadaan

$$= \frac{2}{(1+e)^2} \frac{1+x^2}{(\varepsilon x^2 + 1)^2} dx. \quad (4.152)$$

Tehdään yhteenveto muuttujanvaihdosta. Integroitavana oleva differentiaalimuoto (4.143) on muuttujanvaihdolla $v \rightarrow x$ saatettu muotoon (4.152). Tämä tarkoittaa, että muuttujanvaihdolla on muodostettu tulos

$$\frac{1}{(1 + e \cos v)^2} dv = \frac{2}{(1 + e)^2} \frac{1 + x^2}{(\varepsilon x^2 + 1)^2} dx. \quad (4.153)$$

Uusi muuttuja x määriteltiin yhtälöllä (4.144), muuttujanvaihdon suorittamisessa hyödynnettiin aputuloksia (4.148) ja (4.146), ja muuttujanvaihdon jälkeisessä sievennyksessä hyödynnettiin merkintää (4.135).

Muuttujanvaihto 3: tapauksittain

Integroitavana oleva differentiaalimuoto on nyt yhtälön (4.153) oikealla puolella esiintyvä lauseke

$$\frac{2}{(1 + e)^2} \frac{1 + x^2}{(\varepsilon x^2 + 1)^2} dx. \quad (4.154)$$

Tämän lausekkeen yksinkertaistaminen uudella muuttujanvaihdolla käsitellään tapauksittain.

Jako tapauksiin tehdään vakion ε arvon perusteella. Tämä vastaa jakoa tapauksiin ratkaisukäyrän tyypin mukaan. Käsiteltävät eri tapaukset ovat ratkaisukäyrän mukaan (a) ellipsi, $\varepsilon > 0$, (b) hyperbeli, $\varepsilon < 0$, ja (c) paraabeli, $\varepsilon = 0$.

Muuttujanvaihto 3a (ellipsi)

Käsitellään differentiaalimuodon (4.154) yksinkertaistamista tapauksessa (a), jossa oletetaan, että ratkaisukäyrä on ellipsi. Tämä vastaa oletusta, jonka mukaan vakio $\varepsilon > 0$.

Esitellään kolmas muuttujanvaihto $x \rightarrow E$. Merkitään tällä kertaa vanhaa muuttujaa x uuden muuttujan E avulla yhtälöllä

$$x = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \tan \frac{E}{2}. \quad (4.155)$$

Differentiaalimuodon (4.154) tapauksessa muuttujanvaihdon $x \rightarrow E$ toteuttaminen edellyttää sekä (i) vanhan muuttujan x esittämistä uuden muuttujan E lausekkeena että (ii) vanhan differentiaalimäärän dx esittämistä uuden muuttujan E ja sen differentiaalimäärän dE lausekkeena.

Muodostetaan (i) vanhan muuttujan x esitys uuden muuttujan E lausekkeena. Tällä kertaa muuttujanvaihdon $x \rightarrow E$ määrittävä yhtälö (4.155) on jo valmiiksi ratkaistu vanhan muuttujan x suhteen. Näin ollen tarvittava esitys on jo muodostettu.

Muodostetaan (ii) vanhan differentiaalimäärän dx esitys uuden muuttujan E ja sen differentiaalimäärän dE lausekkeena. Differentioidaan yhtälö (4.155) puolittain muuttujan E suhteen, ja ratkaistaan differentiaalimäärän dx suhteen. Saadaan yhtälö

$$dx = \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}} \left(1 + \tan^2 \frac{E}{2} \right) dE. \quad (4.156)$$

Toteutetaan muuttujanvaihto. Sijoitetaan (4.155) ja (4.156) integroitavana olevaan differentiaalimuotoon (4.154),

$$\frac{2}{(1+e)^2} \frac{1+x^2}{(\varepsilon x^2+1)^2} dx,$$

jolloin vakioiden kokoamisen jälkeen

$$= \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}(1+e)^2} \frac{1+(1/\varepsilon)\tan^2(E/2)}{\tan^2(E/2)+1} dE. \quad (4.157)$$

Otetaan vakio $1/\varepsilon$ yhteiseksi tekijäksi tulon jälkimmäiselle termille, ja siirretään se koko lausekkeen eteen osaksi yhteistä vakiokerrointa. Lavennetaan tulon jälkimmäinen termi tekijällä $\cos^2(E/2)$. Koska kyseinen tekijä löytyy tangenttien nimittäjistä, sievennee lauseke muotoon

$$= \frac{1}{\varepsilon\sqrt{\varepsilon}(1+e)^2} \left(\varepsilon \cos^2 \frac{E}{2} + \sin^2 \frac{E}{2} \right) dE. \quad (4.158)$$

Korvataan kosinin ja sinin toinen potenssi trigonometrisilla identiteeteillä (A.10) ja (A.11) vastaavasti. Termien kokoamisen jälkeen lauseke saadaan muotoon

$$= \frac{1}{2\varepsilon\sqrt{\varepsilon}(1+e)^2} [(\varepsilon+1) + (\varepsilon-1)\cos E] dE. \quad (4.159)$$

Sievennetään hakasulkeiden sisällä sulutetut termit aputuloksia (4.136) ja (4.137) vastaavasti käyttäen. Siirretään vakiot osaksi lausekkeen edessä olevaa vakiokerrointa ja sievennetään sitä. Lauseke saadaan muotoon

$$= \frac{1}{\varepsilon\sqrt{\varepsilon}(1+e)^3} (1 - e \cos E) dE. \quad (4.160)$$

Sievennetään lausekkeen edessä olevaa vakiokerrointa seuraavasti. Kaikki nimittäjässä neliöjuuren ulkopuolella olevat termit viedään neliöjuuren sisälle. Koska $\varepsilon > 0$ ellipsioletuksen johdosta, voidaan vakio ε viedä neliöjuuren sisään tavanomaiseen tapaan korottamalla se toiseen potenssiin,

$$= \frac{1}{\sqrt{\varepsilon^3}(1+e)^3} (1 - e \cos E) dE. \quad (4.161)$$

Sovelletaan aputulosta (4.138) neliöjuuren lausekkeeseen. Aputuloksella vakiokertoimeksi saatu lauseke voidaan esittää murtopotenssina, koska kantaluku on ellipsioletuksen johdosta ei-negatiivinen. Saadaan tulos

$$= (1 - e^2)^{\frac{3}{2}} (1 - e \cos E) dE. \quad (4.162)$$

Tehdään yhteenveto muuttujanvaihdosta. Integroitavana oleva differentiaalimuoto (4.154) on muuttujanvaihdolla $x \rightarrow E$ saatettu muotoon (4.162). Tämä tarkoittaa, että on muodostettu tulos

$$\frac{2}{(1+e)^2} \frac{1+x^2}{(\varepsilon x^2+1)^2} dx = (1-e^2)^{\frac{3}{2}} (1-e \cos E) dE. \quad (4.163)$$

Uusi muuttuja E määriteltiin yhtälöllä (4.155). Muuttujanvaihdossa hyödynnettiin ellipsioletusta $\varepsilon > 0$ kaksi kertaa. Ensimmäisen kerran, kun lausekkeen (4.160) vakio ε vietiin neliöjuuren sisälle. Toisen kerran, kun lausekkeen (4.161) vakiokerroin esitettiin murtopotenssina.

Muuttujanvaihdot $v \rightarrow x$ ja $x \rightarrow E$ määriteltiin yhtälöillä (4.144) ja (4.155) vastavasti. Molemmat yhtälöt ovat ratkaistu muuttujan x suhteen, minkä perusteella yhtälöiden oikeat puolet voidaan merkitä yhtä suuriksi. Tällä tavoin saadaan muuttujien v ja E välinen kytkentä,

$$\tan \frac{v}{2} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \tan \frac{E}{2}, \quad (4.164)$$

jossa $\varepsilon > 0$ ellipsioletuksen edellyttämänä.

Yhtälö (4.164) vastaa itse asiassa luvun 2.8 yhtälöä (2.97) oikean fokaalikulman tapauksessa, kun fokaalikulma $v = \theta - \theta_0$ ensimmäisen muuttujanvaihdon (4.140) mukaisesti. Luvun 2.8 yhtälö (2.97) kytkee ellipsin urapisteen fokaalikulman v ja eksentrisen kulman E toisiinsa. Se johdettiin ellipsin geometriasta ja kulmasuureiden määritelmästä. Yhtälö (4.164) vuorostaan kytkee integroinnissa hyödynnetyt apumuuttujat v ja E toisiinsa. Kytkentä johdettiin yhdistämällä mielivaltaiset muuttujanvaihdot, joita ei voida perustella muuten kuin sillä, että ne yksinkertaistavat integrandin analyttisesti helpommin integroitavaan muotoon. Yhtälöiden (2.97) ja (4.164) vastaavuuden perusteella muuttujanvaihdon $x \rightarrow E$ uusi kulmamuuttuja E voidaan tulkita geometrisesti: kyseessä on ellipsiradan tapauksessa sijainnin eksentrisen kulma E .

Muuttujanvaihto 3b (hyperbeli)

Käsitellään differentiaalimuodon (4.154) yksinkertaistamista tapauksessa (b), jossa oletetaan, että ratkaisukäyrä on hyperbeli. Tämä vastaa oletusta, jonka mukaan vakio $\varepsilon < 0$. Hyperbelin tapaus käsitellään samaa periaatetta noudattaen kuin ellipsin tapaus.

Esitellään kolmas muuttujanvaihto $x \rightarrow F$. Merkitään tällä kertaa vanhaa muuttujaa x uuden muuttujan F avulla yhtälöllä

$$x = \frac{1}{\sqrt{-\varepsilon}} \tanh \frac{F}{2}. \quad (4.165)$$

Differentiaalimuodon (4.154) tapauksessa muuttujanvaihdon $x \rightarrow F$ toteuttaminen edellyttää sekä (i) vanhan muuttujan x esittämistä uuden muuttujan F lausekkeena että (ii) vanhan differentiaalilin dx esittämistä uuden muuttujan F ja sen differentiaalilin dF lausekkeena.

Muodostetaan (i) vanhan muuttujan x esitys uuden muuttujan F lausekkeena. Muuttujanvaihdon $x \rightarrow F$ määrittävä yhtälö (4.165) on jo valmiiksi ratkaistu vanhan muuttujan x suhteen. Näin ollen tarvittava esitys on jo muodostettu.

Muodostetaan (ii) vanhan differentiaalin dx esitys uuden muuttujan F ja sen differentiaalin dF lausekkeena. Differentioidaan yhtälö (4.165) puolittain muuttujan F suhteen, ja ratkaistaan differentiaalin dx suhteen. Saadaan yhtälö

$$dx = \frac{1}{2\sqrt{-\varepsilon}} \left(1 - \tanh^2 \frac{F}{2} \right) dF . \quad (4.166)$$

Toteutetaan muuttujanvaihto. Sijoitetaan (4.165) ja (4.166) integroitavana olevaan differentiaalimuotoon (4.154),

$$\frac{2}{(1+e)^2} \frac{1+x^2}{(\varepsilon x^2 + 1)^2} dx .$$

Lausekkeen sievennyksessä edetään samoin kuin ellipsin tapauksessa, kunnes

$$= \frac{1}{\varepsilon\sqrt{-\varepsilon}(1+e)^3} (1 - e \cosh F) dF . \quad (4.167)$$

Edessä olevan vakiokertoimen sieventäminen poikkeaa ellipsin tapauksesta. Koska vakio $\varepsilon < 0$, ei sitä voida viedä neliöjuuren sisään sellaisenaan toiseen potenssiin korottamalla. Sen sijaan vakion vastaluku $-\varepsilon > 0$, ja se voidaan viedä neliöjuuren sisään tavanomaiseen tapaan toiseen potenssiin korottamalla. Saadaan aputulostulos

$$\varepsilon\sqrt{-\varepsilon} = -(-\varepsilon)\sqrt{-\varepsilon} = -\sqrt{(-\varepsilon)^3} = -\sqrt{-\varepsilon^3} . \quad (4.168)$$

Sovelletaan aputulosta (4.168) lausekkeen (4.167) edessä olevaan vakiokertoimeen. Viedään myös vakiokertoimen jälkimmäinenkin tekijä neliöjuuren sisään. Näillä toimenpiteillä lauseke (4.167) saadaan muotoon

$$- \frac{1}{\sqrt{-\varepsilon^3}(1+e)^6} (1 - e \cosh F) dF . \quad (4.169)$$

Sovelletaan aputulosta (4.138) neliöjuuren lausekkeeseen. Neliöjuureen jää vielä miinusmerkki potenssilausekkeen eteen. Koska potenssilausekkeen eksponentti on pariton, voidaan miinusmerkki viedä sellaisenaan kantalukuun, jolloin sen termit vaihtavat paikkaansa. Lauseke saadaan muotoon

$$= - \frac{1}{\sqrt{(e^2 - 1)^3}} (1 - e \cosh F) dF . \quad (4.170)$$

Viedään ensin koko lausekkeen edessä oleva miinusmerkki jälkimmäisen tekijän sulkujen sisälle, jolloin sen termit vaihtavat paikkaansa. Edessä olevan vakiokertoimen lauseke voidaan esittää murtopotenssina, koska kantaluku $e^2 - 1 \geq 0$ hyperbelioletuksen johdosta. Saadaan lopullinen tulos,

$$= (e^2 - 1)^{-\frac{3}{2}} (e \cosh F - 1) dF . \quad (4.171)$$

Tehdään yhteenveto muuttujanvaihdosta. Integroitavana oleva differentiaalimuoto (4.154) on muuttujanvaihdolla $x \rightarrow F$ saatettu muotoon (4.171). Tämä tarkoittaa, että on muodostettu tulos

$$\frac{2}{(1+e)^2} \frac{1+x^2}{(\varepsilon x^2+1)^2} dx = (e^2-1)^{\frac{3}{2}} (e \cosh F - 1) dF. \quad (4.172)$$

Uusi muuttuja F määriteltiin yhtälöllä (4.165). Muuttujanvaihdossa hyödynnettiin hyperbelioletusta $\varepsilon < 0$ kaksi kertaa. Ensimmäisen kerran, kun yhtälössä (4.168) vakio ε vietiin vastalukuna neliöjuuren sisälle. Toisen kerran, kun lausekkeen (4.170) edessä oleva vakiokerroin esitettiin murtopotenssina.

Muuttujanvaihdot $v \rightarrow x$ ja $x \rightarrow F$ määriteltiin yhtälöillä (4.144) ja (4.165) vastavasti. Molemmat yhtälöt ovat ratkaistu muuttujan x suhteen, minkä perusteella yhtälöiden oikeat puolet voidaan merkitä yhtä suuriksi. Tällä tavoin saadaan muuttujien v ja F välinen kytkentä,

$$\tan \frac{v}{2} = \frac{1}{\sqrt{-\varepsilon}} \tanh \frac{F}{2}, \quad (4.173)$$

jossa $\varepsilon < 0$ hyperbelioletuksen edellyttämänä.

Yhtälö (4.173) vastaa itse asiassa luvun 2.10 yhtälöä (2.129) hyperbelin negatiiviselle haaralle vasemman fokaalikulman tapauksessa, kun fokaalikulma $v = \theta - \theta_0$ ensimmäisen muuttujanvaihdon (4.140) mukaisesti. Luvun 2.10 yhtälö (2.129) kytkee hyperbelin negatiivisen haaran urapisteen fokaalikulman v ja hyperbolisen kulman F toisiinsa. Se johdettiin hyperbelin geometriasta ja kulmasuureiden määrittelyistä. Yhtälö (4.173) vuorostaan kytkee integroinnissa hyödynnetyt apumuuttujat v ja F toisiinsa. Kytkentä johdettiin yhdistämällä mielivaltaiset muuttujanvaihdot, joita ei voida perustella muuten kuin sillä, että ne yksinkertaistavat integrandin analyttisesti helpommin integroitavaan muotoon. Yhtälöiden (2.97) ja (4.173) vastaavuuden perusteella muuttujanvaihdon $x \rightarrow F$ uusi kulmamuuttuja F voidaan tulkita geometrisesti: kyseessä on hyperbeliradan tapauksessa sijainnin hyperbolinen kulma F

Muuttujanvaihto 3c (paraabeli)

Käsitellään differentiaalimuodon (4.154) yksinkertaistamista tapauksessa (c), jossa oletetaan, että ratkaisukäyrä on paraabeli. Tämä vastaa oletusta, jonka mukaan vakio $\varepsilon = 0$.

Paraabelin tapauksessa kolmatta muuttujanvaihtoa ei tarvita. Integroitavana oleva differentiaalimuoto sievenee merkittävästi pelkästään sijoittamalla lukuarvot vakioiden ε ja e tilalle. Määritelmän (4.135) perusteella vakiota $\varepsilon = 0$ vastaa vakio $e = 1$.

Sijoitetaan lukuarvot

$$\varepsilon = 0 \quad \text{ja} \quad e = 1 \quad (4.174)$$

integroitavana olevaan differentiaalimuotoon (4.154),

$$\frac{2}{(1+e)^2} \frac{1+x^2}{(\epsilon x^2+1)^2} dx,$$

jolloin

$$= \frac{1}{2} (1+x^2) dx. \quad (4.175)$$

Paraabelin tapaus on selvästi yksinkertaisin kaikista kolmesta.

Integraalilausekkeet

Edellä suoritettujen ensimmäisen muuttujanvaihdon (4.140) ja toisen muuttujanvaihdon (4.144) perusteella saatiin tulokset (4.142) ja (4.153) vastaavasti. Näiden tulosten perusteella differentiaalimuodot (4.139), (4.143) ja (4.154) ovat keskenään ekvivalentteja,

$$\frac{1}{(1+e \cos(\theta - \theta_0))^2} d\theta = \frac{1}{(1+e \cos \nu)^2} d\nu = \frac{2}{(1+e)^2} \frac{1+x^2}{(\epsilon x^2+1)^2} dx. \quad (4.176)$$

Tämän jälkeen suoritettiin vakion ϵ arvosta riippuen joko kolmas muuttujanvaihto (ellipsi ja hyperbeli) tai lukuarvojen sijoitus (paraabeli). Ellipsin tai hyperbelin tapauksessa suoritettiin vastaavasti muuttujanvaihto (4.155) tai (4.165), jonka perusteella saatiin vastaavasti tulos (4.163) tai (4.172). Paraabelin tapauksessa suoritettiin lukuarvojen sijoitus (4.174), jonka perusteella saatiin tulos (4.175). Tehdään yhteenveto näistä muuttujanvaihtoista ja tuloksista. Muuttujanvaihdolla

$$x = \tan \frac{\nu}{2} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} \tan \frac{E}{2}, & \text{kun } \epsilon > 0 \\ x, & \text{kun } \epsilon = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{-\epsilon}} \tanh \frac{F}{2}, & \text{kun } \epsilon < 0 \end{cases} \quad (4.177)$$

differentiaalimuodolle (4.154) saadaan ekvivalenssi

$$\frac{2}{(1+e)^2} \frac{1+x^2}{(\epsilon x^2+1)^2} dx = \begin{cases} (1-e^2)^{-\frac{3}{2}} (1-e \cos E) dE, & \text{kun } \epsilon > 0 \\ \frac{1}{2} (1+x^2) dx, & \text{kun } \epsilon = 0. \\ (e^2-1)^{-\frac{3}{2}} (e \cosh F - 1) dF, & \text{kun } \epsilon < 0 \end{cases} \quad (4.178)$$

Korvataan yhtälön (4.178) vasen puoli käyttäen yhtälöä (4.176) ja oikealla puolella esiintyvät, apumuuttujaa ϵ koskevat ehdot eksentrisyyttä e koskevilla ehdoilla käyttäen yhtälöä (4.135). Integroidaan näin muodostettu yhtälö puolittain, jolloin

$$\int \frac{d\theta}{(1 + e \cos(\theta - \theta_0))^2} = \begin{cases} (1 - e^2)^{-\frac{3}{2}} \int (1 - e \cos E) dE, & \text{kun } e < 1 \\ \frac{1}{2} \int (1 + x^2) dx, & \text{kun } e = 1. \\ (e^2 - 1)^{-\frac{3}{2}} \int (e \cosh F - 1) dF, & \text{kun } e > 1 \end{cases} \quad (4.179)$$

Yhtälön (4.179) oikean puolen integraalit ovat riittävän yksinkertaisia esitettäväksi alkeisfunktioita käyttäen. Evaluoidaan integraalit. Saadaan tämän alaluvun päätulos [9, s. 138; 20, s. 67–8],

$$\int \frac{d\theta}{(1 + e \cos(\theta - \theta_0))^2} = \begin{cases} (1 - e^2)^{-\frac{3}{2}} (E - e \sin E), & \text{kun } e < 1 \\ \frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{3} x^3 \right), & \text{kun } e = 1. \\ (e^2 - 1)^{-\frac{3}{2}} (e \sinh F - F), & \text{kun } e > 1 \end{cases} \quad (4.180)$$

Tämä päättää integraalin 6 muodostamisen.

5 RATKAISUN YKSILÖINTI JA KEPLERIN LAIT

Tässä luvussa keskitytään tarkastelemaan integraalien merkitystä ja sisältöä ellipsiradan tapauksessa. Lisäksi esitellään Keplerin lait, jotka saadaan tässä työssä Newtonin mekaniikan ja painovoimalain seurauksina Keplerin ongelmasta.

Aluksi määritellään differentiaaliyhtälön ratkaisun yksilöimiseen kolme vaihtoehtoa: integroimisvakiot, tilavektori ja Keplerin rataelementit (luku 5.1). Sen jälkeen keskitytään edellisessä luvussa muodostettujen integraalien analysointiin ja tulkintaan (luku 5.2). Lopuksi esitellään Keplerin lait ja osoitetaan, kuinka Keplerin lait saadaan tässä työssä Newtonin mekaniikan ja painovoimalain seurauksina (luku 5.3).

5.1 Ratkaisukäyrän yksilöinti

Rataelementit

Keplerin ongelman eli differentiaaliyhtälön (3.15) ratkaisu on ajan t funktio

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t; c_1, \dots, c_6), \quad (5.1)$$

jossa parametrit c_1, \dots, c_6 ovat keskenään riippumattomia integroimisvakioita. Integroimisvakiot riippuvat differentiaaliyhtälön alkuarvoehdoista, ja ne yksilöivät ratkaisukäyrän. Integroimisvakioiden c_1, \dots, c_6 tulkinta riippuu käytetystä kuvauksesta \mathbf{r} . Tästä seuraa, että sama ratkaisukäyrä voidaan yksilöidä monilla eri suureilla.

Rataelementit (engl. *orbital elements*) määritellään tässä työssä tarkoittamaan sellaista joukkoa parametreja a_1, \dots, a_n , jotka yhdessä yksilöivät kappaleen radan eli liikeyhtälön ratkaisukäyrän (5.1). Määritelmä ei rajoita rataelementtien lukumäärää, mutta edellyttää, että on olemassa kuvaus

$$a_1, \dots, a_n \rightarrow c_1, \dots, c_6 \quad (n \geq 6), \quad (5.2)$$

jolla rataelementit muunnetaan keskenään riippumattomaksi integroimisvakioiksi. Tämä määritelmä on sekä täsmennys että yleistys lähteen [62, s. 46] käyttämästä määritelmästä.

Annetusta rataelementtien määritelmästä seuraa, että ratkaisukäyrän yksilöivät, keskenään riippumattomat integroimisvakiot c_1, \dots, c_6 voidaan aina tulkita määritelmän mukaisena joukkona rataelementtejä. Sen sijaan mielivaltaiset rataelementit a_1, \dots, a_n eivät välttämättä ole suoraan integroimisvakioita, koska niissä voi esiintyä keskinäisiä riippuvuuksia.

Useimmissa lähteissä (esimerkiksi [35, s. 174; 49, s. 119; 7, s. 58; 52, s. 185; 2, s. 435]) rataelementit tarkoittavat nimenomaan Keplerin rataelementtejä (määritellään myöhemmin). Lisäksi määritelmässä tyypillisesti korostetaan, että rataelementtejä on tasan kuusi kappaletta.

Tässä työssä rataelementit on pyritty määrittelemään yläkäsitteeksi, joka kattaa kaikki erilaiset radan yksilöintiin soveltuvat parametrijoukot. Tavoitteena on erityisesti, että myös sellaiset parametrijoukot, jossa kaikki yksittäiset parametrit eivät välttämättä ole keskenään riippumattomia, sopisivat määritelmän mukaisiksi rataelementeiksi. Tällaisia ovat esimerkiksi edellä löydettyjen integroimisvakioiden \mathbf{h} , \mathbf{e} ja t_p muodostama parametrijoukko, jossa kaikki parametrit eivät ole keskenään täysin riippumattomia.

Vaihtoehtoja ratkaisun yksilöintiin

Radan yksilöinti tapahtuu edellä annetun määritelmän mukaan rataelementeillä. Rataelementit ovat määritelmän mukaan mielivaltainen parametrijoukko a_1, \dots, a_n , joka on redusoitavissa kuuden keskenään riippumattoman integroimisvakion joukoksi c_1, \dots, c_6 . Seuraavaksi esitellään kolme erilaista parametrijoukkoa, jotka soveltuvat radan yksilöintiin: (i) tilavektori $(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$, (ii) integroimisvakiot \mathbf{h} , \mathbf{e} , t_p ja (iii) Keplerin rataelementit $a, e, \Omega, i, \omega, t_p$.

Ensimmäinen vaihtoehto ja samalla ilmeisin vaihtoehto ratkaisukäyrän yksilöintiin on käyttää tilavektoria $(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$, joka vastaa differentiaaliyhtälön (3.15) alkuarvoja. Tällöin keskenään riippumattomat integroimisvakiot c_1, \dots, c_6 ovat kappaleen sijainti \mathbf{r}_0 ja nopeus $\dot{\mathbf{r}}_0$ ajanhetkellä t_0 . Nämä ovat kätevä valinta, kun kappaleen sijaintia ja nopeutta integroidaan numeerisesti. Ne eivät kuitenkaan anna minkäänlaista käsitystä itse ratkaisukäyrän muodosta tai ominaisuuksista.

Toinen vaihtoehto on käyttää edellä löydettyjä integroimisvakioita \mathbf{h} , \mathbf{e} ja t_p . Hetken kuluttua näytetään, kuinka nämä ovat muunnettavissa kuuden keskenään riippumattoman integroimisvakion joukoksi c_1, \dots, c_6 . Integroimisvakiot \mathbf{h} ja \mathbf{e} ovat ajasta riippumattomia liikevakioita, minkä vuoksi ne soveltuvat erinomaisesti numeerisessa integroinnissa ratkaisun epätarkkuuden mittareiksi.

Kolmas vaihtoehto on käyttää Keplerin rataelementtejä a, e, Ω, i, ω ja t_p . Keskenään riippumattomat integroimisvakiot c_1, \dots, c_6 saadaan suoraan edellä mainituista parametreista. Keplerin rataelementit kuvaavat radan geometriaa varsin havainnollisella tavalla. Nämä esitellään yksityiskohtaisemmin omissa alaluvuissaan hetken kuluttua.

Integroimisvakiot

Integroimisvakiot (engl. *integration constants*) ovat pyörimismäärävektori \mathbf{h} , eksentrisyysvektori \mathbf{e} ja perisentraaika t_p . Vektorit \mathbf{h} ja \mathbf{e} eivät ole keskenään riippumattomia, vaan niitä sitoo toisiinsa yhtälö (4.12), jonka mukaan $\mathbf{h} \bullet \mathbf{e} = 0$.

Ennen kuin integroimisvakiot \mathbf{h} , \mathbf{e} ja t_p voidaan todeta rataelementeiksi edellä annetun määritelmän mukaan, tulee ensin näyttää, kuinka nämä muunnetaan kuudeksi, keskenään riippumattomaksi integroimisvakioksi c_1, \dots, c_6 . Seuraavaksi esitellään periaate, kuinka suoritetaan muunnos

$$\mathbf{h}, \mathbf{e}, t_p \rightarrow c_1, \dots, c_6. \quad (5.3)$$

Integroimisvakioiden \mathbf{h} ja \mathbf{e} välinen riippuvuus puretaan seuraavasti. Ratkaistaan edellä mainittu yhtälö (4.12) jonkin komponentin suhteen, jolloin integroimisvakioiden \mathbf{h} ja \mathbf{e} komponenteista viisi ovat riippumattomia muuttujia ja kuudes riippuva muuttuja. Tällöin integroimisvakiot \mathbf{h} , \mathbf{e} ja t_p voidaan muuntaa kuuden keskenään riippumattoman integroimisvakion c_1, \dots, c_6 joukoksi yksinkertaisesti pudottamalla yksi komponentti vektorista \mathbf{h} tai \mathbf{e} .

Edellä näytettiin toteen, kuinka integroimisvakiot \mathbf{h} , \mathbf{e} ja t_p ovat tässä työssä käytettävän määritelmän mukaisesti rataelementtejä. Jatkossa joukko parametreja a_1, \dots, a_n voidaan todistaa rataelementeiksi näyttämällä, kuinka suoritetaan muunnos

$$a_1, \dots, a_n \rightarrow \mathbf{h}, \mathbf{e}, t_p. \quad (5.4)$$

Lisäksi on näytettävä, että muunnoksen tuottamat integroimisvakiot \mathbf{h} ja \mathbf{e} noudattavat yhtälöä (4.12), jonka mukaan $\mathbf{h} \bullet \mathbf{e} = 0$. Tätä työkalua käytetään, kun halutaan todistaa, että tilavektorin sijainti \mathbf{r} ja nopeus $\dot{\mathbf{r}}$ muodostavat rataelementtien määritelmän mukaisen parametrijoukon.

Tilavektori

Tilavektori (engl. *state vector*) on sijaintivektori \mathbf{r} ja nopeusvektori $\dot{\mathbf{r}}$ yhdessä esitettynä [9, s. 140]. Tässä työssä tilavektoria merkitään monikkomerkinällä $(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$, jonka komponentit ovat sijaintivektorin \mathbf{r} ja nopeusvektorin $\dot{\mathbf{r}}$ komponentit ketjutettuna. Täsmällisesti merkittynä tilavektori on vektori $[\mathbf{r}^T, \dot{\mathbf{r}}^T]^T$, mutta tämä voidaan esittää monikkona $(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$, kunhan monikkomerkinän yhteydessä muistetaan mainita, että kyseinen monikko pitää tulkita (pysty)vektorina.

Yksi keskeinen teema tässä työssä on kehittää yhtälöt, joilla tilavektorista voidaan laskea integroimisvakiot. Toisin sanoen tavoitteena on näyttää, kuinka suoritetaan muunnos

$$\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}} \rightarrow \mathbf{h}, \mathbf{e}, t_p. \quad (5.5)$$

Tämä muunnos vastaa muunnosta (5.4), kun parametrijoukoksi a_1, \dots, a_n valitaan tilavektori $(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$. Samalla tilavektorin $(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$ komponentit tulevat todistettua määritelmän mukaisiksi rataelementeiksi.

Keplerin ongelman integraalien 1 ja 2 yhteydessä muodostettiin vastaavasti yhtälöt (4.6) ja (4.8), joilla tilavektorista $(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$ voidaan laskea integroimisvakiot \mathbf{h} ja \mathbf{e} . On

kuitenkin syytä huomata, että tähän asti muodostetuilla yhtälöillä ei ole mahdollista laskea integroimisvakioita t_p lähtien tilavektorista $(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$. Tätä varten tarvitaan useampi yhtälö lisää. Nämä yhtälöt kehitetään tulevissa luvuissa, ja niiden avulla tilavektorista $(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$ päästään integroimisvakioon t_p suorittamalla muunnosketju

$$\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}} \rightarrow \nu \rightarrow E \rightarrow M \rightarrow t_p, \quad (5.6)$$

jossa ν on fokaalikulma (luonnollinen anomalia), E on eksentrisen kulma (eksentrisen anomalia), ja M on sektoriaalinen kulma (keskianomalia).

Keplerin rataelementit

Keplerin rataelementit (engl. *Keplerian elements*) ovat kuusi parametria, jotka yksilöivät radan geometrisesti varsin havainnollisella tavalla [35, s. 178; 43, s. 119]. Radan muoto, koko ja asento kiinnitetään viidellä parametrilla. Kuudes parametri kiinnittää kappaleen sijainnin radalla tietyllä ajanhetkellä. Keplerin rataelementit tunnetaan myös nimellä *klassiset rataelementit* (engl. *classical orbital elements*) [62, s. 46].

Yleisimmin käytetyt Keplerin rataelementit ovat parametrien joukko [7, s. 58; 9, s. 21; 49, s. 121; 35, s. 178; 21, s. 49; 25, s. 474]

$$K = \{a, e, \Omega, i, \omega, t_p\}. \quad (5.7)$$

Isoakselin puolikas a kiinnittää radan koon. Eksentrisyys e kiinnittää radan muodon. Kolme seuraavaa parametria kiinnittävät radan asennon: nousevan solmun pituus Ω , inkliinaatio i ja periapsin argumentti ω . Viimeinen parametri, perisentriaika t_p , kiinnittää kappaleen sijainnin (perisentri) tietyllä ajanhetkellä (perisentriaika). Kukin edellä esitellyistä suureista määritellään täsmällisemmin seuraavissa alaluvuissa. Taulukossa 5.1 on selkeyden vuoksi vielä yhteenveto Keplerin rataelementeistä.

Symboli	Selite
a	Isoakselin puolikas (koko)
e	Eksentrisyys (muoto)
Ω	Nousevan solmun pituus (asento)
i	Inkliinaatio (asento)
ω	Periapsin argumentti (asento)
t_p	Perisentriaika (sijainti ajanhetkellä)

Taulukko 5.1. Keplerin rataelementit.

Yhtälön (5.7) määrittämä parametrijoukko K ei ole ainoa mahdollinen parametrijoukko Keplerin rataelementeiksi. Yleisimmät keskenään vaihtoehtoiset parametrit esitellään seuraavaksi. Isoakselin puolikkaan a sijasta voidaan käyttää semi-latus rectumia p [7, s. 58; 54, s. 80]. Periapsin argumentin ω sijasta voidaan käyttää periapsin pituutta ϖ [7, s. 58]. Perisentriajan t_p sijasta voidaan käyttää kappaleen sijainnin epookilla

t_0 ilmaisevaa kulmasuuretta, esimerkiksi keskianomaliaa epookilla M_0 , luonnollista anomaliaa epookilla ν_0 tai leveyden argumenttia epookilla u_0 [7, s. 60, 397; 54, s. 80].

Jos perisentriaika t_p korvataan jollain edellä mainituista vaihtoehdoista, riippuu tuloksesta, kasvaako Keplerin rataelementtien lukumäärä kuudesta seitsemään vai ei. Tässä työssä käytetyn rataelementtien määritelmän kannalta on yhdentekevää, onko Keplerin rataelementtejä kuusi vai seitsemän. Seuraavaksi esitellään kuitenkin kaksi tulkintatapaa perisentriajan korvaamiseksi siten, että Keplerin rataelementtien lukumäärä pysyy kuudessa.

Epookki voidaan kiinnittää etukäteen aika-akselin nolлахetkeksi, jolloin $t_0 = 0$. Tällöin perisentriajan t_p korvaava kulmasuure, esimerkiksi keskianomalia epookilla, määrittelee kappaleen sijainnin ($M = M_0$) ennalta määrätyllä ajanhetkellä ($t = 0$). Keplerin rataelementtien lukumäärä pysyy kuudessa, koska epookki on kiinnitetty perisentriajan korvaavan rataelementin määritelmässä.

Toisaalta, jos epookkina käytetään mielivaltaista ajanhetkeä t_0 , voidaan edelleen ajatella, että kappaleen sijainnin epookilla ilmaisevan kulmasuureen (esimerkiksi M_0 , ν_0 tai u_0) määritelmään sisältyy myös itse epookin t_0 määritelmä. Tällöin koordinaatistolle voidaan tarvittaessa suorittaa aikatranslaatio siten, että epookkia t_0 vastaa uudessa koordinaatistossa ajanhetki $t = 0$. Keplerin rataelementtien lukumäärä pysyy kuudessa, koska epookki on kiinnitetty perisentriajan korvaavan rataelementin määritelmässä.

Eryyisesti ekvaattori- ja ympyräradoilla joudutaan käyttämään vaihtoehtoisia parametreja, koska näillä radoilla ei ole hyvin määriteltyjä nousevaa solmua tai periapsia (esitellään myöhemmin). Seeber [54, s. 81–2] esittelee Keplerin rataelementeille vaihtoehtoisiksi Hillin ja Delaunayn rataelementit, jotka tunnetaan *kanonisina rataelementteinä* (engl. *canonical orbital elements*). Hänen mukaansa kanoniset rataelementit ei kärsi samoista ongelmista kuin Keplerin rataelementit, eikä niillä laskettaessa tarvitse tuntea vakioiden numeerisia arvoja kovin tarkkaan. Tällä oli historiallisesti suuri merkitys taivaanmekaniikassa, koska Auringon etäisyyttä eikä massaa tunnettu tarkkaan.

Integroimisvakioista Keplerin rataelementteihin

Keskeinen teema nykyisessä luvussa ja seuraavassa luvussa on muodostaa yhtälöt, joilla integroimisvakioista \mathbf{h} , \mathbf{e} ja t_p voidaan laskea rataelementit,

$$\mathbf{h}, \mathbf{e}, t_p \rightarrow a, e, i, \omega, \Omega, M_0. \quad (5.8)$$

Keplerin rataelementeistä isoakselin puolikas a , eksentrisyys e ja keskianomalia M_0 epookilla saadaan pienellä työllä. Radan asentokulmat (i , ω , Ω) vaativat enemmän työtä. Niiden yhtälöt rakennetaan siten, että riippumattomina muuttujina ovat eksplisiit- tisesti integroimisvakiot \mathbf{h} , \mathbf{e} .

Tämän luvun loppu keskittyy analysoimaan Keplerin ongelman ratkaisukäyrää, minkä ohella muodostetaan yhtälöt eksentrisyydelle e , isoakselin puolikkaalle a ja epookin keskianomialle M_0 , joka toimii vaihtoehtoisena Keplerin rataelementtinä perisentriajalle t_p . Seuraavassa luvussa 6 käsitellään ratageometriaa, jonka yhteydessä muodostetaan yhtälöt radan asennon määrittävien Keplerin rataelementtien (i , ω , Ω) laskemiseen integroimisvakioista \mathbf{h} ja \mathbf{e} .

5.2 Integraalien analysointia

Eksentrisyys

Tuloksen (4.20) perusteella kappaleen napasäde r ja napakulma θ_r kytkeytyvät toisiinsa yhtälöllä

$$r = \frac{p}{1 + e \cos(\theta_r - \theta_e)}.$$

Tulos (4.20) vastaa muodoltaan kartioleikkausten yleistä yhtälöä (2.4),

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \theta},$$

jossa r on kartioleikkauskäyrän urapisteen napasäde, θ on kartioleikkauskäyrän urapisteen napakulma, ja ε on kartioleikkauksen eksentrisyys. Tulos (4.20) johdettiin yhtälöstä (4.13),

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{e} = \|\mathbf{r}\| \|\mathbf{e}\| \cos(\mathbf{r}, \mathbf{e}),$$

minkä perusteella tiedetään, että tuloksessa (4.20) esiintyvä e on itse asiassa eksentrisyysvektorin normi,

$$e = \|\mathbf{e}\|. \quad (5.9)$$

Vertaamalla yhtälöitä (4.20) ja (2.4) havaitaan, että kartioleikkauksen eksentrisyys ε saadaan eksentrisyysvektorin normista yhtälöllä (5.9).

Yhtälö (5.9) kytkee integroimisvakion \mathbf{e} ja kartioleikkauksen eksentrisyyden $\varepsilon = e$ toisiinsa. Tämä voi olla käytetyn notaation puoleista ilmeistä ja arvattavissa, koska työssä käytetyn notaation mukaan minkä tahansa vektorin \mathbf{c} normia merkitään vastaavalla skalaarilla c . Näin ollen notaation puolesta on varsin luontevaa, että eksentrisyys e on integroimisvakion \mathbf{e} normi. Sen sijaan matemaattisesti integroimisvakion \mathbf{e} yhteys kartioleikkauksen eksentrisyyteen e ei ole yhtä ilmeistä.

Ellipsiradan isoakselin puolikas

Yhtälöiden (4.20) ja (4.122) perusteella tiedetään, että ratkaisukäyrä on kartioleikkaus. Lisäksi tiedetään, että kartioleikkauksen semi-latus rectum p määräytyy integroimisvakioista h yhtälöllä (4.21),

$$p = \frac{h^2}{\mu}.$$

Toisaalta, kun kartioleikkaus on ellipsi, tiedetään, että semi-latus rectum p määräytyy isoakselin puolikkaasta a ja eksentrisyydestä e yhtälöllä (2.40),

$$p = a(1 - e^2).$$

Merkitään (2.40) ja (4.21) yhtä suuriksi, ja ratkaistaan isoakselin puolikkaan a suhteen. Saadaan tulos, integroimisvakiot ja isoakselin puolikkaan toisiinsa kytkevä yhtälö

$$a = \frac{h^2}{\mu(1 - e^2)}. \quad (5.10)$$

Ratkaistaan yhtälö (5.10) termin h^2 suhteen, ja otetaan neliöjuuri puolittain. Koska h voidaan tulkita vektorin normiksi ja vektorin normi on aina ei-negatiivinen, voidaan negatiivinen ratkaisu hylätä. Saadaan yhtälö

$$h = \sqrt{a\mu(1 - e^2)}. \quad (5.11)$$

Yhtälöä (5.11) voidaan käyttää integroimisvakion h korvaamiseksi suureilla a ja e , jotka ovat geometrisesti mielekkäämmin tulkittavissa.

Sektoriaalinen kulmanopeus

Sektoriaalinen kulmanopeus (engl. *sectorial angular velocity*) määritellään tässä työssä sektoriaalisen kulman M derivaattana ajan suhteen,

$$n = \frac{dM}{dt}. \quad (5.12)$$

Yhtälön (2.98) mukaan sektoriaalinen kulma M määriteltiin urapistettä vastaavan sektorin ja koko kuvion pinta-alojen suhteen muunnettuna,

$$M = 2\pi \frac{\Delta A}{A}.$$

Sijoitetaan (2.98) sektoriaalisen kulmanopeuden määritelmään (5.12), jolloin

$$n = \frac{d}{dt} \left[2\pi \frac{\Delta A}{A} \right]. \quad (5.13)$$

Vakiot eli kerroin 2π ja koko kuvion pinta-ala A eivät muutu ajan suhteen, ja urapistettä vastaavan sektorin pinta-ala ΔA käyttäytyy ajan suhteen kuten urapisteen pintanopeus. Näin ollen sektoriaalinen kulmanopeus n ja pintanopeus dA/dt kytkeytyvät toisiinsa yhtälöllä

$$n = \frac{2\pi}{A} \frac{dA}{dt}. \quad (5.14)$$

Yhtälöstä nähdään, että jos pinnanopeus on vakio, on myös sektoriaalinen kulmanopeus vakio ja päinvastoin. Sektoriaalinen kulmanopeus voidaan laskea joko yhtälön (5.12) mukaan sektoriaalisen kulman aikaderivaattana tai yhtälön (5.14) mukaan pinnanopeudesta ja koko kuvion pinta-alasta.

Ellipsiradan sektoriaalinen kulmanopeus

Lasketaan urapisteen sektoriaalinen kulmanopeus yhtälön (5.14) mukaan pinnanopeudesta. Yhtälön (4.105) perusteella Keplerin ongelman ratkaisun pinnanopeus on vakio

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} h.$$

Sijoitetaan (4.105) yhtälöön (5.14), jolloin ratkaisun sektoriaaliseksi kulmanopeudeksi saadaan,

$$n = \pi \frac{h}{A}. \quad (5.15)$$

Koska koko kuvion pinta-ala A ja integroimisvakio h ovat molemmat vakioita, on yhtälön (5.15) oikea puoli vakio. Näin ollen yhtälöstä pystytään päättämään, että ratkaisun sektoriaalinen kulmanopeus on vakio.

Oletetaan, että ratkaisukäyrä on ellipsi. Kun ratkaisukäyrä on ellipsi, on koko kuvion pinta-ala ellipsin pinta-ala. Sijoitetaan ellipsin pinta-ala $A = \pi ab$ yhtälöön (5.15). Ellipsiradan tapauksessa sektoriaaliseksi kulmanopeudeksi saadaan

$$n = \frac{h}{ab}. \quad (5.16)$$

Korvataan pikkuakselin puolikas b yhtälöä (2.18) käyttäen ja integroimisvakio h yhtälöä (5.11) käyttäen. Sievennysten jälkeen saadaan tulos

$$n = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}. \quad (5.17)$$

Vastaavaan tulokseen päästään myös derivoimalla ellipsiradan sektoriaalinen kulma M ajan suhteen eli yhtälö (4.132) muuttujan t suhteen. Tällöin ellipsiradan sektoriaaliselle kulmanopeudelle saadaan esitys

$$n = \frac{\mu^2}{h^3} (1 - e^2)^{\frac{3}{2}}. \quad (5.18)$$

Jos integroimisvakio h korvataan yhtälöä (5.11) käyttäen kuten aiemmin, saadaan sektoriaaliseksi kulmanopeudeksi jälleen yhtälön (5.17) mukainen tulos.

Yhtälöt (5.16), (5.17) ja (5.18) kuvaavat kaikki ellipsiradan sektoriaalista kulmanopeutta n . Ne tarjoavat kolme vaihtoehtoista esitystä samalle suurelle.

Kiertoaika

Kappaleiden liikeradat voidaan jakaa suljettuihin ja avoimiin ratoihin. Jos kappaleen liike alkaa toistaa itseään jonkin äärellisen ajan kuluttua, on kyseessä *suljettu rata* (engl. *closed orbit*) [5, s. 258; 57, s. 295]. Jos kappaleen liikerata ei ikinä sulkeudu, on kyseessä *avoin rata* (engl. *open orbit*) [5, s. 259; 57, s. 295]. Nämä kaksi määritelmää voidaan täsmentää jaksollisen funktion käsitteellä. Matematiikassa funktio $x(t)$ on *jaksollinen* (engl. *periodic*) [5, s. 111], jos jollekin positiiviselle luvulle T pätee

$$x(t+T) = x(t). \quad (5.19)$$

Tällöin luku T on funktion *jakso* (engl. *period*). Määritelmistä voidaan päätellä, että kappaleen liike on jaksollinen jos ja vain jos rata on suljettu. Näiden käsitteiden avulla määritellään seuraavaksi radan kiertoaika.

Kiertoaika (engl. *period of revolution*) [20, s. 51; 52, s. 179] on tässä työssä suljetun radan jakso, kun rataa tarkastellaan ajan funktiona. Koska kiertoaika on määritelty vain suljetuille radoille, ei kaikilla kartioleikkauksilla ole kiertoaikaa. Kartioleikkauksista vain ympyrä ja ellipsi ovat suljettuja ratoja.

Bertrandin teoreeman (engl. *Bertrand's theorem*) [25, s. 92; 17, s. 607] mukaan ainoat keskeisvoimat, joista syntyy suljettuja ratoja, ovat käänteisen neliön lakia ja Hoo-ken lakia noudattavat voimat. Tulosta voidaan pitää yllättävänä.

Yhteismitallisuus ja kvasijaksollisuus

Toisinaan on mielekäästä tarkastella kunkin liikkeen komponenttifunktion jaksoa erikseen. Esimerkiksi *anisotrooppinen värähtelijä* (engl. *anisotropic oscillator*) on värähtelijä, jossa palautusvoiman komponentit ovat verrannollisia poikkeaman komponentteihin, mutta kullakin komponentilla on oma verrannollisuuskertoimensa [56, s. 171]. Tämän seurauksena kullakin liikkeen komponentilla on oma jaksonsa.

Sellaiset fysikaaliset systeemit ovat mahdollisia, että liikkeen komponenttifunktiot ovat jaksollisia, mutta itse liike ei ole jaksollinen. Tämä on seurausta komponenttifunktioiden jaksojen keskinäisistä suhdeluista. Jos jaksojen suhdeluvut ovat rationaalilukuja, sanotaan jaksojen olevan *yhteismitallisia* (engl. *commensurate*) [5, s. 258; 25, s. 461]. Jos jaksojen suhdeluvut ovat irrationaalilukuja, sanotaan jaksojen olevan *epäyhteismitallisia* (engl. *incommensurate*) [5, s. 258; 25, s. 461].

Kun komponenttifunktioiden jaksot ovat epäyhteismitallisia, niin itse liike ei ole jaksollinen, vaikka kaikki komponenttifunktiot ovatkin jaksollisia. Tällaisen liikkeen sanotaan olevan *kvasijaksollinen* (engl. *quasi-periodic*) [56, s. 172]. Koska jokaista irrationaalilukua voidaan approksimoida mielivaltaisen tarkasti rationaaliluvuilla, sanotaan kvasijaksollisen liikkeen olevan *lähes jaksollinen* (engl. *almost periodic*) [29, s. 238].

Ellipsiradan kiertoaika

Edeltäneen analyysin perusteella ellipsiradan kiertoaika voidaan laskea kahdella eri tavalla. Ensimmäinen tapa on integroida pintanopeutta ajan suhteen, kunnes integraalin arvo vastaa koko kuvion eli ellipsin pinta-alaa. Toinen tapa on integroida sektoriaalista

kulmanopeutta ajan suhteen, kunnes integraalin arvo vastaa täyttä kierrosta eli sektoriaalinen kulma saa arvon 2π . Kartioleikkausten tapauksessa sekä pinnanopeus että sektoriaalinen kulmanopeus ovat molemmat vakioita, mistä johtuen nämä integraalit ovat helppoja laskea.

Ensimmäinen tapa on käyttää pinnanopeutta. Ellipsiradan kiertoaika P saadaan pinnanopeutta integroimalla yhtälöstä

$$\int_{t_p}^{t_p+P} \frac{dA}{dt} dt = A. \quad (5.20)$$

Toinen tapa on käyttää sektoriaalista nopeutta. Ellipsiradan kiertoaika P saadaan sektoriaalista kulmanopeutta integroimalla yhtälöstä

$$\int_{t_p}^{t_p+P} \frac{dM}{dt} dt = 2\pi. \quad (5.21)$$

Koska Keplerin ongelman ratkaisukäyrän sektoriaalinen kulmanopeus n on vakio, voidaan se tuoda integraalin (5.21) ulkopuolelle. Suoritetaan integrointi, ja ratkaistaan kiertoaajan P suhteen. Saadaan tulos, ellipsiradan kiertoaika

$$P = \frac{2\pi}{n}. \quad (5.22)$$

Edellä laskettiin ellipsiradan sektoriaaliselle kulmanopeudelle n kolme erilaista lauseketta. Jos yhtälön (5.22) sektoriaalinen kulmanopeus n korvataan yhtälöä (5.16), (5.17) tai (5.18) käyttäen, saadaan ellipsin kiertoajalle vastaavasti yhtälöt

$$P = 2\pi \frac{ab}{h}, \quad (5.23)$$

$$P = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{\mu}}, \quad (5.24)$$

$$P = 2\pi \frac{h^3}{\mu^2 (1 - e^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (5.25)$$

Jos kiertoaikaa olisi lähdetty laskemaan pinnanopeuden integraalista (5.20), olisi tulokseksi saatu yhtälö (5.23). Tämä olisi voitu muuntaa yhtälöksi (5.24) korvaamalla pikkuakselin puolikas b yhtälöä (2.18) käyttäen ja integroimisvakio h yhtälöä (5.11) käyttäen.

Ellipsiradan keskiliike

Radan keskikulmanopeus (engl. *mean angular velocity*) \bar{n} voidaan määrittää yhtälöllä

$$\bar{n} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}, \quad (5.26)$$

jossa $\Delta\theta$ on napakulman muutos tarkastelujakson Δt aikana. Jos rata on suljettu, voidaan keskikulmanopeus \bar{n} laskea koko jakson ajalta yhtälöllä

$$\bar{n} = \frac{2\pi}{P}, \quad (5.27)$$

jossa P on radan kiertoaika. Tällöin on yhdentekevää, tutkitaanko radan keskikulmanopeutta sektoriaalisen kulman, eksentrisen kulman vai fokaalikulman kannalta.

Keskiliike (engl. *mean motion*) määritellään tässä työssä tarkoittamaan yhtälön (5.27) mukaista radan keskikulmanopeutta. Kirjallisuudessa [20, s. 51; 54, s. 72; 21, s. 46; 49, s. 126; 43, s. 121] keskiliike määritellään yhtälöllä (5.27) radan keskikulmanopeutena. Harvinaisena poikkeuksena on Kaplanin ja Hegartyn toimittama teos [36, s. s. 39], jossa keskiliike määritellään yhtälöllä (5.12) eli radan sektoriaalisen kulmanopeutena.

Tässä työssä keskiliikkeelle valittua määritelmää perustellaan käsitteen nimellä. Käsitteen nimi alkaa etuliitteellä keski-, joka viittaa keskiarvoon. Yhtälön (5.27) mukaan määritelty keskiliike vastaa oleellisesti kulmanopeuden keskiarvoa. Keskiarvoa indikoi myös työssä käytetty merkintä. Symbolin \bar{n} päällä on viiva, joka on tilastomatematiikan käyttämä notaatio keskiarvoille.

Sijoitetaan ellipsiradan kiertoaika (5.22) keskiliikkeen määritelmän yhtälöön (5.27). Tällöin yhtälö sievenee tulokseksi

$$\bar{n} = n, \quad (5.28)$$

jonka mukaan ellipsiradan tapauksessa sektoriaalinen kulmanopeus n ja keskiliike \bar{n} ovat sama asia. Pohjimmiltaan tulos on seuraus siitä, että Keplerin ongelman ratkaisun sektoriaalinen kulmanopeus on vakio.

Ellipsiradan sektoriaalinen kulma epookilla

Integroimisvakio t_p eli perisentriaika määrittää ajanhetken ($t = t_p$), jolloin kappale on tietyssä sijainnissa ($M = 0$). Tämä yksi suure, perisentriaika, kytkee kaksi eri suuretta toisiinsa: ajanhetken ja sitä vastaavan sijainnin radalla. Sijainti radalla on etukäteen kiinnitetty itse perisentriajan määritelmässä.

Perisentriajan t_p sijasta voidaan yhtä hyvin käyttää jotain suuretta, joka määrittää sijainnin ($M = M_0$), jossa kappale on tietyllä ajanhetkellä ($t = 0$). Tässäkin tapauksessa yksi suure kytkee kaksi eri suuretta toisiinsa: sijainnin radalla ja sitä vastaavan ajanhetken. Ajanhetki on kiinnitetty etukäteen itse suureen määritelmässä.

Yksi tällainen suure, joka määrittää sijainnin tietyllä ajanhetkellä, on sektoriaalinen kulma epookilla, ja se esitellään seuraavaksi. Muita vastaavia suureita ovat eksentrisen kulma epookilla tai fokaalikulma epookilla, joita ei tässä työssä käytetä.

Epookki (engl. *epoch*) on jokin tietty ajanhetki t_0 . Tässä merkityksessä epookki perustuu kreikan kielen sanaan epokhe, joka tarkoittaa kiinteää, pysäytettyä hetkeä ajassa [31]. Sana voidaan suomentaa esimerkiksi pysähdyskohdaksi. Yleisemmin epookki tar-

koittaa ajanhetkeä, jota käytetään jonkinlaisena viiteaikana tai nollassa hetkenä, joka yhdistää mittauksen ja ajan toisiinsa [54, s. 31]. Tässä asiayhteydessä epookki voidaan ymmärtää kappaleen sijainnin radalla ilmaisevan kulmasuureen määrityshetkenä.

Sektoriaalinen kulma epookilla (engl. *sectorial angle at epoch*) M_0 on sektoriaalinen kulma, joka määrittää kappaleen sijainnin radalla ajanhetkellä t_0 , jota kutsutaan epookiksi. Ajanhetki t_0 sisältyy itse suureen M_0 määritelmään. Tavallisesti aikakoordinaatisto valitaan siten, että epookki t_0 vastaa aikakoordinaatiston origoa $t = 0$. Tällöin sektoriaalinen kulma epookilla M_0 ilmaisee kappaleen sijainnin radalla ajanhetkellä $t = 0$.

Tarkastellaan sektoriaalisen kulman M_0 , epookin t_0 ja perisentriajan t_p välisiä relaatioita. Yhtälön (4.132) mukaan

$$M = n(t - t_p).$$

Näin ollen kappaleen sektoriaalinen kulma epookilla $t = t_0$ on

$$M_0 = n(t_0 - t_p). \quad (5.29)$$

Tämä yhtälö kytkee epookin, sektoriaalisen kulman epookilla ja perisentriajan toisiinsa. Ratkaistaan yhtälö (5.29) perisentriajan suhteen. Saadaan

$$t_p = t_0 - M_0 / n. \quad (5.30)$$

Tätä yhtälöä käyttäen voidaan määrittää kappaleen perisentriaika t_p , kun tiedetään epookki t_0 ja kappaleen sektoriaalinen kulma M_0 kyseisellä epookilla.

Erityisesti yhtälöstä (5.30) nähdään, että sama perisentriaika t_p voidaan ilmaista useilla suureiden t_0 ja M_0 arvojen eri yhdistelmillä. Kääntäen voidaan todeta, että pelkän perisentriajan t_p perusteella ei ole mahdollista määrittää yksikäsitteisesti sekä epookkia t_0 että sektoriaalista kulmaa M_0 ellei epookkia t_0 kiinnitetä itse sektoriaalisen kulman M_0 määritelmässä.

Yhtälön (4.132) oikea puoli voidaan osittaa epookin t_0 suhteen,

$$M = n(t - t_p) = n(t - t_0) + n(t_0 - t_p). \quad (5.31)$$

Korvataan oikean puolen jälkimmäinen termi yhtälöä (5.29) käyttäen. Saadaan tulos

$$M = n(t - t_0) + M_0. \quad (5.32)$$

Yhtälö (5.32) korvaa yhtälön (4.132), kun perisentriaika t_p korvataan epookilla t_0 ja kappaleen sektoriaalisella kulmalla M_0 kyseisellä epookilla.

5.3 Keplerin lait

Ennen Kopernikusta (1473–1543) vallitseva ja poliittisesti turvallinen näkemys maailmankaikkeudesta oli geosentrinen. Maailmankaikkeuden keskipiste oli Maa, ja muut taivaankappaleet kiersivät Maata. Geosentrinen maailmankuva vaihtui 1500- ja 1600-luvuilla heliosentriseen maailmankuvaan pääasiassa kolmen henkilön ansiosta. Nämä henkilöt olivat Tyko Brahe (1546–1601), Johannes Kepler (1571–1630) ja Isaac Newton (1642–1727). [43, s. 116]

Brahe havainnoi systemaattisesti ja tarkasti planeettojen liikkeitä vuosien ajan itse kehittämillään instrumenteilla aikana ennen teleskooppia ja heilurikelloa. Kepler vuorostaan tutki huolellisesti Brahen keräämää havaintoaineistoa ja löysi planeettojen kiertoradat Auringon ympäri. Viimeisenä Newton antoi selityksen, miksi planeetat kiersivät Aurinkoa. [43, s. 116]

Planeettojen liikkeitä koskevat Keplerin lait ovat [5, s. 274; 7, s. 2; 29, s. 132; 52, s. 166; 21, s. 37; 43, s. 116]:

- I. Ratalaki (engl. law of orbits): planeetan kiertorata on ellipsi, jonka toisessa polttopisteessä on Aurinko.*
- II. Pintalaki (engl. law of areas): planeetan ja Auringon yhdysjana pyyhkäisee yhtä pitkinä ajanjaksoina aina yhtä suuren pinta-alan.*
- III. Kiertoaikalaki (engl. law of periods): planeetan kiertoajan neliö on suoraan verrannollinen sen isoakselin kuutioon.*

Keplerin lait tarjoavat erittäin hyvän approksimaation planeettojen todellisesta liikkeestä, koska (i) planeettojen massat voidaan jättää huomioimatta suhteessa Auringon massaan, ja koska (ii) Aurinkoa voidaan tarkastella pistemäisenä massana suuren etäisyytensä vuoksi [54, s. 63].

Vaikka nämä kolme lakia antoivat matemaattisen kuvauksen planeettojen liikkeistä, ne eivät kuitenkaan tarjonneet selitystä planeettojen liikkeille [54, s. 63]. Keplerin lait eivät selitä, miksi planeetat liikkuvat vaihtelevalla nopeudella ellipsiradoilla, eivätkä esimerkiksi tasaisesti ympyräradoilla. Tutkiessaan planeettojen nopeuksia suhteessa niiden etäisyyksiin Auringosta Kepler kuitenkin päätyi hyvin lähelle oikeaa johtopäätöstä. Hän nimittäin päätyi siihen, että planeettoja liikuttava voima on peräisin Auringosta, ja että tämä voima heikkeni etäisyyden kasvaessa, minkä vuoksi planeettojen liike hidastui niiden etääntyessä Auringosta [39, s. 173].

Vasta viisikymmentä vuotta Keplerin kuoleman jälkeen Newton antoi selityksen planeettojen liikkeille osoittaessaan, kuinka Keplerin lait voidaan johtaa hänen painovoimalaistaan [43, s. 117]. Kopernikuksen ehdottaman heliosentrisen maailmankuvan kannalta Keplerin kolme lakia olivat merkittävä läpimurto [54, s. 63].

Keplerin lait tässä työssä

Tässä työssä Keplerin ongelma formuloitiin nojautuen Newtonin mekaniikan periaatteisiin. Seuraavaksi näytetään, kuinka tässä työssä Newtonin mekaniikasta seuranneista tuloksista voidaan johtaa edellä esitetyt Keplerin lait.

Ensimmäinen laki (ratalaki) on seuraus yhtälöstä (4.20),

$$r = \frac{p}{1 + e \cos(\theta_r - \theta_e)}.$$

Yhtälö (4.20) vastaa kartioleikkauksen yleistä yhtälöä napakoordinaateissa (2.4). Tämän vastaavuuden perusteella on jo aiemmin todettu, että Keplerin ongelman ratkaisukäyrät ovat kartioleikkauksia. Koska ellipsi on yksi kartioleikkauksista, on Keplerin ensimmäinen laki seuraus yhtälöstä (4.20) ellipsin erikoistapauksessa.

Toinen laki (pintalaki) on seuraus yhtälön (4.102) tulkinnasta (4.105),

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} h'.$$

Yhtälön (4.105) mukaan kappaleen pinnanopeus on vakio, mistä seuraa, että planeetan ja Auringon yhdysjana pyyhkäisee yhtä pitkinä ajanjaksoina aina yhtä suuren pinta-alan.

Kolmas laki (kiertoaikalaki) on seuraus yhtälöstä (5.24),

$$P = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{\mu}}.$$

Yhtälö (5.24) korotetaan ensin puolittain toiseen potenssiin, ja vakio μ korvataan yhtälön (3.16) mukaisesti, jolloin $\mu = G(m_A + m_B)$. Sen jälkeen yhtälö manipuloidaan muotoon

$$\frac{a^3}{P^2} = \frac{G}{4\pi^2} (m_A + m_B), \quad (5.33)$$

jossa G on gravitaatiiovakio, m_A on Auringon massa, ja m_B on planeetan massa. Seuraavaksi tehdään oletus

$$m_B \ll m_A, \quad (5.34)$$

jonka mukaan planeetan massa m_B on häviävä suhteessa Auringon massaan m_A , ja se voidaan jättää huomioimatta. Kun oletusta (5.34) sovelletaan yhtälöön (5.33), saadaan yhtälö

$$\frac{a^3}{P^2} = \frac{G}{4\pi^2} m_A. \quad (5.35)$$

Koska yhtälön (5.35) oikea puoli on planeetasta riippumaton vakio, voidaan yhtälöä soveltamalla todeta, että eri planeettojen kiertoaikojen neliöt ovat samalla tavalla suo-

raan verrannollisia niiden isoakselien kuutioihin. Matemaattisesti ilmaistuna Keplerin kolmas laki vastaa yhtälöä

$$\frac{a_A^3}{P_A^2} = \frac{a_B^3}{P_B^2}. \quad (5.36)$$

Yhtälössä (5.36) kahden eri planeetan A ja B isoakselien puolikkaat ovat vastaavasti a_A ja a_B , ja kiertoaajat ovat vastaavasti P_A ja P_B . Yhtälön (5.36) perusteella $a^3 \propto P^2$, joka vastaa Keplerin kolmatta lakia matemaattisesti ilmaistuna.

On syytä korostaa, että Keplerin kolmas laki edellyttää oletusta (5.34) koskien planeetan massaa suhteessa Auringon massaan. Oletuksen perusteella planeetan massaa approksimoidaan $m_B \approx 0$, joka ei selvästikään pidä paikkaansa. Voidaan perustellusti todeta, että Keplerin kolmas laki on pelkästään likimääräinen tulos.

6 RATAGEOMETRIA

Tässä luvussa määritetään (i) radan asento suhteessa viitekoordinaatistoon ja (ii) kappaleen sijainti radalla. Radan asennon ja kappaleen sijainnin määrittelyyn tarvitaan runsaasti astronomian peruskäsitteitä. Luku alkaa näiden tarvittavien peruskäsitteiden esittelyllä. Sen jälkeen keskitytään radan asentokulmien määrittämiseen. Asentokulmien jälkeen tarkastellaan kappaleen sijaintia radalla. Lopuksi esitetään vaihtoehtoja singulaariteetteja aiheuttaville ympyrä- ja ekvaattoriradoille.

Radan asento määritetään integroimisvakioista \mathbf{h} ja \mathbf{e} , jotka suuntaavat perifokaalikoordinaatiston z - ja x -akselin vastaavasti. Radan asento vastaa näin ollen perifokaalikoordinaatiston asentoa suhteessa viitekoordinaatistoon. Integroimisvakioista lasketaan radan asentokulmat – nousevan solmun pituus Ω , inkliinaatio i ja periapsin argumentti ω –, jotka kiinnittävät radan (ja samalla perifokaalikoordinaatiston) asennon suhteessa viitekoordinaatistoon geometrisesti mielekkäällä tavalla. Nämä geometrisesti mielekkäät asentokulmat vastaavat perifokaalikoordinaatiston Eulerin kulmia, ja tarvittava muunnos perifokaali- ja viitekoordinaatiston välillä perustuu tähän tulkintaan.

Radan asentokulmien yhtälöt muodostetaan siten, että riippumattomina muuttujina ovat eksplisiittisesti integroimisvakiot \mathbf{h} ja \mathbf{e} tai näiden normit. Tiivistetysti voidaan sanoa, että luvun ensimmäinen keskeinen teema on kehittää yhtälöt, joilla lasketaan muunnos

$$\mathbf{h}, \mathbf{e} \rightarrow i, \omega, \Omega. \quad (6.1)$$

Kappaleen sijaintia radalla tarkastellaan radan asentokulmien jälkeen. Työn alussa esitetyt, ellipsin urapisteeseen liittyvät matemaattiset kulmasuureet erikoistetaan ellipsirataan liittyviksi astronomisiksi käsitteiksi – anomalioiksi. Sijainti radalla määritetään tilavektorista $(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$, kun siitä johdetut integroimisvakiot \mathbf{h} ja \mathbf{e} ovat käytettävissä. Tilavektorista lasketaan anomaliat – luonnollinen anomalia ν , eksentrisen anomalia E ja keskianomalia M –, jotka kiinnittävät kappaleen sijainnin radalla. Lopuksi keskianomaliasta M lasketaan perisentraaika eli integroimisvakio t_p . Tiivistetysti voidaan sanoa, että luvun toinen keskeinen teema on kehittää yhtälöt, joilla lasketaan muunnosketju

$$\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}} \rightarrow \nu \rightarrow E \rightarrow M \rightarrow t_p. \quad (6.2)$$

Muunnosketju (6.2) on viimeinen puuttuva yksittäinen muunnos, joka tarvitaan, että tilavektorista $(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$ voidaan laskea integroimisvakiot \mathbf{h} , \mathbf{e} ja t_p .

6.1 Peruskäsitteet

Koordinaatiston määrittäminen

Koordinaatisto (engl. *coordinate frame*) määritetään kiinnittämällä sekä avaruuden origo että akselisto, jonka avulla avaruuden pisteet voidaan nimetä origon suhteen [56, s. 9]. Akseliston kiinnittäminen tehdään kiinnittämällä kunkin akselin asento, positiivinen suunta ja skaala. Koordinaatiston sanotaan olevan *suorakulmainen* (engl. *rectangular*), jos akselit ovat keskenään kohtisuorassa toisiinsa. Koordinaatiston sanotaan olevan *vinokulmainen* (engl. *oblique*), jos akselit eivät ole keskenään kohtisuorassa toisiinsa.

Koordinaatiston *perustaso* (engl. *fundamental plane, reference plane*) on suorakulmaisen koordinaatiston xy -taso [7, s. 53; 21, s. 48]. Koordinaatiston *perussuunta* (engl. *principal direction, reference direction*) on suorakulmaisen koordinaatiston x -akselin positiivinen suunta [7, s. 53; 21, s. 48]. Perustason *positiivinen kiertosuunta* (engl. *positive direction of rotation*) vastaa suorakulmaisen koordinaatiston z -akselin positiivista suuntaa oikean käden säännön mukaisesti.

Tässä työssä käytettävät koordinaatistot määritetään epäsuorasti kiinnittämällä seuraavat neljä ominaisuutta: (1) origo, (2) perustaso, (3) perussuunta, ja (4) perustason positiivinen kiertosuunta. Nämä valinnat kiinnittävät avaruuden origon, akselien asennot ja positiiviset suunnat. Kiinnitetyistä ominaisuuksista seuraa, että akselit ovat kohtisuorassa toisiinsa. Akselien skaaloja ei tämän työn puitteissa kiinnitetä erikseen, vaan ne oletetaan keskenään yhtä suuriksi ja asiayhteydestä selväksi.

Perustason positiivisen kiertosuunnan kiinnittäminen vastaa perustason suunnistamista. Kun kiertosuunta on kiinnitetty, voidaan oikean käden säännön avulla osoittaa perustasosta sen positiivinen ja negatiivinen puoli. Koska z -akseli on määritelmällisesti kohtisuorassa perustasoon, vastaa perustason suunnistaminen z -akselin positiivisen ja negatiivisen suunnan kiinnittämistä. Näin ollen ominaisuudet (2) ja (4) kiinnittävät z -akselin positiivisen suunnan, ja vastaavasti z -akselin positiivisen suunta kiinnittää ominaisuudet (2) ja (4). Tästä seuraa vaihtoehtoinen tapa koordinaatiston määrittämiseen.

Koordinaatisto voidaan määrittää joko kuten edellä tai kiinnittämällä seuraavat kolme ominaisuutta: (A) origo, (B) z -akselin positiivinen suunta, ja (C) perussuunta. Kun kiinnitetään z -akselin positiivista suuntaa ja perussuuntaa, täytyy huolehtia siitä, että suunnat ovat kohtisuorassa toisiinsa nähden.

Kun suorakulmaisen koordinaatiston x -akselin ja z -akselin positiivinen suunta on tavalla tai toisella kiinnitetty, täydennetään koordinaatisto oikeakätiseksi määrittämällä y -akselin positiivinen suunta ristituloa käyttäen yhtälöä

$$\hat{\mathbf{y}} = \hat{\mathbf{z}} \times \hat{\mathbf{x}}, \quad (6.3)$$

jossa vektorit $\hat{\mathbf{x}}$, $\hat{\mathbf{y}}$ ja $\hat{\mathbf{z}}$ ovat vastaavasti x -, y - ja z -akselin positiivisen suunnan osoittavia yksikkövektoreita. Oikeakätisessä koordinaatistossa perustason positiivinen kiertosuunta on aina vektorilta $\hat{\mathbf{x}}$ kohti vektoria $\hat{\mathbf{y}}$. Kierto tapahtuu perustasossa vastapäivään, kun vektori $\hat{\mathbf{z}}$ osoittaa suoraan kohti katsojaa.

Primääri ja sekundääri, keskuskappale ja kiertolainen

Keplerin ongelmassa ellipsiradan tapauksessa molemmat kappaleet ovat ellipsiradoilla toistensa suhteen. Tilanne on symmetrinen. Ennen kuin systeemin kappaleista voidaan täsmällisesti puhua, on ensin sovittava nimityksistä, joiden avulla käy selvästi ilmi kumpaa kappaletta tarkoitetaan. Seuraavaksi esitellään kaksi tilanteeseen soveltuvaa käsiteparia.

Yleensä taivaanmekaniikassa pyritään selvittämään pienemmän kappaleen suhteellinen liike massiivisemmän kappaleen suhteen [20, s. 101]. Tämä tarkoittaa monesti koordinaatiston origon ja samalla tarkastelunäkökulman kiinnittämistä massiivisempaan kappaleeseen. Taivaankappaleiden muodostaman systeemin massiivisinta kappaletta kutsutaan *primääriksi* (engl. *primary body*) [44, s. 319] ja pienempiä kappaleita *sekundääreiksi* (engl. *secondary body*) [44, s. 360]. Massiivisemmän kappaleen (primäärin) kiertoradalla olevaa pienempää kappaletta (sekundääriä) kutsutaan myös *satelliitiksi* (engl. *satellite*) [2, s. 525]. Esimerkiksi Maa on primääri sitä kiertäville satelliiteille, joiksi lasketaan sekä keinotekoiset että luonnolliset satelliitit. Maan luonnollinen satelliitti on Kuu, ja Maan oma primääri on Aurinko.

Tässä työssä suositaan kuitenkin lähteissä [35, s. 176] (suomeksi) ja [54, s. 79] (englanniksi) joitakin kertoja esiintyviä, geometrisempia nimityksiä *keskuskappale* (engl. *central body*) ja *kiertolainen* (engl. *orbiting body*). Nämä nimitykset kuvastavat systeemin kappaleiden rooleja ottamatta kantaa kappaleiden massojen suhteisiin. Sen seurauksena ne eivät myöskään kiinnitä tarkastelunäkökulmaa kappaleiden massojen perusteella. Näiden syiden vuoksi kiertolainen ja keskuskappale soveltuvat primääriä ja sekundääriä paremmin ellipsiradasta ja sen geometriasta puhumiseen.

Ellipsiradalla on kaksi polttopistettä, ja aiemman perusteella tiedetään, että keskuskappale on toisessa niistä. Polttopisteet voidaan erotella toisistaan juuri keskuskappaleen avulla. Keskuskappaleen varaamaa polttopistettä kutsutaan *varatuksi* (engl. *occupied*) ja jäljelle jäänyttä *vapaaksi* (engl. *vacant*) [7, s. 23]. Vapaan polttopisteen merkitys taivaanmekaniikassa on vähäinen.

Viitekoordinaatisto

Viitekoordinaatisto (engl. *reference frame*) on tässä yhteydessä mikä tahansa koordinaatisto seuraavin kiinnityksin: (1) origo on keskuskappaleen massakeskipiste, (2) perustaso on mielivaltainen, (3) perussuunta on mielivaltainen, ja (4) perustason positiivinen kiertosuunta on mielivaltainen. Yleisemmin viitekoordinaatisto on mikä tahansa koordinaatisto, jonka suhteen suureet on ilmaistu. Keplerin ongelma redusoidiin siirtymällä mielivaltaiseen koordinaatistoon, jossa ainoastaan avaruuden origo oli kiinnitetty toisen kappaleen massakeskipisteeseen. Jatkon kannalta tätä koordinaatistoa voidaan pitää viitekoordinaatistona, minkä vuoksi viitekoordinaatistokin määriteltiin tässä yhteydessä näin.

Kuvan 6.18 koordinaatisto on yksi mahdollinen viitekoordinaatisto. Keskuskappale on origossa, mutta akselien suunnat ovat valittu mielivaltaisesti. Tästä seuraten myös rata on mielivaltaisessa asennossa viitekoordinaatistoon nähden.

Ratataso

Ratataso (engl. *orbital plane*) on taso, joka (i) kulkee keskuskappaleen massakeskipisteen kautta ja (ii) on kohtisuorassa kiertolaisen rata-akseliin (eli integroimisvakioon \mathbf{h}) [20, s. 40; 7, s. 17]. Kiertolaisen liikerata sisältyy integraalin 1 perusteella näin määriteltyyn ratatasoon. Ratataso määritelläänkin toisinaan (esimerkiksi [2, s. 435]) tasona, joka sisältää kiertolaisen liikeradan.

Maan kiertoradan määrittämää ratatasoa kutsutaan nimellä *ekliptika* (engl. *ecliptic*) [35, s. 43]. Varsinaisesti ekliptika tarkoittaa Auringon näennäisestä liikkeestä (sen takana oleviin tähtiin nähden) syntyvää vuosittaista kiertorataa tähtitaivaalla [2, s. 203]. Näin ollen ekliptika ei varsinaisesti tarkoita tasoa, vaan kiertorataa. Täsmällisempi ja johdonmukaisempi nimitys ekliptikan määrittämälle tasolle olisi *ekliptikataso* (engl. *ecliptic plane*), mutta tätä sanamuotoa tapaa harvoin. Tavallisesti ekliptika samaistetaan sen määrittämään ekliptikatasoon, ja niin tehdään jatkossa myös tässäkin työssä. Koska Auringon näennäinen liike aiheutuu Maan liikkeestä, on sen näennäinen kiertorata itse asiassa projektio Maan kiertoradasta [44, s. 124]. Sen seurauksena sekä Maan kiertorata että Auringon näennäinen kiertorata määrittävät kumpikin saman ratatason. Tämän perusteella ekliptika on Maan ratataso.

Ekvaattorirata ja naparata

Jos ratataso yhtenee viitekoordinaatiston perustason kanssa, sanotaan radan olevan *ekvaattorirata* (engl. *equatorial orbit*). Jos ratataso on kohtisuorassa viitekoordinaatiston perustasaan, sanotaan radan olevan *naparata* (engl. *polar orbit*). Annetut määritelmät ovat yleistyksiä lähteiden [2, s. 217] ja [2, s. 465] määritelmistä.

Tavallisesti nämä käsitteet määritellään siten, että ratatasoa tarkastellaan viitekoordinaatiston sijaan keskuskappaleen ekvaattorikoordinaatiston suhteen. Tällöin perustaso on sama kuin keskuskappaleen ekvaattoritaso, ja nämä yleistetyt käsitteet saavat alkupe-
räiset merkityksensä: ekvaattorirata on rata, joka kulkee keskuskappaleen ekvaattorin ympäri [2, s. 217], ja naparata on rata, joka kulkee keskuskappaleen napojen ylitse [2, s. 465]. Tässä mainitut ekvaattorikoordinaatisto ja ekvaattoritaso määritellään myöhemmin.

Apoapsis ja periapsis, apsidiviiva

Radan ääripisteitä, joissa kiertolaisen etäisyys keskuskappaleesta saavuttaa ääriarvonsa eli joko minimin tai maksimin, sanotaan *apsideiksi* (engl. *apsis*, mon. *apsides*) [2, s. 42]. Radan pistettä, jossa kiertolainen on lähimpänä keskuskappaletta, kutsutaan nimellä *periapsis* tai *perisentri* (engl. *periapsis*, *pericentre*, *pericentron*) [2, s. 450; 49, s. 120; 16, s. 183]. Radan pistettä, jossa kiertolainen on kauimpana keskuskappaleesta, kutsutaan nimellä *apoapsis* tai *apocentri* (engl. *apoapsis*, *apocentre*, *apocentron*) [2, s. 34; 49, s. 120; 16, s. 183]. Suoraa, joka yhdistää apo- ja periapsia, kutsutaan *apsidiviivaksi* (engl. *line of apsides*, *apsidal line*) [2, s. 42, 358]. Kahden peräkkäisen ääripisteen välistä kulmaa kutsutaan *apsidikulmaksi* (engl. *apsidal angle*), ja sen perusteella voidaan

päätellä, onko rata suljettu vai ei [5, s. 280; 57, s. 312]. Ellipsiradalla apsidit ovat aina vastakkaisilla puolilla rataa, mistä seuraa, että apsidikulma on aina 180° .

Apsideista voidaan käyttää keskuskappaleen kiinnittäviä nimityksiä. Jos keskuskappale on Maa, voidaan apsideja kutsua nimillä *apogeum* ja *perigeum*. Jos keskuskappale on Aurinko, voidaan käyttää nimiä *apheli* ja *periheli*. Yleisesti ottaen molempien sanojen loppuosa (-apsis) voidaan korvata keskuskappaleen nimellä. Esimerkiksi Jupiterin tapauksessa pääte saa muodon -jovi, ja tähden (muun kuin Auringon) tapauksessa -astroni. Keskuskappaleesta riippuvat nimitykset ovat kömpelöitä, ja tavallisesti niiden käyttöä pyritään välttämään. [44, s. 23–4]

Kuvassa 6.17 radan apoapsis on piste A ja periapsis piste P . Alemmassa kuvassa 6.18 periapsis on vastaavasti piste P , mutta apoapsis A on jäänyt rajauksen vuoksi kuvan ulkopuolelle. Apsideja yhdistää apsidiviiva AP , joka on samalla ellipsin isoakseli.

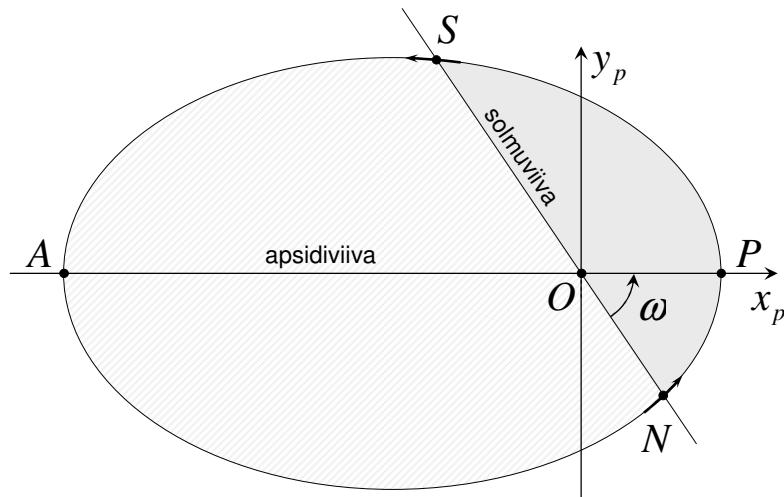
Nouseva ja laskeva solmu, solmuviiva

Solmu (engl. *node*) on radan piste, jossa kiertolainen kulkee perustason läpi. *Nouseva solmu* (engl. *ascending node, northbound node*) on radan piste, jossa kiertolainen nousee perustason pohjoispuolelle [2, s. 53]. *Laskeva solmu* (engl. *descending node, southbound node*) on radan piste, jossa kiertolainen laskeutuu perustason eteläpuolelle [2, s. 181]. Nousevaa ja laskevaa solmua yhdistävää suoraa kutsutaan *solmuviivaksi* (engl. *line of nodes, nodal line*) [44, s. 285; 2, s. 422]. Solmuviiva on ratatason ja perustason leikkaussuora [2, s. 358].

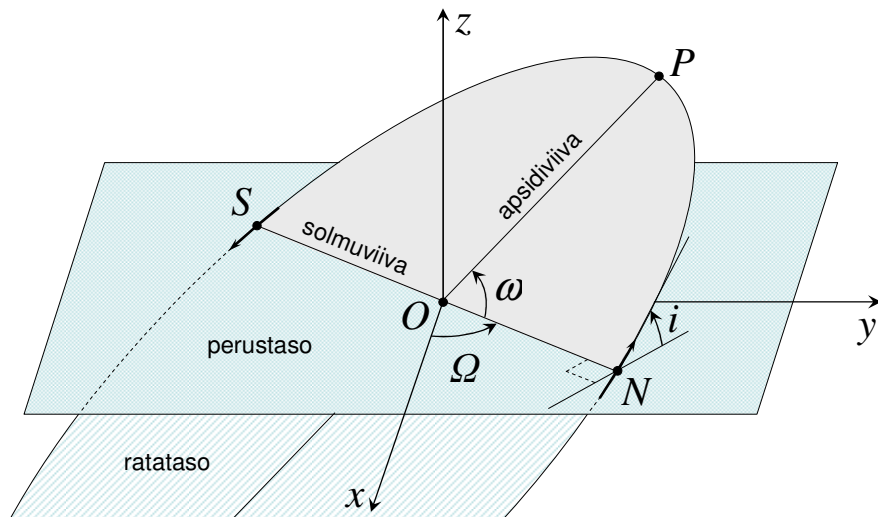
Nousevalle solmulle käytettävä symboli on kreikkalaista suuraakkos-omegaa muistuttava merkki ja laskevalle solmulle sama ylösalaisin [45, s. 182]. Unicode-merkistö sisältää oman merkin kummallekin solmulle. Merkit ovat sekalaisten symbolien lohkossa [58], ja niiden koodit ovat U+260A nousevalle ja U+260B laskevalle solmulle. Virallisia Unicode-merkkejä näkee harvoin käytettävän. Koska merkit muistuttavat läheisesti kreikkalaista suuraakkos-omegaa, korvataan ne toisinaan merkeillä Ω ja Υ (kreikkalainen omega ja latinalainen ypsilon suuraakkosin), kuten esimerkiksi teoksessa [44, s. 30, 113] on tehty.

Tässä työssä suositaan kuitenkin suuraakkosia N ja S niiden arkisuuden ja tuottamisen helppouden vuoksi. Nousevaa solmua merkitään kirjaimella N ja laskevaa solmua kirjaimella S . Kirjaimien valinta perustuu englanninkielisiin sanoihin north ja south, jotka tarkoittavat pohjoista ja etelää vastaavasti. Solmun kirjaimesta voidaan siten päätellä, onko kappale siirtymässä perustason pohjoiselle vai eteläiselle puolelle.

Kuvissa 6.17 ja 6.18 nouseva solmu on piste N ja laskeva solmu on piste S . Solmujen yhteyteen on piirretty pienet nuolet, jotka osoittavat kulkusuunnan solmun kohdalla. Solmuja yhdistää näkyviin piirretty solmuviiva, joka jakaa sekä radan että ratatason eteläiseen ja pohjoiseen puoleen. Molemmissa kuvissa radan eteläinen puoli on ellipsin vinoviivoin täytetty osa ja pohjoispuoli harmaalla täytetty osa.



Kuva 6.17. Ellipsirata perifokaalikoordinaatistossa. Radan apoapsis (A), periapsis (P), nouseva solmu (N), laskeva solmu (S) ja perisentrin argumentti ω .



Kuva 6.18. Ellipsirata viitekoordinaatistossa. Kuvasta ilmenee perifokaalikoordinaatiston orientaatio viitekoordinaatistoon nähden: nousevan solmun rektaskensio Ω , inkliinaatio i , periapsin argumentti ω .

Kuva 6.17 havainnollistaa ellipsirataa perifokaalikoordinaatistossa. Kuva 6.18 havainnollistaa perifokaalikoordinaatiston asentoa viitekoordinaatistoon nähden. Koordinaatiston origo O on kummassakin koordinaatistossa kiinnitetty ellipsiradan varattuun polttopisteeseen eli keskuskappaleeseen. Vapaa polttopiste on aiheen kannalta epäoleellinen ja jätetty siksi merkittömäksi. Kuvissa 6.17 ja 6.18 solmuja S ja N yhdistävä suora on solmuviiva, ja apsideja A ja P yhdistävä suora on apsidiviiva. Solmuviiva jakaa ellipsin eteläiseen ja pohjoiseen puoleen. Radan eteläinen puoli on ellipsin vinoiviin täytetty osa ja radan pohjoispuoli ellipsin harmaalla täytetty osa.

Perifokaalikoordinaatisto

Perifokaalikoordinaatisto (engl. *perifocal coordinate frame*) on koordinaatisto seuraavien kiinnityksin: (1) origo on radan varatussa polttopisteessä, (2) perustaso on ratataso, (3) perussuunta osoittaa perisentriin eli $+x$ -akseli on integroimisvakion e suuntainen, ja (4) perustason positiivinen kiertosuunta on radan kiertosuunta eli $+z$ -akseli on integroimisvakion h suuntainen. Määritelmä vastaa lähteen [7, s. 57] käyttämää määritelmää sillä poikkeuksella, että tässä origo kiinnitetään eksplisiittisesti. Perifokaalikoordinaatisto toteuttaa ratakoordinaatiston määritelmän (sivulla 67, luku 4.2).

Kuvan 6.17 koordinaatisto on perifokaalikoordinaatisto. Keskuskappale on origossa. Nollasuunta eli x -akselin positiivinen suunta osoittaa määritelmän mukaisesti kohti perisentriä P . Radan kiertosuunta on perustason positiivinen kiertosuunta eli kiertoalainen kiertää keskuskappaletta vastapäivään. Kuvaan ei ole piirretty z -akselia, jonka positiivinen suunta on suoraan katsojaa päin.

Apofokaalikoordinaatisto

Taivaanmekaniikkaa käsittelevässä kirjallisuudessa ei esitellä apofokaalikoordinaatistoa. Tämä työ kuitenkin pyrkii rakentamaan järjestelmällisen käsitteistön, joten on mieleenkiintoista tarkastella, kuinka apofokaalikoordinaatisto tulisi määritellä, koska tämän perusteella myös perifokaalikoordinaatiston nimi opitaan tulkitsemaan ja ymmärtämään paremmin.

Yksi tulkintatapa on, että koordinaatiston nimi perustuu valittuun origoon, joka on perisentrin puoleinen polttopiste. Tällöin mitä tahansa varattuun polttopisteeseen kiinnitettyä koordinaatistoa voitaisiin kutsua tällä nimellä, eikä koordinaatisto olisi enää tarkoituksenmukainen. Toisaalta, tässä työssä rakennetun käsitteistön nojalla olisi mielekästä tulkita nimi siten, että sen yläkäsite on fokaalikoordinaatisto (vasen tai oikea), ja tätä yläkäsitettä on kavennettu lisämääreellä, joka tarkoittaa origoksi valitun polttopisteen. Mielekkyydestään huolimatta tämäkään tulkinta ei liene oikea.

Englanninkielisessä kirjallisuudessa käytetään joskus termejä *perifokus* ja *apofokus* tarkoittamaan periapsia ja apoapsia. Esimerkiksi lähteessä [62, s. 42–4] määritellään, että *perifokus* (engl. *perifocus*) on hyperbolisen tai elliptisen radan piste, jossa sekundääri on lähimpänä barysentriä (eli systeemin massakeskipistettä), ja vastaavasti *apofokus* (engl. *apofocus*) on elliptisen radan piste, joka on kauimpana primääristä.

On tavallista, että samalla käsitteellä on monta nimeä, mutta nämä termit – *apofokus* ja *perifokus* – ovat selvästi harvinaisempia kuin aiemmin esitetyt. Tämä työ suosittelee, ettei näitä termejä tulisi käyttää suomenkielisissä esityksissä, koska suomen kielessä näiden termien luonnolliset tulkinnat, joissa alkuosa määrittää jälkiosaa, ovat harhaanjohtavia. Tällöin termit tulkitaan tarkoittamaan polttopisteitä eli fokuksia, joita on täsmennetty alun määriteosalla (apo- tai peri-), vaikka todellisuudessa termit eivät tarkoita polttopisteitä vaan itse uran pisteitä.

Näiden termien adjektiivimuodot esiintyvät tarkasteltavien koordinaatistojen nimissä etuliitteinä perifokaali- ja apofokaali-. Ne esiintyvät myös etuliitteinä käsitteissä peri-

fokaalietäisyys ja apofokaalietäisyys, jotka edellä mainittu lähde määrittelee seuraavasti. *Perifokaalietäisyys* (engl. *perifocal distance*) on perifokuksen ja barysentrin välinen etäisyys [62, s. 42]. *Apofokaalietäisyys* (engl. *apofocal distance*) on apofokuksen ja barysentrin välinen etäisyys [62, s. 44].

Perifokaalikoordinaatiston nimi voidaan näiden käsitteiden avulla ymmärtää siten, että etuliite (perifokaali-) täsmentää koordinaatiston perussuunnan. Näin ollen *apofokaalikoordinaatisto* (engl. *apofocal coordinate frame*) voidaan määritellä kuin perifokaalikoordinaatisto, mutta korvaamalla kiinnitys (3) seuraavasti: perussuunta osoittaa aposentriin eli $+x$ -akseli on integroimisvakion \mathbf{e} vastaiseen suuntaan. Näin määriteltynä perifokaalikoordinaatisto vastaa oikeaa fokaalikoordinaatistoa ja apofokaalikoordinaatisto vastaa vasenta fokaalikoordinaatistoa.

Solmuvektori

Solmuvektori (engl. *node vector*), \mathbf{n} , määritellään yhtälöllä [7, s. 62; 54, s. 80]

$$\mathbf{n} = \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{h}, \quad (6.4)$$

jossa $\hat{\mathbf{z}}$ on viitekoordinaatiston $+z$ -akselin suuntainen yksikkövektori. Laskemalla ristitulo saadaan solmuvektorille komponenttiesitys viitekoordinaatistossa,

$$\mathbf{n} = \begin{bmatrix} -h_y \\ h_x \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (6.5)$$

Komponenttiesityksen perusteella solmuvektorin pituudeksi saadaan

$$n = \sqrt{h_x^2 + h_y^2}. \quad (6.6)$$

Solmuvektori osoittaa nousevan solmun suuntaan, ja se on yhdensuuntainen solmuviivan kanssa [7, s. 62]. Seuraavaksi hahmotellaan, kuinka nämä ominaisuudet voidaan nähdä.

Yhdensuuntaisuus solmuviivan kanssa nähdään siitä, että ristitulon määritelmän perusteella solmuvektorin (6.4) täytyy olla kohtisuorassa sekä perustason että ratatason normaaliin. Tämä tarkoittaa, että solmuvektorin täytyy olla sekä ratatasossa että perustasossa. Näiden tasojen leikkaus on solmuviiva, joten solmuvektorin täytyy olla yhdensuuntainen solmuviivan kanssa.

Solmuvektorin nähdään osoittavan nousevaan solmuun, kun ristitulo $\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{h} = \mathbf{h} \times (-\hat{\mathbf{z}})$ tulkitaan seuraavalla tavalla. Ensin ristitulo projisoi vektorin $-\hat{\mathbf{z}}$ ratatasoon. Projisoitu vektori osoittaa ratatasossa suuntaan, jossa radan alin piste z -akselin suhteen on. Sen jälkeen projisoitua vektoria kierretään 90° radan kiertosuunnan mukaisesti. Tällöin tulos osoittaa suuntaan, jossa rata siirtyy z -akselin negatiiviselta puolelta sen positiiviselle puolelle, mikä vastaa nousevan solmun suuntaa.

Solmuvektorin määritelmästä (6.4) nähdään, että nousevan solmun suunta on määrittelemätön, jos kyseessä on ekvaattorirata, jolloin perustaso ja ratataso yhtenevät. Täl-

löin integroimisvakio \mathbf{h} on yhdensuuntainen viitekoordinaatiston $\hat{\mathbf{z}}$ -yksikkövektorin kanssa, ja vektorien ristitulo on nolla. Komponenttiesityksen (6.5) perusteella sama asia voidaan todeta siten, että nousevalla solmulla on määritely suunta vain, jos integroimisvakion \mathbf{h} projektio perustasolle poikkeaa nollavektorista.

Solmuvektori ja integroimisvakiot – vektorit \mathbf{n} , \mathbf{e} ja \mathbf{h} – muodostavat probleeman *perusvektorit* (engl. *fundamental vectors*) [54, s. 80; 7, s. 61]. Näitä perusvektoreita tarvitaan, kun määritetään perifokaalikoordinaatiston asento viitekoordinaatistoon nähden.

Nodaalikoordinaatisto

Kun perifokaalikoordinaatiston perussuunnaksi valitaan perisentrin sijasta nousevan solmun suunta eli solmuvektorin \mathbf{n} suunta, saadaan nodaalikoordinaatisto. Tämä määritellään seuraavaksi.

Nodaalikoordinaatisto (engl. *nodal coordinate frame*) [60, s. 161] on koordinaatisto seuraavin kiinnityksin: (1) origo on radan varatussa polttopisteessä, (2) perustaso on ratataso, (3) perussuunta osoittaa nousevaan solmuun eli $+x$ -akseli on solmuvektorin \mathbf{n} suuntaan, ja (4) perustason positiivinen kiertosuunta on radan kiertosuunta eli $+z$ -akseli on integroimisvakion \mathbf{h} suuntaan.

Ympyräradoilla ei ole perisentriä, ja ekvaattoriradoilla ei ole nousevaa solmua. Perifokaalikoordinaatiston määritelmä nojaa perisentriin, mistä johtuen se ei sovellu ympyräradoille. Vastaavasti nodaalikoordinaatiston määritelmä perustuu nousevaan solmuun, mistä johtuen se ei vuorostaan sovellu ekvaattoriradoille.

6.2 Radan asento

Nousevan solmun pituus

Nousevan solmun pituus (engl. *longitude of ascending node*), Ω , on perussuunnan ja nousevan solmun välinen kulma mitattuna perustasoa pitkin sen positiivisen kiertosuunnan mukaisesti. Tämä määritelmä, joka nojautuu nimenomaan perustasoon ja perussuuntaan, vastaa erityisesti lähdeostosten [7, s. 58; 21, s. 48] käyttämiä määritelmiä. Ekvaattoriradoille nousevan solmun pituus on määrittelemätön, koska nousevaa solmua ei ole määritetty [7, s. 60].

Muissa lähteissä nousevan solmun suuntaa ilmaiseva kulmasuure määritellään pienin, mutta merkittävin eroavaisuuksin. Perustaso saatetaan kiinnittää ekvaattoritasoon tai ekliptikatasoon (esimerkiksi [35, s. 178; 52, s. 186]). Perussuunta saatetaan kiinnittää kevättasauspisteeseen (esimerkiksi [20, s. 116; 45, s. 182]). Tällaiset määritelmät, jotka asettavat lisäkiinnityksiä koskien viitekoordinaatiston perussuuntaa tai perustasoa, eivät sovellu tässä työssä käytettäviksi, koska tavoitteena on tarkastella radan asentoa mieltävaltaisesti suunnatun viitekoordinaatiston suhteen.

Kulman Ω kosinille saadaan määritelmien perusteella yhtälö [7, s. 63]

$$\cos \Omega = \frac{\mathbf{n} \cdot \hat{\mathbf{x}}}{n}. \quad (6.7)$$

Ratkaistaan yhtälö nousevan solmun pituuden Ω suhteen. Saadaan kaksi ratkaisua,

$$\Omega_1 = \arccos \frac{\mathbf{n} \cdot \hat{\mathbf{x}}}{n} \quad \text{ja} \quad \Omega_2 = 2\pi - \Omega_1. \quad (6.8)$$

Molemmat ratkaisut $\Omega_1 \leq \pi$ ja $\Omega_2 \geq \pi$ ovat mahdollisia. Oikean ratkaisun erottamiseksi tarvitaan lisäinformaatiota nousevan solmun suunnasta. Tarvittava lisäinformaatio saadaan kulman Ω sinin etumerkistä. Sinin etumerkistä voidaan päätellä, kummalla puoliympyrällä kulma on,

$$\text{jos } \sin \Omega > 0, \text{ niin } \Omega < \pi,$$

$$\text{jos } \sin \Omega < 0, \text{ niin } \Omega > \pi.$$

Kun oikea puoliympyrä on tiedossa, voidaan yhtälöistä (6.8) valita oikea ratkaisu nousevan solmun pituudelle. Muodostetaan seuraavaksi kulman Ω sinille lauseke ja ratkaistaan sen etumerkki.

Kulman Ω sinille saadaan määritelmien perusteella yhtälö

$$\sin \Omega = \frac{\mathbf{n} \cdot \hat{\mathbf{y}}}{n}. \quad (6.9)$$

Tutkitaan yhtälön saamaa etumerkkiä. Nimittäjän termit ovat vektorien pituuksia, eivätkä vaikuta etumerkkiin. Näin ollen sinin etumerkki on sama kuin osoittajassa olevan pistetulon etumerkki.

Lasketaan kosinin ja sinin yhtälöiden (6.7) ja (6.9) pistetuloille komponenttiesitykset viitekoordinaatistossa. Solmuvektorin komponenttiesityksen (6.5) perusteella saadaan tulokset

$$\mathbf{n} \cdot \hat{\mathbf{x}} = -h_y, \quad (6.10)$$

$$\mathbf{n} \cdot \hat{\mathbf{y}} = h_x. \quad (6.11)$$

Pistetulon komponenttiesityksestä (6.11) nähdään, että sinin etumerkki on sama kuin integroimisvakion \mathbf{h} komponentin h_x etumerkki. Käytetään tätä tietoa oikean ratkaisun valitsemiseksi yhtälöistä (6.8). Radan nousevan solmun pituudeksi saadaan

$$\Omega = \begin{cases} \arccos \frac{\mathbf{n} \cdot \hat{\mathbf{x}}}{n}, & \text{kun } h_x > 0 \\ 2\pi - \arccos \frac{\mathbf{n} \cdot \hat{\mathbf{x}}}{n}, & \text{kun } h_x < 0 \end{cases}. \quad (6.12)$$

Tämä tulos vastaa lähteessä [7, s. 63] esitettyä ratkaisua nousevan solmun pituudelle.

Ratkaistaan nousevan solmun pituus vielä tangentin yhtälöstä. Tämän lähestymistavan edut aiempaan verrattuna ovat siinä, että ratkaisu on yksikäsitteinen ja vektorien normeja ei tarvitse laskea. Kulman Ω kosinin ja sinin yhtälöiden (6.7) ja (6.9) perusteella saadaan tangentille yhtälö

$$\tan \Omega = \frac{\mathbf{n} \cdot \hat{\mathbf{y}}}{\mathbf{n} \cdot \hat{\mathbf{x}}}. \quad (6.13)$$

Sijoitetaan pistetulojen komponenttiesitykset (6.10) ja (6.11) tangentin yhtälöön (6.13). Ratkaistaan nousevan solmun pituuden Ω suhteen. Saadaan yksikäsitteinen ratkaisu,

$$\Omega = \operatorname{atan} 2(h_x, -h_y). \quad (6.14)$$

Tämä päättää nousevan solmun pituuden käsittelyn.

Inklinaatio

Inklinaatio määritellään useissa lähteissä [44, s. 195; 49, s. 122; 35, s. 178] ratatason ja perustason väliseksi kaltevuuskulmaksi. Tämä usein käytetty määritelmä on geometrisesti helppo käsittää, mutta se ei ole riittävän täsmällinen, kuten seuraava esimerkki osoittaa. Kun ratataso ja perustaso yhtenevät, on tasojen välinen kaltevuuskulma 0° , vaikka inklinaatio on joko 0° tai 180° . Tästä epätarkkuudesta johtuen inklinaatio määritellään tässä työssä täsmällisemmin seuraavalla tavalla.

Inklinaatio (engl. *inclination*), i , on perustason ja ratatason välinen avaruuskulma, kun tasot ovat suunnistettu luonnollisten kiertosuuntiensa mukaisesti. Tässä luonnollisella kiertosuunnalla tarkoitetaan perustasossa sen positiivista kiertosuuntaa ja ratatasossa radan kiertosuuntaa. Koska vektorit $\hat{\mathbf{z}}$ ja \mathbf{h} suunnistavat vastaavasti perustason ja ratatason niiden luonnollisten kiertosuuntiensa mukaisesti, on inklinaatio näiden vektorien välinen avaruuskulma. Tästä seuraa, että tämän työn inklinaation määritelmä on yhtäpitävä lähteen [7, s. 58] määritelmän kanssa.

Koska inklinaatio i on vektorien $\hat{\mathbf{z}}$ ja \mathbf{h} välinen avaruuskulma, kytkee pistetulo nämä toisiinsa yhtälöllä

$$\cos i = \frac{\mathbf{h} \cdot \hat{\mathbf{z}}}{h} = \frac{h_z}{h}. \quad (6.15)$$

Ratkaistaan yhtälö inklinaation i suhteen. Saadaan kaksi ratkaisua,

$$i_1 = \arccos \frac{h_z}{h} \quad \text{ja} \quad i_2 = 2\pi - i_1. \quad (6.16)$$

Ratkaisu $i_2 \geq \pi$ voidaan hylätä, koska inklinaatio on vektorien välinen avaruuskulma, eikä vektorien välinen avaruuskulma voi olla suurempi kuin 180° . Radan inklinaatioksi saadaan

$$i = \arccos \frac{h_z}{h}. \quad (6.17)$$

Tämä tulos vastaa lähteessä [7, s. 63] esitettyä ratkaisua inklinaatiolle.

Yhtälöstä (6.17) voidaan helposti päätellä seuraavat seikat. Kun $h_z > 0$, on inklinaatio $0-90^\circ$, ja radan projektio perustasolle kulkee viitekoordinaatiston positiivisen kierto-

suunnan mukaisesti. Kun $h_z < 0$, on inkliinaatio 90° – 180° , ja radan projektiio perustasolle kulkee viitekoordinaatiston positiivisen kiertosuunnan vastaisesti.

Lisäksi yhtälöstä (6.17) voidaan todeta seuraavat erityistilanteet. Kun $h_z = \pm h$, on kyseessä ekvaattorirata. Ekvaattoriradan inkliinaatio on joko 0° tai 180° riippuen siitä, kulkeeko kiertolainen viitekoordinaatiston positiivisen kiertosuunnan mukaisesti vai vastaisesti. Kun $h_z = 0$, on kyseessä naparata. Naparadan inkliinaatio on 90° , eikä ole mahdollista sanoa, kulkeeko kiertolainen viitekoordinaatiston positiivisen kiertosuunnan mukaisesti vai vastaisesti.

Periapsin argumentti

Periapsin argumentti (engl. *argument of periaapsis*), ω , on nousevan solmun ja periapsin välinen kulmaetäisyys (eli argumentti) mitattuna ratatasoa pitkin radan kiertosuuntaan [7, s. 58; 2, s. 47; 49, s. 122]. Ympyräradoille periapsin argumentti on määrittelemätön, koska periapsia ei ole [54, s. 80; 7, s. 60]. Ekvaattoriradoille periapsin argumentti on määrittelemätön, koska nousevaa solmua ei ole [7, s. 60].

Kulman ω kosinille saadaan määritelmien perusteella yhtälö [7, s. 63]

$$\cos \omega = \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}}{ne}. \quad (6.18)$$

Ratkaistaan periapsin argumentin suhteen. Saadaan kaksi ratkaisua,

$$\omega_1 = \arccos \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}}{ne} \quad \text{ja} \quad \omega_2 = 2\pi - \omega_1. \quad (6.19)$$

Molemmat ratkaisut $\omega_1 \leq \pi$ ja $\omega_2 \geq \pi$ ovat mahdollisia. Oikean ratkaisun erottamiseksi tarvitaan lisäinformaatiota periapsin suunnasta. Tarvittava lisäinformaatio saadaan kulman ω sinin etumerkistä. Sinin etumerkistä voidaan päätellä, kummalla puoliympyrällä kulma on,

$$\text{jos } \sin \omega > 0, \text{ niin } \omega < \pi,$$

$$\text{jos } \sin \omega < 0, \text{ niin } \omega > \pi.$$

Kun oikea puoliympyrä on tiedossa, voidaan yhtälöistä (6.19) valita oikea ratkaisu periapsin argumentille. Muodostetaan seuraavaksi kulman ω sinille lauseke ja ratkaistaan sen etumerkki. Tätä varten tarvitaan vektoria \mathbf{n}_\perp , joka on nodaalikoordinaatiston +y-akselin suuntainen vektori.

Vektori \mathbf{n}_\perp saadaan kiertämällä solmuvektoria \mathbf{n} ratatasossa 90° radan kiertosuunnan mukaisesti. Määritelmän mukainen solmuvektorin kierto saadaan ristitulolla, joten

$$\mathbf{n}_\perp = \frac{1}{h} \mathbf{h} \times \mathbf{n}. \quad (6.20)$$

Vektorit \mathbf{h} ja \mathbf{n} ovat keskenään kohtisuorassa. Näin ollen ristitulon (6.20) avulla kierretyn solmuvektorin pituus vastaa alkuperäisen solmuvektorin pituutta eli $n_\perp = n$. Voi-

daan todeta, että vektorit \mathbf{n} ja \mathbf{n}_\perp suhtautuvat toisiinsa ratatasossa kuin vektorit $\hat{\mathbf{x}}$ ja $\hat{\mathbf{y}}$ toisiinsa perustasossa. Nodaalikoordinaatiston yksi kanta muodostuu vektoreista \mathbf{n} , \mathbf{n}_\perp ja \mathbf{h} .

Kulman ω sinille saadaan määritelmien perusteella yhtälö

$$\sin \omega = \frac{\mathbf{n}_\perp \bullet \mathbf{e}}{ne}. \quad (6.21)$$

Tutkitaan yhtälön saamaa etumerkkiä. Nimittäjän termit ovat vektorien pituuksia, eivätkä vaikuta etumerkkiin. Näin ollen sinin etumerkki on sama kuin osoittajan pistetulon etumerkki. Muodostetaan seuraavaksi kyseiselle pistetulolle komponenttiesitys. Tätä varten lasketaan ensin vektorille \mathbf{n}_\perp esitys tunnettujen vektorien lineaarikombinaationa.

Vektorin \mathbf{n}_\perp ja \mathbf{n} määritelmien (6.20) ja (6.4) perusteella,

$$\mathbf{n}_\perp = \frac{1}{h} \mathbf{h} \times (\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{h}). \quad (6.22)$$

Sovelletaan ristitulon BAC-CAB-sääntöä,

$$\mathbf{n}_\perp = \frac{1}{h} [\hat{\mathbf{z}}(\mathbf{h} \bullet \mathbf{h}) - \mathbf{h}(\mathbf{h} \bullet \hat{\mathbf{z}})]. \quad (6.23)$$

Lasketaan pistetulot, ja viedään vakiokerroin sulkujen sisälle. Saadaan tulos

$$\mathbf{n}_\perp = h\hat{\mathbf{z}} - \frac{h_z}{h} \mathbf{h}. \quad (6.24)$$

Lasketaan sinin yhtälössä (6.21) esiintyvälle pistetulolle $\mathbf{n}_\perp \bullet \mathbf{e}$ komponenttiesitys. Yhtälön (6.24) perusteella

$$\mathbf{n}_\perp \bullet \mathbf{e} = \left(h\hat{\mathbf{z}} - \frac{h_z}{h} \mathbf{h} \right) \bullet \mathbf{e}. \quad (6.25)$$

Viedään pistetulo sulkujen sisälle. Yhtälön (4.12) perusteella integroimisvakioille pätee $\mathbf{h} \bullet \mathbf{e} = 0$. Tämän seurauksena oikean puolen jälkimmäinen termi häviää. Lasketaan jäljelle jäänyt pistetulo. Saadaan tulos

$$\mathbf{n}_\perp \bullet \mathbf{e} = he_z. \quad (6.26)$$

Lasketaan vielä kosinin yhtälössä (6.18) esiintyvälle pistetulolle $\mathbf{n} \bullet \mathbf{e}$ komponenttiesitys. Solmuvektorin \mathbf{n} komponenttiesityksen (6.5) perusteella saadaan tulos

$$\mathbf{n} \bullet \mathbf{e} = h_x e_y - h_y e_x. \quad (6.27)$$

Pistetulon komponenttiesityksestä (6.26) nähdään, että sinin etumerkki on sama kuin integroimisvakion \mathbf{e} komponentin e_z etumerkki. Käytetään tätä tietoa oikean ratkaisun valitsemiseksi yhtälöistä (6.19). Radan periapsin argumentiksi saadaan

$$\omega = \begin{cases} \arccos \frac{\mathbf{n} \bullet \mathbf{e}}{ne}, & \text{kun } e_z > 0 \\ 2\pi - \arccos \frac{\mathbf{n} \bullet \mathbf{e}}{ne}, & \text{kun } e_z < 0 \end{cases}. \quad (6.28)$$

Tämä tulos vastaa lähteessä [7, s. 63] esitettyä ratkaisua periapsin argumentille.

Ratkaistaan periapsin argumentti vielä tangentin yhtälöstä. Tämän lähestymistavan edut aiempaan verrattuna ovat siinä, että ratkaisu on yksikäsitteinen ja solmuvektorin normia ei tarvitse laskea. Kulman ω kosinin ja sinin yhtälöiden (6.18) ja (6.21) perusteella saadaan tangentille yhtälö

$$\tan \omega = \frac{\mathbf{n}_\perp \bullet \mathbf{e}}{\mathbf{n} \bullet \mathbf{e}}. \quad (6.29)$$

Sijoitetaan pistetulojen komponenttiesitykset (6.26) ja (6.27) tangentin yhtälöön (6.29). Ratkaistaan periapsin argumentin ω suhteen. Saadaan yksikäsitteinen ratkaisu,

$$\omega = \operatorname{atan} 2(h e_z, h_x e_y - h_y e_x). \quad (6.30)$$

Tämä päättää periapsin argumentin käsittelyn.

6.3 Koordinaattimuunnosten matriisit

Eulerin kulmat

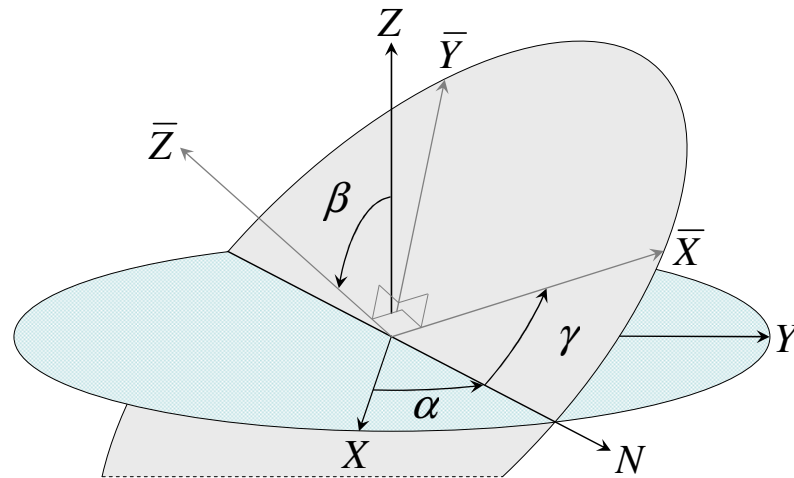
Kirjallisuudessa esiintyy Eulerin kulmista useita erilaisia tulkintoja. Laajimpien tulkintojen (esimerkiksi Wertz [62, s. 417] ja Goldstein [25, s. 151, 154]) mukaan Eulerin kulmat tarkoittavat mitä tahansa kolmen rotaation sekvenssiä, jossa peräkkäiset rotaatiot eivät tapahdu saman koordinaattiakselin ympäri. Tällä tulkinnalla Eulerin kulmista on 12 ($= 3 \times 2 \times 2$) erilaista varianttia, jotka voidaan identifioida rotaatiosekvenssissä käytettyjen koordinaattiakselien järjestyksen perusteella. Tässä työssä Eulerin kulmista käytetään kapeampaa, mutta selkeästi yleisempää tulkintaa, joka esitetään seuraavaksi.

Eulerin kulmat (engl. *Euler angles* tai *Eulerian angles*) ovat paikallisten koordinaattiakselien rotaatiosekvenssin ZXZ kiertokulmat α , β ja γ vastaavasti. Annettu määritelmä on oleellisesti sama kuin lähteissä [25, s. 151–2; 5, s. 542–3; 29, s. 300–2; 16, s. 305; 3, s. 191; 57, s. 441–2; 56, s. 401–2; 32, s. 15]. Eulerin kulmat määrittävät kohdekoordinaatiston asennon suhteessa lähtökoordinaatistoon siten, että lähtökoordinaatistolle suoritetaan järjestyksessä seuraavat rotaatiot: (1) kulma α paikallisen z -akselin ympäri, (2) kulma β paikallisen x -akselin ympäri, ja (3) kulma γ paikallisen z -akselin ympäri. Tilannetta on havainnollistettu kuvassa 6.19.

Eulerin kulmille α , β ja γ on kullekin oma nimensä, joka kuvastaa kyseisen kulman muutoksesta aiheutuvaa (hyrrä)liikettä, kun kohdekoordinaatisto on sidottu hyrrään siten, että z -akseli on hyrrän pyörähdysakseli. Kulmien nimet ovat seuraavat: α on *prekessiokulma* (engl. *precession angle*) [5, s. 542; 32, s. 15], β on *nutaatiokulma* (engl.

nutation angle) [5, s. 542; 32, s. 15], ja γ on pyörähdyskulma (engl. spin angle) [32, s. 15].

Määritelmässä käytetty ilmaisu ”paikalliset koordinaattiakselit” tarkoittaa sen hetkisiä koordinaattiakseleita, kun rotaatiosekvenssiä suoritetaan. Kukin rotaatio muuttaa lähtökoordinaatiston uuteen asentoon, jolloin paikalliset koordinaattiakselit ovat lähtökoordinaatiston koordinaattiakselit niiden sen hetkisissä asennoissaan. Rotaatioiden positiivinen kiertosuunta noudattaa oikean käden sääntöä. Positiivinen kierto tapahtuu siten vastapäivään, kun koordinaattiakselin positiivinen suunta osoittaa kohti katsojaa. Nämä seikat huomioiden määritelmän mukainen Eulerin kulmien α , β ja γ rotaatiosekvenssi ZXZ tapahtuu seuraavasti.



Kuva 6.19. Eulerin kulmat (ZXZ):
prekessiokulma α , nutaatiokulma β ja pyörähdyskulma γ .

Ennen ensimmäistä rotaatiota koordinaattiakselit (x^0, y^0, z^0) ovat samat kuin lähtökoordinaatiston (X, Y, Z) . Ensimmäinen rotaatio α tehdään z^0 -akselin (paikallinen z -akseli) ympäri vastapäivään. Sen jälkeen koordinaattiakselit ovat x' , y' ja z' . Toinen rotaatio β tehdään x' -akselin (paikallinen x -akseli) ympäri vastapäivään. Sen jälkeen koordinaattiakselit ovat x'' , y'' ja z'' . Kolmas rotaatio γ tehdään z'' -akselin (paikallinen z -akseli) ympäri vastapäivään. Sen jälkeen koordinaattiakselit (x''', y''', z''') ovat samat kuin kohdekoordinaatiston $(\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z})$. Kuvassa 6.19 on esitetty lähtö- ja kohdekoordinaatistojen välinen suhde sekä Eulerin kulmat.

Lähtö- ja kohdekoordinaatiston xy -tasojen (perustasojen) leikkaussuoraa kutsutaan nimellä *solmuviiva* (engl. *line of nodes, nodal line*). Tämä määritelmä on oleellisesti sama kuin lähteissä [16, s. 306–7; 5, s. 542–3; 57, s. 442; 25, s. 151]. Solmuviivan avulla Eulerin kulmat voidaan tulkita asentokulmiksi ilman ennalta kiinnitettyä rotaatiosekvenssiä. Seuraavaksi esitetään Eulerin kulmien tulkinta asentokulmiksi, joita voidaan yhtä hyvin käyttää myös Eulerin kulmien vaihtoehtoisina määritelmänä.

Kulma α on lähtökoordinaatiston $+x$ -akselin ja solmuviivan välinen kulma. Kulma β on koordinaatistojen $+z$ -akseleiden välinen avaruuskulma. Kulma γ on kohdekoor-

dinaatiston $+x$ -akselin ja solmuviivan välinen kulma. Kulmien α ja γ positiivisen kiertosuunta on vastaavasti lähtö- ja kohdekoordinaatiston perustason positiivinen kiertosuunta. Kulma β on aina ei-negatiivinen avaruuskulma, eikä siten edellytä positiivista kiertosuuntaa.

Rotaatiosekvenssit ja Eulerin kulmat

Paikallisten koordinaattiakselien rotaatiosekvenssin muuntaminen tavanomaisten rotaatiomatriisien tuloksi käy helpoiten pohtimalla ongelmaa päinvastaiseen suuntaan. Tällöin tavoitteena on saattaa kohdekoordinaatisto takaisin samaan asentoon lähtökoordinaatiston kanssa. Tämä vuorostaan onnistuu suorittamalla rotaatiosekvenssi ABC päinvastaisilla kierroilla käyttäen koko ajan pelkästään lähtökoordinaatiston koordinaattiakseleita.

Merkitään lähtökoordinaatistoa symbolilla U , ja kohdekoordinaatistoa symbolilla W . Merkitään lisäksi koordinaatistojen U ja W koordinaattiakselien suuntaisten yksikkövektorien muodostamia kantoja vastaavasti symboleilla $U = \{\mathbf{e}_j^U\}$ ja $W = \{\mathbf{e}_j^W\}$, kun $j \in \{1,2,3\}$. Edellä esitetyn päättelyn nojalla kohdekoordinaatiston W kantavektori \mathbf{e}_j^W voidaan saattaa takaisin lähtökoordinaatiston U kantavektoriksi \mathbf{e}_j^U yhtälöllä

$$[\mathbf{e}_j^U]_U = \mathbf{R}_C(-\gamma)\mathbf{R}_B(-\beta)\mathbf{R}_A(-\alpha)[\mathbf{e}_j^W]_U, \quad (6.31)$$

jossa sekä \mathbf{e}_j^U että \mathbf{e}_j^W ovat molemmat esitetty lähtökoordinaatiston U kannassa. Erityisesti kantavektorin \mathbf{e}_j^U esitys kannassa U on standardikannan vektori \mathbf{e}_j .

Kun koordinaatistoa kierretään tiettyyn suuntaan, voidaan tämä tulkita vaihtoehtoisesti siten, että koordinaatistossa esitettäviä vektoreita kierretään vastakkaiseen suuntaan [25, s. 169; 41, s. 208]. Tämän perusteella kohdekoordinaatiston kannassa esitetty vektori voidaan esittää lähtökoordinaatiston kannassa kertomalla se yhtälön (6.31) rotaatiomatriisien tulo inverssillä. Rotaatiomatriisien tulo on edelleen rotaatiomatriisi, ja rotaatiomatriisin inverssi saadaan transponoinnilla. Näin ollen saadaan yhtälö

$$[\mathbf{v}]_U = \mathbf{R}_A(\alpha)\mathbf{R}_B(\beta)\mathbf{R}_C(\gamma)[\mathbf{v}]_W. \quad (6.32)$$

Tämä tulos vastaa kannanvaihtoyhtälöä (4.46), kun rotaatiosekvenssi samaistetaan siirtymämatriisin kanssa.

Yhtälöiden (6.31) ja (6.32) väliset erot ovat hienovaraisia. Ensimmäisessä yhtälössä kierretään vektoriavaruuden kantavektoreita, ja jälkimmäisessä yhtälössä kierretään komponenttivektoreita. Yhtälön (6.31) tapauksessa on kyseessä kaksi eri kantavektoria \mathbf{e}_j^U ja \mathbf{e}_j^W samassa kannassa esitettynä, kun taas yhtälön (6.32) tapauksessa on vain yksi vektori \mathbf{v} kahdessa eri kannassa esitettynä.

Lopuksi sovelletaan yhtälöä (6.32) Eulerin kulmiin. Tällöin rotaatiosekvenssin ZXZ kiertokulmat ovat α , β ja γ vastaavasti. Saadaan yhtälö

$$[\mathbf{v}]_U = \mathbf{R}_Z(\alpha)\mathbf{R}_X(\beta)\mathbf{R}_Z(\gamma)[\mathbf{v}]_W, \quad (6.33)$$

joka kytkee vektorin \mathbf{v} komponenttiesitykset eri kannoissa toisiinsa.

Perifokaalikoordinaatiston asentokulmat ja Eulerin kulmat

Vertaamalla keskenään perifokaalikoordinaatiston asentokulmia (Ω , i , ω) ja Eulerin kulmia (α , β , γ) voidaan havaita, että perifokaalikoordinaatiston asentokulmat ovat itse asiassa suoraan perifokaalikoordinaatiston Eulerin kulmat suhteessa viitekoordinaatistoon. Kulmat voidaan samaistaa keskenään seuraavasti: prekessiokulma α ja nousevan solmun pituus Ω vastaavat toisiaan, nutaatiokulma β ja inkliinaatio i vastaavat toisiaan, ja pyörähdyskulma γ ja periapsin argumentti ω vastaavat toisiaan. Näin ollen koordinaattimuunnos perifokaalikoordinaatistosta viitekoordinaatistoon on yhtälön (6.33) perusteella

$$[\mathbf{r}]_o = \mathbf{R}_z(\Omega)\mathbf{R}_x(i)\mathbf{R}_z(\omega)[\mathbf{r}]_p, \quad (6.34)$$

jossa $[\mathbf{r}]_p$ on kappaleen sijaintivektori perifokaalikoordinaatistossa esitettynä ja $[\mathbf{r}]_o$ viitekoordinaatistossa esitettynä.

Lisäksi havaitaan, että Eulerin kulmiin liittyvä solmuviiva ja satelliitin rataan liittyvä solmuviiva voidaan samaistaa. Valitaan lähtökoordinaatistoksi viitekoordinaatisto, ja kohdekoordinaatistoksi perifokaalikoordinaatisto. Tällöin lähtökoordinaatiston xy -taso on perustaso, ja kohdekoordinaatiston xy -taso on ratataso. Näiden tasojen välinen leikkaussuora vastaa solmuviivaa molempien määritelmien mukaisesti.

Ellipsiä käsittelevän luvun yhtälön (2.74) perusteella kappaleen sijainti fokaalikoordinaatistossa voidaan esittää fokaalikulman ν (eli luonnollisen anomalian) avulla. Tämän yhtälön perusteella kappaleen sijainti perifokaalikoordinaatistossa esitettynä on

$$[\mathbf{r}]_p = \begin{bmatrix} r \cos \nu \\ r \sin \nu \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (6.35)$$

jossa ν on kappaleen fokaalikulma eli kiertolaisen luonnollinen anomalia. Luonnollinen anomalia määritellään seuraavassa alaluvussa.

6.4 Sijainti radalla

Kolme erilaista anomaliaa

Anomalia (engl. *anomaly*) tarkoittaa periapsista radan kiertoliikkeen suuntaan mitattua kulmaa, joka määrittää kiertolaisen sijainnin ellipsiradalla [44, s. 18]. Ellipsirataan liittyviä anomaliaita on kolme: eksentrisen anomalia, luonnollinen anomalia ja keskianomalia. Nämä määritellään seuraavaksi.

Luonnollinen anomalia (engl. *true anomaly*), ν tai f , on ellipsin varatusta polttopisteestä mitattu kulma kiertolaisen ratapisteeseen. Ratapisteen luonnollinen anomalia on sama kuin ellipsin urapisteen oikea fokaalikulma.

Eksenttrinen anomalia (engl. *eccentric anomaly*), E , on ellipsin keskipisteestä mitattu kulma ison apuymyrän vastinpisteeseen. Ratapisteen eksenttrinen anomalia on sama kuin ellipsin urapisteen eksenttrinen kulma.

Keskianomalia (engl. *mean anomaly*), M , ilmaisee kulman, jossa kiertolainen olisi ellipsin keskipisteestä katsoen mitattuna, jos kiertolaisen kulmanopeus olisi todellisuudesta poiketen vakio, joka vastaisi radan keskikulmanopeutta. Ratapisteen keskianomalia on sama kuin ellipsin urapisteen sektoriaalinen kulma oikeassa fokaalikoordinaatissa.

Luonnollinen anomalia

Määritelmän perusteella luonnollinen anomalia ν on sijaintivektorin ja eksentrisyysvektorin välinen kulma mitattuna radan kiertosuuntaan. Näin ollen kulman kosinille voidaan muodostaa pistetulon avulla yhtälö

$$\cos \nu = \frac{\mathbf{e} \cdot \mathbf{r}}{er}, \quad (6.36)$$

joka voidaan johtaa myös integraalin 2 yhtälöstä (4.14), kun $\nu = \theta_r - \theta_e$ edellä annetun määritelmän mukaisesti. Lisäksi integraalin 2 tuloksen (4.18) perusteella tiedetään, että

$$\mathbf{e} \cdot \mathbf{r} = -r + \frac{h^2}{\mu}.$$

Ratkaistaan yhtälö (6.36) luonnollisen anomalian ν suhteen. Saadaan kaksi ratkaisua,

$$\nu_1 = \arccos \frac{\mathbf{e} \cdot \mathbf{r}}{er} \quad \text{ja} \quad \nu_2 = 2\pi - \nu_1. \quad (6.37)$$

Molemmat ratkaisut $\nu_1 \leq \pi$ ja $\nu_2 \geq \pi$ ovat mahdollisia. Oikean ratkaisun erottamiseksi tarvitaan lisäinformaatiota sijaintivektorin suunnasta suhteessa eksentrisyysvektoriin. Tarvittava lisäinformaatio saadaan kulman ν sinin etumerkistä. Sinin etumerkistä voidaan päätellä, kummalla puoliympyrällä kulma on,

$$\text{jos } \sin \nu > 0, \text{ niin } \nu < \pi,$$

$$\text{jos } \sin \nu < 0, \text{ niin } \nu > \pi.$$

Kun oikea puoliympyrä on tiedossa, voidaan yhtälöistä (6.37) valita oikea ratkaisu luonnolliselle anomalialle. Muodostetaan seuraavaksi kulman ν sinille lauseke ja ratkaistaan sen etumerkki. Tätä varten tarvitaan kierrettyä eksentrisyysvektoria \mathbf{e}_\perp , joka määritellään seuraavaksi.

Kierretty eksentrisyysvektori \mathbf{e}_\perp saadaan kiertämällä eksentrisyysvektoria \mathbf{e} rata-
tasossa 90° astetta radan kiertosuunnan mukaisesti. Tarvittava kierto voidaan toteuttaa ristitulolla rata-akselin \mathbf{h} suuntaisen yksikkövektorin kanssa, koska rata-akseli on koh-tisuorassa eksentrisyysvektoriin. Näin ollen kierretty eksentrisyysvektori määritellään yhtälöllä

$$\mathbf{e}_\perp = \frac{1}{h} \mathbf{h} \times \mathbf{e}. \quad (6.38)$$

Vektorit \mathbf{e} , \mathbf{e}_\perp ja \mathbf{h} ovat keskenään kohtisuorassa ja vastaavasti samansuuntaisia perifokaalikoordinaatiston x -, y - ja z -akselien kanssa. Kierretyn eksentrisyysvektorin pituus on sama kuin alkuperäisen eksentrisyysvektorin eli $e_\perp = e$.

Muodostetaan kierretylle eksentrisyysvektorille toinen esitys. Sijoitetaan eksentrisyysvektorin \mathbf{e} määritelmä (4.8) yhtälöön (6.38),

$$\mathbf{e}_\perp = \frac{1}{h} \mathbf{h} \times \left(-\frac{1}{r} \mathbf{r} - \frac{1}{\mu} \mathbf{h} \times \dot{\mathbf{r}} \right). \quad (6.39)$$

Ristitulon osittuvuuden perusteella

$$\mathbf{e}_\perp = -\frac{1}{hr} \mathbf{h} \times \mathbf{r} - \frac{1}{h\mu} \mathbf{h} \times (\mathbf{h} \times \dot{\mathbf{r}}). \quad (6.40)$$

Sovelletaan ristitulon BAC-CAB-sääntöä oikean puolen jälkimmäiseen termiin,

$$\mathbf{e}_\perp = -\frac{1}{hr} \mathbf{h} \times \mathbf{r} - \frac{1}{h\mu} \mathbf{h} (\mathbf{h} \cdot \dot{\mathbf{r}}) + \frac{1}{h\mu} \dot{\mathbf{r}} (\mathbf{h} \cdot \mathbf{h}). \quad (6.41)$$

Aiemman perusteella tiedetään, että nopeusvektori on ratatasossa. Tästä seuraa, että integroimisvakio \mathbf{h} ja nopeusvektori $\dot{\mathbf{r}}$ ovat kohtisuorassa toisiinsa, ja niiden välinen pistetulo häviää eli $\mathbf{h} \cdot \dot{\mathbf{r}} = 0$. Sievennysten jälkeen,

$$\mathbf{e}_\perp = -\frac{1}{hr} \mathbf{h} \times \mathbf{r} + \frac{h}{\mu} \dot{\mathbf{r}}. \quad (6.42)$$

Luonnollisen anomalian ν sinille saadaan muodostettua kierretyn eksentrisyysvektorin avulla yhtälö

$$\sin \nu = \frac{\mathbf{e}_\perp \cdot \mathbf{r}}{er}. \quad (6.43)$$

Tutkitaan oikean puolen saamaa etumerkkiä. Nimittäjän termit ovat vektorien pituuksia, eivätkä vaikuta etumerkkiin. Näin ollen sinin etumerkki on sama kuin osoittajan pistetulon etumerkki.

Lasketaan sinin yhtälössä (6.43) esiintyvä pistetulo käyttäen yhtälöä (6.42),

$$\mathbf{e}_\perp \cdot \mathbf{r} = \left(-\frac{1}{hr} \mathbf{h} \times \mathbf{r} + \frac{h}{\mu} \dot{\mathbf{r}} \right) \cdot \mathbf{r}. \quad (6.44)$$

Pistetulon osittuvuuden perusteella,

$$\mathbf{e}_\perp \cdot \mathbf{r} = -\frac{1}{hr} \mathbf{h} \times \mathbf{r} \cdot \mathbf{r} + \frac{h}{\mu} \dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}. \quad (6.45)$$

Vaihtamalla pisteen ja ristin paikka ensimmäisessä termissä nähdään, että skalaarikolmitulo häviää, koska vektorin ristitulo itsensä kanssa on nolla,

$$\mathbf{h} \times \mathbf{r} \bullet \mathbf{r} = \mathbf{h} \bullet \mathbf{r} \times \mathbf{r} = 0. \quad (6.46)$$

Lisäksi sijaintivektorin \mathbf{r} ja nopeusvektorin $\dot{\mathbf{r}}$ sylinterikoordinaatiston esitysten (4.92) ja (4.94) nojalla voidaan laskea pistetulo

$$\mathbf{r} \bullet \dot{\mathbf{r}} = r \mathbf{u}_r \bullet (\dot{r} \mathbf{u}_r + r \dot{\theta} \mathbf{u}_\theta) = r \dot{r}, \quad (6.47)$$

jossa \dot{r} on napasäteen aikaderivaatta, eikä nopeusvektorin $\dot{\mathbf{r}}$ pituus. Nämä eroavat toisistaan merkittävästi, sillä nopeusvektorin pituus ei ole ikinä negatiivinen, mutta napasäteen muutos ajan suhteen voi olla negatiivinen. Sijoitetaan (6.46) ja (6.47) yhtälöön (6.45), jolloin saadaan tulos

$$\mathbf{e}_\perp \bullet \mathbf{r} = \frac{h}{\mu} \dot{r} r, \quad (6.48)$$

jossa r on napasäde ja \dot{r} napasäteen aikaderivaatta (joka voi olla negatiivinen).

Yhtälöstä (6.48) voidaan skalaarien tulo $\dot{r} r$ korvata takaisin vektorien pistetuloksi $\dot{\mathbf{r}} \bullet \mathbf{r}$ yhtälöä (6.47) käyttäen. Tällöin

$$\mathbf{e}_\perp \bullet \mathbf{r} = \frac{h}{\mu} \dot{\mathbf{r}} \bullet \mathbf{r}. \quad (6.49)$$

Tämä yhtälö vihjaa harhaanjohtavasti, että kierretty eksentrisyysvektori \mathbf{e}_\perp olisi sama kuin skaalattu nopeusvektori $(h/\mu)\dot{\mathbf{r}}$, mutta näin ei ole. Harha johtuu siitä, että skalaareille pätevä identiteetti, jonka mukaan totuudesta $xc = yc$ seuraa $x = y$, ei ole voimassa vektoreille ja pistetulolle. Vektorien tapauksessa on mahdollista, että $\mathbf{x} \bullet \mathbf{c} = \mathbf{y} \bullet \mathbf{c}$, vaikka $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$.

Yhtälön (6.48) perusteella sinin etumerkki on sama kuin napasäteen aikaderivaatan \dot{r} etumerkki, koska muut tekijät h , μ ja r ovat positiivisia, eivätkä ne siten vaikuta etumerkkiin. Käytetään tätä tietoa oikean ratkaisun valitsemiseksi yhtälöistä (6.37). Kappaleen sijainnin luonnolliseksi anomaliaksi saadaan

$$v = \begin{cases} \arccos \frac{\mathbf{e} \bullet \mathbf{r}}{er}, & \text{kun } \dot{r} > 0 \\ 2\pi - \arccos \frac{\mathbf{e} \bullet \mathbf{r}}{er}, & \text{kun } \dot{r} < 0 \end{cases}. \quad (6.50)$$

Tämä tulos vastaa lähteessä [7, s. 63] esitettyä ratkaisua luonnolliselle anomalialle sillä poikkeuksella, että mainitussa lähteessä on epäyhtälöiden $\dot{r} > 0$ ja $\dot{r} < 0$ sijasta käytetty epäyhtälöitä $\mathbf{r} \bullet \dot{\mathbf{r}} > 0$ ja $\mathbf{r} \bullet \dot{\mathbf{r}} < 0$ vastaavasti.

Napasäteen aikaderivaatan \dot{r} etumerkki on helposti pääteltävissä seuraavalla tavalla. Kun kiertolainen on ohittanut periapsin ja kulkee kohti apoapsia, napasäde r suurenee ja napasäteen aikaderivaatta \dot{r} on positiivinen ($\dot{r} > 0$). Apoapsissa napasäde r saavuttaa maksimin, jolloin napasäteen aikaderivaatta \dot{r} on nolla ($\dot{r} = 0$). Kun kiertolainen on ohittanut apoapsin ja kulkee kohti periapsia, napasäde r pienenee ja napasäteen aikaderivaatta \dot{r} on negatiivinen ($\dot{r} < 0$).

Ratkaistaan luonnollinen anomalia vielä tangentin yhtälöstä. Tämän lähestymistavan etu aiempaan verrattuna on siinä, että ratkaisu on yksikäsitteinen. Kulman ν kosinin ja sinin yhtälöiden (6.36) ja (6.43) perusteella saadaan tangentille yhtälö

$$\tan \nu = \frac{\mathbf{e}_\perp \bullet \mathbf{r}}{\mathbf{e} \bullet \mathbf{r}}. \quad (6.51)$$

Sijoitetaan pistetulojen yhtälöt (4.18) ja (6.48) tangentin yhtälöön (6.51). Ratkaistaan luonnollisen anomalian argumentin ν suhteen. Sievennysten jälkeen saadaan yksikäsitteinen ratkaisu,

$$\nu = \operatorname{atan} 2(h^2 r, h^2 - \mu r). \quad (6.52)$$

Tämä päättää luonnollisen anomalian käsittelyn.

Eksentrisen anomalia ja keskianomalia

Eksentrisen anomalia E voidaan laskea luonnollisesta anomaliasta ν käyttäen yhtälöä (2.93) oikean fokaalikoordinaatiston tapauksessa,

$$E = \operatorname{atan} 2(\sqrt{1 - e^2} \sin \nu, \cos \nu + e). \quad (6.53)$$

Keskianomalia M voidaan edelleen laskea eksentrisestä anomaliasta E käyttäen yhtälöä (2.108) oikean fokaalikoordinaatiston tapauksessa, mikä vastaa Keplerin yhtälöä (2.109),

$$M = E - e \sin E. \quad (6.54)$$

On syytä huomauttaa, että tässä tapauksessa Keplerin yhtälöä kuljetaan suuntaan $E \rightarrow M$. Toisin sanoen yhtälöä käytetään kaavana keskianomalialle M , jonka suhteen yhtälö on jo ratkaistu suljetussa muodossa.

Perisentriaika

Perisentriaika t_p voidaan vuorostaan laskea, kun keskianomalia M ja sitä vastaava ajanhetki t tunnetaan. Aloitetaan keskianomalian yhtälöstä (4.132),

$$M = n(t - t_p).$$

Ratkaistaan yhtälö (4.132) perisentriajan t_p suhteen,

$$t_p = t - M / n, \quad (6.55)$$

jossa keskiliike n lasketaan integroimisvakioista yhtälön (5.18) mukaisesti.

Kappaleen keskianomalia M ajanhetkellä t voidaan tulkita keskianomaliaksi M_k epookilla t_k , kun epookki on kyseinen ajanhetki $t_k = t$. Yhtälön (4.132) perisentriajan ja keskiliikkeen välinen tulo voidaan näin ollen mieltää keskianomaliaksi $M_p = -nt_p$ epookilla t_p . Näihin tulkintoihin vedoten todetaan, että sijainnin laskeminen millä ta-

hansa ajanhetkellä edellyttää itse asiassa aina keskianomalian siirtoa yhdeltä epookilta toiselle eli keskianomalian aikasiirtoa.

Keskianomalian aikasiirto yhdeltä epookilta mielivaltaiselle epookille on vaivatonta johtuen keskianomalian M ja ajan t välisen relaation (4.132) lineaarisuudesta. Epookkia t_0 vastaava keskianomalia M_0 voidaan siirtää mielivaltaiselle epookille t_k , jolloin epookin keskianomalia M_k saadaan yhtälön (5.32) avulla,

$$M_k = n(t_k - t_0) + M_0.$$

Eksentrisen anomalian E aikasiirto mielivaltaiselle ajanhetkelle t_k on sen sijaan huomattavasti vaikeampaa, koska se täytyy tehdä keskianomalian kautta muunnosketjulla $E_0 \rightarrow M_0 \rightarrow M_k \rightarrow E_k$. Tämä vuorostaan edellyttää Keplerin yhtälön ratkaisemista askeleessa $M_k \rightarrow E_k$, joka ei ole mahdollista suljetussa muodossa.

6.5 Ekvaattori- ja ympyrärata

Periapsin pituus ja leveyden argumentti

Jos rata on ekvaattorirata, niin radalla ei ole nousevaa eikä laskevaa solmua. Ekvaattoriradan tapauksessa nousevan solmun pituutta ei ole määritelty. Vastaavasti, jos rata on ympyrärata, niin sillä ei ole periapsia eikä apoapsia. Ympyräradan tapauksessa periapsin argumenttia ei ole määritelty. [7, s. 60]

Jos radan inkliinaatio on hyvin pieni, niin rata on lähellä ekvaattorirataa, eikä nousevan solmun suuntaa ole tarkkaan määritelty. Tällöin on usein käytännöllisempää hyödyntää periapsin argumentin sijasta *periapsin pituutta* (engl. *longitude of periapsis*) [35, s. 179; 20, s. 117],

$$\varpi = \Omega + \omega. \quad (6.56)$$

Periapsin pituus on summa nousevan solmun pituudesta ja periapsin argumentista. Kulma mitataan osittain perustasoja ja osittain ratatasoa pitkin, eikä se siksi ole puhdas avaruuskulma [35, s. 179; 45, s. 183].

Jos radan eksentrisyys on hyvin pieni, niin rata on lähellä ympyrärataa, eikä periapsin suuntaa ole tarkkaan määritelty. Tällöin on käytännöllisempää hyödyntää ratapisteen luonnollisen anomalian v sijasta ratapisteen *leveyden argumenttia* (engl. *argument of latitude*) [54, s. 80; 45, s. 184; 20, s. 50],

$$u = \omega + v. \quad (6.57)$$

Leveyden argumentti on summa periapsin argumentista ja luonnollisesta anomaliasta. Kulma on nousevan solmun ja ratapisteen välinen kulma, ja se on kokonaan ratatasossa [43, s. 120].

Ekvaattori- ja ympyräratojen aiheuttamat singulariteetit laskennassa tuovat esiin Keplerin rataelementtien ongelmat [7, s. 83]. Ongelmatapauksissa Seeber [54, s. 81–2]

ohjeistaa käyttämään Hillin tai Delaunayn *epäsingulaarisia rataelementtejä* (engl. *non-singular elements*), joilla vältetään singulariteetit laskennassa.

6.6 Pyörivä keskuskappale

Kun keskuskappale on pyörimisliikkeessä, voidaan sille määrittää hetkellinen pyörimisakseli. Keskuskappaleen pyörimisakselin olemassaolo johtaa siihen, että viitekoordinaatistoksi on olemassa erityisvalinta, keskuskappaleeseen liittyvä ekvaattorikoordinaatisto. Tässä alaluvussa määritellään pyörimisliikkeessä olevaan taivaankappaleeseen liittyvä ekvaattorikoordinaatisto.

Kun ekvaattorikoordinaatisto ja sen määrittelyyn tarvittavat käsitteet ovat esitelty, tarkastellaan nousevan solmun pituuden kahta varianttia. Nämä variantit ovat RAAN (nousevan solmun rektaskensio) ja LAN (nousevan solmun longitudi), jotka mitataan joko kevättasauspisteestä tai Maan nollameridiaanista ekvaattoritasoa pitkin sen sijaan, että ne mitattaisiin mielivaltaisen viitekoordinaatiston perussuunnasta. Nämä käsitteet mahdollistavat radan asennon määrittämisen suhteessa keskuskappaleen asentoon tai pintaan.

Ekvaattoritaso, ekvaattori ja navat

Seuraavaksi esitellään taivaankappaleeseen liittyvät käsitteet ekvaattoritaso, ekvaattori ja navat. Käsitteiden määritelmät ovat luotu puhtaasti tämän työn tarkoituksia varten, eikä vastaavia määritelmiä löydy käytetystä lähdekirjallisuudesta. Määritelmät nojaavat seuraaviin taivaankappaleiden peruskäsitteisiin, joiden määritelmät jätetään avoimiksi: pyörimisakseli, massakeskipiste ja pinta.

Ekvaattoritaso (engl. *equatorial plane*) on taivaankappaleeseen liittyvä taso, joka (i) kulkee taivaankappaleen massakeskipisteen kautta ja (ii) on kohtisuorassa taivaankappaleen pyörimisakseliin.

Taivaankappaleen *ekvaattori* (engl. *equator*) on sen pinnan ja ekvaattoritason leikkauskäyrä. Ekvaattori jakaa taivaankappaleen pohjoiseen ja eteläiseen hemisfääriin. Pohjoinen hemisfääri määryytyy tässä työssä taivaankappaleen pyörimisakselista oikean käden säännön perusteella.

Taivaankappaleen *navat* (engl. *poles*) ovat sen pinnan ja pyörimisakselin leikkauspisteet, joita kutsutaan pohjoisnavaksi ja etelänavaksi. Pohjoisnava määryytyy tässä työssä taivaankappaleen pyörimisakselista oikean käden säännön perusteella.

Maan pyörimisakseli ja sen myötä Maan ekvaattoritaso eivät pysy paikoillaan ympäröivään avaruuteen nähden. Tämä johtuu muun muassa Kuun ja Auringon vetovoimien kohdistumisesta *päiväntasaajan pullistumaan* (engl. *equatorial bulge*). Voimien kokonaisvaikutus on pyörimisakselin rotaatio, joka koostuu sekä sekulaarisesta komponentista (prekessio) että jaksollisesta komponentista (nutaatio). [54, s. 18]

Maan ekvaattoritason ja ratatason eli ekliptikan välistä kulmaa kutsutaan *ekliptikan kaltevuudeksi* (engl. *obliquity of the ecliptic*). Sen suuruus on noin $23^{\circ}26'$. [35, s. 44]

Taivaanpallo

Seuraavaksi määritellään taivaanpallo sekä sen ekvaattori ja navat. Nämä ovat taivaanpallon vastineet maanpäällisille käsitteille. Ne saadaan yksinkertaisesti projisoimalla maanpäälliset pisteet ja käyrät taivaanpallolle.

Taivaanpallo (engl. *celestial sphere*) on kuvitteellinen hyvin suuri pallo, jonka keskipisteessä on Maa [35, s. 33]. Täsmällisemmin määriteltynä taivaanpallon säde on ääretön, jolloin taivaanpallon keskipisteenä voidaan pitää Maan sijasta aivan yhtä hyvin mitä tahansa muuta pistettä [7, s. 56].

Taivaanpallon ekvaattori (engl. *celestial equator*) on Maan ekvaattoritason ja taivaanpallon leikkauskäyrä [2, s. 120]. Se leikkaa taivaanpallon kahdeksi puolipalloksi, pohjoiseen ja eteläiseen hemisfääriin [2, s. 216].

Taivaanpallon navat (engl. *celestial poles*) ovat Maan pyörimisakselin ja taivaanpallon leikkauspisteet [44, s. 78]. Pohjoisen hemisfäärin leikkauspiste on *taivaanpallon pohjoisnapa* (engl. *celestial north pole*), ja eteläisen hemisfäärin leikkauspiste *taivaanpallon etelänapa* (engl. *celestial south pole*) [20, s. 102]. Taivaanpallon pohjoisnapa sijaitsee vajaan asteen päässä Pohjantähdestä [35, s. 36].

Taivaanpallon pistettä, joka on suoraan Maan pinnalla olevan havaitsijan yläpuolella, kutsutaan *zeniitiksi* (engl. *zenith*). Vastaavasti taivaanpallon pistettä, joka on suoraan havaitsijan alapuolella, kutsutaan *nadiiriksi* (engl. *nadir*). [2, s. 120].

Ekvaattorikoordinaatisto

Ekvaattorikoordinaatisto (engl. *equatorial coordinate frame*) on mikä tahansa koordinaatisto seuraavin kiinnityksin: (1) origo on taivaankappaleen massakeskipiste, (2) perustaso on taivaankappaleen ekvaattoritaso, (3) perussuunta on taivaanpallon ekvaattorin mielivaltainen piste, jota kutsutaan kevättasauspisteeksi, ja (4) perustason positiivinen kiertosuunta on taivaankappaleen pyörimisliikkeen mukainen.

Perussuunnaksi valittua taivaanpallon ekvaattorin kiinteää pistettä kutsutaan *kevättasauspisteeksi* (engl. *vernal equinox*) [35, s. 36]. Kevättasauspistettä merkitään *Oinaan* (engl. *Aries*) merkillä Υ , koska Maan kevättasauspiste osoitti aikoinaan Oinaan tähdistöön [7, s. 54]. Englanninkielisessä kirjallisuudessa, kuten esimerkiksi teoksissa [20, s. 103] ja [52, s. 74], kevättasauspistettä kutsutaan yhä toisinaan nimellä *first point of Aries*. Samasta syystä päinvastaista suuntaa merkitään *Vaa'an* (engl. *Libra*) merkillä Ω [52, s. 79]. Oinaan ja Vaa'an merkit ovat Unicode-merkistön sekalaisen symbolien lohossa [58], ja niiden koodit ovat U+2648 (Oinas) ja U+264E (Vaaka).

Perussuunta voidaan valita taivaanpallon ekvaattorilta mielivaltaisesti, mutta on tarkoituksenmukaista valita se tietyllä tavalla. Erityisesti keskuskappaleen ollessa Maa määritetään kevättasauspiste Auringon havaittuna suuntana sen noustessa vuotuisessa kulussaan ekvaattoritason eteläpuolelta pohjoispuolelle. Tämä suunta on Maan ratatason eli ekliptikan ja Maan ekvaattoritason leikkaussuoran kanssa yhdensuuntainen. [35, s. 36, 43]

Tärkein ekvaattorikoordinaatisto on geosentrinen ekvaattorikoordinaatisto, jossa origona on Maan massakeskipiste, ja perussuuntana Maan kevättasauspiste [7, s. 55].

Jatkossa ekvaattorikoordinaatisto samaistetaan tarkoittamaan tätä geosentristä koordinaatistoa, mikäli ei erikseen mainita toisin.

Ekvaattorikoordinaatistossa taivaankappaleen tai muun kohteen suunta voidaan ilmoittaa kahdella napakulmalla. Kevättasauspisteestä vastapäivään mitattu, ekvaattoritasossa oleva kulma on *rektaskensio* (engl. *right ascension*). Ekvaattoritasosta kohdittuun pohjoista tai etelää kohden mitattu kulma on *deklinaatio* (engl. *declination*). Deklinaatio on positiivinen ekvaattoritason pohjoispuolella ja negatiivinen eteläpuolella. Näitä kulmakoordinaatteja käytetään erityisesti tähtien luettelointiin. [7, s. 56]

Kuvan 6.18 koordinaatisto on ekvaattorikoordinaatisto. Perussuunta eli x -akselin positiivinen suunta osoittaa kuvitteelliseen kevättasauspisteeseen. Perustaso eli xy -taso on keskuskappaleen kuvitteellinen ekvaattoritaso, ja z -akselin positiivinen suunta on valittu kuvitteellisen pyörimisakselin mukaiseksi. Koordinaatiston y -akselin positiivinen suunta täydentää koordinaatiston oikeakätiseksi.

Suora rata ja retrogradinen rata

Jos kiertolainen kulkee keskuskappaleen pyörimisliikkeen suuntaisesti (eli pyörimisakselin suhteen vastapäivään), sanotaan radan olevan *suora* tai *progradinen* (engl. *direct, prograde*). Jos kiertolainen kulkee keskuskappaleen pyörimisliikkeen vastaisesti (eli pyörimisakselin suhteen myötäpäivään), sanotaan radan olevan *taannehtiva* tai *retrogradinen* (engl. *retrograde*). Suoralla radalla kiertolainen kulkee lännestä itään ja retrogradisella idästä länteen. [2, s. 185, 437]

Aurinkokunnan kaikki planeetat kiertävät Aurinkoa sen pyörimisliikkeen suuntaisesti [35, s. 240] eli kaikki ovat suorilla radoilla. Yleistäen *retrogradinen liike* (engl. *retrograde motion*) tarkoittaa taivaankappaleiden muodostamassa systeemissä vallitsevan yleisen kiertosuunnan vastaista liikettä [2, s. 502]. Vastaavasti yleisen kiertosuunnan myötäistä liikettä sanotaan *suoraksi liikkeeksi* (engl. *direct motion*). Aurinkokunnassa on kaksi planeettaa, Uranus ja Venus, joiden pyörimisliike akselinsa ympäri on retrogradista [35, s. 240].

Nousevan solmun rektaskensio (RAAN)

Nousevan solmun rektaskensio (engl. *right ascension of ascending node*), Ω , lyhennetään RAAN, on kevättasauspisteen ja nousevan solmun välinen kulma mitattuna ekvaattoritasoa pitkin vastapäivään. Tämä määritelmä pohjautuu Misran ja Engen [43, s. 125] käyttämään määritelmään. Nousevan solmun rektaskensio vastaa nousevan solmun pituutta, kun viitekoordinaatisto on keskuskappaleen ekvaattorikoordinaatisto.

Poutanen [49, s. 120] tarkentaa nousevan solmun rektaskensiota seuraavasti. Rektaskensiota käytetään, kun kyse on Maan kiertolaisista ja kulma mitataan ekvaattoritasoa pitkin, mutta Aurinkokunnan muiden planeettojen kulma mitataan ekliptikkaa pitkin.

Kun nousevan solmun suunta mitataan ekliptikkaa pitkin, käytetään kulmasta nimeä *nousevan solmun ekliptinen pituus* (engl. *ecliptic longitude of ascending node*). Ero nousevan solmun ekliptisen pituuden ja rektaskension välillä on käytetyssä perustasossa. Ensimmäisessä se on ekliptika ja jälkimmäisessä Maan ekvaattoritaso.

Tässä työssä, Poutasen tarkennuksesta huolimatta, nousevan solmun rektaskensiota ei rajoiteta pelkästään Maan ekvaattoritasoon liittyväksi suureeksi. Sen sijaan tässä työssä nousevan solmun rektaskensio voidaan määrittää mille tahansa pyörimisliikkeessä olevalle taivaankappaleelle, jolle on olemassa hyvin määritelty ekvaattorikoordinaatisto.

Nousevan solmun longitudi (LAN)

Nousevan solmun longitudi (engl. *longitude of ascending node*), Ω , lyhennetään LAN, on keskuskappaleen pyörimisliikkeeseen sidotun nollameridiaanin ja nousevan solmun välinen kulma mitattuna ekvaattoritasoa pitkin vastapäivään. Tämä määritelmä pohjautuu jälleen Misran ja Engen [43, s. 125] käyttämään määritelmään. Näin määriteltynä kulmasuure vastaa itse asiassa nousevan solmun maantieteellistä pituutta.

Nousevan solmun pituus ja longitudi ovat ekvivalentteja, kun viitekoordinaatisto on keskuskappaleen pyörimisliikkeeseen sidottu ekvaattorikoordinaatisto. Pyörimisliikkeeseen sidottu ekvaattorikoordinaatisto on itse asiassa terrestrinen koordinaatisto, minkä vuoksi nousevan solmun longitudi vastaa nousevan solmun maantieteellistä pituutta.

Englanninkielisessä kirjallisuudessa nousevan solmun longitudia kutsutaankin tavallisesti nousevan solmun pituudeksi. Seeberin [54, s. 224] mukaan tämä on yleistymässä oleva nimeämiskäytäntö. Tällöin nousevan solmun pituus voi tarkoittaa joko Maan ekvaattoritasoon tai mielivaltaiseen viitekoordinaatiston perustasoon sidottua kulmasuureta. Yleensä asiayhteydestä ilmenee, kumpaa merkitystä tarkoitetaan.

Tässä työssä on kuitenkin pyritty käsitteelliseen selkeyteen erottamalla nousevan solmun pituus ja longitudi toisistaan nimellisesti. Nousevan solmun pituus varataan tarkoittamaan mielivaltaiseen viitekoordinaatistoon liittyvää suureta. Nousevan solmun longitudi on tämän alakäsite, joka liittyy vain tietyllä tavalla valittuun viitekoordinaatistoon. Näin ollen nousevan solmun longitudista voidaan aina puhua nousevan solmun pituutena, muttei välttämättä päinvastoin.

Longitudi on vierasperäinen synonyymi pituudelle, ja synonyymien vierasperäisyyden on tarkoitus korostaa, että kyseessä on nimenomaan nousevan solmun maantieteellinen pituus. Tämä lähestymistapa on luultavasti hieman epäortodoksinen, mutta tavoitteen kannalta oikeutettu ja hyödyllinen. Suomenkielisistä lähteistä ainakin Poutanen [49, s. 141] on myös päättänyt käyttämään tätä samaa nimellistä erottelua käsitteille.

Tämä nimellinen erottelu on mahdollista vain suomen kielessä, jossa longitudia voidaan käyttää pituuden synonyymia. Englannin kielessä tämä ei ole mahdollista. Sen vuoksi tässä työssä ehdotetaan käsitteen vaihtoehtoiseksi nimeksi *nousevan solmun maantieteellinen pituus* (engl. *terrestrial longitude of ascending node*).

GPS käyttää nimenomaan nousevan solmun longitudia (LAN), eikä nousevan solmun rektaskensiota (RAAN) [43, s. 125]. Tämä on perusteltua, koska GPS:n käyttäjät ovat todennäköisesti enemmän kiinnostuneita sijainnistaan suhteessa Maahan kuin ympäröivään avaruuteen.

7 HÄIRIÖTÖN RATALIIKE

Luvun tavoitteena on muodostaa häiriöttömän rataliikkeen matemaattinen malli ja koota työn keskeiset yhtälöt. Keskeiset yhtälöt kootaan kolmeksi laskenta-algoritmiksi, jotka osoittavat, että tilavektori, integroimisvakiot ja Keplerin rataelementit ovat keskenään ekvivalenteja ellipsin erikoistapauksessa.

Aluksi määritellään tarpeellisia peruskäsitteitä (luku 7.1). Erityisesti määritellään, mitä tarkoitetaan häiriöttömällä rataliikkeellä ja rataliikkeen matemaattisella mallilla. Seuraavaksi kerrataan Keplerin ongelman ratkaisu (luku 7.2). Häiriöttömän rataliikkeen malli saadaan Keplerin ongelmasta, minkä vuoksi kertaus keskittyy siihen, kuinka aikamuuttuja ja sijaintimuuttuja kytkeytyvät toisiinsa. Sen jälkeen esitellään häiriöttömän rataliikkeen matemaattinen malli (luku 7.3). Keplerin ongelman ratkaisu tiivistetään neljäksi yhtälöksi, jotka ovat häiriöttömän rataliikkeen matemaattinen malli. Lopuksi työn keskeiset yhtälöt kootaan kolmeksi laskenta-algoritmiksi (luku 7.4). Nämä algoritmit näyttävät, kuinka tilavektori, integroimisvakiot ja Keplerin rataelementit ovat keskenään ekvivalenteja.

7.1 Peruskäsitteitä

Erityisesti taivaanmekaniikassa ja astronomiassa häiriöttömänä rataliikkeenä pidetään tavallisesti Keplerin liikettä eli kahden massajakaumaltaan pallosymmetrisen kappaleen liikettä suljetussa systeemissä, jossa ainoat vuorovaikutusvoimat ovat kappaleiden keskinäiset gravitaatiovoimat [44, s. 304; 7, s. 385; 9, s. 209; 54, s. 83]. Tämä on keskeisin motivaatio tässä työssä käytettävälle häiriöttömän rataliikkeen määritelmälle, joka pyrkii esittämään saman asian ytimekkäämmin ja sopivasti yleistäen.

Häiriöttömän rataliikkeen olemassaolo implikoi, että on olemassa myös häiritty rataliike. Tässä työssä näiden käsitteiden määritelmät syntyvät määrittelemällä ensin, mitä häiriövoimalla tarkoitetaan, ja muotoilemalla sen jälkeen häiriöttömän rataliikkeen määritelmä tavalla, joka jättää häiriövoimat huomioimatta.

Kun häiriötön liike on määritelty, esitellään lopuksi, mitä matemaattinen malli tarkoittaa. Tätä käsitettä sovelletaan rataliikkeeseen, jolloin saadaan rataliikkeen matemaattisen mallin määritelmä.

Rataliike

Määritellään, mitä tarkoitetaan rataliikkeellä. Käsitteen täytyy soveltua yläkäsitteeksi sekä häiriöttömälle että häiritylle rataliikkeelle, mistä johtuen määritelmän täytyy olla varsin laeva.

Rataliike (engl. *orbital motion*) tarkoittaa tässä työssä mitä tahansa liikettä, joka syntyy, kun pistemäiseen kappaleeseen vaikuttaa ajasta riippumattomia voimia. Kappaleeseen vaikuttavien voimien konservatiivisuudella ei ole väliä, eikä kappaleen liikkeestä muodostuvan radan tarvitse olla suljettu kiertorata. Määritelmä soveltuu siten sekä häiriöttömälle että häiritylle rataliikkeelle. Häirityssä rataliikkeessä voidaan ottaa huomioon myös epäkonservatiivisia kontaktivoimia kuten ilmakehän kitka. Määritelmän rajoituksesta kuitenkin seuraa, että fysikaalisen systeemin on oltava autonominen. Tämä poissulkee epäautonomiset systeemit, joissa esiintyy ajasta eksplisiittisesti riippuvia voimia kuten työntövoima. Tuloksena rataliike tarkoittaa siten tietyssä mielessä pelkästään luonnollisesti syntyvää liikettä.

Häiriö, häiriövoima ja -kiihtyvyys

Määritellään ensin häiriö varsin yleisesti. Sen jälkeen häiriön pohjalta määritellään häiriövoima ja -kiihtyvyys tavalla, joka soveltuu erityisesti taivaanmekaniikkaan ja tähän työhön. Häiriövoiman määritelmän avulla rataliikkeen käsite voidaan osittaa sekä häirittyyn että häiriöttömään rataliikkeeseen.

Häiriö (engl. *perturbation*) on poikkeama nimellisarvosta [7, s. 385]. Tilanteesta ja asiayhteydestä riippuen häiriö voi esiintyä esimerkiksi kappaleen sijainnin ja nopeuden muodostamassa tilavektorissa, kappaleen kokemassa kiihtyvyydessä tai kappaleeseen vaikuttavassa voimassa.

Kappaleeseen vaikuttava *häiriövoima* (engl. *perturbing force*) on tässä työssä jokin muu voima kuin käänteisen neliön lakia noudattava keskeisvoima. Annettu määritelmä on tarkennus lähteen [54, s. 83] käyttämästä määritelmästä. Tässä työssä käytettävä määritelmä pyrkii varmistamaan, että seuraavat voimat voidaan tulkita häiriövoimiksi: (i) keskuskappaleen massajakauman epäpallosymmetrisyydestä aiheutuva painovoiman komponentti, (ii) kolmansien kappaleiden vuorovaikutusvoimat, ja (iii) epäkonservatiiviset voimat kuten ilmakehän kitka. Kappaleen *häiriökiihtyvyys* (engl. *perturbing acceleration*) on kiihtyvyyttä, joka syntyy kappaleeseen vaikuttavasta häiriövoimasta.

Häiriötön rataliike ja häiritty rataliike

Seuraavaksi määritellään häiriötön rataliike, joka seuraa loogisella tavalla häiriövoiman määritelmästä sellaisena liikkeenä, jossa häiriövoimia ei huomioida. Häiriöttömän rataliikkeen määritelmän vastakohtasta vuorostaan seuraa häirityn rataliikkeen määritelmä.

Häiriötön rataliike (engl. *unperturbed orbital motion*) tarkoittaa tässä työssä liikettä, joka syntyy, kun pistemäiseen kappaleeseen vaikuttaa käänteisen neliön lakia noudattava keskeisvoima. Määritelmällisesti häiriötön rataliike voidaan kuvata differentiaaliyhtälön (3.15) tavoin yhtälöllä

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\mu \frac{\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|^3}, \quad (7.1)$$

jossa μ on jokin vakio. Aikaisemman teorian perusteella (luku 3.2) tämä differentiaaliyhtälö on matemaattinen kuvaus Keplerin ongelmasta, jonka ratkaisua kutsutaan Kep-

lerin liikkeeksi. Häiriötön rataliike on siten Keplerin liikettä, ja muodoltaan häiriötön rata on kartioleikkaus.

Häiritty rataliike (engl. *perturbed orbital motion*) tarkoittaa tässä työssä liikettä, joka syntyy, kun pistemäiseen kappaleeseen vaikuttaa käänteisen neliön lakia noudattavan keskeisvoiman lisäksi muita voimia. Määritelmällisesti häiriötön rataliike voidaan kuvata differentiaaliyhtälöllä,

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\mu \frac{\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|^3} + \mathbf{a}_d. \quad (7.2)$$

Yhtälön oikean puolen ensimmäinen termi on käänteisen neliön lakia noudattava keskeisvoima, ja jälkimmäinen termi on muiden voimien yhteenlaskettu summa. Jälkimmäistä termiä \mathbf{a}_d voidaan kutsua edellä annettujen määritelmien mukaisesti kokonaisu-häiriökiihtyvyydeksi tai lyhyemmin pelkästään häiriökiihtyvyydeksi. Häirityn rataliikkeen tarkastelu on rajattu työn ulkopuolelle.

Rataliikkeen matemaattinen malli

Määritellään ensin, mitä tarkoitetaan matemaattisella mallilla. Sen jälkeen määritellään vielä, mitä tarkoitetaan rataliikkeen matemaattisella mallilla.

Matemaattisen mallin määrittely alkaa parhaalla lähdekirjallisuudesta löydettyllä määritelmällä. Bellomo ja Preziosi [8, s. 2–4] määrittelevät, että matemaattinen malli on yhtälö tai joukko yhtälöitä, joiden ratkaisu antaa riippuvan muuttujan, eli tilamuuttujan, evoluution aika-avaruudessa. He tarkentavat määritelmässään, että tilamuuttujan evoluutio aika-avaruudessa on fysikaalinen käytös, jota malliin liittyvä fysikaalinen järjestelmä noudattaa.

Edellä annettu Bellomon ja Preziosin määritelmä matemaattiselle mallille on huomattavasti yksityiskohtaisempi kuin mitä tämä työ edellyttää. Määritelmän tekninen yksityiskohtaisuus hankaloittaa määritelmän tiivistä esittämistä ilman kielellistä kömpelyyttä. Tässä työssä matemaattiselle mallille käytetään selvästi yksinkertaisempaa määritelmää, joka voidaan kuitenkin tulkita Bellomon ja Preziosin määritelmän ytimekkäänä yleistyksenä.

Matemaattinen malli (engl. *mathematical model*) tarkoittaa tässä työssä yhtälöitä, jotka määrittävät kiinnostuksen kohteena olevien muuttujien väliset relaatiot joko implisiittisesti tai eksplisiittisesti. Määritelmä ei nosta riippuvaa muuttujaa eikä aikaevoluutiota erityisasemaan, vaan abstrahoi nämä ”kiinnostaviksi” muuttujiksi. Lisäksi määritelmä ei ota kantaa matemaattisen mallin ja fysikaalisen järjestelmän välisen suhteen luonteeseen. Nämä seikat yksinkertaistavat Bellomon ja Preziosin määritelmää huomattavasti.

Rataliikkeen matemaattinen malli (engl. *mathematical model of orbital motion*) tarkoittaa tässä työssä matemaattista mallia eli yhtälöjoukkoa, joka määrittää ajan t ja rataliikkeessä olevan kappaleen sijainnin \mathbf{r} välisen kuvauksen joko implisiittisesti tai eksplisiittisesti. Rataliikkeen matemaattisesta mallista voidaan aina ratkaista sijainti,

mutta ei välttämättä suljetussa muodossa. Koska sijainti on kuitenkin ratkaistavissa, voidaan rataliikkeen matemaattinen malli aina esittää yhtälönä

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t; a_1, \dots, a_n), \quad (7.3)$$

jossa funktion argumentti t on aika, ja funktion parametrit a_1, \dots, a_n ovat matemaattisen mallin edellyttämät parametrit. Määritelmä soveltuu sekä häiriöttömälle että häiritylle rataliikkeelle, koska molemmat ovat määritelmällisesti rataliikettä.

Rataliikkeen matemaattisen mallin edellyttämiä parametreja kutsutaan tässä työssä myös nimellä *rataparametrit* (engl. *orbit parameters*). Rataparametrien arvojen kiinnitys yksilöi tietyn radan kyseisessä mallissa. Voidaan sanoa, että kiinnitetty rataparametrit ovat siten *radan esitys* (engl. *orbit representation*) tietyn mallin mukaan.

7.2 Keplerin ongelman ratkaisu

Keplerin ongelman ratkaisu on määritelmällisesti kuvaus häiriöttömästä rataliikkeestä. Tässä työssä Keplerin ongelman liikeyhtälöksi saatiin differentiaaliyhtälö (3.15),

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\mu \frac{\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|^3}.$$

Differentiaaliyhtälö ratkaistiin kuudella integraalilla (luku 4), mutta tässä työssä ei ole vielä täsmennetty, kuinka nämä integraalit tarjoavat kuvauksen $\mathbf{r}(t)$ häiriöttömästä rataliikkeestä.

Tässä alaluvussa kerrataan ensin tiivistetysti, kuinka Keplerin ongelman integraalit muodostettiin. Sen jälkeen tarkastellaan, kuinka integraalien avulla voidaan muodostaa kuvaus $\mathbf{r}(t)$ sijainnista \mathbf{r} ajan t funktiona. Tämä tehdään kertaamalla integraalit keskittyen niiden sisältämiin relaatioihin. Integraaleihin sisältyvien relaatioiden tarkastelun kautta käy viimein ilmi selkeällä tavalla, kuinka aika t ja sijainti \mathbf{r} kytkeytyvät toisiinsa.

Integraalit

Kerrataan lyhyesti tässä työssä esitetyt 6 integraalia, jotka löydettiin Keplerin ongelman liikeyhtälölle (3.15). Kertauksessa painotetaan erityisesti yhtälöiden ja integraalien välisiä seuraussuhteita eli mikä yhtälö seurasi mistäkin yhtälöstä integroimalla, ja integroitiinko yhtälö yhdesti vai kahdesti.

Integraali 1 (luku 4.2), eli pyörimismäärävektori \mathbf{h} , seuraa liikeyhtälöstä. Suoralla integroinnilla ajan suhteen saadaan yhtälö (4.6),

$$\mathbf{h} = \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}},$$

jossa pyörimismäärävektori \mathbf{h} on integroimisvakio. Tämä integraali rajoittaa sijainnin ja nopeuden tasoon, jonka asento määräytyy pyörimismäärävektorista. Yhtälön (4.6) nojalla on perusteltua siirtyä ratakoordinaatistoon, jossa $+z$ -akseli on samansuuntainen vektorin \mathbf{h} kanssa.

Integraali 2 (luku 4.3), eli eksentrisyysvektori \mathbf{e} , seuraa liikeyhtälöstä ja integraalin 1 pyörimismäärävektorista. Suoralla integroinnilla ajan suhteen saadaan yhtälö (4.8),

$$\mathbf{e} = -\frac{1}{r}\mathbf{r} - \frac{1}{\mu}\mathbf{h} \times \dot{\mathbf{r}},$$

jossa eksentrisyysvektori \mathbf{e} on integroimisvakio. Integraalit 1 ja 2 eli pyörimismäärävektori \mathbf{h} ja eksentrisyysvektori \mathbf{e} eivät ole keskenään riippumattomia, vaan niitä kytkee toisiinsa yhtälö (4.12),

$$\mathbf{h} \cdot \mathbf{e} = 0.$$

Tämän mukaan integroimisvakioiden \mathbf{h} ja \mathbf{e} tulee olla kohtisuorassa toisiinsa. Yhtälö (4.12) vähentää keskenään riippumattomien liikevakioiden määrää yhdellä, minkä johdosta integraalit 1 ja 2 sisältävät yhteensä 5 liikevakioita. Teorian perusteella (luku 4.1) itsenäisiä, ajasta riippumattomia liikevakioita ei ole mahdollista löytää enempää, vaan uusien, ajasta riippumattomien liikevakioiden täytyy olla riippuvia jo löydettyistä liikevakioista.

Integraalit 1 ja 2 käsittävät yhteensä 5 ajasta riippumatonta liikevakioita, mikä riittää teorian (sivulla 63) mukaan määrittämään ratkaisukäyrän 3-ulotteiselle 2. kertaluvun differentiaaliyhtälölle, mutta ei sitä, kuinka ratkaisu etenee käyrällä ajan funktiona. Integraalien 1 ja 2 avulla on mahdollista johtaa napasäteen ja napakulman toisiinsa kytkevä yhtälö (4.20),

$$r = \frac{p}{1 + e \cos(\theta_r - \theta_e)},$$

jossa kartioleikkauksen semi-latus rectum $p = h^2 / \mu$ yhtälön (4.21) mukaisesti. Yhtälössä (4.20) esiintyvät integroimisvakiot e ja θ_e ovat vastaavasti eksentrisyysvektorin napasäde ja napakulma ratakoordinaatiston perustasossa. Ratkaisukäyrä on määrätty yhtälön (4.20) nojalla, mutta yhtälö ei määritä, kuinka ratkaisu etenee käyrällä ajan funktiona.

Integraali 3 (luku 4.4), eli mekaaninen ominaisenergia E , seuraa liikeyhtälöstä. Suoralla integroinnilla ajan suhteen saadaan yhtälö (4.23),

$$E = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{r}}^2 - \frac{\mu}{r},$$

jossa mekaaninen ominaisenergia E on integroimisvakio. Koska uusia, ajasta riippumattomia integroimisvakioita ei ole enää mahdollista löytää, täytyy integroimisvakion E olla riippuvainen jo löydettyistä integroimisvakioista. Integraalien 1, 2 ja 3 välinen riippuvuus näytettiin toteen johtamalla yhtälö (4.34),

$$E = \frac{\mu^2}{2h^2}(e^2 - 1),$$

joka kytkee integroimisvakion E aikaisempiin integroimisvakioihin h ja e .

Integraalit 2 ja 3 eivät ole välttämättömiä Keplerin ongelman ratkaisemiseksi, vaan ne voidaan ohittaa. Keplerin ongelman ratkaisemiseksi riittää, että integraalin 1 pyörimismäärävektori \mathbf{h} löydetään, jonka jälkeen ongelmaa siirrytään tarkastelemaan sopivasti valittuun sylinterikoordinaatistoon. Ongelman ratkaisua voidaan jatkaa ikään kuin integraaleja 2 ja 3 ei olisi muodostettu.

Integraalin 1 nojalla on perusteltua etsiä liikeyhtälön (3.15) esitys sellaisessa sylinterikoordinaatistossa, jonka $+z$ -akseli on samansuuntainen pyörimismäärävektorin \mathbf{h} kanssa. Sopivasti valitussa sylinterikoordinaatistossa liikeyhtälön esitykseksi saadaan differentiaaliyhtälö (4.98),

$$(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\mathbf{u}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\mathbf{u}_\theta = -\frac{\mu}{r^2}\mathbf{u}_r.$$

Sylinterikoordinaatistossa differentiaaliyhtälö on trivიაali kiihtyvyyden z -koordinaatin osalta. Koska kantavektorit ovat keskenään lineaarisesti riippumattomia, voidaan differentiaaliyhtälöstä (4.98) erottaa kantavektorikohtaiset yhtälöt. Saadaan sekä radiaalinen liikeyhtälö (4.99) että tangentialinen liikeyhtälö (4.100), jotka ovat vastaavasti

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -\frac{\mu}{r^2},$$

$$2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = 0.$$

Yhdessä nämä yhtälöt muodostavat kytketyn differentiaaliyhtälösysteemin. Sylinterikoordinaatistoon siirtymisen johdosta 3-ulotteinen 2. kertaluvun differentiaaliyhtälö on redusoitu 2-ulotteiseksi 2. kertaluvun differentiaaliyhtälöksi.

Integraali 4 (luku 4.6), eli pinnanopeus $h/2$, on tangentialisen liikeyhtälön ensimmäinen integraali. Tangentialisen liikeyhtälön suora integrointi ajan suhteen johtaa yhtälöön (4.102),

$$h = r^2\dot{\theta},$$

jossa h on pinnanopeuden määrittävä integroimisvakio. Tämä yhtälö on tangentialisen liikeyhtälön ensimmäinen integraali, ja sitä hyödynnetään sekä (i) muuttujan θ eliminointiin radiaalisesta liikeyhtälöstä että (ii) muuttujanvaihtoon $t \rightarrow \theta$ derivointiopeeraattoreissa.

Integraali 5 (luku 4.7), eli eksentrisyys e ja perisentrikulma θ_0 , seuraa radiaalisesta liikeyhtälöstä kahdella integroinnilla. Aluksi integraalin 4 yhtälöstä (4.102) johdettiin yhtälö (4.110) napakulman aikaderivaatalle $\dot{\theta}$ muuttujan r lausekkeena. Seuraavaksi muuttujan $\dot{\theta}$ esitys (4.110) sijoitettiin radiaaliseen liikeyhtälöön (4.99). Tämä eliminoi muuttujan $\dot{\theta}$ radiaalisesta liikeyhtälöstä ja purkaa kytkennän. Jäljelle jäi yhden muuttujan, napasäteen r , epälineaarinen 2. kertaluvun differentiaaliyhtälö (4.111),

$$\ddot{r} - \frac{h^2}{r^3} = -\frac{\mu}{r^2}.$$

Differentiaaliyhtälön linearisointi tehdään vaihtamalla sekä (i) riippuva muuttuja $r \rightarrow u$ että (ii) riippumaton muuttuja $t \rightarrow \theta$. Muuttujanvaihto $r \rightarrow u$ tehdään käyttäen yhtälöä (4.112),

$$r = u^{-1}.$$

Muuttujanvaihto $t \rightarrow \theta$ tehdään hyödyntämällä integraalin 4 yhtälöstä (4.102) ja muuttujanvaihdon yhtälöstä (4.112) johdettua yhtälöä (4.114),

$$\frac{d}{dt} = hu^2 \frac{d}{d\theta},$$

joka mahdollistaa aikaderivaatan d/dt korvaamisen koordinaattiderivaatalla $d/d\theta$. Muuttujanvaihtojen (4.112) ja (4.114) jälkeen ratkaistavana on lineaarinen, epähomogeeninen 2. kertaluvun differentiaaliyhtälö (4.120),

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = -\frac{\mu}{h^2}.$$

Tämä voidaan ratkaista tavanomaisin menetelmin, jolloin ratkaisuksi saadaan yhtälö (4.121),

$$u = \frac{\mu}{h^2} (1 + e \cos(\theta - \theta_0)),$$

jossa eksentrisyys e ja perisentrikulma θ_0 ovat integroimisvakioita. Ratkaisulle suoritetaan käännteinen muuttujanvaihto $u \rightarrow r$ ratkaisemalla yhtälö (4.112) muuttujan u suhteen. Tuloksena on napasäteen r ja napakulman θ toisiinsa kytkevä yhtälö (4.122),

$$r = \frac{p}{1 + e \cos(\theta - \theta_0)},$$

jossa kartioleikkauksen semi-latus rectum $p = h^2 / \mu$ yhtälön (4.123) mukaisesti.

Integraali 6 (luku 4.8), eli perisentriaika t_p , seuraa radiaalisen liikeyhtälön ensimmäisestä integraalista – eli integraalista 4 – yhdellä integroinnilla. Aluksi integraalin 5 yhtälön (4.122) mukainen muuttujan r esitys muuttujan θ lausekkeena sijoitetaan integraalin 4 yhtälöön (4.102). Tämä eliminoi muuttujan r yhtälöstä ja purkaa kytkennän. Jäljelle jää epälineaarinen 1. kertaluvun separoituva differentiaaliyhtälö, jossa riippuvana muuttujana on napakulma θ ja riippumattomana aika t . Muuttujien separointi johtaa differentiaaliyhtälöön (4.126),

$$\frac{\mu^2}{h^3} dt = \frac{d\theta}{(1 + e \cos(\theta - \theta_e))^2}.$$

Separoitu, epälineaarinen differentiaaliyhtälö ratkaistaan suoraan integroimalla. Yhtälön (4.126) oikean puolen suora integrointi ei ole mahdollista tässä muodossa, vaan sitä täytyy ensin yksinkertaistaa sopivalla muuttujanvaihdolla. Sopiva muuttujanvaihto vuorostaan riippuu radan tyypistä eksentrisyyden e kautta. Tässä työssä sopiva muuttujan-

vaihto toteutettiin kolmen muuttujanvaihdon sarjana (luku 4.9). Ensimmäinen ja toinen muuttujanvaihto olivat kaikille ratatyypeille samat. Kolmas muuttujanvaihto riippui ratatyypistä. Muuttujanvaihtojen jälkeen alkuperäinen integrandi oli saatettu yksinkertaisempaan muotoon, jonka integraali voitiin helposti esittää alkeisfunktioilla. Integroinnin jälkeen tulosta sievennettiin siirtämällä vakiokertoimet samalle puolelle aikamuuttujan kanssa. Ellipsiradan tapauksessa ($0 < e < 1$) yhtälön (4.126) integraaliksi saatiin yhtälö (4.130),

$$n(t - t_p) = E - e \sin E,$$

jossa perisentraaika t_p on kuudes integroimisvakio ja keskiliike n kokoaa yhteen yhtälössä esiintyvät vakiokertoimet. Keskiliike n kytkeytyy integroimisvakioihin yhtälöllä (4.131),

$$n = \frac{\mu^2}{h^3} (1 - e^2)^{\frac{3}{2}}.$$

Ellipsin geometriasta johdetun Keplerin yhtälön (2.109) nojalla voidaan integraalin 6 yhtälön (4.130) oikea puoli tulkita ellipsin urapisteen määrittäväksi keskianomaliaksi M . Tuloksena on napakulman johdannaissuureen, keskianomalian M , ja ajan t toisiinsa kytkevä yhtälö (4.132),

$$M = n(t - t_p).$$

Tämä yhtälö on radiaalisen likeyhtälön toinen integraali.

Välttämättömiä integraaleja Keplerin ongelman ratkaisemisen kannalta ovat tässä työssä integraalit 1, 4, 5 ja 6. Integraalin 1 pyörimismäärävektori \mathbf{h} voidaan tulkita kolmeksi skalaarisuureksi: kaksi kulmasuureta vektorin suunnan kiinnittämiseksi ja yksi suure vektorin pituuden kiinnittämiseksi. Nämä kulmasuureet ovat tyypillisesti nousevan solmun pituus Ω ja inkliinaatio i , kun taas pituussuure on tyypillisesti isoakselin puolikas a . Integraalin 5 eksentrisyys e ja perisentrikulma θ_0 kiinnittävät eksentrisyysvektorin \mathbf{e} yksiselitteisesti. Lopuksi integraalin 6 perisentraaika t_p kiinnittää tietyn ratapisteen ($M = 0$) ja tietyn ajanhetken ($t = t_p$) toisiinsa.

Relaatiot

Seuraavaksi esitetään, kuinka integraalit muodostavat Keplerin ongelman likeyhtälön (3.15) ratkaisun eli sijainnin \mathbf{r} ajan t funktiona. Tämä tehdään kertaamalla edellä muodostetut integraalit, mutta keskittyen pelkästään niiden sisältämiin relaatioihin. Viimeistään tämän tarkastelun kautta ilmenee selkeästi, kuinka aika t kytkeytyy sijaintiin \mathbf{r} .

Laskenta alkaa integraalin 6 yhtälöstä (4.130), joka kytkee ajan t ja napakulmasta johdetun suureen E toisiinsa,

$$t \leftrightarrow E. \tag{7.4}$$

Integraalin 6 muuttujanvaihdot (yhtälöt (4.140), (4.144) ja (4.155) ellipsiradan tapauksessa) kytkevät suureen E ja napakulman θ toisiinsa,

$$E \leftrightarrow v \leftrightarrow \theta. \quad (7.5)$$

Sen jälkeen integraalin 5 yhtälö (4.122) kytkee napakulman θ ja napasäteen r toisiinsa,

$$\theta \leftrightarrow r. \quad (7.6)$$

Sijainnin sylinterikoordinaatit (r, θ, z) , jossa $z = 0$, ovat nyt esitetty ajan t funktioina ratakoordinaatistossa H (luku 4.5). Jäljellä on enää ratakoordinaatiston H sylinterikoordinaattien (r, θ, z) kytkeminen viitekoordinaatiston O suorakulmaisiin koordinaatteihin (x, y, z) . Ratakoordinaatiston H sylinterikoordinaatit $(r, \theta, z)_H$ kytkeytyvät suorakulmaisiin koordinaatteihin $(x, y, z)_H$ yhtälön (4.79) kautta,

$$(r, \theta, z)_H \leftrightarrow (x, y, z)_H. \quad (7.7)$$

Tämän jälkeen ratakoordinaatiston H suorakulmaiset koordinaatit $(x, y, z)_H$ kytkeytyvät viitekoordinaatiston O suorakulmaisiin koordinaatteihin $(x, y, z)_O$ siirtymämatriisiin (4.68) mukaisesti,

$$(x, y, z)_H \leftrightarrow (x, y, z)_O. \quad (7.8)$$

Suorakulmaiset koordinaatit $(x, y, z)_O$ viitekoordinaatistossa O ovat sijaintivektorin \mathbf{r} komponentit.

7.3 Matemaattinen malli (ellipsin tapauksessa)

Häiriöttömän rataliikkeen matemaattinen malli (ellipsin tapauksessa) voidaan muodostaa kokoamalla yhteen edellä mainitut yhtälöt. Matemaattiselta mallilta odotetaan kuitenkin ytimekkyyttä, minkä vuoksi yhtälöitä sievennetään ja yhdistellään. Rataparametreiksi valitaan Keplerin rataelementit taulukon 5.1 mukaan: (i) isoakselin puolikas a , (ii) eksentrisyys e , (iii) nousevan solmun pituus Ω , (iv) inkliinaatio i , (v) periapsin argumentti ω ja (vi) perisentraaika t_p . Koska rataparametreina käytetään Keplerin rataelementtejä, täytyy joitakin edellä mainituista yhtälöistä korvata toisilla.

Korvataan integraalin 6 yhtälössä (4.130) esiintyvä vakio n käyttäen yhtälöä (5.17). Saadaan mallin ensimmäinen yhtälö, joka kytkee ajan ja eksentrisen kulman toisiinsa,

$$E - e \sin E = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}(t - t_p). \quad (7.9)$$

Yhdistetään integraalin 6 muuttujanvaihdot (4.144) ja (4.155), jolloin saadaan yhtälö (4.164). Korvataan vielä apumuuttuja ε yhtälön (4.135) mukaisesti. Saadaan mallin toinen yhtälö, joka kytkee eksentrisen anomalian E ja luonnollisen anomalian v toisiinsa,

$$\tan \frac{\nu}{2} = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \tan \frac{E}{2}. \quad (7.10)$$

Korvataan integraalin 5 yhtälössä (4.122) esiintyvä semi-latus rectum p käyttäen yhtälöä (2.40). Saadaan mallin kolmas yhtälö, joka kytkee sijainnin napakoordinaatit perifokaalikoordinaatistossa eli luonnollisen anomalian ν ja napasäteen r toisiinsa,

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e \cos \nu}. \quad (7.11)$$

Korvataan yhtälöt (4.79) ja (4.68) käyttäen yhtälön (4.84) mukaista kannanvaihtoa. Kannanvaihdon (4.84) parametreiksi valitaan yhtälön (6.34) mukaiset radan asentokulmat. Saadaan mallin neljäs yhtälö, joka kytkee toisiinsa sylinterikoordinaatit perifokaalikoordinaatistossa ja suorakulmaiset koordinaatit viitekoordinaatistossa,

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \mathbf{R}_z(\Omega) \mathbf{R}_x(i) \mathbf{R}_z(\omega + \nu) \begin{bmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (7.12)$$

Häiriöttömän rataliikkeen matemaattinen malli on edellä mainitut neljä yhtälöä (7.9)–(7.12). Nämä neljä yhtälöä määrittävät implisiittisesti yhtälön (7.3) mukaisen kuvauksen $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t; a, e, \Omega, i, \omega, t_p)$. Tätä kuvausta ei ole mahdollista esittää suljetussa muodossa, koska mallin yhtälö (7.9) edellyttää Keplerin yhtälön (2.109) ratkaisemista.

7.4 Algoritmit

Esitetään häiriöttömään rataliikkeen keskeisimmät yhtälöt, jotka kehitettiin työn teoreettisessa osuudessa. Yksittäiset yhtälöt ovat koottu kolmeksi algoritmiksi, joilla (i) tilavektorista lasketaan integroimisvakiot, (ii) integroimisvakioista lasketaan rataelementit, ja (iii) rataelementeistä lasketaan tilavektori. Yhdessä nämä algoritmit osoittavat, että ellipsiradan tapauksessa tilavektori, integroimisvakiot ja Keplerin rataelementit ovat saman asian erilaisia, mutta keskenään ekvivalentteja esityksiä.

Kaikki esiteltävät algoritmit soveltuvat vain ellipsirataan ($0 < e < 1$). Jos rata on paraabeli ($e = 1$) tai hyperbeli ($e > 1$), täytyy algoritmien useimpia askeleita muokata. Paraabelin tapauksessa isoakselin puolikas a ei ole määritelty, sillä yhtälön (2.39) oikea puoli on identtisesti nolla. Tällöin isoakselin puolikas a korvataan kartioleikkauksen semi-latus rectumilla p . Jos rata ei ole ellipsi, täytyy eksentrisen anomalia E korvata kartioleikkauskohtaisella kulmasuurella – joko hyperbolisella kulmalla F tai parabolisella kulmalla x . Tämä vuorostaan edellyttää muutoksia yhtälöihin, jotka kytkevät luonnollisen anomalian ν ja keskianomalian M toisiinsa. Eksentrisen anomalian korvaaminen kartioleikkauskohtaisella kulmasuurella edellyttää muutoksia niissä algoritmien askeleissa, joissa käsitellään keskiliikettä n , eksentristä anomaliaa E , luonnollista anomaliaa ν tai napasädettä r .

Tilavektorista integroimisvakioihin

Algoritmi 7.1 laskee tilavektorista integroimisvakiot. Tämä algoritmi vastaa muunnosta (5.5),

$$\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}} \rightarrow \mathbf{h}, \mathbf{e}, t_p.$$

Sekä pyörimismäärävektori \mathbf{h} että eksentrisyysvektori \mathbf{e} saadaan laskettua hyvin suoraviivaisesti tilavektorista vastaavasti yhtälöillä (4.6) ja (4.8), jotka kehitettiin Keplerin ongelman integrointien yhteydessä (luku 4). Perisentriajan t_p laskeminen edellyttää huomattavasti enemmän työtä, kuten seuraavaksi nähdään.

Perisentriaika t_p kytkeytyy keskianomaliaan M yhtälön (4.132) mukaisesti. Ellipsin geometrian (luku 2) perusteella tiedetään, kuinka keskianomalia M , eksentrisen anomalia E ja luonnollinen anomalia ν sekä sijainti perifokaalikoordinaatistossa (x, y) kytkeytyvät toisiinsa: M ja E yhtälöllä (2.108), E ja ν yhtälöillä (2.92) ja (2.93), sekä ν ja (x, y) yhtälöllä (2.74).

Ratageometriaa käsittelevässä teorialuvussa (luku 6) nämä yhtälöt ratkaistiin vastakkaiseen suuntaan. Yhtälöt (6.36) ja (6.43) esittävät kulman ν kosinin ja sinin vastavasti tilavektorilla. Näitä hyödyntäen kulma ν ratkaistaan arkustangentilla yhtälössä (6.52). Sen jälkeen eksentrisen anomalia E lasketaan yhtälöllä (6.53), joka soveltaa ellipsin geometriasta johdettua yhtälöä (2.93) perifokaalikoordinaatistossa. Lopuksi keskianomalia M lasketaan Keplerin yhtälöllä (6.54), joka soveltaa ellipsin geometriasta johdettua yhtälöä (2.108) perifokaalikoordinaatistossa. Kun sijaintia \mathbf{r} vastaava keskianomalia M on lopulta tiedossa, voidaan tästä laskea perisentriaika t_p yhtälöllä (6.55), joka vastaa yhtälöä (4.131) ratkaistuna perisentriajan suhteen.

Integroimisvakiot $\mathbf{h}, \mathbf{e}, t_p$ ovat liikevakioita (määritelty luvussa 4.1), mikä tarkoittaa, että niiden arvot pysyvät vakiona koko liikkeen ajan. Liikevakiot toimivat sen vuoksi hyvinä metriikoina, kun tarkastellaan numeerisen integroinnin tarkkuutta. Algoritmin 7.1 yksi tärkeä sovelluskohde on siten numeerinen integrointi.

Integroimisvakioista rataelementteihin

Algoritmi 7.2 laskee integroimisvakioista rataelementit. Tämä algoritmi vastaa muunnosta (5.8),

$$\mathbf{h}, \mathbf{e}, t_p \rightarrow a, e, \Omega, i, \omega, M_0.$$

Radan koon ja muodon määräävät isoakselin puolikas a ja eksentrisyys e saadaan suoraviivaisesti integroimisvakioiden normeista vastaavasti luvun 5 yhtälöillä (5.10) ja (5.9). Ratapisteen tietyllä ajanhetkellä kiinnittävä epookin keskianomalia M_0 ratkaistaan perisentriajasta luvun 5 yhtälöllä (5.29). Radan asentokulmien Ω , i ja ω laskeminen vaatii enemmän työtä, mutta ne saadaan ratkaistua integroimisvakioista \mathbf{h} ja \mathbf{e} luvun 6 yhtälöillä.

Ratageometriaa käsittelevässä luvussa (luku 6) kiinnitettiin perifokaalikoordinaatiston asento suhteessa viitekoordinaatistoon käyttäen pyörimismäärävektoria \mathbf{h} ja eksentrisyysvektoria \mathbf{e} . Kyseisessä luvussa ratkaistiin myös radan asentokulmat Ω , i ja ω näiden vektorien geometrisella tarkastelulla. Tarkastelu johti seuraaviin yhtälöihin, joiden avulla ratakulmat lasketaan integroimisvakioista: nousevan solmun pituus Ω yhtälöllä (6.14), inkliinaatio i yhtälöllä (6.17), ja periapsin argumentti ω yhtälöllä (6.30).

Koska kulmat Ω ja i ovat puhtaasti ratatason asentoon liittyviä kulmia, on ilmeistä, että niiden laskemiseksi riittää pelkästään ratatason asennon kiinnittävä pyörimismäärävektori \mathbf{h} . Kulma ω sen sijaan edellyttää tietoa ratatason asennon lisäksi myös periapsin suunnasta, jonka eksentrisyysvektori \mathbf{e} kiinnittää. Näin ollen ainoastaan kulman ω laskemisessa tarvitaan molempia vektoreita \mathbf{h} ja \mathbf{e} .

Keplerin rataelementit ovat geometrisesti mielekkäitä suureita. Nämä soveltuvat erinomaisesti radan esittämiseen, ja niiden avulla voidaan vaivattomasti ymmärtää radan ominaisuuksia kuten muotoa, kokoa ja asentoa. Yhdessä algoritmit 7.1 ja 7.2 mahdollistavat radan määrittämisen, jolla tarkoitetaan rataelementtien määrittämistä havainnoista.

Rataelementeistä tilavektoriin

Algoritmit 7.3 ja C.1 (liitteessä C) laskevat rataelementeistä vastaavasti sijainti- ja nopeusvektorin. Nämä algoritmit vastaavat muunnosta

$$a, e, \Omega, i, \omega, M_0 \rightarrow \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}.$$

Eryyisesti algoritmi 7.3, jossa rataelementeistä lasketaan sijaintivektori, on kuvaus häiriöttömästä rataliikkeestä ellipsiradan tapauksessa, ja tämän työn teoriaosuuden keskeisin tulos.

Algoritmissa 7.3 rataelementeistä lasketaan sijaintivektori. Sijaintivektorin laskeminen alkaa keskianomalian M ja ajan t toisiinsa kytkevästä yhtälöstä (5.32). Keskianomaliaa M vastaava eksentrisen anomalia E ratkaistaan Keplerin yhtälöstä (4.133), esimerkiksi iteratiivisia menetelmiä käyttäen (luku 2.9 esittelee yhden tällaisen menetelmän). Ratapisteen luonnollinen anomalia eli napakulma ν ja napasäde r perifokaalikoordinaatistossa ratkaistaan eksentrisestä anomaliasta E yhtälöillä (2.92) ja (2.79), jotka johdettiin ellipsin geometriasta (luku 2). Nämä suureet, napasäde r ja napakulma ν , mahdollistavat sijaintivektorin $[\mathbf{r}]_p$ laskemisen perifokaalikoordinaatistossa yhtälön (6.35) mukaisesti. Lopulta perifokaalikoordinaatiston sijaintivektori $[\mathbf{r}]_p$ muunnetaan viitekoordinaatistoon sijaintivektoriksi $[\mathbf{r}]_o$ rotaatiosekvenssillä ZXZ yhtälön (6.34) mukaisesti.

Algoritmissa C.1 (liitteessä C) rataelementeistä lasketaan nopeusvektori. Nopeusvektorin algoritmi johdetaan ja esitellään yksityiskohtaisemmin itse liitteessä. Tässä todetaan pelkästään, että nopeusvektori lasketaan samoin kuin sijaintivektori yhtä askelta lukuun ottamatta. Ainoa eroavaisuus nähdään algoritmin 7.3 askeleessa (6), jossa lasketaan sijaintivektorin $[\mathbf{r}]_p$ sijaan nopeusvektori $[\dot{\mathbf{r}}]_p$ perifokaalikoordinaatistossa.

Algoritmeissa 7.3 ja C.1 voitaisiin käyttää epookin keskianomalian M_0 sijasta yhtä hyvin myös perisentraaiakaa t_p . Tällöin keskianomalia M ajanhetkellä t laskettaisiin yhtälön (5.32) sijasta yhtälöllä (4.132),

$$M = n(t - t_p).$$

Keskianomalia M_0 epookilla t_0 voidaan muuntaa perisentraajaksi t_p käyttäen yhtälöä (5.30),

$$t_p = t_0 - M_0 / n.$$

Nämä yhtälöt osoittavat, että rataelementit M_0 ja t_p ovat keskenään vaihtoehtoisia.

Algoritmi 7.1. Tilavektori integroimisvakioiksi, $\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}} \rightarrow \mathbf{h}, \mathbf{e}, t_p$.

(1) Pyörimismäärävektori, yhtälö (4.6),

$$\mathbf{h} = \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}.$$

(2) Eksentrisyysvektori, yhtälö (4.8),

$$\mathbf{e} = -\frac{1}{r} \mathbf{r} - \frac{1}{\mu} \mathbf{h} \times \dot{\mathbf{r}}.$$

(3) Luonnollinen anomalia, yhtälö (6.52),

$$\nu = \operatorname{atan} 2(h \mathbf{r} \bullet \dot{\mathbf{r}}, h^2 - \mu r).$$

(4) Eksentrisen anomalia, yhtälö (6.53),

$$E = \operatorname{atan} 2(\sqrt{1 - e^2} \sin \nu, \cos \nu + e).$$

(5) Keskianomalia, Keplerin yhtälö (6.54),

$$M = E - e \sin E.$$

(6) Keskiliike, yhtälö (5.18),

$$n = \frac{\mu^2}{h^3} (1 - e^2)^{\frac{3}{2}}.$$

(7) Perisentriaika, yhtälö (6.55),

$$t_p = t - M / n.$$

(Algoritmi päättyy)

Algoritmi 7.2. Integroimisvakiot rataelementeiksi, $\mathbf{h}, \mathbf{e}, t_p \rightarrow a, e, i, \omega, \Omega, M_0$.

(1) Isoakselin puolikas, yhtälö (5.10),

$$a = \frac{h^2}{\mu(1-e^2)}.$$

(2) Eksentrisyys, yhtälö (5.9),

$$e = \|\mathbf{e}\|.$$

(3) Nousevan solmun pituus, yhtälö (6.14),

$$\Omega = \text{atan } 2(h_x, -h_y).$$

(4) Inklinaatio, yhtälö (6.17),

$$i = \arccos \frac{h_z}{h}.$$

(5) Periapsin argumentti, yhtälö (6.30),

$$\omega = \text{atan } 2(h e_z, h_x e_y - h_y e_x).$$

(6) Keskiliike, yhtälö (5.18),

$$n = \frac{\mu^2}{h^3} (1-e^2)^{\frac{3}{2}}.$$

(7) Keskianomalia epookilla, yhtälö (5.29),

$$M_0 = n(t_0 - t_p).$$

(Algoritmi päättyy)

Algoritmi 7.3. Rataelementit sijaintivektoriksi, $a, e, i, \omega, \Omega, M_0 \rightarrow \mathbf{r}_k$.

(1) Keskiliike, yhtälö (5.17),

$$n = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}.$$

(2) Keskianomalia, yhtälö (5.32),

$$M = n(t - t_0) + M_0.$$

(3) Eksentrisen anomalia E ratkaistaan Keplerin yhtälöstä (4.133),

$$E - e \sin E = M.$$

(4) Luonnollinen anomalia, yhtälö (2.92),

$$\nu = \operatorname{atan} 2\left(\sqrt{1 - e^2} \sin E, \cos E - e\right).$$

(5) Napasäde, yhtälö (2.79),

$$r = a(1 - e \cos E).$$

(6) Sijainti perifokaalikoordinaatistossa, yhtälö (6.35),

$$[\mathbf{r}]_p = \begin{bmatrix} r \cos \nu \\ r \sin \nu \\ 0 \end{bmatrix}.$$

(7) Sijainti viitekoordinaatistossa, yhtälö (6.34),

$$[\mathbf{r}]_o = \mathbf{R}_z(\Omega)\mathbf{R}_x(i)\mathbf{R}_z(\omega)[\mathbf{r}]_p.$$

(Algoritmi päättyy)

8 GPS-SATELLIITIN RATALIIKE

Tässä luvussa häiriöttömän rataliikkeen teoriasta johdettuja yhtälöitä sovelletaan GPS-satelliittien rataliikkeeseen. GPS-satelliittien rataliikkeen mallina käytetään vanhan navigointiviestin (LNAV) mukaista mallia. Tässä mallissa satelliitin sijainnin laskeminen edellyttää 17 yhtälöä, jotka esiteltiin johdannon (luku 1) algoritmista 1.1 ilman selityksiä. Tämän luvun keskeinen tulos on algoritmi 8.1, joka on identtinen johdannon algoritmiin 1.1, mutta kytkee yhtälöt häiriöttömän rataliikkeen yhtälöihin niiltä osin kuin se on mahdollista.

8.1 Peruskäsitteitä

Efemeridi ja siihen liittyvät käsitteet

GPS:n rajapintaspesifikaatiossa [59] käytetään vaihtelevia nimityksiä navigointiviestin parametrijoukosta, joka mahdollistaa satelliitin sijainnin laskemisen tietyllä ajanhetkellä. Rajapintaspesifikaation yhdellä sivulla [59, s. 97] esiintyy jopa neljä erilaista englanninkielistä nimitystä, joilla tarkoitetaan samaa asiaa: (i) ephemeris parameters, (ii) orbital parameters, (iii) ephemeris data, ja (iv) ephemeris representation parameters.

Nämä kaikki nimitykset ovat helposti mielletävissä tarkoittamaan samaa asiaa, vaikka samanaikaisesti ne voidaan määritellä eri asioita tarkoittaviksi käsitteiksi. Tässä työssä esitellään ja määritellään käsitteet efemeridi ja efemeridiparametrit sekä efemeridin esitysmuoto ja esitys. Määritelmällisesti nämä käsitteet tulevat tarkoittamaan eri asioita, mutta niitä voidaan, kirjallisuudessa esiintyvän käytännön mukaisesti, käyttää synonyymeina toisilleen. Erityisesti satelliitinavigointijärjestelmiä käsittelevässä kirjallisuudessa efemeridi ja efemeridiparametrit tarkoittavat monesti samaa asiaa eli navigointiviestin parametrijoukkoa, joka mahdollistaa radan laskemisen.

Kirjallisuudessa harvemmin määritellään tai eksplikoidaan edellä mainittuja käsitteitä, mistä luultavasti johtuu niiden tulkinnan asiasidonnaisuus. Käytettävissä oleva lähdekirjallisuus ei tarjoa tämän työn tarkoituksiin riittävän selkeitä eikä riittävän johdonmukaisia määritelmiä käsitteille efemeridi, efemeridin esitysmuoto, efemeridiparametrit tai efemeridin esitys. Tämän vuoksi nämä käsitteet määritellään tässä työssä itsenäisesti ilman viittauksia lähdekirjallisuuteen.

Tarkastellaan englanninkielisen sanan ”ephemeris” etymologiaa ja merkitystä ennen kuin käsite määritellään. Englannin kieleen ephemeris on tullut latinasta, ja latinaan vuorostaan kreikan kielestä, jossa ephemeris tarkoittaa päiväkirjaa tai kalenteria [30]. Nykyään englannin kielen ephemeris tarkoittaa joko taulukkoa tai vaankappaleen ennustetuista sijainneista [30; 44, s. 131; 39, s. 11] tai sijaintien laskemisen mahdollistavaa

tietoa [2, s. 215]. Sanan englanninkielinen monikkomuoto on ephemerides, jota suomen kielen yksikkömuoto efemeridi muistuttaa erehdyttävästi, vaikka se on mitä luultavimmin peräisin ruotsin kielen yksikkömuodosta ”efemerid”.

Efemeridi (engl. *ephemeris*, monikossa *ephemerides*) tarkoittaa tässä työssä taulukkoa keinotekoisien tai luonnollisten taivaankappaleen sijainneista ajan suhteen. Tämä määritelmä on yleistys edellä mainittuihin lähteisiin [30; 44, s. 131; 39, s. 11] nähden, koska sijaintien ei edellytetä olevan ennusteita, vaan ne voivat yhtä hyvin olla havainnoista laskettuja.

Efemeridin esitysmuoto (engl. *ephemeris representation type*) tarkoittaa tässä työssä efemeridin esittämiseen soveltuva matemaattista mallia (yhtälöjoukkoa) varsin yleisellä tasolla. Käytännön sovelluksiin efemeridistä voi riittää ajallisesti hyvin lyhytkin osa [54, s. 120–1]. Efemeridin esitysmuodoiksi on useita vaihtoehtoja, koska matemaattisten mallien ei tarvitse esittää koko efemeridiä tarkasti, vaan ainoastaan kiinnostuksen kohteena oleva osa sovelluksen kannalta riittävän tarkasti. Esimerkiksi Van Dierendonckin artikkelin [18, s. 63] mukaan GPS:n navigointiviestiin efemeridin esitysmuodoksi tutkittiin seuraavia vaihtoehtoja: (i) polynomit, (ii) harmoniset kehitelmät, ja (iii) kvasikepleriaaniset approksimaatiot.

Efemeridiparametrit (engl. *ephemeris parameters*) tarkoittavat tässä työssä efemeridin esittämiseen soveltuvan matemaattisen mallin parametreja. Matemaattisen mallin parametrit voidaan mieltää efemeridiä kuvaaviksi ominaisuuksiksi, ja parametrien arvoja voidaan pitää efemeridin esityksenä kyseisessä mallissa.

Määritelmällisesti efemeridiparametrit ovat laveampi käsite kuin aiemmin esitelty rataelementtien käsite. Tämä käy ilmi seuraavasti. Aiemmin määritellyt rataelementit voidaan aina tulkita efemeridiparametriksi, sillä rataelementit ovat aina jonkin häiriöttömän rataelementin matemaattisen mallin edellyttämä parametrijoukko. Käänteinen implikaatio ei kuitenkaan ole voimassa, sillä efemeridiparametrien määrittämä rata voi olla geometrisesti hyvinkin poikkeava kartioleikkauskäyrästä. Vastaavasti efemeridiparametrit voivat olla luonteeltaan hyvin erilaisia rataelementteihin verrattuna. Efemeridiparametrit voivat olla esimerkiksi polynomien kertoimia, jolloin muunnos häiriöttömän radan kuvaaviksi rataelementeiksi täytyy tehdä jonkinlaisen virheen minimoivan sovituksen kautta.

Efemeridin esitys (engl. *ephemeris representation*) tarkoittaa tässä työssä kiinnitettyjä efemeridiparametreja. Tämä määritelmä seuraa luonnollisesti edellä esitetystä tulkinasta, jonka mukaan parametrien arvot voidaan mieltää efemeridin esitykseksi. Parametrien arvojen kiinnitys pyrkii minimoimaan mallin ja efemeridin välisen virheen tietyllä aikavälillä. Tämän sovitusrvirheen minimointi edellyttää lähes poikkeuksetta epälineaarisen optimointitehtävän ratkaisemista. Tästä seuraa, että efemeridin esitys on matemaattisen mallin sovitusrvirheen minimoimiseksi tai sen osaan.

Kirjallisuudessa harvemmin eksplikoidaan efemeridi-sanankäytön merkitystä. Tämä on voinut osaltaan vaikuttaa siihen, että useissa lähteissä efemerideillä voidaan tarkoittaa efemeridin esitystä, efemeridiparametreja tai taulukoituja ennustuksia/havaintoja sijain-

neista. Yleensä asiayhteydestä selviää kuitenkin melko vaivattomasti, missä merkityksessä sanaa käytetään.

Efemeridialgoritmi (engl. *ephemeris algorithm*) tarkoittaa tässä työssä algoritmista kuvausta sijainnin laskemisesta jonkin efemeridin esittämiseen soveltuvan matemaattisen mallin mukaan, kun ajanhetki ja efemeridiparametrien arvot tunnetaan. Käytännössä efemeridialgoritmi on algoritminen kuvaus funktiosta

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t; a_1, \dots, a_n), \quad (8.1)$$

jossa funktion argumentti t on aika, ja funktion parametrit a_1, \dots, a_n ovat efemeridiparametrit.

Efemeridialgoritmia voidaan pitää algoritmisena approksimaationa rataliikkeen matemaattisesta mallista. Vaikka mallia ei olisi mahdollista esittää suljetussa muodossa, efemeridialgoritmin täytyy algoritmin määritelmän mukaisesti tuottaa vastaus rajallisesa ajassa. Tämä tarkoittaa, että efemeridialgoritmin on approksimoitava matemaattista mallia siten, että laskenta on ajallisesti rajattu. Käytännössä approksimointi tapahtuu yleensä siten, että iterointi tai sarjakehitelmä katkaistaan.

Navigointiviesti

Tässä työssä navigointiviesti pyritään määrittelemään yleisesti siten, että käsite ei ole sidoksissa mihinkään tiettyyn satelliitinnavigointijärjestelmään. Tämä tarkoittaa, että määritelmäksi ei voida ottaa esimerkiksi GPS:n rajapintaspesifikaation [59, s. 3] määritelmää navigointidatalle, eikä Van Diereendonckin määritelmää [18, s. 55] GPS:n navigointiviestille. Määritelmä rakennetaan tarkastelemalla navigointiviestin keskeisimpiä ominaisuuksia, jotka mahdollistavat päätelaitteen suorittaman navigoinnin.

Määritellään aluksi tietoliikennetekniikkaan kuuluvat käsitteet nouseva ja laskeva siirtotie. *Nouseva siirtotie* (engl. *uplink*) tarkoittaa siirtotietä maasta satelliitille [2, s. 628, 601]. *Laskeva siirtotie* (engl. *downlink*) tarkoittaa vastaavasti siirtotietä satelliitilta maahan [2, s. 191, 601].

Satelliitinnavigointijärjestelmissä, kuten GPS ja Galileo, laskevien siirtoteiden radio-signaalit koostuvat yleensä kolmesta komponentista, jotka ovat [27, s. 167; 43, s. 71]: (i) kantoaalto, (ii) etäisyysmittauskoodi eli hajautuskoodi ja (iii) hyötykuorma. Radio-signaali muodostetaan yhdistämällä etäisyysmittauskoodi ja hyötykuorma, minkä jälkeen tulos painetaan kantoaaltoon käyttäen modulaatiota [43, s. 71]. Kantoaalto ja etäisyysmittauskoodi ovat vastaanottajan ennalta tuntemia, eivätkä itsessään sisällä informaatiota. Ainoastaan hyötykuorma ei ole vastaanottajan ennalta tuntema. Tämä on navigointiviestin keskeisin ominaisuus eli se käsittää signaalin ennalta tuntemattoman informaation sisällön.

Päätelaitteen sijainti ja systeemin aika vastaanottohetkellä voidaan laskea, kun tiedetään systeemin aika, satelliitin sijainti ja satelliitin etäisyys lähetyshetkellä vähintään neljän satelliitin osalta. Tarkastellaan seuraavaksi, mistä päätelaite saa tarvittavat tiedot. Satelliitin etäisyys voidaan mitata etäisyysmittauskoodista. Systeemin aikaa ja satelliitin sijaintia ei voida mitata ennalta tunnetusta signaalista samoin kuin etäisyyttä. Näin ollen

ennusteet systeemin ajasta ja satelliitin sijainnista lähetyshetkellä täytyy välittää pääte-laitteelle hyötykuorman sisältämän informaation avulla. Tämä on navigointiviestin tärkein tehtävä.

Navigointiviesti (engl. *navigation message*) määritellään tässä työssä tarkoittamaan mitä tahansa tietorakennetta, jonka sisältämät tiedot mahdollistavat (i) systeemin ajan ja (ii) lähettimen sijainnin ennustamisen lähetyshetkellä. Määritelmä asettaa navigointiviestin sisältämille tiedoille kaksi vähimmäisvaatimusta, joiden on toteuduttava ennen kuin mielivaltaista tietorakennetta voidaan kutsua navigointiviestiksi.

Tämän työn käyttämä määritelmä navigointiviestille eroaa GPS:n rajapintaspesifikaation navigointidatan määritelmästä [59, s. 3] kahdella keskeisellä tavalla. Poikkeavuudet ovat seuraavat. Tässä määritelmässä (i) ei oteta kantaa siirtotiehen, ja (ii) navigointiviestin sisällölle asetetut vähimmäisvaatimukset ovat esitetty eksplisiittisesti. Siirtotien määrittelemättä jättäminen helpottaa määritelmän soveltamista pseudoliittien kohdalla, ja vähimmäisvaatimusten eksplikointi selkiyttää navigointiviestin tarkoitusta ja yleistää sen GPS:n navigointitehtävästä riippumattomaksi käsitteeksi.

8.2 GPS-satelliitin rataliike navigointiviestin mukaan

Tässä alaluvussa tarkastellaan aluksi GPS:n eri satelliittisukupolvien lähettämien navigointiviestien eroja. Sen jälkeen esitellään GPS-satelliitin rataliikkeen algoritminen kuvaus, eli efemeridialgoritmi, vanhan navigointiviestin mukaisesti.

GPS:n navigointiviestit – vanha LNAV ja uusi CNAV

Aluksi määritellään navigointidata siten kuin se GPS:n rajapintaspesifikaatiossa IS-GPS-200 määritellään. *Navigointidata* (engl. *navigation data*) on laskevaa siirtotietä pitkin välitetty järjestelmätieto, jota GPS:n navigointitehtävän suorittaminen edellyttää [59, s. 3]. Tämän työn puitteissa navigointidataa voidaan pitää synonyymina navigointiviestille GPS:n erikoistapauksessa. Tästä eteenpäin navigointidata ja navigointiviesti ovat keskenään vaihdannaisia nimityksiä.

GPS-satelliitit voivat lähettää tietorakenteeltaan kolmea erilaista navigointidataa. Navigointidatan tietorakenne riippuu satelliittisukupolvesta (Blokki IIR tai vanhempi vai Blokki IIR-M tai uudempi), laskevan siirtotien kantataajuudesta (L1 vai L2) ja hajautuskoodista (C/A vai L2 C) sekä hallintalohkon määräämästä toimintatilasta.

Rajapintaspesifikaatio IS-GPS-200 [59] erottelee satelliittisukupolvien perusteella kaksi navigointidataa, vanhan eli perusnavigointidatan ja uuden eli siviilinnavigointidatan. *Vanha navigointidata* (engl. *legacy navigation data*), lyhennetään LNAV, on kaikkien satelliittisukupolvien lähettämä navigointidata [59, s. 12–3]. Tässä työssä vanhaa navigointidataa kutsutaan myös nimellä perusnavigointidata. *Siviilinnavigointidata* (engl. *civil navigation data*), lyhennetään CNAV, on vain Blokki IIR-M ja sitä uudempien satelliittisukupolvien lähettämä navigointidata [59, s. 12–3]. Tässä työssä siviilinnavigointidataa kutsutaan myös nimellä uusi navigointidata.

Vanhasta navigointiviestistä LNAV on käytössä kaksi varianttia, joita merkitään LNAV-L ja LNAV-U [59, s. 73, 188]. Variantti riippuu satelliitin hajautuskoodin yksilöivästä PRN-numerosta. Satelliittien PRN-numerot jaetaan kahteen joukkoon, alempaan ja ylempään joukkoon, jotka käsittävät vastaavasti PRN-numerot 1–32 ja 33–64 [59, s. 12]. Alemman PRN-numerajoukon satelliitit lähettävät varianttia LNAV-L. Ylemmän PRN-numerajoukon satelliitit lähettävät varianttia LNAV-U. On varsin ilmeistä, että varianttien lyhenteiden loppuliitteet -L ja -U tulevat englannin kielen sanoista lower ja upper vastaavasti.

Rajapintaspesifikaatiossa IS-GPS-200 määritellään navigointiviestien tietorakenteet seuraavasti: vanha LNAV-L luvussa 20 (liite II) [59, s. 73–133], uusi CNAV luvussa 30 (liite III) [59, s.134–87] ja vanha LNAV-U luvussa 40 (liite IV) [59, s. 188–207]. Vanhan navigointiviestin variantit LNAV-L ja LNAV-U ovat kuitenkin satelliittien efemeridiparametrien osalta identtisiä, minkä vuoksi tässä työssä tarkastellaan vanhempaa navigointiviestiä LNAV variantista riippumatta, mutta käyttäen lähteenä variantin LNAV-L spesifikaatiota.

Vanhan navigointiviestin (LNAV) efemeridiparametrit

GPS:n rajapintaspesifikaatiossa IS-GPS-200 [59, s. 98] määritellään vanhan navigointiviestin (LNAV) sisältämät efemeridiparametrit. Lisäksi rajapintaspesifikaatiossa [59, s. 100–1] määritellään efemeridialgoritmi, jota tulee käyttää satelliitin sijainnin laskemiseksi navigointiviestin tiedoista.

Taulukossa 8.1 on esitetty vanhan navigointiviestin (LNAV) efemeridiparametrit GPS-rajapintaspesifikaation [59, s. 98] mukaisesti. Pintapuolinen tarkastelu osoittaa, että navigointiviestin efemeridiparametrit sisältävät klassisia Keplerin rataelementtejä muistuttavia parametreja (6 kpl) ja rataelementtien aikaevoluutiota määrittäviä korjausparametreja (9 kpl).

Symboli	Selite
Keplerin rataelementit	
t_{oe}	Rataelementtien viiteaika; epookki
\sqrt{A}	Isoakselin puolikkaan neliöjuuri
e	Eksentrisyys
M_0	Keskianomalia epookilla
Ω_0	Nousevan solmun longitudi (LAN) GPS-viikon alussa.
ω	Periapsin argumentti
i_0	Inkлинаatio epookilla
Korjausparametrit	
Δn	Keskiliikkeen poikkeama laskennallisesta viitearvosta
$IDOT$	Inkлинаation muutosnopeus
$\dot{\Omega}$	Nousevan solmun rektaskension (RAAN) muutosnopeus
C_{uc}, C_{us}	Palloharmoniset korjaustermit leveyden argumentille
C_{rc}, C_{rs}	Palloharmoniset korjaustermit napasäteelle
C_{ic}, C_{is}	Palloharmoniset korjaustermit inkлинаatiolle

Taulukko 8.1. GPS:n vanhan navigointiviestin (LNAV) efemeridiparametrit, joita on 16 kappaletta.

Rataelementtien aikaevoluutioon liittyviä parametreja kutsutaan muun muassa nimityksillä *korjausparametrit* (engl. *correction parameters*) [36, s. 41] ja *häiriöparametrit* (engl. *perturbation parameters*) [54, s. 224]. Tässä työssä näistä parametreista käytetään jatkossa pelkästään nimitystä korjausparametrit.

Klassisten Keplerin rataelementtien ja niitä täydentävien korjausparametrien muodostamaa parametrijoukkoa kutsutaan toisinaan nimellä *kvasi-Keplerin rataelementit* (engl. *quasi-Keplerian orbital elements*) [54, s. 226; 43, s. 125]. Suomenkielinen nimitys on jokseenkin ongelmallinen tulkinnan ja oikeinkirjoituksen kannalta, minkä vuoksi se on mainittu tässä pelkästään täydellisyyden vuoksi. Ongelmien välttämiseksi tässä työssä ehdotetaan erisnimen Kepler adjektivoitua, jolloin käsitteen suomenkielinen nimi on *kvasikepleriaaniset rataelementit*.

Kuten johdannossa todettiin, Galileon avoimen palvelun navigointiviestien efemeridiparametrit [19, s. 44–5] ovat samat kuin GPS:n vanhan navigointiviestin (LNAV) efemeridiparametrit. Taulukko 8.1 vastaa siten myös Galileon rajapinnan kontrollidokumentin [19, s. 44–5] mukaista esitystä Galileon navigointiviestien efemeridiparametreista.

Historiallisesti kiinnostava seikkana mainittakoon, että inkлинаation muutosnopeus $IDOT$ lisättiin vanhaan navigointiviestiin vasta ennen tuotantoon siirtymistä. GPS-ohjelma toteutettiin kolmessa *vaiheessa* (engl. *phase*). Kaksi ensimmäistä vaihetta, vaihe I ja II, ovat vastaavasti konseptin validointi ja järjestelmän validointi. Viimeinen vai-

he, vaihe III, on tuotanto. Van Dierendonck esittelee vuonna 1978 julkaistussa artikkelissa [18] navigointiviestin rakenteen yksityiskohtaisesti ja sen arkkitehtuuriin vaikuttaneita suunnittelupäätöksiä. Tämän artikkelin mukaista navigointiviestiä käytettiin GPS-ohjelman vaiheiden I ja II aikana [15, s. 38; 1, s. 68]. Kun GPS-ohjelma siirtyi vuonna 1982 vaiheeseen III, päivitettiin navigointiviestin sisältö [15, s. 38]. Tällöin inkliinaation muutosnopeus *IDOT* lisättiin efemeridiparametriin. Inkliinaation muutosnopeuden avulla voitiin vähentää efemeridivirheen poikittaiskomponenttia [1, s. 68].

Uuden navigointiviestin (CNAV) efemeridiparametrit

Rajapintaspesifikaatio IS-GPS-200 [59] määrittelee vanhan navigointiviestin lisäksi myös uuden navigointiviestin (CNAV). Erityisesti rajapintaspesifikaatio määrittelee uuden navigointiviestin sisältämät efemeridiparametrit [59, s. 155–6] ja niiden kanssa käytettävän efemeridialgoritmin [59, 157–8].

Verrataan keskenään GPS:n vanhaa ja uutta navigointiviestiä efemeridiparametrien osalta. Tehdään seuraavat havainnot. Uuteen navigointiviestiin CNAV [59, s. 155–6] sisältyy vanhan navigointiviestin LNAV [59, s. 98] kaikki efemeridiparametrit sillä poikkeuksella, että isoakselin puolikas A esitetään eri tavoin. Isoakselin puolikas A esitetään uudessa navigointiviestissä kiinteän viitearvon A_{REF} ja sen poikkeaman ΔA summana, $A = A_{REF} + \Delta A$, kun taas vanhassa navigointiviestissä se esitetään neliöjuuren \sqrt{A} avulla. Lisäksi uudessa navigointiviestissä on kaksi korjausparametria, joita ei vanhassa navigointiviestissä ole. Nämä ylimääräiset korjausparametrit ovat isoakselin puolikkaan muutosnopeus \dot{A} ja keskiliikkeen poikkeaman muutosnopeus $\Delta \dot{n}$.

Tehdään yhteenveto. Uusi navigointiviesti CNAV on informaation sisältönsä muuten sama kuin vanha navigointiviesti LNAV, mutta sisältää tarkempaa tietoa rataelementtien aikaevoluutiosta. Tämä ilmenee korjausparametrien suurempana joukkona.

Vanhan navigointiviestin (LNAV) efemeridialgoritmi

GPS:n rajapintaspesifikaatiossa [59, s. 100–1] määritellään vanhan navigointiviestin (LNAV) kanssa käytettävä efemeridialgoritmi. Algoritmi 8.1 on spesifikaation mukainen algoritmi, ja se vastaa johdannon (luku 1) algoritmia 1.1, mutta sisältää selityksen kustakin laskennan vaiheesta. Lisäksi algoritmissa 8.1 kukin askel sisältää viitteen tässä työssä esitettyyn yhtälöön, mikäli askel on perusteltavissa tämän työn esittämän häiriötön rataliikkeen teorian puitteissa.

Algoritmi 8.1. GPS:n efemeridiparametrit sijaintivektoriksi.

(1) Radan isoakselin puolikkaan pituus

$$A = (\sqrt{A})^2.$$

(2) Häiriötön keskiliike epookilla, yhtälö (5.17),

$$n_0 = \sqrt{\frac{\mu}{A^3}}.$$

(3) Lähetysaika t_k efemerisparametrien epookin suhteen

$$t_k = t - t_{oe}.$$

(4) Korjattu keskiliike

$$n = n_0 + \Delta n.$$

(5) Keskianomalia lähetysajanhetkellä, yhtälö (5.32),

$$M_k = M_0 + nt_k.$$

(6) Eksentrisen anomalia E_k ratkaistaan Keplerin yhtälöstä (2.109),

$$M_k = E_k - e \sin E_k.$$

(7) Luonnollinen anomalia, yhtälö (2.92),

$$v_k = \text{atan} 2 \left(\sqrt{1-e^2} \sin E_k, \cos E_k - e \right).$$

(8) Leveyden argumentti, yhtälö (6.57),

$$\Phi_k = v_k + \omega.$$

(9) Leveyden argumentin palloharmoninen perturbaatio,

$$\delta u_k = c_{us} \sin 2\Phi_k + c_{uc} \cos 2\Phi_k.$$

(10) Napasäteen palloharmoninen perturbaatio

$$\delta r_k = c_{rs} \sin 2\Phi_k + c_{rc} \cos 2\Phi_k.$$

(11) Inkliinaation palloharmoninen perturbaatio

$$\delta i_k = c_{is} \sin 2\Phi_k + c_{ic} \cos 2\Phi_k.$$

(12) Korjattu leveyden argumentti

$$u_k = \Phi_k + \delta u_k.$$

(13) Korjattu napasäde, sisältää napasäteen yhtälön (2.79),

$$r_k = A(1 - e \cos E_k) + \delta r_k.$$

(14) Korjattu inkliinaatio

$$i_k = i_0 + \delta i_k + (IDOT)t_k.$$

(15) Koordinaatit ratatasossa, kun perussuunta on nousevan solmun suunta.

$$\begin{bmatrix} x'_k \\ y'_k \end{bmatrix} = r_k \begin{bmatrix} \cos u_k \\ \sin u_k \end{bmatrix}.$$

(16) Nousevan solmun pituus

$$\Omega_k = \Omega_0 + (\dot{\Omega} - \dot{\Omega}_e)t_k - \dot{\Omega}_e t_{oe}.$$

(17) Koordinaatit Maan pyörimisliikkeeseen kiinnitettyssä ekvaattorikoordinaatistossa

$$\begin{bmatrix} x_k \\ y_k \\ z_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \Omega_k & -\cos i_k \sin \Omega_k \\ \sin \Omega_k & \cos i_k \cos \Omega_k \\ 0 & \sin i_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'_k \\ y'_k \end{bmatrix}.$$

(Algoritmi päättyy)

Seuraavaksi käsitellään yksityiskohtaisemmin muutamia algoritmin 8.1 askeleita. Käsitelyn tarkoituksena on selvittää algoritmin vaiheita ja laskennan tavoitteita.

Askeleissa (2) ja (16) vastaavasti esiintyvät vakiot μ ja $\dot{\Omega}_e$ määritellään GPS:n rajapintaspesifikaatiossa [59, s. 100] seuraavasti:

$$\mu = 3,986005 \times 10^{14} \text{ m}^3/\text{s}^2, \quad (8.2)$$

$$\dot{\Omega}_e = 7,2921151467 \times 10^{-5} \text{ rad/s}. \quad (8.3)$$

Vakiot μ ja $\dot{\Omega}_e$ ovat vastaavasti Maan painovoimavakio ja Maan pyörimisnopeus. Rajaspesifikaation [59, s. 100] mukaan vakioiden arvot vastaavat Maailman geodeettisen järjestelmän WGS 84 arvoja.

Askeleessa (8) periapsin argumentin ω ja luonnolliseen anomalian ν yhteenlasku vastaa radan kiertoa ratatasossa. Tämä nähdään seuraavasti,

$$\mathbf{R}_Z(\omega)[\mathbf{r}]_P = \begin{bmatrix} \cos \omega & -\sin \omega & 0 \\ \sin \omega & \cos \omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \cos \nu \\ r \sin \nu \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (8.4)$$

Lasketaan oikean puolen matriisitulo, jolloin

$$\mathbf{R}_Z(\omega)[\mathbf{r}]_P = r \begin{bmatrix} \cos \omega \cos \nu - \sin \omega \sin \nu \\ \sin \omega \cos \nu + \cos \omega \sin \nu \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (8.5)$$

Sovelletaan kosinin ja sinin kahden kulman yhteenlaskun identiteettejä (A.4) ja (A.5), jolloin

$$\mathbf{R}_Z(\omega)[\mathbf{r}]_P = r \begin{bmatrix} \cos(\nu + \omega) \\ \sin(\nu + \omega) \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (8.6)$$

Tämä vastaa askeleessa (15) suoritettavaa laskua, kun sini ja kosini lasketaan leveyden argumentilla $u = \nu + \omega$.

Askeleessa (17) nähdään rippeitä kahden rotaatiomatriisin tulosta. Tämä käy ilmi seuraavalla laskulla:

$$\mathbf{R}_Z(\Omega)\mathbf{R}_X(i) = \begin{bmatrix} \cos \Omega & -\sin \Omega & 0 \\ \sin \Omega & \cos \Omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos i & -\sin i \\ 0 & \sin i & \cos i \end{bmatrix}. \quad (8.7)$$

Lasketaan oikean puolen matriisitulo, jolloin saadaan tulos

$$\mathbf{R}_Z(\Omega)\mathbf{R}_X(i) = \begin{bmatrix} \cos \Omega & -\cos i \sin \Omega & \sin i \sin \Omega \\ \sin \Omega & \cos i \cos \Omega & -\sin i \cos \Omega \\ 0 & \sin i & \cos i \end{bmatrix}. \quad (8.8)$$

Koska tätä rotaatiomatriisia sovelletaan pelkästään xy -tasossa oleviin vektoreihin, on matriisin viimeinen sarake tarpeeton, ja se voidaan jättää pois. Tällöin saadaan askeleessa (17) esiintyvä matriisi.

Yhdistämällä edelliset huomautukset koskien askeleita (8) ja (17) voidaan todeta, että yhdessä askeleet (8), (15) ja (17) toteuttavat yhtälön (6.34),

$$[\mathbf{r}]_O = \mathbf{R}_Z(\Omega)\mathbf{R}_X(i)\mathbf{R}_Z(\omega)[\mathbf{r}]_P,$$

jossa $[\mathbf{r}]_P$ on kappaleen sijainti perifokaalikoordinaatistossa, ja $[\mathbf{r}]_O$ on kappaleen sijainti viitekoordinaatistossa.

Askeleessa (16) lasketaan nousevan solmun maantieteellinen pituus eli longitudi. Yhtälön muoto voidaan selittää sillä että satelliitin efemeridiparametreissa ei anneta nousevan solmun pituutta epookilla ($t = t_{oe}$) vaan viikon alussa ($t = 0$). Tämän vuoksi askeleessa (16) viimeisenä terminä on $\dot{\Omega}_e t_{oe}$ eli Maan pyörimisnopeuden ja epookin tulo. Tämä tulotermi vastaa nousevan solmun longitudin siirtoa ajassa eteenpäin viikon alusta $t = 0$ epookille $t = t_{oe}$. Askeleen (16) keskimäinen termi $(\dot{\Omega} - \dot{\Omega}_e)t_k$ tekee kaksi asiaa: (i) siirtää nousevan solmun longitudin ajassa eteenpäin epookilta $t = t_{oe}$ lähetysajankhetkelle $t = t_k$, ja (ii) korjaa nousevan solmun longitudia lisäten siihen nousevan solmun rektaskension muutosnopeuden $\dot{\Omega}$ aiheuttaman virheen. Inertiaalisessa koordinaatistossa (joka ei pyöri Maan mukana) nousevan solmun rektaskensio (RAAN) on siirtynyt kulman $\dot{\Omega}t_k$ verran epookin $t = t_{oe}$ jälkeen. Ekvaattorikoordinaatistossa (joka

pyörii Maan mukana) nousevan solmun longitudi (LAN) on siirtynyt saman verran, minkä vuoksi edellä mainittu rektaskension muutos voidaan lisätä longitudiin suoraan sellaisenaan.

8.3 Algoritmin tarkastelu

Tehdään yhteenveto siitä, kuinka kattavasti työssä esitetty häiriöttömän rataliikkeen teoria kykenee perustelevaan GPS:n vanhemman navigointiviestin mukaisen efemeridialgoritmin askeleet. Osoittautuu, että häiriöttömän rataliikkeen teoria kykenee perustelevaan noin puolet algoritmin askeleista.

Häiriöttömään rataliikkeeseen perustuvat askeleet

Tehdään yhteenveto niistä algoritmin askeleista, jotka joko eivät vaadi tarkempaa perustelua tai voidaan perustella kokonaan häiriöttömällä rataliikkeellä tämän työn puitteissa. Ne askeleet, joita ei tässä alaluvussa mainita, vaativat esitetyn häiriöttömän rataliikkeen teorian lisäksi muuta teoriaa.

Seuraavat algoritmin 8.1 askeleet eivät varsinaisesti vaadi tarkempaa perustelua:

- (1) radan isoakselin puolikkaan pituus,
- (3) lähetysaika efemeridiparametrien epookin suhteen.

Ensimmäinen kohta seuraa rataparametrin \sqrt{A} määritelmästä, ja jälkimmäinen kohta vastaa yksinkertaisesti koordinaatiston aikatranslaatiota.

Seuraavat algoritmin 8.1 askeleet kykenee tässä työssä esitetty häiriöttömän rataliikkeen teoria perustelevaan kokonaan:

- (2) häiriötön keskiliike epookilla, yhtälö (5.17),
- (5) keskianomalia lähetysajanhetkellä, yhtälö (5.32),
- (6) eksentrisen anomalia ratkaistaan Keplerin yhtälöstä (2.109),
- (7) luonnollinen anomalia, yhtälö (2.92),
- (8) leveyden argumentti, yhtälö (6.57),
- (15) koordinaatit ratatasossa, osa yhtälöä (6.34),
- (17) koordinaatit ekvaattorikoordinaatistossa, osa yhtälöä (6.34).

Tämän työn puitteissa 9/17 askelta algoritmista 8.1 ei vaadi perustelua tai voidaan perustella kokonaan häiriöttömän rataliikkeen teoriolla.

Häiriöttömään rataliikkeeseen perustumattomat askeleet

Seuraavia algoritmin 8.1 askeleita ei tässä työssä esitetty häiriöttömän rataliikkeen teoria kykene perustelemaan kokonaan:

- (4) keskiliikkeen korjaus,
- (9) leveyden argumentin palloharmoninen perturbaatio,
- (10) napasäteen palloharmoninen perturbaatio,
- (11) inkliinaation palloharmoninen perturbaatio,
- (12) leveyden argumentin korjaus,
- (13) napasäteen korjaus,
- (14) inkliinaation korjaus,
- (16) nousevan solmun pituuden korjaus.

Tämän työn puitteissa 8/17 askelta algoritmista 8.1 ei voida perustella häiriöttömän rataliikkeen teorialla.

8.4 Häiritty rataliike: suuntaviivoja

Perustelematta jääneet askeleet edellyttävät ainakin seuraavia asioita: (i) Lagrangen planetaaristen yhtälöiden kehittämistä, (ii) gravitaatiopotentiaalin muodostamista, (iii) gravitaatiopotentiaalin lausekkeen muuntamista Keplerin rataelementtien funktioksi, (iv) gravitaatiopotentiaalin approksimointia, esimerkiksi keskiarvottamalla, ja (v) Lagrangen planetaaristen yhtälöiden ratkaisemista approksimoiden ensimmäiseen kertalukuun asti. Tällä tavoin saadaan klassinen perturbaatioteoria, niin sanottu *ensimmäisen kertaluvun gravitaatiollinen teoria keinotekoisille Maan satelliiteille*. (engl. *first-order gravitational theory for artificial Earth satellites*) [178, s. 310]. Gravitaatiollinen tarkoittaa, että teoriassa ei huomioida muita voimia kuin Maan gravitaatiovoima. Tämä poissulkee erityisesti kitkavoimat.

Tämän työn lähdekirjallisuuden selkeästi syvällisin teos häirityn rataliikkeen teoriaan on Fitzpatrickin [20] taivaanmekaniikan perusteita käsittelevä kirja. Tässä lähteessä näytetään muun muassa (i) Lagrangen planetaaristen yhtälöiden kehittäminen [20, s. 145–96], (ii) gravitaatiopotentiaalin muodostaminen [20, s. 265–80], (iv) gravitaatiopotentiaalin approksimointi [20 s. 280–310], ja (v) Lagrangen planetaaristen yhtälöiden ratkaiseminen approksimoiden ensimmäiseen kertalukuun asti [20, s. 311–8].

Fitzpatrick [20] ei kuitenkaan näytä yksityiskohtaisesti Laplacen yhtälön ratkaisemista, jota Maan gravitaatiopotentiaalin lausekkeen kehittäminen edellyttää. Laplacen yhtälön ratkaiseminen on jo itsessään työläs tehtävä, ja se sisältää osatehtävinä muun muassa Eulerin differentiaaliyhtälön ja Legendren differentiaaliyhtälön ratkaisemisen. Kokonaisuudessaan gravitaatiopotentiaalin kehittäminen on hyvä harjoitus ja erittäin hyödyllinen opintomatka harmonisten funktioiden sekä osittaisten ja tavallisten differentiaaliyhtälöiden maailmaan.

Fitzpatrick ei myöskään selitä tarkemmin, kuinka gravitaatiopotentiaalin lauseke muunnetaan Keplerin rataelementtien funktioksi. Sen sijaan esimerkiksi Seeber [54, s. 89–94] antaa hieman tarkemman esityksen gravitaatiopotentiaalin muuntamisesta Keplerin rataelementtien funktioksi. Lagrangen planetaaristen yhtälöiden kehittäminen näytetään myös lähteissä Beutler [9, s. 208–39] ja Roy [53, s. 223–33].

Vaikka keinotekoisien Maan satelliittien ensimmäisen kertaluvun gravitaatiollinen teoria selittääkin periaatteessa useimmat algoritmin 8.1 askeleista, ei tällöinkään selitys ole täydellinen. Erityisesti algoritmin 8.1 askeleissa (9)–(11) esiintyy toiselle zonaaliharmonille $2\Phi_k$ sekä sini- että kosinitermit, jotka eivät selity tälläkään teorialla. Tois- taiseksi tyhjentävin vastaus GPS:n navigointiviestin ratamallista on annettu Van Dierendonckin artikkelissa [18].

Van Dierendonckin artikkelissa [18, s. 68] todetaan selkeästi, että Lagrangen plane- taaristen yhtälöiden teoreettiset ratkaisut eivät aina edellytä toiselle zonaaliharmonille $2\Phi_k$ molempia korjaustermejä, mutta kokeellisesti ne osoittautuivat varsin hyödyllisik- si. Niiden avulla saadaan huomioitua mallintamattomien häiriöiden aiheuttamat toisen zonaaliharmonin nollasta poikkeavat vaihekulmat. Lisäksi niiden avulla saadaan hu- omioitua Kuun painovoimasta aiheutuvia lyhytkestoisia häiriöitä.

9 YHTEENVETO JA LOPPUSANAT

Tämän työn tavoitteena oli selvittää kirjallisuudesta algoritmin 1.1 yhtälöiden taustalla oleva teoria, ja perustella kukin askel teorialla. Yhtälöiden perustelua varten työssä paneuduttiin syvällisesti taivaanmekaniikan perusteisiin. Työssä ratkaistiin Keplerin ongelma, joka on kahden kappaleen ongelman erikoistapaus ja tarjoaa ideaalin häiriöttömälle rataliikkeelle sekä lähtökohdan häiritylle rataliikkeelle. Häiriöttömän rataliikkeen keskeiset yhtälöt koottiin kolmeksi laskenta-algoritmiksi, jotka osoittavat tilavektorin, integroimisvakioiden ja Keplerin rataelementtien ekvivalenssin ellipsin erikoistapauksessa. Työn tulos on algoritmi 8.1, joka vastaa johdannon algoritmia 1.1, mutta kytkee yhtälöt häiriöttömän rataliikkeen teoriaan.

Häiriöttömän rataliikkeen teorian avulla työ kykenee perustelemaan algoritmin 8.1 askeleista 9/17. Vastaavasti algoritmin 8.1 askeleista 8/17 ei ole perusteltavissa tämän työn puitteissa. Askeleet, joita ei tämän työn puitteissa voida perustella, edellyttävät vähintään häirityn rataliikkeen teoriaa.

Lähdekirjallisuudesta kävi kuitenkin ilmi, että viime kädessä GPS:n vanhan navigointiviestin mukainen ratamalli on kokeellisesti kehitetty. Näin ollen algoritmin 8.1 yhtälöitä ei voida perustella kokonaan, ei ainakaan klassisella Maan keinotekoisien satelliittien ensimmäisen kertaluvun gravitaatiollisella teorialla, joka on GPS:n tapauksessa keskeisin häirityn rataliikkeen teoria.

Tämä työn loppusanoiksi lainataan Keplerin runollista hautakirjoitusta, jonka hän kirjoitti itselleen [38, s. 422]. Nämä sanat kuvastavat hyvin tekijän tuntemuksia, kun tämä opinnäytetyöurakka on saatettu onnellisesti loppuun.

*“I measured skies,
now the shadows I measure.
Skybound was the mind,
earthbound the body rests.”*

– Johannes Kepler

LÄHDELUETTELO

- [1] Ananda M. Navstar Global Positioning System (GPS): future enhanced capabilities. In: Proceedings of the 1st International Symposium on Space Flight Dynamics (ESA SP-160); 1981 May 18–22; Darmstadt, Germany.
- [2] Angelo JA Jr. Encyclopedia of Space and Astronomy. New York (NY): Facts On File, Inc.; 2006.
- [3] Ardema MD. Analytical Dynamics: Theory and Applications. New York (NY): Kluwer Academic/Plenum Publishers; 2005.
- [4] Arnold VI. Mathematical Methods of Classical Mechanics. 2nd ed. New York (NY): Springer-Verlag New York Inc.; 1989.
- [5] Arya AP. Introduction to Classical Mechanics. 2nd ed. Upper Saddle River (NK): Prentice-Hall; 1998.
- [6] Ball, WWR. A Short Account of the History of Mathematics. New York (NY): Dover Publications, Inc.; 1960.
- [7] Bate RR, Mueller DD, White JE. Fundamentals of Astrodynamics. New York (NY): Dover Publications, Inc.; 1971.
- [8] Bellomo N, Preziosi L. Modelling, Mathematical Methods, and Scientific Computation. Boca Raton (FL): CRC Press, Inc.; 1995.
- [9] Beutler G. Methods of Celestial Mechanics. Volume 1: Physical, Mathematical, and Numerical Principles. Berlin (DE): Springer-Verlag; 2005.
- [10] Beutler G. Methods of Celestial Mechanics. Volume 2: Application to Planetary System, Geodynamics and Satellite Geodesy. Berlin (DE): Springer-Verlag; 2005.
- [11] Bôcher M. Plane Analytic Geometry with introductory chapters on the Differential Calculus. New York (NY): Henry Holt and Company; 1915.
- [12] Casey J. A Treatise on the Analytical Geometry of the Point, Line, Circle and Conic Sections. 2nd ed., rev. and enl. Dublin (IE): Hodges, Figgis, and Co. (Ltd.); 1893.
- [13] Coxeter HSM. Introduction to Geometry. New York (NY): John Wiley & Sons, Inc.; 1969.
- [14] Crawley ES, Evans HB. Analytic Geometry. Lancaster (PA): New Era Printing Company; 1918.
- [15] Davidson D, Delikaraoglou D, Langley R, Nickerson B, Vanicek P, Wells D. Global Positioning System Differential Positioning Simulations. Rev. Final report. Fredericton (CA): Dept Surveying Engineering, University of New Brunswick, Department of Surveying Engineering; 1983. Report No.: 90. Contract No.: OSU81-00314.

- [16] Desloge EA. *Classical Mechanics, Volume 1*. New York (NY): John Wiley & Sons, Inc.; 1982.
- [17] Desloge EA. *Classical Mechanics, Volume 2*. New York (NY): John Wiley & Sons, Inc.; 1982.
- [18] Van Dierendonck AJ, Russell SS, Kopitzke ER, Birnbaum M. The GPS Navigation Message. *Navigation*. 1978;25(2):147–65.
- [19] European Union. European GNSS (Galileo) Open Service: Signal in Space Interface Control Document. Issue 1.1. 2010 Sep [cited 2013 Apr 7]. Available from: http://ec.europa.eu/enterprise/policies/satnav/galileo/files/galileo-os-sis-icd-issue1-revision1_en.pdf
- [20] Fitzpatrick PM. *Principles of Celestial Mechanics*. 2nd ed. New York (NY): Academic Press, Inc.; 1970.
- [21] Fitzpatrick R. *An Introduction to Celestial Mechanics*. Cambridge (UK): Cambridge University Press; 2012.
- [22] Forsyth AR. *A Treatise on Differential Equations*. 2nd ed. London (UK): Macmillan and Co.; 1888.
- [23] Gibson CG. *Elementary Euclidean Geometry: An Introduction*. Cambridge (UK): Cambridge University Press; 2003.
- [24] Gibson CG. *Elementary Geometry of Differentiable Curves: An Undergraduate Introduction*. Cambridge (UK): Cambridge University Press; 2001.
- [25] Goldstein H, Poole CP Jr, Safko JL. *Classical Mechanics*. 3rd ed. San Francisco (CA): Addison–Wesley; 2001.
- [26] Grossman SI. *Multivariable Calculus, Linear Algebra, and Differential Equations*. 3rd ed. Fort Worth (TX): Saunders College Publishing; 1995.
- [27] Groves PD. *Principles of GNSS, inertial, and multisensor integrated navigation systems*. Boston (MA): Artech House; 2008.
- [28] Hall A. Kepler’s problem. *The Analyst*. 1883 May 1;10(3):65–6. Available from: <http://www.jstor.org/stable/2635832>
- [29] Hand LN, Finch JD. *Analytical Mechanics*. Cambridge (UK): Cambridge University Press; 1998.
- [30] Harper D. Online etymology dictionary: ephemeris [online]. c2001–13 [cited 2013 May 18]. Available from: <http://www.etymonline.com/index.php?search=ephemeris>
- [31] Harper D. Online etymology dictionary: epoch [online]. c2001–14 [cited 2014 Jun 26]. Available from: <http://www.etymonline.com/index.php?term=epoch>

- [32] Heard WB. *Rigid Body Mechanics: Mathematics, Physics, and Applications*. Weinheim (DE): Wiley–VCH; 2006.
- [33] International Committee of Medical Journal Editors. Uniform requirements for manuscripts submitted to biomedical journals: writing and editing for biomedical publication [online]. Updated 2008 Oct [cited 2013 Feb 2]. Available from: http://www.icmje.org/recommendations/archives/2008_urm.pdf
- [34] Institute of Electrical and Electronics Engineers. IEEE editorial style manual [online]. Updated 2010 Jun 6 [cited 2013 Feb 25]. Available from: <http://www.ieee.org/documents/stylemanual.pdf>
- [35] Karttunen H, Donner KJ, Kröger P, Oja H, Poutanen M. *Tähtitieteen perusteet*. 5. laitos. Helsinki: Tähtitieteellinen yhdistys Ursa ry; 2010.
- [36] Kaplan ED, Leva JL. *Fundamentals of Satellite Navigation*. In: Kaplan ED, Hegarty CJ (eds). *Understanding GPS: principles and applications*. 2nd ed. Norwood (MA): Artech House, Inc.; 2005. Chapter 2.
- [37] Kendig K. *Conics*. The Dolciani Mathematical Expositions #29. Washington (DC): The Mathematical Association of America (Inc); 2005.
- [38] Koestler A. *The Sleepwalkers: A History of Man's Changing Vision of the Universe*. New York (NY): The MacMillan Company; 1959.
- [39] Linton CM. *From Eudoxus to Einstein: A History of Mathematical Astronomy*. Cambridge (UK): Cambridge University Press; 2004.
- [40] Mathúna DÓ. *Integrable Systems in Celestial Mechanics*. Boston (MA): Birkhäuser; 2008.
- [41] McCauley JL. *Classical Mechanics: Transformations, Flows, Integrable and Chaotic Dynamics*. Cambridge (UK): Cambridge University Press; 1997.
- [42] Meiss JD. *Differential Dynamical Systems*. Philadelphia (PA): Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM); 2007.
- [43] Misra P, Enge P. *Global Positioning System: Signals, Measurements, and Performance*. 2nd ed. Lincoln (MA): Ganga–Jamuna Press; 2006.
- [44] Moore P (ed). *Philip's Astronomy Encyclopedia*. Fully rev. and expanded ed. London: Philip's; 2002. ISBN: 0–540–07863–8.
- [45] Moulton FR. *An Introduction to Celestial Mechanics*. 2nd rev. ed. New York (NY): The Macmillan Company; 1914.
- [46] Newton I, Cajori F (ed). *Sir Isaac Newton's Mathematical Principles of Natural Philosophy and His System of the World (Principia)*. 5th printing. Motte A (trans.); Crawford RT (ed.). Los Angeles (CA): University of California Press; 1975, c1934. ISBN: 0–520–00927–4.

- [47] University of Chicago. The Chicago Manual of Style [online]. 16th ed. Chicago (IL): University of Chicago Press; 2010. Available from: <http://www.chicagomanualofstyle.org/16/contents.html>
- [48] Patrias K; Wendling D (ed). Citing medicine: the NLM style guide for authors, editors, and publishers [online]. 2nd ed. Bethesda (MD): National Library of Medicine (US); 2007–. Available from: <http://www.ncbi.nlm.nih.gov/books/NBK7256/>
- [49] Poutanen M. Satelliittipaikannus-kirjan käsikirjoitusta, luvut 1–3 (osittain) [kirjaluonnos verkossa]. 2007 [muokattu 5.1.2010; viitattu 18.7.2011]. Saatavissa: <http://www.fgi.fi/~mp/>
- [50] Prince GE, Elizer CJ. On the Lie symmetries of the classical Kepler problem. J Phys A: Math Gen. 1981 Mar 1;14(3):587–96.
- [51] Roman S. Advanced Linear Algebra. 3rd ed. New York (NY): Springer Science+Business media, LLC; 2008.
- [52] Roy AE, Clarke D. Astronomy: Principles and Practice. 4th ed. London: Institute of Physics Publishing; 2003.
- [53] Roy AE. Orbital Motion. 4th ed. Bristol (UK): IOP Publishing Ltd.; 2005.
- [54] Seeber G. Satellite Geodesy. 2nd ed. Berlin: Walter de Gruyter; 2003.
- [55] Slichter CS. Elementary Mathematical Analysis. 2nd rev. and reset ed. New York (NY): McGraw-Hill Book Company, Inc.; 1918.
- [56] Taylor JR. Classical Mechanics. Sausalito (CA): University Science Books; 2005.
- [57] Thornton ST, Marion JB. Classical dynamics of particles and systems. 5th ed. Belmont (CA): Thomson Brooks/Cole; 2004.
- [58] Unicode Consortium. The Unicode Standard, Version 6.1.0. Mountain View (CA): The Unicode Consortium; 2012 [cited 2012 Sep 23]. Character code chart: Miscellaneous Symbols. Available from: <http://unicode.org/charts/PDF/U2600.pdf>
- [59] US Department of Defense. GPS Directorate. Interface Specification IS-GPS-200: Navstar GPS Space Segment/Navigation User Interfaces [online]. Revision G. El Segundo (CA): Science Applications International Corporation; 2012 Sep 5 [cited 2013 May 15]. Available from: <http://www.gps.gov/technical/icwg/IS-GPS-200G.pdf>
- [60] Vallado DA. Fundamentals of Astrodynamics and Applications. 2nd ed. El Segundo (CA): Microcosm Press; 2004.
- [61] Weisstein EW. CRC Concise Encyclopedia of Mathematics. Boca Raton (FL): CRC Press; 1999.

- [62] Wertz JR (ed). Spacecraft Attitude Determination and Control. Dordrecht (NL): Kluwer Academic Publishers; 1978.
- [63] Wittenburg J. Dynamics of Multibody Systems. 2nd ed. Berlin (DE): Springer-Verlag; 2008.

LIITE A: TRIGONOMETRISIA IDENTITEETTEJÄ

Peruskaava

Tunnetuin trigonometrinen identiteetti on trigonometrinen Pythagoraan lause

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1. \quad (\text{A.1})$$

Tätä yhtälöä hyödynnyttään lähes kaikkien tässä liitteessä esitettävien identiteettien johdamisessa.

Tangenttifunktion yhteydet kosini- ja sinifunktioon

Peruskaavasta (A.1) johdetaan sini- ja kosinifunktion toisen potenssin esitys tangenttifunktioina. Lasketaan esitys ensimmäiseksi sinille, ja sen jälkeen kosinille.

Ratkaistaan peruskaava (A.1) sinitermin $\sin^2 x$ suhteen. Jaetaan puolittain sinitermillä $\cos^2 x$, jolloin oikean puolen jälkimmäiseksi termiksi saadaan tangenttitermi $1/\tan^2 x$. Vähennetään tangenttitermi puolittain, ja otetaan yhtälöstä käänteisarvo puolittain. Saadaan identiteetti

$$\cos^2 x = \frac{1}{1 + \tan^2 x}. \quad (\text{A.2})$$

Ratkaistaan peruskaava (A.1) sinitermin $\sin^2 x$ suhteen. Korvataan yhtälön oikean puolen kosinitermi $\cos^2 x$ identiteetillä (A.2), ja sievennetään. Saadaan identiteetti

$$\sin^2 x = \frac{\tan^2 x}{1 + \tan^2 x}. \quad (\text{A.3})$$

Jos näistä identiteeteistä otetaan neliöjuuri, riippuu oikean puolen etumerkki nimittäjään jäävän neliöjuuren etumerkistä. Kun kosini- ja sinifunktiot jätetään toisiksi potensseiksi, on etumerkki määrätty, mikä helpottaa yhtälöiden muodostamista.

Summakaavat kosinin ja sinin

Eulerin kaavan mukaan

$$e^{i\theta} = i \sin \theta + \cos \theta.$$

Sovelletaan Eulerin kaavaa identiteettiin

$$e^{i(x+y)} = e^{ix} e^{iy},$$

jolloin saadaan kosinin ja sinin kulmien summia koskevat identiteetit

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y, \quad (\text{A.4})$$

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y. \quad (\text{A.5})$$

Nämä identiteetit tunnetaan yleisesti kosinin ja sinin summakaavoina.

Kulman puolitukset sinille ja kosinille

Sijoitetaan kulma $x = (x/2) + (x/2)$ summakaavoihin (A.4) ja (A.5). Saadaan identiteetit

$$\cos x = \cos^2(x/2) - \sin^2(x/2), \quad (\text{A.6})$$

$$\sin x = 2 \sin(x/2) \cos(x/2). \quad (\text{A.7})$$

Näiden identiteettien avulla kosini- ja sinifunktion argumenttina oleva kulma voidaan puolittaa.

Kulman puolitukset sinille ja kosinille esitettynä tangentilla

Korvataan identiteettien (A.6) ja (A.7) oikeanpuoleiset kosini- ja sinitermit identiteettien (A.2) ja (A.3) avulla vastaavasti. Sievennysten jälkeen saadaan identiteetit

$$\cos x = \frac{1 - \tan^2(x/2)}{1 + \tan^2(x/2)}, \quad (\text{A.8})$$

$$\sin x = \frac{2 \tan(x/2)}{1 + \tan^2(x/2)}. \quad (\text{A.9})$$

Sinin identiteetin (A.7) tapauksessa yhtälöistä (A.2) ja (A.3) täytyy ottaa neliöjuuri puolittain, joka vuorostaan tarkoittaa, että neliöjuurten etumerkki riippuu nimittäjään jäävän neliöjuuren etumerkistä. Yhtälön (A.7) tapauksessa neliöjuurten nimittäjien etumerkit ovat aina samat, jolloin niiden tulo on aina positiivinen.

Kulmien tuplaukset sinille ja kosinille

Korvataan identiteetin (A.6) oikealta puolelta joko (i) sinitermi $\sin^2(x/2)$ tai (ii) kosinitermi $\cos^2(x/2)$ käyttäen peruskaavaa (A.1). Sen jälkeen yhtälö ratkaistaan jäljelle jääneen (i) kosinitermin $\cos^2(x/2)$ tai (ii) sinitermin $\sin^2(x/2)$ suhteen. Saadaan identiteetit

$$\cos^2(x/2) = \frac{1}{2}(1 + \cos x), \quad (\text{A.10})$$

$$\sin^2(x/2) = \frac{1}{2}(1 - \cos x), \quad (\text{A.11})$$

jotka vastaavat tapauksia (i) ja (ii) vastaavasti.

LIITE B: LUONNOLLINEN JA EKSENTRINEN ANOMALIA

Luonnollisen anomalian ν ja eksentrisen anomalian E välinen kytkentä määritellään luvussa 4.9 integraalin 6 yhtälöillä (4.144) ja (4.155). Kun muuttujanvaihdot yhdistetään, saadaan yhtälö (4.164), joka esitetään tässä uudelleennumeroituna:

$$\tan \frac{\nu}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \tan \frac{E}{2}. \quad (\text{B.1})$$

Toisaalta, yhtälö (4.164) voidaan esittää myös toisin päin muodossa

$$\tan \frac{E}{2} = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \tan \frac{\nu}{2}. \quad (\text{B.2})$$

Tässä liitteessä yhtälöistä (B.1) ja (B.2) ratkaistaan sekä luonnollinen että eksentrisen anomalia.

Yleistetty muuttujanvaihto

Yhtälöt (B.1) ja (B.2) voidaan esittää yhdellä yhtälöllä

$$\tan \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1 \pm e}{1 \mp e}} \tan \frac{y}{2}, \quad (\text{B.3})$$

jossa symbolien \pm ja \mp operaatioista valitaan joko (i) ylemmät, jotka vastaavat yhtälön (B.1) tapausta $x = \nu$ ja $y = E$, tai (ii) alemmat, jotka vastaavat yhtälön (B.2) tapausta $x = E$ ja $y = \nu$.

Sinin lauseke

Trigonometrisen identiteetin (A.9) perusteella

$$\sin x = \frac{2 \tan(x/2)}{\tan^2(x/2) + 1}. \quad (\text{B.4})$$

Korvataan oikean puolen tangenttitermit yleistetyn muuttujanvaihdon (B.3) mukaisesti,

$$\sin x = \frac{2 \sqrt{\frac{1 \pm e}{1 \mp e}} \tan \frac{y}{2}}{\frac{1 \pm e}{1 \mp e} \tan^2 \frac{y}{2} + 1}. \quad (\text{B.5})$$

Lavennetaan oikean puolen murtolauseketta termillä $(1 \mp e) \cos^2(y/2)$, jolloin

$$\sin x = \frac{2 \sqrt{1 \pm e} \sin(y/2) \sqrt{1 \mp e} \cos(y/2)}{(1 \pm e) \sin^2(y/2) + (1 \mp e) \cos^2(y/2)}. \quad (\text{B.6})$$

Lasketaan sulut auki, ja ryhmitellään termejä. Saadaan yhtälö

$$\sin x = 2 \frac{\sqrt{(1 \pm e)(1 \mp e)} \sin(y/2) \cos(y/2)}{\sin^2(y/2) + \cos^2(y/2) \mp e(\cos^2(y/2) - \sin^2(y/2))}. \quad (\text{B.7})$$

Sovelletaan trigonometrisia identiteettejä (A.1) sekä (A.6) ja (A.7). Saadaan tulos

$$\sin x = \frac{\sqrt{1 - e^2} \sin y}{1 \mp e \cos y}, \quad (\text{B.8})$$

jossa symbolien \pm ja \mp operaatioista (i) ylemmät vastaavat tapausta $x = \nu$ ja $y = E$, ja (ii) alemmat vastaavat tapausta $x = E$ ja $y = \nu$.

Kosinin lauseke

Trigonometrisen identiteetin (A.8) perusteella

$$\cos x = \frac{1 - \tan^2(x/2)}{1 + \tan^2(x/2)}. \quad (\text{B.9})$$

Korvataan oikean puolen tangenttitermit yleistetyn muuttujanvaihdon (B.3) mukaisesti,

$$\cos x = \frac{1 - \frac{1 \pm e}{1 \mp e} \tan^2(y/2)}{1 + \frac{1 \pm e}{1 \mp e} \tan^2(y/2)}. \quad (\text{B.10})$$

Lavennetaan oikean puolen murtolauseketta termillä $(1 \mp e) \cos^2(y/2)$, jolloin

$$\cos x = \frac{(1 \mp e) \cos^2(y/2) - (1 \pm e) \sin^2(y/2)}{(1 \mp e) \cos^2(y/2) + (1 \pm e) \sin^2(y/2)}. \quad (\text{B.11})$$

Lasketaan sulut auki, ja ryhmitellään termejä. Saadaan yhtälö

$$\cos x = \frac{\cos^2(y/2) - \sin^2(y/2) \mp e(\cos^2(y/2) + \sin^2(y/2))}{\cos^2(y/2) + \sin^2(y/2) \mp e(\cos^2(y/2) - \sin^2(y/2))}. \quad (\text{B.12})$$

Sovelletaan trigonometrisia identiteettejä (A.1) ja (A.6). Saadaan tulos

$$\cos x = \frac{\cos y \mp e}{1 \mp e \cos y}, \quad (\text{B.13})$$

jossa symbolien \pm ja \mp operaatioista (i) ylemmät vastaavat tapausta $x = \nu$ ja $y = E$, ja (ii) alemmat vastaavat tapausta $x = E$ ja $y = \nu$.

Tangentin lauseke

Jaetaan sinin yhtälö (B.8) puolittain kosinin yhtälöllä (B.13), ja sievennetään. Saadaan tulos

$$\tan x = \frac{\sqrt{1 - e^2} \sin y}{\cos y \mp e}, \quad (\text{B.14})$$

jossa symbolien \pm ja \mp operaatioista (i) ylemmät vastaavat tapausta $x = \nu$ ja $y = E$, ja (ii) alemmat vastaavat tapausta $x = E$ ja $y = \nu$.

Ratkaisu

Yhtälön (B.14) ylempien operaatioiden tapauksen (i) $x = \nu$ ja $y = E$ perusteella

$$\tan \nu = \frac{\sqrt{1-e^2} \sin E}{\cos E - e}, \quad (\text{B.15})$$

josta luonnollisen anomalian ratkaisuksi saadaan

$$\nu = \operatorname{atan} 2\left(\sqrt{1-e^2} \sin E, \cos E - e\right). \quad (\text{B.16})$$

Yhtälön (B.14) alempien operaatioiden tapauksen (ii) $x = E$ ja $y = \nu$ perusteella

$$\tan E = \frac{\sqrt{1-e^2} \sin \nu}{\cos \nu + e}, \quad (\text{B.17})$$

josta eksentrisen anomalian ratkaisuksi saadaan

$$E = \operatorname{atan} 2\left(\sqrt{1-e^2} \sin \nu, \cos \nu + e\right). \quad (\text{B.18})$$

Todettakoon vielä yhteenvedona, että tulokset (B.16) ja (B.18) seurasivat pelkästään yhtälöstä (B.1) ja trigonometrisista identiteeteistä

LIITE C: NOPEUSVEKTORI JA DERIVAATAT AJAN SUHTEEN

Tässä liitteessä näytetään, kuinka rataelementeistä lasketaan nopeusvektori,

$$a, e, i, \Omega, \omega, t_p \rightarrow \dot{\mathbf{r}}. \quad (\text{C.1})$$

Nopeusvektorin laskeminen edellyttää algoritmin 7.3 yhtälöiden derivointia aikamuuttujan t suhteen.

Tässä liitteessä suoritetaan ensin algoritmin 7.3 yhtälöiden eli rataelementtien derivoinnit ajan suhteen. Sen jälkeen rataelementtien aikaderivaattoja hyödyntäen esitetään algoritmi nopeusvektorin laskemiseksi.

Keskianomalia: aikaderivaatta

Algoritmin 7.3 askeleessa (2) keskianomalia lasketaan yhtälöllä (5.32),

$$M = n(t - t_0) + M_0.$$

Derivoidaan yhtälö (5.32) puolittain ajan suhteen. Saadaan tulos

$$\frac{dM}{dt} = n. \quad (\text{C.2})$$

Tämä päättää keskianomalian aikaderivaatan käsittelyn.

Eksentrisen anomalia: aikaderivaatta

Algoritmin 7.3 askeleessa (3) eksentrisen anomalia E ratkaistaan Keplerin yhtälöstä (2.109),

$$M = E - e \sin E.$$

Derivoidaan yhtälö (2.109) puolittain ajan suhteen. Saadaan

$$\frac{dM}{dt} = \frac{dE}{dt} (1 - e \cos E). \quad (\text{C.3})$$

Ratkaistaan yhtälö (C.3) eksentrisen anomalian aikaderivaatan dE/dt suhteen, jolloin

$$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{1 - e \cos E} \frac{dM}{dt}. \quad (\text{C.4})$$

Korvataan yhtälössä (C.4) esiintyvä keskianomalian aikaderivaatta dM/dt käyttäen yhtälöä (C.2). Saadaan tulos

$$\frac{dE}{dt} = \frac{n}{1 - e \cos E}. \quad (\text{C.5})$$

Tämä päättää eksentrisen anomalian aikaderivaatan käsittelyn.

Luonnollisen anomalia: aikaderivaatta

Algoritmin 7.3 askeleessa (4) luonnollinen anomalia ratkaistaan eksentrisestä anomaliasta yhtälöllä (2.92),

$$v = \operatorname{atan} 2\left(\sqrt{1-e^2} \sin E, \cos E - e\right).$$

Derivoinnin helpottamiseksi yhtälön (2.92) kaksipaikkainen arkustangenttifunktio $\operatorname{atan} 2(\cdot, \cdot)$ korvataan ensin tavallisella, yksipaikkaisella arkustangenttifunktiolla $\arctan(\cdot)$. Saadaan yhtälö

$$v = \arctan \frac{\sqrt{1-e^2} \sin E}{\cos E - e}. \quad (\text{C.6})$$

Arkustangenttifunktion derivaatta on tunnetusti

$$\frac{d}{dx} [\arctan y(x)] = \frac{1}{1+y^2} \frac{dy}{dx}. \quad (\text{C.7})$$

Yhtälön (C.6) tapauksessa

$$y = \frac{\sqrt{1-e^2} \sin E}{\cos E - e}, \quad (\text{C.8})$$

josta saadaan laskettua

$$\frac{1}{1+y^2} = \frac{(\cos E - e)^2}{(1 - e \cos E)^2}. \quad (\text{C.9})$$

Derivoidaan yhtälö (C.8) muuttujan $x = t$ suhteen.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dt} \left[\frac{\sqrt{1-e^2} \sin E}{\cos E - e} \right]. \quad (\text{C.10})$$

Jakolaskun derivointisäännön mukaan yhtälöstä (C.10) seuraa

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{d}{dt} [\sqrt{1-e^2} \sin E] (\cos E - e) - (\sqrt{1-e^2} \sin E) \frac{d}{dt} [\cos E - e]}{(\cos E - e)^2}. \quad (\text{C.11})$$

Suoritetaan vielä osoittajassa jäljellä olevat derivoinnit ajan suhteen, jolloin

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{1-e^2} \cos E (\cos E - e) + \sqrt{1-e^2} \sin^2 E \frac{dE}{dt}}{(\cos E - e)^2}. \quad (\text{C.12})$$

Sievennysten jälkeen saadaan tulos, yhtälön (C.8) derivaatta muuttujan $x = t$ suhteen,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{1-e^2} (1 - e \cos E) \frac{dE}{dt}}{(\cos E - e)^2}. \quad (\text{C.13})$$

Sijoitetaan (C.9) ja (C.13) arkustangentin aikaderivaatan yhtälöön (C.7), ja sievennetään. Saadaan yhtälön (C.6) derivaatta ajan suhteen

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{1-e\cos E} \frac{dE}{dt}. \quad (\text{C.14})$$

Korvataan yhtälössä (C.14) esiintyvä eksentrisen anomalian aikaderivaatta dE/dt käyttäen yhtälöä (C.5). Saadaan tulos, luonnollisen anomalian aikaderivaatta

$$\frac{dv}{dt} = \frac{n\sqrt{1-e^2}}{(1-e\cos E)^2}. \quad (\text{C.15})$$

Tämä päättää luonnollisen anomalian aikaderivaatan käsittelyn.

Napasäde: aikaderivaatta

Algoritmin 7.3 askeleessa (5) napasäde lasketaan yhtälöllä (2.79),

$$r = a(1 - e \cos E).$$

Sekä isoakselin puolikas että eksentrisyys ovat vakioita ajan suhteen, kun taas eksentrisen anomalia riippuu ajasta. Derivoidaan yhtälö (2.79) ajan suhteen,

$$\frac{dr}{dt} = ae \sin E \frac{dE}{dt}. \quad (\text{C.16})$$

Korvataan yhtälössä (C.16) esiintyvä eksentrisen anomalian aikaderivaatta dE/dt käyttäen yhtälöä (C.5). Saadaan tulos, napasäteen aikaderivaatta

$$\frac{dr}{dt} = \frac{nae \sin E}{1 - e \cos E}. \quad (\text{C.17})$$

Tämä päättää napasäteen aikaderivaatan käsittelyn.

Sijainti perifokaalikoordinaatistossa: aikaderivaatta

Algoritmin 7.3 askeleessa (6) lasketaan kiertolaisen sijainti perifokaalikoordinaatistossa yhtälöllä (6.35),

$$[\mathbf{r}]_p = \begin{bmatrix} r \cos \nu \\ r \sin \nu \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Ellipsin geometriasta tiedetään, että luonnollinen anomalia ν vastaa urapisteen oikeaa fokaalikulmaa ja eksentrisen anomalia E vastaa urapisteen eksentristä kulmaa. Näin ollen yhtälön (6.35) kosini- ja sinifunktio voidaan esittää eksentrisen anomalian E funktioina käyttäen yhtälöitä (2.82) ja (2.83),

$$\cos \nu = \frac{\cos E \pm e}{1 \pm e \cos E},$$

$$\sin \nu = \frac{\sqrt{1-e^2} \sin E}{1 \pm e \cos E},$$

joissa symbolin \pm ylempi operaatio vastaa vasemman fokaalikulman $\nu = \nu_1$ tapausta ja alempi operaatio oikean fokaalikulman $\nu = \nu_2$ tapausta.

Korvataan yhtälön (6.35) kosini- ja sinifunktio yhtälöillä (2.82) ja (2.83) oikean fokaalikulman tapauksessa, jolloin symbolista \pm valitaan alempi operaatio. Yhtälöiden (2.82) ja (2.83) yhteinen nimittäjä $1 - e \cos E$ tuodaan ulos vektorista sen skalaarikerroimeksi. Lisäksi napasäde korvataan käyttäen yhtälöä (2.79) oikean fokaalikulman tapauksessa, jolloin

$$r = a(1 - e \cos E),$$

Tällöin vektorin skalaarikerroin sievenee pelkäksi isoakselin puolikkaaksi. Näiden toimenpiteiden jälkeen yhtälö (6.35) on saatettu muotoon

$$[\mathbf{r}]_P = a \begin{bmatrix} \cos E - e \\ \sqrt{1-e^2} \sin E \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (\text{C.18})$$

joka on derivoinnin kannalta huomattavasti vähempitöinen kuin alkuperäinen yhtälö (6.35).

Derivoidaan yhtälö (C.18), jonka ainoat ajasta termit ovat eksentrisen kulman sini ja kosini. Saadaan

$$\left[\frac{d\mathbf{r}}{dt} \right]_P = a \frac{dE}{dt} \begin{bmatrix} -\sin E \\ \sqrt{1-e^2} \cos E \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{C.19})$$

Korvataan yhtälössä (C.19) esiintyvä eksentrisen anomalian aikaderivaatta dE/dt käyttäen yhtälöä (C.5). Saadaan tulos, nopeus perifokaalikoordinaatistossa

$$\left[\frac{d\mathbf{r}}{dt} \right]_P = \frac{na}{1 - e \cos E} \begin{bmatrix} -\sin E \\ \sqrt{1-e^2} \cos E \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{C.20})$$

Tämä päättää sijaintivektorin derivoinnin ajan suhteen perifokaalikoordinaatistossa.

Sijainti viitekoordinaatistossa: aikaderivaatta

Algoritmin 7.3 askeleessa (7) lasketaan sijainti viitekoordinaatistossa yhtälöllä (6.34),

$$[\mathbf{r}]_O = \mathbf{R}_Z(\Omega) \mathbf{R}_X(i) \mathbf{R}_Z(\omega) [\mathbf{r}]_P.$$

Koska radan asentokulmat ovat vakioita, on kappaleen sijainti perifokaalikoordinaatistossa esitettyä tämän yhtälön ainoa ajasta riippuva termi. Derivoidaan yhtälö (6.34) ajan suhteen. Saadaan tulos, nopeus viitekoordinaatistossa

$$[\dot{\mathbf{r}}]_o = \mathbf{R}_z(\varrho)\mathbf{R}_x(i)\mathbf{R}_z(\omega)[\dot{\mathbf{r}}]_p. \quad (\text{C.21})$$

Tämä päättää sijaintivektorin derivoinnin ajan suhteen viitekoordinaatiston.

Algoritmi: rataelementit nopeusvektoriksi

Sovelletaan edellä johdettuja yhtälöitä. Tämä algoritmi on algoritmin 7.3 derivaatta ajan suhteen.

Algoritmi C.1. Keplerin rataelementit nopeusvektoriksi, $a, e, i, \omega, \Omega, t_p \rightarrow \dot{\mathbf{r}}_k$.

(1) Keskiliike, yhtälö (5.17),

$$n = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}.$$

(2) Keskianomalia, yhtälö (5.32),

$$M = n(t - t_0) + M_0.$$

(3) Eksentrisen anomalia E ratkaistaan Keplerin yhtälöstä (2.109),

$$M = E - e \sin E.$$

(4) Nopeus perifokaalikoordinaatistossa, yhtälö (C.20),

$$\left[\frac{d\mathbf{r}}{dt} \right]_P = \frac{na}{1 - e \cos E} \begin{bmatrix} -\sin E \\ \sqrt{1 - e^2} \cos E \\ 0 \end{bmatrix}.$$

(5) Nopeus viitekoordinaatistossa, yhtälö (C.21),

$$[\dot{\mathbf{r}}]_O = \mathbf{R}_Z(\Omega) \mathbf{R}_X(i) \mathbf{R}_Z(\omega) [\dot{\mathbf{r}}]_P.$$

(Algoritmi päättyy)