TAMPEREEN TEKNILLINEN YLIOPISTO

JUHO SALMINEN

PROJEKTIOPPIMINEN MATEMATIIKASSA LIIKUNNALLISILLA PROJEKTEILLA

Diplomityö

Tarkastaja: Sirkka-Liisa Eriksson
Tarkastaja ja aihe hyväksytty
Luonnontieteiden tiedekuntaneuvoston
kokouksessa 04.11.2015

TIIVISTELMÄ

TAMPEREEN TEKNILLINEN YLIOPISTO
Teknis-luonnontieteellinen koulutusohjelma
JUHO SALMINEN: Projektioppiminen matematiikassa liikunnallisilla projekteilla
Diplomityö, 88 sivua, 30 liitesivua
Maaliskuu 2016
Pääaine: Matematiikka
Tarkastajat: Professori Sirkka-Liisa Eriksson
Avainsanat: Projektioppiminen, matematiikan opetus, matematiikan oppiminen

Opetus on perinteisesti nähty toimintana, jossa opettaja pyrkii siirtämään passiivisesti toimivalle oppilaalle tietoa. Vähitellen ajatus aktiivisesta oppijasta, joka jäsentelee tietoaan ja rakentaa uutta informaatiota aiemman oppimansa pohjalta, on levinnyt opettamiseen. Tähän, konstruktivistiseen oppimisnäkemykseen pohjautuen opetuksessa käytettävät menetelmät ovat monipuolistuneet. Yhtenä uutena työskentelyn tapana voidaan pitää projektiopiskelua.

Projektiopiskelussa korostuvat laaja-alainen, oppiainerajat ylittävä työskentely ja mielekkäiden ongelmien tutkiminen. Keskeisiä ominaisuuksia projektityöskentelyssä ovat toiminnallisuus, ongelmakeskeisyys, tulosvastuullisuus, yhteistoiminnallisuus ja suunnitelmallisuus. Uusissa perusopetuksen opetussuunnitelman perusteissa 2014 kannustetaan käyttämään pitkäkestoisia, kokemuksellisia ja vuorovaikutteisia oppimiskokonaisuuksia, joten ne mahdollistavat opetuksessa käytettävän projektiopiskelun tapaisia, oppilaskeskeisiä työskentelytapoja. Lisäksi toiminnan kannalta on tärkeätä, että projektioppiminen kohdistuu opetussuunnitelman perusteissa esiteltyihin sisältöihin. Siksi toteutettavassa projektissa käsiteltäväksi aihepiiriksi valitaan usein jokin opetussuunnitelman osa, kuten on toimittu tässäkin diplomityössä esiteltävien projektien tapauksessa.

Suunniteltujen projektien tarkoituksena on kannustaa oppilaita matematiikan oppimiseen. Mahdollisuutena tähän on nähty matematiikan ja liikunnan opetusta eheyttävät liikunnalliset projektit. Tämä johtuu siitä, että liikkuminen voi rohkaista energisiä oppilaita matematiikan oppimiseen, jossa painottuu helposti oppijan sisäinen toiminta, ajattelu. Projektien liikunnallisissa osioissa kokeillaan yläkoulun liikunnan opetuksessa painottuvia lajeja, kuten palloilupelejä, yleisurheilua ja suunnistamista. Mitatuista nuorten liikuntasuorituksista saadaan vaihtelevaa aineistoa, jota on mahdollista tutkia tarkemmin erilaisia matemaattisia käsitteitä ja malleja käyttäen.

Työssä on kuvailtu myös kahta liikkumiseen liittyvää projektia, jotka toteutetaan yhdessä valtakunnallisten organisaatioiden kanssa. Taitojalkapalloprojektissa tehdään yhteistyötä Suomen Palloliiton ja keihäänheittoprojektissa Tampereen teknillisen yliopiston kanssa. Näiden projektien myötä oppilaat havaitsevat matematiikan tarpeen erilaisten ilmiöiden perehtymisen ja ratkaisujen suunnittelemisen kannalta. Yhteistyöprojektit tarjoavat oppilaille mahdollisuuden tutustua työelämään ja siellä vaikuttaviin merkittäviin järjestöihin.

ABSTRACT

TAMPERE UNIVERSITY OF TECHNOLOGY
Master's Degree Programme in Science and Engineering
JUHO SALMINEN: Project-based learning in mathematics with athletic projects
Master of Science Thesis, 88 pages, 30 Appendix pages
March 2016
Major: Mathematics
Examiner: Professor Sirkka-Liisa Eriksson
Keywords: Project-based learning, mathematics teaching, mathematics learning

Traditionally, teaching has been seen as a process where the teacher aims to transfer knowledge to a passive subject, the student. Gradually, the idea of an active participant, who analyses and builds knowledge based on earlier experience, has spread to teaching. As a result of this constructive view of studying the methods used in teaching have become more diverse. One of these new methods is project study.

In project study, multidisciplinary way of working and solving meaningful problems, is emphasized. The key characteristics of project work are functionality, problem-orientation, accountability, co-operation and orderliness. In the new National Core Curriculum for Basic Education, it is encouraged to use sustained, experimental and interactive learning entities which enable the usage of student-centered teaching methods such as project study. Additionally, it is vital that project-based learning is utilised in harmony with the general guidelines of National Core Curriculum. This is the reason why the projects are focused on certain subject which is also done in the projects included in this Master of Science thesis.

The aim of the planned projects is to encourage the pupils to mathematics learning. The chosen approach is to combine mathematics and sports in a manner that benefits both subjects. The rationale is that exercising might encourage energetic pupils to study mathematics as it allows them to see mathematics differently from a more practical angle. The athletic related projects are chosen based on existing, widely used sports such as ball games, athletics and orienteering. The sports performances of pupils which are measured, are later analysed via mathematical concepts and models.

In the thesis, there are two athletic related projects which are implemented in co-operation with two national organizations. The football skill project is done with the Football Association of Finland and the javelin throw project with the Tampere University of Technology. As a result of these projects the pupils realize the practical importance of mathematics. Additionally, these co-operative projects allow pupils to get to know work life and some significant organisations.

ALKUSANAT

Tämä työ on tehty Tampereen teknillisen yliopiston matematiikan laitoksella. Sain kesällä 2015 diplomityöpaikan matematiikan laitokselta, mistä olin todella otettu. Kaikkein hienointa oli, että laitoksen väki otti minut välittömästi innolla vastaan.

Haluan kiittää työn ohjauksesta ja tarkastamisesta professori Sirkka-Liisa Erikssonia. Kiitokset kuuluvat myös Suomen Palloliiton nuorisopäällikölle Marko Viitaselle ja Tampereen teknillisen yliopiston professorille Lauri Kettuselle yhteistyöhalukkuudesta projektien toteuttamiseksi.

Suuri kiitos kuuluu työkavereilleni Elinalle ja Ari-Mikolle, jotka ovat jaksaneet vastata moniin niin työhön kuin muuten elämään liittyviin kysymyksiini. Kaikkein eniten haluan kuitenkin kiittää perhettäni ja läheisiäni, jotka ovat auttaneet minua jaksamaan opintojeni aikana.

Tampereella 24.02.2016

Juho Salminen

SISÄLLYS

1. Johdanto 1
2. Matematiikan opetus ja oppiminen 3
2.1 Opetus 3
2.1.1 Opettajan perustiedot 8
2.1.2 Käsityksiä hyvästä opetuksesta 12
2.1.3 Matematiikan opetus 16
2.2 Opiskelu ja oppiminen 18
2.2.1 Konstruktivistinen oppimiskäsitys 21
2.2.2 Matematiikan oppiminen 24
2.2.3 Oppimisen uusi kouluvisio 25
3. Projektioppiminen peruskoulun opetuksessa 28
3.1 Projektityöskentely ja -oppiminen 28
3.2 Projektioppiminen ja opetussuunnitelma 35
4. Liikunnallisia projekteja yläkoulun matematiikan opetukseen 42
4.1 Suoraan verrannollisuuden ja nopeuden tutkiminen yleisurheilun avulla 42
4.1.1 Matemaattinen tausta 42
4.1.2 Projektin kuvaus 47
4.1.3 Pohjautuminen opetussuunnitelman perusteisiin 48
4.1.4 Projektin edut ja ongelmakohdat 49
4.2 Tasogeometriaan tutustuminen QR-koodeilla selvitetyillä työpisteillä . 50
4.2.1 Matemaattinen tausta 50
4.2.2 Projektin kuvaus 51
4.2.3 Pohjautuminen opetussuunnitelman perusteisiin 53
4.2.4 Projektin edut ja ongelmakohdat 53
4.3 Yleisurheilu- ja tennisprojekti tilastoihin ja todennäköisyyksiin tutustumiseksi 54
4.3.1 Matemaattinen tausta 54
4.3.2 Projektin kuvaus 57
4.3.3 Pohjautuminen opetussuunnitelman perusteisiin 59
4.3.4 Projektin edut ja ongelmakohdat 59
4.4 Koripalloprojekti 60
4.4.1 Matemaaattinen tausta 60
4.4.2 Projektin kuvaus 63
4.4.3 Pohjautuminen opetussuunnitelman perusteisiin 64
4.4.4 Projektin edut ja ongelmakohdat 65
5. Yritysyhteistyöprojekteja eri järjestöjen kanssa yläkoulun matematiikan opetuksessa 67

5.1 Taitojalkapalloprojekti 67
5.1.1 Matemaattinen tausta 67
5.1.2 Suomen Palloliitto ja taitokilpailut 68
5.1.3 Projektin kuvaus 69
5.1.4 Pohjautuminen opetussuunnitelman perusteisiin 70
5.1.5 Projektin edut ja ongelmakohdat 71
5.2 Keihäänheittoprojekti 72
5.2.1 Matemaattinen ja fysikaalinen tausta 72
5.2.2 Tutkimusryhmä 77
5.2.3 Projektin kuvaus 77
5.2.4 Pohjautuminen opetussuunnitelman perusteisiin 78
5.2.5 Projektin edut ja ongelmakohdat 79
6. Yhteenveto 81
Lähteet 83
A. Projektityöohjeita 89
A.1 Yleisurheilun avulla suoraan verrannollisuuden ja nopeuden tutkiminen 89
A.2 Tasogeometriaan tutustuminen QR-koodeilla selvitetyillä työpisteillä . 93
A.3 Yleisurheilu- ja tennisprojekti tilastoihin ja todennäköisyyksiin tutustumiseksi 99
A.4 Koripalloprojekti 105
A.5 Taitojalkapalloprojekti 110
A.6 Keihäänheittoprojekti 115

1. JOHDANTO

Diplomityössä on tarkoituksena tutustua opetukseen, oppimiseen ja projektioppimiseen. Lisäksi näitä sisältöjä tarkastellaan matemaattisen toiminnan kannalta. Opetuksen behavioristisen näkemyksen mukaan oppimisen lähtökohtaisena periaatteena on, että kaikki monimutkainen käyttäytyminen voidaan rajoittaa osiinsa eli ymmärtää osista kokonaisuuksi rakentuvana [61, s. 7]. Siis oppimisena pidetään yksilön käyttäytymisen muutosta [68, s. 63]. Oppiminen tapahtuu ärsyke-reaktio -assosiaatioina edustaen ajatusta opetus- ja oppimisprosessista tiedon siirtona henkilöltä toiselle [61, s. 6–7].

Oppimisen behavioristista näkemystä korjaamaan ovat muodostuneet esimerkiksi kognitivistinen ja konstruktivistinen käsitys oppimisesta. Tässä diplomityössä tutustutaan näistä konstruktivistiseen oppimiskäsitykseen, jonka mukaan oppiminen on ihmismielen konstruktivistinen, rakenteita muodostava prosessi. Konstruktivismin mukaan kaikki hankittu tieto ja osaaminen on konstruoitua. Käsityksessä korostetaan oppijan tarkoituksenmukaista informaation valintaa ympäristöstään kokemuksia hankittaessa. Reflektoimalla näitä kokemuksia oppija muokkaa uutta tietoa aikaisempien tiedonrakenteidensa ja merkitystensä pohjalta. [68, s. 64–65]

Matematiikan opetus ja oppiminen ovat kehittyneet Suomessa konstruktivismin suuntaan 1980- ja 1990-lukujen taitteesta lähtien [41, s. 144],[68, s. 67]. Matematiikan opetuksen edellytys on oppilaan aktiivinen rooli, mikä tarkoittaa oppilaan yksilöllisyyden huomioimista [44, s. 77]. Opettajan on arvioitava jokaisen oppilaan edistymistä oppimisprosessissaan ja reagoitava havaintoihinsa oppimista tukevin toimin [66, s. 24]. Matemaattisesti pyrkimyksenä on yksilön valmiuden sisäiseen ja ulkoiseen toiminnan uudistaminen [67, s. 114], ja laajemmin kehittää oppilaan hahmotuskykyä, sosiaalisia taitoja ja opittujen tietojen soveltamiskykyä eri alueilla [66, s. 30].

Oppilaan tietojen ja taitojen monipuolista kehittämistä on korostettu perusopetuksen opetussuunnitelman perusteissa 2014. Perusteissa kannustetaan yhdessä oppimiseen, luovan ja kriittisen ajattelun ja ongelmanratkaisutaitojen edistämiseen sekä kykyyn ymmärtää erilaisia näkökulmia [39, s. 17]. Näihin ja moniin muihin opetussuunnitelman perusteissa konstruktivismista oppimisnäkemystä tukeviin vaatimuksiin reagoidaan projektioppimisella. Projektien parissa työskennellessä oppilaiden tiedonhankinnan tavat monipuolistuvat ja tavoitteellisen opiskelun keinot kehittyvät [35, s. 32]. Projektityöskentelyllä pyritään kehittämään oppilasta tehokkaaseen toimintaan itsensä ja yhteisön hyväksi sekä tukemaan oppilasta saavuttamaan realistinen käsitys omista mahdollisuuksistaan [18, s. 51].

Nämä kolme pääteemaa voidaan tiivistää diplomityön tutkimuskysymyksiksi seuraavasti:

- Millaista opetusta opettajat harjoittavat?
- Minkälaista toimintaa oppilaiden opiskelu ja oppiminen ovat?
- Mitkä ovat projektityöskentelyn ja -oppimisen kannalta keskeisiä ominaisuuksia?

Luvuissa 2 ja 3 tehtävän kirjallisuusselvityksen myötä saadaan kattavat vastaukset esiteltyihin tutkimuskysymyksiin. Diplomityön luvuissa 4 ja 5 pyritään luomaan sellaisia matematiikan opetukseen liittyviä liikunnallisia projekteja, jotka tukisivat nykykäsitysten mukaan opetusta, oppimista ja projektioppimista mahdollisimman laadukkaasti. Näitä projekteja aiheesta kiinnostuneet opettajat voivat vapaasti toteuttaa.

2. MATEMATIIKAN OPETUS JA OPPIMINEN

Tässä luvussa tutustutaan yleisesti opetus- ja oppimistapahtumiin sekä tarkastellaan lähemmin matematiikan opetusta ja oppimista. Opetukseen liittyen eritellään opettajan tarvitsemia perustietoja ja vallitsevia käsityksiä hyvästä opettajuudesta. Oppimista lähestytään konstruktivistisesta näkökulmasta. Luvun lopuksi perehdytään esitettyihin oppimisen uusiin kouluvisioihin.

2.1 Opetus

Opetus on monialainen käsite, joka on kasvatuksen käytännössä ja kasvatustieteessä yksi keskeisimmistä käsitteistä. Tästä huolimatta opetuksella ei ole olemassa yleisesti hyväksyttyä, yksiselittäistä määritelmää. Toisaalta opetusta ei ole voitu pitää peruskäsitteenä, jota ei tarvitse määritellä. Opetuksen käsitteen määrittely-yritykset ovat johtaneetkin erilaisiin tuloksiin. [71, s. 18]

Yrjö Yrjönsuuri [71, s. 18–19] luokittelee Smithin [52, s. 11-15] mukaan opetuksen määrittelyn yritykset viiteen tyyppiin, joista mistään ei ole muodostunut yleisesti hyväksyttävää opetuksen määritelmää. Ensimmäinen tyypeistä on opetuksen kuvaileva määritelmä, jossa opetusta kuvaillaan yleisesti tunnettuja sanoja käyttäen tiedon tai taidon jakamisena. Smith pitää toisena tyyppinä opetuksen ja oppimisen liittämistä toisiinsa, jolloin oppimisen ajatellaan sisältyvän opetukseen ja puhutaan opetus-oppimisprosessista [71, s. 18].

Tietyt osa-alueet, kuten intentionaalisuus, kuuluvat opetukseen. Härkönen [9, s. 148–151] on lähestynyt opetusta intentionaalisen tavoitteisuuden kehikossa. Intentio merkitsee aikomusta, tarkoitusta, valintaa tai suuntautumista, jonka yksilö tuottaa juuri tekoon ryhtyessään [66, s. 8]. Siis intentionaalisesta toiminnasta puhuttaessa siinä on mukana tekijä, aikomus ja teko, eli X aikoo saada aikaan p:n ja tekee sen vuoksi a:n. Matemaattisesti tätä voidaan merkitä lyhyesti $I(X, p, a)$. [71, s. 30]. Opetuksen ollessa intentionaalista toimintaa siinä suuntaudutaan tulevaan ja pyritään tietoisesti saavuttamaan asetettuja opetussuunnitelman mukaisia tavoitteita [9, s. 148–149]. Smithin luokittelussa kolmantena opetuksen kuvaamisen tyyppinä on sellainen intentionaalinen toiminta, jossa ajatellaan opettajan ja opetettavan intentioiden suuntautuvan halutun oppimisen aikaansaamiseen [71, s. 19].

Härkösen mukaan opetuksen intentionaalisuuden tarkastelu ei saa kuitenkaan olla itsetarkoitus, vaan opettamisessa tulee olla opetuksen pyrkimysten rinnalla oppilas ja hänen oppimisensa huomion keskipisteenä. Tästä huolimatta opettaminen ei takaa yksilöiden oppimista. Härkönen määritteleekin opetuksen tavoitteellisena sekä oppilaiden ja opettajan välisenä sosiaalisena vuorovaikutustoimintana. [9, s. 149]

Yrjönsuuren kuvailemana Smithin opetuksen määrittelyn neljäntenä tyyppinä on opetuksen pitäminen normatiivisena käyttäytymisenä, jolloin opetuksen toimintojen ja käyttäytymisen määrääjinä ovat tietyt eettiset ehdot. Viimeisenä, viidentenä tyyppinä on pyrkimys kohti opetuksen tieteellistä määritelmää. Opetuksen määritelmä olisi propositioiden välinen yhteys, joka olisi yleistä tyyppiä

$$a = df(b, c, ...),$$

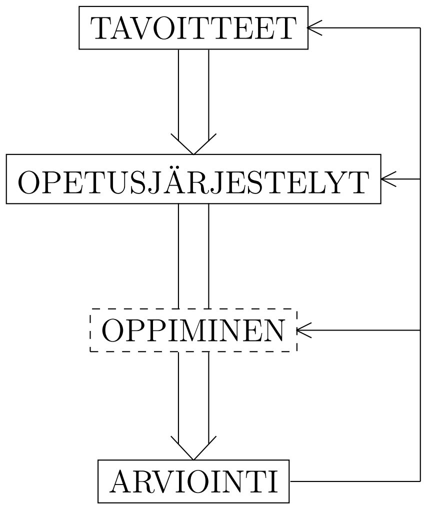
missä a on propositio ”opetus on tehokasta”, $b, c, ...$ ovat opetusta koskevia propositioita, ja $df()$ kuvaa propositioiden välistä yhteyttä tarkemmin kuin pelkät sanat tai sanonnat. [71, s. 19]

Suomessa opetus on usein nähty kouluun ja etukäteen asetettuihin kasvatustavoitteisiin liittyvänä ilmiönä [71, s. 19]. Matti Koskenniemi ja Kaisa Hälinen määrittelivät tällä periaatteella Didaktiikassaan [24] opetuksen ”interaktiotapahtumaksi, joka sijoittuu koulun elämänpiiriin ja joka tähtää oppilaiden persoonallisen kehityksen edistämiseen kasvatustavoitteiden määrittämissä suunnissa”. Opetus on täten tapahtumasarja, jossa esiintyy niin opettamista kuin oppimista. Vuorovaikutuksen aikana opettaja ei toimi pelkästään opettamisroolissa eikä oppilas pelkässä oppijan roolissa. Kokonaisuudessaan opetus on enemmän kuin opettajan teot, joiden tarkoituksena on saada oppilaat omaksumaan tavoitteiksi asetetut tiedot, taidot ja asenteet. [24, s. 101–102]

Anna-Liisa Leinon ja Jarkko Leinon Kasvatustieteiden perusteissa [33] käsitellään kasvatusta yleisenä ilmiönä, mutta he sijoittavat opetustapahtuman kouluun. Leinot määrittelevät koulutilanteeseen sijoitetun kasvatuksellisen vuorovaikutusprosessin opetukseksi tai, mikäli sen ajan mukana etenevää luonnetta korostetaan, myös opetusprosessiksi, opetustapahtumaksi. Opetuksen aikana opettaja ja oppilas tarkastelevat jatkuvasti toimintansa seuraamuksia toinen toisistaan, minkä seurauksena he voivat saada kehittävää palautetta ja muokata toimintaansa sen mukaisesti. [33, s. 7–9]

Erkki Lahdes käyttää Peruskoulun uusi opetusoppi -teoksessaan [31] opetuskäsitettä silloin, kun kasvatustoiminta tapahtuu opettajan johdolla koulussa. Lahdes määritteli opetuksen behavioristisesti sellaiseksi ympäristötekijöiden säätelyksi, jonka tarkoituksena on muuttaa oppilaiden käyttäytymistä oppimisen avulla asetettujen tavoitteiden suuntaan [31, s. 14–15].

Tässä Lahdeksen määritelmässä opetuksen lähtökohtana ovat tavoitteet, jotka kasvattaja, kasvatettava tai molemmat voivat asettaa. Toinen avainsana on ympäristöolosuhteiden, kuten oppimatemariaalien ja -välineiden sekä opettajan toimenpiteiden, säätely. Määritelmässä ei vaadita, että opetuksen myötä tapahtuisi toivottua muutosta, vaan riittävää on pyrkimys kohti muutosta. Kolmas avainsana on oppilaiden käyttäytyminen, mikä koostuu paitsi ulkoisesta, havaittavasta toiminnasta, myös asenteista, tunnereaktioista ja ajattelutoiminnoista, eli sisäisestä käyttäytymisestä. Erityisesti ulkoisia käyttäytymismuotoja pystytään arvioimaan. [31, s. 15–16]. Tämän perusteella voidaan rakentaa kuvan 2.1 mukainen Lahdeksen opetuksen perusmalli.



Kuva 2.1: Lahdeksen opetuksen perusmalli [31, s. 16].

Peruskoulun didaktiikassa Lahdes [29] pyrkii irtautumaan behaviorismista opetuksen määritelmässä lähestymällä opetusta intentionaalisen vuorovaikutuksen kautta. Lahdes määrittelee opetuksen kasvatustavoitteiden suuntaisesti suunniteltuna ja tavoitteellisena vuorovaikutuksena, jonka tarkoituksena on olosuhteita ohjailemalla saada aikaan tietoista ja mielekästä oppimista [29, s. 19–20]. Peruskoulun uudessa didaktiikassa Lahdes [30] muokkaa opetuksen käsitettä luonnehtimalla sitä opettajan ja oppilaiden välisenä toimintana sekä luopumalla olosuhteiden ohjaamisesta. Päivitetyssä määritelmässä ”opetus on kasvatustavoitteista johdettavaa tarkoituksellista ja suunniteltua opettajan ja oppilaiden välistä sosiaalista, vuorovaikutuksellista toimintaa, jonka tarkoituksena on luoda oppilaalle edellytykset oppimisen avulla tavoitteiden saavuttamiseen” [30, s. 14].

Lahdes kuvaa Peruskoulun uudessa didaktiikassa [30, s. 45–48] ja artikkelissaan Opetus toimintana [28] Kerrin [20] opetuksen teoriaa. Kerr näkee opetuksen käytännön toimintana ja päätyy siksi rakentamaan opetuksen teoriansa tavoitteellisen toiminnan pohjalle. Tavoitteellisen toiminnan vaiheina ovat tavoitteiden valinta, keinojen tai suunnitelman valinta ja suunnitelman mukainen toiminta. Koska nämä kolme vaihetta sisältyvät opetuksen perusmalliin, teoriaa voidaan pitää yleisenä. [30, s. 45]

Toiminnan teoriassaan Kerr sitoo opetuksen tiettyyn aikaan ja paikkaan kehystekijöitä käyttäen. Ensimmäinen kehystekijä on opetettava aine. Sen puutteellinen hallinta vaikeuttaa opettajan pyrkimyksiä ohjata oppilaita sisäistämään tavoitteiden mukaisia tiedon- ja taidonrakenteita. Toisena kehystekijänä on oppimisen luonne, jossa on kyse oppimisen erilaisista teorioista ja käytännöistä. Oppijan tai oppijoiden ominaisuudet ovat kolmas tekijä. Mitä paremmin opettaja tuntee oppilaansa, sitä otollisemmat olosuhteet ovat oppimiselle. Seuraavana kehystekijänä ovat saatavilla olevat keinot ja voimavarat, kuten oppivälineet ja -materiaalit. [30, s. 45]. Nämä kolme kehystekijää ovat sellaisia välineellisiä osasia, jotka järkevästi käytettyinä tehostavat opetus-oppimisprosessia [28, s. 45]. Opetuksen kehystekijänä pitää olla myös moraaliset ja poliittiset seikat, koska opetus on sekaantumista toisten elämään ja tiettyjen arvojen edistämistä. Tämän vuoksi Kerr edellyttää objektiivisesti tarkoituksenmukaista opetusta, joka noudattaa tiedeyhteisön ja/tai moraalisen ja poliittisen yhteisön käsityksiä. Toisaalta opetuksen on oltava subjektiivisesti tarkoituksenmukaista, eli toimintojen on vastattava opettajan omia uskomuksia ja näkemyksiä. [30, s. 45–46]

Lahdes täydentää Kerrin opetuksessa huomioitavia kehystekijöitä viiden kuvatun tekijän yläkäsitteenä olevalla koulukulttuurilla [30, s. 46]. Tällä käsitteellä tarkoitetaan kouluyhteisössä vallitsevia yhteisiä arvoja, uskomuksia, käsityksiä, rooleja ja rituaaleja, jotka ohjaavat ja säätelevät koulun toimintaa [23]. Näin ollen voidaan sanoa, että luokan kulttuurin luovat opettajan osaltaan säännölliset ja toisaalta tilannekohtaiset hallintakeinot, jotka mahdollistavat oppilaiden oppimisen [30, s. 46]. Kaikkineen Kerrin toiminnallisessa teoriassa opetusta tarkastellaan opettajan työn kannalta, ja siksi jopa oppilaat sekä oppiminen käytäntöineen ovat kehystekijöitä [28, s. 45].

Vähitellen opetuksen käsite on alkanut kattamaan muutakin kuin koulutilanteessa tapahtuvaa toimintaa [10],[37]. Veikko Heinonen kuvailee Kasvatustieteen perusteissaan [10] opetusta tällä periaatteella: ”Opettaminen ja opetus tarkoittavat ihmisten ohjaamista määrättyyn tavoitekäyttäytymiseen. Kognitiivinen ja käytännöllistä hyötyä tarkoittava asettuu etualalle. Opetuksella pyritään saavuttamaan tieto- ja taitotavoitteita, eikä ensisijaisesti pyritä asenteiden ja arvojen opettamiseen.” Heinonen samaistaa opettamisen ja opetuksen käsitteet sekä asettaa tieto- ja taitotavoitteet opetuksen päämääräksi [10, s. 69], toisin kuin luvun aiemmat opetuksen määritelmät.

Kari Niinistön opetuksen määritelmässä aikuiskoulutuksen kannalta luovutaan koulukontekstista, mutta pitäydytään koulutuksessa, jonka tavoitteet tulevat varsinaisen opetustapahtuman ulkopuolelta esimerkiksi yhteiskunnasta ja opetussuunnitelmista. Niinistö määrittelee opetuksen koulutettavan, opiskeltavan asian, koulutustilanteen ja ulkoisen todellisuuden väliseksi tavoitteelliseksi vuorovaikutukseksi.

Opetukseen liittyy siis Niinistön mukaan intentionaalisuutta, koska kouluttajan toiminta on aina opetustilanteessa intentionaalista, ja opiskelijan toiminta on enemmän tai vähemmän intentionaalista. [37, s. 18]

Sirkka Hirsjärven Kasvatustieteen käsitteistöä [14] voidaan pitää kasvatustieteen käsitteiden suomenkielisenä perussanakirjana [71, s. 22]. Teoksessaan Hirsjärvi sanoo opetuksen olevan ”kasvatustavoitteiden suuntaista intentionaalista vuorovaikutusta, jonka tarkoituksena on saada aikaan oppimista” [14, s. 131]. Yrjö Yrjönsuuri ottaa tämän määritelmän vertailupohjaksi opetuksen käsitettä tarkastellessaan [71, s. 22–29].

Kasvatustieteen käsitteistön opetuksen määritelmä kuuluu Smithin [52] luokittelun kolmanteen tyyppiin, sillä se esittelee opetuksen intentionaalisena toimintana. Määritelmä on kuitenkin kolmessa suhteessa epätäsmällinen. ”Kasvatustavoitteiden suuntainen” ei ole yksiselitteinen ilmaisu, sillä muuta kuin kouluopetusta tutkittaessa ei voida tietää, ketkä ovat asettaneet tavoitteet ja mikä on tavoitteiden suuntaista. ”Intentionaalinen vuorovaikutus” on ohjaamista tai säätelyä tasapuolisempi, mutta määritelmässä käytettäväksi kovin epämääräinen, lähtökohta opetukselle. Ihminen voi vaikuttaa toiseen tieten tai tahtomattaan, joten on haastavaa tietää, milloin vuorovaikutus on intentionaalista. Kolmanneksi määritelmässä epäselvyyttä aiheuttaa osa ”saada aikaan oppimista”, mikä viittaa siihen, että mikä tahansa ja kenen tahansa oppiminen riittää. Opetuksessa tulisi kuitenkin olla kyse tietyn henkilön oppimisesta tiettyyn sisältöön kohdistuen. [71, s. 23]

Muihin Smithin luokittelun tyyppeihin kuuluvat määritelmät ovat Yrjönsuuren mukaan vielä ongelmallisempia. Ensimmäistä tyyppiä koskevat määritelmät voivat olla käyttökelpoisia, kun opetusta kuvaillaan yleisesti tunnettuja sanoja käyttäen kulloisenkin tarpeen mukaisesti [71, s. 24]. Esimerkiksi Sirkka Hirsjärven ja Jouko Huttusen määritellessä Johdatus kasvatustieteeseen -teoksessa opetuksen oppimisen ohjaamiseksi [12, s. 29] herää kysymys, mitä ohjaaminen oikeastaan on [71, s. 22]. Ensimmäisen tyypin määritelmät ovat kelvollisia käytännön erityistapauksissa, mutta ne eivät johda yleiseen tai tieteellisesti täsmälliseen opetuksen määrittelemiseen. Toisen tyypin määritelmissä opetuksen ajatellaan sisältyvän opetukseen. Tämä on väärä lähtökohta, sillä oppimista voi tapahtua ilman opetusta, eikä sitä tapahdu aina opetuksen aikana. Neljännessä tyypissä opetuksen toimintoja määräävät tietyt eettiset ehdot, jotka koskevat opetuksen sisältöä tai opettajan oppilaaseen suuntautuvaa toimintaa. Nämä ehdot muodostuvat tilannekohtaisesti opetukseen osallistuvien henkilöiden joukossa, joten ne eivät johdu opetuksesta sinänsä. Viidettä tyyppiä, joka esittää opetuksen muodossa $a = df(b, c, ...)$, Yrjönsuuri pitää kausaalisuutta tavoittelevana unelmana, jonka toteutuminen on epätodennäköistä. Näiden perustelujen myötä Yrjönsuuren näkökulmaksi jää opetuksen pitäminen intentionaalisena toimintana. [71, s. 24–25]

Jotta opetuksen käsite voitaisiin ymmärtää, on ajateltava opettavan ja opetettavan intentioiden kohteena olevan opetettavan tietyn sisällön oppiminen. Tämän vuoksi opetus voi alkaa niin opetettavan kuin opettavan aloitteesta, ja kummallakin heistä on oikeus päättää opetukseen osallistumisesta. Siis opetuksen määrittelemistä varten tarvitaan intentionaalisen toiminnan, yhteisen toiminnan ja oppimisen käsite. [71, s. 25–26]. Näitä käsitteitä käyttäen Yrjönsuuri kutsuu opetukseksi ”kahden henkilön yhteistä intentionaalista toimintaa, jossa toisen intentiona on oppia tietty sisältö ja toisen intentiona on auttaa toista oppimaan tämä sisältö” [71, s. 28].

Raija Yrjönsuuri tarkastelee opetusta tiedon ja toiminnan struktuureilla käyttäen käsitteitä tietoaineksen struktuuri, didaktinen struktuuri ja kognitiivinen struktuuri [66, s. 28]. Kitcher [22] Yrjönsuuren [66, s. 28] mukaan tietoaineksen struktuuri on tietyn tiedonalueen vakiintunut ja yleiseen hyväksymiseen perustunut rakenne. Tietoaineksen rakenne merkitsee koulutuksen perustaa, jolle opiskeltava matemaattinen ajattelu ja yleisemmin minkä tahansa oppiaineen opetussuunnitelma ja oppimateriaali perustuvat.

Lauren B. Resnick tarkoittaa didaktisella struktuurilla sellaista ajalliseen järjestykseen asetettua osaa, tietoaineksen rakennetta, jota välitetään yhteisen toiminnan keinoin. Didaktinen struktuuri on toiminnan ja tiedon sisällön systeemi, jolla pyritään ohjaamaan oppijan opiskelua ja oppimista. [47]. Kognitiiviseksi struktuuriksi käsitetään henkilön konstruoima sisäinen malli, representaatio tietyn tiedon tai toiminnan alueesta. Opetuksen päämääränä on muuttaa tai täydentää opiskelijoiden kognitiivista struktuuria ja pohtia matemaattisen ajattelun luonnetta. Oppimisen kriteerinä on, missä määrin opiskelijan persoonallisesti konstruoima kognitiivinen struktuuri ja opettajan tulkitsema opetuksen ja oppimisen tietoaineksen struktuuri muistuttavat toisiaan. ([4], katso [66, s. 28])

Shulmanin [51] mukaan opettaja tietää jotakin, mitä muut ihmiset, käytännössä oppilaat, eivät ymmärrä. Opettaja hyödyntää osaamistaan pedagogisissa esityksissään ja toimissaan. Näitä pedagogisia toimia ovat puhumisen, osoittamisen, toteuttamisen tai esittämisen tavat, ja ne mahdollistavat oppilaiden ymmärryksen ja taitojen kehittymisen. Täten opetuksen aloittamiseksi opettajan on välttämätöntä tietää, mitä opetetaan ja kuinka opetetaan. Opetuksen edetessä erilaisin toiminnoin, joiden myötä oppilaille tarjotaan tiettyjä täsmällisiä ohjeita ja mahdollisuuksia oppimiseen, oppilaiden vastuuna on heidän oppimisensa. [51]. Siis opetuksen pyrkimyksenä on aina oppimisen aikaansaaminen, mutta opettamistoiminnan välttämättömänä edellytyksenä ei ole, että oppimista tapahtuisi [13, s. 42].

2.1.1 Opettajan perustiedot

Wilenius [63] on tutkinut kasvatustoimintaa ja yhtenä sen osa-alueena opettajuutta. Inhimillinen kasvatustoiminta on luonteeltaan intentionaalinen tapahtuma [63,

s. 13]. Kysymystä, mitä tällainen inhimillinen toiminta on, Wilenius tarkastelee käytännöllisen päättelyn ajatusta, praktista syllogismia, käyttäen. Käytännöllisen päättelyn idea on peräisin Aristoteleelta, ja se ilmaisee pyrkimystä tietoiseen, tavoitteelliseen ja suunnitelmalliseen toimintaan. Käytännöllisen päättelyn ajatuksella pyritään kuvaamaan tietoista inhimillistä toimintaa yleisenä rakenteena. [63, s. 21–22]. Praktinen syllogismi voidaan esittää seuraavana toimintakaaviona [69, s. 31]:

- X tavoittelee p:tä,
- X uskoo, että a on hyvä keino p:n saavuttamiseksi, ja
- sen vuoksi X ryhtyy tekemään a:ta.

Teon a tehtyään toimija X arvioi, onko teko johtanut aiotun p:n toteutumiseen ja onko samalla tapahtunut myös jotain muuta. Teon toteuttamisen arvioinnista toimija siirtyy seuraavan intention muodostamiseen. [70, s. 16]

Wileniuksen tarkastelun lähtökohtana on tieto inhimillisen toiminnan päämäärästä eli tarkoituksesta. Tällaista tietoa Wilenius nimittää päämäärätiedoksi. Inhimillisen toiminnan toisena edellytyksenä on tieto tilanteesta, jossa toiminta tapahtuu ja aiheuttaa muutoksen. Wilenius kutsuu tätä tilannetiedoksi. Kolmas toiminnan edellytys on tieto keinoista tai menetelmistä, joita käyttäen tilannekohtaiset päämäärät voivat toteutua. Kolmatta tiedon aluetta Wilenius nimittää menetelmätiedoksi. [63, s. 22]

Wileniuksen mallissa opettajan perustiedot ovat siis päämäärä-, tilanne- ja menetelmätieto. Opettajan päämäärätieto perustuu ymmärrykseen kasvatustapahtuman seuraavasta tilasta. Tätä voidaan saavuttaa kolmella eri tavalla. Ensimmäinen tapa on perehtyä inhimillisen kasvuprosessin yleiseen rakenteeseen ja lainmukaisuuksiin. Näiden tietojen, joita kutsutaan kehitysantropologiaksi, kehittyessä opettaja muodostaa tietoisesti tai tiedottomasti peruskäsityksen ihmisestä, mikä ohjaa opettajan kaikkia muita tiedollisia ja toiminnallisia valintoja. Opetuksen päämäärän muodostumiseen vaikuttaa ihmisolemuksen rinnalla yhteiskunnallinen tilanne. Tämän vuoksi opettajan on hankittava käsitys siitä, millaisessa yhteiskunnallisessa tilanteessa yksilöt joutuvat elämään ja toimimaan. Nämä kaksi yleistä ohjetta eivät vielä auta opettajaa toimimaan elävien oppilaiden kanssa. Siksi opettajan on myös osattava kasvattaa päämäärätietoaan tiedostamalla kasvatettaviensa kehityspyrkimykset ja -tarpeet. Kokonaisuudessaan opettajan on siis ymmärrettävä, miten yleinen ihmisyys toteutuu oppilaissa heidän erityisten ominaisuuksiensa pohjalta, ja millaiseen yhteiskunnalliseen tilanteeseen kasvatettavat todennäköisesti joutuvat. [63, s. 28–31]

Opetuksen tilannetieto voidaan jakaa kolmeen ainekseen. Ensinnäkin opettajalla on oltava tietoa kasvatustapahtumasta eli kehitysantropologisia tietoja. Painopiste on kuitenkin kasvatustapahtuman sisäisissä lainmukaisuuksissa, jotka ovat johtaneet kehityksen nykyvaiheeseen. Toinen osa on tieto ympäristövirikkeiden, sosiaalisen taustan ja kulttuuritaustan vaikutuksista opetustapahtuman toteutumiseen. Näiden kahden tilannetiedon aineksen osaaminen ei välttämättä takaa opettajan kykyä tiedostaa konkreettinen kasvatustilanne, kasvavien kehitystila ja sen riippuvuus ympäristöstä. Kolmas tilannetaidon osa onkin herkkään psykologiseen vastaanottokykyyn ja kokemukseen perustuva arvostelukyky, jonka avulla opettaja ymmärtää oppilaitaan. [63, s. 32–33]

Opettajan kannalta keskeinen menetelmätiedon osa on tieto opetussisällöistä ja niiden merkityksestä kasvuvirikkeinä. Toisaalta opettajan on huomioitava itsensä sekä omat inhimillisensä ominaisuutensa ja kykynsä. Nämä ovat kaikesta huolimatta opettajan tärkein opetusväline. Siis oleellinen osa opettajan menetelmätietoa on hänen itsetiedostuksensa, joka saattaa rikastuttaa opetusvälineistöä yhtä lailla kuin teknisen välineistön hankinta. [63, s. 34–35]

Albrecht ym. [2] Laeksen [27] mukaan opettajalla on pragmaattinen, tieteellinen ja moraalinen syy paneutua opettamisen kehittämiseen. Pragmaattinen syy tähtää siihen, että käytännön opetustyö sujuu mahdollisimman hyvin ja että siinä saavutetaan yhteiskunnassa asetetut opetuksen ja kasvatuksen tavoitteet. Moraalinen syy kannustaa opettajaa selvittämään, millainen opettajan toiminta edistää hyvää elämää muuttuvassa yhteiskunnassa sekä teknologisoituvassa ja globalisoituvassa maailmassa. Koska opettajalla on valta-asema oppilaaseen, opettaminen on eettisesti herkkää toimintaa, ja siksi moraalisen syyn pitää perustua epäitsekkyyteen. Tieteellinen syy kehottaa opetustoiminnan taustalla vaikuttavien ideologioiden, käsitysten ja teorioiden tutkimiseen. Tämän vuoksi opettajan on hyödyllistä tuntea varhaisempia, historiallisia kehitysvaiheita parhaimmasta ja oikeimmasta opetustoiminnasta. [27, s. 238]

Tarkastellessaan opetusta Aebli [1] on jakanut opetustapahtuman välittymistavan ulottuvuuteen, sisältöjen ulottuvuuteen ja oppimisprosessin funktioiden ulottuvuuteen. Tässä kolmen ulottuvuuden järjestelmässä jokainen yhden ulottuvuuden arvo yhdistyy kahden muun ulottuvuuden jokaiseen arvoon mielekkäänä osailmiönä [1, s. 23]. Välittymistavan ulottuvuudella lähestytään ensinnäkin sitä, että opettajan tulee olla toimintakykyinen ja käytännöllinen, eli hänellä on oltava tiedon lisäksi käytännön taitoa. Toiseksi opettajalla täytyy olla silmät nähdä ja korvat kuulla, jotta hän pystyy niin välittämään kokemuksia kuin saamaan oppilaat tajuamaan luonnon ilmiöiden ja kulttuurin sisäistä olemusta, rakennetta ja toimintaa. Työnsä osaavalta opettajalta vaaditaan välittymistavan ulottuvuudessa lisäksi kykyä käyttää eloisaa, oppilaiden mielenkiinnon herättävää kieltä. Tällaisessa kielen hallinnassa on kyse sosiaalisesta kompetenssista: opettajan kielen pitää mahdollistaa kommunikaatio. [1, s. 25–26]

Pidettäessä opetustapahtumaa opettajan ja oppilaiden välisenä kommunikaationa on muistettava, että kommunikaation määritelmät ovat moninaisia ja niitä voidaan luokitella kolmen kriteerin perusteella. Abstraktisuuden aste viittaa määritelmän laajuuteen. Kattavimmillaan kommunikaatiota on kaikki elävää maailmaa yhdistävä työskentely, kun taas suppeimmillaan kommunikaatio on tarkoin rajoitettua toimintaa. Kun kommunikaationa pidetään tarkoituksellista toimintaa, määritelmän intentionaalisuuden aste on korkea. Normatiivisissä kommunikaation määritelmissä on maininta kommunikaation onnistumisesta tai tarkkuudesta. [27, s. 243]

Aeblin opetuksen perusmuotojen järjestelmässä toisena on sisällöllinen ulottuvuus. Koska aiemmin kuvatut välittymistavat olivat kokemuksenmuodostamistapoja, ja tällä kokemuksella on jokin sisältö, on opettajalla oltava jäsentynyttä tietoa ja ymmärrystä oppilailleen välittämistään asioista. Siksi opettajan on jatkuvasti kehitettävä oppiaineen hallintaansa. [1, s. 26]

Kolmantena ja viimeisenä Aeblin opettamistaidon ulottuvuutena on oppilaiden oppimisprosessi, johon kuuluvat rakenteen muodostuminen, syventäminen, harjoittelu ja kertaus sekä soveltaminen. Opettajan on osaltaan tarjottava oppilaille virikkeitä ja neuvottava heitä, osaltaan välitettävä heille käyttökelpoisia henkisiä työkaluja ja annettava taidot niiden käyttämiseen. Opettajan on tämän vuoksi tunnettava sekä oppimisprosessien kulku teoriassa ja käytännössä että oppimisprosessien välttämättömien vaiheiden toteutusjärjestys. Hyvä opettaja tuntee nämä välttämättömät edellytykset ja tietää, miten toimia oppilaiden kanssa, jotta tavoitteena oleva oppimisprosessi toteutuisi. [1, s. 27–28]

Opetus pitää Shulmanin mukaan käsittää laajemmin kuin ymmärryksen korostamisena [51]. Hänen opetuksen kuvailussaan opettaja tarvitsee monipuolista osaamista saadakseen oppilaat toimimaan oppimistaan edistäen. Shulman hahmottelee, että opettajan tarvitsemat tiedot ovat aihepiireittäin [51]:

- sisältötieto,
- yleinen pedagoginen tieto koskien erityisesti luokan toiminnan organisointiin ja hallintaan liittyviä periaatteita ja strategioita,
- opetussuunnitelmatieto, joka käsittää varsinkin oppi- ja opetusmateriaalien tuntemuksen,
- pedagoginen sisältötieto, joka yhdistää sisällön ja pedagogiikan sekä korostaa opettajan ainutlaatuista osaamisaluetta,
- tieto oppijoista ja heidän ominaisuuksistaan,
- tieto kasvatuksen kontekstista ulottuen opetusryhmän työskentelyä koskevista asioista niin koulun hallintoon ja talouteen kuin koulutyöskentelyn luonteeseen ja kulttuurin, ja

- tieto kasvatuksen tavoitteista, tarkoituksista ja arvoista sekä niiden filosofisista ja historiallisista taustoista.

Näiden aihepiirien joukossa pedagoginen sisältötieto on erityisen kiinnostuksen kohteena, koska sitä käyttäen voidaan tunnistaa erilliset tiedon osat opetuksessa. Se esittää sisällön muokkaamisen ja pedagogiikan ymmärrykseksi siitä, kuinka erityiset aiheet, ongelmat tai tehtävät organisoidaan, esitetään ja sopeutetaan kirjaviin oppilaiden mielenkiintoihin ja kykyihin. Pedagoginen sisältötiedon osaaminen erottaa sisällön asiantuntijan ja opettajan toisistaan. [51]

Opetusta tutkiessaan Yrjö Yrjönsuuri on sekä empiiristen havaintojen [73] että teoreettisten analyysien [71],[72] perusteella luokitellut opetuksen seitsemään ulottuvuuteen: sisältö-, opetus- ja kontekstitietoon, didaktiseen, evaluointi- ja menetelmätaitoon sekä vuorovaikutustaitoon. Yrjönsuuri on painottanut, että koska ulottuvuudet eivät ole erillisiä vaan yhdistyvät opetuksen teoissa toisiinsa, ne ovat erottomattomasti opettajan työskentelyn eri ulottuvuuksia [70, s. 47].

Tarkastelemalla opettajan työtä oppilaan oppimista intentionaalisesti auttavana toimijana voidaan liittää kolme ensimmäistä tiedon ulottuvuutta opetuksen intention muodostamiseen, kolme seuraavaa taidon ulottuvuutta toiminnan keinojen valintaan ja vuorovaikutustaidon ulottuvuus tekojen toteuttamiseen [71, s. 88]. Opetuksen intention muodostamista perustellaan sisältötiedolla opittavan sisällön tiedonrakenteiden, opetustiedolla opetuksen ja yleisemmin kasvatuksen sekä kontekstitiedolla toiminnan kontekstin, eli koulussa sen tarkoituksen ja tavoitteiden, kannalta. Opetuksen tekojen valintaa perustellaan didaktisella taidolla sisällön didaktisen käsittelyn, evaluointitaidolla oppilaiden oppimisen ymmärtämisen ja menetelmätaidolla toimintakokonaisuutena olevan koululuokan tai muun yhteisön kannalta. Tekojen toteuttamista käsittelevä vuorovaikutustaidon ulottuvuus kuvaa opettajan onnistumista yksilöiden välisissä kohtaamisissa koululuokan tai muun yhteisön vuorovaikutustilanteissa. [70, s. 47–48]

2.1.2 Käsityksiä hyvästä opetuksesta

Tässä alaluvussa tarkastellaan hyvää opetusta, ja erityisesti siihen liitettäviä opettajan toimia eli opettamista. Hyvää opettamista on perinteisesti kuvattu käyttäen joitakin yleisiä ominaisuuksia, kuten vuonna 1949 julkaistussa Toivo Viljosen teoksessa Käytännöllinen opetustaito [58] on tehty. Viljonen esittää, että opettajan tulisi olla kätevä, jotta hän pystyisi hoitamaan asiat joustavasti ja nopeasti. Tämän lisäksi opettaja tarvitsee älyä hallitakseen erilaiset koulun elämän tilanteet ja käyttääkseen mielenkiintoisia opetustapoja. [58, s. 40]. Opetuksen pitää Viljosen mukaan myös täyttää monia vaatimuksia, joista tärkeimmät ovat oppilaiden tiedonjanon herättäminen ja tyydyttäminen sekä henkinen kasvattaminen. Hyvän opettamisen Viljonen luonnehtii olevan sekä oppilaiden tarpeiden huomioimista että avun tarjoamista ja tuen antamista oppilaille. [58, s. 76, 80–81]

Kerrin opetuksen teorian [20],[28],[30, s. 45–46] pohjalta voidaan kuvailla hyvää opetusta ja opettajaa. Opetuksen laatu määräytyy Kerrin mukaan siitä, kuinka objektiivisesti ja subjektiivisesti tarkoituksenmukaista opettajan kulloinenkin toiminta on kehystekijät huomioiden. Laatu riippuu siis siitä, millaisia opettajan uskomukset ovat ja miten opettaja toteuttaa sen, mihin hän uskoo. [28, s. 44]. Toimiessaan Kerrin teorian mukaisesti opettajan on pystyttävä jatkuvasti tavoitteiden ja suunnitelman uudelleen arviointiin. Siksi hyvä opettaja on sellainen, joka on joustava ja osaa samalla huomioida optimaalisella tavalla vallitsevat kehystekijät. [30, s. 47]

Karlsson ja Riihelä ovat tutkineet opettamista ja oppimista alakoulussa [19] ryhmätyöskentelyn näkökulmasta. Heidän käsityksensä on, että opettamisen seurauksena havaitaan lapsessa tapahtuva oppiminen. Lapset oppivat samanlaisesta opetuksesta huolimatta eri asioita toisistaan poikkeavia tapoja käyttäen. Laadukkaan opetuksen takaamiseksi opettamista pitää suunnitella

1. tietojen tasolla, jossa lasten kokemukset, mielenkiinnon kohteet ja tavoitteet huomioidaan,
2. välineellisellä tasolla, jossa aikuinen työstää lasten kokemusperäisiä käsitteitä, ja
3. rakenteellisella tasolla, jossa analysoidaan teoreettisia käsitteitä ja niiden välisiä suhteita.

Opettamisen suunnittelemisen päällimmäisenä tavoitteena on, että lapset saisivat tarvitsemiensa välineiden lisäksi vapauden, jota heidän oppimisensa vaatii. [19, s. 50–51]

Rauste-von Wright, von Wright ja Soini [46] korostavat opettajan ammatin olevan ihmissuhdetyötä. Opettajalta ei vaadita ainoastaan, että hän ymmärtää opettamansa asian ja sen vaatimat taidot, vaan opettajan on myös pystyttävä hahmottamaan ja tukemaan oppilaiden erilaisiin lähtökohtiin perustuvia ja vaihtelevasti eteneviä oppimisprosesseja. Opetuksen hallinta vaatii siis sosiaalisten vuorovaikustaitojen ymmärtämistä ja osaamista. Tällaista opettajuutta tarvitaan erityisesti kouluympäristössä, jossa vallitsee konstruktivistinen oppimisnäkemys. [46, s. 227]

Konstruktivistiseen oppimiskäsitykseen liittyen Rauste-von Wright ym. asettavat hyvälle opettajalle neljä vaatimusta. Hyvälle opettajalle on välttämätöntä opettamansa sisältöalan kattava hallitseminen, jotta hän pystyy odottamattomissakin tilanteissa toimimaan ongelmanratkaisijan mallina. Toiseksi opettajan on hallittava alansa niin, että hän ymmärtää, miten oppilaat erilaisista lähtökohdistaan käsin ymmärtävät kyseisen alan ilmiöt, käsitteet, käsitteellistämistavat ja ongelmanratkaisustrategiat. Kolmantena hyvän opettajan vaatimuksena on taito havaita paitsi teoriassa myös toiminnan tasolla konstruktivistisen oppimiskäsityksen pedagogiset seuraukset, kuten oppilaiden valikoivan tarkkaavaisuuden ja informaation tulkinnan säätelyn periaatteet, oppimisen kontekstisidonnaisuus ja ajatteluprosessien rooli oppimisessa. Tätä varten opettajan on kehitettävä itsereflektiivisiä taitoja niin itsessään kuin oppilaissaan. Opettajan on lisäksi hallittava oppimisen ohjaamisen taidot, sillä hänen on kyettävä toimimaan oppimisprosessin tukijana, synnyttämään uteliaisuutta herättäviä ristiriitoja ja säätelemään oppimistilanteen emotionaalista ilmapiiriä. [46, s. 229–230]

Tärkeänä osana oppimisen ohjaamisen taitoihin kuuluu myös oppijan aktivaatiotasoon vaikuttaminen. Aktivoitumisen taso säätelee yksilön kykyä käsitellä joustavasti uutta informaatiota, yksilön valmiutta kokeilla uusia toimintastrategioita ja yksilön valikoivaa tarkkaavaisuutta. [46, s. 230]. Opettajan on oivallettava, että oppijan valikoivan tarkkaavaisuuden suuntautuminen opittavan kannalta oleelliseen asiaan käynnistää oppimisen. Tällöin oppija kokee opetuksessa heränneet kysymykset omikseen ja itselleen tärkeiksi. [45, s. 30]

Opettajan kaikkia vastauksia tai tietoja pitää Yrjö Yrjönsuuren mukaan arvioida jatkuvasti kolmen ulottuvuuden suhteen: onko tieto paikallaan oppiaineen, kasvatuksen ja koulun tehtävän kannalta. Siksi hyvällä opettajalla on ensinnäkin oltava sellainen aineenhallinta, että opettaja voi vastata opittavaa tietoa koskeviin kysymyksiin. Toiseksi opettajalta vaaditaan kasvatustietoa, jotta hän ymmärtäisi oppilaiden kysymykset ja pystyisi valitsemaan vastauksensa opetuksen ja oppimisen kannalta tarkoituksenmukaisesti. Kolmas hyvän opettajan ominaisuus eli koulun tehtävän tuntemus edistää opettajan toimintaa yhteiskunnan koululle asettamien tavoitteiden mukaisesti. [74, s. 14]

Rauste-von Wright mainitsee opettajan tarpeen nähdä opetus-oppimisprosessi olennaisilta piirteiltään toisaalta opettajan ja oppilaiden välisenä, toisaalta oppilaiden välisenä vuorovaikutuksena. Puuttuminen asioiden kulkuun tarkoituksenmukaisella väliintulolla edellyttää opettajalta ihmissuhdetaitoja kaikissa kasvatustilanteissa. [45, s. 36]. Opettajan on toiminnassaan kyettävä pitämään mielessä sovitut opetusjakson yleiset tavoitteet ja lähestymään niitä joustavin keinoin. Yleisten periaatteiden ymmärrystä painottaen opettajan tulisi ohjata oppilaita nivomaan opitut tiedot ja taidot yhdeksi verkostoksi. [46, s. 230]

Raija Yrjönsuuri tarkastelee hyvää opetusta samansuuntaisesti kuin Rauste-von Wright. Yrjönsuuren mukaan hyvää opetusta on se, kun opettajan työ ei ole pelkästään ”knowing that” -tyyppisen tiedon jakamista, vaan myös oppilaiden toiminnan tulkintaan ja ymmärtämiseen perustuvaa oppimisen auttamista ja opiskelun ohjaamista, eli ”knowing how” -tyyppisen tiedon jakamista [66, s. 24]. Opettajan on tutkittava kokemuksiaan tietoisella tavalla, reflektoitava, jotta hän voi jatkuvasti kehittää käytännön toimintannsa [65, s. 57],[66, s. 24].

Irina Koskinen lähestyy artikkelissaan [25] aihepiiriä opettaja ja moraali. Hän esittää kymmenen kohdan opettajaa koskevan listan [25, s. 6]:

1. ”Ole yksilöllisellä tavalla oma itsesi, sillä persoonallisuutesi on kasvatusvälineistä tärkein.”
2. ”Tee totta omista arvoistasi ja omasta elämänkatsomuksestasi. Silloin opit myös kunnioittamaan oppilaan ja hänen vanhempiensa arvoja ja elämänkatsomusta.”
3. ”Kunnioita oppilastasi siinäkin tapauksessa, että pidät häntä syypäänä omaan epäonnistumiseensa ja omiin vaikeuksiinsa.”
4. ”Tunnusta, että mahdollisuutesi ovat rajalliset sekä ammatti-ihmisenä että ihmisyksilönä.”
5. ”Ole johdonmukainen ja turvallinen kasvattaja.”
6. ”Kehitä herkkyyttäsi kokea tilanteet ja ongelmat toisen ihmisen näkökulmasta.”
7. ”Ole valmis itsekritiikkiin ja myös muiden taholta tulevalle kritiikille.”
8. ”Anna kasvatillesi riittävästi tilaa kasvuun ja liikkumiseen – jopa perääntymiseen.”
9. ”Älä koskaan petä kenenkään luottamusta.”
10. ”Opi, että oppimisvaikeudetkin ja häiriköinti ovat ihmisen tapoja kertoa jotain olennaista itsestään – sekä omista rajoista että omista mahdollisuuksista.”

Oppivaa opettajaa voidaan kuvata viittä ominaispiirrettä käyttäen. Ensinnäkin opettaja on ihminen niin kuin oppilaansa, ja heillä kaikilla on ihmisille ominaiset oppimisen ulottuvuudet. Siksi opettajan on autettava yksilöitä mahdollisuuksiensa luokse. Toiseksi opettajan on uskallettava myöntää, ettei hän aina ole vireessä tai jaksa innostua. Opettajuus edellyttää kuitenkin jatkuvaa oppimista, uusiutumista ja innostumisen kanavien löytämistä. Kolmanneksi opettajan on muistettava, että opiskelija oppii kaikkialla, muttei ole aktiivinen kaikissa tilanteissa. Oppilas voi oppia myös avuttomaksi. Neljänneksi opettajan luottamus omaan ammattitaitoon tulee omien oppimaan oppimisen prosessien kautta. Siksi hyvä opettaja hyväksyy itsensä kyselevänä ja asioista selvää ottavana ihmisenä. Rohkeus näyttää oppilaille itsekin olevan jatkuvassa oppimisprosessissa on rikastuttavaa. Oppivan opettajan viidentenä ominaisuutena on ymmärrys oppilaista nuorina, kehittyvinä ihmisinä. Opettaja vaikuttaa toimillaan suuressa määrin oppilaidensa tulevaisuuteen. [45, s. 43]

2.1.3 Matematiikan opetus

Karen C. Fuson esittelee artikkelissaan [6] kaksi erilaista tapaa opettaa matematiikkaa. Perinteisessä opetustavassa oppilaat seuraavat passiivisesti opettajan esittelemää aihepiiriä ja harjoittelevat tämän jälkeen itsenäisesti aihetta. Toinen, tehokkaampi matematiikan opetustapa koostuu kolmesta vaiheesta. Orientoitumisvaiheessa oppilaat kyselevät aiheeseen liittyviä kysymyksiä ja saavat opettajalta vastauksia. Keskustelemalla pyritään luomaan aktiivisia oppijoita, joiden alkuperäinen tieto voitaisiin tuoda esiin. Tuetun oppimisen vaiheessa siirrytään vähitellen opettajan ohjaamasta työskentelystä oppilaiden itseohjautuvaan työskentelyyn. Opettaja auttaa oppilaita havainnollistamalla tehtäviä ja antamalla korjaavaa palautetta. Pitkäkestoisen muistin vaiheessa oppilaat harjoittelevat itsenäisesti soveltavien tehtävien ratkaisemista. Mitä laajemmalla aikavälillä soveltavia tehtäviä ratkaistaan, sitä helpommin oppilaat muistavat käsitellyt sisällöt jatkossakin. [6, s. 7–8]

Tyypillisessä suomalaisessa matematiikan opetustavassa on toimittu pääosin Fusonin kuvaileman ensimmäisen vaihtoehdon mukaisesti. Oppitunnin aluksi tarkistetaan annetut kotitehtävät. Tämän jälkeen opettaja käsittelee uuden aiheen ja esittää joitakin esimerkkejä. Seuraavaksi opettaja antaa oppilaille tehtäviä ratkaistavaksi. Tunnin lopuksi oppilaat saavat oppikirjasta uusia kotitehtäviä ratkaistavaksi. Tällaisessa matematiikan opetuksessa korostuu oppimisen behavioristinen näkemys, jonka mukaan oppiminen tapahtuu tehtyjen toistojen kautta. [41, s. 143–144]

1980-luvun lopusta lähtien suomalainen matematiikan opetus on kehittynyt konstruktivismin suuntaan. Tiedon muotoutuessa ja kehittyessä jatkuvasti oppilaiden on tärkeämpää oppia yhdistämään ja järjestämään informaatiota omien kokemuksien ja havaintojen mukaisesti kuin oppia muistamaan yksittäisiä tosiasioita. Siksi opettajille on alettu järjestää työaikana pidettäviä kursseja niin ongelmanratkaisun ja luovuuden edistämiseen kuin oppimispelien, tietokoneiden ja laskimien käyttöön matematiikan opetuksessa. Käytettävien opetustapojen vaatimuksiksi ovat samalla muodostuneet opetuksen mielekkyys oppilaiden kannalta ja oppilaiden vastuuntunnon kasvattaminen omasta työstään. [41, s. 144–145]

Yllä kuvattuihin matematiikan opetuksen muutoksiin on myös reagoitu matematiikan aineenopettajien yliopistokoulutuksessa. Opettajankoulutusohjelmat pyrkivät tarjoamaan opiskelijoilleen tarvittavia tietoja ja taitoja, joita hyödyntäen voidaan toimia asiantuntijana luonnontieteiden ja matematiikan opetuksessa ja joita käyttäen on mahdollista kehittää opetusalaa. Erityisesti opettajankoulutuslaitoksissa matematiikan opettajiksi opiskelevia autetaan saavuttamaan

1. laaja oppiaineen tuntemus ja pedagogisten sisältöjen hallinta,

2. tarvittavat tiedot opetussuunnitelmien ja oman opetuksen kehittämiseksi,

3. kommunikaatiotaidot, joilla voi tehdä yhteistyötä muiden opettajien kanssa, sekä tieto- ja viestintäteknologian osaamisen,

4. tietämyksen koulusta instituutiona ja sen yhteyksistä yhteiskuntaan, kuten kouluyhteisöistä, paikallisista yhteyksistä ja sidosryhmistä, ja

5. moraaliset tiedot ja taidot, jotka vastaavat opettajien ammattikunnan sosiaalisia ja moraalisia käytössääntöjä.

Opettajilla on loppujen lopuksi suuret vapaudet toimia ammatissaan, mutta heillä on myös suuri vastuu oppilaiden oppimisesta, paikallisista opetussuunnitelmista ja arvioinnin suunnittelemisesta. Siksi opettajilla on oltava mainittujen tietojen ja taitojen lisäksi sekä positiivinen asenne opettamista ja oppimista kohtaan että halu kehittää itseään jatkuvasti ammattitaitoisemmaksi toimissaan. [32, s. 65–66]

Päivi Perkkilä ja Pirjo-Liisa Lehtelä esittelevät artikkelissaan [44] matematiikan ja muiden luonnontieteiden oppimisympäristöjä. Hyvälle matematiikan opetukselle he näkevät edellytyksenä oppilaan aktiivisen roolin. Siksi pedagogisesti matematiikan opetuksessa on kiinnitettävä huomiota yksilöllisyyteen, jotta opettaja pystyy tarjoamaan kaikille oppilaille mahdollisuuksia kokea erilaisia asioita. Lisäksi matematiikan oppituntien aikana oppilaiden tulee saada selittää ja kertoa niin toisilleen kuin opettajalle ideoistaan. Argumentoiva, eloisa keskustelu on kuitenkin edelleen harvinaista matematiikan oppitunneilla. Opettajalla pitäisi olla opetuksen aikana perinteisen oppilaille opetussuunnitelmaa välittävän ja tietoa siirtävän osan sijasta sellainen ohjaava rooli, että hän kykenee helpottamaan oppilaiden matemaattista oppimisprosessia ja tarjoamaan sosiaalisia vuorovaikutustilanteita oppilailleen. [44, s. 77]

Raija Yrjönsuuren tarkastellessa matematiikan opetusta hänen opetuksen lähtökohtana on Yrjö Yrjönsuuren kuvaus [71, s. 28] opetuksesta: opetus on intentionaalista kahden henkilön välistä toimintaa, jossa toisen tavoite on oppia tietty sisältö ja toinen pyrkii auttamaan sen saavuttamiseksi. Matematiikan opetusta voi tapahtua missä ympäristössä tahansa, ja opettaja voi olla samanaikaisesti yhteisessä toiminnassa useiden oppilaiden kanssa. Kuitenkin opetuksen aikana opettajan on yllä olevan kuvauksen mukaisesti käsiteltävä oppilaita yksilöinä. Siksi hänen on arvioitava jokaisen oppilaan edistymistä, autettava kutakin heistä toimimaan sisällön oppimiseksi, seurattava arvioiden heidän tekojaan ja reagoitava saamaansa informaatioon uusin teoin. Opetusprosessi jatkuu oppilaiden tulkitessa näitä tekoja omista näkökulmistaan ja oppimistilanteistaan. [66, s. 24]

Matematiikan opetuksessa ei ole Yrjönsuuren mukaan kummallakaan osapuolella valtaa määrätä toisen toiminnasta. Kaksi henkilöä ryhtyy matematiikan opetuksen yhteiseen intentionaaliseen toimintaan, kun molemmat pitävät sitä itselleen mielekkäänä ja merkityksellisenä. Yhteisen toiminnan aikana toimijoiden on pidettävä toistensa tekoja hyväksyttävinä, sillä muuten toiminnasta luovutaan ja tavoitteet kohdistetaan toisaalle. Matemaattisessa intentionaalisessa toiminnassa tekojen toteuttaminen voi olla ulkoista, matemaattisten kokemuksien keräämistä havainnoimalla ulkoisia kohteita, mutta useimmiten se on sisäistä, matemaattista ajattelua. Tämän vuoksi, jos opettaja epäonnistuu toiminnan toteutuksessaan, oppilaan on helppoa luopua sisäisesti opetukseen osallistumisesta, vaikka hän ulkoisesti jäisikin yhteiseen toimintatilanteeseen. Tällöin oppilaalle tilanne ei ole enää matematiikan opetusta. [66, s. 10, 24–25]

Yrjönsuuri kuvaa matematiikan opetusta myös aiemmin määriteltyjen tietoaineksen struktuurin, didaktisen struktuurin ja kognitiivisen struktuurin käsitteillä. Didaktisen struktuurin keskiössä on sosiaalisen ja matemaattisen kielen tulkinta yhteisessä toiminnassa. Matematiikan opettajan on muodostettava itselleen välittömästi kognitiivinen struktuuri opetettavasta alueesta eli luotava oma tulkinta opetussisällön matemaattisesta rakenteesta. [66, s. 28]

Opettajan on didaktista struktuuria pohtiessaan otettava huomioon niin käytettävissä oleva oppikirja ja opetusvälineistö kuin oma käsitys asiakokonaisuuksien loogisesta ja mielekkäästä järjestyksestä sekä omaksumistavoista. Lisäksi opettajan on huomioitava sekä opiskelijoiden ajattelun ja tiedon taso että kiinnostus ja halu opiskella matematiikkaa. Jotta opettajan muodostama didaktisen struktuurin kokonaisrakenne olisi selkeä, opettaja joutuu karsimaan käsiteltäviä ilmiöitä ja jättämään joitakin kognitiivisen struktuurinsa suhteita kuvaamatta. Siksi opettajan on oltava matematiikan opetuksessaan tarkkana, että opetuksen tavoite ei peitä tietoainesta niin, että opiskelija ja opettaja eivät enää erota didaktista ja kognitiivista struktuuria. [66, s. 28–29]

2.2 Opiskelu ja oppiminen

Historiallisesti oppimista tutkittaessa tulokseksi on saatu, että valtaosa ihmisistä pitää oppimista tietojen mieleen painamisena. Yleisesti on ajateltu, että ihminen ei voi ymmärtää ennen kuin häneen on siirretty riittävä tietomäärä. Näissä aiemmissa oppimista koskevissa tutkimuksissa oppiminen on harvoin koettu asioiden merkityksen ymmärtämiseksi tai tulkintaprosessiksi, joka auttaa ymmärtämään todellisuutta paremmin. [45, s. 13]. Kuitenkin viime vuosikymmeninä oppimista koskeva tieteellinen tieto on lisääntynyt ja uudistunut tarjoten toisenlaisia lähtökohtia peruskoulun toiminnan kehittämiselle [74, s. 9].

Opiskelu ja oppiminen ovat toisilleen läheisiä käsitteitä [69, s. 23]. Opiskeluun liittyviä ilmiöitä voidaan selittää kausaalisen ilmiön, funktionaalisen yhteyden ja intentionaalisen toiminnan tyypeillä. Kausaalista ilmiötä käytettäessä opiskelua tarkastellaan luonnonilmiöiden kaltaisena tapahtumana. Avainkysymyksenä on, että mistä syystä jotakin tapahtui. Funktionaalisen yhteyden selittämistä tarvitaan, kun opiskeluun liittyvän inhimillisen toiminnan kausaalisia syitä ei saada selville. Tällöin tutkittava ilmiö käsitetetään yhteydessä toisiin ilmiöihin sen kokonaisuuden osana, missä se tapahtuu. Tärkeänä kysymyksenä on se, millaisessa yhteydessä jotakin tapahtuu. [66, s. 8–9]

Opiskelua tarkasteltaessa tyydytään helposti funktionaalisen yhteyden selittämiseen. Tällöin kysymyksiin miksi opitaan tai mitä ja kuinka hyvin opitaan ei saada vastauksia. Intentionaalisen toiminnan selittämisellä voidaan tarkastella toimivan ihmisen intentioita, tekoja ja niiden seurauksia. Pyrkimyksenä on saada selville teon tarkoitus ja yksilön uskomukset opiskeltavan sisällön tarpeellisuudesta. [66, s. 8–9]

Praktinen eli käytännöllinen päättely kuuluu yhteen intentionaalisen toiminnan kanssa. Praktisessa päättelyssä lähtökohtana on tuleva tapahtuma, jonka halutaan tapahtuvan. Ulkoisesti havaittava teko tehdään keinona tuon tapahtuman aikaansaamiseksi. [69, s. 31]. Käytännöllisen päättelyn luonne tuli esiin luvussa 2.1.1 kuvatusta intentionaalisen päättelyyn sopivasta praktisesta syllogismista.

Opiskelutilanteissa ihminen on taipuvainen havaitsemaan itselleen tärkeitä ja merkityksellisiä sekä arvostamiaan asioita. Uskomuksien ohjaamana henkilö valitsee toimintansa opiskelutilanteessa. [66, s. 9]. Henkilön intentioiden perusteet jakautuvat tällöin Georg Henrik von Wrightin mukaan itsensä kannalta tärkeiden aikomusten toteuttamiseeen eli haluiksi ja tietynlaisten itseään sitovien aikomusten toteuttamiseen eli velvollisuuksiksi [60]. Intentioiden perustan voimakkuus, jota kutsutaan motivaatioksi, ilmenee intentionaalisen toiminnan suuntana, laajuutena ja kestävyytenä [71, s. 33].

Raija ja Yrjö Yrjönsuuri määrittelevät opiskelun käsitteen intentionaalisen toiminnan kautta. He kutsuvat opiskeluksi ”sellaista yksilön intentionaalista toimintaa, jonka intentiona on tietyn tiedon, taidon tai toiminnan oppiminen”. Opittava toiminta voi olla sisäistä, kuten ajattelemista, tai sisäistä ja ulkoista, kuten jonkin ulkoisen teon toteuttamista, ja sen harjoittajaa nimitetään opiskelijaksi. [69, s. 23]. Yksilön opiskelulla on vähintään keskeisinä tavoitteina [66, s. 30]

1. kehittää käsitteellistä hahmotuskyvykkyyttä,

2. kehittää sosiaalisia taitoja ja suuntautumista toimintaan,

3. oppia erityisiin aihepiireihin liittyviä tietoja ja taitoja sekä

4. oppia soveltamaan samoja tai läheisiä käsitteitä eri alueilla.

Yrjönsuurien opiskelun määritelmää käyttäen voidaan esittää opiskelijan (Y) intentionaalisen toiminnan kaavio. Sijoittamalla praktisen syllogismin toimintakaavioon p:n tilalle ”oppia tietty sisältö” ja a:n tilalle ”tietty opiskeluteko” saadaan opiskelijan kolmiosainen toimintakaavio [71, s. 36], jossa

- Y aikoo oppia tietyn sisällön,
- Y arvelee, että hän ei voi oppia tätä sisältöä, ellei hän tee tiettyä opiskelutekoa, ja
- sen vuoksi Y ryhtyy tekemään tätä tekoa.

Kuvatusta opiskelijan toimintakaaviosta havaitaan, että opiskeluun sisältyy neljä komponenttia. Ensinnäkin opiskelija luo intention oppia tietty toiminta. Toiseksi hän valitsee oppimiseen tähtäävän teon. Kolmanneksi opiskelija suorittaa valitun teon. Neljänneksi yleisen praktisen syllogismin mukaisesti opiskelija arvioi teon lopputulosta eli sitä, onko teko johtanut oppimiseen. [69, s. 23]

Toivo Viljosen tarkastellessa opetusta hän vaati, että opetuksen on herätettävä oppilaan tiedonjano ja saatava oppilas mieltymään työn tekemiseen. Opetuksen toisella puolella on vastassa oppimistapahtuma, joka on kunkin oppilaan oma asia. Viljonen nimittää tätä, että oppiminen tapahtuu oppilaasta itsestään käsin, opetuksen perusoivallukseksi. Jotta opettaja voisi tukea oppilaiden oppimista, hänen pitää ymmärtää opetuksen perusoivallus ennen oppilaita. [58, s. 76–77]

Yllä olevien opiskelijan toimintakaavion ja opetuksen perusoivalluksen käsitteiden perusteella voidaan sanoa opiskelun olevan yksilön aikomuksellista toimintaa ja oppimisen olevan inhimillisen yksilön perustavaa laatua oleva sisäinen tapahtuma. Oppimisen tuloksena on tietyn tiedon ja taidon osaaminen, mutta sen laatu ja määrä riippuvat merkittävästi siitä, mitä keinoja käyttäen oppiminen on tapahtunut. Toimijalla voi olla esimerkiksi puitteita niin sisältöön kohdistuvissa intentioissaan kuin teoissa oppimista tavoitellessa. [66, s. 30]. Tiivistetysti oppimiseksi voidaan kutsua sellaista yksilössä tapahtuvaa sisäistä tapahtumaa, jonka myötä yksilö tulee kykeneväksi uudenlaiseen toimintaan [69, s. 18, 26].

Karlssonin ja Riihelän mukaan oppimisesta voidaan puhua, kun yksilön tiedoissa tapahtuu suhteellisen pysyviä muutoksia. He korostavat oppimisen myös olevan yksilön ja ympäristön väliseen vuorovaikutukseen liittyvä prosessi. Oppiminen on tällöin kokonaisuudessaan henkistä toimintaa, joka on monimutkaisempaa kuin pelkkä tiedon vastaanottaminen ja varastoiminen. [19, s. 50]

Sahlberg ym. kokevat, että oppiminen on oppijan kokemukseen perustuvien tietojen, taitojen ja valmiuksien sellaista muuttumista, millä on vaikutus hänen toimintaansa ja käyttäytymiseensä. Oppiminen on täten yksilön ja ympäristön väliseen vuorovaikutukseen liittyvä tapahtuma. Oppimiselta, kuten myös opetukselta, he edellyttävät joustavuutta, uusien mahdollisuuksien etsimistä ja luovaa ajattelua. [50, s. 15–16]

2.2.1 Konstruktivistinen oppimiskäsitys

Lähestytään konstruktivismia tarkastelemalla havaintotapahtumaa. Konstruktivistisessa oppimisnäkemyksessä korostuu havaitsijan aktiivinen osuus havaintoprosessissa. Yksilön havaitsemiselle on ominaista informaation valikointi ja tulkinta, jossa havainnot saavat merkityksen, kun yksilö kytkee ne aikaisempaan osaamiseensa ja tulkitsee niitä vallitsevaan tilanteeseen liittyen aikaisempien kokemustensa perusteella luomaltaan viitekehykseltä. [61, s. 9]

Koska informaation valikointia ja tulkintaa säätelevät myös osaksi biologisesti määräytyvät hermostolliset prosessit, osaksi havaitsijan käsitykset, odotukset ja tavoitteet, havaitsemista voidaan luonnehtia informaation poiminnaksi. Havaitsijan skeemat, joihin hänen kokemushistoriansa kuvastuu, ohjaavat tällaista poimintaa. [61, s. 9]. Yleisesti skeeman käsitteellä tarkoitetaan, että ihminen "jäsentää tietoaan hierarkkisesti rakentuvina kokonaisuuksina . . . , joissa tiedollisiin aineksiin kytkeytyvät emotionaaliset ainekset. Uusi tieto rakentuu aiemmin opitun pohjalle: vanhaa tietoa käytetään uuden konstruoimiseen" [61, s. 16].

Konstruktivistisessa oppimisnäkemyksessä kaikki kognitiiviset toiminnot, kuten havaitseminen, muistaminen ja ajatteleminen, nitoutuvat läheisesti toisiinsa. Informaation prosessointi on yksilökohtainen jatkuva, kokonaisvaltainen prosessi, mikä voi synnyttää muutoksia yksilön tiedoissa, käsityksissä ja taidoissa. Tämän muutoksen ollessa hetkellistä pysyvämpi, informaation prosessointia kutsutaan oppimiseksi. [61, s. 9–10]. Tässä yhteydessä kontekstisidonnaisuudella tarkoitetaan oppimisen sidonnaisuutta siihen toimintaan, kontekstiin ja kulttuuriin, jossa tietoa opitaan ja käytetään, ja metakognitiivisilla taidoilla toiminnan tavoitteellisen ohjauksen taitoja [61, s. 17–18].

Oman toiminnan ja sen seurauksia koskevan reflektoinnin pohjalta oppija rekonstruoi aikaisempia käsityksiään ja tietojaan. Siksi rekonstruktioprosessi on konstruktivistisen käsityksen mukaan oppimisen ydin. Tähän liittyen on kolme seikkaa, jotka mahdollistavat yksilön oppimisen. Ensinnäkin opetus on ankkuroitava oppijan arkitodellisuuteen, sillä haasteisiin vastataan ainoastaan silloin, kun ne koetaan itselleen tärkeiksi ja omaan elämänkulkuun liittyviksi. Toinen näkemys on, että parhaiten opitaan, jos oppijassa herää sisällöllinen mielenkiinto ongelmaa kohtaan ja jos hän itse ratkaisee ongelman. Kolmanneksi oppijan aktiivisuudella, erityisesti aktiivisella tiedon haulla, on oppimisen kannalta olennainen merkitys. [61, s. 12]

Oppimiskäsitysten muuttuessa on ymmärretty, että oppija ei ole passiivinen informaation vastaanottaja, vaan hänen on yhdistettävä uudet omaksumansa tiedot aiempaan käsitejärjestelmäänsä. Tällöin oppija konstruoi tietoa kognitiivisten toimintatapojensa ja perustietojensa avulla. Konstruktivistiseen oppimisnäkemykseen liittyen opetuksen tavoitteena on luoda toimiva vuorovaikutusyhteisö, jossa oppijoiden oppimisen itsesäätelylle tarjotaan mahdollisuuksia ja tiedonalojen kehityksessä pysytään mukana. Vuorovaikutusyhteisössä oppilaiden välisen kommunikaation esille tuomien tiedollisten ristiriitojen, kognitiivisten konfliktien, nähdään konstruktivismissa johtavan ajattelun rakentumiseen sekä tietojen ja taitojen kehittymiseen. [74, s. 12, 16]

Konstruktivistinen käsitys johtaa oppijan valmiuksia painottavan ja joustavan opetuksen toteuttamiseen. Yleistä ja yhteistä opetuksessa ovat vain asetettujen tavoitteiden yleispiirteet ja opetustoiminnan kehykset. [46, s. 162]. Konstruktivismin pedagogisia seurauksia ovat:

1. Uutta tietoa omaksutaan aiemmin opittua käyttämällä. Tässä on kysymys siitä, että kommunikointiin vaaditaan yhteisen kielen lisäksi yhteistä viitekehystä, jonka puitteissa viestit tulkitaan. Voidakseen oivaltaa, mitä tietoja ja taitoja oppija hyödyntää uutta oppiessaan tai mistä oppiminen kiikastaa, opettajan täytyy ymmärtää oppijan tapa tarkastella todellisuutta. [46, s. 162–164]

2. Oppiminen on oppijan oman toiminnan tulosta. Huomiota kiinnitetään siihen, hahmottaako oppija itsensä toimijaksi, subjektiksi vai muiden ohjaamaksi. Oppimisstrategioiden käytöstä riippuen oppija katsoo joko olevansa itse vastuussa oppimisestaan tai odottaa muiden ohjaavan häntä. Kokeneetkaan oppijat eivät aina valitse strategioitaan tarkoituksenmukaisesti ilman ohjausta. [46, s. 164–165]

3. Toimintaa ohjaa sen tavoite – ja tavoitetta ohjaavat oppimisen kriteerit – mutta oppimista säätelee se, mitä oppija tekee. Yksilön pyrkiessä oppimisprosessissaan asetettuun tavoitteeseen käytetyt keinot ovat yhtä tärkeitä kuin tavoitteet. Tavoite ohjaa yksilöä tekemään jotain, mutta oppimista säätelee se, mitä yksilö todellisuudessa tekee. Käytetystä oppimisstrategiasta riippuu, miten paljon opitaan ja mitä opitaan. [61, s. 21]

4. Ymmärtämisen painottaminen edistää mielekästä tiedon konstruointia. Tavoitteellisen oppimisen kannalta on olennaista, että oppija pyrkii tiedostamaan, mitä hän opittavasta asiasta osaa ja ymmärtää tai ei osaa ja ei ymmärrä. Tämä auttaa oppijaa tiedon hakemisessa, järkevien kysymysten asettamisessa ja laajemmin metakognitiivisten taitojen kehittämisessä. [46, s. 165–166]

5. Sama asia voidaan tulkita tai käsittää monella eri tavalla. Eri aloja opiskeltaessa tärkeätä on alan keskeisten käsitteiden tulkinnan ja käytön ymmärtäminen. Oleellista on myös havaita, että tieteiden kehittyessä ja arkikäytänteiden muuttuessa niiden tapa käsitteellistää kohteensa muuttuu. Yksilöiden oppiessa käyttämään käsitteitä uusilla tavoilla myös heidän maailmankuvansa uudistuvat. [46, s. 167]

6. Oppiminen on aina konteksti- ja kulttuurisidonnainen sekä sen sisällöistä riippuva tapahtuma. Usein tietyn tieteenalan opiskelu vaatii sille ominaiseen ajattelukulttuuriin kasvamista, jolloin oppijasta voi tulla tämän kulttuurin asiantuntija, joka ei kuitenkaan pysty hyödyntämään osaamistaan toisenlaisissa konteksteissa. Opitun siirtovaikutusta kontekstista toiseen voidaan kasvattaa kytkemällä tietoa moneen kontekstiin sekä painottamalla tiedon yleisiä piirteitä ja kokeilemalla niitä erilaisissa yksittäistapauksissa. [46, s. 169–170]

7. Sosiaalisella vuorovaikutuksella on keskeinen rooli oppimisessa. Oppijoiden merkitysten maailma rakentuu sosiaalisen vuorovaiktuksen puitteissa. Lapsen oppiessa käyttämään kieltä kommunikaation välineenä hän sosiaalistuu tiettyyn kulttuuriin ja sille ominaisiin merkitysten rakenteisiin. [46, s. 170]

8. Tavoitteellinen oppiminen on taito, jota voi oppia. Tiedon määrän kasvaessa koulutuksella on kasvatettava taitavia oppijoita, jotka pystyvät itse laajentamaan ja uusimaan tietojaan eli hallitsemaan oppimisen taidot. Spesifinen eli yksityiskohtainen oppimaan oppiminen on mahdollista tietyn sisältöalueen tai taitotyypin puitteista. Sen sijaan yleistä oppimaan oppimisen taitoa ei voitane löytää. Kuitenkin on toimintamuotoja, jotka helpottavat oppimista sisällöistä ja tilanteista riippumatta. [46, s. 172–173]

9. Oppimista voidaan evaluoida monin kriteerein sen mukaan, mistä oppimistapahtuman osa-alueesta kulloinkin halutaan tietoa. Konstruktivismin näkökulmasta oppimistulos riippuu merkittävästi oppimisprosessin luonteesta. Tämän vuoksi edetessä erilaisia oppimistapoja käyttäen kohti samaa tavoitetta yksilöt oppivat laadullisesti eri asioita. Oppijan kannalta ennakoitujen oppimiskriteerien monipuolisuus tukee hänen itsereflektiivisiä valmiuksia ja oppimisprosessin moninaisuutta. [46, s. 173–174]

10. Opetussuunnitelmien tulisi olla joustavia ja ottaa huomioon niin oppijan valmiudet kuin tiedon suhteellisuus ja muuttuvuus. Siksi opetussuunnitelmaan on kiinteiden ja yksityiskohtaisten suunnitelmien sijasta kirjattava ne keskeiset ideat, ongelmakokonaisuudet ja toimintavalmiudet, joita koulutus pyrkii välittämään. Tällaisen ilmiökeskeisen opetussuunnitelman muodostamiseksi keskeisten ideoiden perusehtoja pitää analysoida selkeästi. [46, s. 175, 202]

Nykyaikainen, konstruktivistinen oppimisnäkemys kannustaa yksilöä aktiiviseen toimintaan sekä oman ajattelunsa ja toimintamalliensa rakentamiseen. Oppiminen pohjautuu ajatus- ja toimintamalleihin, jotka muodostuvat yksilön ja ympäristön välisissä vuorovaikutusprosesseissa ja muokkautuvat vähitellen prosessien myötä. Olennaista oppimisen kannalta on kasvattaa yksilön sopeutumiskykyä ennalta odottamattomiin tilanteisiin. [50, s. 16]

2.2.2 Matematiikan oppiminen

Raija ja Yrjö Yrjönsuuri tarkastelevat artikkelissaan [67] matematiikan oppimista. Kuten aiemmin on kuvattu, heidän näkemyksenä oppimisesta on, että oppiminen on yksilön sisäinen prosessi, jonka myötä yksilö kykenee tuottamaan uudenlaista, tavoitteellista toimintaa [69, s. 18, 26]. Tämän vuoksi voidaan sanoa, että matematiikan oppimisessa yksilön valmius matemaattisen sisäiseen ja ulkoiseen toimintaan uudistuu [67, s. 114].

Matematiikan oppimisen mahdollistavat matemaattiset kokemukset ja niiden reflektointi. Kokemusten hankkiminen on ulkoista toimintaa ja reflektoiminen yksilön sisäistä toimintaa. Yksilön pitää ryhtyä molempiin oppimisvaiheisiin tavoitteellisesti, jotta hän voi toimiessaan muokata aikaisempia kokemuksiaan ja niistä reflektoimalla muodostamiaan käsityksiään sellaisiksi, että oppimista tapahtuu edelleen. [67, s. 115]

Matematiikan oppimista voidaan lähestyä myös sisältöjen oppimisena. Ellei yksilön aikomuksena ole oppia jotain matemaattista sisältöä, ei voida puhua matematiikan oppimisesta. [67, s. 114]. Siksi matematiikan oppiminen edistyy parhaiten, kun oppilas tavoittelee oppimista intentionaalisen toiminnan kautta ja pitää toimintaa itselleen mielekkäänä ja merkityksellisenä [67, s. 113–114].

Raija Yrjönsuuri kokee, että matematiikan oppimisen tuloksena tapahtuu sekä skeemojen ja sisäisten mallien muutoksia että intentioiden uusiutumista. Nämä mahdollistavat matemaattisen ajattelun kehittymisen ja siten uuden tiedon tuottamisen. [66, s. 105]

Matematiikassa erilaisten algoritmien ja toimintaohjelmien osaaminen ei ole riittävää, koska siihen ihmisten suunnittelemat koneet on juuri suunniteltu. Huomioitavaa osaamista on luova matemaattinen ongelmanratkaisu, uusien ratkaisujen tuottaminen ja erilaisten vaihtoehtojen vertailu ja pohtiminen. Luova ongelmanratkaisu edellyttää uusien toimintaohjelmien kehittämistä sen sijaan, että tyydyttäisiin olemassa olevien toimintaohjelmien käyttämiseen, eli rutiinimaiseen ongelmanratkaisuun. [66, s. 105]

Koska Yrjönsuuri lähestyy matematiikan opetusta didaktisen struktuurin ja kognitiivisen struktuurin termeillä, näitä käyttäen hän myös arvioi matematiikan oppimista. Tällöin matematiikan oppimisen kannalta on ratkaisevaa opiskelijan tulkinta didaktisen struktuurin taustalla olevasta opettajan kognitiivisesta struktuurista: opiskelijan on tulkittava opiskelun kohteena olevaa matemaattista rakennetta. Siksi opettajan on pystyttävä muodostamaan käsiteltävistä sisällöistä sellainen didaktinen struktuuri, että oppilas kykenee luomaan niistä omaa opiskelua tukevia sisäisiä malleja. Tämä edellyttää opettajalta tuntemusta siitä, millaiset tehtävät kiinnostavat niin yksittäistä oppilasta kuin koko ryhmää. [66, s. 105]

Kriteerinä matematiikan oppimiselle voidaan pitää absoluuttisia oppimistuloksia. Suomalaisten koululaisten matematiikan oppimistulokset ovat parantuneet 1980-luvulta lähtien. Sahlberg esittää ilmiölle kolme mahdollista selitystä. Ensinnäkin matematiikan opetus sisältyy vahvasti peruskoulujen opetussuunnitelmiin ja suomalaiseen luokanopettajakoulutukseen. Tästä johtuen peruskouluissa on ammattilaisia, jotka ovat perehtyneet matematiikan opetukseen ja oppimiseen. Toiseksi opettajankoulutuksessa ja matematiikan opetussuunnitelmassa painotetaan ongelmanratkaisua, mikä yhdistää matematiikan todelliseen maailmaan. Tämä selittää suomalaisten nuorten pärjäämistä PISA-tutkimusten matematiikkatehtävissä, koska niissä testataan lähinnä ongelmanratkaisua ja matematiikan käyttöä uusissa tilanteissa. Kolmantena tekijänä Sahlberg pitää sitä, että matematiikan aineenopettajien koulutus Suomessa perustuu sekä ainedidaktiikkaan että matemaattis-luonnontieteellisen tiedekunnan ja opettajankoulutuslaitoksen tiiviiseen yhteistyöhön. Siksi valmistuneilla aineenopettajilla on matematiikan oppimiseen ja opettamiseen monipuolinen osaaminen ja ymmärrys. [49, s. 99–100]

2.2.3 Oppimisen uusi kouluvisio

Karlsson ja Riihelä uudistaisivat peruskoulua, erityisesti alakoulun puolella, korostamaan oppimisen ja opettamisen sijasta tutkimustoimintaa. Tämä mahdollistaisi uusien asioiden sisäistämiseen käytettävän enemmän mielikuvitusta ja omaehtoista toimintaa. Lasten oppimistoiminta on pohjimmiltaan tutkimista, joten siihen ei tarvitsisi uudistuksen myötä puuttua. Sen sijaan aikuisten opettajamaisen otteen muuttaminen omassa työssä tutkivaksi olisi haasteellisempaa, sillä tutkimustoiminnassa käytettävien työmuotojen lähtökohtana on vastata lapsien ja lapsiryhmien tarpeisiin. Tutkimustoiminta onkin opiskelutilanne, jossa aikuisella ja lapsilla on omat näkökulmansa tutkittavaan asiaan. [19, s. 51]

Ryhmissä tehtävä tutkimus koostuu Karlssonin ja Riihelän mukaan seuraavista vaiheista:

1. Ongelma – kysymys
2. Hypoteesi – oletus
3. Kokemusten vaihto
4. Tutkimusvälineet
5. Tutkimussuunnitelma
6. Työnjako
7. Tutkiminen – tehtävän suorittaminen

8. Hypoteesien testaaminen
9. Tulosten kirjaaminen
10. Jatkokysymykset
11. Työn julkistaminen ja arviointi.

Siis tutkimustyön aluksi ryhmä asettaa oletuksen tai kysymyksen. Tätä seuraa havaintojen teko, kokeileminen ja vertaileminen. Toiminnan lopuksi oletus perustellaan oikeaksi tai vääräksi tai saadaan vastaus tutkittavaan kysymykseen. Saatuja tuloksia voidaan yleistää ja asettaa muiden arvioitavaksi. [19, s. 55–56]. Tärkeintä tutkimustyössä on kuitenkin se, että opettaja ei pyri enää muuttamaan lapsia, vaan mahdollistamaan omilla toimillaan, että lapset kehittävät itse itseään [19, s. 51].

Sahlberg ehdottaa suomalaista koulutusta tulevaisuuden visiona auttamaan kaikkia oppilaita löytämään koulussa oma intohimonsa ja sen myötä lahjakkuutensa. Intohimo syttyy, kun uteliaisuuden myötä oppilas saa tutkia omia mielenkiinnon lähteitä, ja lahjakkuus voi olla akateemista, taiteellista, sosiaalista, kinesteettistä tai jotain muuta. Koulun tulee jatkaa tietojen ja taitojen opettamista, mutta sen tulee myös valmistaa nuoria olemaan väärässä. [49, s. 259]

Tulevaisuuden vision toteutuminen vaatii Sahlbergin mukaan radikaalia muutosta koulussa. Oppilaiden osallisuutta suomalaiseen kouluun on vahvistettava, jotta opiskelusta muodostuisi yksilöllisempi ja innostavampi tehtävä. Uuden koululaitoksen tulee olla sosiaalisesti innostava ja turvallinen paikka, jossa opitaan elämässä tarvittavia yhteistyötaitoja. Yksilöllisyys ja sosiaalinen kasvatus rakentuvat edelleen yhteisten tietojen ja taitojen pohjalle, mutta johtavat oppilaiden erikoistumiseen. [49, s. 260]. Seuraavissa kappaleissa esitellään Sahlbergin uudessa kouluvisiossaan ehdottamat neljä kasvatuksen pääteemaa.

Ensinnäkin opetuksessa pitää olla vähemmän perinteistä luokkahuoneoppimista. Tulevaisuuden koulussa ajankäyttö ja opetusjärjestelyt pitää suunnitella uudelleen. Tällöin perinteisten oppiaineiden sijasta opetuksessa painotettaisiin integroituja teemoja, ilmiölähtöistä opiskelua, koko koulun yhteisiä projekteja ja yksilöllisiä tehtäviä. Räätälöidyn ja toiminnallisen työskentelyn myötä yksilöt voivat koulussa oppia digitaalisten laitteiden välityksellä opetettavat sisällöt milloin ja missä tahansa. Siis opetussuunnitelmapohjaisesta opettamisesta siirryttäisiin yksilöllisiin opetussuunnitelmiin perustuvaan järjestelmään, jossa oppilaat työskentelevät henkilökohtaisesti merkityksellisten työpajojen ja projektien parissa. [49, s. 260–261]

Opetuksessa tulee lisätä henkilökohtaisen suunnitelman mukaista oppimista. Nykykoulussa nuoret opiskelevat paljon sellaisia asioita, joista oppilailla on jo ennestään epämuodollista tietoa. Tämän vuoksi lisääntyvä osa oppilaista kokee kouluopetuksen epämielekkäänä. Seurauksena on nähtävissä nuorten kouluoppimisen mielenkiinnon heikentymistä ja luokista puuttuvaa uteliaisuuden ilmapiiriä. Ratkaisuna uteliaisuuden palauttamiseksi koulutyöskentelyyn olisi yksilöllisesti räätälöidyt oppimisssuunnitelmat vallitsevien opetussuunnitelmien rinnalle. Mielekkään yksilöllisen oppimissuunnitelman laatimisessa korostuu opettajien, vanhempien ja oppialiden välinen yhteistyö. [49, s. 261–262]

Seuraavaksi Sahlberg ehdottaa opetuksessa huomion siirtämistä sosiaalisiin taitoihin, empatiaan ja johtajuuteen. Tulevaisuudessa medialla ja viestintäteknologialla tulee olemaan nykyistäkin suurempi rooli, jolloin ihmisten keskinäisessä vuorovaikutuksessa painottuu sosiaalisten verkostojen rinnalla digitaaliset välineet ja ratkaisut. Siksi oppilaiden on koulussa kehitettävä sosiaalisen vuorovaikutuksen taitojaan niin konkreettisessa kuin virtuaalisessa mielessä. Samanaikaisesti oppilaita on kannustettava toimimaan yhdessä erilaisten ihmisten kanssa ja selviämään sosiaalisissa verkostoissa. Lisäksi ihmiset tarvitsevat jatkossa taitoa ratkaista ongelmia yhteisöissä. Näin ollen tulevaisuuden koulun perustoimintona tulee olla empatian, yhteistyön ja luovan ongelmanratkaisun oppiminen erilaisista yksilöistä koostuvissa pienryhmissä. [49, s. 262–263]

Viimeisenä teemana on koulun tavoite löytää kunkin oppilaan lahjakkuus. Nykyisellä koulutusjärjestelmällä yksilöiden lahjakkuutta arvioidaan standarditesteillä. Parhaimmillaan testit edellyttävät rutiinitiedon osaamisen lisäksi analyysiä, kriittistä ajattelua ja ongelmanratkaisutaitoja. Kuitenkin standarditesteillä pystytään mittaamaan heikosti niin vuorovaikutus- ja ongelmanratkaisutaitoja kuin ei-akateemisia osaamista, kuten luovuutta, taiteellisia taitoja tai uusien ideoiden välittämistä muille. Sen sijaan jatkossa oppilaiden oppimistuloksia mitattaessa pitäisi antaa suuri arvo sekä kollektiiviselle toiminnalle että yksilölliselle oppimiselle. Yhteisöllisyyteen panostettaessa suomalaisessa koulujärjestelmässä kannustettaisiin oppilaita riskinottoon, luovuuteen ja uusien ideoiden keksimiseen. Tällöin koulu mahdollistaisi oppilaiden osoittaa lahjakkuutensa vaihtelevin tavoin. [49, s. 263–264]

3. PROJEKTIOPPIMINEN PERUSKOULUN OPETUKSESSA

Tässä luvussa tarkastellaan projektityöskentelyä ja -oppimista erilaisista näkökulmista. Tarkoituksena on saada monipuolinen käsitys projektien parissa opiskelusta ja tuoda esille mahdollisuuksia, joita projektityöskentely tarjoaa oppilaiden kasvu- ja oppimisprosessiin. Projektioppimisen sopivuutta opetukseen tarkastellaan peruskoulun opetussuunnitelman perusteiden 2014 ja elävien opetussuunnitelmien pohjalta.

3.1 Projektityöskentely ja -oppiminen

Projektityöskentelyn terminologia ei ole asettunut yksiselitteiseksi. Siksi projektityöskentelyn (project work) kanssa synonyymeina käytettäviä ilmaisuja ovat esimerkiksi projektiopiskelu (project study), projektimetodi (project method) ja projekteihin perustuva oppiminen eli projektioppiminen (project-based learning). [43, s. 2–3]. Projektiopiskelu ei ole myöskään ajatuksellisesti uusi ilmiö, koska projektin opiskelukäsitteen otti ensimmäisenä käyttöön C.R.Richards vuonna 1900. Richardsin opetuksessaan käyttämässä menetelmässä, projektissa, oppilailta vaadittiin itsenäistä ongelmanratkaisua työtehtävien suorittamiseksi. [42, s. 259]

Erkki Pehkonen ja Maarit Rossi esittävät artikkelissaan [41] vaihtoehtoisia opetustapoja. Yksi näistä on projektityöskentely, jolla he tarkoittavat laajaa, useamman oppitunnin ajan kestävää ja oppiainerajat ylittävää tehtävää, jota oppilaat useimmiten tekevät ryhmittäin. Projektityöskentelyn aikana oppilaat voivat päättää ajankäytöstä, tehtävien ja roolien jaosta ryhmän sisällä sekä erilaisten projektiin liittyvien osien painottamisesta. Ryhmät kirjoittavat tuotoksistaan palautettavan loppuraportin ja mahdollisesti esittävät tuloksensa muille oppilaille haluamallaan tavalla. [41, s. 150–151]

Projektityöskentelyssä ryhmien toiminnan arvioimiskriteereistä keskustellaan opettajan ja oppilaiden kesken ennen projektin aloittamista, jolloin oppilaille on selvää, että mitkä ovat työskentelyn yhteiset aikarajat, kuka arvioi heitä ja mitä arvioinnissa painotetaan. Opettajan arvioinnin lisäksi oppilaat voivat itsearvioida omaa työskentelyään ja vertaisarvioida toisia ryhmiä vastaamalla kyselylomakkeeseen. Kyselylomake pyritään laatimaan sellaiseksi, että arvioijakin voi hyödyntää sitä toiminnan parantamiseksi. [41, s. 151].

Seppo Kanervisto ja Pertti Vähätalo kuvailevat artikkelissaan [18] projektityöskentelyä alakoulussa. He kuvaavat projektityöskentelyä eriyttävänä opetuksena pitkäjänteiseen työskentelyyn kykeneville oppilaille. Yleisinä tavoitteina projektityöskentelyssä on Kanerviston ja Vähätalon mukaan

- auttaa oppilasta kehittämään kykynsä sellaisiksi, että hän pystyy tehokkaaseen toimintaan itsensä ja yhteisön hyväksi,
- valmistaa oppilasta luovaan ja vastuulliseen toimintan tiedon tuottajana ja kuluttaja sekä
- tukea oppilasta saavuttamaan realistinen ja terve käsitys omista mahdollisuuksistaan.

Kanervisto ja Vähätalo korostavat projektityöskentelyllä olevan myös terapeuttisia vaikutuksia sellaisiin oppilaisiin, joiden työskentely perusopetusryhmässä on tavallisesti ongelmallista. [18, s. 51]

Hunterin ja Schreirerin Elävä opetussuunnitelma -teoksessa [15] kerrotaan englantilais-amerikkalaisista kokemuksista Suomen alakouluja vastaavissa oppilaitoksissa. Kokemuksien mukaan toiminnallisen oppimisen muodoista tavallisin on teema- tai projektityöskentely. Hunter ja Scheirer toteavat, että parhaat projektityöskentelyn lähtökohdat ovat todelliset ongelmat niiden yhteiskunnallisissa yhteyksissään tai lasten tarpeet ja ongelmat heidän itse kokeminaan. Projektityöskentelyn aikana oppilaiden taitoja, käsitteitä ja yleistyksiä hyödynnetään aitoon tiedonhankintaan, johon liittyy vastuu, riskien ottaminen, erehdyksestä oppiminen, sisukkuus, oivallukset ja itsearviointi. Näin ollen työskentelyn myötä oppilaita valmennetaan elämää varten, ja he saavat arvokkaita kokemuksia. [15, s. 39]

Tavallisesti pitkäkestoiset projektit vaativat opettajalta paljon. Opettajan on esimerkiksi saatava oppilaat sitoutumaan projektityöskentelyyn ja oltava tiiviisti yhteydessä projektissa mukana oleviin koulun ulkopuolisiin toimijoihin. Työskentelyn aikana opettaja keskittyy enimmäkseen ohjaamaan tiedon keräämistä, muistuttamaan oppilaita kirjaamaan havaintoja ja tekemään itse yhteenvetoa niistä sekä tukemaan oppimista. Useimmiten kirjat ja oppaat eivät tue projektityöskentelyä, mikä tuo haasteita opetukseen. [41, s. 238]

Projektiopetuksen menetelmellisenä kehittäjänä pidetään usein yhdysvaltalaista William H. Kilpatrickia [42, s. 259], kuten Hirsjärvi on tehnyt Kasvatustieteen käsitteistössään [14, s. 152]. W.H. Kilpatrick määrittelee projektin [21, s. 320] seuraavasti:"Wholehearted purposeful activity proceeding in a social environment or more briefly in the unit element of such activity the hearty purposeful act." Hirsjärvi kuvaa projektityöskentelyä vastaavaa projektimetodin käsitteen Kilpatrickin kehittämänä progressiivisena opetusmenetelmänä, joka muodostuu oppilaiden ja opettajan yhteisesti suunnittelemista työkokonaisuuksista eli projekteista. Projektimetodin ensimmäinen perusajatus on, että oppilaan asiana on asettaa opiskelun tavoitteet ja arvioida työn tulokset. Toisen perusajatuksen mukaan työskentelyn aikana opitaan älyllisten sisältöjen lisäksi sellaisia opetuksen sivutuotteita, jotka on otettava huomioon jo ennalta opetusta suunnitellessa. [14, s. 152]

Hirsjärvi erittelee projektiopiskelun ja projektimetodin käsitteet toisistaan. Hän määrittelee, että projektiopiskelu "tarkoittaa itsenäistä ja/tai ryhmittäistä työskentelyä esim. jonkin tehtäväalueen informaatiokokonaisuuden tai yhteiskunnassa vallitsevan ongelman ratkaisemiseksi sekä yhteiskunnallisen kokemuksen tai käytännön harjaantumisen hankkimiseksi". Keskeistä projektiopiskelussa on ainekeskeisen opetuksen korvaaminen ongelmakeskeisellä lähestymistavalla. Lisäksi projektille on ominaista ongelman sellainen käsittely, että päästään ehdotukseen kyseisen ongelman ratkaisusta. [14, s. 152]

Jarkko Leino esittelee projektiopiskelua Kauniaisten koululaitoksessa tekemänsä projektin pohjalta. Projektiopiskelun perustana on yksilön oma todellisuus ja kokemustausta, mikä mahdollistaa toiminnallisen opiskelun. Korostettavaa projektiopiskelussa on lisäksi ryhmän puitteissa tapahtuva yhteistoiminnallinen ja suuunnitelmallinen toiminta. Projektit mahdollistavat inhimillisen tiedon omaksumisen, koska informaatiota työstetään oppijan omien yritysten ja skeemojen puitteissa.Toisaalta projektityöskentelyä voidaan pitää ongelmanratkaisuna, jossa projektiksi otettu tehtävä tai tavoite on ongelmana. Oppilaat hakevat valittuun ongelmaan projektiopiskelun myötä ratkaisua vastaten omista suorituksistaan ja tuloksistaan. [34, s. 4, 9]

Projektiopiskelu tarjoaa opettajalle monia etuja opetukseensa. Ensinnäkin projektiopiskelu on sidoksissa opettajan kokemuksiin ja käsityksiin siitä, mitä hän kykenee opettamaan, toiseksi se lähtee osittain opettajan omasta aloitteesta, kolmanneksi se on yhteistoiminnallista toimintaa ja neljänneksi projektiopiskelu on uudenlainen luokkaopetuksen menetelmä. Oppilaiden kannalta olennaista projektiopiskelussa on, että kouluopetusta ja työelämää tuodaan lähemmäs toisiaan, sillä muuten aihepiireistä on vaikeata muodostaa todellista, käytännöllistä merkitystä. [34, s. 7]

Leino jatkaa raportissaan [35] projektiopiskelun tarkastelua alakoulun puolella. Hän pitää projektiopiskelua mahdollisuutena, joka edistää oppilaiden tiedonhankinnan tapoja ja muokkaa opiskelua kohti halutunlaista intentionaalista toimintaa. Projekti, josta sovitaan opettajan ja oppilasryhmän kesken, on tavoitteisen hankkeen ideointia, suunnittelua, toteutusta ja tehdyn arviointia sekä palautteen saantia tavallisesti ohjaajalta tai laajemmalta ryhmältä oppilaita. Projektiopiskelussa ryhmän koko tai projektin laajuus vaihtelevat vapaasti ja joustavat tilanteesta riippuen, ja projekti voi olla niin opetussuunnitelmaan sidottua kuin vapaata opiskelua. [35, s. 32]

Omissa toteuttamissaan kokeiluissa Leino on valinnut usein käsiteltäväksi aihepiiriksi jonkin opetussuunnitelman osan, jota on saatettu myös käsitellä oppikirjoissa.

Tärkeätä kokeiluissa on kuitenkin ollut se, että aihepiiriä on työstetty ryhmien itse ehdottamissaan tarkoituksissa, jolloin toteutuksissa on ollut tilaa ryhmien kiinnostuksille ja jolloin tiedonhankinta on ollut vaihtelevaa. Siksi ryhmien tuloksistaan laatimat raportit ovat olleet vaihtelevia ja tuotoksien vertaisarviointi ja toisille ryhmille esittäminen ovat tehneet projektista hyödyllisemmän. [35, s. 32]

Leila Pehkonen on tutkinut artikkelissaan 11 projektikäsitteen määritelmää ja pyrkinyt löytämään niistä yhteisiä tekijöitä purkamalla määritelmät auki. Tutkittavat määritelmät ovat [42, s. 261]

- Kilpatrick 1918 (projektimetodi),
- Stevenson 1927 (projekti),
- Bossing 1942 (projektimetodi),
- Holten-Andersen ym. 1981 (projektityöskentely),
- Hirsjärvi (toim.) 1983 (projektiopiskelu ja projektimetodi),
- Berthelsen ym. 1985 (projektityöskentely),
- Leino 1988 (projektiopiskelu),
- Frey 1989 (projektimetodi),
- Henry 1989 (projektityöskentely),
- Leino 1989 (projektiopiskelu) ja
- Blumenfeld ym. 1991 (projekteihin perustuva opetus).

Otetaan esimerkiksi Henryn esittämä projektityöskentelyn määritelmä [11, s. 32, 34]:"Project work refers to an extended piece of work in which student (or group of students) is required to select a topic, collect information and organize this material into presentation. This term covers diverse activities such as research or information search or design . . . Project work activities are often allocated large chunks of time ranging from times to weeks." Tästä määritelmästä voidaan poimia keskeisinä ilmiöinä tai ominaisuuksina valinnaisuus, tieteelliset työskentelymenetelmät ja pitkäaikaisuus. Perehtymällä samalla tavalla muihinkin määritelmiin saadaan 11 erilaista projektityön keskeistä ominaisuutta, jotka ovat arviointi (oppilaan toimintana), itsenäinen ajattelu, luonnolliset olosuhteet, ongelmakeskeisyys tai ongelmanratkaisu, pitkäaikaisuus, tavoitteisuus tai suunnitelmallisuus, tieteelliset työskentelymenetelmät, toiminnallisuus, tulosvastuullisuus, valinnaisuus ja yhteistoiminnallisuus. [42, s. 261–262]. Kuvassa 3.1 on havainnollistettu, miten nämä erilaiset ominaisuudet esiintyvät kussakin projektityön määritelmässä.

	Kilp 18	Stev 27	Boss 42	Holt 81	Hirs 83	Bert 85	Lein 88	Frey 89	Henr 89	Lein 89	Blum 89
Arviointi					X					X	
Itsenäinen ajattelu				X							
Luonnolliset olosuhteet		X	X			X					
Ongelmakeskeisyys		X		X	X	X	X	X			X
Pitkäaikaisuus									X		
Suunnitelmallisuus	X		X		X		X	X		X	
Tieteelliset työsk.menet.				X		X			X	X	X
Toiminnallisuus	X	X	X	X		X	X		X	X	X
Tulosvastuullisuus						X	X	X	X	X	X
Valinnaisuus						X			X		X
Yhteistoiminnallisuus					X	X	X	X		X	X

Kuva 3.1: Projektityön keskeiset ominaisuudet eri tutkijoiden määritelmissä [42, s. 263].

Kuvasta 3.1 nähdään, että useimmiten projektiopiskeluun liitetään toiminnallisuuden, ongelmakeskeisyyden, tulosvastuullisuuden, yhteistoiminnallisuuden ja suunnitelmallisuuden ominaisuudet. Eritellään näitä ominaisuuksia tarkemmin seuraavaksi:

1. Toiminnallisuus. Projektiopiskelussa suoritetaan erilaisia työtehtäviä, joista valmistetaan lopputuloksena konkreettisia esineitä, suullisia esityksiä ja kirjallisia raportteja käyttäen erilaisia välineitä, kuten tietokoneita ja laskimia, työskentelyssä apuna. Projektityö on luonteeltaan valinnaista, eli oppilaat saavat valita työtehtävänsä ja työskentelytapansa itse. [42, s. 263]

2. Ongelmakeskeisyys, ongelmanratkaisu. Ongelmana voidaan pitää projektiksi valittua tehtävää tai tavoitetta, tai siitä johdettuja ongelmia kysymyksiä tekemällä ja jalostamalla. Työn edetessä muodostuu jatkuvasti oppilaille tuntemattomia tilanteita, jotka vaativat ratkaisuja. [42, s. 263]

3. Tulosvastuullisuus. Projektityöskentelyssä työ on suoritettava mielekkäästi loppuun. Tämä edellyttää oppilailta vastuun ottamista projektin suunnitteluvaiheesta aina työn valmistumiseen asti. [42, s. 263]

4. Yhteistoiminnallisuus. Projektiopiskelu tapahtuu useimmiten ryhmissä. Yksilökin voi tehdä projektityötä, mutta toiset oppilaat antavat työn aikana hänelle

niin paljon vaikutteita, että se vaikuttaa hänen oppimiseensa. Projektioppimisen myötä opettajan roolina on toimia työn konsulttina. [42, s. 263]

5. Suunnitelmallisuus, tavoitteisuus. Oppilaat asettavat ennen projektityöskentelyn aloittamista tavoitteet yhteistyössä opettajan kanssa. Työn edetessä oppilaat asettavat uusia tavoitteita, ja koska heillä on vastuu omasta työskentelystään, työnteon suunnitelmallinen noudattaminen jää oppilaiden velvollisuudeksi. [42, s. 263]

Leino esittää kolme kouluopiskelua koskevaa projektiopiskelun piirrettä, joista olennaisin on, että käsiteltävää aihepiiriä työstetään toisessa tarkoituksessa kuin oppikirjassa on esitetty. Siksi projektiopiskelun etuna voidaan pitää tiedon käyttämistä uuteen ja oppilaiden mielestä järkevään tarkoitukseen, mikä suuntaa opiskelua prosessointaitojen luomiseen. Oppilaat painottavat tällöin sekä kiinnostusalueitaan että parhaita osaamisen puoliaan kuitenkin oppien tavoitteiden mukaiset sisällöt. [35, s. 32–33]

Toinen projektiopiskelun keskeinen piirre on toiminnallisuus mielekkäiden työtehtävien puitteissa. Oppiminen perustuu oppilaiden omaan työhön, joka on harvoin täysin virheetöntä tai opettajan kuvittelemaa. Siis työskentelyn myötä oppilaat voivat oppia virheistään ja opettaja voi havaita erilaisia toimintatapoja. Pienryhmässä oppilaat saavat lisäksi jatkuvaa palautetta, työskentelevät intensiivisesti ja tutustuvat aihepiiriin kattavasti. [35, s. 33]

Kolmantena projektiopiskelun etuna on kunkin ryhmän vastuu omasta työskentelystään, minkä vuoksi nuoret oppivat tulosvastuullisuutta. Oppilaiden yritykset kehittävät niin omien kiinnostusten kehittämistä ja ajan käytön suunnittelua kuin moraalisten näkökohtien ja metakognitiivisten taitojen harjaantumista. [35, s. 33] Leino korostaa projektiopiskelussa myös yhdessä tekemisen ja opiskelun tärkeyttä. Ryhmissä työskentelyn tehokkuus riippuukin useista tekijöistä, kuten olosuhteista, tavoitteista, ryhmien koostumuksesta, ryhmätyöskentelytaidoista sekä oppilaiden iästä ja lähtötiedoista. [35, s. 33, 36]

Ongelmat voidaan jakaa Sahlbergin ym. mukaan suljettuun ja avoimeen järjestelmään. Suljetun järjestelmän ongelmassa on rajallinen määrä tekijöitä, jotka säilyvät muuttumattomina, ongelman oikea ratkaisu tunnetaan etukäteen ja tämä ratkaisu on sekä toteen näytettävä että loogisesti oikea. Avoimen järjestelmän ongelmanratkaisussa vastataan oppimiselle edellytettävään luovuuden tarpeeseen. Ongelmanratkaisijan pitää uhmata asetettuja rajoja tai tuntemiaan ratkaisumalleja löytääkseen uusia lähestymistapoja ja ratkaisuvaihtoehtoja. [50, s. 17–18]

Luovan avoimen ongelmajärjestelmän prosessi voidaan toteuttaa usealla eri tavalla, kuten projektiopiskelulla. Prosessin onnistumiseksi on kiinnitettävä huomiota kahdeksaan eri luovuuden edellytykseen [50, s. 19–22]:

1. Oppilaan ongelmaherkkyys: ongelma tunnistetaan parhaiten, kun oppilaat omaaloitteisesti kokevat ongelman ja ilmaisevat sen, mutta oppilaiden on myös hyväksyttävä opettajan asettaman ongelman mielekkyys ja kiinnostuttava siitä.

2. Ongelmien avoimuus ja aukollisuus tulee hyväksyä: koulussa avoimien, aukollisten tehtävien, joita ovat monet elävän elämän todelliset ongelmat, avulla pyritään takaamaan oppilaiden luovan vireystilan syntyminen ja jatkuminen.

3. Omien kokemusten tunnistaminen: vapaiden ajatusten lentoa turvataan ja edistetään hyväksyvässä ilmapiirissä, ja näistä kokemusperäisistä ehdotuksista eritellään toimintaa hyödyttävät ideat.

4. Ongelmien ratkaiseminen edellyttää laajan kokemus- ja tietopohjan hyväksikäyttöä: aikaisempaa tietoa ei toisteta sellaisenaan, vaan niin aiempi tieto ja taito kuin tunnepuoli yhdistetään ympäristön tarjoamiin mahdollisuuksiin.

5. Ideoinnin ja hypoteesien teon vapaus: kehitetään ideoita ja hypoteeseja, joita voidaan analysoida ja arvioida myöhemmin, joustavasti ilman turhaa arvostelua ja yksipuolisten päätelmien tekemistä.

6. Omaleimaisten ratkaisujen tukeminen: kaikki tavat oppia sallitaan, ja oppilaita kehotetaan käyttämään useita erilaisia lähestymistapoja, jolloin opettajan on siedettävä ja tuettava oppilaiden yksilöllisyyttä.

7. Oppilaan tulee voida keskustella ideoistaan ja ratkaisuistaan: omaperäisten ajatusten vaihto ryhmässä on olennaista ongelmanratkaisussa, jotta hän voi vaikuttaa ympäristöönsä.

8. Ratkaisun muokkaus ja arviointi: opettaja tai luokkakaverit antavat subjektiivisen, rakentavan arvion idean muokkaamiseksi ja jatkokehittelyksi lisäten oppilaiden syvempää ja persoonallista tuottamista jatkossa.

Koulussa luovaan toimintaan pyrittäessä on tärkeätä, että useammat opettajat tekevät yhteistyötä keskenään ja rehtori tukee heidän toimiaan. Luovan toiminnan toteutumista voidaan tarkastella useammasta näkökulmasta. Ensinnäkin opettaja rooli siirtyy opetuksessa sivummalle, konsultiksi ja resurssihenkilöksi. Opettajan merkitys ei vähene, sillä hänen hienovarainen ohjaaminen luovaan toimintaan edellyttää suurta henkistä joustavuutta. Toiseksi luovan toiminnan myötä oppilaiden ominaisuudet, kuten ongelmaherkkyys, keskittymiskyky sekä perustiedot ja -taidot, kehittyvät monipuolisesti. Oppilaiden motivaation ja itseluottamuksen sopiva taso ja terve minäkuva ovat toiminnalle tärkeitä osasia. Kolmanneksi luovan ongelmanratkaisun toteuttaminen edellyttää yhteistyön ilmapiiriä, jossa hyväksytään saadut yhteiset ratkaisut ja arvostetaan yksilöitä sellaisinaan. Neljänneksi luovaa toimintaa tukevalta oppimisympäristöltä vaaditaan virikkeisyyttä ja muunneltavuutta, jotta oppilaiden monenkeskinen vuorovaikutus ja sosiaaliset kontaktit mahdollistuvat. Tämä tarkoittaa koulun ja sen ympäristön tarjoamien mahdollisuuksien monipuolista hyödyntämistä opetusta varten. [50, s. 22–24]

Karlsson ja Riihelä erittelevät oppilaiden ryhmätyöskentelyä. Jos ryhmät ovat heterogeenisiä, nuorten käsitykset eroavat toisistaan, ja he joutuvat ratkaisuun pyrkiessään esittämään monipuolisia perusteluja omille mielipiteilleen. Oppilaiden keskinäinen keskustelu on työskentelyn aikana sellaista, jota aikuisen ja nuoren välinen keskustelu ei voi korvata. Ryhmätyöskentelyssä erilaisten yksilöiden toisilleen antamat opetukset saattavat olla oppimistulosten kannalta merkittävämpiä kuin opettajan antama perinteinen ohjaus. [19, s. 71]. Tiivistetysti Karlsson ja Riihelä muistuttavat, että parhaiten oppimistoiminta kehittyy niissä ryhmissä, joissa on sekä tyttöjä että poikia, oppilaat ovat tiedoiltaan ja taidoiltaan heterogeenisiä sekä nuoret eivät ole toisistaan liiaksi poikkeavia [19, s. 77].

Projektiopiskelun myötä opettajan työ siirtyy asian esittelemisestä yhdessä työskentelyn ohjaamisen suuntaan. Tällöin oppilaiden oppimisesta saattaa tulla pysyvämpää, koska oppilaat erittelevät itse aihepiiriä ja opettavat toisiaan. Tämä ei tarkoita opettajan työmäärän vähenemistä, sillä hänen on huolellisesti suunniteltava sellaisia projekteja, jotka tukevat oppilaiden kehitystä ja muodostavat opetusta luonnollisesti eteenpäin vievän jatkumon. [35, s. 34–35]

Pehkonen ja Rossi tuovat esiin tarpeen rikastuttaa perinteistä matematiikan opetusta erilaisilla oppimiseen tähtäävillä oppilaskeskeisillä toimilla. Projektityöskentelyn myötä matematiikkaa käytetään oppilaiden näkökulmasta merkityksillisissä tilanteissa. Tämä edistää ongelmakeskeisen opetuksen käyttöä, kasvattaa nuorten keskinäisen matemaattisen keskustelun määrää ja ohjaa oppilaita syvempään tarkasteletavan aihepiirin tutkimiseen. [41, s. 145–146]

3.2 Projektioppiminen ja opetussuunnitelma

Hunter ja Schreirer esittävät lähinnä alakoulua koskevan elävän opetussuunnitelman käsitteen. Elävä opetussuunnitelma on ”lapsikeskeinen ja prosessiorientoitunut opetuksen lähestymistapa, joka korostaa konkreettisia oppimiskokemuksia ja sisältöalueitten integraatiota”. Peruspiirteitä elävälle opetussuunnitelmalle ovat lapsikeskeinen lähestymistapa, konkreettisen kokemuksen rooli, oppiaineittein integrointi ja opetuksen prosessinäkökohta. [15, s. 52]. Tarkastellaan näitä osatekijöitä seuraavaksi kutakin erikseen.

Lapsikeskeisen lähestymistavan lähtökohtana on, että opetuksessa keskitytään enemmän oppilaiden oppimiseen kuin opettajan opettamiseen. Edellytyksenä on myös, että koulun toimintoja tutkitaan pääasiassa lasten kokemuksista lähtien ja oppimistoimintoja suunnitellaan lasten silmin. Lapsikeskeinen opettaminen edellyttää opettajalta jatkuvaa lasten toiminnan huomiointia sekä havainnointia ja analysointia siitä, mitä tuo toiminta edustaa lasten ajatteluprosesseissa. Opettaja-lapsi -vuorovaikutus alkaa siis aina lapsen käyttäytymisestä, mitä opettaja voi hyödyntää jatkossa opetuksessaan. [15, s. 53–55]

Lapsikeskeisen opettamisen myötä lapset sisäistävät aktiivisen roolin opetuksen aikana ja näin ollen edesauttavat lapsikeskeisyyden toteutumista. Huomioitavaa lapsikeskeisyydessä on, että siinä korostetaan yksittäistä lasta ja hänen käyttäytymistään enemmän kuin ryhmää. Siis lapsikeskeisen opetusmallin kaksi tärkeintä seikkaa ovat opetusta koskevien ratkaisujen tekeminen lasten käyttäytymisen perusteella ja yksittäisen lapsen tärkeyden muistaminen. [15, s. 55–57]

Jotta opettajien käyttäytyminen voi olla suhteessa lasten toimintoihin, pitää lapsia aktivoida luokkahuoneen tapahtumiin. Lapsikeskeisen opetuksen pitää tarjota lapsille mielekkäitä tilaisuuksia toimita, jotta opettaja voi ymmärtää heidän ajatteluaan. Lapsien oppimista tulevat kokeelliset, konkreettiset toiminnat

- hyödyntävät lasten kiinnostusta tuttuun ja tuntemattomaan,
- käyttävät hyödyksi opettajan kiinnostuksen kohteita,
- perustuvat moniin sisältöalueisiin liittyviin teemoihin,
- sisältävät mahdollisuuksia kommunikoida puhumalla, kuuntelemalla, kirjoittamalla ja kuuntelemalla,
- sallivat lapsen rohkaisemisen kysymyksien esittämiseksi,
- tarjoavat lapsille mahdollisuuksia valita sisältöjä, jotka johtavat yksilölliseen tutkimiseen ja itseilmaisuun,
- ohjaavat käsitteiden ja taitojen kehittämiseen erilaisilla oppimisen alueilla,
- keskittyvät havainnoinnin, päätöksenteon, järjestelyn, luovuuden ja arvioinnin prosesseihin,
- mahdollistavat laajan tarkastelun ja syvällisen tutkimisen, sekä
- rohkaisevat lapsia vastuuseen oppimisestaan haastamalla heidät tehtäviin, johdattamalla heidät työskentelemään monipuolisten oppimateriaalien kanssa ja totuttamalla heidät itsearviointiin.

Tiivistetysti kokeellinen oppiminen asettaa lapsen kasvatuksen keskipisteeksi, johdattaa hänet huomaamattomasti opetussuunnitelman perinteisille sisältöalueille ja kehittää hänen kykyjään sellaisissa inhimillisissä prosesseissa, kuten havainnointi, kysyminen, tiedonvälitys, jäsentely ja luovuus. [15, s. 57–66]

Alakoulussa perinteisten oppiainealueittein integrointi on elävän opetussuunnitelman olennaisin piirre. Integraation käsitteellä on monia merkityksiä. Yksinkertaisimmillaan oppiaineittein integraatio tarkoittaa, että oppiaineita ei eroteta toisistaan, vaan ne pidetään yhdessä, tai jos oppiaine on ollut aiemmin irrallinen, nyt se yhdistetään muuhun ainekseen niin, että opetussuunnitelma lasten kokemana on vuorovaikutuksellinen. Siis opetussuunnitelman osat pysyvät yhdessä tai ne yhdistetään uudelleen. [15, s. 66–68]

Alakoululaisten 7–12-vuotiaiden lasten tapauksessa integraatiota voidaan toteuttaa useilla tavoilla. Satunnaista integraatiota tapahtuu, kun opetuksessa painottuu opetussuunnitelman perinteiset sisällöt. Vahvistaminen ja harjoitus mahdollistavat muiden sisältöalueiden soveltamisen. Sisäänrakennetun integroinnin myötä sisältöalue on sijoitettu toisen oppiaineen osaksi. Työskentelyn koordinoinnilla tarkoitetaan eri sisältöalueiden aiheiden tietoista yhdistämistä ja esittämistä samanaikaisesti. Tällöin yksittäisiä käsitteitä eri oppiaineista voidaan verrata keskenään. Prosessitavoitteita korostetaan sisältöalueita integroimalla: integraatiota tapahtuu, kun toimintoja valitaan useilta alueilta pyrkien edistämään prosessien kehittymistä. Aihe- tai teematyöskentely alkaa elämänläheisin ongelmin ja keskittyy sitten lasten kiinnostuksen kohteisiin ja kysymyksiin, jotka eivät ole tiedonalalle keskeisiä ja jotka ovat siksi valmiiksi integroituja. [15, s. 68–71]. Siis oppiaineiden integraatio on elävän opetussuunnitelman peruspiirre, koska se edistää kokeellista oppimista ja tukee opetuksen lapsikeskeisyyttä [15, s. 76].

Opetuksen prosessinäkökohta ohjaa lapset oppimaan aktiivisesti, mikä mahdollistaa sellaisten konreettisten kokemusten saamisen, joiden pohjalta abstrakti oppiminen voi jatkossa kehittyä. Tärkeää on ymmärtää, että prosessien kehittäminen itsessään on lasten oppimisen avaintekijä. Prosessiorientoituneesti opetussuunnitelman näkevät opettajat voivat löytää eri ajankohtina erilaisia prosesseja, mutta aina he kokevat lasten toiminnan opettamisessa keskeisimpänä ja tuovat lapsen taitoja esiin rohkaistaakseen hänen kasvuaan. Tästä huomataan, että prosessien pitäminen elävän opetussuunnitelman perustekijänä korostaa opetuksen lapsikeskeistä ja kokeellispohjaista näkökulmaa. Täten kuvatut pääpiirteet ovat toisistaan riippuvaisia ja toisiaan tukevia. [15, s. 76–79]

Esiteltyjen pääpiirteiden yhdistäminen elävän opetussuunnitelman muodostamiseksi luo monimutkaisen kokonaisuuden. Siiitä on kuitenkin mahdollista havaita opettajan roolissa tapahtuvat muutokset: opettajasta tulee kokemusten suuunnittelija, toimintojen aloittaja, lapsen käyttäytymisen havainnoija ja kasvamisen tukija. Voidaan sanoa, että opettaja on lasten opas heidän kasvaessaan vastuullisiksi, itsenäisiksi ja pohtiviksi yksilöiksi. [15, s. 82–84]

Elävää opetussuunnitelmaa toteutettaessa se koostuu kokeellisesta vaiheesta, laajentumisvaiheesta ja reflektiivisestä vaiheesta. Jokaisessa vaiheessa opettaja havainnoi ja analysoi tapahtumia sekä päättää jatkaa samaa vaihetta tai siirtyä seuraavaan vaiheeseen. Kokeellisessa vaiheessa opettaja pitää yksittäisiä oppitunteja, joilla korostetaan yhtä tai useampaa elävän opetussuunnitelman pääpiirrettä. Laajentumisvaiheeseen siirrytään, kun opettaja saa positiivisia kokemuksia ja alkaa soveltaa taitojaan. Opetuksen vakiintuminen mahdollistaa elävän opetussuunnitelman soveltamisen useampiin oppiaineisiin pidemmällä aikajaksolla. Reflektiivisessä vaiheessa integraatio ulottuu kaikkeen, mitä luokassa tehdään. Tällöin kaikissa opetustilanteissa käytetään elävää opetusta, ja lisäksi opettaja valitsee tehtäville ja tavoitteille luontevimmat toteutustavat, jolloin avaintekijäksi muodostuu opettajan käsitys kasvatuksesta. [15, s. 169–171]

Tutustutaan tarkemmin elävän opetussuunnitelman laajentumisvaiheen yhteen mahdolliseen työskentelytapaan, projektityöhön. Elävän opetussuunnitelman neljä avaintekijää toteutuvat projektityöskentelyssä. Käsiteltävät aiheet ja teemat, jotka edustavat laajempia käsitteitä, toimivat projektin aloituskohtina synnyttäen luontevan oppiaineiden integraation ja johtavat lasten työskentelyn oppiainesisältöihin. Projektityöskentely johtaa myös prosessisuuntautumiseen, koska pitkäjänteisen tiedonhankinnan myötä lasten kyvyt tehdä kysymyksiä, ratkaista ongelmia, käyttää voimavaroja, järjestellä tietoa ja ilmaista ajatuksia kehittyvät. [15, s. 187–188]

Elävään opetuksen laajentumisvaiheessa toteutettavaan projektiin vaikuttavat yleisesti seuraavat periaatteet [15, s. 189]:

1. Aiheeksi tai teemaksi valitaan lapsille sellainen mielenkiintoinen alue, joka mahdollistaa tasapainon ja jatkuvuuden koulun koko opetussuunnitelmaan.

2. Projektityöskentelyn tavoitteet on tunnistettava ja määriteltävä selkeästi.

3. Projektityölle on laadittava sisältöjä ja oppimista rajaava suunnitelma.

4. Oppiaineittein integraation on sovittava valittuun aihepiiriin tai teemaan.

5. Työskentelyn myötä lasten osuutta opetuksen toimintojen järjestelyssä ja niiden toteuttamisessa kasvatetaan.

6. Lasten motivaation säilyttäminen on tärkeätä, mutta työskentelyn ajankäytön ja suuntaumisen on pysyttävä kaavailtuna.

7. Projektityöskentelyn on päätyttävä molempia osapuolia tyydyttävällä tavalla.

Projektityöskentelyn aikana opettajan pätevyys ja varmuus lisääntyvät. Tämän takia opettaja pystyy jatkossa suunnittelemaan helpommin lasten työskentelyä ottaen huomioon heidän heräävät kiinnostuksensa, tarpeensa ja kykynsä sekä oppimisen haasteet, jotka eivät ole ennakoitavissa. [15, s. 189]

Ylipäätään projektioppimista voidaan pitää uusien perusopetuksen opetussuunnitelman perusteiden 2014 mukaisena toimintana. Esimerkiksi opetussuunnitelman perusteissa tuodaan esiin seuraavanlaisia näkökulmia:

- ”Perusopetus luo edellytyksiä elinikäiselle oppimiselle, joka on erottamaton osa hyvän elämän rakentamista.” [39, s. 15]
- ”... oppilas on aktiivinen toimija. Hän oppii asettamaan tavoitteita ja ratkaisemaan ongelmia sekä itsenäisesti että yhdessä muiden kanssa.” [39, s. 17]
- ”Oppiminen tapahtuu vuorovaikutuksessa toisten oppilaiden, opettajien ja muiden aikuisten sekä eri yhteisöjen ja oppimisympäristöjen kanssa.” [39, s. 17]
- ”Yhdessä oppiminen edistää oppilaiden luovan ja kriittisen ajattelun ja ongelmanratkaisun taitoja sekä kykyä ymmärtää erilaisia näkökulmia.” [39, s. 17]
- ”... tavoitteet ohjaavat tarkastelemaan opetusta kokonaisuutena, joka rakentaa tässä ajassa tarvittavaa yleissivistystä ja luo pohjaa elinikäiselle oppimiselle. Tiedonalakohtaisen osaamisen lisäksi tulee tavoitella oppiainerajat ylittävää osaamista.” [39, s. 19]
- ”Kokemukselliset ja toiminnalliset työtavat sekä eri aistien käyttö ja liikkuminen lisäävät oppimisen elämyksellisyyttä ja vahvistavat motivaatiota. Motivaatiota vahvistavat myös työtavat, jotka tukevat itseohjautuvuutta ja ryhmään kuulumisen tunnetta.” [39, s. 30]
- ”Oppilaita ohjataan toimimaan erilaisissa rooleissa, jakamaan tehtäviä keskenään ja olemaan vastuussa sekä henkilökohtaisista että yhteisistä tavoitteista.” [39, s. 30]
- ”Oppimisen kannalta tärkeitä ovat tiedon hankkimisen, käsittelyn, analysoimisen, esittämisen, soveltamisen, yhdistelemisen, arvioinnin ja luomisen taidot. Tutkiva ja ongelmalähtöinen työskentely, leikki, mielikuvituksen käyttö ja taiteellinen toiminta edistävät käsitteellistä ja menetelmällistä osaamista, kriittistä ja luovaa ajattelua sekä taitoa soveltaa osaamista.” [39, s. 30]
- ”Opettaja valitsee työtavat vuorovaikutuksessa oppilaiden kanssa ja ohjaa oppilaita erityisesti uusien työtapojen käytössä itseohjautuvuutta vahvistaen. Oppimaan oppimisen taidot kehittyvät parhaiten silloin, kun opettaja ohjaa oppilaita myös suunnittelemaan ja arvioimaan työskentelytapojaan.” [39, s. 31]
- ”Oppimiskokonaisuudet suunnitellaan riittävän pitkäkestoisiksi siten, että oppilailla on aikaa syventyä oppimiskokonaisuuden sisältöön ja työskennellä tavoitteellisesti, monipuolisesti ja pitkäjänteisesti.” [39, s. 31]

- ”Oppimiskokonaisuuksien tarkoituksena on käsitellä toiminnallisesti oppilaiden kokemusmaailmaan kuuluvia ja sitä avartavia asioita . . . ” [39, s. 32]
- ”Huolehditaan siitä, että oppilaat saavat kokemuksia yhteistyöstä ja demokraattisesta toiminnasta omassa opetusryhmässä, koulussa ja sen lähiympäristössä sekä erilaisissa verkostoissa.” [39, s. 35]
- ”Oppilaiden osallistuminen oman koulutyönsä ja ryhmänsä toiminnan suunnitteluun on luonteva tapa vahvistaa osallisuutta.” [39, s. 35]
- ”Monialaiset oppimiskokonaisuudet ja valinnaiset aineet tarjoavat mahdollisuuksia oppilaiden kiinnostuksen kohteiden syventämiseen ja vapaa-ajalla opitun yhdistämiseen koulutyöhön. Ne luovat tilaisuuksia itsenäisyyden ja vastuullisuuden harjoitteluun esimerkiksi taiteellisissa produktioissa, tutkimushankkeissa ja yhteiskunnallisissa projekteissa.” [39, s. 281]

Nämä näkökulmat sisältävät juuri niitä asioita, joita konstruktivistinen oppimisnäkemys ja projektioppiminen korostavat, kuten lukujen 2 ja 3 teoriaosioista havaitaan.

Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteissa esitetään matematiikan opiskelun, oppimisen ja opettamisen suhteen yhtä lailla projektioppimiseen kannustavia sisältöjä. Näitä ovat

- ”Konkretia ja toiminnallisuus ovat keskeinen osa matematiikan opetusta ja opiskelua. Oppimista tuetaan hyödyntämällä tieto- ja viestintäteknologiaa.” [39, s. 374]
- ”Se [matematiikan opetus] kehittää myös viestintä-, vuorovaiktus- ja yhteistyötaitoja.” [39, s. 374]
- ”Matematiikan opiskelu on tavoitteellista ja pitkäjänteistä toimintaa, jossa oppilaat ottavat vastuuta omasta oppimisestaan.” [39, s. 374]
- ”Opetus ohjaa oppilaita ymmärtämään matematiikan hyödyllisyyden omassa elämässään ja laajemmin yhteiskunnassa.” [39, s. 374]
- ”Matematiikan opetus ohjaa oppilaita tavoitteelliseen, täsmälliseen, keskittyneeseen ja pitkäjänteiseen toimintaan. Oppilaita rohkaistaan esittämään ratkaisujaan ja keskustelemaan niistä.” [39, s. 374]
- ”Opetuksen lähtökohdat valitaan oppilaita kiinnostavista aiheista, ilmiöistä ja niihin liittyvistä ongelmista.” [39, s. 376]

- ”Opetuksessa käytetään vaihtelevia työtapoja. Ongelmia matematisoidaan, ratkaistaan ja tulkitaan yksin ja yhdessä. Yhdessä työskennellessä jokainen toimii sekä itsensä että ryhmän hyväksi.” [39, s. 376]
- ”Oppilaita tuetaan suurempien asiakokonaisuuksien hahmottamisessa ja yhteyksien löytämisessä.” [39, s. 376]
- ”Taitavia oppilaita tuetaan tarjoamalla heille vaihtoehtoisia työskentelymuotoja, kuten esimerkiksi erilaisia projekteja ja ongelmalähtöisiä tutkimustehtäviä oppilaita kiinnostavista matemaattisista aiheista.” [39, s. 376]

Lähemmin projektioppimisen pohjautumista perusopetuksen opetussuunnitelman perusteisiin tarkastellaan seuraavissa kappaleissa esiteltävien projektien yhteydessä.

4. LIIKUNNALLISIA PROJEKTEJA YLÄKOULUN MATEMATIIKAN OPETUKSEEN

Tässä luvussa esitellään yläkoulun matematiikan opiskeluun liittyviä liikunnallisia tai liikuntaan liittyviä projekteja, jotka pohjautuvat perusopetuksen opetussuunnitelman perusteisiin. Projektien tarkoituksena on havainnollistaa oppilaille, että matematiikkaa tarvitaan ja käytetään arkielämän liikunnallisissa tilanteissa.

4.1 Suoraan verrannollisuuden ja nopeuden tutkiminen yleisurheilun avulla

Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteissa 2014 korostetaan aktiivisen oppilaan roolia. Ajattelun ja oppimisen kannalta on olennaista kielen, kehollisuuden ja eri aistien käyttö. [39, s. 17]. Tässä luvussa esitellään yleisurheiluun liittyvää liikunnallista projektia, jossa samalla eheytetään matematiikan, fysiikan ja liikunnan opetusta. Lisäksi projektin aikana oppilaat voivat tarvita englannin kielen osaamista, kun he etsivät mediakriittisesti tietoja eri lähteistä.

4.1.1 Matemaattinen tausta

Projekti liittyy matemaattisesti suoran yhtälön ja suoraan verrannollisuuden tutkimiseen sekä tasaisen että hetkellisen nopeuden määrittämiseen. Suoran yhtälölle on useampia muotoja, mutta yläkoulun matematiikassa käsitellään tavallisesti suoran yhtälön ratkaistua muotoa [8, s. 30]. Määritellään ensin suoran kulmakerroin.

Määritelmä 1. ([3], s. 13) *Kahden pisteen (x_1, y_1) ja (x_2, y_2), $x_1 \neq x_2$, kautta kulkevan suoran kulmakerroin on*

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Kulmakerroin ilmaisee y-koordinaatin muutoksen ja x-koordinaatin muutoksen suhteen. Suoralla ei ole kulmakerrointa, mikäli $x_1 = x_2$. Tällöin kyseessä on pystysuora suora.

Johdetaan suoran kulmakertoimen määritelmää käyttäen suoran yhtälön ratkaistu muoto. Tarkastellaan ensin tapausta, jossa suoralla ei ole kulmakerrointa, eli kyseessä on pystysuora. Olkoon (x_0, y_0) eräs pystysuoran suoran piste. Koska pystysuoralla kaikkien suoran pisteiden x-koordinaatti on sama, on

$$x = x_0. \tag{4.1}$$

Yhtälöä 4.1 kutsutaan pystysuoran suoran ratkaistuksi muodoksi. [3, s. 15]

Toisessa tapauksessa suoralla on kulmakerroin. Olkoon suoralla piste (x_0, y_0) ja valitaan suoralta toiseksi mielivaltaiseksi pisteeksi (x, y). Määritelmän 1 mukaisesti suoran kulmakerroin on

$$k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y - y_0}{x - x_0},$$

joten

$$y - y_0 = k(x - x_0), \tag{4.2}$$

kun $x \neq x_0$. Täten kaikki suoran pisteet toteuttavat suoran yhtälön $y - y_0 = k(x - x_0)$, missä (x_0, y_0) on suoran yksi piste ja k on suoran kulmakerroin. [3, s. 15]

Yhtälön 4.2 mukaisesta suoran yhtälöstä saadaan selvitettyä suoran yhtälön ratkaistu muoto, kun suoralla on kulmakerroin. Jos suora leikkaa y-akselin pisteessä $(0, b)$ ja suoralla on kulmakerroin k, suoran yhtälö on yhtälön 4.2 mukaisesti

$$y - b = k(x - 0).$$

Tästä saadaan ratkaistua

$$y = kx + b, \tag{4.3}$$

jota kutsutaan suoran yhtälön ratkaistuksi muodoksi. Siirtämällä suoran yhtälöissä 4.1, 4.2 ja 4.3 kaikki termit yhtälön vasemmalle puolelle saadaan suoran yhtälön yleinen muoto

$$ax + by + c = 0,$$

missä $a \neq 0$ tai $b \neq 0$. [3, s. 15–16]

Lause 1. ([3], s. 16) *Kaikki muotoa*

$$ax + by + c = 0,$$

missä vakio $a \neq 0$ tai vakio $b \neq 0$ ja vakio $c \in \mathbb{R}$, olevat yhtälöt esittävät suoraa xy-koordinaatistossa.

Todistus. Oletetaan, että yhtälössä $ax + by + c = 0$ joko vakio $a \neq 0$ tai $b \neq 0$ ja c on reaalinen vakio. Tarkastellaan ensin tapausta, jossa $b = 0$. Tällöin oletuksen mukaisesti vakio $a \neq 0$. Tällöin muotoa $ax + by + c = 0$ oleva yhtälö saa muodon

$$ax + c = 0,$$

josta voidaan ratkaista

$$x = -\frac{c}{a}.$$

Tämä yhtälö esittää pystysuoraa suoraa, koska $-\frac{c}{a}$ on vakio. Toisessa tapauksessa $b \neq 0$. Tällöin

$$\begin{aligned} & ax + by + c = 0 \\ \Longleftrightarrow\ & by = -ax - c \\ \Longleftrightarrow\ & y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}. \end{aligned}$$

Yhtälö esittää suoraa ratkaistussa muodossa, jossa $-\frac{a}{b}$ on suoran kulmakerroin ja $-\frac{c}{b}$ on vakiotermi, riippumatta siitä, että onko $a = 0$ vai $a \neq 0$. Näin ollen kaikissa tapauksissa yhtälö $ax + by + c = 0$ esittää suoraa xy-koordinaatistossa. □

Peruskoulun vuosiluokilla 7-9 kappaleen nopeus esitellään matematiikan ja fysiikan opinnoissa tasaisen ja muuttuvan liikkeen malleilla [39, s. 391]. Tasaisella liikkeellä etenevän kappaleen kulkeman matkan ja siihen kuluneen ajan välinen suhde on vakio, kappaleen keskinopeus v.

Määritelmä 2. ([36], s. 13) *Tasaisella liikkeellä etenevän kappaleen keskinopeus on*

$$v = \frac{s}{t},$$

missä s on kappaleen kulkema matka metreinä ja t on kulunut aika sekunteina.

Yläkoulun matematiikassa tasainen liike on esimerkki suureiden välisestä suoraan verrannollisuudesta [17, s. 161]. Suureet ovat ovat mitä tahansa lukuja, janoja, kaaria, kulmia, alueita tai muita sellaisia olioita, jotka ovat mitattavissa [62, s. 49]. Kaksi samanlaatuista suuretta ovat samalla mitta-asteikolla mitattavia ja niiden suhde on sellainen luku, että kun sillä kerrotaan jälkimmäistä suuretta, tulokseksi saadaan edellinen suure. Yleisesti suureiden a ja b suhdetta k merkitään

$$\frac{a}{b} = k \iff a = kb.$$

Kahden suhteen $\frac{a_1}{b_1}$ ja $\frac{a_2}{b_2}$ merkittyä yhtäsuuruutta

$$\frac{a_1}{d_1} = \frac{a_2}{b_2} = k$$

kutsutaan verrannoksi. [62, s. 49–50] Näitä tietoja käyttäen voidaan määritellä suoraan verrannolliset suureet.

Määritelmä 3. ([62], s. 99) *Suureet a_1, a_2, a_3, . . . , a_{n-1}, a_n ovat suoraan verrannollisia suureisiin b_1, b_2, b_3 . . . , b_{n-1}, b_n, jos*

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}, \frac{a_2}{a_3} = \frac{b_2}{b_3}, \ldots, \frac{a_{n-1}}{a_n} = \frac{b_{n-1}}{b_n}.$$

Määritelmän yhtälöt voidaan kirjoittaa myös muodossa

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}, \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}, \ldots, \frac{a_{n-1}}{b_{n-1}} = \frac{a_n}{b_n},$$

josta nähdään, että

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \cdots = \frac{a_{n-1}}{b_{n-1}} = \frac{a_n}{b_n}.$$

Siis suoraan verrannollisten suureiden a_i ja b_i välinen suhde pysyy vakiona, eli

$$\frac{a_i}{b_i} = k, \tag{4.4}$$

kaikilla $i = 1, 2, \ldots, n-1, n$.

Suoraan verrannollisuuden yhtälöstä 4.4 havaitaan, että tasaisen liikkeen Määritelmän 2 mukaiset suureet s ja t ovat suoraan verrannollisia, koska matkan tai ajan muuttuessa myös toinen näistä suureista muuttuu samassa suhteessa. Kappaleen liikettä ei ole kuitenkaan aina mielekästä tutkia tasaisen liikkeen mallilla, koska kappaleen nopeus voi vaihdella ajan funktiona, eli $v = v(t)$. Nopeuden laskemiseksi tiettynä ajan hetkenä tarvitaan hetkellisen nopeuden käsitettä. [36, s. 13, 15]

Tarkastellaan kappaletta, joka liikkuu pisteestä A pisteeseen B matkan Δs ajassa Δt. Kappaleen keskinopeus pisteiden A ja B välillä on tasaisen liikkeen Määritelmän 2 mukaisesti

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

Kappaleen hetkellinen nopeus pisteessä A on tällöin suhteen $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ arvo, kun $\Delta t \to 0$ [36, s. 13]. Täten kappaleen hetkellinen nopeus v_{hetk} voidaan yleisessä tapauksessa määritellä seuraavalla tavalla.

Määritelmä 4. ([36], s. 13) *Kappaleen hetkellinen nopeus on raja-arvo*

$$v_{hetk} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t},$$

kun matkan s ja ajan t muutokset ovat äärettömän pieniä.

Hetkellisen nopeuden Määritelmä 4 voidaan kirjoittaa derivaatan avulla muotoon

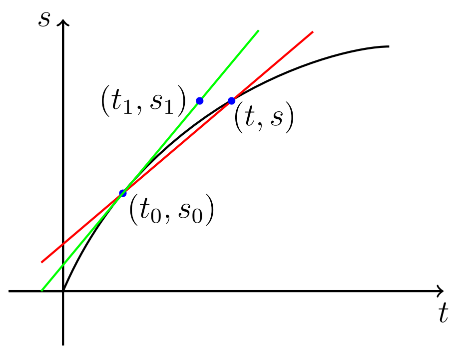
$$v_{hetk} = \frac{ds}{dt},$$

missä $\frac{ds}{dt}$ kuvaa matkan s derivaattaa muuttujan t suhteen. Liikkeen muutokset havaitaan graafisesta esitystavasta, kun kappaleen kulkema matka s piirretään ajan t funktiona. Graafisesta esitystavasta saadaan ratkaistua kappaleen hetkellinen nopeus seuraavaa lausetta käyttäen.

Lause 2. ([36], s. 15) *Kappaleen liikettä kuvaavasta (t, s)-koordinaatiston käyrästä määritetään kappaleen hetkellinen nopeus v_{hetk} ajan hetkellä $t = t_0$ piirtämällä käyrän pisteeseen (t_0, s_0) tangenttisuora. Tangenttisuoran kulmakerroin ilmaisee kappaleen hetkellisen nopeuden. Mikäli tunnetaan tangenttisuoralla oleva piste (t_1, s_1), kappaleen hetkellinen nopeus ajan hetkellä t_0 on matemaattisesti ilmaistuna*

$$v_{hetk,t_0} = \frac{s_1 - s_0}{t_1 - t_0}.$$

Todistus. Olkoon (t, s)-koordinaatistossa kuvan 4.1 mukainen käyrä, jonka pisteiden (t_0, s_0) ja (t, s) kautta kulkee suora, jota kutsutaan sekantiksi.



Kuva 4.1: Kappaleen hetkellisen nopeuden määrittäminen (t, s)-koordinaatistossa.

Sekantin kulmakerroin k_{sek} on Määritelmän 1 mukaisesti

$$k_{sek} = \frac{s - s_0}{t - t_0} = \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

Pisteen (t, s) lähestyessä pistettä (t_0, s_0) käyrää pitkin muuttuja t lähestyy muuttujaa t_0, eli $t - t_0 = \Delta t \to 0$. Tällöin sekantti lähestyy pelkästään käyrän pisteen

(t_0, s_0) kautta kulkevaa tangenttisuoraa ja sekantin kulmakerroin k_{sek} tangenttisuoran kulmakerrointa k_{tang}. Siis

$$k_{tang} = \lim_{\Delta t \to 0} k_{sek} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

Määritelmää 4 käyttäen saadaan, että

$$k_{tang} = v_{hetk,t_0}, \tag{4.5}$$

eli käyrään piirretyn tangenttisuoran kulmakerroin ajan hetkellä $t = t_0$ on kappaleen hetkellinen nopeus. Jos tangenttisuoralta tunnetaan eräs piste (t_1, s_1), kappaleen hetkellinen nopeus ajan hetkellä t_0 on yhtälön 4.5 ja Määritelmän 1 mukaisesti

$$v_{hetk,t_0} = \frac{s_1 - s_0}{t_1 - t_0}.$$

□

Täten fysikaalisesti kulmakertoimen avulla saadaan määritettyä mittaustuloksien mukaisesti piirretystä (t, s)-käyrästä kappaleen hetkellinen nopeus kaikkina eri ajan hetkinä.

4.1.2 Projektin kuvaus

Projektin tarkoituksena on havainnollistaa oppilaille, kuinka matematiikan avulla voidaan yksinkertaisten mallien avulla analysoida yleisurheilutuloksia syvällisesti. Projektin sujumiseksi oppilasjoukon pitäisi olla sama sekä matematiikan että liikunnan oppitunneilla, jotta projektiin perehdyttäminen sekä yleisurheilutuloksien mittaaminen ja käsittely sujuvat jouhevasti. Lisäksi oppilasryhmän matematiikan ja liikunnan opettajien pitää olla yhteydessä koko projektityöskentelyn ajan.

Projekti koostuu kolmesta vaiheesta. Ensimmäisessä vaiheessa kahdella matematiikan oppitunnilla jaetaan oppilaat ryhmiin, esitellään projektille keskeiset matemaattiset sisällöt ja ohjeistetaan oppilaita yleisurheilukentällä toimimiseksi. Opettaja jakaa oppilaat neljän henkilön heterogeenisiin ryhmiin, joissa oppilaiden matemaattiset ja liikunnalliset taidot ovat erilaiset. Vaihtelevat liikunnalliset taidot mahdollistavat kattavan yleisurheilutulosten otannan, ja tällöin analyysin aikana oppilaat saavat projektista enemmän irti omaan oppimiseensa liittyen. Matemaattisia sisältöjä tarkasteltaessa hetkellistä nopeutta ei tarvitse opettaa kovinkaan perusteellisesti, koska se voi olla oppilaille uusi käsite. Oppilaiden on kuitenkin ymmärrettävä, että mitä jyrkempi kohta $v(t)$-käyrällä on sitä suurempi hetkellinen nopeus on sillä hetkellä. Tärkeintä on, että oppilaat osaavat erottaa toisistaan tasaista ja muuttuvaa liikettä havainnollistavat kuvaajat. Ohjeet yleisurheilukentällä toimimiseksi kuvaillaan liitteessä A.1.

Toisessa vaiheessa oppilaat menevät liikunnan kaksoisoppitunnilla yleisurheilukentälle. Aluksi kentällä juostaan 100 metrin erät. Jokaisessa erässä juoksee yksi kunkin ryhmän oppilas, jolle kolme muuta ryhmän jäsentä mittaavat juoksuajan. Seuraavaksi oppilaat hyppäävät pituutta kahdella hyppypaikalla. Kummallakin paikalla ryhmät hyppäävät vuorotellen toisen ryhmän oppilaiden ollessa toimitsijoina. Liikuntatunnin lopuksi kaikki oppilaat juoksevat 400 metrin matkan. Ryhmien jäsenet juoksevat eri erissä, jolloin muut ryhmäläiset voivat mitata juoksun väliajat ja loppuajan. Kaikki saadut mittaustulokset kirjataan ryhmittäin joko suoraan Excel-ohjelmistoon tai paperille tulostettuihin liitteen A.1 mukaisiin taulukoihin A.1 ja A.2.

Viimeisessä projektin vaiheessa oppilaat käyttävät kolme oppituntia mittaustulosten analysoimiseen. Ensimmäisen oppitunnin aluksi neljän henkilön oppilasryhmät jaetaan kahdeksi pariksi. Tämän jälkeen parit voivat omatoimisesti vastata mittaustuloksiin liittyviin kysymyksiin, jotka on listattu projektin liitteessä A.1. 100 metrin juoksun ja pituushypyn tuloksien analysoimiseksi oppilaat tarvitsevat koko ryhmän aineiston, mutta 400 metrin juoksun käsittelyyn riittää parin molemmille oppilaille mitatut juoksuajat. Parit kirjoittavat analysoimastaan datasta kirjallisen raportin ja palauttavat sen matematiikan ja liikunnan opettajalle.

Projektin aikana kuluu $2 \cdot 45$ min matemaattisten sisältöjen opetteluun ja yleisurheilukentällä toimimisen ohjeistukseen, $2 \cdot 45$ min mittaustulosten hankkimiseen ja $3 \cdot 45$ min saatujen tulosten analysoimiseen ja loppuraportin kirjoittamiseen. Kokonaisuudessaan projektiin kuluu siis arviolta 7 oppituntia, joista viisi on matematiikan ja kaksi liikunnan oppituntia. Tarkemmat ohjeet projektin toteuttamiseksi löytyvät liitteestä A.1.

4.1.3 Pohjautuminen opetussuunnitelman perusteisiin

Projektissa rohkaistaan oppilasta soveltamaan matematiikkaa muissakin oppiaineissa ja ympäröivässä yhteiskunnassa, mihin vuoden 2014 perusopetuksen opetussuunnitelman perusteissa kehotetaan matematiikan opetuksessa. Perusteiden mukaisesti projektissa käytetään vaihtelevia työtapoja ja syvennetään matemaattisten käsitteiden ja niiden välisten yhteyksien ymmärtämistä. Projektissa myös matematisoidaan, ratkaistaan ja tulkitaan yksin sekä yhdessä ongelmia, mitkä ovat opetussuunnitelman perusteissa matematiikan opetuksen tavoitteita. [39, s. 374–376]

Projektissa oppilaat kehittyvät tunnistamaan omia vahvuuksiaan ja kiinnostuksen kohteitaan. Lisäksi oppilaat saavat projektin aikana mahdollisuuden tuoda esille omaa kokemustietoaan ja pohtia sen merkitystä omaan ajatteluun, mihin opetussuunnitelman perusteissa kannustetaan. Perusteiden innostamana projektissa myös ylitetään oppiainerajoja kokeilevan, tutkivan ja toiminnallisen työskentelyn parissa, joka samalla lisää oppilaiden ajattelun taitoja ja oppimisen motivaatiota. [39, s. 281–284]

4.1.4 Projektin edut ja ongelmakohdat

Suoran yhtälö ja suoraan verrannollisuus saattavat olla oppilaille vaikeita käsitteitä opittavaksi. Projektin avulla oppilaat saavat käytännön esimerkkejä siitä, mihin näitä aihepiirejä voidaan hyödyntää. Yleisurheilusuoritusten analysoimisen aikana oppilaat perehtyvät Excel-ohjelmiston käyttöön, jolloin oppilaat saavat opetussuunnitelman perusteiden [39, s. 23, 284] mukaista tieto- ja viestintäteknologian osaamista.

Projektiin liittyvään matematiikkaan sopii yleisestikin käyttää tasaisen liikkeen nopeuden kuvaajaa esimerkkinä. Nyt projektin aikana tasaista nopeutta käytetään hieman eri tavalla, koska sen avulla lasketaan juoksijan nopeus 100 metrin matkalla, jonka oletetaan projektissa olevan juoksijan maksiminopeus. Tällä tavalla suoraan verrannollisiksi suureiksi saadaan oppilaan maksimijuoksunopeus ja pituushypyn tulos. Siis oppilaat havaitsevat, että suoraan verrannollisuutta esiintyy useammalla eri tavalla liikkuessa.

Kolmantena etuna projektissa pystytään havainnollistamaan hetkellistä nopeutta oppilaiden oman tekemisen kautta. Jos hetkellistä muuttuvaa nopeutta opetetaan pelkästään erimuotoisia (t, s)-käyriä tutkimalla, oppiminen saattaa jäädä pintasuuntautuneeksi sääntöjen ulkoa opetteluksi. Projektin myötä oppilaat muistavat omien juoksukokemuksiensa kautta hetkellisen juoksunopeuden muutoksiin liittyviä lainalaisuuksia.

Projektissa korostuu opittavan ainesisällön lisäksi yhteistoiminnallisuus. Oppilaiden pitää toimia oman ja muiden ryhmien eteen mittaamalla mahdollisimman luotettavia tuloksia. Näitä mittaustuloksia käsitellessä yksittäisten ryhmien oppilaiden pitää toimia aktiivisesti ja oma-aloitteisesti, jotta he pystyvät vastaamaan kaikkiin aineistoon liittyviin kysymyksiin perusteellisesti.

Mittaustuloksia analysoitaessa pituushyppytuloksen ja juoksunopeuden välille pyritään osoittamaan suora verrannollisuus. Todellisuudessa pituushyppytulokseen vaikuttaa useampia eri tekijöitä, kuten ponnistusvoima ja -tekniikka sekä alastulon onnistuminen, joten saaduissa tuloksissa voi olla merkittäviä poikkeamia. Projektissa on kuitenkin huomioitu yksinkertaisen mallin puutteet, koska parit saavat osana loppuraporttia selvittää näitä pituushyppytulokseen vaikuttavia muita tekijöitä.

Ongelmakohtana projektissa on, että tarvittavien yleisurheilusuoritusten tekeminen riippuu vuodenajasta. Koska projektissa halutaan saada mahdollisimman luotettavia tuloksia, käytännössä projekti pitää suorittaa joko alkusyksystä tai loppukeväästä, jolloin yleisurheilukentät ovat avoinna. Toisaalta talvella ei ole välttämättä edes käytössä sellaisia välineitä ja tiloja, jotka mahdollistaisivat tulosten hankkimisen. Lisäksi on ymmärrettävä, että liikuntatuntien aikana vallitsevien sääolosuhteiden vaihtelut vaikuttavat mittausten reliabiliteettiin.

Projektin ongelmana voi olla myös se, että jotkin oppilaat eivät ole kiinnostuneita matematiikan ja/tai liikunnan opiskelusta. Tällöin oppilaiden työpanos saattaa vaihdella ryhmän sisällä osa-alueittain. Osa oppilasjoukosta voi myös kokea ahdistavana, että muut oppilaat analysoivat heidän yleisurheilutuloksiaan.

Käytännön ongelmia projektin toteuttamiseen ovat erilaiset ryhmäkoot, poissaolot tunneilta ja kouluittain vaihtelevat tietotekniikan välineet. Oppilasjoukon suuruudesta riippuen opettaja voi joutua jakamaan ryhmät eri suuriksi projektin alussa. Toisaalta, jos moni oppilas puuttuu liikuntatunnilta, silloin opettaja voi olla pakotettu jakamaan oppilaita uusiin ryhmiin. Projektin viimeisessä vaiheessa oppilaat tarvitsevat mittaustuloksien käsittelemiseksi tietotekniikkaa. Kouluittain voi olla suuria eroavaisuuksia esimerkiksi siitä, että onko oppilaille saatavissa kannettavia tietokoneita ja millaisia ohjelmistoja niissä on käytettävissä.

4.2 Tasogeometriaan tutustuminen QR-koodeilla selvitetyillä työpisteillä

Tässä luvussa esitellään projekti, jossa kaksiulotteisia kuviokoodeja eli QR-koodeja lukemalla oppilaat selvittävät matemaattisten työpisteiden sijainteja. Työpisteillä oppilaiden tehtävänä on ratkaista vaihtelevia tasogeometrian tehtäviä, joilla havainnollistetaan kurssin aikana myöhemmin käsiteltäviä oppisisältöjä. Projekti voidaan kohdistaa joko 7.- tai 8.-luokkalaisille, joten tässä luvussa esitellään kaksi erilaista tapaa projektin toteuttamiseksi.

4.2.1 Matemaattinen tausta

Matemaattiselta perustaltaan projekti liittyy molemmilla vuosiluokilla tasogeometriaan, ja 8.-luokkalaisilla sen lisäksi vielä koordinaattien erilaisiin merkintätapoihin. Yläkoulun tasogeometriassa opiskeltavia keskeisiä sisältöjä ovat kulmat, ympyrä, monikulmiot, piiri ja pinta-ala, koordinaatisto, yhtenevyyskuvaukset, yhdenmuotoisuus ja Pythagoraan lause.

Maantieteellisten koordinaattien avulla kohteiden sijainnit pystytään määrittämään maapallon pinnalta. Koordinaatit ilmaistaan leveys- ja pituusasteina, jotka ovat kulmien suuruuksia. Leveysaste kertoo pisteen etäisyyden päiväntasaajasta eli ekvaattorista ja pituusaste etäisyyden Englannin Greenwichin kautta kulkevasta nollapituuspiiristä. [7]

Päiväntasaajalta voidaan siirtyä pohjoiselle (N, north) tai eteläisellä (S, south) pallonpuoliskolle enintään 90 astetta. Tällöin pohjoisnavan asteluku on 90 °N ja vastakkaisella pallonpuoliskolla olevan etelänavan asteluku on 90 °S. Sen sijaan nollapituuspiiriltä siirryttäessä 180 astetta sekä itään (180 °E) että läntään (180 °W) päädytään samaan kohtaan. Siis suurin mahdollinen pituuspiiri on 180 astetta. Maapallo voidaan täten jakaa päiväntasaajan ja nollapituuspiirin avulla neljään osaan. [40]

Maapallo on muodoltaan epäsäännöllisesti litistynyt pallo. Tämä on aiheuttanut ongelmia kohteiden sijaintien tarkalle määrittämiselle ja siksi on kehitetty useampia erilaisia koordinaattijärjestelmiä. WGS 84 -koordinaattijärjestelmä on maailmanlaajuinen järjestelmä ja sitä käytetään esimerkiksi projektiin läheisesti liittyvän geokätköilyn GPS-järjestelmän oletuskoordinaattijärjestelmänä. [7] Tässä projektissa 8.-luokkalaiset käyttävät WGS 84 -koordinaattijärjestelmää koordinaattien laskemiseen ja merkitsemiseen kolmella eri tavalla, eli 1) asteina, minuutteina ja sekunteina, 2) asteina ja minuutteina ja 3) asteina. Huomattavaa on, että jokaisessa merkintätavassa pitää käyttää desimaalipistettä desimaalipilkun sijasta, koska merkitsemistavat ovat kansainvälisiä.

Lähestytään koordinaattien merkitsemistä esimerkin avulla. Tampereen teknillisen yliopiston Tietotalo sijaitsee koordinaateissa 61 °26′59.34″ N 023 °51′19.62″ E asteina, minuutteina ja sekunteina ilmaistuna. Tietotalon sijainti saadaan muutettua asteiksi ja minuuteiksi jakamalla sekunnit luvulla 60 ja lisäämällä tuloksen alkuperäisiin minuutteihin. Siis Tietotalon koordinaatit ovat asteina ja minuutteina ilmaistuna 61 °26.989′ N 023 °51.327′ E. Pelkästään asteiden ja asteiden desimaalien avulla Tietotalon koordinaatit pystytään merkitsemään, kun minuuttiosa jaetaan luvulla 60, ja saatu vastaus lisätään alkuperäisiin asteisiin. Siis Tampereen teknillisen yliopiston Tietotalon sijainti voidaan merkitä myös muodossa 61.44982 ° N 023.85545 ° E.

Koordinaattien avulla kohteiden sijainnit pystytään määrittämään esimerkiksi Google Maps -palvelun tai Maanmittauslaitoksen tarjoaman Karttapaikka-palvelun avulla. Käytettäessä WGS 84 -koordinaattijärjestelmää molemmat palvelut näyttävät kohteen sijainnin kartalla riippumatta käytetystä koordinaattien merkitsemistavasta.

4.2.2 Projektin kuvaus

Projektissa havainnollistetaan oppilaille tasogeometrian kurssin oppisisältöjä toiminnallisella tavalla, joka samalla eheyttää matematiikan ja maantiedon opetusta. Projekti pystytään toteuttamaan niin 7.- kuin 8.-luokkalaistenkin kanssa, mutta toteutustavoissa on pieniä eroja. Kuitenkin kummallakin tavalla oppilaat jaetaan projektin aluksi pieniin 3-4 oppilaan ryhmiin. Käsitellään ensin vuosiluokalle 7 kohdistettua projektia tarkemmin.

Seitsemäsluokkalaisilla projektin toiminnallinen osuus toteutetaan yhden matematiikan kaksoisoppitunnin aikana. Koulun tiloihin on sijoitettu 10 työpistettä, joilla oppilaat ratkaisevat erilaisia kurssilla opittavia tasogeometrian tehtäviä. Oppitunnin aluksi oppilaat kokoontuvat opetustilaan, jossa oppilaat jaetaan ryhmiin. Ryhmäyttämisen periaatteena on, että samasta alakoulusta tulleet oppilaat sijoitetaan eri ryhmiin, jotta nuoret oppisivat tuntemaan toisiaan paremmin. Tämän jälkeen kukin oppilasryhmä lukee älypuhelimella QR-koodin, joka ohjaa ryhmät eri työpisteille.

Ryhmien vastattua ensimmäisellä työpisteellä olleisiin kysymyksiin oppilaat saavat uuden QR-koodin luettavaksi. Tämä koodi ohjaa ryhmän seuraavalle työpisteelle. Ryhmiä tulisi olla enintään viisi kappaletta, jotta jokainen ryhmä pystyisi aina siirtymään lähtökohtaisesti vapaana olevalle työpisteelle. Siellä ryhmät vastaavat erilaiseen tasogeometrian tehtävätyyppiin, jonka jälkeen ryhmät selvittävät jälleen QR-koodin avulla seuraavan työpisteen sijainnin. Kun ryhmät ovat käyneet jokaisella rastilla, oppilaat palaavat takaisin yhteiseen opetustilaan.

Seuraavan matematiikan oppitunnin aluksi oppilaat kokoontuvat omiin ryhmiinsä. Oppilaat tarkistavat ryhmissään vastauksensa oppikirjaa käyttäen ja korjaavat mahdolliset väärät vastaukset eriväristä kynää käyttämällä. Oppitunnin lopuksi tehtävien vastaukset käydään yhdessä opettajajohtoisesti läpi.

Kahdeksasluokkalaisilla projekti toteutetaan kolmiosaisena. Ensimmäisessä vaiheessa käytetään kaksi oppituntia luonnossa olevien rastien sijaintien selvittämiseksi. Ryhmät lukevat älypuhelimilla 10 QR-koodia, jotka antavat rastien koordinaatit erilaisia merkintätapoja käyttäen. Oppilaiden tehtävänä on muuttaa koordinaatit kysyttyyn muotoon, jonka jälkeen he voivat esimerkiksi Karttapaikka- ja Google Maps -palveluja käyttämällä merkitä rastien sijainnit älypuhelimen karttaan tai tulostettuun karttapohjaan.

Toisessa vaiheessa ryhmät kiertävät matematiikan tai liikunnan kaksoisoppitunnilla luontoon sijoitetuilla rasteilla vastauskortti mukanaan. Tehtävissä kerrataan 7. vuosiluokalla opittuja tasogeometrian sisältöjä ja tutustutaan myöhemmin kurssin aikana opittaviin sisältöihin.

Viimeisessä projektin vaiheessa toimitaan samoin kuin 7.-luokkalaisten kanssa. Siis ryhmät saavat seuraavan matematiikan oppitunnin aluksi vastata uudelleen kysymyksiin oppikirjaa ja muita lähteitä hyödyntämällä. Tämän jälkeen opettaja selittää oppilaille oikeat vastaukset kysymyksiin, ja ryhmät tarkistavat omat vastauksensa.

Projektiin kuluu aikaa seitsemäsluokkalaisilla kaksi oppituntia työpisteille suunnistamiseen ja pisteillä olevien tasogeometrian tehtävien ratkaisemiseen sekä yksi oppitunti vastausten tarkistamiseen. Kahdeksasluokkalaisilla kahden matematiikan oppitunnin aikana selvitetään luonnossa olevien rastien sijainnit QR-koodeista saatavista koordinaateista. Kaksoisoppitunnilla käydään rasteilla vastaamassa tasogeometriaa käsitteleviin kysymyksiin ja projektin lopuksi käytetään yksi oppitunti vastausten tarkistamiseen. Siis projektiin kuluu 3 oppituntia seitsemäsluokkalaisilla ja 5 oppituntia kahdeksasluokkalaisille oppilailla. Tarkemmat ohjeet projektin toteuttamiseksi löytyvät liitteestä A.2.

4.2.3 Pohjautuminen opetussuunnitelman perusteisiin

Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteissa 2014 kehotetaan oppilasta aktiiviseen oppimiseen ja monimuotoiseen toimimiseen. Perusteissa mainitaan myös, että oppilasta pitää ohjata liittämään opittavat asiat ja uudet käsitteet aikaisemmin oppimaansa, jotta oppilas voisi syventää ymmärrystään opittavista asioista. [39, s. 17]. Opetussuunnitelman perusteiden mukaisesti projektin aikana käytetään tieto- ja viestintäteknologiaa ja vaihtelevia kokemuksellisia työtapoja, jotka lisäävät oppimisen elämyksellisyyttä [39, s. 23, 30].

Projektissa kehittyvät oppilaiden yhteisöllisen oppimisen taidot, joita perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet korostavat [39, s. 30]. Projektin myötä oppilaat pystyvät hyödyntämään koulun ulkopuolelta opittuja asioita perusteiden mukaisesti tasogeometriaan ja koordinaatteihin liittyen [39, s. 284]. Esimerkiksi urheiluharrastuksissa oppilas näkee monia tasogeometrian ilmiöitä ja geokätköilyssä hän oppii tuntemaan koordinaattien merkitsemistapoja.

Projektin aikana oppilaat työskentelevät toiminnallisesti. Lisäksi projektissa opitaan uusia asioita ja jopa kerrataan niitä, joten oppilaan ottaessa vastuuta perusteiden mukaisesti omasta oppimisestaan [39, s. 374] hän voi kyetä kurssin myötä tasogeometrian pitkäjänteiseen osaamiseen. Projektissa toimitaan myös opetussuunnitelman perusteiden innoittaman oppiainerajat ylittävän ja kokemuksellisen oppimisen mukaisesti [39, s. 281, 284].

4.2.4 Projektin edut ja ongelmakohdat

Heti kurssin alussa pidettävällä projektilla voidaan syventää oppilaiden ja opettajan välistä luottamussuhdetta. Perinteistä opetustapaa käyttäessä opettaja saattaa tuntua oppilaista etäiseltä henkilöltä, joka vain hoitaa opetusvelvollisuutensa. Projektin myötä opettajan on työskenneltävä oppilaiden kanssa ja annettava riittävässä määrin ohjeita, mutta toisaalta osattava antaa oppilaille riittävästi vapauksia työskentelyssä.

7.-luokkalaisten toteutustavassa samasta alakoulusta tulleet oppilaat jaetaan eri ryhmiin. Tämä on yksi projektin eduista, sillä oppilaat oppivat tuntemaan uusia luokkakavereitaan. Tällä tavalla luokan yhteishenkeä saadaan todennäköisesti kohotettua, mikä mahdollistaa oppimisympäristön muokkautumisen kaikkien osalta miellyttävämmäksi.

Projektin myötä oppilaat tutustuvat kurssin aikana esiin tuleviin erilaisiin tasogeometrian oppisisältöihin useamman kerran. Tämä helpottaa oppilaita sisäistämään vaikeita käsitteitä ja määritelmiä myöhemmissä kurssin vaiheissa, koska heillä on valmiiksi jonkinlainen käsitys opittavasta asiasta. Pitkäjänteistä opiskelua korostetaan myös perusopetuksen opetussuunnitelman perusteissa [39, s. 374].

Jos seitsemäsluokkalaisten projektin toteutustavassa ryhmät sattuvat olemaan homogeenisia, ongelmakohtana saattaa olla ryhmien vaihtelevat työskentelynopeudet tehtäviä ratkaistaessa. Jonkin ryhmän oppilaiden matemaattiset taidot voivat olla merkittävästi parempia kuin toisen ryhmän oppilaiden. Sen sijaan, jos opettaja jakaisi oppilaat sellaisiksi heterogeenisiksi ryhmiksi, että ne työskentelevät suunnilleen samaa tahtia, silloin todennäköisesti ryhmien sisälle muodostuu kuilu osaamisessa. Tässä tapauksessa ryhmien heikoimmat oppilaat eivät välttämättä saa tasogeometrian opiskeluun sellaista innostusta, mitä nämä oppilaat tarvitsisivat matematiikan opintojensa sujumiseksi.

Kahdeksasluokkalaisten kiertäessä luonnossa olevilla rasteilla opettajan on vaikea kontrolloida oppilaiden tekemistä. Ryhmät voivat esimerkiksi tahtoa vastata kysymyksiin mahdollisimman nopeasti, mistä yksittäiset tehtävästä kiinnostuneet oppilaat kärsivät. Oppilaat voivat myös käyttää älypuhelimiaan suoraan ongelmien vastauksien hankkimiseen. Tällöin oppilaat eivät pohdi projektin aikana esitettäviä tasogeometrian kurssin keskeisiä sisältöjä eivätkä hyödy tästä oppimistilaisuudesta parhaalla mahdollisella tavalla.

4.3 Yleisurheilu- ja tennisprojekti tilastoihin ja todennäköisyyksiin tutustumiseksi

Tässä projektissa tutustutaan aluksi yleisurheilun maailmanennätystuloksiin ja tenniksen sääntöihin. Liikunnan kaksoisoppitunnilla oppilaat kokeilevat tiettyjä yleisurheilulajeja ja tenniksen kaksinpelin pelaamista. Oppilaiden suoritukset näissä urheilulajeissa kirjataan, ja matematiikan oppitunneilla analysoidaan näitä tuloksia tilasto- ja todennäköisyyslaskentaa käyttäen. Projektin toteutusajankohta riippuu siis siitä, missä vaiheessa yläkoulua tilasto- ja todennäköisyyslaskennan perusteet opetetaan.

4.3.1 Matemaattinen tausta

Projekti liittyy matemaattiselta taustaltaan itseisarvoon, absoluuttiseen ja suhteelliseen virheeseen sekä tilastoihin ja todennäköisyyslaskentaan. Todennäköisyyslaskennallisia aihepiirejä ovat tilastollinen todennäköisyys ja riippumattomien tapahtumien todennäköisyys. Tilastomatematiikan osalta perehdytään histogrammiin, viivadiagrammiin ja sektoridiagrammiin.

Reaaliluvun x itseisarvo $|x|$ ilmoittaa lukusuoralla luvun x etäisyyden luvusta nolla. Koska etäisyys ei voi olla negatiivinen, itseisarvo pitää määritellä paloittain ei-negativisille ja negatiivisille luvuille. [3, s. 8]

Määritelmä 5. ([3], s. 8) *Reaaliluvun x itseisarvo, jota merkitään $|x|$, on*

$$|x| = \begin{cases} x, & \textit{kun } x \geq 0 \\ -x, & \textit{kun } x < 0. \end{cases}$$

Itseisarvon määritelmän avulla pystytään selvittämään luvun absoluuttinen virhe. Absoluuttisen virheen ja tarkan arvon suhdetta kutsutaan suhteelliseksi virheeksi. [5, s. 11]

Määritelmä 6. ([5], s. 11) *Olkoon luvun tarkka arvo T ja likiarvo L. Likiarvon L virhe on tarkan arvon arvon T ja likiarvon L erotus $T - L$. Absoluuttinen virhe, jota merkitään ΔT, on virheen itseisarvo, eli*

$$\Delta T = |T - L|\,.$$

Suhteellinen virhe on absoluuttisen virheen ja tarkan arvon itseisarvon suhde

$$\frac{|T-L|}{|T|} = \frac{\Delta T}{|T|}.$$

Projektissa tarvitaan absoluuttisen ja suhteellisen virheen Määritelmää 6 analysoidessa oppilaiden juoksutuloksia. Oppilaat pyrkivät juoksemaan ennalta määrätyn matkan tavoitteelliseen aikaan $t_{tavoite}$. Oppilaan toteutuneen juoksuajan $t_{toteutunut}$ absoluuttinen virhe Δt on

$$\Delta t = |t_{tavoite} - t_{toteutunut}| = \begin{cases} t_{tavoite} - t_{toteutunut}, & \text{kun } t_{tavoite} \geq t_{toteutunut} \\ t_{toteutunut} - t_{tavoite}, & \text{kun } t_{tavoite} < t_{toteutunut}. \end{cases}$$

Oppilaan juoksuajan suhteellinen virhe on prosentuaalisessa muodossa

$$\begin{aligned} \frac{\Delta t}{|t_{tavoite}|} \cdot 100\% &= \frac{|t_{tavoite} - t_{toteutunut}|}{t_{tavoite}} \cdot 100\% \\ &= \begin{cases} \frac{t_{tavoite} - t_{toteutunut}}{t_{tavoite}} \cdot 100\%, & \text{kun } t_{tavoite} \geq t_{toteutunut} \\ \frac{t_{toteutunut} - t_{tavoite}}{t_{tavoite}} \cdot 100\%, & \text{kun } t_{tavoite} < t_{toteutunut}. \end{cases} \end{aligned}$$

Lisäksi oppilaiden toteutuneista juoksuajoista voidaan laskea Määritelmän 2 tasaisen liikkeen mukaisesti juoksumatkan tavoitteellinen nopeus $v_{tavoite}$ ja toteutunut nopeus $v_{toteutunut}$. Juoksunopeuden absoluuttinen virhe on

$$\Delta v = |v_{tavoite} - v_{toteutunut}| = \begin{cases} v_{tavoite} - v_{toteutunut}, & \text{kun } v_{tavoite} \geq v_{toteutunut} \\ v_{toteutunut} - v_{tavoite}, & \text{kun } v_{tavoite} < v_{toteutunut}. \end{cases}$$

Suhteelliseksi virheeksi saadaan Määritelmiä 2,5 ja 6 käyttäen

$$\begin{aligned} \frac{\Delta v}{|v_{tavoite}|} \cdot 100\% &= \frac{|v_{tavoite} - v_{toteutunut}|}{v_{tavoite}} \cdot 100\% \\ &= \begin{cases} \frac{v_{tavoite} - v_{toteutunut}}{v_{tavoite}} \cdot 100\%, & \text{kun } v_{tavoite} \geq v_{toteutunut} \\ \frac{v_{toteutunut} - v_{tavoite}}{v_{tavoite}} \cdot 100\%, & \text{kun } v_{tavoite} < v_{toteutunut} \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{t_{toteutunut} - t_{tavoite}}{t_{toteutunut}} \cdot 100\%, & \text{kun } t_{toteutunut} \geq t_{tavoite} \\ \frac{t_{tavoite} - t_{toteutunut}}{t_{toteutunut}} \cdot 100\%, & \text{kun } t_{toteutunut} < t_{tavoite}. \end{cases} \end{aligned}$$

Todennäköisyyslaskennan tilastollisessa lähestymistavassa oletetaan, että satunnaisilmiö voi tapahtua mielivaltaisen monta kertaa samanlaisissa olosuhteissa tuottaen erilaisia lopputuloksia. Olkoon A eräs tapahtuma, joka joko tapahtuu tai ei tapahdu. Jos satunnaisilmiötä toistetaan n kertaa ja tapahtuma A sattuu näiden aikana $n(A)$ kertaa, tapahtuman A suhteellinen frekvenssi on

$$P_n(A) = \frac{n(A)}{n}. \tag{4.6}$$

Suhteellisen frekvenssin raja-arvoa

$$p(A) = \lim_{n \to \infty} P_n(A) = \lim_{n \to \infty} \frac{n(A)}{n}$$

kutsutaan tapahtuman A tilastolliseksi todennäköisyydeksi. Siis, jos satunnaisilmiötä toistetaan äärettömän monta kertaa, tapahtuman A osuus kaikista äärettömistä toistoista on tapahtuman A tilastollinen todennäköisyys. [38, s. 109–110]

Tarkastellaan seuraavaksi tilannetta, jossa yhtä satunnaisprosessia toistetaan useita kertoja ja lasketaan, millä todennäköisyydellä kaikista toistoista saadaan haluttu lopputulos. Yksinkertaisin tapa on olettaa, että tapahtumat ovat toisistaan riippumattomia, jolloin yksittäisen tapahtuman lopputulos ei vaikuta seuraavien tapahtumien lopputuloksiin. [38, s. 114–115]

Määritelmä 7. ([38], s. 115) *Olkoon A_1, A_2, ..., A_n riippumattomia tapahtumia, joiden todennäköisyydet ovat $P(A_1)$, $P(A_2)$, ..., $P(A_n)$. Tällöin todennäköisyys, että n satunnaisilmiössä tapahtuu kaikki kuvatut tapahtumat, on riippumattomien tapah-*

tumien kertolaskusäännön mukaisesti

$$P(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot ... \cdot P(A_n).$$

Tilastollisesta aineistosta käytetään jatkuvan muuttujan tapauksessa histogrammia jakauman kuvaamiseen [38, s. 50]. Histogrammia piirrettäessä jatkuvan muuttujan havaintoarvot $x_i, i = 1, 2, \ldots, n$, pitää ensin luokitella frekvenssijakaumaan. Luokittelussa muuttujan x arvojoukko jaetaan sopivaan määrään tasavälisiä luokkia. [38, s. 39], [75, s. 8]. Tällöin luokan leveys, eli luokan ylä- ja alarajan erotus, on aina sama. Lisäksi luokkavälin keskipiste, joka on luokan ylä- ja alarajan keskiarvo, pystytään laskemaan. [38, s. 39–40]

Luokittelun jälkeen lasketaan jokaisen luokan frekvenssi, joka kuvaa havaintojen x_i lukumäärää kyseenomaisessa luokassa. Histogrammiin piirrettävän yksittäisen luokan pylvään korkeus määräytyy luokan frekvenssin mukaan. Pylväät piirretään histogrammissa yhteen muista pylväskuvaajista poiketen ja samalla korostaen tutkittavan muuttujan jatkuvuutta. Histogrammista nähdään suoraan mitatun muuttujan jakauman muoto, koska pylväät piirretään suuruusjärjestyksessä pienimmästä luokasta suurimpaan luokkaan. [38, s. 50]

Viivadiagrammia käytetään ajan mukana muuttuvien suureiden, aikasarjojen, graafiseen esittämiseen. Viivadiagrammin tarkoituksena on antaa yleiskuva tutkittavan suureen muutossuunnasta ja -nopeudesta eri aikoina: mitä jyrkemmässä kulmassa viiva on, sitä nopeampaa muutos on tuolloin. Siksi viivadiagrammia piirrettäessä on kiinnitettävä huomiota y-akselin valintaan, jotta muutosnopeus kuvautuu todenmukaisella tavalla. [38, s. 51]

Sektoridiagrammia käytetään muuttujan kuvaamiseen silloin, kun havainnollistetaan kokonaisuuden jakautumista osiin. Kuvaajassa sektorin pinta-ala on suoraan verrannollinen sektoria vastaavan luokan frekvenssiin tai suhteelliseen frekvenssiin. Koko ympyrän pinta-ala vastaa kaikkien luokkien yhteenlaskettua kokoa. [38, s. 53]

4.3.2 Projektin kuvaus

Projektissa tutustutaan tennikseen ja joihinkin yleisurheilulajeihin. Oppilaat perehtyvät tenniksen sääntöihin, kuten pelin poikkeukselliseen pistelaskusysteemiin, ja lajin peruskäsitteistöön. Tietyistä yleisurheilulajeista etsitään maailmanennätystulokset ja pohditaan tuloksien kehityshistoriaa. Oppilaat kokeilevat myös käytännössä tenniksen pelaamista ja tutkimiaan yleisurheilulajeja. Projektissa ohjataan oppilaita arvioimaan realistisesti muuttujien arvoja ja hyödyntämään arvioimistaitojaan koulun ulkopuolella. Pyrkimyksenä on myös laajentaa oppilaiden ymmärrystä prosentteihin sekä tilasto- ja todennäköisyyslaskentaan liittyen.

Projektin aluksi oppilaat jaetaan matematiikan oppitunnilla kahden henkilön pareihin. Pareissa oppilaiden urheilulliset taidot saisivat olla samaa luokkaa, mutta oppilaiden matemaattiset taidot voivat olla hyvinkin erilaiset. Lopun oppitunnin ajan parit tutustuvat miesten ja naisten yleisurheilulajien maailmanennätyksiin sekä tenniksen sääntöihin ja peruskäsitteistöön. Tarkoituksena on, että oppilaat havaitsevat näiden urheilulajien luonteen ja lajeissa mitattavien muuttujien suuruusluokat.

Liikunnan kaksoisoppitunnilla parit urheilevat eri lajien, joita ovat juoksu, keihäänheitto, kuulantyöntö, kolmiloikka ja tennis, suorituspisteillä. Jokaisella pisteellä on aina samanaikaisesti kaksi paria liikkumassa. Parien toimintaa eri suorituspisteillä kuvaillaan tarkemmin liitteessä A.3. Oppilaat merkitsevät suorituksensa lajeittain parikohtaiseen tuloskorttiin (liite A.3, taulukko A.3). Suorituspistettä vaihdetaan 20 minuutin välein.

Projektin viimeisessä vaiheessa parit analysoivat omia tuloksiansa kahdella matematiikan oppitunnilla esimerkiksi Excel-ohjelmistoa hyödyntäen. Parin molempien oppilaiden juoksuajoista lasketaan absoluuttinen ja suhteellinen virhe asetettuun tavoiteaikaan. Lisäksi oppilaat laskevat keskimääräisen juoksunopeutensa sekä selvittävät sen absoluuttisen ja suhteellisen virheen tavoitteelliseen juoksunopeuteen verrattuna.

Keihäänheittotuloksista parit muodostavat taulukon, jossa heittojen pituudet on jaettu kuuteen tasaväliseen luokkaan. Luokitellusta aineistosta parit pystyvät piirtämään heittojaan kuvaavan histogrammin, jonka tietoja hyödyntämällä oppilaat esittävät todennäköisimmän heiton pituusvälin ja laskevat tätä tapahtumaa vastaavan suhteellisen frekvenssin. Kuulantyönnön tuloksia parit käsittelevät muuten samalla tavalla, mutta silloin parit jakavat työntöjen pituudet kuuden sijasta neljään eri luokkaan.

Kolmiloikkatuloksista parit piirtävät viivadiagrammin, jossa näkyy molempien oppilaiden tulokset toisistaan eroavina viivoina. Viivadiagrammin vaaka-akseli kuvaa sitä, kuinka mones yritys on kyseessä, ja pystyakseli kolmiloikkatuloksen pituutta. Parit selittävät, mistä tekijöistä viivadiagrammin kummankin viivan muotoutuminen johtuu.

Analyysivaiheen lopuksi parit tutkivat pelaamiensa tennispisteiden sujumista toisen parin täyttämän aineiston (liite A.3, taulukko A.4) perusteella. Aineistosta lasketaan suhteelliset frekvenssit ja piirretään sektoridiagrammi pisteiden päättymistapojen havainnollistamiseksi. Kun parit ovat saaneet käsiteltyä kaikkien urheilusuoritusten aineistonsa, tuotokset palautetaan opettajalle.

Kokonaisuudessaan projekti on kolmivaiheinen. Ensimmäisessä vaiheessa oppilaat tutustuvat yhden oppitunnin aikana yleisurheiluun ja tennikseen. Liikuntasuoritusten tekemiseen kuluu projektissa $2 \cdot 45$ min. Projektin viimeiseen vaiheeseen, tulosten analysointiin, varataan myös $2 \cdot 45$ min, joten kaikkiaan projektiin kuluu 5 oppituntia. Tarkemmin projektia kuvaillaan liitteessä A.3.

4.3.3 Pohjautuminen opetussuunnitelman perusteisiin

Projektissa tutustutaan perusopetuksen opetussuunnitelman perusteissa 2014 kirjattuihin tilastoihin ja todennäköisyyteen liittyviin keskeisiin sisältöihin, joita ovat frekvenssin ja suhteellisen frekvenssin määrittäminen, erilaisten diagrammien tulkitseminen ja tuottaminen sekä todennäköisyyksien laskeminen. Oppilaat hyödyntävät projektin aikana opetussuunnitelmassa korostettavia tieto- ja viestintäteknologian taitoja. [39, s. 376]

Oppilaat tutustuvat projektissa harvemmin peruskoulun liikunnan oppitunneilla kokeiltavaan tenniksen pelaamiseen. Täten oppilaat saavat projektin myötä perusteiden mukaisesti tietoja ja taitoja erilaisissa liikuntatilanteissa toimimiseen [39, s. 433]. Projektissa hyödynnetään paikallisia olosuhteita tarjoamalla positiivisia ja monimuotoisia urheilukokemuksia yleisurheilun ja tenniksen parissa opetussuunnitelman perusteiden innostamana [39, s. 376].

Projektiin kuuluvien liikunnan oppituntien aikana oppilaan liikunnallisten taitojen lisäksi hänen sivistykselliset taidot kehittyvät toisten oppilaiden suorituksia mahdollisimman luotettavasti mitaten. Sivistyksellisiin taitoihin kuuluvat opetussuunnitelman perusteissakin mainitut vastuullisuuden ottaminen ja toimiminen yhteistyössä muiden oppilaiden kanssa [39, s. 19]. Kokonaisuudessaan projektin aikana oppilaita kannustetaan tutkivaan työskentelyyn ja yhdessä tekemiseen, jotta perusteissa korostetut oppilaiden ajattelun ja oppimaan oppimisen taidot kehittyisivät [39, s. 20].

4.3.4 Projektin edut ja ongelmakohdat

Projektissa luokan oppilaat toimivat pareittain. Tämä on yksi projektin etuja, koska oppilaat saavat ottaa paljon vastuuta omasta tekemisestään. Lisäksi urheilusuorituksia analysoidessa parin molempien oppilaiden on työskenneltävä ahkerasti, jotta pari saa valmiiksi kaikki projektiin kuuluvat tilastoihin ja todennäköisyyksiin liittyvät tehtävät.

Projektissa on positiivista, että se voidaan toteuttaa joko 8.- tai 9.-luokkalaisten kanssa. Tällöin projektioppiminen voi olla oppilaille joko uusia sisältöjä havainnollistavaa tai aiemmin opittuja sisältöjä syventävää työskentelyä riippuen siitä, milloin luokka opiskelee yläkoulun aikana tilastojen ja todennäköisyyksien kurssin.

Oppilaat kokeilevat projektin myötä erilaisia urheilulajeja ja saavat vaihtelevia liikunnallisia kokemuksia. Jotkut oppilaat voivat jopa kiinnostua esimerkiksi tenniksen harrastamisesta. Urheilusuorituksia analysoidessaan oppilaiden tieto- ja viestintäteknologian taidot kehittyvät, mihin opetussuunnitelman perusteiden mukaisesti perusopetuksessa pitäisi pyrkiä [39, s. 23].

Projektin toteuttamisen kannalta ongelmaksi voi muodostua urheiluvälineiden ja -paikkojen saatavuus. Jotta opettaja pystyisi valvomaan kaikkia oppilaita, yleisurheilukentän ja tenniskenttien pitäisi sijata toistensa välittömässä läheisyydessä. Kaikilla oppilailla ei ole omia tennismailoja, joten koululla pitäisi olla ainakin kaksi omaa tennismailaa, joita oppilaat voivat vuorotellen käyttää.

Yleisurheilu ja tennis ovat lajeja, joita voi harrastaa niin ulko- kuin sisätiloissa. Lajien kokeileminen on kuitenkin merkittävästi helpompaa ja halvempaa ulkokentillä. Täten projekti olisi järkevää toteuttaa joko syksyllä elo-syyskuussa tai keväällä toukokuussa. Jos projekti toteutetaan talviaikaan, silloin oppilaiden kokeilemia yleisurheilulajeja pitäisi vaihtaa ja tenniksen sijaan olisi mielekästä pelata sulkapalloa. Tällaisilla muutoksilla varmistetaan oppilaiden tehokas liikkuminen ja kerättävän mittausaineiston riittävä suuruus.

4.4 Koripalloprojekti

Tässä luvussa esitellään yhdeksäsluokkalaisille oppilaille kohdistettu koripalloprojekti. Projekti aloitetaan koripalloaiheisella liikunnan kaksoisoppitunnilla, jonka aikana oppilaiden erilaisia koripallosuorituksia kerätään myöhempää matemaattista analyysiä varten. Matematiikan oppitunneilla keskitytään todennäköisyyslaskennan ja kääntäen verrannollisuuden soveltamiseen hankittua aineistoa käsiteltäessä. Koripalloprojektin toteuttamiseksi oppilaille ei tarvitse opettaa erityistaitoja, koska käsiteltävät liikunnalliset ja matemaattiset osa-alueet ovat kaikille tuttuja. Siksi projektin myötä liikunnan ja matematiikan opetusta pystytään eheyttämään luonnollisella tavalla.

4.4.1 Matemaaattinen tausta

Projektin matemaattiset aihepiirit ovat kääntäen verrannollisuus, suhteellinen frekvenssi ja tilastollinen todennäköisyys sekä ehdollinen todennäköisyys. Koska luvussa 4.3.1 käsiteltiin tapahtuman suhteellista frekvenssiä ja sen raja-arvona määriteltävää tilastollista todennäköisyyttä, niitä ei tarkistella uudelleen koripalloprojektin matemaattisessa osuudessa.

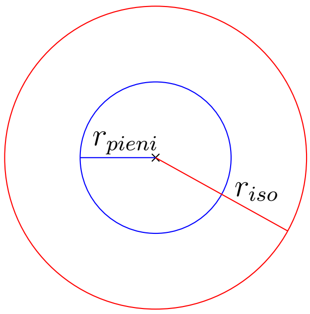
Tarkastellaan ensin koripalloa syötettäessä erilaisten tapahtumien ehdollisia todennäköisyyksiä. Koripallo yritetään heittää seinään merkittyyn maalialueeseen, joka on ympyrän tai mahdollisesti neliön muotoinen. Olkoon tapahtuma $A =$ syöttö osuu maalialueen sisällä olevaan pienempään maaliin ja $B =$ syöttö osuu mihin tahansa maalialueen osaan. Siis tapahtuma A tapahtuu aina, kun tiedetään tai on annettu, että B tapahtuu, ja tällöin voidaan merkitä $A|B$ tarkoittamaan tapahtumaa A ehdolla B [75, s. 36].

Tutkittaessa onnistuneita syöttöjä B on otosavaruus, jossa tarkastellaan tapahtuman A realisoitumista. Jos A tapahtuu, on tämä tapahtuma joukko $A \cap B$. Siis tapahtuman A todennäköisyys ehdolla B on tapahtuman $A \cap B \subset B$ todennäköisyys otosavaruudessa B, ja sitä merkitään $P(A|B)$ [75, s. 37]. Tätä käyttäen voidaan määritellä ehdollinen todennäköisyys.

Määritelmä 8. ([75], s. 37) *Olkoon A ja B tapahtumia ja $P(B) > 0$. Tapahtuman A ehdollinen todennäköisyys ehdolla B on luku*

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Jos maalialueet ovat ympyrän muotoisia, Määritelmän 8 avulla voidaan laskea teoreettinen ehdollinen todennäköisyys osua pienempään alueeseen, jos syöttö osuu varmasti maalialueeseen. Olkoon koko maalialue kuvan 4.2 mukainen r_{iso}-säteinen ympyrä, jonka sisälle on piirretty r_{pieni}-säteinen pienempi ympyrä.



Kuva 4.2: Koripallon syöttöharjoitukseen tarkoitettu maalialue.

Kuvasta 4.2 nähdään, että pienempi maalialue on sama kuin pienemmän ja isomman maalialueen leikkaus. Tällöin Määritelmästä 8 havaitaan teoreettisen todennäköisyyden osua pienempään maalialueeseen, kun heitto osuu mihin tahasa maalialueen kohtaan, olevan sama kuin pienemmän ja isomman ympyrän pinta-alojen suhde. Määritellään ympyrän pinta-ala ehdollisen todennäköisyyden laskemiseksi.

Määritelmä 9. ([3], s. 46) *Ympyrän, jonka säde on r, pinta-ala A on*

$$A = \pi r^2.$$

Määritelmää 9 hyödyntäen voidaan selvittää käsitellyn esimerkkitapauksen teoreettinen ehdollinen todennäköisyys, joka on

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)}{P(B)} = \frac{\pi r_{pieni}^2}{\pi r_{iso}^2} = \left(\frac{r_{pieni}}{r_{iso}}\right)^2.$$

Oppilaat laskevat projektin aikana myös tilastollisen ehdollisen todennäköisyyden osua pienempään maaliin sillä ehdolla, että heitto osuu isoon maalialueeseen. Tätä varten tapahtumien A ja B todennäköisyydet selvitetään suhteellisen frekvenssin yhtälöllä 4.6. Tämän jälkeen oppilaat voivat laskea kysytyn tilastollisen ehdollisen todennäköisyyden Määritelmää 8 käyttäen.

Projektissa on tavoitteena myös perehtyä kääntäen verrannollisiin suureisiin. Liikunnan kaksoisoppitunnilla oppilaat heittävät vapaaheittoja eri etäisyyksiltä d korista. Onnistuneiden vapaaheittojen suhteellinen frekvenssi kaikista heitoista, p, on toinen tutkittava suure. Määritellään yleisessä tapauksessa suureiden välinen kääntäen verrannollisuus.

Määritelmä 10. ([75], s. 99) *Suureita $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}, a_n$ sanotaan kääntäen verrannollisiksi suureisiin $b_1, b_2, b_3 \ldots, b_{n-1}, b_n$, jos*

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_2}{b_1}, \frac{a_2}{a_3} = \frac{b_3}{b_2}, \ \ldots, \frac{a_{n-1}}{a_n} = \frac{b_n}{b_{n-1}}.$$

Kerrotaan kaikkia Määritelmässä 10 olevia kääntäen verrannollisten suureiden yhtälöjä nimittäjinä olevien termien tulolla, jolloin

$$a_1b_1 = a_2b_2, a_2b_2 = a_3b_3, \ \ldots, a_{n-1}b_{n-1} = a_nb_n.$$

Tästä saadaan, että

$$a_1b_1 = a_2b_2 = \cdots = a_{n-1}b_{n-1} = a_nb_n.$$

Siis kääntäen verrannollisten suureiden a_i ja b_i välinen tulo pysyy vakiona, eli

$$a_ib_i = k, \tag{4.7}$$

kaikilla $i = 1, 2, \ \ldots, n-1, n$.

Vapaaheittotuloksia analysoitaessa tutkittavat suureet ovat vapaaheittojen onnistumisprosentti p ja heittoetäisyys d. Sijoittamalla yhtälöön 4.7 suureet $p_i \to a_i$ ja $d_i \to b_i$ ja jakamalla yhtälön puolittain termillä d_i saadaan

$$p_i = k \cdot \frac{1}{d_i}.$$

Näin ollen suureiden p ja d välistä kääntäen verrannollisuutta voidaan tutkia esittämällä oppilaiden vapaaheittotulokset $(\frac{1}{d}, p)$-koordinaatistossa. Projektissa oppilaat määrittävät Excel-ohjelmistoa käyttäen mittapisteiden ja lineaarisen sovitesuoran välisen korrelaatiokertoimen voimakkuuden. Tästä pystytään päättelemään suureiden $\frac{1}{d}$ ja p suoraan verrannollisuus, jota kuvailtiin aiemmin luvussa 4.1.1.

4.4.2 Projektin kuvaus

Projektin myötä yhdeksäsluokkalaiset oppilaat kokeilevat koripalloilua ja syventävät todennäköisyyslaskennan osaamistaan. Projekti toteutetaan kahdessa osassa, kun liikunnan oppitunneilla pelataan koripalloa ja matematiikan oppitunneilla käsitellään hankittua aineistoa. Koska koripalloa harrastetaan sisätiloissa, projekti pystytään toteuttamaan kaikkina vuodenaikoina. Toteutuksen kannalta oppilasryhmän pitäisi olla kuitenkin sama niin liikunnallisen kuin matemaattisen osuuden aikana.

Projekti aloitetaan luokan yhteisellä liikunnan kaksoisoppitunnilla, jonka aiheena on koripallo. Oppitunnin aluksi liikunnan opettaja jakaa oppilaat neljän henkilön ryhmiin. Jaon perusteena on, että ryhmät pärjäisivät mahdollisimman tasaisesti toisiaan vastaan tunnin lopuksi pelattavissa koripallo-otteluissa. Oppilaiden ensimmäisenä tehtävänä tunnilla on harjoitella koripallon vapaaheittoa ja syöttämistä. Vapaaheittopisteellä oppilaat yrittävät heittää eri etäisyyksiltä korista onnistuneita vapaaheittoja. Kaikki oppilaiden onnistuneet ja epäonnistuneet heitot tilastoidaan liitteen A.4 taulukon A.5 pohjalle. Syöttöharjoituksessa oppilaat syöttävät pallon viiden metrin etäisyydeltä kohti seinään merkittyä aluetta, joka voi olla ympyrän tai neliön muotoinen. Maalialueen sisälle on erotettu pienempi maalialue. Jokaisen syötön tapauksessa kirjataan (liite A.4, taulukko A.6), että osuuko pallo lainkaan maaliin vai osuuko pallo isompaan tai pienempään maalialueeseen.

Liikuntatunnin lopuksi oppilasryhmät pelaavat toisiaan vastaan koripallo-otteluja. Otteluiden aikana sivussa olevien ryhmien oppilaat tarkastelevat pelitilanneheittojen onnistumisprosenttia merkitsemällä koriin menneet ja epäonnistuneet heitot liitteestä A.4 löytyvään taulukkoon A.7.

Liikuntatuntia seuraavalla matematiikan oppitunnilla oppilaat ryhtyvät käsittelemään ryhmäänsä koskevia mittaustuloksia Excel-ohjelmistoa hyödyntäen. Vapaaheittojen tapauksessa oppilaat laskevat suhteellisen frekvenssin p vapaaheiton onnistumiselle kultakin etäisyydeltä d. Näistä tuloksista saadaan $(\frac{1}{d}, p)$-koordinaatistoon viisi mittapistettä, joihin sovitetaan lineaarinen sovitesuora. Ryhmät päättelevät sovitesuoran ja mittapisteiden välisen korrelaation voimakkuudesta, että ovatko vapaaheiton onnistuminen ja heittoetäisyys kääntäen verrannollisia suureita.

Syöttöjä analysoidessa selvitetään suhteelliset frekvenssit niin isompaan ja pienempään maalialueeseen kuin maalin ohi heittämiseen. Tämän jälkeen oppilaat laskevat teoreettisesssa ja tilastollisessa tapauksessa ehdollisen todennäköisyyden osua pienempään maalialueeseen, jos heitto osuu varmasti isompaan maalialueeseen, ja toisinpäin. Molemmista tapauksista lasketaan teoreettisen ja tilastollisen ehdollisen todennäköisyyden suhteellinen virhe. Aiemmin luvussa 4.3.1 on määritelty suhteellisen virheen kaava.

Pelitilanneheittojen osalta ryhmissä lasketaan oman joukkueen heittoyritysten onnistumisen tilastollinen todennäköisyys ottelukohtaisesti. Ryhmät tutkivat heittojen onnistumisprosenttejen muutosta eri otteluiden kesken ja vertaavat onnistumisprosentteja aiemmin laskettuihin vapaaheittojen suhteellisiin frekvensseihin.

Toisella matematiikan oppitunnilla ryhmät kirjoittavat raportin käsittelemästään aineistoa. Raportti koostuu Excel-ohjelmistolla lasketuista taulukoista ja piirretyistä kuvista sekä omista mielipiteistä. Raportissa perustellaan, voidaanko vapaaheiton onnistumisen tilastollisista todennäköisyyttä ja heittoetäisyyttä pitää kääntäen verrannollisina suureina, ja onko koripalloon liittyen havaittavissa muutoin kääntäen verrannollisuutta. Oppilaat selvittävät, että eroavatko lasketut syöttöjen teoreettiset ja tilastolliset todennäköisyydet kummassakaan tapauksessa. Lisäksi ryhmäläiset perustelevat, onko tilastollisesti todennäköisempää heittää vapaaheitto kuin pelitilanneheitto koriin.

Koripalloprojekti toteutetaan siis kahdessa osassa. Liikunnan kaksoisoppitunnilla oppilaat kokeilevat koripalloon liittyviä perusharjoitteita ja pelaavat toisia ryhmiä vastaan koripallo-otteluita. Projektin toinen vaihe koostuu kahdesta matematiikan oppitunnista. Ensimmäisellä oppitunnilla oppilaat lähinnä analysoivat ryhmittäin omia koripallosuorituksiaan. Jälkimmäisellä matematiikan oppitunnilla ryhmät kirjoittavat palautettavan raportin. Siis koripalloprojektiin kuluu kokonaisuudessaan 4 oppituntia. Projektin yksityiskohtiin paneudutaan liitteessä A.4.

4.4.3 Pohjautuminen opetussuunnitelman perusteisiin

Koripalloprojekti on monialainen, pitempikestoinen oppimiskokonaisuus, minkä toteutuksessa eheytetään liikunnan ja matematiikan opetusta. Opetussuunnitelman perusteiden ohjaamana projekti kestää useamman oppitunnin, jotta oppilaat alkavat syventyä oppimiskokonaisuuden sisältöihin ja työskennellä pitkäjänteisesti. [39, s. 31–32]

Projektin liikunnallisessa osuudessa oppilaat ottavat vastuuta omasta ja ryhmän toiminnasta, mihin opetussuunnitelman perusteissa kannustetaan [39, s. 434]. Perusteiden innostamana projektissa on monipuolisia koripalloharjoitteita, jotka mahdollistavat osallisuuden, pätevyyden, itsenäisyyden sekä kehollisen ilmaisun ja esteettisyyden kokemuksia. Lisäksi liikuntatehtävien avulla oppilaat arvioivat, ylläpitävät ja kehittävät omaa fyysistä toimintakykyään. [39, s. 435]

Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet ohjaavat oppilaita arvioimaan ja kehittämään omaa sosiaalista toimintakykyään. Tällainen sosiaalinen toiminta kuuluu koripalloprojektiin, jonka toiminnallinen osuus perustuu oppilaiden väliseen yhteistyöhön. Projektin myötä oppilaat liikkuessaan ottavat vastuuta järjestelyistä ja yhteisestä tekemisestä opetussuunnitelman perusteiden mukaisesti. [39, s. 435].

Matematiikkaan liittyen projektissa perehdytään ehdolliseen todennäköisyyteen, joka ei kuulu opetussuunnitelman perusteissa matematiikan opetuksen keskeisiin sisältöalueisiin vuosiluokilla 7–9, ja syvennetään todennäköisyyslaskennan käsitteiden ja niiden välisten yhteyksien ymmärtämistä. Oppilaiden näkökulmasta näiden haastavien matemaattisten sisältöjen ymmärrystä helpottavat projektin konkretia ja toiminnallisuus perusteiden mukaisesti. Lisäksi hankitun aineiston käsittelyssä oppilaita ohjataan kehittämään tiedonhallinta- ja analysointitaitoja ja tarkastelemaan tietoja kriittisesti opetussuunnitelman perusteiden kannustamana. [39, s. 374]

4.4.4 Projektin edut ja ongelmakohdat

Koripalloprojektissa liikunnallinen osuus koostuu tavallisesta koripalloon liittyvästä kaksoisoppitunnista. Tällöin matematiikan opettajan on helppo lähteä toteuttamaan projektia, koska hänen ei tarvitse neuvoa oppilaita koripallo-osuuden suhteen, mihin kuluisi muuten aikaa toisilta matematiikan oppitunneilta. Liikunnan opettajallekin projekti on mukava toteuttaa, sillä koripallon pelaamiseen tarvittava välineistö löytyy valmiiksi koululta. Lisäksi koripallon ollessa sisäliikuntalaji projekti voidaan toteuttaa minä tahansa lukuvuoden aikana, joten projektin toteuttamiseen ei ole mitään lähtökohtaista rajoittavaa tekijää.

Projektin etuna on myös se, että siinä käsitellään monipuolisesti matemaattisia aihepiirejä. Oppilaiden todennäköisyyslaskennan taidot kehittyvät ja syventyvät, kun he tutustuvat ehdollisen todennäköisyyden käsitteeseen. Teoreettista ehdollista todennäköisyyttä laskettaessa oppilaat tarvitsevat tasogeometrian perusosaamista, mikä kannustaa opetettujen sisältöjen pitkäjänteisiin osaamiseen. Projektin haastavuutta voidaan kasvattaa tasogeometriata hyödyntäen esimerkiksi, jos syöttöharjoituksessa maalialueeksi valitaan neliö, jonka sisälle on merkitty pienemmäksi alueeksi ympyrä, joka sivuaa neliön reunoja. Lisäksi kuvioita ja taulukoita Excel-ohjelmistolla tehdessä oppilaiden tieto- ja viestintäteknologiset taidot kehittyvät, mihin myös uusissa peruskoulun opetussuunnitelman perusteissa [39, s. 23] tähdätään.

Projektin toteuttamisessa on myös haasteita tuovia osasia. Yläkoulussa ei ole varmaa, että matematiikan ja liikunnan ryhmät olisivat samoja. Tässä tapauksessa luokan kaikkien oppilaiden saaminen tiettyyn paikkaan tiettynä aikana voi vaatia suuria ponnisteluja projektista vastaavilta opettajilta. Toiseksi liikunnan oppitunnilla ryhmien suoritusten kirjaaminen on täysin oppilaiden vastuulla. Koska opettajan velvollisuutena on huolehtia oppitunnin yleisestä sujumisesta, hän ei välttämättä ehdi paneutua pienten kirjaamisongelmien pariin, minkä seurauksena tunnilla voi muodostua ylimääräistä epäjärjestystä.

Mittaustulosten käsittely voi olla haastavaa, koska analysointi perustuu oppilaiden liikuntatunnilla tekemiin heitto- ja syöttösuorituksiin, jotka voivat poiketa merkittävästi oletetuista tuloksista. Siis joillakin ryhmillä voi muodostua päinvastaisia tapauksia, kuin mihin opettaja on valmistautunut. Tähän on liitteessä A.4 olevassa projektin tarkemmassa kuvauksessa pyritty vastaamaan ohjeistamalla oppilaita mittaustulosten kriittiseen tarkasteluun ja yleiseen pohdintaan saatujen tulosten voimassaolosta.

5. YRITYSYHTEISTYÖPROJEKTEJA ERI JÄRJESTÖJEN KANSSA YLÄKOULUN MATEMATIIKAN OPETUKSESSA

Tässä luvussa tutustutaan erilaisten järjestöjen kanssa toteutettaviin vuosiluokkien 7–9 matematiikan opetuksen projekteihin. Tarkoituksena on havainnollistaa matematiikan tarvetta urheilusuoritusten arvioimisessa ja kehittämisessä. Projektien myötä oppilaat tutustuvat joihinkin urheilulajeihin ja niissä vaikuttaviin suomalaisiin järjestöihin.

5.1 Taitojalkapalloprojekti

Projektin tarkoituksena on kerrata yläkoulun ensimmäisellä matematiikan kurssilla opiskeltuja sisältöjä hyödyntäen oppilaiden taitojalkapallosuorituksia. Taitokilpailut ovat osa Suomen Palloliiton Kaikki Pelaa -nuorisotoimintaa, jonka mukaan lapsella tai nuorella on oikeus liikkua ja nauttia liikkumisestaan urheiluseurassa [53]. Projektin myötä oppilaat käsittelevät kokonais- ja desimaalilukuja käytännöllisesti ja määrittävät mittausaineistoa kuvaavia erilaisia tilastollisia tunnuslukuja. Opettajan on mahdollista havaita oppilaiden työskentelystä, miten oppilaat ovat sisäistäneet kurssisisällöt. Kokonaisuudessaan projektissa pystytään eheyttämään matematiikan ja liikunnan opetusta toiminnallisella tavalla, mihin uusissa opetussuunnitelman perusteissa kehotetaan [39, s. 30–31].

5.1.1 Matemaattinen tausta

Projektissa kerrataan kokonais- ja desimaalilukuja sekä niihin liittyviä laskutoimituksia. Näitä laskutoimituksia ovat lukujen järjestäminen suuruusjärjestykseen pienimmästä suurimpaan, lukujen yhteen- ja vähennyslasku, kahden luvun summan jakolasku ja desimaaliluvun pyöristäminen yhden desimaalin tarkkuuteen.

Oppilaat määrittävät taitojalkapallotuloksistaan tilastollisia tunnuslukuja, joiden tarkoituksena on kuvata mitattujen muuttujien keskeiset ominaisuudet mahdollisimman selkeässä muodossa [38, s. 69]. Tunnusluvut voidaan jakaa keskilukuihin ja hajontalukuihin [57, s. 51].

Keskiluvut kuvaavat eri tavoin havaintojen tyypillistä suuruutta, eli jakauman sijaintia muuttuja-asteikolla. Keskilukuja ovat tyypillisesti moodi, mediaani ja aritmeettinen keskiarvo. [38, s. 71–76]

Moodi eli tyyppiarvo (Mo) ilmaisee havaintoaineiston yleisimmän muuttujan arvon. Jakaumalla voi olla useita moodeja, tai jos kaikki havaintoarvot ovat erisuuruisia, jakaumalle ei voida määrittää lainkaan moodia. [38, s. 71–72]. Moodi pystytään määrittämään kaikilla havaintojen mitta-asteikoilla [59, s. 48–50].

Mediaani (Md) voidaan määrittää järjestetystä havaintoaineistosta. Jos havaintoarvoja on pariton määrä, mediaani on järjestetyn havaintoaineiston keskimmäinen havainto. [38, s. 71–72]. Sen sijaan, jos aineistossa on parillinen määrä havaintoja, mediaaniksi voidaan joko ilmoittaa kaksi keskimmäisintä havaintoarvoa tai näiden keskimmäisten havaintoarvojen keskiarvo [57, s. 51].

Havaintoarvojen x_1, x_2, ..., x_n aritmeettinen keskiarvo on

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i,$$

missä n on havaintojen lukumäärä. Keskiarvo kuvaa siis sitä, kuinka suuria havaintoarvot olisivat, jos mitattava ominaisuus jaettaisiin tasan kaikkien havaintoarvojen kesken. Jos tiedetään yksittäisten havaintojen $x_i, i = 1, 2, \ldots, k$, frekvenssit f_i, eli kuinka monta kertaa kukin havaintoarvo esiintyy aineistossa, havaintoarvoja on yhteensä

$$n = f_1 + f_2 + \cdots + f_k = \sum_{i=1}^{k} f_i.$$

Tällöin aritmeettinen keskiarvo voidaan kirjoittaa muotoon

$$\overline{x} = \frac{f_1x_1 + f_2x_2 + \cdots + f_kx_k}{f_1 + f_2 + \cdots + f_k} = \frac{\sum_{i=1}^{k} f_ix_i}{\sum_{i=1}^{k} f_i}. \text{ [38}, s. 74 - 76]$$

Hajontaluvuilla mitataan, kuinka laajalle tai suppealle välille havaintoarvot ovat sijoittuneet. Toisaalta hajontaluvut kertovat, kuinka tiheästi havaintoarvot ovat sijoittuneet keskiluvun ympärille. Tutkittavan muuttujan yksinkertaisin hajontaluku on vaihteluväli R, joka kuvaa sitä, kuinka laajalta alueelta mittaustuloksia on saatu. Vaihteluväli ilmoitetaan pienimmän ja suurimman havainnon välinä, jolloin $R =$ (pienin havainto; suurin havainto). Siis vaihteluvälin pituus on $|R| =$ suurin havainto− pienin havainto. [38, s. 79–81]

5.1.2 Suomen Palloliitto ja taitokilpailut

Suomen Palloliitto ry-Finlands Bollförbund rf on perustettu 1907. Palloliittoon kuuluu tällä hetkellä noin 1000 jäsenseuraa ja yli 127 000 rekisteröityä pelaajaa. Jalkapalloa harrastaa kaikkiaan 500 000 suomalaista, mikä tekee Palloliitosta harrastajamäärältään Suomen suurimman urheilun lajiliiton. Suomen Palloliiton toiminnan päämääriä ovat muun muassa suomalaisen jalkapalloilun nostaminen pysyvästi kansainvälisellä tasolle ja Fair Play -hengen ulottaminen toiminnan kaikille tasoille. Palloliiton arvoja ovat iloisuus, luotettavuus, menestys ja yhteisöllisyys. [53]

Taitokilpailuissa nuorten jalkapallotaitoja mitataan erilaisten taitokilpailulajien suorituksilla. Kilpailuissa on 9–15-vuotiaiden tyttöjen ja poikien sarjat. Jokaisella ikäluokalla taitokilpailulajeina ovat pusku, syöttö, pujottelu ja kuljetus-laukaus. Mainittujen lajien lisäksi 9–13-vuotiailla lajina on ponnauttelu, 12–15-vuotiailla pituuspotku ja 14–15-vuotiailla kuljetus-keskitys. Yleisesti lajeja harjoittelemalla voidaan seurata ja havaita nuoren jalkapalloilijan pelin osa-alueiden kehittymistä. Taitokilpailulajit ovat myös keino harjoitella keskittymistä ja kokonaisvaltaista yksilöllistä valmennusta. [54]

5.1.3 Projektin kuvaus

Taitojalkapalloprojektissa oppilaat tutustuvat jalkapallon taitokilpailujen lajeihin ja kokeilevat niitä. Oppilaiden analysoidessa mitattuja suorituksia he käyttävät yläkoulun matematiikan ensimmäisellä kurssilla oppimiaan sisältöjänsä hyväksi. Samalla oppilaat kertaavat kurssin aikana käsiteltyjä aihepiirejä poikkeavalla tavalla.

Projekti koostuu neljästä vaiheesta. Ensin oppilaat tutustuvat itsekseen taitokilpailulajien sääntöjä lukemalla ja videoituja mallisuorituksia [26] katsomalla. Taitokilpailulajeina seitsemäsluokkalaisilla eli 13-vuotiailla ovat ponnauttelu, pusku, syöttö, pujottelu, kuljetus-laukaus ja pituuspotku. Huomattavaa on, että puskussa tyttöjen ja poikien suoritukset ovat erilaisia. Puskusuoritus koostuu tytöillä kahdesta puskusta 8 metristä ja yhdestä puskusta 11 metristä, kun pojat puskevat kahdesti 11 metristä ja kerran 16,5 metristä. [54]

Seuraavalla matematiikan oppitunnilla käydään taitokilpailusäännöt vielä yhdessä opettajajohtoisesti läpi. Koska säännöt saattavat olla vaikeasti ymmärrettäviä, ainakin silloin, jos oppilas ei ole harrastanut jalkapalloa aikaisemmin, oppilaita tulisi kannustaa kyselemään mieleen heränneitä kysymyksiä opettajalta ja paikalla olevalta taitokilpailujen asiantuntijalta. Oppilaat jaetaan tunnin aikana kuuteen sellaiseen heterogeeniseen ryhmään, että jokaisessa ryhmässä oppilaiden jalkapallo- ja matemaattiset taidot vaihtelevat. Lisäksi olisi suotavaa, että jokaisessa ryhmässä olisi oppilas, joka tuntisi ennalta jalkapalloilua tai taitokilpailulajeja.

Projektin kolmannessa vaiheessa oppilaat kokeilevat liikunnan kaksoisoppitunnilla jokaista taitokilpailulajia. Ryhmiä ja lajeja on yhtä paljon, joten kutakin lajia on kokeilemassa aina yksi oppilasryhmä. Yhdellä pisteellä ryhmä on 15 minuutin ajan, ja tänä aikana ryhmän jäsenet kokeilevat lajia vuorotellen useamman kerran. Muut ryhmäläiset mittaavat suoritusta tekevän oppilaan tuloksen ja merkitsevät sen lajikohtaiseen tuloskorttiin (liite A.5, taulukot A.8–A.13). 15 minuutin toiminta-ajan loppuessa oppilaat siirtyvät seuraavalle suorituspisteelle tuloskortti mukanaan. Tällä tavalla oppilaat kiertävät kaikki kuusi taitokilpailulajia ja saavat tuloksen jokaiseen lajiin. Liikuntatunnin lopuksi ryhmät antavat kaikkien lajien tuloskortit liikunnan opettajalle, joka luovuttaa ne myöhemmin luokan matematiikan opettajalle.

Ennen viimeistä projektin vaihetta matematiikan opettaja kokoaa oppilaiden parhaat lajikohtaiset tulokset yhteen lomakkeeseen (liite A.5, taulukko A.14). Oppitunnilla kullekin ryhmälle annetaan omat tuloksensa ja kaikkien luokan oppilaiden yhden yksittäisen lajin tulokset analysoitavaksi. Oppilaat saavat tulosten analysointivaiheessa käyttää kynää, paperia ja laskinta.

Ryhmän jäsenten omia tuloksia käsitellessä oppilaat pyöristävät mittaustulokset yhden desimaalin tarkkuuteen, määrittävät pituuspotkun ja puskun yksittäisistä tuloksista vähennyssekunnit, ratkaisevat kuljetus–laukaus-suorituksen loppuajan ja laskevat kaikista lajeista muodostuvan loppuajan. Yksittäisen lajin suoritukset pyöristetään yhden desimaalin tarkkuuteen ja järjestään suuruusjärjestykseen pienimmästä alkaen. Järjestetystä aineistosta ryhmä laskee mediaanin, aritmeettisen keskiarvon ja mahdollisesti moodin. Oppilaat päättelevät selvittämistään tietyn lajin tuloksista, kuinka vaikea laji oli luokan oppilaille suoritettavaksi, ja esittävät päätelmänsä muiden ryhmien jäsenille. Omia taitojalkapallosuorituksiaan käsitteleviä tuloksia ei tarvitse esittää, mutta ne palautetaan opettajalle. Tällöin opettaja pystyy arvioimaan oppilaiden työskentelyä oppitunnin aikana ja suunnittelemaan kurssilla jatkossa opetettavia tai kerrattavia sisältöjä.

Taitojalkapalloprojektin toteuttaminen alkaa siis oppilaiden perehtymisellä taitokilpailuihin kotona, johon kuluu arviolta 45 minuuttia. Koulussa yhdellä oppitunnilla jaetaan oppilaat kuuteen ryhmään ja tutustutaan asiantuntijan kanssa lajeihin. Taitojalkapallolajeja kokeillaan liikunnan kaksoisoppitunnilla. Projektin lopuksi ryhmät analysoivat tuloksia 2 oppituntia. Siis kaikkiaan taitojalkapalloprojektiin kuluu koulutyöskentelynä 5 oppituntia. Tarkemmin projektista kerrotaan liitteessä A.5.

5.1.4 Pohjautuminen opetussuunnitelman perusteisiin

Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteissa 2014 pidetään kehollisuutta ja eri aistien käyttöä oppimiselle olennaisena, mihin projektissa taitojalkapalloilulla ja sillä hankituilla mittaustuloksilla pyritään. Tuloksia analysoitaessa on tärkeätä liittää käytettävät laskutoimitukset aiemmin kurssin aikana opittuun, jotta oppilas voi syventää näiden sisältöjen ymmärrystään. [39, s. 17]

Projektissa opetussuunnitelman perusteiden mukaisesti oppilaita ohjataan käyttämään oppimaansa ongelmanratkaisuun ja johtopäätösten tekemiseen itsenäisesti ja vuorovaikutuksessa toisten oppilaiden kanssa [39, s. 20]. Perusteissa myös rohkaistaan oppilaita vuorovaikutukseen ja itsensä ilmaisemiseen [39, s. 21]. Näitä ominaisuuksia oppilaat käyttävät projektin aikana sekä jalkapallokentällä että luokassa.

Jalkapallo saattaa olla osa monien oppilaiden kokemusmaailmaa, jolloin projektin myötä saavutetaan perusteiden tavoitteita [39, s. 32] vahvistamalla oppilaiden osallisuutta oppimisprosessissa ja tarjoamalla mahdollisuuksia yhdistää koulun ulkopuolista oppimista koulutyöhön. Projektin myötä oppilaat ymmärtävät kurssilla käsitellyn matematiikan hyödyllisyyttä omassa elämässään ja laajemmin yhteiskunnassa [39, s. 374].

Taitojalkapalloa kokeilemalla oppilaat saavat mahdollisuuden keholliseen ilmaisuun, sosiaalisuuteen, leikinomaiseen kisailuun ja toisten auttamiseen, mihin opetussuunnitelman perusteissa vuosiluokkien 7–9 liikunnassa innostetaan [39, s. 433]. Mittaamalla toisten oppilaiden taitojalkapallosuorituksia oppilaat ottavat vastuuta yhteisistä asioista, huomioivat toinen toisiaan ja auttavat muita opetussuunnitelman mukaisesti [39, s. 434].

5.1.5 Projektin edut ja ongelmakohdat

Taitojalkapalloprojektin etuna on, että siinä oppilaat käsittelevät kurssin aikana opittuja sisältöjä konkreettisessa asiayhteydessä. Oppilaiden matemaattisen oppimisprosessin kannalta on usein tärkeätä, että he ymmärtävät opiskeltavan aihepiirin hyödyllisyyden, ja tähän projektissa voidaan päästä. Lisäksi projektin myötä jotkin luokan oppilaat voivat kokeilla itselleen tuntemattomia taitojalkapallon lajeja. Opetussuunnitelman perusteissakin korostetaan liikunnan monipuolista harjoittamista eri liikuntamuotojen ja -lajien avulla [39, s. 434].

Oppilaat työskentelevät projektin aikana pienissä ryhmissä. Taitojalkapallosuoritusten mittaamiseksi ryhmäläisten on autettava toisiaan ja tuloksia analysoitaessa ryhmän oppilaiden on osattava jakaa ongelmat pienempiin palasiin. Opettajan on mahdollista havaita työskentelyä seuratessaan yksittäisten oppilaiden ryhmätaitojen ja kurssin matemaattisten sisältöjen osaamista. Siis projektista hyötyy oppilaiden lisäksi opettaja, joka saa tarvitsemaansa tietoa siitä, ovatko oppilaat sisäistäneet kurssin aikana käsitellyt oppisisällöt.

Jos jotkin oppilaat eivät osaa taitokilpailulajeja käytännössä tai eivät ole kiinnostuneita jalkapallosta, siitä voi muodostua ongelma projektin toteuttamiseksi. Tällaiset oppilaat pitävät mahdollisesti projektia epämiellyttävänä ja eivät mahdollisesti keskity täysin taitokilpailulajien kokeilemiseen. Tuloksien analysoimista ei saateta myöskään pitää järkevänä tai hyödyllisenä.

Projektin sujumisen kannalta oppilaiden on tutustuttava ennalta taitokilpailusääntöihin. Jos oppilaat eivät toimi näin, heidän on todennäköisesti vaikeata ymmärtää yhteisesti lajeihin tutustuttaessa lajien toimintatapoja. Tällöin opettajan ja paikalla olevan taitokilpailujen asiantuntijan on haastavaa selittää yhteisesti kaikille oppilaille lajien toimintaperiaatteita mielenkiintoisella tavalla.

Kolmantena ongelmana projektissa on sen suuri jalkapalloriippuvuus. Jos opettajaa ei kiinnosta jalkapallo, oppilaat voivat saada projektin toteutuksesta taitojalkapalloon liittyviä negatiivisia kokemuksia. Toinen vaihtoehto tällöin on, että opettaja ei toteuta projektia laisinkaan. Paljon riippuu myös luokan oppilaiden jalkapallotaidoista: jos harva oppilas on harrastanut jalkapalloa, silloin projektin toteuttaminen ei tällaisenaan ole järkevää.

5.2 Keihäänheittoprojekti

Projektissa perehdytään keihäänheittoon sekä luokassa että aiheeseen perehtyneen tutkimusryhmän luona. Tutkimusryhmän mittaustuloksia käsitellessä käytetään niin ensimmäisen kuin toisen asteen yhtälöä ja tutustutaan ympyrän yhtälöön. Projektin myötä oppilaille havainnollistetaan fysiikan energiaperiaatetta ja tehon käsitettä käytännössä. Lisäksi oppilaat saavat yleiskäsityksen siitä, mitkä tekijät ovat tyypillisiä pitkälle keihäänheittotulokselle.

5.2.1 Matemaattinen ja fysikaalinen tausta

Projektissa käsiteltäviä matemaattisia sisältöjä ovat kulman tangentti ja ympyrän yhtälö. Määritellään suorakulmaisen kolmion terävän kulman tangentti, jota merkitään lyhenteellä tan.

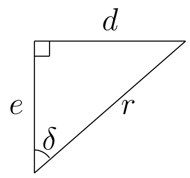
Määritelmä 11. ([3], s. 54) *Suorakulmaisen kolmion terävän kulman tangentti on vastaisen ja viereisen kateetin pituuksien suhde, eli*

$$\textit{kulman tangentti} = \frac{\textit{vastaisen kateetin pituus}}{\textit{viereisen kateetin pituus}}.$$

Kuvan 5.1 tapauksessa suorakulmaisesta kolmiosta tunnetaan kateettien pituudet d ja e. Tällöin kuvaan piirretyn kulman δ tangentti on

$$\tan \delta = \frac{d}{e}$$

Määritelmän 11 mukaisesti.



Kuva 5.1: Tangentin määritteleminen suorakulmaisella kolmiolla, josta tunnetaan kateettien pituudet d ja e. Lisäksi kuvioon on merkitty yksi terävä kulma δ ja hypotenuusan pituus r.

Tarkastellaan vielä suorakulmaisen kolmion sivujen pituuksia tarkemmin. Suorakulmaisen kolmion kateettien pituuksien ja hypotenuusan pituuden vällillä vallitsee Pythagoraan lauseena tunnettu yhteys.

Määritelmä 12. ([3], s. 47) *Pythagoraan lauseen mukaan suorakulmaisen kolmion kateettien neliöiden summa on hypotenuusan neliö.*

Esimerkiksi kuvan 5.1 tapauksessa Pythagoraan lausetta käyttäen saadaan, että

$$d^2 + e^2 = r^2.$$

Tästä saadaan ratkaistua positiiviseksi hypotenuusan pituudeksi

$$r = \sqrt{d^2 + e^2}.$$

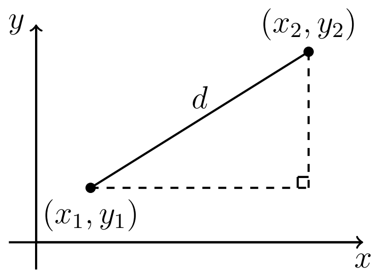
Siis yleisesti riittää, että tunnetaan mitkä tahansa kaksi suorakulmaisen kolmion sivun pituutta, koska Pythagoraan lausetta käyttäen pystytään laskemaan kolmannen sivun pituus.

Projektissa mallinnetaan keihäänheittoa (x, y)-koordinaatistossa vapaana pudotuksena ympyrällä kuvan 5.3 mukaisesti. Koordinaatistossa x-akseli kuvaa heiton pituutta ja y-akseli heiton korkeutta metreinä. Osoitetaan seuraavaksi kahden pisteen välisen etäisyyden yhtälö, jota tarvitaan myöhemmin projektin matemaattisessa osuudessa.

Lause 3. ([3], s. 12) *Kahden eri pisteen* (x_1, y_1) *ja* (x_2, y_2) *välinen etäisyys* d *on* xy*-tasossa*

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Todistus. Olkoon kuvan 5.2 mukaisesti xy-tasossa kaksi mielivaltaista pistettä (x_1, y_1) ja (x_2, y_2).



Kuva 5.2: Kahden pisteen (x_1, y_1) ja (x_2, y_2) välinen etäisyys d.

Pisteiden välinen etäisyys d on pisteiden väliin piirretyn suoran pituus. Toisaalta xy-tasossa pisteestä toiseen voidaan kulkea kahdessa osassa kohtisuorassa olevien x-akselin ja y-akselin suuntaisesti. Tällöin x-akselin suuntaisesti kuljetun osan pituus on pisteiden x-komponenttien erotuksen itseisarvo, eli $|x_2 - x_1|$, ja y-akselin suuntaisesti kuljetun osan pituus on vastaavasti $|y_2 - y_1|$. Tällä tavalla kuljettuna xy-tasoon muodostuu suorakulmainen kolmio, jonka kateettien pituudet ovat $|x_2 - x_1|$ sekä $|y_2 - y_1|$ ja hypotenuusan pituus on d. Pythagoraan lauseen mukaisesti hypotenuusan pituuden, eli pisteiden välisen etäisyyden d, neliö on

$$d^2 = |x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2 .$$

Koska etäisyyden tulee olla positiivinen arvo, tästä saadaan ratkaistua pisteiden väliseksi etäisyydeksi

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{|x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2} \\ &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \end{aligned}$$

□

Osoitetaan seuraavaksi ympyrän yhtälön keskipistemuoto.

Lause 4. ([3], s. 18) *Ympyrän yhtälö on keskipistemuodossa*

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2,$$

missä (x_0, y_0) *on ympyrän keskipiste ja* $r > 0$ *on ympyrän säde.*

Todistus. Olkoon ympyrän keskipiste (x_0, y_0) ja säde $r > 0$. Ympyrä koostuu kehän pisteistä (x, y), jotka ovat säteen r etäisyydellä ympyrän keskipisteestä. Lauseen 3 mukaisesti pisteiden (x_0, y_0) ja (x, y) välinen etäisyys on

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = r.$$

Yhtälön molemmat puolet neliöön korottamalla saadaan

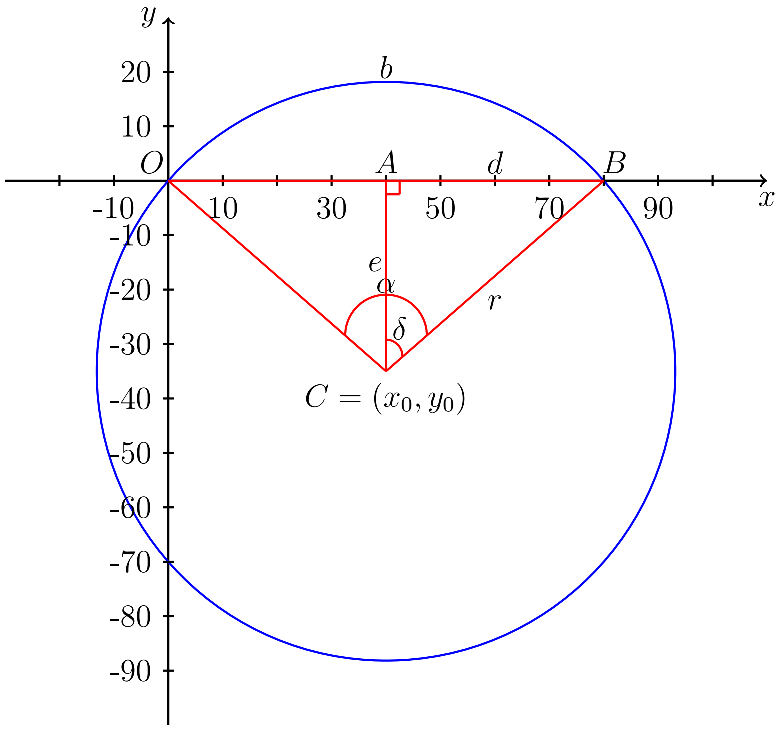
$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2.$$

□

Ympyrän yhtälön keskipistemuodosta ratkaisemalla heiton korkeus y pituuden x funktiona saadaan

$$y = y_0 \pm \sqrt{r^2 - (x - x_0)^2},$$

kun $x \in [x_0 - r, x_0 + r]$. Tästä nähdään, että ympyrä pystytään piirtämään (x, y)-koordinaatistoon kahtena erillisenä kaarena.



Kuva 5.3: Keihäänheiton mallintaminen (x, y)-koordinaatistossa ympyrämallilla.

Heitto on ilmassa vain silloin, kun $y \geq 0$, ja tätä vastaava ympyrän kaaren osa on projektissa tutkittava alue. Määritellään ympyrän kaaren pituuden yhtälö yleisesti.

Määritelmä 13. ([3], s. 46) *Ympyrän kaaren pituuden b yhtälö on*

$$b = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2\pi r,$$

missä α on kaarta vastaavan keskuskulman asteluku ja r on ympyrän säde.

Osoitetaan seuraavaksi, että kuvan 5.3 tapuksessa keskuskulman α suuruus on kaksinkertainen tangentilla laskettavaan kulmaan δ verrattuna.

Huomio 1. *Kuvassa 5.3 olevien kulmien α ja δ välillä vallitsee yhteys*

$$\alpha = 2\delta.$$

Todistus. Osoitetaan, että kolmiot OAC ja BAC ovat yhtenevät, eli kolmion OAC sivujen pituudet ovat yhtä pitkät vastinsivut kolmiossa BAC. Ensimmäiseksi janan OB keskipisteen A kautta kulkeva kulkeva keskinormaali jakaa janan kahteen yhtä pitkään sivuun OA ja BA. Toiseksi sivu AC on yhteinen molemmilla kolmioilla OAC ja BAC. Kolmanneksi sivut CO ja CB ovat ympyrän säteen r suuruisia, joten ne ovat yhtä pitkät. Näin ollen kaikki kolmion OAC sivut ovat yhtä pitkät kuin vastinkolmiossa BAC, joten kolmiot ovat yhtenevät. Täten kulma $\sphericalangle ACO = \sphericalangle BCA = \delta$, jolloin $\alpha = \sphericalangle BCO = \sphericalangle BCA + \sphericalangle ACO = \delta + \delta = 2\delta$. □

Yhtenevissä kolmioissa OAC ja BAC on suora kulma janan OB ja sen keskinormaalin välillä, eli $\sphericalangle OAC = \sphericalangle CAB = 90°$. Täten kolmiot OAC ja BAC ovat suorakulmaisia ja säteen r pituus voidaan laskea Pythagoraan lausetta käyttäen. Kuten jo aiemmin kuvan 5.1 tapauksessa, suorakulmaisen kolmion BAC kateettien pituudet ovat d sekä e ja hypotenuusan pituus on r. Täten Pythagoraan lauseen mukaisesti hypotenuusan pituus ja samalla ympyrän säde on

$$r = \sqrt{d^2 + e^2}.$$

Fysikaalisesti projektissa käsitellään energiaperiaatetta. Määritellään seuraavaksi energiaperiaatteen käsite.

Määritelmä 14. ([36], s. 44–45) *Energiaperiaatteen mukaan mekaaninen energia säilyy eristämättömässä systeemissä. Kaavana ilmaistuna energiaperiaate on*

$$E_{alku} + W = E_{loppu},$$

missä $E_{alku}(J)$ on kappaleen kokonaisenergia tarkasteluvälin alkutilanteessa, $E_{loppu}(J)$ kappaleen kokonaisenergia tarkasteluvälin lopputilanteessa ja $W(J)$ kappaleeseen tehty työ.

Ratkaisemalla kappaleeseen tehty työ energiaperiaatteen Määritelmästä 14 saadaan

$$W = E_{loppu} - E_{alku} = \Delta E.$$

Tästä nähdään, että tehty työ on yhtä suuri kuin kappaleen kokonaisenergian muutos ΔE. Projektissa käsitellään etenevän keihään liikettä, jolloin keihään energia voidaan jakaa potentiaalienergiaan E_{pot} ja kineettisen energiaan E_{kin}. Tällöin energiaperiaate saa muodon

$$E_{pot,alku} + E_{kin,loppu} + W = E_{pot,loppu} + E_{kin,loppu}.$$

Keihäänheiton aikana tehty työ on

$$W = E_{pot,loppu} - E_{pot,alku} + E_{kin,loppu} - E_{kin,alku} = \Delta E_{pot} + \Delta E_{kin},$$

eli keihään potentiaalisen energian muutoksen ΔE_{pot} ja kineettisen energian muutoksen ΔE_{kin} summa. Keihäänheittäjän tekemä työ vaihtelee vetovaiheessa ajan funktiona, jolloin $W = W(t)$. Tätä käyttäen voidaan määritellä tehon käsite.

Määritelmä 15. ([36], s. 48) *Fysikaalisella tehon ominaisuudella mitataan työn* *tekemisen nopeutta ja se ilmaistaan kaavalla*

$$P = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{dW}{dt}.$$

Tehon yksikkö on työn yksikön (J) ja ajan yksikön (s) suhde, jota kutsutaan watiksi (W).

Laskemalla keihäänheittäjän vetovaiheen suurimman hetkellisen tehon saadaan heitosta arkielämän tilanteisiin verrattavaa tietoa. Keihäänheittäjän tehoa voidaan verrata esimerkiksi sähkölieden tai -kiukaan tehoon.

5.2.2 Tutkimusryhmä

Projektissa työskennellään yhdessä Tampereen teknillisen yliopiston professori Lauri Kettusen tutkimusryhmän kanssa. Professori Kettusen tutkimusryhmä on tehnyt aikaisemmin onnistunutta yhteistyötä Suomen Hiihtoliiton ja Jalaksen kanssa mäkihyppääjien älymonojen valmistuksessa [55], [56]. Tämän lisäksi tutkimusryhmä on työskennellyt mäkimaajoukkueen kanssa hyppysiteiden kehittämiseksi [56].

Tutkimusryhmä on alkanut 2010-luvulla hyödyntää älymonoissa käytettyä teknologiaa muissakin urheilulajeissa, kuten keihäänheitossa [16], [56]. Älykeihäsprojektissa keihääseen sijoitetulla mikrosirulla on saatu tietoa keihään lentorataan ja heittoon liittyvistä yksityiskohdista. Projekti synnytti myös tarpeen luoda sellaisia hiilikuitukeihäitä, jotka tukevat kunkin keihäänheittäjän yksilöllisiä heitto-ominaisuuksia. [16]. Kansainvälinen yleisurheiluliitto on hyväksynyt uuden keihästyypin, ja sillä saatetaan heittää Rio de Janeiron kesäolympialaisissa [64].

5.2.3 Projektin kuvaus

Projektissa 8.-luokkalaiset oppilaat kertaavat lukuvuoden aikana oppimiansa yhtälöihin, tasogeometriaan ja energiaperiaatteeseen liittyviä keskeisiä sisältöjä. Projektin aikana keihäänheittoon tutustuttaessa oppilaat havaitsevat konkreettisesti, että käsitellyille oppisisällöille löytyy käytännön sovelluksen kohteita. Oppilaille pystytään havainnollistamaan projektin myötä, mistä tekijöistä onnistunut keihäänheitto riippuu.

Projekti on nelivaiheinen. Ensimmäisessä vaiheessa oppilasjoukko jaetaan 3–4 henkilön ryhmiin, jotka perehtyvät keihäänheittoon lajina. Ryhmät kirjaavat omia mielipiteitään pitkistä heitoista esimerkiksi videoita ja artikkeleita lähteinä käyttäen. Tällöin oppilaat perehtyvät riittävässä määrin keihäänheittoon lajina, jotta kaikki oppilaat pystyvät vierailun aikana sisäistämään esitettyjä tuloksia ja malleja. Tässä vaiheessa myös palautetaan oppilaiden muistiin heidän aikaisemmin oppimia matemaattisia ja fysikaalisia sisältöjä, joita tarvitaan projektin aikana, tutustutaan oppilaille tuntemattomaan tangentin käsitteeseen ja käsitellään pinnallisesti ympyrän yhtälön keskipistemuotoa. Oppilaiden ei kuitenkaan projektin aikana tarvitse muodostaa ympyrän tai sen kaaren yhtälöä.

Projektin seuraavassa vaiheessa luokka vierailee Tampereen teknillisellä yliopistolla. Vierailun aikana oppilaat tutustuvat älykeihäällä saatuihin mittaustuloksiin, kuten keihään lähtönopeuteen ja -kulmaan, lentokorkeuteen sekä keihään kokemiin poikittaisvoimiin lennon aikana. Edustaja näyttää ja selittää tutkimusryhmän kuvaamia videoita heitoista. Kukin ryhmä saa jostakin heitosta mittaustuloksia myöhemmin analysoitavaksi.

Kolmannessa vaiheessa ryhmät analysoivat mittaustuloksiaan ja kokoavat tulokset esitykseksi. Oppilaat laskevat heittäjän keihääseen kohdistaman työn määrän energiaperiaatteella. Mittaustuloksista määritetään heiton pituuden riippuvuus keihään lähtönopeudesta ja -kulmasta toisen asteen polynomisovitteina. Tällä tavalla kukin ryhmä saa selville heitolle ideaalisen lähtökulman ja pystyy ennakoimaan heiton pituuden keihään lähtönopeuden muuttuessa.

Projektin lopuksi ryhmät keräävät mittaustuloksista selvittämänsä päätulokset PowerPoint -esitykseen. Esitykseen tulee myös mittaustulosten mukaiset hyvän heiton ominaispiirteet, joita verrataan ennen vierailua arvioituihin ominaisuuksiin. Ryhmät esittävät toisilleen esityksensä ja vertailevat saamiaan tuloksiaan. Oppilaat arvioivat yhdessä, että voidaanko onnistuneelle keihäänheitolle määrittää tiettyjä yleisiä ominaisuuksia.

Keihäänheittoprojektin toteuttamiseen kuluu ensin $3 \cdot 45$ min projektille keskeisten sisältöjen kertaamiseen ja uusien käsitteiden opettamiseen. Vierailu Tampereen teknillisellä yliopistolla kestää $2 \cdot 45$ min, jonka jälkeen ryhmien saamia mittaustuloksia analysoidaan $2 \cdot 45$ min. Ryhmien tuloksien kokoamiseen, esittämiseen ja yhdessä vertailemiseen kuluu $2 \cdot 45$ min. Kaikkiaan keihäänheittoprojektiin on varattava 9 oppituntia. Tarkempia tietoja projektista on liitteessä A.6.

5.2.4 Pohjautuminen opetussuunnitelman perusteisiin

Matematiikan opetuksen tulee vuosiluokilla 7–9 ohjata oppilaita ymmärtämään matematiikan hyödyllisyys omassa elämässään ja laajemmin yhteiskunnassa [39, s. 374]. Tähän projektissa pyritään, kun pääosin oppilaille ennalta tuttuja matemaattisia ja fysikaalisia käsitteitä ja menetelmiä hyödyntämällä pystytään käsittelemään sovelluskohdetta. Projektityöskentelyssä ylitetään oppiainerajoja, mitä perusopetuksen opetussuunnitelman perusteissa 2014 yleisesti pidetään tärkeänä [39, s. 282], eheyttämällä matematiikan ja fysiikan opetuksen urheilemiseen.

Oppilaat työskentelevät projektin aikana yhdessä koulun ulkopuolisen toimijan kanssa, joka on lisäksi paikallinen ja yhteiskunnallisesti merkittävä, mihin opetussuunnitelmassakin kehotetaan [39, s. 32, 284]. Projektin myötä oppilaat perusteiden mukaisesti tutustuvat monimuotoisten teknologioiden toimintaperiaatteisiin ja kartuttavat työelämän tuntemustaan [39, s. 22–23]. Opetussuunnitelman perusteissa myös ohjataan oppilaita pohtimaan teknologiaan liittyviä tulevaisuuden mahdollisuuksia [39, s. 283]. Tästä esimerkkinä voisi olla älykeihään käyttäminen jatkossa virallisissa keihäskilpailuissa, jolloin katsojat saisivat nähdä tarkkaa informaatiota heitosta heti suorituksen jälkeen.

Opetussuunnitelman perusteissa tuodaan esiin tavoite, että oppilaat ohjataan käyttämään tietoa itsenäisesti ja vuorovaikutuksessa toisten kanssa ongelmanratkaisuun ja johtopäätösten tekemiseen sekä uuden keksimiseen [39, s. 20]. Projektissa ryhmissä työskennellessä näiden taitojen käyttämisen lisäksi oppilaiden tutkiva ja ongelmalähtöinen työskentely edistää perusteiden korostamaa oppilaiden käsitteellistä osaamista ja taitoa soveltaa osaamista [39, s. 30]. Lisäksi oppilaat kohtaavat projektityöskentelyn aikana tiedon kriittistä tarkastelua, johon yläkoulun opetuksessa pyritään [39, s. 374], älykeihään herkkiä mittaustuloksia analysoitaessa.

5.2.5 Projektin edut ja ongelmakohdat

Keihäänheittoprojektin etuna on, että sillä pystytään havainnollistamaan 8. luokalla matematiikassa opittujen yhtälöihin ja tasogeometriaan sekä fysiikassa energiaan liittyvien sisältöjen hyötyjä. Oppilaat näkevät konkreettisesti, että luonnontieteissä asioita ei opiskella turhaan, vaan niillä on käyttöä monissa eri tilanteissa. Samalla kerrataan syvällisesti aikaisemmin opittuja sisältöjä, mikä auttanee oppilaiden asioiden ymmärtämistä. Lisäksi tangentin määritelmän nopea läpikäynti todennäköisesti helpottaa seuraavalla vuosiluokalla trigonometrian kurssilla opiskeltavien trigonometristen funktioiden oppimista.

Projektissa 8.-luokkalaiset oppilaat tutustuvat työelämään ja saavat todennäköisesti ensikosketuksen yliopistotutkijoiden elämään. Jos oppilaat kiinnostuvat aihepiiristä, he voivat saada kipinän luonnontieteiden jatko-opiskeluun lukiossa ja jopa yliopistossa. Jotkin oppilaat saattavat myös kiinnostua tutkijan työstä, joten projekti voi auttaa oppilaita näkemään erilaisia työelämän mahdollisuuksia tulevaisuudessa.

Oppilaat hyötyvät projektista tutustuessaan yhteiskunnallisesti merkittävään vaikuttajaan. Tutkimusryhmä valmistamilla älymonoilla esimerkiksi Janne Ahonen voitti arvokisamitaleja ja historiallisen viidennen mäkiviikon voittonsa kaudella 2007–2008 [56]. Rio de Janeiron kesäolympialaisissa suomalaiset keihäänheittäjät voivat voittaa mitaleja ryhmän kehittämällä keihäsmallilla, joten oppilaat kokevat läheltä, miten kilpailuvälineitä huippu-urheilijoille kehitetään. Tämä voi olla oppilaille ainutlaatuinen kokemus.

Projektin ongelmakohtana voi olla se, että kaikkia luokan oppilaita keihäänheitto ei kiinnosta. Tällöin he saattavat kokea projektityöskentelyn turhaksi ajan kulutukseksi. Tästä ryhmien sisäinen työskentely voi kärsiä, jolloin näiden ryhmien oppilaat eivät saavuta projektin tarkoituksenmukaisia oppimistavoitteita.

Projektin sujumisen kannalta oppilaiden pitäisi olla läsnä ensimmäisen vaiheen oppitunneilla, joilla kerrataan matemaattisia ja fysikaalisia sisältöjä sekä opetellaan uusia matemaattisia käsitteitä. Jos jotkin oppilaat ovat poissa näiltä oppitunneilta, he eivät välttämättä koe hyötyvänsä vierailun aikana kerrottavista mittaustuloksista ja niiden hyödyntämisestä. Poissa olleille oppilaille voisi järjestää ylimääräisen opetushetken ennen vierailua, jotta nämä oppilaat olisivat luokan muiden oppilaiden kanssa projektin sisältöjen osaamisen suhteen samalla tasolla. Tästä ei kuitenkaan niin opettaja kuin oppilas ole aina kiinnostunut.

Yleisesti projektissa käsiteltävät matemaattiset sisällöt saattavat olla oppilaille haastavia. Ympyrän yhtälö ei esimerkiksi kuulu opetussuunnitelman perusteissa yläkoulun matematiikan keskeisiin sisältöalueisiin [39, s. 375–376]. Projektin toteutuksessa on kuitenkin pyritty huomioimaan tämä asia. Siksi ryhmien mallintaessa ympyrän kaarella keihään lentorataa ilmassa kaaren yhtälö on annettu ryhmille valmiiksi.

6. YHTEENVETO

Opetusta tarkasteltaessa on havaittavissa oppimiskäsitysten muutos behaviorismista konstruktivismin suuntaan. Tämän vuoksi nykykäsityksen mukaan opetuksessa pääosassa ei ole opettaja, vaan oppilas ja hänen oppimisensa. Hyvänä opetuksen määritelmänä voidaan pitää sitä, että opetus on kahden henkilön välistä intentionaalista toimintaa, jossa oppilaan tavoitteena on oppia tietty sisältö ja opettajan pyrkimyksenä on auttaa oppilasta tämän sisällön oppimiseksi.

Keskeistä kaikessa opetuksessa on, että yksilöt osallistuvat opetukseen eli opiskelevat. Opiskelu määritellään tavoitteellisena toimintana, jossa oppilaan intentiona on tietyn tiedon, taidon tai toiminnan oppiminen. Määritelmästä huomataan, että opiskelu ei takaa suoraan oppimista, eikä sitä voi kukaan muu, edes opettaja, tehdä oppilaan puolesta. Oppiminen on siis yksilön sisäistä toimintaa, jonka myötä hän kykenee uudenlaiseen, haluttuun toimintaan.

Matematiikan opetuksessa on havaittavissa, että ei ole olemassa yhtä oikeata tapaa matematiikkaa. Opettamiselle asetettavien vaatimusten, kuten mielekkyyden oppilaiden kannalta ja oppilaiden vastuuntunnon kasvattamisen omasta työstään, pitää olla kuitenkin osa opetustapahtumaa. Siksi perinteistä matematiikan opetusta, jossa oppitunti jakaantuu suhteellisen tasaisesti kotitehtävien läpikäymiseen, uuteen aihepiiriin käsittelemiseen ja itsenäiseen aiheeseen tutustumiseen tehtäviä tekemällä, ei voida toteuttaa kaikilla oppitunneilla. Projektioppiminen tarjoaa mahdollisuuden opetuksen rikastuttamiseen.

Projektioppimiselle on olennaista, että oppilailla on suuri vastuu omasta työskentelystään. Oppilaat esimerkiksi vaikuttavat käsiteltäviin aihepiireihin ja suunnittelevat opettajan kanssa projektin tavoitteita ja aikatauluja. Projektityöskentelyllä mahdollistetaan, että matematiikan opetuksessa painottuu aineenhallinnan lisäksi ongelmanratkaisu- ja vuorovaikutustaidot, joita tarvitaan laajemmin työelämässä.

Työssä kuvaillaan kuutta eri liikunnallista projektia yläkoulun matematiikan opetukseen käytettäväksi. Näistä projekteista neljä on toteutettavissa pelkästään koulun ja sen vastuuopettajan johdolla ja kaksi projektia on erilaisten toimijoiden kanssa toteutettavia. Jokaisessa projektissa tutustutaan yhteen tai useampaan perusopetuksen opetussuunnitelman perusteissa esiteltyyn [39, s. 375–376] keskeiseen matemaattiseen sisältöalueeseen.

Kaikkia projekteja on esitelty työssä yksityiskohtaisesti. Opettajan toteuttaessa yksittäistä projektia hänellä on vapaus muokata projektin kuvausta omanlaisekseen. Kunkin projektin kohdalla on pohdittu projektin pohjautumista opetussuunnitelman perusteisiin. Vaikka projektioppiminen tuo uutena työskentelytapana monia mahdollisuuksia opetukseen, pitää sen ensi sijassa olla oikeutettu opetustapa, joka auttaa oppilaita saavuttamaan perusopetukselta vaadittuja tavoitteita. Projektikohtaisesti on myös eritelty mahdollisia projektin etuja ja ongelmakohtia. Kuitenkin vasta toteutettaessa projekteja huomataan todellisuudessa sekä projektista saavutettavat hyödyt että ne haittapuolet, joista halutaan päästä eroon projektioppimisen tehostamiseksi jatkossa.

LÄHTEET

[1] Aebli, H., Opetuksen perusmuodot, Juva, 1991, WSOY. 454 s.

[2] Albrecht, T. L., Burleson, B. R., Goldsmith, D., Supportive Communication. In Knapp, M. L., Miller, G. R., Handbook of Interpersonal Communication, Thousand Oaks, 1994, Sage. p. 419-443

[3] Adams, R., Essex, C., Calculus A Complete Course, 7th Ed., Toronto, 2010, Pearson. 973 p.

[4] Davis, P. J., Hersch, R., The mathematical experience, Boston, 1981, Birkhäuser. 440 p.

[5] Eldén, L., Wittmeyer-Koch, L., Bruun Nielsen, H., Introduction to Numerical Computation - analysis and MATLAB® illustrations, Lund, 2004, Studentlitteratur. 375 p.

[6] Fuson, K. C., Pre-K to Grade 2 Goals and Standards: Achieving 21st Century Mastery for All [WWW]. [viitattu 24.1.2016]. Saatavissa: http://gse.buffalo.edu/org/conference/confwritings2/fuson.doc.pdf

[7] Geokätköily. Maantieteelliset koordinaatit ja koordinaattijärjestelmät [WWW]. [viitattu 16.6.2015]. Saatavissa: http://www.geokätköt.fi/geokatkoily/gps/koordinaatit.html

[8] Heinonen, M., Luoma, M., Mannila, L., Tikka, T., Pii 9, Keuruu, 2009, Otava. 312 s.

[9] Härkönen, R.-S., Viestintäkasvatuksen ulottuvuudet, Helsinki, 1994, Helsingin yliopiston opettajankoulutuslaitos. Tutkimuksia 125.

[10] Heinonen, V., Kasvatustieteen perusteet, Hyväskylä, 1989, Gummerus. 393 s.

[11] Henry, J., Meaning and practice in experiental learning. In Weil, S. W., McGill, I. (Eds.), Making sense of experiental learning: Diversity in theory and practise, Milton Keynes, 1989, Open University Press. pp. 25–37

[12] Hirsjärvi, S., Huttunen, J., Johdatus kasvatustieteeseen, 2. painos, Helsinki, 1992, WSOY. 176 s.

[13] Hirsjarvi, S., Johdatus kasvatusfilosofiaan, Helsinki, 1985, Kirjayhtymä. 219 s.

[14] Hirsjärvi, S. (toim.), Kasvatustieteen käsitteistö, Helsinki, 1983, Otava. 223 s.

[15] Hunter, R., Schreirer, E. A., Elävä opetussuunnitelma: Ala-asteen opetuksen suunnittelu, Helsinki, 1992, VAPK-kustannus. 225 s.

[16] Juoksukoulu. Suomalainen superkeihäs menossa IAAF:n hyväksyttäväksi [WWW]. [viitattu 29.6.2015]. Saatavissa: http://www.juoksukoulu.fi/uutiset/uutispalvelu/sul-tiedotteet/suomalainen-superkeihäs-menossa-iaafn-hyväksyttäväksi

[17] Järvinen, R., Latva, O., Makkonen, J.-P., Vahviainen, S., Kartio 2, Helsinki, 2012, Sanoma. 197 s.

[18] Kanervisto, S., Vähätalo, P., Peruskoulun projektityöskentely. Teoksessa Salonen, A. (toim.), Koulusta kouluun: Ala-asteen kokeilut kertovat, Helsinki, 1991, VAPK-kustannus. s. 49–73

[19] Karlsson, L., Riihelä, M., Ajattelu alkaa ihmetyksestä: Ryhmätyöstä yhteistoiminnalliseen oppimiseen, Helsinki, 1991, VAPK-kustannus. 198 s.

[20] Kerr, D., The structure of quality in teaching. In Soltis, J. (Ed.), Philosophy and education, Chicago, 1981, University of Chicago. pp. 61–93

[21] Kilpatrick, W. H., The Project Method, New York, 1918, Teachers College Record XIX. pp. 319–335

[22] Kitcher, P., The nature of mathematical knowledge, New York, 1984, Oxford University Press. 300 p.

[23] Kohonen, V., Leppilampi, A., Toimiva koulu: Yhdessä kehittäen, Porvoo, 1994, WSOY. s. 61

[24] Koskenniemi, M., Hälinen, K., Didaktiikka, 3. painos, Keuruu, 1974, Otava. 304 s.

[25] Koskinen, I., Opettaja ja moraali. Teoksessa Tella, S. (toim.), Juuret ja arvot: Etnisyys ja eettisyys–aineen opettaminen monikulttuurisessa ympäristössä, Helsinki, 1995, Helsingin yliopiston opettajankoulutuslaitos. s. 1–8

[26] Kuukauden kikat. Taitokilpailusäännöt [WWW]. [viitattu 9.7.2015]. Saatavissa: http://www.kuukaudenkikat.fi/?sivu=121

[27] Laes, T., Opettaminen–viestintää ja kommunikaatiota. Teoksessa Anttila, M., Laes, T., Suomela, J. (toim.), Opettaja oppimassa: Tutkimustietoa opettajuudesta, oppimisesta ja opetuksesta, Turku, 2001, Painosalama Oy. s. 235–249

[28] Lahdes, E., Opetus toimintana. Teoksessa Kari, J. (toim.), Didaktiikka ja opetussuunnittelu, Juva, 1994, WSOY. s. 43–45

[29] Lahdes, E., Peruskoulun didaktiikka, Helsinki, 1986, Otava. 400 s.

[30] Lahdes, E., Peruskoulun uusi didaktiikka, Helsinki, 1997, Otava. 285 s.

[31] Lahdes, E., Peruskoulun uusi opetusoppi, Helsinki, 1977, Otava. 397 s.

[32] Lavonen, J., Krzywacki-Vainio, H., Aksela, M., Krokfors, L., Oikkonen, J., Saarikko, H., Pre-service teacher education in chemistry, mathematics and physics. In Pehkonen, E., Ahtee, M., Lavonen, J. (Eds.), How Finns Learn Mathematics and Science, Rotterdam, Sense Publishers, 2007. pp. 49–68

[33] Leino, A.-L., Leino, J., Kasvatustieteen perusteet, 5. painos, Helsinki, 1995, Kirjayhtymä. 118 s.

[34] Leino, J., Tietokone opetuksen kehittämisessä: 3. Tietokone oppilaiden opiskeluvälineeksi, Helsinki, 1988, Helsingin yliopiston kasvatustieteen laitos, Tutkimuksia 118. 35 s.

[35] Leino J., Tietokone opetuksen kehittämisessä: 4. Projektiopiskelu koulussa, Helsinki, 1989, Helsingin yliopiston kasvatustieteen laitos, Tutkimuksia 122. 96 s.

[36] Mansfield, M., O'Sullivan, C., Understanding Physics, 2nd Ed., Chichester, 2011, Wiley. 675 p.

[37] Niinistö, K., Tulkinnallinen paradigma aikuiskoulutuksen arvioimisessa, Helsinki, 1985, Valtion painatuskeskus. 100 s.

[38] Nummenmaa, L., Holopainen, M., Pulkkinen, P., Tilastollisten menetelmien perusteet, Helsinki, 2014, Sanoma Pro. 353 s.

[39] Opetushallitus. Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet 2014 [WWW]. [viitattu 12.6.2015]. Saatavissa: http://www.oph.fi/download/ 163777_perusopetuksen_opetussuunnitelman_ perusteet_2014.pdf

[40] Peda.net. Karttatietoutta [WWW]. [viitattu 16.6.2015]. Saatavissa: https://peda.net/oppimateriaalit/e-oppi/ylakoulu/maantieto/amerikka/karttatietous

[41] Pehkonen, E., Rossi, M., Some alternative teaching methods in mathematics. In Pehkonen, E., Ahtee, M., Lavonen, J. (Eds.), How Finns Learn Mathematics and Science, Rotterdam, Sense Publishers, 2007. pp. 143–154

[42] Pehkonen, L., Projektiopiskelu koulussa. Julkaisussa Kasvatus 24 (3/1993) Suomen kasvatustieteellinen aikakauskirja, Jyväskylä, 1993, Kirjapaino Oma Ky. s. 259–265

[43] Pehkonen, L., Täydestä sydämestä ja tarkoituksella: Projektityöskentelyn käsitteellistä viitekehystä jäljittämässä, Helsinki, 2001, Helsingin yliopiston kasvatustieteen laitos, Tutkimuksia 171. 169 s.

[44] Perkkilä, P., Lehtelä, P.-L., Learning environments in mathematics and science. In Pehkonen, E., Ahtee, M., Lavonen, J. (Eds.), How Finns Learn Mathematics and Science, Rotterdam, Sense Publishers, 2007. pp. 69–85

[45] Rauste-von Wright, M., Opettaja tienhaarassa: konstruktivismia käytännössä, Juva, 1997, WSOY. 133 s.

[46] Rauste-von Wright, M., von Wright, J., Soini, T., Oppiminen ja koulutus, 9. painos, Helsinki, 2003, WSOY. 262 s.

[47] Resnick, L. B., Education and learning to think, Washington, D. C., 1987, National Academy Press. 62 p.

[48] Rinne, R., Kivirauma, J., Lehtinen, E., Johdatus kasvatustieteisiin, Helsinki, 2010, WSOY. 268 s.

[49] Sahlberg, P., Suomalaisen koulun menestystarina ja mitä muut voivat siitä oppia, 2. painos, Helsinki, 2015, Into Kustannus Oy. 297 s.

[50] Sahlberg, P., Meisalo, V., Lavonen, J., Kolari, M., Luova ongelmanratkaisu koulussa, 2. painos, Helsinki, 1994, Painatuskeskus Oy. 171 s.

[51] Shulman, L. S., Knowledge and Teaching: Foundations of the New Reform [WWW]. [viitattu 21.12.2015]. Saatavissa: http://people.ucsc.edu/∼ ktellez/shulman.pdf

[52] Smith, B. O., Definitions of teaching, In Dunklin, M. J. (Ed.), The International Encyclopedia of Teaching and Teacher Education, Oxford, 1987, Pergamon Press. pp. 11–15

[53] Suomen Palloliitto. Kotisivut [WWW]. [viitattu 9.7.2015]. Saatavissa: http://www.palloliitto.fi/

[54] Suomen Palloliitto. Taitokilpailusäännöt 2015. [viitattu 9.7.2015]. Saatavissa: http://www.palloliitto.fi/sites/default/files/liitteet/taitokilpailusaannot2015.pdf

[55] Tampereen teknillinen yliopisto. Sidosryhmälehti Rajapinta 1/2009. Mäkihyppääjä ponnistaa älymonolla [WWW]. [viitattu 29.6.2015]. Saatavissa: http://www.tut.fi/rajapinta/artikkelit/2009/1/makihyppaaja-ponnistaa-alymonolla

[56] Tampereen teknillinen yliopsito. Sidosryhmälehti Rajapinta 1/2011. Älymonot museoitiin vaikka tekniikka on edellä aikaansa [WWW]. [viitattu 29.6.2015]. Saatavissa: http://www.tut.fi/rajapinta/artikkelit/2011/1/alymonot-museoitiin-vaikka-tekniikka-on-edella-aikaansa

[57] Valli, R., Johdatus tilastolliseen tutkimukseen, Jyväskylä, 2001, PS-kustannus. 118 s.

[58] Viljonen, T., Käytännöllinen opetustaito, Jyväskylä, 1949, Gummerus. 240 s.

[59] Vilkka, H., Tutki ja mittaa: Määrällisen tutkimuksen perusteet, Helsinki, 2007, Tammi. 189 s.

[60] von Wright, G. H., Filosofisia tutkielmia, Helsinki, 1985, Kirjayhtymä. s. 65–68

[61] von Wright, J., Oppimiskäsitysten historiaa ja pedagogisia seurauksia, Helsinki, 1993, Opetushallitus. 38 s.

[62] Väisälä, K., Geometria, 5. painos [WWW]. [viitattu 31.1.2016]. Saatavissa: http://matematiikkalehtisolmu.fi/2011/geometria.pdf

[63] Wilenius, R., Kasvatuksen ehdot: Kasvatusfilosofian luonnos, 3. painos, Jyväskylä, 1978, Gummerus. 88 s.

[64] Yleisradio. Suomessa kehitetty superkeihäs Rion olympiakisoihin? [WWW]. [viitattu 29.6.2015]. Saatavissa: http://yle.fi/urheilu/suomessa_kehitetty_ superkeihas_rion_olympiakisoihin/7982982

[65] Yrjönsuuri, R., Opiskelulla laatua matematiikan oppimiseen, Helsinki, 1994, Yliopistopaino. 218 s.

[66] Yrjönsuuri, R., Opit kun haluat: Matematiikkaa ja yhteistyötä, Hamina, 2002, Oy Kotkan Kirjapaino Ab. 177 s.

[67] Yrjönsuuri, R., Yrjönsuuri, Y., Matematiikan opiskelun ja opetuksen käsitteet. Teoksessa Räsänen, P, kupari, P., Ahonen, T., Malinen, P. (toim.), Matematiikka – näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen, 2. painos, Jyväskylä, 1998, Niilo Mäki -instituutti. s. 111–127

[68] Yrjönsuuri, R., Yrjönsuuri, Y., Opiskelun merkitys, Helsinki, 1994, Yliopistopaino. 141 s.

[69] Yrjönsuuri, R., Yrjönsuuri, Y., Opiskelu oppiminen osaaminen, Hamina, 2003, Oy Kotkan Kirjapaino Ab. 174 s.

[70] Yrjönsuuri, R., Yrjönsuuri, Y., Opettajan osaaminen, Helsinki, 1995, Yliopistopaino. 188 s.

[71] Yrjönsuuri, Y., Opetuksen ymmärtäminen, 2. painos, Helsinki, 1994, Yliopistopaino. 112 s.

[72] Yrjönsuuri, Y., Opetus intentionaalisena toimintana. Julkaisussa Kasvatus 22(5–6/1991) Suomen kasvatustieteellinen aikakauskirja, Jyväskylä, 1991, Kirjapaino Oma Ky. s. 428–432

[73] Yrjönsuuri, Y., Peruskoulun eri-ikäisten opettajien käsityksiä koulutuksensa riittävyydestä, Helsinki, 1990, Helsingin yliopiston kasvatustieteen laitos. Tutkimuksia 126.

[74] Yrjönsuuri, Y., Pyrkimykset tiedonkäsityskeskustelussa. Teoksessa Yrjönsuuri, Y., Laukkanen, R. (toim.), Opetuksen mahdollisuuksia: keskustelua tiedosta, oppimisesta ja kasvatuksesta, Helsinki, 1990, VAPK-kustannus. s. 9–17

[75] Äijälä, A., Todennäköisyyslaskenta ja tilastotiede, Tampere, 1983, Tammertekniikka. 134 s.

A. PROJEKTITYÖOHJEITA

A.1 Yleisurheilun avulla suoraan verrannollisuuden ja nopeuden tutkiminen

Kohderyhmä: Luokat 8–9
Esitiedot: Vertailuprosentti
Taustalla oleva matematiikka: Suoran yhtälön ratkaistu muoto, suoraan verrannollisuus, tasaisen liikkeen nopeus ja hetkellinen nopeus
Ajankäyttö: *Matemaattisten sisältöjen opettaminen ja ohjeistus:* $2 \cdot 45$ min, *mittaustulosten hankkiminen:* $2 \cdot 45$ min ja *mittaustulosten analysointi:* $3 \cdot 45$ min
Opetustilat: Oma luokka, yleisurheilukenttä ja tietokoneluokka
Kuvaus projektista:

Projekti jakautuu kolmeen osaan: matemaattisten sisältöjen opettamiseen ja ohjeistukseen, mittaustulosten hankkimiseen sekä mittaustulosten analysointiin.

Matemaattisten sisältöjen opettaminen ja ohjeistus:

- Opettaja jakaa oppilaat liikunnallisilta taidoiltaan neljän henkilön heterogeenisiin ryhmiin.
- Oppilaille opetetaan projektille keskeiset matemaattiset sisällöt opettajan parhaaksi näkemällä tavalla.
- Ryhmiä ohjeistetaan yleisurheilukentällä toimimiseksi 100 metrin juoksun, pituushypyn ja 400 metrin juoksun yhteydessä.
- 100 metrin juoksussa jokaisessa erässä juoksee yksi kunkin ryhmän oppilas. Muut kolme ryhmän oppilasta mittaavat sekuntikellolla ajan oman ryhmänsä juoksijalle. Eriä on yhteensä neljä kappaletta.
- Pituushyppyä varten ryhmät jakautuvat kahdelle eri pituushyppypaikalle. Yhden ryhmän oppilaat hyppäävät ensiksi vuorotellen kaikki kerran. Tällöin hyppypaikalla olevat muut oppilaat huolehtivat hiekkakasan tasoittamisesta ja tuloksen mittaamisesta. Käytössä on yhden metrin levyinen ponnistusalue lankun ympärillä ja hyppy mitataan siitä kohtaa, mistä ponnistus lähti. Tämän

jälkeen ryhmät vaihtavat rooleja pituushyppypaikoittain, kunnes jokainen oppilas on hypännyt pituutta ainakin kolme kertaa.

- 400 metrin juoksussa jokaisessa erässä juoksee yksi kunkin ryhmän oppilas. Ryhmän kolme muuta oppilasta mittaavat juoksijalle 100, 200 ja 300 metrin väliajat, minkä lisäksi ensimmäisen väliajan ottanut mittaa myös juoksun loppuajan. Eriä on yhteensä neljä kappaletta.

Mittaustulosten hankkiminen:

- Alkuverryttelyjen jälkeen oppilaat juoksevat 100 metrin matkan ja hyppäävät pituutta.
- Oppilaat kirjaavat ryhmittäin sekä 100 metrin että pituushyppytuloksensa joko Excel-tiedostoon tai paperille tulostettuun taulukon A.1 pohjaan.
- Liikuntatunnin lopuksi kaikki oppilaat juoksevat 400 metrin matkan. Tulokset merkitään Excel-tiedostoon tai paperille tulostettuun taulukon A.2 pohjaan.

Mittaustulosten analysointi:

- Ryhmien sisällä oppilaat jakautuvat kahteen pariin.
- Tulosten analysointi jakautuu kahteen eri osaan: maksimijuoksunopeuden ja pituushyppytuloksen avulla piirrettävän (v_{max}, l_{hyppy})-koordinaatiston sekä 400 metrin juoksun ajoista piirrettävän (t, s)-koordinaatiston analyysiin.

Maksimijuoksunopeus ja pituushyppytulos

1. Parit laskevat keskiarvon jokaiselle oman ryhmän oppilaalle mitatuista 100 metrin juoksuajoista Excelin Keskiarvo-funktiolla. Tällöin mittaustuloksiin liittyvät virheet, kuten erilaiset reaktioajat, kumoavat toisiaan ja pikajuoksutulosten keskiarvo kuvaa suhteellisen tarkasti oikeaa tulosta [48, s. 29].

2. Parit laskevat tasaisen liikkeen avulla kunkin ryhmän oppilaan keskinopeuden 100 metrin juoksun aikana. Tätä keskinopeutta pidetään projektissa oppilaan maksimijuoksunopeutena v_{max}.

3. Maksimijuoksunopeus- ja pituushyppytuloksia käyttämällä piirretään mittapisteet (v_{max}, l_{hyppy})-koordinaatistoon ja niihin sovitetaan lineaarinen sovitesuora.

4. Parit vastaavat seuraaviin kysymyksiin:
   - Mikä on saamanne sovitesuoran yhtälö?

- Mikä on pituushypyn maailmanennätys tällä hetkellä?
- Mikä oli vauhdinoton aikana maksimijuoksunopeus tässä ME-hypyssä? Kuinka pitkälle ihminen voisi hypätä tällaisella maksimijuoksunopeudella mallinne yhtälön mukaisesti?
- Tässä työssä oletettiin, että vain juoksunopeudella on merkitystä hypyn pituuteen. Mitkä muut tekijät vaikuttavat todellisuudessa pituushyppytuloksiin?

400 metrin juoksut väliaikoineen

1. Parit piirtävät vain omien juoksuaikojensa mukaiset mittaustulokset (t, s)-koordinaatistoon ja sovittavat mittapisteisiin toisen asteen polynomisovitekäyrät.

2. Vastattavia kysymyksiä pareille ovat:

   - Onko käyrien muodoissa havaittavissa selkeitä eroavaisuuksia? Mitä syitä näille eroavaisuuksille löydätte?
   - Miten hetkellisen juoksunopeuden muutos havaitaan piirretyistä käyristä?
   - Kummalla parin oppilaista oli suurempi hetkellinen juoksunopeus juoksun aikana? Missä vaiheessa 400 metrin juoksua tämä tapahtui?
   - Mikä oli kummankin oppilaan suurin hetkellinen juoksunopeus?
   - Mikä oli kummankin oppilaan koko juoksun keskinopeus?
   - Kuinka monta prosenttia suurin hetkellinen nopeus on suurempi kuin koko juoksun keskinopeus kummallakin oppilaalla?
   - Tukevatko mittaustuloksista analysoimanne tiedot mielipiteitänne juoksun sujumisesta?

Taulukot:

Taulukko A.1: Mallipohja, jota hyödyntäen ryhmät voivat taulukoida kaikkien oppilaidensa 100 metrin juoksun ajat t_1, t_2 ja t_3, joita hyödyntäen voidaan laskea juoksun keskiaika t_{kesk} ja keskinopeus, jota pidetään tässä projektissa juoksijan maksiminopeutena v_{max}, sekä pituushypyn pisin tulos l_{hyppy}.

Oppilas	t_1(s)	t_2(s)	t_3(s)	t_{kesk}(s)	v_{max}(m/s)	l_{hyppy}(m)
A						
B						
C						
D						

Taulukko A.2: Mallipohja, jota hyödyntäen voidaan taulukoida jokaiselle ryhmän oppilaalle väli- ja loppuajat $t_{Oppilas\ A}$, $t_{Oppilas\ B}$, $t_{Oppilas\ C}$ ja $t_{Oppilas\ D}$.

s(m)	$t_{Oppilas\ A}$(s)	$t_{Oppilas\ B}$(s)	$t_{Oppilas\ C}$(s)	$t_{Oppilas\ D}$(s)
100				
200				
300				
400				

A.2 Tasogeometriaan tutustuminen QR-koodeilla selvitetyillä työpisteillä

Kohderyhmä: Luokat 7–8
Esitiedot: –
Taustalla oleva matematiikka: Kulmat, ympyrä, monikulmiot, piiri ja pinta-ala, koordinaatisto, yhtenevyyskuvaukset, yhdenmuotoisuus, Pythagoraan lause ja koordinaattien merkitsemistapa
Ajankäyttö (7.-luokkalaiset): *Työpistetyöskentely:* $2 \cdot 45$ min ja *vastausten analysoiminen:* 45 min
Ajankäyttö (8.-luokkalaiset): *Työpisteiden sijainnit:* $2 \cdot 45$ min, *työpistetyöskentely:* $2 \cdot 45$ min ja *vastausten analysointi:* 45 min
Opetustilat: Oma luokka, koulun sisä- ja ulkotilat ja kuntorata
Kuvaus projektista:

Projekti voidaan toteuttaa joko 7.- tai 8.-luokkalaisten oppilaiden kanssa. Seitsemäsluokkalaisilla projekti jakautuu kahteen osaan, jotka ovat työpistetyöskentely ja oppilaiden vastauksien analysoiminen. Kahdeksasluokkalaisilla projekti jakautuu kolmeen osaan: työpisteiden sijaintien määrittämiseen koordinaattien avulla, työpistetyöskentelyyn ja vastausten analysoimiseen.

7.-luokkalaisten toteutustapa:

1. Työpistetyöskentely

   - Opettaja jakaa oppilaat 3–4 henkilön ryhmiin luokkahuoneessa.
   - Jokainen ryhmä saa erilaisen QR-koodin, josta ryhmät selvittävät ensimmäisen työpisteensä sijainnin koulun tiloista.
   - Työpisteillä, joita on yhteensä 10 kappaletta, on tehtävänantokortit, joihin ryhmät vastaavat. Ryhmät ottavat ongelmaan vastattuaan kortin mukaan.
   - Ryhmien käytyä kaikilla työpisteillä oppilaat palaavat takaisin luokkahuoneeseen.
   - Työpisteiden tehtävänannot ovat tiivistetysti seuraavat:

     a) Yhdistä kuvan A.1 kulmat seuraaviin määritelmiin: nollakulma, terävä kulma, suorakulma, tylppä kulma, oikokulma, kupera kulma ja täysi kulma.

     b) Peilatkaa kirjain A sekä suoran että pisteen suhteen. Katsokaa tarvittaessa mallia kuvasta A.2, jossa kirjain T on peilattu suoran ja pisteen suhteen.

c) Päätelkää kuvan A.3 eräiden säännöllisten monikulmioiden kuvista, mitkä kaksi asiaa vaaditaan yhtä suuriksi yleisesti säännöllisellä monikulmiolla.

d) Lisää alueiden pinta-aloihin sopiva yksikkö:

   1) Täysikokoisen jalkapallokentän pinta-ala on 70 ____________.
   2) Perhosen yhden siiven pinta-ala on 10 ____________________.
   3) Suomen pinta-ala on 338 000 ____________________________.
   4) Suomen suurimman kauppakeskuksen pinta-ala on 20 ________.
   5) Kynän kärjen pinta-ala on 2 _____________________________.
   6) Makuuhuoneen pinta-ala on 14 ___________________________.
   7) Kirjan etukannen pinta-ala on 3 __________________________.

e) Mikä on kunnan eteläisin ja pohjoisin kohta kartalla? Entäs läntisin ja itäisin? Mihin kannattaisi sijoittaa kunnantalo, jotta se olisi mahdollisimman keskellä kuntaa?

f) Seinillä on rakennettu tila, jossa syöttö yritetään saada kolmen seinän kautta maaliin. Mikä kuvan A.4 mukaisista syöttösuunnista A, B vai C valitaan? Saatteko kokeilemalla saman tuloksen?

g) Arvioikaa, mikä on tämän huonen piiri ja pinta-ala? Verratkaa arvioitanne mittaamalla saamiinne tuloksiin.

h) Piirtäkää omakotitalolle tavallinen harjakatto? Minkä muodon harjakatto muodostaa talon kanssa?

i) Yhdistä kuvan A.5 monikulmiot seuraaviin nimiin: suunnikas, puolisuunnikas, tasasivuinen kolmio, suorakulmainen kolmio ja viisikulmio.

j) Ympyröikää oikea vaihtoehto:

   1) Ympyrän säde on ympyrään halkaisijaan verrattuna
      i) lyhyempi
      ii) pitempi.
   2) Ympyrän kehä koostuu pisteistä, jotka ovat
      i) samalla etäisyydellä ympyrän keskipisteestä
      ii) koko ajan halkaisijan etäisyydellä keskipisteestä.
   3) Kaksi ympyrän kehän pistettä jakaa kehän kahteen
      i) ympyrän kaareen
      ii) uuteen ympyrään.
   4) Ympyrän sektori on

i) ympyrän jänteen jakamista alueista alaltaan pienempi

ii) kahden ympyrän säteen rajaama alue ympyrästä.

2. Vastausten analysoiminen

- Ryhmät vastaavat kirjaa hyödyntäen erivärisellä kynällä uudelleen ei-toiminnallisiin kysymyksiin.
- Ryhmät vaihtavat keskenään vastauksiaan ja tehtävien vastaukset käydään yhdessä opettajajohtoisesti läpi.

8.-luokkalaisten toteutustapa:

1. Työpisteiden sijainnit

- Oppilaat jaetaan 3-4 henkilön ryhmiin.
- Ryhmät lukevat älypuhelimella 10 QR-koodia ja erilaisilla tavoilla merkityt koordinaatit selville.
- Ryhmät muuttavat koordinaatit haluttuun muotoon ja selvittävät esimerkiksi Google Maps -palvelulla, mihin kohtaan kuntorataa koordinaatit osoittavat kartalla.
- Ryhmät merkitsevät paperisen karttaan jokaisen työpisteen sijainnin.

2. Työpistetyöskentely

- Jokaiselle ryhmälle jaetaan kuntoradalla oma vastauskortti.
- Ryhmät kiertävät luonnossa eri työpisteillä.
- Työpisteillä ryhmät vastaavat tehtäviin ja kirjaavat tulokset vastauskorttiin.
- Työpisteiden tehtävänannot, joita pitää muokata toteutuskohtaisesti, ovat tiivistetysti seuraavat:

  a) Kuntorata on piirretty kartalle mittakaavassa 1:20 000 ja radan pituus kartalla on 15 cm. Kuinka pitkä kuntorata on todellisuudessa metreinä tai kilometreinä ilmaistuna?

  b) Käytössänne on 4 metriä narua. Millainen tasokappale kannattaa rajata tällä narulla, jotta kappaleen pinta-ala olisi mahdollisimman suuri?

  c) Mikä on Suomen sijainti maapallolla? Piirtäkää ympyrään säde, joka kulkee Suomen kautta? Kuinka suuri kulma muodostuu säteen ja päiväntasaajan välille? Missä kohdassa sädettä Suomi on?

d) Piirtäkää juuri kävelemänne/juoksemanne ylä- ja alamäen profiili? Oliko nousu- vai laskuosuus jyrkempi? Arvioikaa, kuinka paljon lyhyempi matka olisi ollut liikkua tasamaata pitkin.

e) Heittäkää käpy noin 10 metrin päähän. Mitatkaa heiton pituus mittanauhalla. Arvioikaa, kuinka pitkän matkan käpy lensi ilmassa lentoradallaan. Kuinka monta prosenttia enemmän käpy lentää arvionne mukaan kuin mittanauhalla saatu tulos ilmoittaa?

f) Tällä rastilla maasto on tasaista. Kuinka suuri kulma muodostuu maan ja puun väliin? Miksi tällaista kulmaa kutsutaan? Yleisesti, jos kaksi suoraa on tällaisessa kulmassa toisiinsa nähdän, niiden sanotaan olevan ____________________. Kirjoittakaa kysytty sana vastauskorttiiinne.

g) Kartassa on kuvattu erään Val di Fiemmen hiihtoladun (5 km) profiili. Missä vaiheessa kierrosta on pisin nousuosuus? Kuinka pitkä tämä nousuosuus on ja mikä on nousun korkeusero metreinä? Oletetaan vielä, että Falunissa olisi olemassa täsmälleen samanlainen nousu, mutta siinä hiihdettävän matkan pituus olisi kaksinkertainen tähän Val di Fiemmen nousuun verrattuna. Kuinka suur olisi tällöin Falunissa olevan nousun korkeusero metreinä?

h) Kuntoradan erään kohdan voi ajatella muodostavan U-kirjaimen karttaan. Peilatkaa U-kirjain sekä suoran että pisteen suhteen. Eroavatko peilauskuvat toisistaan?

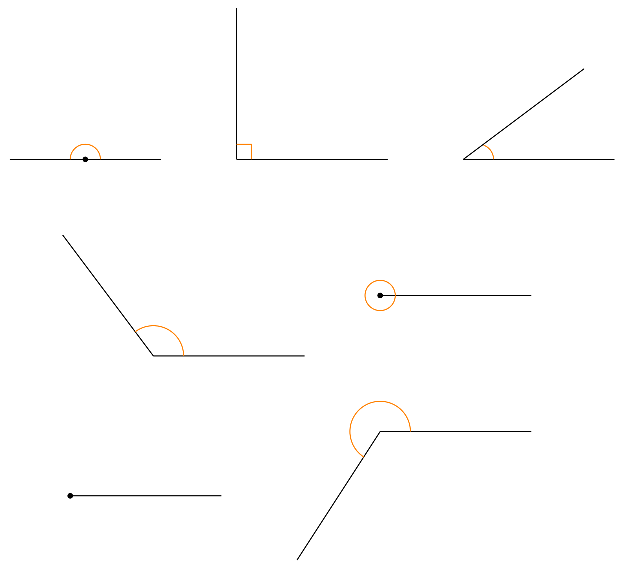
i) Kuntoradan lähtöalueelle pääsee tältä pisteeltä liikkumalla ensin 300 metriä itään ja sitten 400 metriä etelään. Kuinka pitkä matka lähtöalueelle olisi, jos pystyisitte kulkemaan sinne suoraan metsän läpi?

j) Liikkumisen jälkeen on syötävä ruokaa harjoituksesta palautumiseksi. Henkilö syö puolet ympyrän muotoisesta ruisleivästä, jonka halkaisija on 20 cm. Mikä on syödyn ruisleipäosuuden pinta-ala?

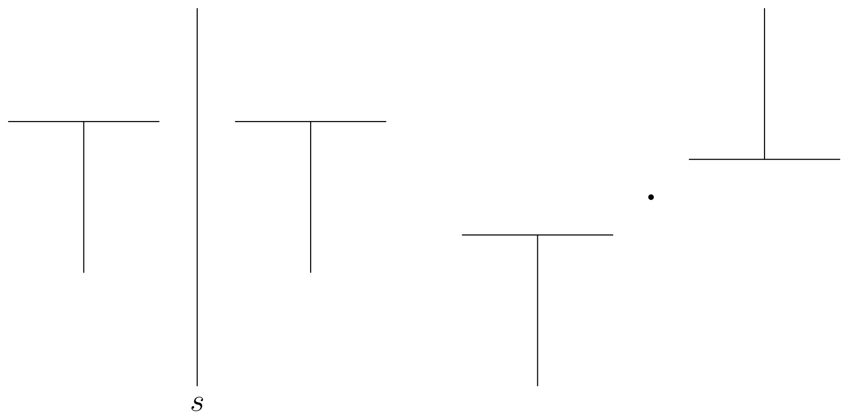
3. Vastausten analysoiminen

- Ryhmät vastaavat uudelleen kysymyksiin kuulakärkikynällä kirjaa hyödyntäen.
- Ryhmät vaihtavat keskenään vastauksiaan ja tehtävien oikeat vastaukset käydään opettajajohtoisesti läpi.

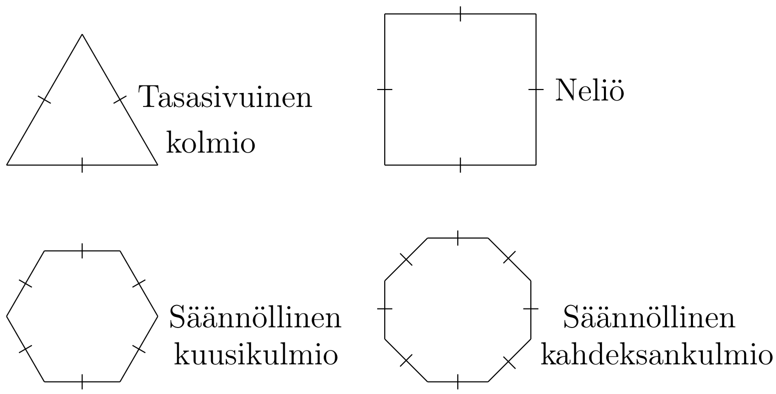
Kuvat:



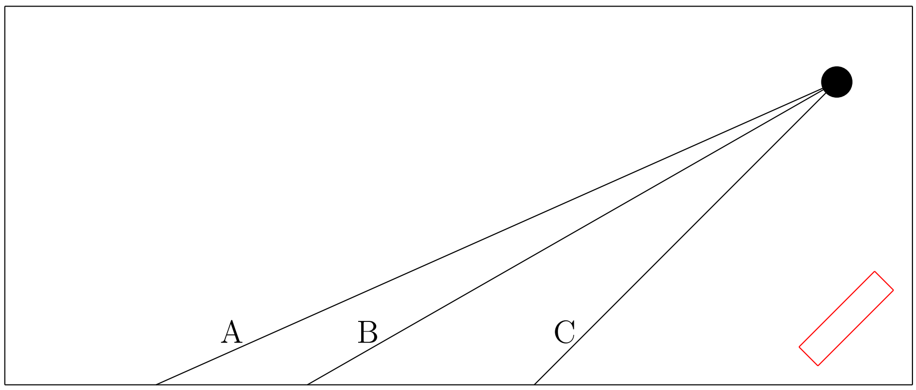
Kuva A.1: Kulmien yhdistäminen mallikuvien perusteella nimiinsä: oikokulma, suorakulma, terävä kulma, tylppä kulma, täysi kulma, nollakulma ja kupera kulma.



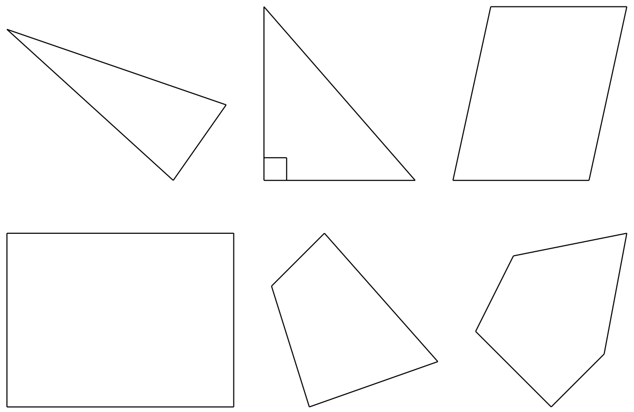
Kuva A.2: Kirjaimen T peilaaminen suoran s ja pisteen suhteen.



Kuva A.3: Säännöllisiä monikulmioita.



Kuva A.4: Salibandypallon syöttäminen kolmen seinän kautta maaliin.



Kuva A.5: Monikulmioiden tunnistaminen mallikuvista: teräväkulmainen kolmio, suorakulmainen kolmio, suunnikas, suorakulmio, nelikulmio ja viisikulmio.

A.3 Yleisurheilu- ja tennisprojekti tilastoihin ja todennäköisyyksiin tutustumiseksi

Kohderyhmä: Luokat 8 ja 9
Esitiedot: Prosenttilaskenta
Taustalla oleva matematiikka: Itseisarvo, absoluuttinen ja suhteellinen virhe, frekvenssi ja suhteellinen frekvenssi, tilastollinen todennäköisyys, histogrammi, riippumattomien tapahtumien todennäköisyys, viivadiagrammi ja sektoridiagrammi
Ajankäyttö: *Yleisurheiluun ja tennikseen tutustuminen:* 45 min, *liikunnallinen osuus:* $2 \cdot 45$ min ja *mittaustulosten analysointi:* $2 \cdot 45$ min
Opetustilat: Oma luokka, yleisurheilukenttä ja tenniskenttä
Kuvaus projektista:

Projekti voidaan toteuttaa joko kahdeksas- tai yhdeksäsluokkalaisten oppilaiden kanssa riippuen siitä, milloin oppilaat opiskelevat tilastojen ja todennäköisyyksien opintojakson. Suoritustapaan tämä ei vaikuta, sillä projekti koostuu kummassakin tapauksessa kolmesta osasta. Projektin vaiheita, jotka ovat yleisurheiluun ja tennikseen tutustuminen, liikunnallinen osuus ja mittaustulosten analysointi, eritellään tarkemmin alla.

Yleisurheiluun ja tennikseen tutustuminen:

- Oppilaat jaetaan urheilullisin kriteerein kahden henkilön pareihin.
- Parit tutustuvat lopputunnin ajan miesten ja naisten yleisurheilulajien maailmanennätyksiin sekä tenniksen sääntöihin, pistelaskusysteemiin ja peruskäsitteistöön.

Miesten ja naisten yleisurheilulajien maailmanennätykset

1. Parit etsivät maailmanennätys- eli ME-tulokset luotettavasta lähteestä.
2. Kullekin parille annetaan yhden liikunnan oppitunnilla kokeiltavan lajin ME-tulos tarkemmin tutkittavaksi. Kyseenomaiset lajit ovat miesten ja naisten 800 metriä, 1500 metriä, keihäänheitto, kuulantyöntö ja kolmiloikka. Vastattavia kysymyksiä ovat:
   - Mikä on lajin maailmanennätystulos?
   - Milloin ja missä maailmanennätys on tehty?
   - Millaisessa kilpailussa tulos on suoritettu (=Olympialaiset, MM-kilpailut tai jokin muu kansainvälinen kilpailu)? Miksi juuri tällaisessa kilpailussa on tehty lajin maailmanennätystulos?

- Mistä syistä johtuen lajin ME-tulos ei ole/on parantunut 2000-luvulla?

Tenniksen säännöt ja peruskäsitteistö

1. Parit etsivät tenniksen säännöt ja lukevat ne läpi.

2. Parit vastaavat seuraaviin kysymyksiin:

   - Miltä alueelta syöttö pitää suorittaa?
   - Miten pelaaja voi voittaa yhden pelin perinteisellä laskutavalla?
   - Milloin kaksinpeliottelussa syöttöjärjestys muuttuu, eli syöttäjä vaihtuu?

3. Parit määrittelevät seuraavat tenniseen liittyvät käsitteet:

   - Läpisyöttö
   - Kaksoisvirhe
   - Läpilyönti
   - Helppo virhe (englanniksi unforced error)
   - Pakotettu virhe (englanniksi forced error).

Liikunnallinen osuus:

- Tässä esitellään oppilaiden ohjeet suorituspisteillä, joissa kullakin on kaksi oppilasparia, toimimiseen. Parit vaihtavat suorituspistettä 20 minuutin välein.

- Oppilaat kokeilevat liikunnan kaksoisoppitunnilla juoksemista valmiiksi asetettuun tavoiteaikaan, keihäänheittoa, kuulantyöntöä, kolmiloikkaa ja tenniksen pelaamista.

Juokseminen tavoiteaikaan

1. Lähtöpaikalla neljän oppilaan kesken arvotaan jokaiselle valmiista vaihtoehdoista juostava matka ja sen tavoiteaika.

2. Vaihtoehtoina on juosta 600 metriä 2,5 minuuttiin, 800 metriä 4 minuuttiin, 1000 metriä 6 minuuttiin tai 1200 metriä 7,5 minuuttiin.

3. Samanaikaisesti juoksee yksi oppilas kummastakin parista, ja parien toiset oppilaat mittaavat juoksujen loppuajat.

4. Kellottaja ei saa vaikuttaa parinsa juoksunopeuteen.

5. Juoksujen loppuajat kirjataan molempien parien omiin, taulukon A.3 mukaisiin, tuloskortteihin.

Keihäänheitto

1. Käytössä on 400 gramman keihäät.
2. Parit heittävät keihästä yhden kierroksen vuorotellen.
3. Ei-heittävän parin oppilaat mittaavat toisen parin oppilaiden heittojen pituudet.
4. Kaikki keihäänheittotulokset merkitään parin omaan tuloskorttiin.

Kuulantyöntö

1. Käytössä on 2,5 kilogramman kuula.
2. Parit työntävät kuulaa vuorotellen. Ei-työntävän parin oppilaat mittaavat työntöjen pituudet.
3. Kaikki tulokset kirjataan ylös parikohtaiseen tuloskorttiin.

Kolmiloikka

1. Parien oppilaat hyppäävät vuorotellen kolmiloikkaa.
2. Ponnistus tapahtuu oppilaan ennen hyppyä määrittämältä metrin ponnistusalueelta.
3. Tulosta mitatessa jokaisella neljällä oppilaalla on oma roolinsa:
   - Seuraavana hyppyvuorossa oleva oppilas osoittaa, mistä kohdasta hyppy lähti ponnistusalueen sisältä, ja merkitsee mitatun tuloksen hyppääjän tuloskorttiin.
   - Toisena vuorossa oleva laittaa mitan nollakohdan hyppymerkin kohtaan.
   - Kolmantena vuorossa oleva oppilas mittaa loikkien lopputuloksen hyppylaatikon jäljestä ja sanoo tuloksen ääneen.
   - Hypännyt oppilas tasoittaa laatikkoon muodostuneen kuopan seuraavaa hyppyä varten.
4. Oppilaat siirtyvät yksittäisen hypyn jälkeen seuraavaan rooliin tuloksen mittaamiseksi.

Tennis

1. Käytössä on joko yksi tai kaksi tenniskenttää riippuen oppilaiden kokonaismäärästä ja parien lukumäärästä.

2. Kentällä pelaa yksi pari virallisten tennissääntöjen mukaisesti kaksi syöttövuoroa kerrallaan.

3. Toisen parin oppilaat kirjaavat tukkimiehen kirjanpidolla taulukon A.4 mukaiseen taulukkoon ylös, miten piste päättyi. Mahdollisuuksia ovat jommankumman pelaajan läpisyöttö, kaksoisvirhe, läpilyönti, pakotettu virhe tai helppo virhe.

4. Parien oppilaat vaihtavat rooleja kahden pelatun syöttövuoron jälkeen.

Mittaustulosten analysointi:

- Parit analysoivat omia liikunnallisia suorituksiaan matemaattisesti. Oppilaat voivat käyttää laskentaohjelmistoja, kuten Exceliä, hyväkseen. Eri lajeja parien oppilaat analysoivat vaihtelevin tavoin.

Juoksu

1. Oppilaat laskevat omista juoksuajoistaan absoluuttisen ja suhteellisen virheen tavoiteaikaan.

2. Juoksumatkan ja -ajan avulla oppilaat laskevat molempien juoksujen keskimääräisen juoksunopeuden.

3. Keskimääräisestä juoksunopeudesta selvitetään absoluuttinen ja suhteellinen virhe tavoitenopeuteen verrattuna.

4. Miksi lasketut absoluuttiset ja suhteelliset virheet eroavat tai eivät eroa toisistaan?

Keihäänheitto

1. Tuloksista parit muodostavat frekvenssitaulukon, jossa molempien oppilaiden heittojen pituudet on jaettu kuuteen tasaväliseen luokkaan.

2. Luokitellusta aineistosta parien oppilaat piirtävät kaikkia heittoja kuvaavan histogrammin.

3. Histogrammista oppilaat selvittävät todennäköisimmän heiton pituusvälin ja tätä tapahtumaa vastaavan suhteellisen frekvenssin.

Kuulantyöntö

1. Parit muodostavat kaikista kuulantyöntötuloksista frekvenssitaulukon, jossa työntöjen pituudet on jaettu neljään tasaväliseen luokkaan.

2. Oppilaat piirtävät frekvenssitaulukon mukaisen histogrammin.

3. Histogrammista selvitetään todennäköisin työnnön pituusväli ja suhteellinen frekvenssi tällaiselle työnnölle.

4. Onko kysytty suhteellinen frekvenssi suurempi kuulantyönnössä kuin keihäänheitossa? Mistä tämä johtuu?

Kolmiloikka

1. Parit piirtävät viivadiagrammin, jossa näkyy molempien loikkatulokset toisistaan eroavina viivoina.

2. Viivadiagrammissa vaaka-akselilla on oppilaan yrityskerta ja pystyakselilla kolmiloikkatuloksen pituus.

3. Mistä tekijöistä viivadiagrammin kummankin viivan muodostuminen johtuu?

Tennis

1. Oppilaat laskevat tennispisteiden erilaisia päättymismahdollisuuksia vastaavat suhteelliset frekvenssit.

2. Pisteiden päättymistapojen havainnollistamiseksi parit piirtävät laskemistaan tuloksistaan sektoridiagrammin.

3. Mitä syistä johtuen pisteet päättyvät todennäköisimmin parien selvittämällä tavalla?

- Parit palauttavat oman tuotoksen opettajalle analysoituaan kaikkien urheilusuoritusten aineistot.

Taulukot:

Taulukko A.3: Mallipohja yleisurheilutulosten s_{juoksu}, t_{juoksu}, l_{keihs}, l_{kuula} ja $l_{3-loikka}$ kirjanpitoon.

Yritys	Oppilas	s_{juoksu}(s)	t_{juoksu}(s)	l_{keihs}(m)	l_{kuula}(m)	$l_{3-loikka}$(m)
1	A					
1	B					
2	A	-	-			
2	B	-	-			
3	A	-	-			
3	B	-	-			
4	A	-	-			
4	B	-	-			
5	A	-	-			
5	B	-	-			
6	A	-	-			
6	B	-	-			
7	A	-	-			
7	B	-	-			
8	A	-	-			
8	B	-	-			
9	A	-	-			
9	B	-	-			
10	A	-	-			
10	B	-	-			

Taulukko A.4: Mallipohja, jota täydentämällä tutkitaan pelattujen tennispisteiden päättymistä.

Oppilas	Läpisyöttö	Kaksoisvirhe	Läpilyönti	Helppo virhe	Pakotettu virhe
A					
B					

A.4 Koripalloprojekti

Kohderyhmä: Luokka 9
Esitiedot: Tasogeometria
Taustalla oleva matematiikka: Kääntäen verrannollisuus, tilastollinen todennäköisyys ja ehdollinen todennäköisyys
Ajankäyttö: *Liikunnallinen osuus ja mittaustulosten hankkiminen:* $2 \cdot 45$ min ja *mittaustulosten analysointi:* $2 \cdot 45$ min
Opetustilat: Liikuntasali ja oma luokka
Kuvaus projektista:

Koripalloprojekti toteutetaan yhdeksäsluokkalaisten oppilaiden kanssa. Kyseessä on kaksiosainen projekti, jossa ensin koripalloon liittyvällä liikunnan kaksoisoppitunnilla hankitaan mittaustulokset, joita sitten analysoidaan matematiikan oppitunneilla.

Liikunnallinen osuus ja mittaustulosten hankkiminen:

- Liikunnan opettaja jakaa oppilaat luokan yhteisellä liikunnan kaksoisoppitunnilla neljän henkilön ryhmiin. Jaon perusteena on ensinnäkin se, että kaikissa ryhmissä on niin tyttöjä kuin poikia, ja toiseksi, että ryhmien väliset erot koripallotaidoissa ovat mahdollisimman pieniä.
- Alkuverryttelyn jälkeen ryhmät järjestäytyvät koripallon vapaaheitto- ja syöttöharjoituspaikoille. Paikkojen lukumäärä riippuu luokan oppilaskoosta. Esimerkiksi, jos luokalla on 24 oppilasta, ryhmiä on yhteensä kuusi kappaletta, ja tällöin liikuntasalissa on sekä kolme vapaaheittopaikkaa että kolme tarkkuusheittopaikkaa.
- Kaikki ryhmät käyvät vapaaheitto- ja syöttöharjoituspaikoilla. Esitellään seuraavaksi, miten oppilaat toimivat näillä paikoilla.

Koripallon vapaaheitto

1. Jokainen ryhmän oppilas heittää viisi vapaaheittoa tietyiltä etäisyyksiltä korista. Heittoetäisyydet ovat 1 metri, 2 metriä, 3 metriä, 4 metriä ja 5 metriä.
2. Ryhmän oppilaiden kaikki heitot tilastoidaan taulukon A.5 pohjalle. Onnistunutta heittoa merkitään lyhenteillä + tai S (sisään) ja epäonnistunutta heittoa lyhenteillä – tai U (ulos). Vapaaheiton heittänyt oppilas merkitsee itse heittonsa lopputuloksen taulukkoon.
3. Vapaaheittotulokset ovat ryhmäkohtaisia. Siis taulukkoon merkitän ryhmän nimi tai numero, kun taas oppilaiden nimiä ei tarvitse merkitä taulukkoon.

Koripallon syöttöharjoitus

1. Liikuntasalin seinään on merkitty alueet, joissa pienempi maali sijaitsee suuremman maalialueen sisällä. Maalialueet voivat olla ympyrän tai neliön muotoisia.

2. Oppilaat heittävät vuorotellen koripalloa ja yrittävät osua merkittyyn alueeseen. Jos vähintään puoli palloa osuu isompaan tai pienempään alueeseen, heiton lasketaan osuneen tähän alueeseen. Heittoetäisyys on aina viisi metriä maalialueen keskipisteestä.

3. Ryhmän oppilaat heittävät kukin 15 tarkkuusheittoa. Ryhmäkohtaiset taulukot kirjataan taulukkoon A.6.

Koripallo-ottelut

1. Liikuntatunnin lopuksi ryhmät pelaavat kahdella liikuntasalissa olevalla poikittaisella pikkukentällä koripallo-otteluja. Otteluiden peliaika on 7 minuuttia.

2. Jos oppilasryhmiä eli joukkueita on yhteensä kuusi, joukkueet jaetaan kahteen lohkoon. Tällöin joukkueet pelaavat kaksi koripallo-ottelua. Sen sijaan, jos oppilasryhmiä on neljä kappaletta, kaikki ryhmät pelaavat kerran toisiaan vastaan.

3. Otteluissa tarkastellaan heittojen onnistumisprosenttia. Kuuden joukkueen tapauksessa kummastakin lohkosta yksi joukkue seuraa aina ottelua sivusta. Tämän ryhmän oppilaat merkitsevät pelaavien joukkueiden onnistuneet ja epäonnistuneet heitot taulukkoon A.7. Jos joukkueita on neljä, heittojen merkitseminen on haasteellisempaa, koska joukkueet pelaavat jokaisessa ottelussa. Tällöin jossain rymässä voi olla ylimääräinen oppilas, joka pystyy kirjaamaan tulokset jälkikäsittelyä varten.

Mittaustulosten analysointi:

- Oppilaat analysoivat oman ryhmänsä tuloksia kahdella matematiikan oppitunnilla.

- Kaikki ryhmät analysoivat tuloksensa samoja periaatteita käyttäen ja kirjoittavat tuloksistaan opettajalle palautettavan raportin.

Vapaaheittojen analysointi

1. Ryhmäkohtaisesti lasketaan suhteellinen frekvenssi p vapaaheiton sisään menemiselle kultakin etäisyydeltä d.

2. Oppilaat laskevat heittoetäisyyksien käänteisluvut $\frac{1}{d}$ ja piirtävät Excel-ohjelmistoa käyttäen mittapisteet $(\frac{1}{d}, p)$-koordinaatistoon ja sovittavat mittapisteisiin lineaarisen sovitesuoran.

3. Lineaarisen sovitesuoran muodosta ja korrelaatiokertoimen arvosta ryhmät päättelevät, vallitseeko vapaaheiton heittoetäisyyden ja onnistumisen suhteellisen frekvenssin välillä kääntäen verrannollisuutta.

Syöttöjen analysointi

1. Ryhmän oppilaiden kaikista syöttöyrityksistä lasketaan suhteelliset frekvenssit maalialueen ohi heittämiseen, isompaan alueeseen osumiseen ja pienempään alueeseen osumiseen.

2. Seuraavaksi ryhmät laskevat teoreettisen ja tilastollisen ehdollisen todennäköisyyden osua pienempään maalialueeseen, jos heitto osuu isompaan maaliin. Oppilaat laskevat myös ehdollisen todenäköisyyden osua isompaan alueeseeen, jos heitto osuu pienempään alueeseen, teoreettisessa ja tilastollisessa tapauksessa.

3. Ryhmät vertaavat laskemiaan teoreettisia ja tilastollisia ehdollisia todennäköisyyksiä laskemalla, kuinka paljon arvot eroavat suhteellisesti toisistaan. Lisäksi oppilaat saavat pohtia, että kokevatko he käytännön ja teorian kohtaavan syöttöjä harjoiteltaessa.

Heittojen onnistumisprosentti

1. Oppilaat laskevat joukkueensa heittoyritysten onnistumisprosentit pelaamissaan otteluissa.

2. Ryhmät vertaavat eri otteluissa tehtyjä korien määriä ja onnistuneiden pelitilanneheittojen suhteellista frekvenssiä.

3. Ryhmäkohtaisesti selvitetään, että onko todennäköisempää onnistua vapaaheitossa vai pelitilanneheitossa. Luokan oppilasmäärästä ja opettajan tahdosta riippuen joko kaikkien ryhmien tarkastelussa vapaaheitot ovat viiden metrin etäisyydeltä heitettyjä tai eräät ryhmät tarkastelevat vapaaheittoja kolmesta metristä, toiset ryhmät neljästä metristä ja loput ryhmät viidestä metristä heitettyinä.

- Jokainen ryhmä kirjoittaa analysoimistaan mittaustuloksista raportin. Raporttiin oppilaat voivat liittää Excel-ohjelmistolla laskettuja taulukoita ja piirrettyjä kuvia.

- Ryhmän tulisi raportissa pohtia ainakin seuraavia asioita:
  - Voidaanko vapaaheittoja tutkittaessa heiton onnistumisen suhteellista frekvenssiä ja heittoetäisyyttä pitää kääntäen verrannollisina suureina?
  - Onko kääntäen verrannollisuutta havaittavissa muuten koripalloon liittyen?
  - Eroavatko lasketut syöttöjen teoreettiset ja tilastolliset ehdolliset todennäköisyydet kummassakaan tapauksessa?
  - Kuinka todennäköistä on pelin aikana onnistua heittämään kori?
  - Onko tilastollisesti todennäköisempää heittää vapaaheitto vai pelitilanneheitto sisään? Onko aina näin?

Taulukot:

Taulukko A.5: Mallipohja vapaaheittojen kirjaamiseen. Koriin sisään mennetty heittoa merkitään lyhenteillä + tai S ja epäonnistunutta heittoa lyhenteillä – tai U.

Etäisyys	1 m	2 m	3 m	4 m	5 m
Yritys	1 2 3 4 5	1 2 3 4 5	1 2 3 4 5	1 2 3 4 5	1 2 3 4 5
A					
B					
C					
D					

Taulukko A.6: Mallipohja, johon täydennetään tarkkuusheittotulokset lyhenteillä E = ei osunut maaliin, OI = osui isompaan alueeseen ja OP = osui pienempään alueeseen.

Oppilas\Yritys	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A										
B										
C										
D										

Taulukko A.7: Mallipohja joukkueiden heittojen kirjaamiseen koripallo-ottelun aikana.

Joukkue	Onnistuneet heitot	Epäonnistuneet heitot
A		
B		
C		
D		

A.5 Taitojalkapalloprojekti

Kohderyhmä: Luokka 7
Esitiedot: –
Taustalla oleva matematiikka: Kokonaisluvut, kokonaislukujen yhteen- ja vähennyslasku, yhdistetyt laskutoimitukset, desimaaliluvut, desimaalilukujen yhteen- ja vähennyslasku ja likiarvot
Ajankäyttö: *Taitokilpailulajeihin tutustuminen kotona:* 45 min, *yhteinen ohjeistus taitokilpailulajeista ja ryhmiin jakautuminen:* 45 min, *taitokilpailulajien kokeileminen ja mittaustulosten hankkiminen:* $2 \cdot 45$ min ja *tulosten analysoiminen ja esittäminen:* $2 \cdot 45$ min.
Opetustilat: Oma luokka ja jalkapallokenttä
Kuvaus projektista:

Taitojalkapallo-projekti toteutetaan 7.-luokkalaisten oppilaiden kanssa. Projekti jakautuu neljään osaan: taitokilpailulajeihin tutustumiseen kotona, yhteiseen ohjeistukseen taitokilpailulajeista ja ryhmiin jakautumiseen koulussa, taitokilpailulajien kokeilemiseen, josta saadaan mittaustulokset, sekä näiden mittaustulosten analysoimiseen ja esittämiseen muille ryhmille.

Taitokilpailulajeihin tutustuminen kotona:

- Oppilaat tutustuvat taitokilpailuihin kotona lukemalla internetistä löytyvät taitokilpailusäännöt.
- Lisäksi oppilaat katsovat mallisuoritukset lajeista.

Yleinen ohejsitus taitokilpailulajeista ja ryhmiin jakautuminen:

- Opettajan ja paikalla olevan asiantuntijan johdolla taitokilpailusäännöt käydään yhdessä tunnilla läpi.
- Oppilaat saavat kysellä vaikeasti ymmärrettävistä asioista asiantuntijalta.
- Opettaja jakaa oppilaat kuuteen heterogeeniseen ryhmään niin jalkapallo- kuin matemaattisilta taidoilta ajateltuna.

Taitokilpailulajien kokeileminen ja mittaustulosten hankkiminen:

- Taitokilpailulajeja kokeillessa yksi ryhmä on tietyllä suorituspisteellä 15 minuutin ajan.
- Ryhmän oppilaat kokeilevat vuorotellen lajia. Muut jäsenet mittaavat suoritusta tekevän oppilaan tuloksen.

- Tulokset kirjataan lajikohtaiseen tuloskorttiin (taulukot A.8, A.9, A.10, A.11, A.12 ja A.13).
- Suoritusajan loppuessa ympyröidään kunkin ryhmäläisen paras tulos ja tuloskortti otetaan mukaan.
- Kaikkia lajeja kokeiltuaan ryhmät palauttavat opettajalle omat tuloskortit, joita on yhteensä kuusi kappaletta.

Tulosten analysoiminen ja esittäminen:

- Opettaja on muodostanut ennen tuntia yhteisen tuloslomakkeen (taulukko A.14), jossa on oppilaiden kaikkien lajien parhaat tulokset kerättynä.
- Kukin ryhmä analysoi jäsentensä tulokset ja yhden yksittäisen lajin tulokset.
- Omien ryhmän jäsenten tulosten analysoinnissa
  1. pyöristetään mittaustulokset yhden desimaalin tarkkuuteen,
  2. määritetään pituuspotkun vähennysekunnit,
  3. lasketaan puskun vähennyssekunnit yhteen,
  4. kuljetus-laukauksen juoksuajasta vähennetään yhteen laskettujen yksittäisten potkujen vähennyssekunnit ja
  5. lasketaan yksittäisistä lajeista muodostuvan taitojalkapallosuorituksen kokonaisaika.
- Yhden yksittäisen lajin tuloksia analysoidessa
  1. lasketaan oppilaiden tulokset yhden desimaalin tarkkuudella,
  2. tulokset järjestetään suuruusjärjestykseen pienimmästä suurimpaan,
  3. järjestetystä aineistosta määritetään mediaani, aritmeettinen keskiarvo ja mahdollinen moodi,
  4. selvitetään lajin vaikeus luokan oppilaille tilastollisia tunnuslukuja hyödyntäen ja
  5. esitetään tehdyt päätelmät muille ryhmille.

Taulukot:

Taulukko A.8: Ponnauttelusuoritusten kirjanpitoon tarkoitettu tuloskortti.

Yritys	Oppilas	Ponnauttelu (s)
1	A	
1	B	
1	C	
1	D	
2	A	
2	B	
2	C	
2	D	
3	A	
3	B	
3	C	
3	D	

Taulukko A.9: Puskusuoritusten kirjanpitoon tarkoitettu tuloskortti.

Yritys	Oppilas	Pusku (s)
		Pusku 1 Pusku 2 Pusku 3
1	A	
1	B	
1	C	
1	D	
2	A	
2	B	
2	C	
2	D	
3	A	
3	B	
3	C	
3	D	

Taulukko A.10: Syöttösuoritusten kirjanpitoon tarkoitettu tuloskortti.

Yritys	Oppilas	Syöttö (s)
1	A	
1	B	
1	C	
1	D	
2	A	
2	B	
2	C	
2	D	

Taulukko A.11: Pujotteluuoritusten kirjanpitoon tarkoitettu tuloskortti.

Yritys	Oppilas	Pujottelu (s)
1	A	
1	B	
1	C	
1	D	
2	A	
2	B	
2	C	
2	D	
3	A	
3	B	
3	C	
3	D	

Taulukko A.12: Kuljetus-laukaus -suoritusten kirjanpitoon tarkoitettu tuloskortti.

Yritys	Oppilas	Kuljetus-laukaus (s)
		Juoksu Vähennys 1 Vähennys 2 Vähennys 3 Vähennys 4
1	A	
1	B	
1	C	
1	D	
2	A	
2	B	
2	C	
2	D	
3	A	
3	B	
3	C	
3	D	

Taulukko A.13: Pituuspotkusuoritusten kirjanpitoon tarkoitettu tuloskortti.

Yritys	Oppilas	Pituuspotku (m)
		Oikea Vasen
1	A	
1	B	
1	C	
1	D	
2	A	
2	B	
2	C	
2	D	
3	A	
3	B	
3	C	
3	D	

Taulukko A.14: Mallipohja taitojalkapallosuoritusten kirjaamiseen.

Oppilas	Ponnauttelu	Pusku	Syöttö	Pujottelu	Kuljetus-laukaus	Pituuspotku
	Aika	1 2 3	Aika	Aika	Juoksu 1 2 3 4	Oikea Vasen
A						
B						
C						
D						
E						
F						
G						
H						
I						
J						
K						
L						
M						
N						
O						
P						
Q						
R						
S						
T						
U						
V						
X						
Y						

A.6 Keihäänheittoprojekti

Kohderyhmä: Luokka 8
Esitiedot: Vertailuprosentti, yhtälön ratkaiseminen ja Pythagoraan lause
Taustalla oleva matematiikka: Energiaperiaate, toisen asteen polynomisovitteet, kulman tangentti sekä ympyrän kaaren pituus ja yhtälö
Ajankäyttö: *Matemaattisten ja fysikaalisten sisältöjen opettaminen ja yleinen ohjeistus:* $3 \cdot 45$ min, *tutkimusryhmän toimintaan tutustuminen:* $2 \cdot 45$ min, *saatujen mittaustulosten analysointi:* $2 \cdot 45$ min ja *tulosten kerääminen, esittäminen ja vertaileminen:* $2 \cdot 45$ min.
Opetustilat: Oma luokka ja Tampereen teknillinen yliopisto
Kuvaus projektista:

Keihäänheittoprojekti jakautuu neljään osaan: matemaattisten ja fysikaalisten sisältöjen opettamiseen ja ohjeistukseen, tutkimusryhmän toimintaan tutustumiseen, tutkimusryhmältä saatujen mittaustulosten analysoimiseen sekä omien tulosten keräämiseen, esittämiseen ja vertailemiseen.

Matemaattisten ja fysikaalisten sisältöjen opettaminen ja yleinen ohjeistus:

- Opettaja jakaa oppilaat 3–4 henkilön ryhmiin vierailua varten.
- Ryhmät keskustelevat keihäänheitosta, jolloin jokainen oppilas saa jonkinlaisen kuvan siitä, millainen laji on kyseessä.
- Ryhmät tutkivat, mitkä asiat tekevät heitosta onnistuneen, ja kirjaavat ylös omia arvioitaan.
- Oppilaat kertaavat projektin kannalta keskeisiä matemaattisia ja fysikaalisia sisältöjä, joita ovat yhtälön ratkaiseminen, Pythagoraan lause, ympyrän kaaren pituus sekä energiaperiaate ja teho, opettajan valitsemalla tavalla.
- Yhtenä mahdollisuutena kertaamisessa voisi olla, että oppilaat täyttäisivät osittain laaditun kertausmonisteen.
- Opettajajohtoisesti tutustutaan tangentin käsitteeseen ja ympyrän yhtälön keskipistemuotoon.

Tutkimusryhmän toimintaan tutustuminen:

- Luokka vierailee Tampereen teknillisellä yliopistolla professori Lauri Kettusen tutkimusryhmän luona.

- Oppilaat tutustuvat älykeihääseen ja muuhun tutkimusryhmän mittauslaitteistoon.
- Oppilaille esitellään tutkimusryhmän kuvaamia heittoja, joista on mitattu numeerista dataa.
- Kullekin ryhmälle jaetaan tutkimusryhmän mittaamia eripituisten heittojen mittaustietoja.

Saatujen mittaustulosten analysointi:

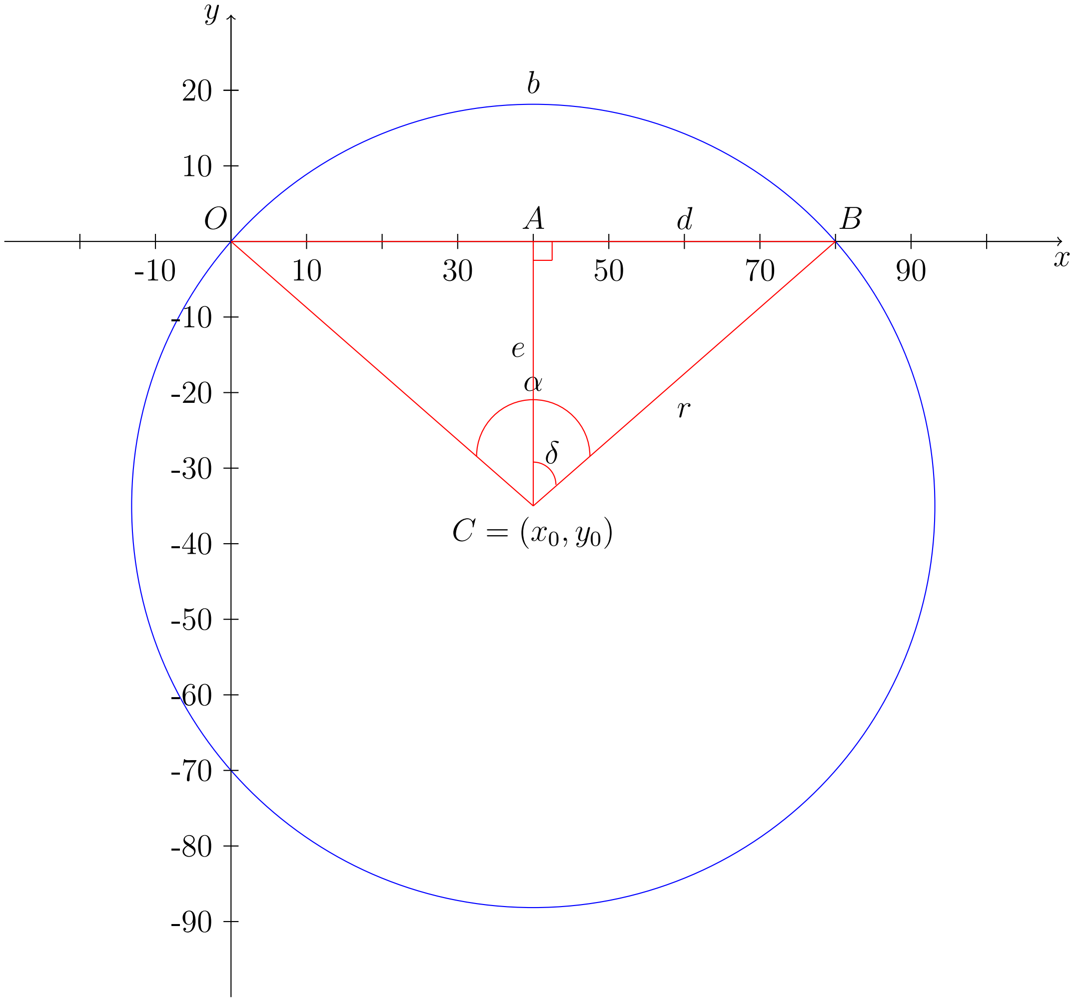
- Jokainen ryhmä selvittää saamiensa mittaustulosten avulla heittäjän keihääseen kohdistaman työn määrän energiaperiaatteella.
- Ryhmät laskevat heiton vetovaiheen tehon ja vertaavat tätä tulosta esimerkiksi sähkökiukaan tehoon.
- Oppilaat määrittävät heiton pituuden l_{heitto} riippuvuuden keihään lähtönopeudesta v_{lahto} ja -kulmasta θ piirtämällä mittapisteet (θ, l_{heitto})- ja (v_{lahto}, l_{heitto})-koordinaatistoon. Näihin mittapisteisiin sovitetaan toisen asteen polynomit.
- Sovitteista oppilaat etsivät ideaalisen lähtökulman heitolle ja heiton pituuden jollain tietyllä keihään lähtönopeudella.
- Ryhmät mallintavat omaa mittausaineistoaan yksinkertaisella ympyrämallilla, kuten kuvassa A.6 tehtiin, ja vastaavat seuraaviin kysymyksiin:
  1. Mikä on ympyrän säde r?
  2. Mikä on keihään lentoa kuvaavaa ympyrän kaarta vastaavan keskuskulman α suuruus?
  3. Mikä on ympyrän kaaren pituus b, eli keihään lentomatka ilmassa? Käyttäkää mahdollisimman tarkkoja välituloksien arvoja.
  4. Kuinka monta prosenttia pitemmän matkan keihäs lentää ilmassa kuin heiton tulos antaa ymmärtää?
  5. Ympyrän kaarta vastaava matemaattinen yhtälö on kuvan A.6 tapauksessa $y = \sqrt{35^2 + 40^2 - (x-40)^2} - 35$, kun $x \in [0, 80]$. Kuinka korkealla käy keihäs lennon aikana enimmillään? Jokaisella ryhmällä on erilaiset yhtälöt, jotka opettaja on laskenut ryhmille valmiiksi, koska heittojen pituudet eivät ole samat.
  6. Ympyräkaarimallissa ei huomioida keihääseen lennon aikana vaikuttavia aerodynaamisia voimia. Mitä aerodynaamisia voimia kohdistuu keihääseen

heiton aikana? Kuinka hyvin ympyrän kaarella heittoa kuvaava malli vastaa todellista heiton lentorataa? Voitte esimerkiksi verrata teoreettista ja todellista keihään maksimikorkeutta sekä keihään nousu- ja laskuvaihetta.

Tulosten kerääminen, esittäminen ja vertaileminen:

- Kukin ryhmä tekee PowerPoint-esityksen, johon kerätään lasketut päätulokset.
- Esityksissä ryhmät myös vertailevat mittaustulosten mukaisen heiton ominaisuuksia ennen vierailua arvioituun hyvään heittoon.
- Ryhmät esittävät tuloksensa toisille ryhmille.
- Lopuksi ryhmät vertailevat saamiaan tuloksiaan ja arvioivat yhdessä, että voidaanko onnistuneelle keihäänheitolle määrittää tiettyjä yleisiä ominaisuuksia.

Kuvat:



Kuva A.6: Keihään lentoradan mallintaminen ympyrän kaarella.