



TAMPEREEN TEKNILLINEN YLIOPISTO

**ESSI NEVALA**  
**TOIMINNALLISUUTTA PERUSKOULUN MATEMATIIKKAAN**  
**BAGDAD-NÄYTTELYSTÄ**

Diplomityö

Tarkastaja: professori Sirkka-Liisa Eriksson  
Tarkastaja ja aihe hyväksytty  
Luonnontieteiden tiedekuntaneuvoston  
kokouksessa 03.06.2015

# TIIVISTELMÄ

TAMPEREEN TEKNILLINEN YLIOPISTO

Teknis-Luonnontieteellinen koulutusohjelma

**ESSI NEVALA: Toiminnallisuutta peruskoulun matematiikkaan Bagdad-näyttelystä**

Diplomityö, 63 sivua, 3 liitesivua

Joulukuu 2015

Pääaine: Matematiikka

Tarkastaja: professori Sirkka-Liisa Eriksson

Avainsanat: Toiminnallisuus, Matematiikan opetus, Matematiikkapelit, Matematiikka-näyttely

Uuden, vuonna 2016 voimaan tulevan, perusopetuksen opetussuunnitelman mukaan matematiikan opettamisessa ja opiskelussa keskeisessä asemassa ovat toiminnallisuus, konkretisointi ja opetusvälineet. Opetussuunnitelmassa mainitaan, että opetuksessa tulee käyttää vaihtelevia työtapoja. Esimerkiksi oppimispelit ja -leikit ovat tärkeitä ja oppilaita motivoivia. Maria Montessori havaitsi jo 1900-luvun alussa toimintavälineiden käytön hyödyllisyyden matematiikan opetuksessa. Montessorin mukaan lapset oppivat ymmärtämään matematiikkaa aivan uudella tavalla kun opetuksessa edetään loogisesti ja käytetään konkreettista havaintomateriaalia. Konkreettisten matematiikkavälineiden tarkoitus on myös herättää lasten mielenkiintoa ja muuttaa negatiiviset asenteet matematiikkaa kohtaan positiivisiksi. Myös unkarilaisessa Varga-Neményi -opetusmenetelmässä käytetään runsaasti apuvälineitä ja toimintamateriaalia. Leikkien ja toiminnallisuuden kautta luodaan jo pienille lapsille pohjaa ja kokemuksia vaikeistakin matematiikan käsitteistä. Myöhemmin tapahtuva abstraktimman tason oppiminen on helpompaa, kun lapsella aikaisempia kokemuksia ja omia tietorakenteita matematiikan osa-alueista.

Tässä työssä kerrotaan keväällä 2013 Tampereella järjestetystä Bagdad - matematiikkanäyttelystä. Näyttely sisälsi toiminnallisia matematiikan aktiviteetteja, tehtäviä, pelejä ja ongelmia. Näyttelyn tavoitteena oli luoda positiivisia matematiikka kokemuksia näyttelyyn osallistuneille oppilaille. Näyttelyyn osallistuneilta oppilailta, opettajilta ja ohjaajilta kerättiin palautetta, jonka pohjalta on arvioitu näyttelyn tavoitteiden onnistumista. Monet opettajat toivoivat, että näyttelyn materiaaleja olisi mahdollista saada koottuna jostakin. Työssä on esitelty suuri osa näyttelyssä olleista tehtävistä, peleistä ja pulmista. Työn tavoitteena on tuoda ideoita peruskoulun matematiikan toiminnalliseen opetukseen Bagdad-näyttelyn matematiikasta.

## ABSTRACT

TAMPERE UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

Master's Degree Programme in Science and Engineering

**ESSI NEVALA : Functional mathematics for comprehensive school inspired by Bagdad exhibition**

Master of Science Thesis, 63 pages, 3 Appendix pages

December 2015

Major: Mathematics

Examiner: Professor Sirkka-Liisa Eriksson

Keywords: Functionality, Mathematics teaching, Mathematical games, Mathematics exhibition

According to the new Finnish comprehensive school curriculum that will come into force during 2016 functionality, concretization or bringing concepts into reality, and teaching equipment play a central role in the teaching and learning of mathematics. The curriculum states that varying working methods must be applied to teaching. Learning games and play, for example, are important and motivate the pupils. At the beginning of the 20th century the Italian educator Maria Montessori already witnessed the usefulness of functional equipment in the teaching of mathematics. According to Montessori, children learn to understand mathematics in an entirely new way when teaching proceeds logically and makes use of concrete observational material. The purpose of this tangible mathematical equipment is also to awaken children's interest and to change negative attitudes towards mathematics into positive ones. In addition, the Varga-Neményi teaching method, which originated in Hungary, employs an abundance of assisting equipment and material for activities. As a result, small children can create a foundation and gain experiences of even difficult mathematical concepts through play and activities. More abstract learning, which occurs at a later age, becomes easier when children have previous experience and own information structures concerning the various subdivisions of mathematics.

This thesis focuses on the Bagdad mathematics exhibition that was organized during spring 2013 in the city of Tampere, Finland. The exhibition contained functional mathematical activities, puzzles, games and problems. The objective in Bagdad was to create positive experiences of mathematics to the pupils who visited the exhibition. Feedback was gathered from the participating pupils, teachers and tutors. Success in achieving the goals of the exhibition was evaluated on the basis of this feedback. Several teachers wished that it would be possible to gain access to the set of material introduced in the exhibition, which is why this thesis presents most of the puzzles, games and dilemmas that were on display. Thus, the main goal of this thesis is to bring available new ideas into the functional teaching of comprehensive school mathematics from the concepts presented in the Bagdad exhibition.

## ALKUSANAT

Tämä työ on tehty Tampereen teknillisen yliopiston matematiikanlaitokselle. Diplomityöni aiheen saatuani pääsin työskentelemään ohjaajana Bagdad - matematiikanäyttelyssä, mikä oli mielenkiintoinen ja opettavainen kokemus. Olen iloinen siitä, että työni kautta pääsin mukaan Tampereen LUMATE-keskuksen toimintaan. Diplomityöni on tuonut minulle uusia näkökulmia matematiikan opettamiseen ja oppimiseen.

Haluan kiittää diplomityöni tarkastajaa professori Sirkka-Liisa Erikssonia. Kiitokset erityisesti mielenkiintoisesta aiheesta, jossa pääsin yhdistämään matematiikkaa sekä kasvatustieteitä. Lisäksi haluan kiittää Bagdad-näyttelyn ohjaajina toimineita työkavereitani palautteiden keräämisestä ja kirjoittamisesta. Kiitokset kuuluvat myös perheelleni ja ystävilleni kärsivällisyydestä ja tukemisesta opiskelujeni aikana.

Tampereella 17.11.2015

Essi Nevala

# SISÄLLYS

1. Johdanto . . . . .	1
2. Toiminnallisuus matematiikassa . . . . .	3
2.1 Yleistä matematiikan didaktiikasta . . . . .	3
2.2 Montessori pedagogiikka . . . . .	4
2.3 Varga-Nemenyi-opetusmenetelmä . . . . .	6
2.4 Kielentäminen . . . . .	7
2.5 Ongelmanratkaisu ja pelit . . . . .	9
3. Toiminnallisuus opetussuunnitelmassa . . . . .	11
3.1 Opetussuunnitelmaan liittyviä käsitteitä . . . . .	11
3.2 Perusopetuksen opetussuunnitelma . . . . .	12
4. Toiminnallinen matematiikka käytännössä . . . . .	14
4.1 LUMA-keskukset . . . . .	14
4.2 Matikkamaat . . . . .	16
4.3 Aikaisemmat tutkimukset . . . . .	17
5. Matematiikkanäyttely . . . . .	20
5.1 Näyttelyn tausta . . . . .	20
5.2 Ohjaajat . . . . .	21
5.3 Osallistujat . . . . .	21
5.4 Näyttelytila . . . . .	22
5.5 Vierailun kulku . . . . .	22
5.5.1 Ohjaajien roolit . . . . .	22
5.5.2 Näytelmä johdanto . . . . .	24

5.5.3	Alkutehtävät . . . . .	26
5.5.4	Näyttelyyn tutustuminen . . . . .	28
5.5.5	Lopputehtävät . . . . .	29
5.5.6	Kysymyksiä ja palautetta . . . . .	31
5.6	Palaute . . . . .	31
5.6.1	Millaisia ryhmät olivat . . . . .	32
5.6.2	Alkunäytelmän sopivuus . . . . .	33
5.6.3	Suosittu tehtävät . . . . .	34
5.6.4	Mitä uutta opittiin . . . . .	39
5.6.5	Mikä oppilaiden mielestä ei liittynyt matematiikkaan . . . . .	40
5.6.6	Opettajien ajatuksia näyttelystä . . . . .	41
5.6.7	Opettajien saamat ideat omaan opetukseen . . . . .	43
6.	Toiminnallisia tehtäviä matematiikan opiskeluun . . . . .	45
6.1	Geometria . . . . .	45
6.2	Luvut ja laskutoimitukset . . . . .	47
6.3	Todennäköisyys . . . . .	51
6.4	Ongelmanratkaisu . . . . .	52
7.	Pohdintaa toiminnallisesta matematiikasta . . . . .	58
	Lähteet . . . . .	60
A.	Liitteet . . . . .	64
A.1	Oppilaiden palautelomake . . . . .	64
A.2	Opettajien palautelomake . . . . .	65
A.3	Ohjaajien palautelomake . . . . .	66

# 1. JOHDANTO

Monelle ihmiselle sanasta matematiikka tulee varmasti ensimmäisenä mieleen laskeminen. Laskeminen on konkreettinen jokapäiväisessä elämässä tarvittava asia. Numerot ja helpot laskutehtävät ovat myös ensimmäinen asia, mitä koulussa matematiikasta opitaan. Numerot ja laskeminen ovat kuitenkin vain pieni osa matematiikkaa. Matematiikka on näiden lisäksi muun muassa loogisia kokonaisuuksia, geometriaa, hahmottamista, luovaa ajattelua ja ongelmanratkaisua.

Opetussuunnitelman mukaan oppilaita tulee kannustaa kehittämään luovia ratkaisuja. Usein koulun matematiikan tunneilla opetetaan valmiit ratkaisumallit. Kaavojen ulkoa opettelu ei kuitenkaan tue matematiikan ymmärtämistä. Jos oppilas pystyy keksimään ongelmaan luovan ratkaisutavan, hän on todennäköisesti ymmärtänyt tehtävästä hieman enemmän. Oppilaat, opettajat ja opetustavat ovat erilaisia. Kaikkea ei millään ehdi, jaksa tai osaa tehdä, mutta jos välillä poikkeaa rutiineista ja yrittää keksiä jotain uutta ja kivaa, on siitä varmasti hyötyä niin opettajalle kuin oppilaillekin. Olisi hienoa, jos matematiikan tunneilla jäisi nykyistä enemmän aikaa motivoinnille, innostamiselle ja matematiikan syvällisemmälle ymmärtämiselle.

Erilaiset pelit ja ongelmanratkaisutehtävät ovat hauska lisä matematiikan tunneille. Ne tuovat vaihtelua ja voivat olla oppilaiden huomaamatta hyvin opettavaisia. Ongelmanratkaisutehtävät eivät ratkea niin helposti ja suoraviivaisesti kuin perusmatematiikan tehtävät, joihin oppilaat ovat tottuneet. Oppilaiden pitää ajatella luovasti ja soveltaa osaamiaan asioita. Ongelmanratkaisutehtävät sopivat oppituntien kevennyksiksi ja välipaloiksi, mutta niiden avulla voidaan myös opettaa käsiteltävää asiaa. Arkipäivän ongelmat eivät ole suoraviivaisia ja helppoja, joihin voidaan suoraan käyttää jotakin tiettyä kaavaa, vaan ne ovat omanlaisiaan ongelmanratkaisutehtäviä. Siksi oppilaille on hyvä koulussa opettaa luovaa ajattelua ja taitoa nähdä asiat ja ongelmat monelta suunnalta.

Luovaa ajattelua ja innostusta matematiikkaa kohtaan pyrkii lisäämään ruotsalaisen tiedekeskus Navetin tuottama matematiikkanäyttely, Bagdad - matematiikkaa tääl-

tä ikuisuuteen, joka vieraili Tampereella museokeskus Vapriikissa 11.4.-31.5.2013. Näyttelyä varten oli koottu erilaisia pelejä, esineitä, tehtäviä ja pulmia, joiden tarkoituksena on tuoda esiin uusia puolia matematiikasta ja osoittaa, että matematiikkaa on kaikkialla ympärillämme.

Matematiikkanäyttelyn monet pelit ja tehtävät ovat sellaisinaan sopivia matematiikan tunneille eri aihealueisiin. Tehtäviä löytyy esimerkiksi geometriaan, lukuihin, laskutoimituksiin, todennäköisyyteen ja ongelmanratkaisuun. Lisäksi osa tehtävistä on sopivia oppiaineiden väliseen integraatioon esimerkiksi kuvaamataidon tunteihin saadaan helposti ja hauskaasti yhdistettyä matematiikkaa geometrian ja symmetrian keinoin.



## 2. TOIMINNALLISUUS MATEMATIIKASSA

### 2.1 Yleistä matematiikan didaktiikasta

Jokaiselle muotoutuu kokemustensa pohjalta oma käsityksensä siitä, mitä matematiikka on. Matemaattinen ajattelu koostuu esimerkiksi luokittelusta, järjestämisestä, analogioiden muodostamisesta, deduktiivisesta ja induktiivisesta päättelystä sekä ongelmanratkaisutaidoista. (Ahtee & Pehkonen 2000, s.19) Valtaosa ihmistä pitää matematiikkaa vain laskemisena ja puolustavat perinteisiä tapoja opettaa matematiikkaa kouluissa. Matemaatikoiden mielestä laskeminen on vain työkalu ja varsinaiseen matematiikkaan sisältyy ongelmanratkaisua sekä rakenteiden ja hahmojen ymmärtämistä. (Bransford & Brown Cocking 2004, s.184) Moni opiskelee matematiikkaa, koska sitä voidaan käyttää ongelmien ratkaisemiseen monilla eri tieteenaloilla ja monissa eri tilanteissa. (Berry & Sahlberg 1995, s.31)

Yhteiset oppimiskokemukset muokkaavat käsityksiä samansuuntaisiksi, mutta yksilöiden välillä on eroja. Käsitykset matematiikasta vaikuttavat motivaatioon, kiinnostukseen ja arvostukseen oppiainetta kohtaan. Näkemykset vaikuttavat oppilaiden ja opettajien toimintaan oppitunneilla muun muassa siinä, miten he siirtävät omaa arvostustaan oppiainetta kohtaan toisille. (Ahtee & Pehkonen 2000, s.32) Matematiikan uskotaan usein olevan oppiaine, jolla on hyvin vähän tai ei ollenkaan yhteyksiä todellisuuteen. Uskomuksilla on huomattava merkitys oppilaan oppimisen kannalta. Jos oppilas kokemuksiansa perusteella uskoo esimerkiksi, että matematiikka on pelkkää laskemista, on hänen hyvin vaikea lähteä ratkaisemaan erilaista ajattelua vaativaa ongelmanratkaisutehtävää. (Ahtee & Pehkonen 2000, s.40-41)

Konstruktivismi korostaa oppilaiden aikaisempien tietorakenteiden merkitystä oppimisessa. Oppiminen ei tapahdu pelkästään kuuntelemalla, näkemällä tai tuntemalla vaan se tapahtuu yksilön kehityksen ja kokemusten pohjalta kehittyneiden ajattelurakenteiden avulla. Oppilaat konstruoivat käsityksensä tapahtumista ja ilmiöistä omien kokemustensa ja aikaisemmin konstruoimiensa mallien perusteella. Oppiminen riippuu oppimisympäristöstä, tiedon luonteesta, oppilaiden aikaisemmista tiedoista ja siitä mitä oppilaat haluavat oppia. Oppiminen on aktiivista rakentamista,

tietojen tarkentamista ja uudelleen muotoilua. (Berry & Sahlberg 1995, s.22)

Havainnollistaminen on tärkeää opetettaessa matematiikan abstrakteja käsitteitä. Tavoitteena on erilaisten välineiden ja piirrosten avulla konkretisoida opetettavaa asiaa, kiinnittää huomiota keskeisiin yksityiskohtiin sekä antaa asioista monipuolinen kuva. Konkreettisuudessa työskentelyssä oppilas itse tutkii ja käyttää konkreettisia apuvälineitä tutustuessaan oppimisen sisältöihin. Konkreettinen työskentely luo pohjaa syvemmälle oppimiselle. Työskentely voi tapahtua luokassa muun oppimisen tapaan tai oppimisvälineiden kanssa työskentelyyn voi olla järjestetty erillinen tila koulussa tai luokassa. Konkreettinen työskentely on osa oppilaille luontaista toiminnallisuutta. Lasten oppiminen tapahtuu varsinkin aluksi vahvasti konkreettisten asioiden avulla. Erityisesti alakoululaiset tarvitsevat konkreettista työskentelyä, mutta myös iso osa yläkoululaisista saattaa olla konkreettisen tuen tarpeessa. Liika havainnollistaminen saattaa kuitenkin haitata abstraktin ajattelun kehitystä, joten opettajan tulee tarkoin harkita käytettäviä välineitä. (Ahtee & Pehkonen 2000, s.47-48)

Opetuksessa usein käytetyt tehtävät ovat niin sanottuja suljettuja tehtäviä, joissa alku- ja lopputilanne on yksikäsitteisesti määritelty. Oppilaan tehtävänä on löytää tapa päästä alkutilanteesta lopun ratkaisuun. Avoimet tehtävät sen sijaan ovat lähempänä arkielämän ongelmia, koska niissä alku- ja lopputilanne sisältävät useita eri vaihtoehtoja. (Ahtee & Pehkonen 2000, s.61) Sen sijaan, että keskitytään vain laskutoimituksiin, pitää oppilaita rohkaista keksimään omia strategioitaan tehtävien ratkaisemiseksi ja keskustelemaan muiden kanssa siitä miksi juuri nämä strategiat toimivat. (Bransford & Brown & Cocking 2004, s.192)

Historiallinen lähestyminen auttaa oppilaita saamaan syvällisemmän ja aidomman käsityksen käsitteiden ja teorioiden kehittymisestä ja jatkuvasta muokkautumisesta. Historiallinen työtapana, jossa nähdään matematiikan vaikutus yhteiskunnan kehitykseen, saattaa myös innostaa ja motivoida oppilaita. (Ahtee & Pehkonen 2000, s.66)

## 2.2 Montessori pedagogiikka

Montessorilaisen kasvatustieteen perustaja, Maria Montessori, syntyi Italiassa vuonna 1870. Jo ensimmäisinä kouluvuosina Montessori kiinnostui matematiikan opiskelusta. Montessori opiskeli fysiikkaa, matematiikkaa ja luonnontieteitä pojille tarkoitettussa teknisessä koulussa. Hän opiskeli myös lääketiedettä ja valmistui lääketieteen ja kirurgian tohtoriksi, ensimmäisenä naisena Italiassa. Lääkäri työssään Montes-

sori kiinnostui hermoston ja mielenhäiriöistä. Hän työskenteli henkisesti jälkeenjääneiden lasten parissa ja kiinnitti erityistä huomiota lapsia ympäröiviin olosuhteisiin. Tutkittuaan asiaa Montessori vakuuttui siitä, että lasten oppiminen oli pedagoginen, ei lääketieteellinen ongelma. Montessori halusi perehtyä asiaan tarkemmin ja alkoi opiskella kasvatustiedettä. (Hayes & Höynälänmaa 1985, s.11-13)

Montessori sai vuonna 1907 tilaisuuden työskennellä normaalilasten parissa Rooman San Lorenzon slummiin perustetun koulun johtajana. Tuona aikana Montessorilla oli mahdollisuus kehittää ja testata kasvatustieteen menetelmäänsä. Vuonna 1909 järjestettiin ensimmäinen Montessorin menetelmään ja filosofiaan perustuva opettajan koulutus. Montessori omistautui loppuiäkseen pedagogisten ajatustensa levittämiseen. Hän kuoli vuonna 1952. (Höynälänmaa 2011, s.172-173) Suomeen ensimmäiset Montessori-koulut perustettiin 1980. (Hayes & Höynälänmaa 1985, s.7)

Montessorin oman kouluajan opiskelu oli pääasiassa ulkoa opettelua, istumista pulpeteissa ja oppikirjojen tutkimista. Omana opiskeluaikanaan Montessori oppi, miten koulua ei tulisi pitää. Koulussa ei tuolloin välitetty Montessori-pedagogiikan hallitsevista piirteistä eli oppimishalusta ja itsenäisestä ajattelukykyä. (Hayes & Höynälänmaa 1985, s.11-12) Montessori-koulussa lapsi on toiminnan päähenkilö. Lapsi saa itse valita tehtävänsä ja liikkua mielensä mukaan. Lapsia ohjataan yksilöinä ja tällaisessa vapaamassa oppimisympäristössä lapsi saa kehittyä omien kykyjensä ja motivaationsa mukaan. (Hayes & Höynälänmaa 1985, s.7) Kolme tärkeintä ulkoista asiaa lapsen oppimisen kannalta ovat Montessorin mukaan sopiva ympäristö, vaatimaton opettaja ja tieteellisesti koetellut välineet. (Montessori 1983, s.112)

Montessorin mukaan lapsen kasvussa ja kehityksessä ilmenee herkkiksi kausiksi kutsumia vaihteita. Herkkyys on erityislaatuista ja sitä esiintyy kehittymistilassa olevissa olennoissa eli lapsuusiässä. Vaiheet rajoittuvat määrätyn ominaisuuden hankkimiseen ja kehittymiseen. Kun tuo ominaisuus on kehittynyt valmiiksi, herkkyyksikausi loppuu. Kasvu on työtä, jota ohjaavat yksityiskohtaisesti ajoittaiset vaistot ja jokainen ominaisuus vakiintuu ohimenevän mahdollisuuden ja virikkeidensä varassa. (Montessori 1983, s.26)

Montessorin didaktisen materiaalin käytön tarkoitus on johtaa kognitiiviseen kehitykseen. Montessori kehitti opetusvälineistöä ja menetelmiä tekemällä tarkkoja havaintoja lapsista. Opetusvälineet sijoitettiin avohyllylle, jotta lapset pääsivät tutkimaan niitä itsenäisesti. Vapaavalintainen työskentely johti hyviin oppimistuloksiin. (Höynälänmaa 2011, s.174) Montessorin mukaan älyyn liittyvät motoriset kyvyt ovat puhekieli ja käsien toiminta, joka muuttaa älyn todellisuudeksi. (Montessori

1983, s.61) Lapset kehittävät älyään oman työnsä kautta. He tarvitsevat erityisesti kehitettyjä konkreettisia välineitä, koska käsillä työskentelyn avulla lapsi ajattelee, päättelee ja ratkaisee. (Hayes & Höynälänmaa 1985, s.80)

Opettajalla on tärkeä rooli lapsen kehityksessä ja oppimisessa. Lasta vetävät puoleensa ennen kaikkea aikuisten teot, jotka lapsi haluaa ymmärtää ja toistaa niitä. Siksi aikuisen on tärkeä toimia rauhallisesti ja hitaasti, jotta lapsi ehtii tajuta aikuisen toiminnan kaikki yksityiskohdat, joiden pohjalta lapsi voi kehittää omaa persoonallisuuttaan. Lapsille kuitenkin usein neuvotaan liian täsmällisesti, miten jokin harjoitus on suoritettava, jolloin lasten kyky arvostella ja toimia oman persoonallisuutensa mukaan lamaantuu. Aikuisen tehtävänä on toimia esimerkkinä ja opastajana, mutta kannustaa lasta itsenäiseen työskentelyyn. (Montessori 1983, s.70-72) Montessorin mukaan opettajan tavoite on lisätä lapsen aktiivisuutta poistamalla esteitä lapsen itsenäisen toiminnan ja oman määräysvallan tieltä. Lapsen persoonallisuuden kunnioitus on tärkeää, joten opettajan tulee olla tyytyväinen huomattessaan lapsen toimivan ja kehittyvän omin neuvoin. (Montessori 1983, s.79)

Monien kokema vastenmielisyys matematiikkaa kohtaan ei Montessorin mukaan johdu vain siitä, että heidän on vaikea käsittää matematiikkaa, vaan myös lapsena mieleen rakennetuista raja-aidoista. Ylitsepääsemätön este voi nousta mieleen jo pelkästään matematiikan nimen kuulemalla. Tuon henkisen raja-aidan vuoksi ihminen väsyä ennen kuin on edes yrittänyt tehtävien tekemistä. (Montessori 1983, s.129) Lapset oppivat ymmärtämään matematiikkaa aivan uudella tavalla kun opetuksessa edetään loogisesti ja käytetään konkreettista havaintomateriaalia. Montessorimatematiikassa tarkoitus on, että lapsi oivaltaa asioita oman työskentelynsä kautta. Montessori-kouluissa on paljon matematiikan välineitä, jotta asioita voidaan lähestyä monilta eri puolilta täydellisen ymmärryksen saavuttamiseksi. Konkreettisten matematiikkavälineiden tarkoitus on myös herättää lasten mielenkiintoa matematiikkaa kohtaan ja muuttaa negatiiviset ajatukset matematiikkaa kohtaan positiivisiksi. (Hayes & Höynälänmaa 1985, s.111-113)

### 2.3 Varga-Neményi-opetusmenetelmä

Varga-Neményi -opetusmenetelmän ovat kehittäneet unkarilaiset Tamás Varga ja Eszter C. Neményi. Neményi valmistui vuonna 1968 matematiikan aineenopettajaksi Budabestin yliopistosta. Jo opiskeluaikana Neményi tutustui unkarilaisen matemaatikon ja opetuksen kehittäjän Tamás Vargan ajatuksiin matematiikan opetuksen uudistamisesta. Vargalla oli meneillään opetuskokeiluita, joilla hän tähtäsi

unkarilaisen matematiikan opetuksen kehittämiseen uusien oppimateriaalien ja opetusmenetelmien avulla. Neményi osallistui Vargan aloittamaan opetusmenetelmän kehittämiseen ja syntyi Varga-Neményi menetelmä, joka on yksi Unkarissa käytetyistä opetusmenetelmistä. (Lampinen & Korhonen 2010, s.18-19)

Varga-Neményi-opetusmenetelmässä käsitteiden oppimisen perustana ovat oppilaan aikaisemmat kokemukset, joita voivat olla esimerkiksi arjen tilanteet, pelit tai leikit. Tämä on niin sanotun abstraktion tien ensimmäinen vaihe, josta pyritään kohti matematiikan abstraktimpaa tasoa. Abstraktion tasoa nostetaan vähitellen. Opetuksessa otetaan ensin käyttöön toimintavälineet ja -materiaalit, sitten kuvat ja piirroksot. Viimeisessä vaiheessa aihetta käsitellään symbolein esimerkiksi lukujen ja matemaattisten merkkien avulla. (Ikäheimo & Risku 2004, s.231-233)

Menetelmän mukaan oppiminen tapahtuu koko keholla ja kaikilla aisteilla. Visuaalisia kokemuksia oppilas saa katsellessaan ympärillään olevia ihmisiä, tilaa, esineitä ja kuvia. Kuuloaistiin perustuvat harjoitukset toimivat yleensä parhaiten, kun opettaja pyytää oppilaita sulkemaan silmänsä. Toimintamateriaalin käyttö tuo mukaan tuntoaistin sekä kehon liikkeitä. Työskennellessä oppilas voi esimerkiksi tunnustella, askarrella, rakentaa, järjestää tai liikkua. Yhteistyö ja keskustelu vahvistavat myös käsitteen muodostusta. (Varga-Neményi ry 2015)

Varga-Neményi -opetusmenetelmässä käytetään runsaasti apuvälineitä ja toimintamateriaalia. Jokaisella lapsella tulisi olla mahdollisuus toiminnallisuuteen ja kokemusten hankkimiseen, joten opetusvälineitä tulee olla riittävästi. Leikkien ja toiminnallisuuden kautta luodaan jo pienille lapsille pohjaa ja kokemuksia vaikeistakin matematiikan käsitteistä. Myöhemmin tapahtuva abstraktimman tason oppiminen on helpompaa, kun lapsella aikaisempia kokemuksia ja omia tietorakenteita matematiikan käsitteistä. (Ikäheimo & Risku 2004, s.231-233)

## 2.4 Kielentäminen

Matematiikan opetuksen tehtävä on opetussuunnitelman mukaan opettaa käyttämään puhuttua ja kirjoitettua matematiikan kieltä sekä kehittää laskemisen ja ongelmien ratkaisemisen taitoja. Matematiikan opetustilanteet järjestetään niin, että ne herättävät opiskelijan tekemään havaintojensa pohjalta kysymyksiä, oletuksia ja päätelmiä sekä perustelemaan niitä. Opetussuunnitelman mukaan opiskelijaa tulisi kannustaa kehittämään kokeiluja ja luovia ratkaisuja matemaattisiin ongelmiin sekä kehittää opiskelijan tiedonhankintaprosesseja. (Opetushallitus 2004, s.118) Ryhmätyöskentely ja matematiikan kielentäminen tukevat näitä opetussuunnitelmassa

asetettuja tavoitteita.

Jorma Joutsenlahti on tutkinut matematiikan kielentämistä, jolla tarkoitetaan matematiikan ilmaisemista kielen avulla joko suullisesti tai kirjallisesti. Kielentäminen on hyödyllistä, koska se auttaa jäsentämään omaa ajattelua sekä tuo opiskelijan ajatuksia näkyväksi myös muille. Yleensä oppiskelijat ratkaisevat matematiikan tehtävät vain käyttäen matemaattisia lausekkeita ja symboleita ilman sanallisia perusteluita. Ulkopuolisen on usein vaikea ymmärtää ajatusta ratkaisun taustalla. Opiskelijoita tulisikin kannustaa kirjoittamaan tehtäviin myös perusteluita. Käsitteen muodostuksessa kielentäminen pakottaa opiskelijan pohtimaan käsitteen keskeisiä sisältöjä ja jäsentämään ajatteluaan. Ryhmässä voidaan keskustelun avulla verrata ajatuksia ja käsityksiä aiheesta ja muokata sekä omia että toisten käsityksiä perustelluilla argumenteilla. (Joutsenlahti 2003)

Anna-Maija Partanen on tehnyt väitöskirjan tutkivasta pienryhmätyöskentelystä differentiaalilaskennan kurssilla. Tavoitteena oli, että opiskelijat muodostavat raja-arvon ja derivaatan käsitteitä tutkimuksen ja keskustelun avulla. Opettaja pohjusti käsiteltäviä aiheita, jonka jälkeen opiskelijoille annettiin kysymyksiä ja ongelmia ratkaistavaksi yhdessä toisten kanssa pienissä ryhmissä. Kurssilla sovittiin, että vaikka yleensä matemaattiset ongelmat tulee perustella käyttäen matemaattisia lausekkeita ja symboleita, niin tällä kurssilla myös graafiset perustelut ovat sallittuja. Näin kannustetaan oppilaita keksimään omia ratkaisuja ja kehittämään oma lähestymistapa käsiteltävään asiaan. Oppilailla oli kurssin aikana tehtävänä pitää oppimispäiväkirjaa, mikä myös tuki matematiikan kielentämistä.

Partasen mukaan pienryhmätyöskentelyssä oppimismahdollisuuksien syntymistä edistivät omien ajatusten ilmaiseminen, toisten kuunteleminen, yhteisymmärrykseen pyrkiminen, toisaalta myös erimielisyyden osoittaminen, kysyminen, ongelmien lähestyminen luovasti ja syvällisesti, opettajan kanssa keskustelu ja omien väitteiden perustelu. Oppimismahdollisuuksia esti kun oppilaat eivät toimineet yhteistyössä, erimielisyyksiä ei osoitettu eikä väitteitä perusteltu. Keskustelut saattoivat myös mennä väittelyksi tai kilpailuksi tai poiketa käsitelystä asiasta. Väitöskirjassaan Partasen tavoitteena ei ollut vertailla pienryhmätyöskentelyä ja tavallisia opetusmenetelmiä keskenään vaan tavoitteena oli pohtia opettajaa oman työnsä kehittäjänä luomalla uudenlaisia opetusmenetelmiä. (Partanen 2011)

Sekä Joutsenlahti että Partanen kuitenkin toteavat, että matematiikan opetuksen tavat ovat Suomessa hyvin vakiintuneet, joten uusien kokeilujen ja toimintatapojen tuominen oppitunneille on vaikeaa. Partasen mukaan opiskelijoiden on vaikea

omaksua uutta tapaa muodostaa itse käsitteitä kun tavallisesti matematiikan tehtävät pyritään ratkaisemaan valmiisiin määritelmiin ja ominaisuuksiin perustuen. Usein tehtävien ratkaisut ovat sellaisia, että tehtävissä on yksi ratkaisutapa, joka on nopein ja helpoin. Sekä opettajalle että opiskelijoille on haaste kelpuuttaa myös erilaiset ratkaisutavat, vaikka ne olisivatkin hyvin perusteltuja. Ryhmätyöskentely ja matematiikan ääneen puhuminen vaatii oikeanlaisen oppimisympäristön, jossa opiskelijat uskaltavat ilmaista ajatuksensa ja voivat olla myös väärässä.

## 2.5 Ongelmanratkaisu ja pelit

Ongelmanratkaisun keskeinen tehtävä on harjoittaa ja kehittää ajattelutaitoja. Oppilas hankkii, käsittelee ja konstruoi tietoa aktiivisesti, eikä vain passiivisesti vastaanota opettajan jakamaa tietoa. Ongelmanratkaisu kehittää oppilaiden luovuutta ja soveltamistaitoja. (Koponen 1995, s.159-160) Ongelmanratkaisun lisääminen opetukseen on hyödyllistä, koska se kehittää tutkimisen, arvioimisen ja vuorovaikutuksen taitoja. Ongelmanratkaisu auttaa ymmärtämään matematiikan merkityksen yli tieteen rajojen ja kehittää taitoa lähestyä asioita monesta eri näkökulmasta. Sen avulla matematiikkaa saadaan liitettyä arkipäivän tilanteisiin. Ongelmanratkaisun käyttäminen opetuksessa auttaa eriyttämään opetusta kaiken tasoille oppilaille sopivaksi. Avoimet ongelmanratkaisutehtävät tarjoavat mahdollisuuden eriyttää opetusta, koska oppilaat voivat edetä omien taitojensa ja kykyjensä mukaan. (Berry & Sahlberg 1995, s.70-71) Luova ongelmanratkaisu pyrkii muuttamaan vanhoja ajattelutapoja ja asenteita joustaviksi ja vastaanottavaisiksi. Ratkaisuun ei aina päädytä tuttuja menetelmiä käyttämällä vaan yhdistelemällä ja kokeilemalla erilaisia tapoja ja ideoita. (Ahtee & Pehkonen 2000, s.51)

Lapset ovat luonnostaan uteliaita ja kehittävät itse kysymyksiä ja ongelmia. He pyrkivät löytämään ongelmiin ratkaisun ja etsimään uusia haasteita sinnikkäästi, koska onnistuminen ja ymmärtäminen ovat itsessään motivoivaa. (Bransford & Brown & Cocking 2004, s.261) Lapset ovat siis luonnostaan ongelmanratkaisijoita, mutta tutkimukset osoittavat, että kouluopetus ei tue tällaisia taitoja. Oppilaat eivät usein edes tunnista ongelmatilannetta, eivätkä halua ratkaista ongelmatehtäviä. (Haapasalo 2004, s.86-87 )

Opettajalla on tärkeä rooli näyttää esimerkkiä, kuinka ongelmatehtävät kohdataan ja kuinka niitä ratkaistaan. Ongelmanratkaisun opettaminen on sitä, että tuetaan oppilaan ongelmanratkaisutaitojen kehittymistä. Opettaja auttaa oleellisimmissa kohdissa. Oppilaan omien taitojen kehittyessä opettajan rooli pienenee ja oppilaalle annetaan tilaa omaan toimintaan. (Haapasalo 2004, s.86-87 )

Ongelmanratkaisun ei pitäisi olla vain irrallinen, ylimääräinen lisä matematiikan opiskelussa, vaan sitä tulisi lisätä sujuvasti opetukseen. Matematiikasta tulee oppilaille käyttökelpoisempaa ja mukavampaa ongelmanratkaisun avulla. Vaikka ongelmanratkaisun opettelussa on paljon hyviä puolia, on se kuitenkin vain osa matematiikan opetusta. Oppilaat tarvitsevat kunnolliset perustiedot ja taidot matematiikan käsitteistä ja laskutaidosta ratkaistakseen matemaattisia ongelmia. Opetusmenetelmien tulisi siis olla monipuolisia. (Berry & Sahlberg 1995, s.9)

Monipuolisuutta matematiikan opettamiseen ja oppimiseen saadaan erilaisista matematiikkaan liittyvistä peleistä. Oppimispelien avulla voidaan tehdä mekaaninen harjoittelu ja kertaaminen kiinnostavammaksi. Pelien avulla hyvien oppilaiden on mahdollista osoittaa, mitä ovat oppineet, ja hitaammat oppilaat voivat saada apua vaikeuksiinsa. Pelit voivat myös edistää myönteisiä ajatuksia matematiikkaa kohtaan. (Ahtee & Pehkonen 2000, s.55 )



## 3. TOIMINNALLISUUS OPETUSSUUNNITELMASSA

### 3.1 Opetussuunnitelmaan liittyviä käsitteitä

Kirjoitettu opetussuunnitelma kertoo, mitä tulisi opettaa. Siihen on kirjoitettu keskeiset opetuksen tavoitteet, toimenpiteet ja järjestelyt, joilla pyritään koulukasvatukselle asetettuihin päämääriin. Peruskoulun ja lukion opetussuunnitelman perusteet on valtakunnallinen kirjoitettu opetussuunnitelma. Kunnallisessa opetussuunnitelmassa otetaan huomioon kunnan ja koulujen käytettävissä olevat resurssit. Jokainen koulu laatii kunnan opetussuunnitelman pohjalta vuosittain koulun oman työsuunnitelman eli koulun tasolla tarkoitettua opetussuunnitelmaa. Opettaja taas laatii valtakunnallisten ja koulukohtaisten ohjeiden pohjalta toimeenpantavan opetussuunnitelman, jolla tarkoitetaan opetustilanteissa tehtäviä asioita ja työskentelytapoja. (Ahtee & Pehkonen 2000, s.21)

Toteutuneella opetussuunnitelmalla tarkoitetaan opettajan toimeenpanemaa opetussuunnitelmaa, joka sisältää opetetun aiheen lisäksi oppimistulokset eli tiedot, taidot ja asenteet. Koetussa opetussuunnitelmassa tarkastellaan opetusta oppilaan näkökulmasta. Oppilaan kokemaan opetussuunnitelmaan kuuluu opetustilanteen ja aiheen lisäksi opituille asioille annetut merkitykset. Koettuun opetussuunnitelmaan vaikuttaa koulun ilmapiiri, asenteet, opetusjärjestelyt, oppilaiden sekä opettajien keskinäiset suhteet. (Ahtee & Pehkonen 2000, s.21)

Piilo-opetussuunnitelmalla tarkoitetaan asioita, joita ei varsinaisesti opetussisältönä tuoda esille. Piilo-opetussuunnitelmaan kuuluvat esimerkiksi koulun säännöt ja käytännöt, sekä opettajan toimiminen kasvattajana ja roolimallina oppilaille. (Ahtee & Pehkonen 2000, s.14)

Opetussuunnitelman tavoitteet on jaettu materiaalsiin ja formaalsiin. Materiaaliset tavoitteet ovat ainekohtaisia sisältötavoitteita, kun taas formaalsiin tavoitteisiin kuuluu ajattelun kehittäminen, käsitteiden muodostus, päätteleminen, tietojen

arvioiminen, ongelmien ratkaiseminen ja luova ajattelu. (Ahtee, Pehkonen 2000 & s.23)

### 3.2 Perusopetuksen opetussuunnitelma

Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteiden, 2004, mukaan perusopetuksen tulee edistää yhteisöllisyyttä, tasa-arvoa, opiskelutaitoja, pitkäjänteisyyttä ja tavoitteellista itsensä kehittämistä. Perusopetuksen on annettava mahdollisuus monipuoliseen kasvuun ja oppimiseen. Opetuksessa tulee ottaa huomioon erilaiset oppijat, oppilaiden erilaiset oppimistyyliä, oppilaiden erilaiset taustat sekä kehityserot. Tytöille ja pojille tulee antaa samanlaiset valmiudet toimia yhtäläisin oikeuksin ja velvollisuuksin. Perusopetuksen tavoitteena on herättää halu elinikäiseen oppimiseen.

Uusien tietojen ja taitojen lisäksi oppilailla on opittavana oppimis- ja työskentelytavat. Tavoitteena on, että oppilas oppii tunnistamaan oman oppimistyyliänsä ja kehittämään itseään oppijana. Perusopetuksen tulee kehittää kykyä arvioida kriittisesti sekä uudistaa ajattelu- ja toimintatapoja. Oppiminen tapahtuu kun oppilas aktiivisesti ja tavoitteellisesti käsittelee ja tulkitsee opittavaa asiaa aiempien tietorakenteidensa pohjalta. Oppiminen sisältää itsenäistä tai yhteistä ongelmanratkaisua. Oppimista tukee yhteistyössä tapahtuva oppiminen, jossa oppilas oppii toimimaan ryhmän ja yhteisön jäsenenä. Oppimisympäristön tulee ohjata oppilaita toimimaan ryhmän jäsenenä sekä edistää vuorovaikutusta sekä oppilaan ja opettajan että oppilaiden kesken. Oppimisympäristössä tulee kiinnittää huomiota monipuolisuuteen ja esteettisyyteen, koska oppiminen on tilanne sidonnaista. Erilaisten työtapojen tulee kehittää sosiaalisia taitoja ja aktiivista osallistumista, tukea oppilaiden keskinäisessä vuorovaikutuksessa tapahtuvaa oppimista, edistää sosiaalista joustavuutta ja kykyä toimia rakentavassa yhteistyössä. Monipuolisten opiskelumenetelmien, oppimisympäristön ja välineiden tehtävä on tukea oppilaiden motivaatiota, aktiivisuutta, itseohjautuvuuttaan ja luovuutta. Ilmapäirin tulee olla avoin, rohkaiseva, kiireetön ja myönteinen. Monipuoliset työtavat kehittävät oppimisen, ajattelun, ongelmanratkaisun ja työskentelyn taitoja sekä antavat eri-ikäisille oppilaille mahdollisuuden elämyksiin ja leikkiin.

Matematiikan opetuksen tulee tarjota mahdollisuuksia matemaattisten käsitteiden ja yleisimmin käytettyjen ratkaisumenetelmien oppimiseen. Opetuksen tulee tukea matemaattisen ajattelun kehittämistä ja ohjata oppilasta löytämään ja muokkaamaan ongelmia sekä etsimään ratkaisuja kohtaamiinsa ongelmiin. Matematiikan opetuksen tulee luoda hyvä pohja matematiikan käsitteiden ja rakenteiden omaksumiselle. Matematiikan opetuksessa tulee hyödyntää tehokkaasti arkipäivän tilanteissa

tulevia ongelmia sekä konkreettisuutta, jotta oppilas pystyy yhdistämään matematiikan abstraktin järjestelmän omiin kokemuksiinsa ja ajattelumalleihinsa.

Vuosiluokkien 1-2 tärkeimpänä tehtävänä on matemaattisen ajattelun kehittäminen sekä kokemusten hankkiminen matemaattisten käsitteiden ja rakenteiden muodostumisen pohjaksi. Oppilaan tavoitteena on saada tyydytystä ja iloa ongelmien ymmärtämisestä ja ratkaisemisesta. Matematiikan opetuksen tulee tarjota monipuolisia kokemuksia eri tavoista esittää matemaattisia käsitteitä. Oppilas oppii vertailemaan ja asettamaan asioita järjestykseen.

Vuosiluokilla 3-5 matematiikan opetuksen tulee tukea matemaattisen ajattelun kehittymistä sekä pohjustaa matemaattisten ajattelumallien oppimista tutkien ja havainnoiden. Tavoitteena on kokemusten hankkiminen matematiikan käsitteiden ja rakenteiden pohjaksi. Oppilas oppii peruslaskutaitoja, ryhmittelyä, luokittelua, järjestämistä ja mallintamista sekä ratkaisemaan matemaattisia ongelmia. Onnistumisen kokemukset ovat tärkeitä.

Vuosiluokilla 6-9 opetuksen tehtävänä on syventää matemaattisten käsitteiden ymmärtämistä. Tavoitteena on oppia arkipäivän matemaattisten ongelmien mallintamista, matemaattisten ongelmien ratkaisemista sekä nähdä matematiikan ja reaali maailman yhteys. Oppilas harjaannuttaa loogista ja luovaa ajattelua, kuten luokittelua, vertailua, järjestämistä, mittaamista, rakentamista, mallintamista, sääntöjen ja riippuvuuksien etsimistä sekä niiden esittämistä. Opiskeluun kuuluu ajattelua tukevien piirrosten ja välineiden käyttö.

Uudessa, vuonna 2016 käyttöön otettavassa, perusopetuksen opetussuunnitelman perusteissa, 2014, matematiikan opetuksen tavoitteena on kehittää loogista, täsmällistä ja luovaa matemaattista ajattelua. Matematiikan opetuksen tulee tukea myönteistä asennetta matematiikkaa kohtaan ja positiivista minäkuvaa matematiikan oppijana. Oppilaan tavoitteena on oppia ymmärtämään matematiikan hyödyllisyyden omassa elämässään ja laajemmin yhteiskunnassa. Matematiikan opiskelussa kehitetään kykyä käyttää ja soveltaa matematiikkaa monipuolisesti. Opetuksessa käytetään vaihtelevia työtapoja ja matematiikkaa havainnollistetaan toiminnallisesti sekä välineiden avulla.

## 4. TOIMINNALLINEN MATEMATIIKKA KÄYTÄNNÖSSÄ

### 4.1 LUMA-keskukset

LUMA-lyhenne tulee sanoista luonnontieteet ja matematiikka. LUMA-keskusten tehtävänä on innostaa ja kannustaa lapsia ja nuoria matematiikan, luonnontieteiden ja teknologian harrastamiseen ja opiskeluun, tukea opettajia, sekä vahvistaa tutkimuspohjaista opetuksen kehittämistyötä. LUMA-keskukset toimivat verkostona suomalaisten yliopistojen yhteydessä Helsingissä, Tampereella, Oulussa, Kuopiossa, Kokkolassa, Jyväskylässä, Lahdessa, Turussa, Lapissa ja Lappeenrannassa. Vuonna 2013 avattiin LUMA-keskusten katto-organisaatioksi LUMA-keskus Suomi, jonka tehtävänä on vahvistaa LUMA-keskusten yhteistyötä kansallisesti sekä kansainvälisesti.

LUMA-toimintaa on ollut Suomessa vuodesta 1996 lähtien. Opetushallituksessa oli vuosina 1996-2002 matematiikan ja luonnontieteiden kehittämisprojekti eli niin kutsuttu LUMA-projekti. LUMA-projektin jälkeen toimintaa jatkettiin vuonna 2003 Helsingin yliopiston yhteyteen perustetussa valtakunnallisessa LUMA-keskuksessa, jonka yksi päätavoite oli tiede- ja teknologiakasvatuksen vahvistaminen koko Suomessa. Vuodesta 2007 lähtien onkin perustettu kymmenen muuta LUMA-keskusta yliopistojen yhteyteen ympäri Suomea. LUMA-keskusten toimintaa on vuodesta 2010 ohjannut LUMA-neuvottelukunta, joka luo kansallisen LUMA-strategian ohjaamaan LUMA-keskusten tiede ja teknologiakasvatusta.

LUMA-keskusten toiminnan päämääränä on matematiikan, luonnontieteiden ja teknologian osaamisen korkea taso kaikkialla Suomessa. LUMA-keskus Suomessa kannetaan huolta siitä, että yhä harvempi nuori valitsee matematiikan, luonnontieteiden ja teknologian opiskelualakseen. Suomessa tarvitaan näiden aineiden osaajia työelämään. LUMA-keskusten tavoitteena on innostaa ja kannustaa 3-19-vuotiaita lapsia ja nuoria matematiikan, luonnontieteiden, tietotekniikan ja teknologian opiskeluun ja harrastamiseen. LUMA-keskukset pyrkivät myös lisäämään LUMA-aineiden nä-

kyvyttöä yhteiskunnassa sekä tuomaan lasten ja nuorten huoltajille tietoa LUMA-aineiden merkityksestä ja mahdollisuuksista työelämässä. LUMA-keskukset tukevat nykyisten ja tulevien opettajien koulutusta sekä osallistuvat LUMA-aineiden opetuksen, oppimisen ja oppisisältöjen kehittämiseen. (LUMA-keskus Suomi)

### **Kehittämishankkeet**

LUMA-keskus Suomi on mukana toteuttamassa opetus- ja kulttuuriministeriön rahoittamaa kuusivuotista (2014-2019) LUMA SUOMI Valtakunnallinen luonnontieteiden ja matematiikan esi- ja perusopetuksen kehittämishanketta. Ohjelman pilotti vaiheessa, vuosina 2014-2016, käynnissä yhteensä 33 kehittämishanketta eri puolilla Suomea. Ohjelman tavoitteena on lisätä esi- ja perusopetuksen oppilaiden kiinnostusta matematiikan ja luonnontieteiden opiskelua kohtaan sekä lisätä matemaattisluonnontieteellistä ja teknologista osaamista Suomessa. Tavoitteeseen pyritään tarjoamalla kouluihin opettajien kanssa suunniteltuja ja testattuja uudenlaisia opetuksen työtapoja. Hankkeen aikana kehitetään oppimismateriaaleja, joita tarjotaan vapaasti käytettäväksi. Lisäksi ohjelma tukee opettajia vuonna 2016 voimaan tulevien valtakunnallisten opetussuunnitelmienperusteiden käyttöönotossa. (LUMA SUOMI)

### **Summamutikka**

Summamutikka-keskus toimii osana Helsingin yliopiston LUMA-keskusta. Summamutikka on matematiikan oppimisen keskus. Keskuksen tavoitteena on innostaa ja motivoida lapsia ja nuoria matematiikan ja sen opiskelun pariin, tukea lasten ja nuorten matematiikan opiskelua, oppimista ja harrastuneisuutta sekä tukea matematiikan opettajia opetustyössään ja ammatillisessa kehityksessään. Summamutikassa toimii matematiikkaluokka Origo, joka tarjoaa innostavan ympäristön matematiikan oppimiseen ja opettamiseen. Luokka on avoinna opettajille, opettajiksi opiskeleville, matematiikan opiskelijoille sekä oppilaiden vierailuille. Summamutikka tarjoaa Helsingin seudulla matematiikkapäiviä, jolloin Summamutikan ohjaajat tulevat koululle pitämään innostavaa ja toiminnallista matematiikkaa sisältävää matikkapajaa. Summamutikka järjestetään myös matematiikkakerhoja, joissa matematiikkaan tutustutaan leikkien, pelaten, askarrella ja pohtien. (Summamutikka-keskus)

## Tampereen LUMATE-keskus

Tampereella sijaitsevan keväällä 2011 avatun LUMA-keskuksen nimi on Tampereen LUMATE-keskus. LUMATE-keskusta koordinoi yhteistyössä Tampereen teknillinen yliopisto ja Tampereen yliopisto. LUMATE-keskuksen toimisto sijaitsee Tampereen teknillisellä yliopistolla ja laboratorio Tampereen teknillisellä lukiolla. LUMATE-lyhenne tulee sanoista luonnontieteet, matematiikka ja teknologia. Tampereen LUMATE-keskuksen tarkoituksena on tuoda luonnontieteiden, matematiikan ja teknologian tutkimusta, tieteen tekoa ja teollisuutta tutummaksi koululaisille. Tavoitteena on tekemällä oppimisen avulla innostaa koululaisia luonnontieteiden, matematiikan ja teknologian oppimiseen, tutkimiseen ja soveltamiseen. Tampereen LUMATE-keskus järjestää tiedekerhoja ja leirejä, joiden sisällössä on myös matematiikkapainotuksia. Lisäksi LUMATE-keskus osallistuu erilaisiin projekteihin ja tapahtumiin Tampereen alueella, kuten esimerkiksi Bagdad-matematiikanäyttelyn järjestämiseen. (Tampereen LUMATE-keskus)

## 4.2 Matikkamaat

Matikkamaa on pedagoginen keskus, jossa kehitetään matematiikan opetusta esikoulusta lukioon yhdessä opettajien kanssa. Matikkamaa on sekä fyysinen paikka että toimintaidea. Hallinnollisesti Matikkamaa on opetusviraston tai/ja yliopiston alainen. Matikkamaa aloitti toimintansa vuonna 2000 Espoossa ja Helsingissä, minkä jälkeen matikkamaita on avattu ympäri Suomea. Matikkamaita on Espoon ja Helsingin lisäksi Turussa, Tampereella, Oulussa, Nokiolla, Jyväskylässä, Kokkolassa ja Lieksassa. Matikkamaat tarjoavat ideoita, välineitä ja koulutusta matematiikan opetukseen. Matikkamaissa etsitään konkreettisia keinoja oppimisen ja opettamisen tukemiseen. Matikkamaissa on hyviä materiaalipankkeja, joista saa lainata havainnollistavia pelejä ja tehtäviä matematiikan opetuksen tueksi. (Opperi)

Tampereen Matikkamaa eli Matikkamansse sijaitsee Kissanmaan koululla. Matikkamanssen tavoitteena on kehittää matematiikan opetusta tarjoamalla virikkeitä matematiikan tutkivaan, havainnoivaan ja toiminnalliseen oppimiseen. Tampereen esikoulujen ja peruskoulujen opettajat voivat käydä lainaamassa Matikkamansesta oppimisvälineitä omille kouluilleen. Matikkamanssessa on avoimet ovet joka kuukauden viimeisenä tiistaina, jolloin opettajat voivat tutustua lainattaviin välineisiin. Avointen ovien päivässä voi myös vaihtaa ajatuksia ja kokemuksia matematiikan opetuksesta ja hyviksi koetuista menetelmistä. Lainattavien oppimisvälineiden lista löytyy Kissanmaan koulun internetsivulta. (Kissanmaankoulu)

### 4.3 Aikaisemmat tutkimukset

#### Matematiikkatupa

Sinikka Lindgren tutki jo 1980-luvulla toiminnallista matematiikanopetusta väitöskirjassaan matematiikkatupakokeilusta. Tutkimuksen tavoitteena oli hahmotella teoreettista viitekehystä ja hankkia empiiristä aineistoa matemaattisen toimintamateriaalin käytöstä. Tarkoituksena oli löytää uusia toiminnallisia menetelmiä matematiikan opiskeluun ala-koulussa.

Toiminnallisuudella opetuksessa Lindgren tarkoittaa oppilaiden aktiivista toimintaa ja yksilöllistä osallistumista opetustapahtumaan. Matematiikkatupa tarkoittaa opiskeluun varattua tilaa, joka on varustettu runsaalla määrällä eritasoista toimintamateriaalia. Käsitteellä matematiikkatupa Lindgren tarkoittaa myös oppimisen filosofiaa, jossa uskotaan tekemällä oppimiseen eli oppilaiden omaan aktiivisuuteen. Matematiikkatuvan materiaalit oli tarkkaan valittuja. Matematiikkatuvassa työskenneltiin yksilöllisesti tai pienryhmissä oppilaan omien oppimisvaikeuksien ja kiinnostuksen ohjaamana. Oppilaiden käytettävissä oli eri vaikeustasoisia materiaaleja. Matematiikkatuvassa työskentely oli vapaata ja oppilailla oli vapaus valita työmuotonsa, mutta tietyt rajat ja säännöt tarvittiin. Oppilaiden valinnanvapaus rajoittui vain matemaattisiin toimintoihin. Opettaja esitteli ensin yhden tai muutamia oppimateriaaleja tai pelejä, jonka jälkeen oppilaat valitsivat itselleen tehtävän.

Matematiikkatuvan tavoitteena oli, että oppilaat voivat kokea matematiikan opiskelun iloisena asiana. Oppilaille haluttiin tarjota onnistumisen elämyksiä ja luottamusta itseensä matemaattisten tehtävien suorittajina. Oppilaiden tavoitteena oli oppia luonnollisissa tilanteissa puhumaan matematiikan kieltä ja oppia käyttämään oikeita termejä ja nimityksiä. Erilaisten pelien ja leikkien tarkoitus oli tarjota runsaasti harjoitusta.

Toimintamateriaalit, eli konkreettiset oppimateriaalit ja pelit, liittyivät peruskoulun toisen luokan syyslukukauden matematiikan opetussuunnitelman sisältöihin. Tutkimuksen pituus oli kymmenen viikkoa ja matematiikkatuvassa työskenneltiin tunti viikossa. Tutkimuksen yksi lähtökohta oli, että sama opettaja opettaa matematiikkatupaan osallistuvan ryhmän lisäksi saman luokan oppilaista koostuvaa kontrolliryhmää. Molemmat ryhmät suorittivat matematiikan alkukokeen ja päätöskokeen. Tutkimukseen osallistui kymmenen luokkaa.

Alku- ja loppukokeen perusteella vertailtiin matematiikkatupaan osallistuneita lap-

sia kontrolliryhmään. Alkukokeessa matematiikkatupaan osallistuva ryhmä oli hie- man kontrolliryhmää huonompi, kun taas loppukokeessa kontrolliryhmää parempi, mutta erot ryhmien välillä olivat sekä alussa että lopussa hyvin pieniä. Matema- tiikkatuvassa pääpaino oli paikkajärjestelmän oppimisella ja iso osa toimintamateri- aaleista liittyi siihen. Tuloksissa nähdään, että paikkajärjestelmän osaamisessa toi- mintamateriaalin käytöllä on ollut vaikutusta. Opettajien palautteiden perusteella matematiikkatupaan osallistuneet oppilaat kokivat matematiikan opiskelun iloisena asiana. Matematiikkatuvassa työskennelleet oppilaat kiinnostuivat matematiikasta uudella tavalla, kokivat matematiikan iloisena asiana ja useiden heikkojen tai kes- kinkertaisten oppilaiden itsetunto parani.

Kontrolliryhmä opiskeli opettajan johdolla perinteisellä tavalla omassa luokassaan. Työskentelystä erilaisilla materiaaleilla ja peleillä saatiin tietyillä oppilasryhmillä pa- rempia oppimistuloksia kuin perinteisestä opetuksesta. Erot eivät kuitenkaan olleet tilastollisesti merkittäviä. Opettajan innokkuus matematiikkatuvasta ja toiminta- materiaalin käytöstä vaikutti tuloksiin. Erityisesti heikompien oppilaiden oli vaikea valita itselleen sopiva peli tai tehtävä. Lindgren toteaa, että kokeilun perusteella voidaan sanoa, että sekä hyvät että heikommat oppilaat tarvitsevat opettajan apua sopivan tasoisen, kehittävän, työtavan löytämiseen. Täydellistä valinnanvapautta ei siis suositella tehokkaaseen matematiikan opiskeluun.

Tutkimustuloksena oli, että huolellisesti ja tarkoituksenmukaisesti valitun toimin- tamateriaalin käyttö edistää uusien matematiikka käsitteiden sisäistämistä ja hal- lintaa. Matematiikkatupa toi kaivattua vaihtelua ja iloa matematiikan opiskeluun. Matematiikkatuvan tulisi olla viihtyisä ja tarpeeksi suuri. Siellä tulisi olla runsaasti tarkasti valittua matematiikan opetuksen kannalta oleellista materiaalia. Työskente- lyn tulisi tapahtua tarpeeksi pitkällä aikavälillä, jotta oppilaat ehtivät tottua uuteen avoimempaan työskentelytapaan. Opettajien pitää tuntea oppilaat ja toimintamateri- aali hyvin, jotta osaavat ohjata eritasoisia oppilaita kehittävien materiaalien pariin. (Lindgren 1990)

### **Varga-Neményi-menetelmän tutkimus**

Pirjo Tikkanen tutkii väitöskirjassaan (2008) suomalaista ja unkarilaista matematiikan opetusta peruskoulun neljännellä luokalla. Tutkimuksessa käsiteltiin 20 suoma- laisen Varga-Neményi -opetusryhmän, 23 unkarilaisen Varga-Neményi -opetusryhmän ja 21 suomalaisen opetusryhmän kokemuksia matematiikan oppimisesta, opetukses- ta sekä matematiikasta oppiaineena.



Tutkimukseen osallistuneet oppilaat kuvasivat matematiikan opiskelua useimmiten kyseleväksi opetuksiksi ja oppilaskeskeiseksi yksilölliseksi. Suomalaiset oppilaat kokivat matematiikan oppitunnit opettajan esityksenä sekä yhteistoiminnallisena ryhmätyöskentelynä. Unkarilaiset taas kuvasivat tunteja oppilaskeskeisinä opetuskeskusteluina. Suomalaisten oppimaiden kuvauksissa välittyi oppikirjan merkitys unkarilaisia enemmän. Suomalaiset Varga-Neményi-opetusryhmän oppilaat pitivät kuitenkin toimintavälineitä ja kuvia oppikirjaa parempana oppimisvälineenä. Oppilaiden mukaan matematiikan oppiminen on ymmärtämistä ja tajuamista. Kaikilla tutkimukseen osallistuneilla ryhmillä oli myönteinen asenne matematiikan oppimista kohtaan. Matematiikasta tekee oppilaiden kuvausten mukaan viihdyttävän monipuoliset sisällöt, vaikeudeltaan vaihtelevat tehtävät sekä pelit ja leikit. Toiminta ja konkreettiset opetusvälineet tuovat opiskeluun vaihtelua sekä edistävät ymmärtämistä. Oppilaat pitivät matematiikkaa tärkeänä, koska sille on käyttöä arkielämässä ja eri oppiaineissa koulussa. Suomalaisten ja unkarilaisten Varga-Neményi-opetusryhmien ajatukset matematiikan sisällöstä ovat monipuolisia, kun taas suomalaisen opetusryhmän oppilas näki matematiikan pääasiassa laskemisena. (Tikkanen 2008)

## 5. MATEMATIIKKANÄYTTELY

Matematiikkanäyttely, Bagdad – matematiikkaa täältä ikuisuuteen, järjestettiin museokeskus Vapriikissa Tampereella 11.4.–31.5.2013. Näyttelyn on tuottanut ruotsalainen tiedekeskus Navet. Näyttely oli avoinna tilauksesta koululaisryhmille sekä kahtena viikonloppuna kaikille museokeskuksen asiakkaille. Puolentoista tunnin mittaisen vierailun aikana tutustuttiin matematiikkaan historian, dramatisoinnin ja toiminnallisuuden kautta.

### 5.1 Näyttelyn tausta

Bagdad -näyttely on ruotsalaisen tiedekeskus Navetin kokoama toiminnallista matematiikkaa sisältävä kokonaisuus. Idea Bagdad-näyttelyyn, Bagdad härifrån till evigheten, syntyi vuonna 2000, kun Navetin tiedekeskuksen johtaja, Lotta Johansson, sai tehtäväkseen löytää innostavan näkökulman oppilaille, opettajille, lapsille ja aikuisille sopivaan matematiikka-aiheiseen näyttelyyn. Lähtökohdaksi valittiin historia ja Navetin pedagogiryhmä yhdessä kokosi ja kehitti näyttelyä. Keskeisessä osassa oleva idyllinen arabialaistyylinen lavastus ja ulkoasu ovat Navetin somistajan, Helene Berntssonin, tekemiä.

Näyttelyn nimi Bagdad perustuu nykyisen Irakin alueella sijaitsevaan kaupunkiin. Islamin levitessä 600-luvulla myös henkinen kulttuuri kasvoi Lähi-idässä. Noin vuonna 820 al-Ma'mun perusti Bagdadiin akatemian ja kirjaston, Viisauden talon. Viisauden taloon kerätiin tietoa tieteen saavutuksista. Tunnetuin matemaatikko Bagdadin Viisauden talossa oli al-Khwarismi, joka toimi näyttelyn päähenkilönä. (Korhonen 1995, s.39)

Tehtäviä näyttelyyn eivät Navetin ohjaajat keksineet itse vaan he keräsivät niitä kirjoista ja julkaisuista ja etsivät erilaisia matematiikkaan liittyviä pelejä ja pulmatehtäviä. Näyttelyssä oli esillä muutama kirja, joista tehtäviä on löytynyt. Kirjat olivat Kvadrater, hieroglyfer och smarta kort, mera matte med mening, Kristin Dahl, Alfabet 2000; Matte med mening, tänka tal och söka mönster, Kristin Dahl,

Sven Nordqvist, Alfabet 1999; Räkna med mig, matte gåtor för hela familjen, Kristin Dahl, Alfabet 2009; Nämnaren Tema, Familjematematik, Göteborg yliopisto, 2004; Nämnaren Tema, Uppslagsboken, Göteborg yliopisto 2002. Näyttelystä löytyneet kirjat olivat ruotsinkielisiä, mutta ainakin Kristin Dahlin kirjoja on käännetty myös suomeksi.

Näyttely on kiertänyt Ruotsissa ja Norjassa. Suomessa näyttely on ollut esillä Oulun Tietomaassa keväällä 2012. (Törmä 2012) Vapriikissa näyttely järjestettiin yhteistyössä Tampereen LUMATE-keskuksen, Navet Science Centerin, Tampereen yliopistojen matematiikkakeskusten, Tampereen kauppakamarin, Teknologiateollisuuden 100-vuotissäätiön, Tampereen teknillisen seuran, Suomalais-ruotsalaisen kulttuurirahaston sekä Tampereen kaupungin kanssa.

## 5.2 Ohjaajat

Tampereen LUMATE-keskus rekrytoi näyttelyyn kahdeksan ohjaajaa Tampereen yliopistolta ja Tampereen teknilliseltä yliopistolta. Ohjaajat olivat luokan- tai aineenopettajiksi opiskelevia, jotka olivat opiskelleet matematiikkaa. Ohjaajat koulutettiin näyttelyyn kahden päivän aikana. Kouluttajana toimi Navetin tiedekeskuksen Riitta Carlström. Koulutuksessa käytiin läpi näyttelyn taustaa, tarkoitusta, kulkua, sisältöä, johdantonäytelmiä ja erilaisia pulmatehtäviä. Kaikkia näyttelyn aktiviteettejä ei kahden päivän aikana ehditty käydä läpi, mutta kaikkiin oli kirjalliset ohjeet tehtävien vieressä, joten ohjaajat pääsivät tutustumaan niihin myöhemmin näyttelyn yhteydessä. Koulutuksessa käytettiin aikaa ohjaajien esittämien historian matemaatikoihin tutustumiseen ja alkunäytelmien läpikäyntiin, jotta jokaisen olisi helpompi eläytyä rooliinsa ja heittäytyä mukaan dramatisointeihin. Johdantonäytelmien käsikirjoitukset löytyivät kirjallisena, joten ohjaajien ei tarvinnut opetella niitä ulkoa. Koulutukseen kuului myös Vapriikin henkilökunnan ohjeistus museokeskuksen käytännöistä ja tiloista.

## 5.3 Osallistujat

Näyttely oli suunnattu kaiken ikäisille koululaisryhmille ennakotilauksesta. Oppilasryhmiä osallistui jokaiselta peruskoulun luokka-asteelta. Lukiolaisia näyttelyssä vieraili vain yksi ryhmä. Kahtena viikonloppuna näyttelyyn järjestettiin opastettuja vierailuja myös muille museokeskuksen kävijöille.

## 5.4 Näyttelytila

Näyttelytilaan oli koottu Bagdadilainen teltta, jossa oli itämaiseen henkeen sopivia matemaattisia esineitä ja koristeita. Somisteissa, matoissa ja tekstiileissä oli toistuvia symmetrisiä kuvioita, jotka sopivat sekä matematiikkaan että teltan tunnelmaan. Seiniltä löytyi taidetta, jonka tekemiseen oli tarvittu matematiikkaa. Teltassa oli pöytiä ja tuoleja, joiden ääressä osallistujien oli helppo perehtyä näyttelystä löytyviin tehtäviin. Yhtenä näyttelyn tarkoituksena oli, että kaikki teltasta löytyvät esineet, somisteet ja tehtävät liittyvät jollakin tavalla matematiikkaan. Näin oppilaille tarjottiin mahdollisuus havaita matematiikkaa kaikkialla ympärillään.

Teltta eli näyttelytila oli sopivan tiivis tila noin 20 hengen ryhmälle. Tila sijaitsi museokeskuksen perällä melko rauhallisessa kulmassa, jossa ryhmien oli helppo keskittyä juuri tähän näyttelyyn, välittämättä muusta museokeskuksessa tapahtuneesta toiminnasta.

## 5.5 Vierailun kulku

Ohjatut näyttelykerrat kestivät 1,5 tuntia ja olivat kaavaltaan samanlaisia. Ohjaajat hakivat, matematiikan historian henkilöhahmoiksi pukeutuneena, koululaisryhmät museokeskuksen aulasta ja opastivat heidät näyttelytilaan. Aluksi näyttelyn päähenkilö al-Khwarizmi johdatti vieraat näyttelytilana toimineeseen telttaan, jossa kaikki pääsivät istumaan ja seuraamaan näyttelyn johdantoa. Al-Khwarizmi toivotti vieraat tervetulleeksi Bagdadiin ja telttaansa sekä kertoi hieman itsestään ja näyttelystä. Esittelyn jälkeen matemaatikoiksi pukeutuneet 2-3 ohjaajaa esittivät näytelmänä matemaattisen ongelman, jonka ratkaisemiseen vieraat pääsivät osallistumaan. Tämän jälkeen jakaannuttiin ryhmän koosta riippuen 1-3 ryhmään tekemään ohjatusti jokin näyttelystä löytyvä tehtävä tai ratkomaan jokin pulma. Johdannon jälkeen vieraat saivat vapaasti tutustua näyttelyyn ja tehdä itseään kiinnostavia tehtäviä. Jokaiseen aktiviteettiin löytyi suomenkieliset laminoidut ohjeet. Ohjaajat opastivat tarvittaessa ja ehdottivat erilaisia tehtäviä. Näyttelyn lopussa keräännuttiin vielä yhteen tekemään jokin yhteinen tehtävä. Lopussa oli myös aikaa kysymyksille ja palautteelle.

### 5.5.1 Ohjaajien roolit

Näyttelyn ohjaajat olivat pukeutuneet ja eläytyneet vanhoiksi matemaatikoiksi. Jokaisella näyttelykerralla paikalla oli bagdadilainen al-Khwarizmi. Muut matemaatikot olivat ohjaajien määrystä ja aloitusnäytelmästä riippuen Sonja, Hypatia ja

Brahmagupta. Aloituspäätelmässä esiteltiin henkilöt ja kerrottiin hieman siitä, mitä merkittävää he ovat matematiikassa tehneet.

Matematiikko ja tähtitieteilijä Muhammed ibn-Musa al-Khwarizmi oli Bagdadiin perustetun viisauden talon jäsen. Länsi-Euroopassa kuuluisaksi tullut al-Khwarizmi kirjoitti tutkielmia matematiikasta ja tähtitieteestä sekä kaksi aritmetiikkaa ja algebraa käsittelevää kirjaa. Al-Khwarizmin mukaan sai nimensä intialaista numeroita hyödyntävä järjestelmä algoritmi. Al-Khwarizmin tärkeimmän kirjan nimestä, *Al-jabr wal muqabalah*, on kehittynyt sana algebra, koska kirjan avulla eurooppalaiset oppivat algebrana tunnetun matematiikan haaran. Al-Khwarizmia voidaankin pitää algebran isänä. (Boyer 1994, s.326-330)

Sonja (Sofia) Kovalevskaja (1850-1891) oli venäläinen Tukholman yliopistossa työskennellyt matemaatikko. Hän syntyi Moskovassa, josta muutti Pietariin. Kertomansa mukaan hän kiinnostui matematiikan kiehtovasta symbolikielestä, jota hän näki tapettien puutteessa luentomuistiinpanoilla päällystämässään huoneessaan. Hän aloitti matematiikan opiskelun Pietarin akatemiassa, jossa opettaja huomasi hänen olevan hyvin lahjakas. Tuohon aikaan naisten oli vaikea päästä opiskelemaan ja Sonjan pitikin solmia kulissi avioliitto tiedemies Vladimir Kovalevskin kanssa saadakseen opiskelupaikan Berliinin yliopistosta. Hän ei kuitenkaan naisena voinut olla virallisesti kirjoilla yliopistossa, eikä hän myöhemmin saanut ottaa vastaan virallista kunnianosoitusta tekemästään työstä Cauchyn ja Lagrangen tuloksien yleistämisestä. Vaikka naisena hänellä ei ollut mahdollisuutta saada akatemista asemaa missään eurooppalaisessa yliopistossa, vuonna 1889 Tukholman yliopiston professori G. Mittag-Lefflerin avustuksella, hän sai ensimmäisenä naisena elinikäisen matematiikan professuurin Tukholman yliopistosta. (Matematiikan käsikirja 1994, s. 213-214)

Länsimaiden ensimmäinen tunnettu naismatemaatikko Hypatia (n.355-415) syntyi Aleksandriassa, joka oli tuohon aikaan helleenisen maailman oppineisuuden keskus. Hypatian isä oli matemaatikko ja astronomi, joka opetti tyttärtään kunnianhimoisesti. Hypatiaa pidetään oman aikansa merkittävämpänä kreikkalaisena matemaatikkona, joka työskenteli kaikilla antiikin kreikkalaisen matematiikan osa-alueilla. Hänen tutkimusalojaan olivat esimerkiksi aritmetiikka, kartiroleikkaukset ja tähtitiede. Hypatian sanotaan olleen kaunis ja karismaattinen opettaja. Pääasiassa hän opetti kotonaan pienelle piirille, mutta luennoi silloin tällöin myös suurelle yleisölle. Hänet murhasivat fanaattiset kristityt julmasti vuonna 415, koska Hypatia oli kreikkalaista tiedettä ja sivistystä edustava pakana. (Nurminen 2008, s.72-86)

Brahmagupta eli Keski-Intiassa noin vuoden 628 tienoilla. Hän oli matemaatikko,

joka ensimmäisen käytti systemaattisesti nollan ja negatiivisten lukujen aritmetiikkaa. Brahmaguptan kaikki tulokset eivät olleet tarkkoja. Hän antoi esimerkiksi  $\pi$  kaksi arvoa 3 ja  $\sqrt{10}$ . Hän myös väitti, että  $0/0 = 0$ , eikä ottanut kantaa muiden lukujen jakamiseen nolllalla. Intialainen matematiikka oli yleisestikin hyvän ja huonon sekoitus, koska intialaiset matemaatikot eivät vetäneet selkeää rajaa tarkkojen ja epätarkkojen tulosten välille. (Boyer 1994, s.315-316)

## 5.5.2 Näytelmäjohtanto

Jokaisen vierailun alussa ohjaajat esittivät pienen näytelmän, jossa esiteltiin ohjaajien näyttelemät matemaatikot sekä haastettiin vieraat ratkomaan matemaattinen pulma. Alkunäytelmiä oli kolme erilaista, joissa matemaattinen tehtävä oli helpompi tai haastavampi. Ohjaajat valitsivat näistä mielestään sopivimman vierailijaryhmälle.

### Mittausjohtanto

Mittausjohtannon aluksi Al-Kwarismi ottaa vierailijat vastaan ja toivottaa tervetulleeksi Bagdadiin. Tervehdyksen jälkeen Al-Kwarismi alkaa kertoa tarinaa yöllä näkemästään hirveästä painajaisesta, jossa hän eräänä aurinkoisena päivänä käveli Bagdadilaisella torilla, kun sinne ilmestyi eri aikoina eläneitä matemaatikoita.

Ensimmäisenä Al-Kwarismin luo saapuu Sonja Kovalevskaja, joka kysyy, saako hän mitata Al-Kwarismin. Sonja mittaa Al-Kwarismin mitallaan ja ilmoittaa yleisölle mittaamansa luvun, paljastamatta, että käytti mittayksikkönä millimetrejä. Al-Kwarismi tuntee itsensä mittauksen jälkeen hyvin pitkäksi ja on erittäin tyytyväinen. Seuraavaksi näyttämölle saapuu Hypatia, joka myös pyytää Al-Kwarismilta lupaa mitata hänet. Hypatia mittaustuloksen mittayksikkönä ovat desimetrit. Al-Kwarismi hämmästelee hieman, koska luku on pienempi kuin Sonjan aiemmin mitaama. Brahmagupta saapuu myös mittaamaan Al-Kwarismin ja ilmoittaa tuloksen metreinä. Tuloksen kuultuaan Al-Kwarismi hätäntyy ja alkaa huolestuneena ihmetellä, mitä hänelle on tapahtumassa, kun hän vain pienenee jatkuvasti. Mitä ihmeessä hänen tulee tehdä? Hypatia saapuu herättämään Al-Kwarismin painajaisestaan ja ihmettelee, että mikä tällä on hätänä. Al-Kwarismi kertoo kutistuvansa koko ajan, jolloin Hypatia mittaa hänet vielä kerran. Tällä kertaa mittayksikkönä ovat senttimetrit. Al-Kwarismi helpottuu kuulemastaan, koska tulos kuulostaa hänen oikealta pituudeltaan. Lopuksi Al-Kwarismi kyselee yleisöltä syytä siihen, miksi

hän vaikutti kutistuvan mittauksen välillä. Yleisön kanssa käydään läpi kaikki näyttelmässä käytetyt mittayksiköt.

### **Karkkipussijohdanto**

Al-Kwarismi ottaa ryhmän vastaan ja ohjaa heidät teltaansa istumaan. Hän kertoo ensin hieman itsestään ja toivottaa vieraat tervetulleeksi Bagdadiin. Tämän jälkeen hän kertoo Hypatian saapuvan pian vierailulle hänen luokseen. Al-Kwarismi kertoo Hypatian olevan maailman ensimmäisiä naistieteilijöitä, suuremoinen 300-luvulla elänyt nainen.

Hypatia saapuu näyttämölle ratti käsissään, kaarrellen holtittomasti. Al-Kwarismi kysyy Hypatialta, mitä ihmettä hänellä on käsissään. Hypatia vastaa, että ei tiedä, eikä ole koskaan ennen nähnyt tällaista. Al-Kwarismi tiedustelee yleisöltä mikä tuo esine on ja oliko sellaisia Hypatian elinaikana. Silloin ei tainnut olla vielä autoja, joten Al-Kwarismi käskää Hypatian pois. Hypatian lähdön jälkeen Al-Kwarismi kertoo Hypatiasta lisää. Hypatia on kotoisin Aleksandriasta ja on erinomainen opettaja. Hänen luennoillaan kävi suuri määrä oppilaita, mutta hänen sanotaan olevan niin kaunis, että hän seiso opettaessaan varjostimen takana. Hypatia saapuu näyttämölle uudestaan. Tällä kertaa potkulaudalla. Al-Kwarismi kysyy jälleen yleisöltä, että mikä tuo väline on ja oliko sellaisia Hypatian elinaikana. Vastaus on jälleen ei, joten Hypatian pitää poistua. Muutaman sekunnin kuluttua Hypatia saapuu näyttämölle hevosella. Hevosia oli Hypatian aikana, joten Hypatia saa jäädä Al-Kwarismin vieraaksi.

Sonja Kovalevskaja saapuu näyttämölle kantaen koria, jossa on karkkipusseja. Hän kertoo tavanneensa Arkhimedeen, joka oli juuri noussut kyvystä ja huudellut Heurekaa. Arkhimedes oli antanut Sonjalle korin ja sanonut, että hänen tulee jakaa karkkipussit tasan Al-Kwarismin, Hypatian ja Sonjan kesken. Korissa on 21 pussia, joista 7 on täysinäisiä, 7 puolillaan ja 7 tyhjiä. Kaikkien tulee saada yhtä paljon karkkeja ja yhtä monta pussia. Pusseja ei saa avata ennen kuin jako on tehty. Sonja nostaa pussit pois korista ja yleisöltä pyydetään apua ongelman ratkaisuun. Pussit jaetaan kolmelle henkilölle niin, että yksi henkilöistä saa 3 täyttä, 1 puolikaan ja 3 tyhjää pussia, kaksi muuta henkilöä saa 2 täyttä, 3 puolikasta ja 2 tyhjää pussia.

## Sillan ylitys -johdanto

Al-Kwarismi on kutsunut Bagdadiin ystävänsä Hypatian, Sonja Kovalevskajan ja Brahmaguptan. Aluksi matemaatikot esittäytyvät yleisölle. Tämän jälkeen Al-Kwarismi kertoo ystävilleen, että haluaa näyttää heille aivan erityisen auringonlaskun autiomaassa. Autiomaahan päästäkseen, heidän tulee ylittää kanjonin ylittävä riippusilta. Riippusilta kantaa vain kaksi henkilöä kerrallaan. He ottavat aikaa, kuinka kauan kullakin menee sillan ylittämiseen. Al-Kwarismi menee ensin nopeasti 1 minuutissa, Hypatia tulee seuraavaksi 2 minuutissa. Sonja ylittää sillan hieman horjahdellen ja aikaa kuluu 5 minuuttia. Brahmagubtaa silta pelottaa ja hänen ajakseen tulee 10 minuuttia. Sillan yli päästyään matemaatikot ihastelevat hienoa auringonlaskua.

Kotimatalla tulee ongelma, sillä auringonlaskun jälkeen on pimeää. Al-Kwarismilla on mukanaan öljylamppu, mutta siinä riittää valoa vain 17 minuutiksi. Kaikkien tulisi siis ehtiä tuossa ajassa sillan yli ja silta kestää vain kahden henkilön painon kerrallaan. Sillan ylityksessä kuluu aikaa aina hitaamman henkilön mukaan. Missä järjestyksessä heidän tulee ylittää silta ehtiäkseen sen yli enne kuin lamppu sammuu? Yleisöltä kysellään ehdotuksia ja kokeillaan erilaisia vaihtoehtoja, kunnes löydetään oikea järjestys. Tehtävä ratkeaa niin, että Al-Kwarismi ja Hypatia menevät siltaa pitkin ensin, jolloin aikaa kuluu 2 minuuttia. Takaisin tulee Al-Kwarismi 1 minuutissa. Seuraavaksi ylittävät Sonja ja Brahmagubta, jolloin aikaa kuluu 10 minuuttia. Takaisin tulee Hypatia 2 minuutissa. Sillan väärällä puolella ovat enää Al-Kwarismi ja Hypatia, jotka ylittävät sillan 2 minuutissa. Yhteensä aikaa kuluu siis 17 minuuttia.

### 5.5.3 Alkutehtävät

Näytelmän jälkeen jakaannuttiin pienempiin ryhmiin, joissa ohjaajan johdolla tehtiin jokin tehtävä tai ratkaistiin joku pulma. Suosittuja alkutehtäviä olivat esimerkiksi Möbiuksen nauha, maapallon heitto, nallejen punnitseminen tai binääriajatustenluku. Samoja tehtäviä käytettiin usein myös lopussa ryhmien yhteisenä tehtävänä.

#### Möbiuksen nauha

Möbiuksen nauha -tehtävässä tutustuttiin 1800-luvulla eläneen saksalaisen matemaatikon August Ferninand Möbiuksen mukaan nimettyyn renkaaseen. (Dahl &



Nordqvist 1995, s.53) Aluksi jokaiselle oppilaalle jaettiin paperiliuska, joka teipattiin tavalliseksi renkaaksi. Renkaan ympäri paperiliuskan keskikohtaa pitkin piirrettiin viiva, jonka jälkeen viivaa pitkin leikattiin. Tuloksena syntyi kaksi samanlaista rengasta, joissa molemmissa on kaksi puolta. Tämä ei ollut kovin jännittävää ja joskus ajan säästämiseksi ohjaaja näytti tämän vaiheen itse ja oppilaat pääsivät itse kokeilemaan seuraavaa vaihetta.

Oppilaille jaettiin uudet paperiliuskat, mutta nyt toista päätä kierrettiin puoli kierrosta ympäri, jonka jälkeen se teipattiin toiseen päähän. Tällä kertaa rengas ei näyttänyt aivan tavalliselta. Renkaan ympäri, liuskan keskikohtaa pitkin alettiin piirtää viivaa, kuten kuvassa 1. Huomattiin, että viiva menee paperin molemmille puolille eli nauhassa on vain yksi puoli. Tätä yksipintaista rengasta kutsutaan Möbiuksen nauhaksi. Seuraavaksi leikattiin piirrettyä viivaa pitkin. Leikkaamalla ei saatu kahta samanlaista rengasta vaan yksi isompi rengas. Jos oppilaiden renkaat olivat vielä ehjiä, saattoivat he kokeilla mitä tapahtuu kun nauhan keskeltä leikataan vielä kerran. Möbiuksen nauhaa sovelletaan teollisuudessa esimerkiksi autojen hihnoissa, koska se kuluu tasaisesti molemmilta puolilta. (Pappas 2006, s. 57)



Kuva 1: Möbiuksen nauha

## Maapallo ja meteoriitti

Maapallo ja meteoriitti tehtävä liittyy todennäköisyyteen. Tehtävässä tutkitaan millä todennäköisyydellä meteoriitin syöksyessä maapallolle se osuu mereen ja millä todennäköisyydellä maalle. Välineenä tehtävässä oli maapallon näköinen ilmalla täytetty rantapallo. Meteoriitit piirrettiin pienenä pisteenä oppilaiden etusormen päähän. Tehtävässä oppilaat seisoivat ringissä ja heittelivät palloa toisilleen. Ottaessaan kopin pallosta, oppilas kertoi osuiko sormeen piirretty meteoriitti maalle vai veteen. Tulokset merkittiin taulukkoon. Kun maapalloa oli heitelty oppilaiden tai ohjaajan mielestä tarpeeksi kauan, tarkistettiin tulokset. Tuloksista pystyttiin yleensä päätelemään ainakin se, että suurin osa maapallon pinta-alasta on vettä ja todennäköi-

semmin meteoriitti osuisi mereen. Useammilla heitoilla saadaan tarkempi tulos.

### **Karhujen punnitus**

Karhujen punnituksessa oli tarkoitus 24 karhun joukosta yksi muita painavampi karhu. Karhuja oli kolmea eri väriä, 8 punaista, 8 sinistä ja 8 keltaista. Käytössä oli tasapainovaaka, jonka molemmille puolille karhuja voitiin laittaa. Oppilaiden tehtävänä oli ehdottaa kuinka karhuja vaa'alle kannattaa laittaa, jotta selvittää mahdollisimman vähillä punnituksilla. Tehtävä on mahdollista suorittaa kolmella punnituksella.

Oppilaat halusivat yleensä jakaa karhut puoliksi vaa'an molemmille puolille, jolloin saatiin selville, kumpi ryhmä karhuja on painavampi. Tällä taktiikalla punnituksia tarvitaan kuitenkin vähintään neljä. Ratkaisuun on annettu vihjettä karhujen väreillä. Tarkoituksena on siis jakaa karhut aina kolmeen ryhmään. Ensimmäisessä punnituksessa vaa'an toisella puolella on esimerkiksi 8 sinistä karhua ja toisella puolella 8 punaista karhua. Jos vaaka on epätasapainossa, löytyy etsitty karhu painavammasta joukosta. Jos vaaka pysyy tasapainossa, voidaan painavimman karhun päätellä olevan punnituksen ulkopuolelle jääneiden keltaisten karhujen joukossa. Nyt kahdeksan karhun ryhmä jaetaan kahteen kolmen ja yhteen kahden karhun ryhmään. Vaa'alle laitetaan kolmen karhun ryhmät. Jos vaaka on tasapainossa, on painavin karhu toinen ulkopuolelle jääneistä ja painavin karhu selviää noista kahdesta helposti kolmannella punnituksella. Jos vaaka jää epätasapainoon, on painavin karhu toisessa kolmen ryhmässä. tällöin kolmas punnitus pitää suorittaa samalla kolmeen jakamisen periaatteella kuin aiemmatkin punnitukset. Yksi karhu jää siis ulkopuolelle ja kaksi karhua laitetaan vaa'an eri puolille. Jos vaaka on tasapainossa, ulkopuolelle jäänyt karhu on painavin.

#### **5.5.4 Näyttelyyn tutustuminen**

Yhteisen johdannon jälkeen vieraat saivat vapaasti tutustua näyttelyteltan sisältöön. Kaikkeen sai koskea ja jokaista pulmaa sai yrittää ratkoa. Kaikkiin tehtäviin oli annettu selkeät, suomenkieliset, kirjalliset ohjeet. Ohjaajat kiertelivät opastamassa ja auttamassa sekä kannustivat uusien tehtävien pariin. Houkuttelevimmin esillä omilla pöydillään olivat shakki ja tikkupeli, jotka osoittautuivat suosituimmiksi tehtäviksi. Muut pelit ja tehtävät löytyivät teltan seinillä olevilta hyllyiltä, joista niitä sai ottaa pöydille pelattavaksi ja tutkittaviksi.

## Tikut pöydällä

Näyttävästi esillä ollut tikut pöydällä -peli oli hyvin suosittu kaikkien ryhmien keskuudessa. Ohjaajat usein haastoivat oppilaita pelaamaan ja keksimään voittavaa taktiikkaa. Peliä pelataan kaksin ja yksinkertaisena ideana on poistaa pöydällä rivissä olleita vaaleita tikkuja järjestyksessä uloimmasta tikusta lähtien. Pelin häviää se, joka joutuu nostamaan viimeisen, mustaksi värjätyt tikun. Aluksi pöydällä on 21 tikkuja kuvan 2 mukaisesti. Pelaaja saa nostaa vuoronsa aikana pöydältä yhden, kaksi tai kolme peräkkäistä tikkuja.



Kuva 2: Tikut pöydällä

Pelissä on taktiikka, jonka vuoksi aloittanut pelaaja häviää aina, kun vastusta tietää pelin juonen. Ohjaajat haastoivat oppilaita keksimään itse ratkaisun siihen, miksi oppilaan aloittaessa ohjaaja voittaa aina. Oppilaat keksivät helposti, että kun ennen mustaa tikkuja on jäljellä enää neljä tikkuja, eivät he voi ottaa tikkuja pois mitenkään ilman, että ohjaaja voittaa. Ratkaisun laajentaminen 21 tikkuun oli kuitenkin haastavaa. Idea perustuu jaollisuuteen. Kun aloittaja ottaa yhden tikun, toinen ottaa kolme. Kun aloittaja ottaa kaksi tikkuja, toinen ottaa kaksi ja kun aloittaja ottaa kolme tikkuja, ottaa toinen yhden tikun. Näin päädytään aina tulokseen, jossa aloittajan täytyy ottaa viimeinen, musta, tikku. Kun taktiikka oli keksitty, voitiin peliä muuttaa aloittamalla esimerkiksi 20 tikulla, jolloin voittaja ei ollutkaan heti selvillä.

Muita pelejä ja tehtäviä on tarkemmin esitelty myöhemmin.

### 5.5.5 Lopputehtävät

Lopussa keräännettiin yhteen tekemään vielä lopputehtävä. Lopputehtävänä käytettiin usein binääriajatuslaskua tai varsinkin nuoremmille sopivaa talonpojanongelmaa, joka toimi myös pari kertaa johdantonäytelmänä ensimmäisen luokan oppilaille.

## Binääriajatustenluku

Binääriajatustenluvussa ohjaaja kertoo oppilaille, että hän osaa lukea oppilaiden ajatuksia. Ei kuitenkaan mitä tahansa ajatuksia, vaan ainoastaan numero ajatuksia. Ajatusten lukemiseen hän tarvitsee kuitenkin avuksi numerotaulukoita. Ohjaaja arvuutteli usein oppilaiden syntymäpäivää tai jotain muuta numeroa 1-31 välillä. Numerotaulukoita oli viisi, joista löytyivät numerot 31 saakka. Taulukoiden ensimmäisillä numeroilla oli taikatempun kannalta merkitystä, sillä numeroista 1,2,4,8 ja 16, pystytään yhteen laskemalla muodostamaan kaikki numerot yhden ja 31 välillä.

Ohjaaja valitsi yhden oppilaan, jonka ajatuksia alkoi lukea. Ohjaaja kysyi oppilaalta löytyykö hänen ajattelemansa luku ohjaajan osoittamasta laatikosta. Kaikki laatikot käytiin läpi ja ohjaaja painoi mieleensä, mistä kaikista oppilaan numero löytyi. Ajatellun numeron ohjaaja sai selville laskemalla yhteen laatikoiden, joista numero löytyy, ensimmäiset numerot. Oppilaat olivat hämmästyneitä, miten ohjaaja pääsi oikeaan lukuun. Ohjaaja toisti tempun muutamalle oppilaalle, jonka jälkeen yhdessä pohdittiin, miten tempu oli mahdollinen. Kun ratkaisu löydettiin, oppilaat saivat itse kokeilla toistensa ajatustenlukemista. Näyttelystä löytyi myös taulukot, joissa numerot olivat 1-127 välillä, jolloin yhteenlaskuista tuli hieman hankalampia. Binäärilukuihin perustuvat taulukot ovat kuvassa 3.

1	3	5	7	2	3	6	7	4	5	6	7
9	11	13	15	10	11	14	15	12	13	14	15
17	19	21	23	18	19	22	23	20	21	22	23
25	27	29	31	26	27	30	31	28	29	30	31
8	9	10	11	16	17	18	19				
12	13	14	15	20	21	22	23				
24	25	26	27	24	25	26	27				
28	29	30	31	28	29	30	31				

Kuva 3: Binääriajatustenluku taulukot

## Talonpojan ongelma

Talonpojan ongelmassa oppilaat pääsivät näyttämään itse. Tehtävään oli rekvisiittaa ja päähineet neljälle tehtävään osallistuvalla oppilaalla. Yksi oppilas oli talonpoika, yksi oli lammas, yksi susi ja yksi kaalinpää.

Tarinassa talonpoika oli ollut markkinoilla ostamassa kaalia ja lampaan. Matkalla hän oli onnistunut pyydystämään suden, jonka päätti viedä eläintarhaan. Talonpoika tuli joelle, jonka ylittämiseksi talonpojan oli soudettava veneellä, johon mahtui hänen lisäksi vain yksi sudesta, lampaasta ja kaalinkerästä. Hänen oli siis soudettava joen yli useampaan kertaan, saadakseen kaikki perille. Hän ei kuitenkaan voinut jättää sutta ja lammasta keskenään, ettei susi syö lammasta. Jos lammas ja kaalinkerä olisivat jääneet kaksin, lammas olisi syönyt kaalin. Miten talonpoika saa kaiken mukaansa joen yli?

Oppilaat pohtivat ja kokeilivat eri vaihtoehtoja. Lopulta päädyttiin ratkaisuun, jossa talonpoika vie ensin lampaan yli. Sitten hän soutaa hakemaan sutta. Suden tuotuaan hän ottaa lampaan mukaansa ja vie takaisin lähtörannalle, josta ottaa mukaansa kaalinpään. Kaalinpään hän soutaa suden luo ja käy vielä hakemassa lampaan.

### 5.5.6 Kysymyksiä ja palautetta

Ennen näyttelyn loppua ohjaajat kysyivät vierailta, löytyikö teltasta jotain, joka ei liittynyt matematiikkaan. Vastauksista keskusteltiin lyhyesti ja vierailta oli mahdollisuus esittää ohjaajille kysymyksiä. Lopussa oli myös mahdollista antaa palautetta suullisesti ohjaajille. Osalta ryhmiä kerättiin myös kirjallista palautetta kysymyslomakkeella. Näyttelyn lopetuksessa tärkeää oli, että näyttely saadaan suljettua yhdeksi kokonaisuudeksi.

## 5.6 Palaute

Palautetta kerättiin näyttelykerran lopuksi oppilailta ja opettajilta, lisäksi ohjaajat kirjoittivat ajatuksiaan ryhmistä ja tehtävien toimivuudesta. Oppilailta kysyttiin kolme kysymystä: Mikä oli kivointa, mitä uutta opit ja minkä näyttelyssä olleen asian et tiennyt liittyvän matematiikkaan. Opettajien lomakkeessa oli kaksi kysymystä: Saitko uusia ideoita matematiikantunneille, jos niin mitä ja mikä näyttelyssä oli hyvää ja mitä voisi parantaa. Ohjaajien antama palaute oli vapaampaa. Lomakkeessa apukysymyksinä olivat: Miten ryhmä toimi, mikä tuntui mielenkiintoiselta, oliko haasteita, oliko oppilailla hauskaa ja mitä voisi parantaa. Palautelomakkeet ovat liitteenä. Kuvassa 4 on taulukoitu kuinka monta palautetta eri luokka-asteilta kerättiin.

	1.luokka	2.luokka	3.luokka	4.luokka	5.luokka	6.luokka	7.luokka	8.luokka	9.luokka
Oppilaat	0	22	50	43	23	36	52	0	20
Opettajat	8	8	10	4	5	3	6	5	5
Ohjaajat	9	6	10	7	6	3	7	4	6

Kuva 4: Palautteiden määrä

### 5.6.1 Millaisia ryhmät olivat

Ohjaajat kokosivat ajatuksiaan näyttelykerran jälkeen siitä miten ryhmä toimi, oliko oppilailla hauskaa ja tuliko ryhmän kanssa haasteita. Ohjaajien palautteiden perusteella, luokka-asteesta riippumatta, oppilaat olivat oma-aloitteisia, omatoimisia, innokkaita, ja ohjaajista tuntui, että suurimmalla osalla oli hauskaa. Suurimmas-  
sa osassa ryhmiä oli noin 20 oppilasta ja 1 tai 2 aikuista, mikä tuntui ohjaajista sopivalta määrältä. Toisen luokan oppilaiden ryhmistä muutamissa oli yli 25 henkeä, mikä tuntui ohjaajista paljolta. Isossa ryhmässä kaikkia ei ehtinyt huomioida tarpeeksi. Suuressa ryhmässä oppilaiden hälinä ja äänet näyttelytilan ulkopuolelta museokeskuksesta häiritsivät tekemistä. Ohjaajia olisi isoissa ryhmissä voinut olla enemmän.

Ensimmäisen ja toisen luokan oppilaat olivat ohjaajien havaintojen perusteella energisiä ja vilkkaita. Kaikki löysivät jotain mielenkiintoista tekemistä ja olivat innokkaita kokeilemaan kaikkea ja tutkimaan paikkoja. Osa oppilaista kyseli paljon. Ohjaajien oli haastavaa ehtiä huomioimaan kaikki oppilaat ja vastata kaikkiin kysymyksiin. Oppilaat keksivät yleensä ongelmiin nopeasti ratkaisuja ja yhteistyö sujui hyvin. Haasteena oli, että kaikki eivät malttaneet pysyä paikallaan yhteisten tehtävien aikana. Keskittyminen ei välttämättä riittänyt pitkään yhteen tehtävään, vaan ohjaajien piti keksiä uutta tekemistä. Esimerkiksi maapallon heittäminen lähti riehaantumään, vaikka olikin oppilaiden mielestä mielenkiintoista. Ohjaajien piti olla myös tarkkana, jotta pelien ja tehtävien tarvikkeet pysyivät tallessa ja palautuivat oikeille paikoilleen. Näyttelyaika tuntui olevan usein liian lyhyt pienille oppilaille. Ensimmäisen luokan oppilaat olivat ehkä liian nuoria ymmärtämään Möbiuksen nauhaa.

Kolmannen ja neljännen luokan oppilaat innostuivat vapaudesta päättää itse mitä teki ja siitä, että matematiikka oli ihan erilaista kuin koulussa. Näyttelyn matematiikka oli heistä kivaa matematiikkaa. Oppilaat olivat vilkkaita, mutta ryhmät toimivat hyvin. Oppilaat viihtyivät hyvin, eivätkä olisi halunneet lopettaa ollenkaan. Kaikille riitti tekemistä, ja he olivat hyvin mukana draamassa ja pulmissa. He kokeilivat rohkeasti ja melko itsenäisesti kaikkea. Osa oppilaista tarvitsi kuitenkin ohjausta löytääkseen tekemistä. Kaikki eivät jaksaneet keskittyä koko näyttelyaikaan,

mutta osalle aika tuntui olevan liian lyhyt ja pidempääkin olisi pelailtu. Kaksi poikaa testasi rajojaan, eikä omien sanojensa mukaan tykännyt mistään; he halusivat vain jääkiekkomuseoon.

Viides- ja kuudesluokkalaiset olivat kiinnostuneita ja lähtivät hyvin mukaan yhteisiin tehtäviin. Oppilaat löysivät mielenkiintoista tekemistä ja jaksoivat keskittyä tekemään pelejä ja tehtäviä. Ohjaajien mielestä viides- ja kuudesluokkalaiset tuntuivat optimaaliselta kohderyhmältä. Oppilaiden avoimuus ja mukaan lähteminen yllätti. Oppilaat olivat fiksua ja toimivat hyvin ryhmässä. Oppilaiden osallistumisessa oli eroa; osa ei tehnyt juuri mitään, kun taas osa ei olisi malttanut lopettaa ollenkaan.

Yläkoululaiset jakautuivat alakoululaisia enemmän omiin pieniin ryhmiin. Osa oppilaista oli innostuneita, itsenäisiä ja jaksoivat keskittyä pitkään valitsemaansa ongelmaan. Yllättävää oli, että näyttelyn viimeinen ryhmä perjantaina 31.5. klo 13.30, juuri ennen kesäloman alkua, oli omatoiminen ja yllättävän innostunut seitsemäsluokka. Näyttelyajan loppuessa, oppilaiden keskuudesta kuului ei lopeteta vielä. Osa yläkoululaisista oli varsinkin näyttelyn alussa hieman vastahakoisia ja alkunäytelmä kangerteli oppilaiden passiivisuuden vuoksi. Kaikki oppilaat eivät uskaltaneet tai viitsineet tutkia näyttelystä löytyviä esineitä ja tehtäviä, niin että olisivat itse löytäneet jotakin tehtävää. Ohjaajien esitellessä näyttelyn sisältöä enemmän ja henkilökohtaisemmin, yleensä jokaiselle kuitenkin löytyi jokin mielenkiintoinen ja innostava tehtävä. Oppilaiden innostus ja aktiivisuus parani näyttelyn kuluessa ja lopussa jokin peli tai ongelma jäi usein kesken.

Näyttely kerrat olivat ohjaajille pääsääntöisesti positiivisia kokemuksia ja oppilaiden kanssa toimiminen oli hauskaa. Ohjaajien mielestä oli mielenkiintoista seurata oppilaiden oivaltamisen hetkiä. Kuudesluokkalainen tyttö oli vastannut palautteeseen, että kivointa oli ohjaajien innokkuus ja toisen mielestä kivointa oli ohjaajan voittaminen pelissä.

### 5.6.2 Alkunäytelmän sopivuus

Alun dramatisoinnissa oli ohjaajilla vaihtoehtoina kolme erilaista tehtävää, joista yritettiin valita ryhmälle sopiva näytelmä. Ohjaajien palautteiden perusteella karkkipussiongelmaa esitettiin kaiken ikäisille oppilaille. Ensimmäisen luokan oppilaat saivat ongelman ratkaistua, ja tehtävä toimi heille hyvin. Myös 2-4 luokkalaisille tehtävä oli sopivan tasoinen. Viidesluokkalaisista ylöspäin tehtävä alkoi tuntua liian helpolta, mutta toimi silti herättelynä näyttelyyn. Osa, varsinkin yläkoululaisryhmistä, oli vaikea saada mukaan karkkipussiongelmaan, esimerkiksi eräässä ryhmässä

kukaan ei ensin ehdottanut mitään, mutta lopulta yksi poika kertoi koko tehtävän ratkaisun. Tehtävä oli todennäköisesti siis liian helppo, jolloin oppilaat eivät vaivautuneet vastaamaan.

Mittausongelmaa esitettiin lähinnä 3 – 6 luokkalaisille. Varsinkin 3 – 4 - luokkalaiset tuntuivat olevan tehtävän kohde yleisö, koska mittayksiköitä oli juuri käsitelty koulussa. Mittausongelma oli esitetty myös 1-luokkalaisille, vaikka ongelma ratkesi, oli se huono, koska oppilaat eivät olleet vielä käsitelleet mittayksiköitä.

Siltaongelma oli tehtävistä vaikein ja sitä esitettiin yläkoululaisille. Seitsemäsluokkalaisille tehtävä tuntui vielä vähän vaikealta, mutta 8 – 9 - luokkalaisille toimi ja tehtävä saatiin ratkaistua. Osa yläkoulun ryhmistä oli hyvin passiivisia ja alun tehtävässä joutui johdattelemaan todella paljon ennen kuin ratkaisu löydettiin. On vaikea sanoa, johtuiko passiivisuus tehtävän helppoudesta tai vaikeudesta vai oppilaiden asenteesta. Osa ryhmistä oli erittäin aktiivisia alun siltaongelmassa. Näytelmään tarvittiin yksi tai kaksi vapaaehtoista mukaan, jotta kaikkiin neljään rooliin oli näyttelijä, jotkut oppilaat innostuivat näyttelemistä paljon. Näytelmät tutuivat myös huvittavan osaa oppilaista, ehkä vanhempien oppilaiden mielestä näytelmät olivat hieman lapsellisia.

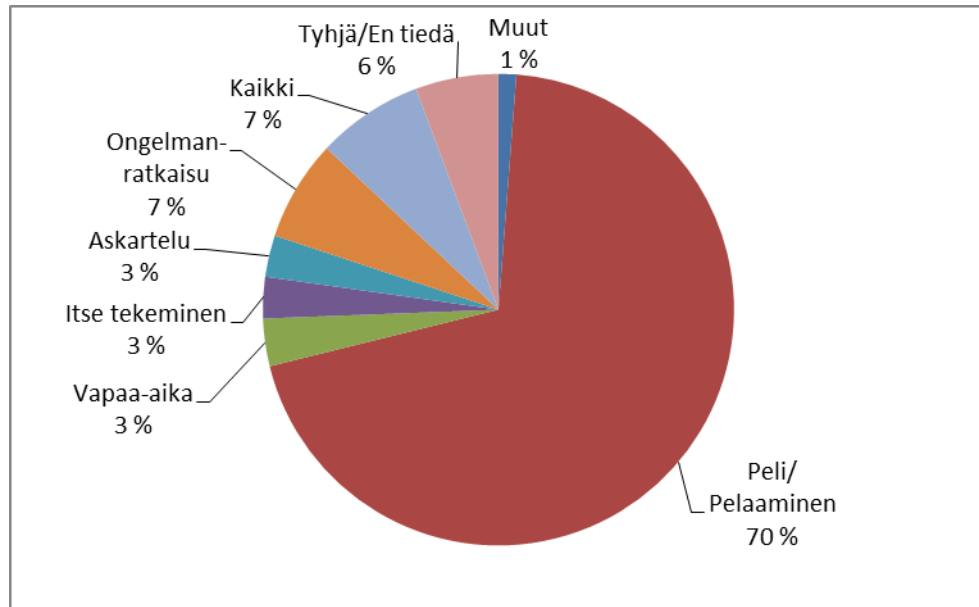
Lopussa kokoonnuttiin yhdessä tekemään vielä jokin tehtävä, useimmiten talonpojan ongelma, ajatustenluku tai nallen punnitus -tehtävä. Talonpojan ongelma oli toimiva 1 – 4 - luokkalaisille, jotka olivat innostuneita, kun pääsivät näyttelemään itse. Ajatusten luku toimi kaikenikäisten kanssa ja oli oppilaista jännittävää. Myös nallen punnitus sopi kaiken ikäisille. Seitsemäsluokkalaisten kanssa oli kokeiltu siltaongelmaa lopputehtävänä. Ohjaajat kokivat sen toimivan lopussa alkua paremmin. Oppilaat tuntuivat olevan näyttelyn jälkeen vapautuneempia heittelemään ehdotuksia.

### 5.6.3 Suositut tehtävät

Ohjaajat kirjoittivat palautteisiin tehtäviä, jotka olivat olleet suosittuja ryhmien keskuudessa. Oppilaille jaetuissa palautelomakkeissa kysyttiin, että mikä oli kivointa näyttelyssä. Palautteissa nousi esiin selkeitä suosikkitehtäviä, mutta vastauksissa oli myös vaihtelua. Oppilaiden palautteiden perusteella on kuvaan 5 koottu 246 oppilaan vastaukset kysymykseen Mikä oli kivointa?. Oppilaista 70 % vastasi pelaamisen tai jonkin pelin nimen, 7 % vastasi ongelmanratkaisun, 7 % vastasi, että kaikki oli kivaa, 6 % jätti kysymyksen tyhjäksi tai vastasi, että ei tiedä, 3 % vastasi askartelun,

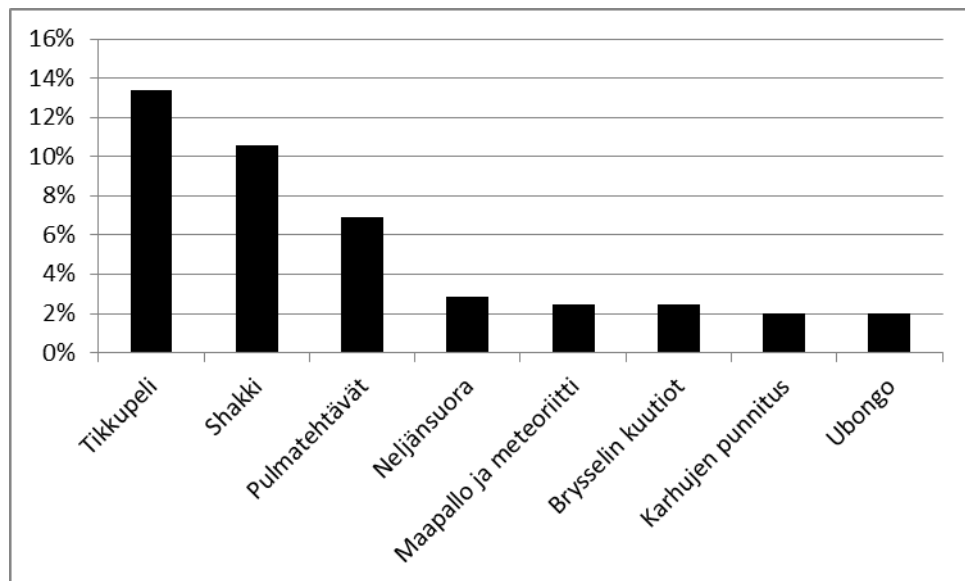


3 % vastasi vapaa-ajan ja 3 % vastasi, että kivointa oli, kun sai tehdä itse. Yhden oppilaan mielestä ohjaajien asut olivat kivointa. Yhden mielestä matematiikan laskeminen oli kivointa. Yksi oppilas vastasi, että ei ollut kivaa.



Kuva 5: Oppilaiden mielestä kivointa näyttelyssä

Kuvassa 6 on esitetty suosituimpia pelejä ja kuinka monessa prosentissa oppilaiden 246 palautteesta pelin nimi mainittiin. Tikkupeli oli suosituin ja se mainittiin 13,4 % palautteista, shakki mainittiin 10,6 %, pulmatehtävät 6,9 %, neljän suora 2,8 %, maapallo ja meteoriitti 2,4 %, Brysselin kuutiot 2,4 %, karhujen punnitus 2,0 % ja Ubongo 2,0 % palautteista.



Kuva 6: Suosituimmat tehtävät

### **Ensimmäisen ja toisen luokan oppilaat**

Ensimmäisen luokan oppilailta ei kerätty kirjallista palautetta, koska he ovat vielä niin nuoria ja kirjoittaminen on osalle vaikeaa. Toisen luokan oppilaista palautteeseen vastasi 22 oppilasta. Ohjaajat kirjasivat ensimmäisen luokan ryhmistä palautteita 9 kappaletta ja toisen luokan ryhmistä 6 kappaletta.

Shakin oli 6 oppilaista kirjoittanut suosikikseen, tikkupelin 5 oppilasta, 3D neljän-suoran 2 oppilasta, lisäksi mainittiin karkkikulho, karhujen punnitus, askartelu ja värittäminen. Kaksi oppilasta oli vastannut, että kaikki oli kivaa, kaksi vastasi pelien pelaamisen ja kaksi oli jättänyt vastaamatta kysymykseen.

Ohjaajien palautteen mukaan ensimmäisen ja toisen luokan oppilaat innostuivat geolaudoista ja Platonin kappaleiden askartelusta. Moni pelasi ennestään tuttuja pelejä kuten shakkia ja neljän suoraa, mutta uskaltautuivat kokeilemaan myös uusia. Tikkupeli ja shakki olivat ohjaajien huomioiden perusteella suosituimmat pelit. Muita mieluisia tehtäviä olivat Brysselinkuutiot, Rush Hour -peli, TricTrac peli, karhujen punnitus, karkkipeli, taiteen tekeminen peilien avulla ja arvuuttelu, missä kolmesta rasiasta kivi on.

Nuorimpien oppilaiden suosikit olivat sellaisia tehtäviä, joissa sai ohjeiden mukaan rakentaa tai askarrella jotakin. Peleistä suosittiin ennestään tuttuja pelejä tai pelejä, joissa oli helpot ja selkeät säännöt. Monimutkaisempia ongelmanratkaisutehtäviä ei palautteiden perusteella usein yritetty ratkoa.

### **Kolmannen ja neljännen luokan oppilaat**

Kolmannen luokan palautteisiin vastasi 50 oppilasta ja neljännen luokan 43 oppilasta. Ohjaajat kirjoittivat palautetta 10:stä kolmannen ja 7:stä neljännen luokan ryhmästä.

Tikut pöydällä pelin oli maininnut lempipelikseen 15 oppilasta, shakin 9 oppilasta, neljän suoraa 4 oppilasta, Brysselin kuutiot 5 oppilasta, Ubongon 3 oppilasta ja Rush Hourin 2 oppilasta. Mieluisia tehtäviä olivat maapallo ja meteoriitti, jonka vastasi 5 oppilasta, Platonin kappaleet 3 oppilasta ja binääriajatustenluvun 2 oppilasta. Lisäksi palautteissa oli mainittu askartelu, piirtäminen, pulmat, vaihtaisitko vai et, karhujen punnitseminen, kuvioiden eli tesselaatioiden tekeminen, kuminau-

hojen pujottelu eli geolaudat ja se, että sai laskea matikkaa.

Pelejä erittelemättä, 13 oppilasta vastasi, että pelien pelaaminen oli kivointa, 3 oppilasta vastasi, että oli kivaa, kun oli vapaa aikaa ja sai tehdä mitä haluaa. 10 oppilasta vastasi, että kaikki oli kivaa, 2 vastasi en tiedä ja 4 oppilasta oli jättänyt vastaamatta kysymykseen.

Ohjaajien palautteiden mukaan kolmannen ja neljännen luokan oppilaat innostuivat shakista, tikkupelistä, Brysselin kuutioista, vaihtaisitko vai et pelistä, neljän suorasta sekä pulmista ja ongelmanratkaisuisista. Ajatustenluvusta innostuttiin paljon, ja se oli oppilaiden mielestä mielenkiintoista. Lisäksi ohjaajien palautteissa mainittiin maapallo ja meteoriitti, Rush Hour, Logix, arkkitehtipalat ja geolaudat.

Suosittu pelit olivat kolmannen ja neljännen luokan oppilailla melkein samoja kuin nuoremmillakin. Palautteista huomasi kuitenkin eron nuorempiin pulmapeleissä ja ongelmanratkaisuisissa. Ensimmäisen ja toisen luokan palautteissa ei sanoja pulma ja ongelmanratkaisu mainittu, mutta kolmannen ja neljännen luokan palautteissa ne mainittiin sekä oppilaiden että ohjaajien toimesta. Ohjaajien mukaan pulmatehtävät olivat suosittuja, ja ongelmat myös ratkesivat hyvin.

### **Viidennen ja kuudennen luokan oppilaat**

Viidennen luokan palautteisiin vastasi 23 oppilasta ja kuudennen luokan 36 oppilasta. Ohjaajat kirjoittivat palautteen 6:sta viidennen ja 3:sta kuudennen luokan oppilaasta.

Tikkupelin oli kirjoittanut suosikikseen 5 oppilasta, shakin vain yksi oppilas, Ubongon 2 oppilasta, Hanojin tornin 2 oppilasta ja neljän suoran yksi oppilas. Lisäksi tehtävistä mainittiin karhujen punnitus kaksi kertaa, pulma- ja ongelmanratkaisu-tehtävät neljä kertaa, arvoitukset, rakentelu, Möbiuksen nauha, kolikonpiilotus ja binääriajatustenluku. Askartelu oli kivointa kahden oppilaan mielestä. Kuudesluokalainen tyttö oli vastannut, että luuli ensin, että tehdään vain tylsiä laskuja, mutta pelit ja ongelmanratkaisut olivatkin kivoja.

Neljä oppilasta vastasi, että oli kivointa, että sai kokeilla monia uusia, erilaisia ja mielenkiintoisia asioita. Vapaa-ajan ja itsenäisen työskentelyn oli vastannut suosikikseen 4 oppilasta. Pelien pelaaminen oli kivointa 28 oppilaan mielestä, tehtävien tekeminen 2 mielestä, yksi vastasi en tiedä ja yksi jätti vastaamatta kysymykseen.

Ohjaajien palautteiden mukaan tikkupeli oli jälleen yksi suosituimmista peleistä. Ajatustenluvusta pidettiin myös, ja moni kopio taulukot kotiin vietäviksi. Osa oppilaista innostui arvuuttelemaan myös isommilla numeroilla, jolloin yhteenlasku oli haastavampaa. Muita ohjaajien mainitsemia tehtäviä olivat neljän suora, Logix, shakki, geolaudat, vaihtaako vai ei peli ja Brysselin kuutiot. Viides ja kuudesluokkalaiset pitivät pulmapeleistä ja ongelmaratkaisutehtävistä esimerkiksi mahdoton leikkaus vaivasi monia.

Viides ja kuudesluokkalaiset tuntuivat olevan innoissaan siitä, että matematiikka näyttelyn matematiikka oli erilaista kuin koulussa. Työskentely oli vapaata, ja jokainen sai valita itselleen mieleistä tekemistä. Ongelmanratkaisutehtävät kiinnostivat ja haastavampiakin pulmia saatiin ratkaistua.

### **Yläkoulun oppilaat**

Yläkoulun oppilaista palautteisiin vastasi 52 seitsemäsluokkalaista ja 20 yhdeksäsluokkalaista. Ohjaajat olivat kirjoittaneet huomioitaan 7:stä seitsemännen luokan, 4:stä kahdeksännen luokan ja 6:sta yhdeksännen luokan ryhmästä.

Tikkupelin mainitsi yläkoululaisista suosikikseen 8 oppilasta, shakin 9 oppilasta, 2 oppilasta maapallo ja meteoriitti -pelin, 2 Hanoi tornin ja yksi oppilas Rush Hourin. Älypelit, pulmat ja aivojumat mainittiin 8 vastauksessa.

Vaikka yläkoululaiset vaikuttivatkin vastahakoisemmilta osallistumaan yhteisiin tehtäviin, oli seitsemäsluokkalainen tyttö vastannut ohjattujen juttujen olleen kivointa. Yhdeksäsluokkalainen poika oli vastannut, että alkutehtävä oli kivointa ja yhdeksäsluokkalaisen tytön mielestä kivointa olivat ohjaajien asut. Seitsemäsluokkalainen tyttö oli sitä mieltä, että kivointa oli kun sai itse ratkoa asioita, ja seitsemännen luokan poika tykkäsi pelata yksi vastaan yksi -pelejä.

Kysymykseen vastasi 22 oppilasta, että pelit ja pelaaminen oli kivointa, 2 oppilasta vastasi, että vapaa-aika oli kivointa, 7 oppilasta vastasi, että kaikki oli kivaa, 2 oppilasta vastasi en tiedä ja 3 oppilasta jätti vastaamatta kysymykseen. Yksi yhdeksännen luokan poika vastasi, että ei ollut kivaa.

Ohjaajien mukaan tikkupeli ja shakki olivat jälleen suosiossa, mutta oli tehty myös huomio, että eräässä seitsemännen luokan ryhmässä kukaan ei pelannut shakkia. Muita suosittuja pelejä ja tehtäviä olivat neljän suorat, Khalahari, tesselaatio, peli-

kortit ja Logix. Älypelit ja ongelmanratkaisutehtävät olivat yläkoululaisille mieluisia. Pulmista mainittiin ohjaajien palautteissa mahdoton leikkaus, puiset palapelit, tilitikkupulmat, Brysselin kuutiot ja Hanoin torni.

Yläkoulun oppilaiden suosikit olivat pulmapelejä, joihin jaksettiin keskittyä pidempiäkin aikoja. Askartelusta, esimerkiksi Platonin kappaleiden teosta, innostuttiin selkeästi vähemmän kuin alakoululaisten ryhmissä. Yläkoululaiset ottivat vapaan työskentelyn melko rennosti. Muutama kahdeksannen ja yhdeksännen luokan oppilas halusi vain pelata kännykällään tai pelikorteilla tuttuja pelejä. Suurin osa kuitenkin innostui edes yhdestä näyttelyn pelistä tai pulmasta.

### 5.6.4 Mitä uutta opittiin

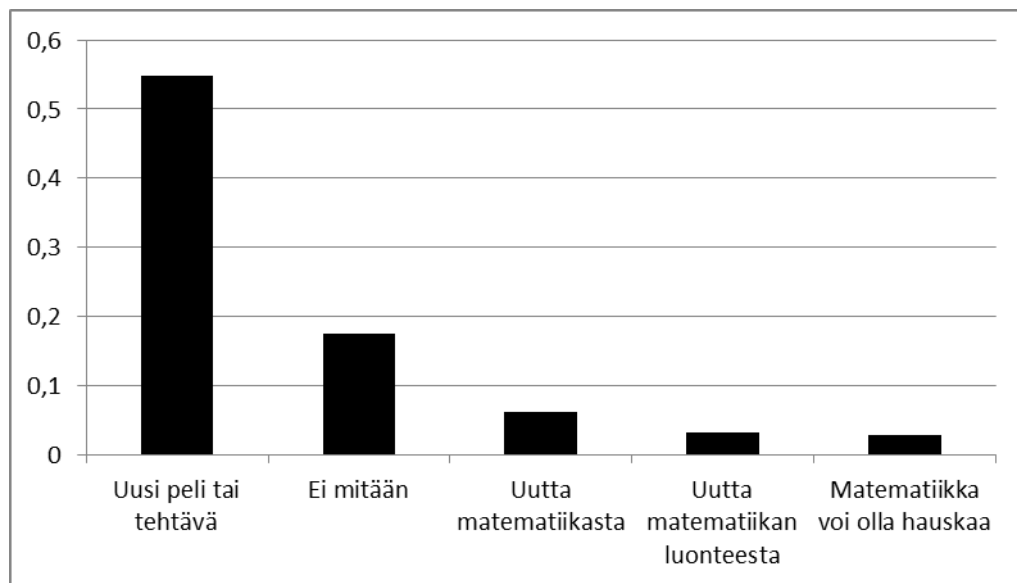
Oppilaiden palautelomakkeen toinen kysymys oli, että mitä uutta opit. Vastauksissa esiintyi usein suosittujen pelien ja tehtävien nimiä, joiden säännöt ja ratkaisut oli näyttelyn aikana opittu. Useissa vastauksissa sanottiin, että oli opittu uusia pelejä, sääntöjä ja taktiikoita, mutta ei eritelty minkä pelin oli oppinut. Tällaisia vastauksia oli 22 kappaletta. Oppilaista 11 mainitsi oppineensa uusia pulmatehtäviä ja pähkinöitä. Tikkupelin mainitsi 19 oppilasta, erityisesti oli opittu tikkupelin taktiikka, jolla voittaa aina. Ajatustenlukutaikatempon kertoi oppineensa 22 oppilasta. Tässä erityisesti huomio kiinnittyi siihen, että 5 oppilasta oli kirjoittanut sanan binääri, mikä tuskin oli monelle tuttu sana ennen näyttelyä. Möbiuksen nauhan kertoi oppineensa 10 oppilasta. Vaikka shakki oli monelle entuudestaan tuttu, mainitsi sen 9 oppilasta. Erityisesti shakissa oli opittu sääntöjä ja erilaisia taktiikoita. Muita nimeiltä mainittuja pelejä ja tehtäviä olivat kuution taittelu (4 vastausta), vaihtaisitko vai et, symmetriset kuviot, Ubongo, Naom Gabo, 3D neljän suora, laskinlaudan, peilikuvasyymetria, maapallo ja meteoriiti peli (5 vastausta) ja risti-nolla.

Matematiikkaa yleensä sanoi oppineensa 7 oppilasta ja 4 oppilasta kertoi oppineensa laskemaan paremmin. Seitsemäsluokkalainen tyttö kertoi oppineensa, että on huono matematiikassa. Uutena asiana 2 oppilaalle tuli, kuinka paljon matematiikkaa käytetään. Kolmasluokkalainen tyttö oli havainnut matematiikan olevan osa arkea. Matematiikan termeistä mainitsi toisen luokan oppilas oppineensa desimetrin, ja 2 seitsemännen luokan tyttöä sanoi oppineensa algebran nimen. Kuudesluokkalainen tyttö sanoi oppineensa muinaisista matematiikan henkilöistä.

Näyttely yllätti monet positiivisesti, ja 8 oppilasta oli oppinut, että matematiikka voi olla hauskaa ja sisältää muutakin kuin laskemista. Yksi yhdeksäsluokkalainen

poika kirjoitti oppineensa matematiikan moniulotteisuuden, ja neljäsluokkalainen tyttö oli oppinut suurempaa ajattelua. Kaikkea ja kaikenlaista oli oppinut palautteiden mukaan 20 oppilasta, 43 oppilasta vastasi, että ei oppinut mitään uutta, 23 oppilasta vastasi en tiedä ja 11 oli jättänyt vastaamatta kysymykseen. Neljännen luokan poika kirjoitti oppineensa hillitsemään itseään.

Kuvassa 7 on koottu oppilaiden yleisimmät vastaukset kysymykseen Mitä uutta opit. Oppilaista 54,9 % vastasi oppineensa jonkin pelin, 17,5 % ei ollut oppinut mitään, 6,1 % oppi jonkin uuden asian matematiikasta, esimerkiksi uuden termin, 3,3 % oppi jotain uutta matematiikan luonteesta, esimerkiksi sen, että ongelmanratkaisu on osa matematiikkaa, 2,8 % kertoi oppineensa, että matematiikka voi olla kivaa.



Kuva 7: Mitä uutta opittiin

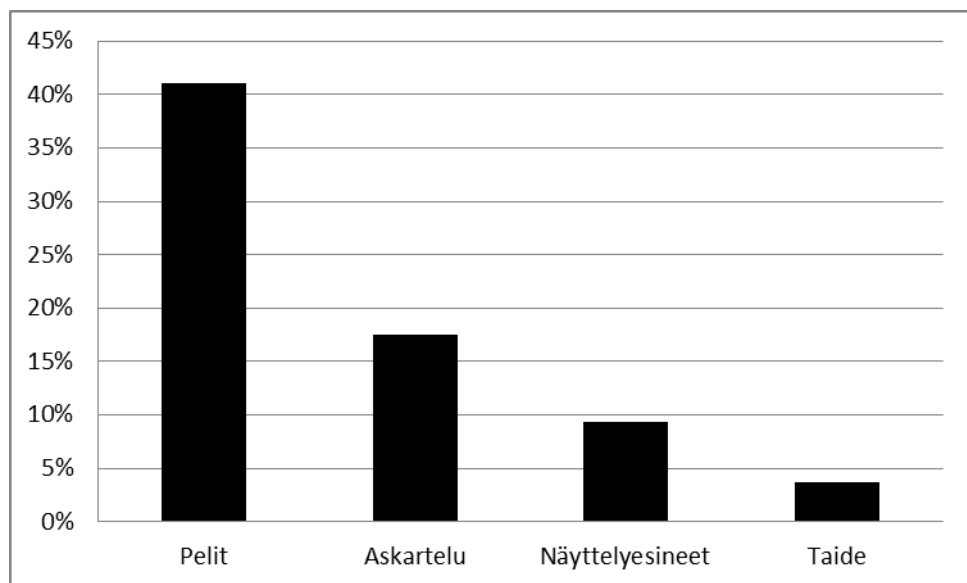
### 5.6.5 Mikä oppilaiden mielestä ei liittynyt matematiikkaan

Yhtenä näyttelyn tavoitteena oli herättää oppilaita huomaamaan matematiikka kaikkialla ympärillään. Ohjaajat kertoivat oppilaille kaiken teltassa olevan liittyvän matematiikkaan. Lopussa keskusteltiin siitä, mikä oppilaiden mielestä ei liittynyt matematiikkaan, ja yhdessä yritettiin miettiä millä tavalla kaikki kuitenkin matematiikkaan liittyi. Palautelomakkeessa kysyttiin oppilailta, että minkä näyttelyssä olleen asian et tiennyt liittyvän matematiikkaan.

Peleistä matematiikkaa ei oppilaiden mielestä ollut tikkupeli (16 vastausta), shakki (26 vastausta), geolaudat, neljän suorat, Kalaha, Ubongo ja vaihtaisitko vai et peli. Erilaisten pulmapelien ei myöskään tiedetty liittyvän matematiikkaan. Möbiuksen

nauhan ja binääriajatustenluvun ei tiedetty olevan matematiikka. Maapallo ja meteoriitti tehtävän ei tiedetty liittyvän matematiikkaan. Se mainittiin 13 vastauksessa. Todennäköisyydet ovat peruskoululaisille ja varsinkin alakoululaisille vielä vieraita. Askartelun vastasi 16 oppilasta. Askarteluun liittyen vastattiin, että kuvioiden piirtämisen, värittämisen paperin ja paperin taittelun ja leikkaamisen ei tiedetty liittyvän matematiikkaan. Taiteen ja kuvien ei myöskään tiedetty liittyvän matematiikkaan. Näyttelyssä olleista esineistä matematiikkaan ei oppilaiden mielestä liittynyt tulitikut, ananas, käpy, teltta, tuli, valo, vesi, potkulauta, ratti, keppihevonen, pöydät, tuolit ja matot. Yksi oppilas vastasi tähän kysymykseen, että ei tiennyt, että matematiikka voi olla näin hauskaa.

Kuvaan 8 on koottu oppilaiden yleisimmät vastaukset kysymykseen Minkä näyttelyssä olleen asian et tiennyt liittyvän matematiikkaan?. Oppilaista 41,1 % vastasi, että ei tiennyt pelien yleensä tai jonkin yksittäisen pelin kuuluvan matematiikkaan. Oppilaista 17,5 % vastasi, että askartelu ei liity matematiikkaan. Näyttelyssä olleen esineen, esimerkiksi pöydät, lamput, tuolit, mainitsi 9,3 %. Taiteen, jolla viitattiin seinillä olleisiin kuviin, vastasi 3,7 %.



Kuva 8: Mikä oppilaiden mielestä ei liittynyt matematiikkaan

### 5.6.6 Opettajien ajatuksia näyttelystä

Palautelomakkeella opettajalta kysyttiin ajatuksia siitä, mikä näyttelyssä oli hyvää ja mitä voisi parantaa. Opettajat kehuivat näyttelyä kivaksi, ihanaksi ja upeaksi ja kiittelivät kovasti. Näyttely oli monipuolinen, runsas ja laajensi käsitystä matematiikasta niin oppilailla kuin opettajallakin. Parasta oli toiminnallisuus. Pelit

ja ongelmat olivat mielenkiintoisia, ja kaiken ikäisille ja tasoisille löytyi tekemistä. Oppilaat pääsivät osallistumaan ja saivat itse kokeilla monenlaisia pelejä ja leikkejä. Erityisesti nuorempien lasten kanssa toiminnallisuus koettiin tärkeäksi. Oppilaat kehittivät vaivihkaa matemaattisia taitojaan ja huomasivat, että monessa asiassa tarvitaan päättelytaitoja.

Toteutuksesta pidettiin. Näyttely oli hyvin suunniteltu ja organisoitu. Pelit olivat helposti lähestyttävällä tavalla tarjolla ja pöytäasetelma toimi. Ohjeet olivat selkeitä ja helppolukuisia. Tila oli riittävän pieni ja tiivis, jolloin ryhmä oli helppo pitää kasassa. Teeman mukaista lavastusta keuhuttiin myös. Kehyskertomus oli hauska ja historian mukaan ottaminen monipuolista näyttelyä. Aloitus ja lopetus draamallisesti olivat innostavia, hauskoja ja elävöittivät näyttelyä mukavasti.

Ohjaajia keuhuttiin innostuneiksi ja osaaviksi. He heittäytyivät rooleihinsa hyvin, niin asujen kuin olemuksiansa kautta. Hyvät ohjaajat tekivät näyttelystä kaikille lapsille sopivan. Näyttelyssä oli positiivinen tunnelma. Ohjaajat saivat myös hieman passiiviset kahdeksaslukkalaiset tekemään tehtäviä.

Kolmannen luokan opettaja huomasi, että sellaisetkin lapset miettivät, oivalsivat ja ehdottivat ratkaisua alun karkkipussiongelmaan, jotka yleensä eivät sanallisista tehtävistä tykkää tai selviä. Viidennen luokan opettaja kertoi, että huomasi kuinka matematiikan oppimisvaikeuksista kärsivät oppilaat alkoivat oma-aloitteisesti ratkoa matemaattisia ongelmia. Heikommat ja haastavat oppilaat viihtyivät ja löysivät paljon tekemistä.

Lapset olivat innostuneita, motivoituneita ja pitivät erilaisesta matematiikan tunteista. Kolmannen luokan opettaja vastasi, että oppilaat jaksoivat keskittyä hyvin tekemisiinsä, vaikka tullessa heitä mietityttiinkin millainen voi olla matematiikkanäyttely. Aika kului jopa hämmästyttävän nopeasti ja rauha säilyi kun oli tekemistä. Aikaa kokeiluun ja pelaamiseen oli suurimman osan opettajista mieleen tarpeeksi. Opettajan mielestä oli ilo seurata lasten touhuja, innostusta ja riemua. Näyttelyssä ei tullut aika pitkäksi ja aivosolut saivat haastetta. Toisen luokan opettaja kertoi innostuneensa matematiikasta itsekin aivan uudestaan.

Ohjaajien kokemuksen perusteella suuri osa opettajista oli hyvin mukana ja olivat innostuneita näyttelystä. Innostunut ja kiinnostunut opettaja sai myös ryhmänsä oppilaita kiinnostumaan tehtävistä. Osa opettajista kopioi ja otti valokuvia jutuisista ideoiksi itselleen. Yhdessä ryhmässä opettajat olivat todella passiivisia, eivätkä sanoneet oppilaille, eivät ohjaajille sanaakaan, mikä jätti ohjaajille suuren vastuun



oppilaiden innostamisessa.

Parannusehdotuksia opettajilla oli melko vähän. Näyttely tuntui olevan kaikkien mieleen. Jotain huomioita ja toivomuksia opettajilta kuitenkin tuli. Pari opettajaa odotti enemmän ohjattua ongelmanratkaisua ja olisi toivonut aluksi enemmän pelien esittelyä ja motivointia tehtävien pariin. Pari opettajaa olisi kaivannut enemmän tietoa siitä, missä ympärillä on matematiikkaa ja mihin sitä tarvitaan. Ensimmäisen luokan opettajan mielestä laskutaitoa tarvittaisiin enemmän kun mitä ensimmäisen luokan oppilailla on. Yksi opettaja toivoi, että oppilaiden ääni olisi alussa ollut kuuluvampi, koska taustamelu oli häirinnyt. Ohjaajia olisi voinut olla enemmän ja ryhmän koko on palautteen mukaan hyvä pitää 20 oppilaassa. Näyttelytilaan toivottiin suurempia pelipöytiä. Yhdessä palautteessa toivottiin myös avoimia yleisöaikoja.

Neljä opettajaa harmitteli, että aika jäi liian lyhyeksi, eikä kaikkea ehtinyt kokeilemaan. Yksi opettaja toivoi palautteessaan, että tällaista toimintaa järjestettäisiin lisää. Kolmessa palautteessa toivottiin vinkkilistaa tehtävistä ja tarvikkeista, jotta koulun matematiikkavarastoa olisi helpompi päivittää. Opettajat saivat uusia ideoita, mutta toivoivat ohjeita ja lisätietoa koottuna kirjallisena, joko paperille, sähköpostiin tai nettisivuille, jotta opitut pelit eivät unohdu. Ohjeita toivottiin myös siksi, että kaikkea ei millään ehtinyt näyttelyssä kokeilla, niin tekemättä jääneitä tehtäviä voisi hyvin ottaa mukaan matematiikan tunneille.

### 5.6.7 Opettajien saamat ideat omaan opetukseen

Opettajilta kysyttiin palautteissa, että saivatko he uusia ideoita näyttelystä ja jos niin mitä. Palautetta kerättiin 54 peruskoululuokan mukana näyttelyssä olleelta opettajalta.

Suurin osa opettajista vastasi saaneensa paljon uusia, käyttökelpoisia ideoita mielenkiintoisista peleistä, pulmista, askartelusta, hahmottamisesta ja muista tehtävistä. Osa peleistä ja tehtävistä oli opettajille tuttuja, mutta niiden käyttöä opetuksessa ei ollut ajateltu aiemmin. Osa näyttelyn aktiviteeteista taas olivat täysin uusia opettajille. Uusista tehtävistä mainittiin tuhattaulu, Möbiuksen nauha ja tikut pöydällä. Binääriajatustenluvun innoittamana kahdeksannen luokan opettaja sanoi, että he opiskelevat binääriluvut seuraavalla viikolla.

Osa opettajista oli aiemminkin käyttänyt opetuksessa toiminnallisuutta, toimintatunteja, pelejä ja pulmatehtäviä. Kahdessa palautteessa mainittiin, että pelejä oli lai-

nattu koululle Matikkamansesta. Yksi ensimmäisen luokan opettaja kertoi saaneensa ideoita uusista peleistä koulun esi- ja alkuopetuksen yhteiseen matematiikkapajaan. Opettajat huomasivat oppilaiden innostuvan pelaamisesta ja ongelmanratkaisusta. Välineet, pelit ja konkreettinen havainnollistaminen auttavat ymmärtämään asioita paremmin. Esimerkiksi sanallisten tehtävien tekemiseen voisi ottaa mukaan havainnollistavia juttuja esimerkiksi sukkaa ja nalleja. Toiminnallisuus on myös oppilaita motivoivaa. Monet opettajat selkeästi heräsivät toiminnallisuuteen ja kirjoittivat lisäävänsä mielikuvitusta, variaatioita, itse kokeilemista ja pohdintaa matematiikan tunteihin. Näyttely toimi muistutuksena siitä, että matematiikka on muutakin kuin laskemista ja tunteja voisi hyvin virkistää erilaisilla peleillä. Kolmannen luokan mukana ollut laaja-alainen erityisopettaja uskoi, että juuri tällaiset matemaattiset pelit ja tehtävät olisivat mielekäs tapa oppilaalle, jolle matemaattinen hahmottaminen on pulmallista.

Alun näytellystä ongelmanratkaisusta pidettiin myös. Yhdeksännen luokan opettaja sanoi alun silta ongelman olevan sopiva myös oppitunneille. Eräs kahdeksannen luokan opettaja pohti, että näyttelemineen voisi toimia myös oppitunnilla.

Opettajat pitivät näyttelyn rekvisiittaa ja välineistöä viehättävänä ja selkeästi kootuna ja myös siksi motivoivana. Pelien ja pulmatehtävien lisäämistä koulun hankinta listalle mietti moni. Joillain kouluilla oli jo valmiiksi matematiikkavälineitä, jotka eivät kuitenkaan olleet vielä aktiivisessa käytössä. Näyttelystä löytyi myös yksinkertaista materiaalia, jota on helppo hankkia koululle ja jotka pystyy liittämään tuntiin ihan ektempore. Monet peleistä olivat myös sellaisia, jotka saattaisivat löytyä opettajan tai oppilaiden kotoa. Yksi opettaja sanoi, että pelejä voisi kehitellä koululla itse lasten kanssa.

Parin opettajaa sai ideoita myös muualle kuin matematiikan tunneille. Ongelmatehtävät kehittävät ajattelua ja keskittymistä monialaisesti. Näyttelyssä oli esimerkiksi kuvaamataitoon hyvin sopivia tehtäviä.

Haasteiksi ideoiden toteutuksessa opettajat mainitsivat rahan ja ajan puutteen. Koululla ei ole rahaa ostaa ongelmanratkaisuvälineistöä, joten käytetään monisteita. Välineistön etsimiseen ja kokoamiseen kuluu myös aikaa. Opetussuunnitelmassa ei opettajien mielestä tunnu olevan tilaa pelailulle, jotta kaikki teoria asiat saadaan käsiteltyä. Eräs toisen luokan opettaja totesi, että moni idea on todella tuttu, mutta arjen puristuksessa nämä hienot pelit ja pulmat jäävät hyvin vähälle. Tehtäviä pitäisi vaan rohkeasti ottaa enemmän mukaan.

## 6. TOIMINNALLISIA TEHTÄVIÄ MATEMATIIKAN OPISKELUUN

Tässä kappaleessa on esitelty suurin osa matematiikanäyttelyn peleistä ja tehtävistä. Muutama tehtävä, dramatisointi ja pulma esiteltiin jo aiemmassa matematiikanäyttelystä kertovassa kappaleessa. Tehtävät on jaoteltu neljään osioon, jotka ovat geometria ja hahmottaminen, luvut ja laskutoimitukset, todennäköisyydet sekä ongelmanratkaisu- ja pulmatehtävät. Esiteltyä toimintamateriaalia voi varmasti soveltaa muissakin matematiikan osa-alueissa. Osa tehtävistä sopii myös yhdistettäväksi muihin oppiaineisiin esimerkiksi kuvaamataitoon, historiaan tai käsitöihin.

### 6.1 Geometria

**Platonin kappaleet** Antiikin Kreikan aikana elänyt filosofi Platon todisti, että säännöllisiä monitahokkaita on vain viisi. Näitä kappaleita kutsutaan Platonin kappaleiksi. Ne ovat tetraedri, kuutio eli heksaedri, oktaedri, dodekaedri ja ikosaedri. Platonin kappaleiden tahkot ovat yhdenmuotoisia säännöllisiä tason monikulmioita. (Pappas 2006, s.122) Näyttelyssä oli tulostettuna pohjia, joista leikkaamalla, taittelemalla ja liimaamalla saatiin askarrellua Platonin kappaleet. Kappaleiden askarteleminen itse auttaa hahmottamaan geometrisia muotoja sekä tasossa, että kolmiulotteisena.

**Arkkitehtipalat** ovat rakennuspalikoita, joista voi rakentaa esimerkiksi erilaisia torneja. Näyttelyssä olleisiin palikoihin liittyi lisäksi tehtävä kirja, jossa oli kuvia erilaisista rakennelmista. Tehtävänä oli käyttää oikeita palikoita ja rakentaa kuvaa vastaava rakennelma.

**Brysselin kuutiot** on pulmapeli, jossa kuudesta palapelin palasta on tarkoitus koota kuutio. Palapelin palat sopivat kuution muotoon vain yhdellä tavalla. Kuutioilla rakentelu kehittää visuaalista hahmottamista, sekä hienomotorisia taitoja.

**Babylonin kuutiot** pelissä on valmiita palikoita, joista saa koottua kuution. Pelissä

on seitsemän erilaista palikkaa, joista kuution kokoamiseen tarvitaan vain kuutta. Pelin alussa arvotaan värinopalla, minkä värinen pala jätetään pois. Jäljelle jää siis uusilla pelikerroilla eripalat, jolloin ratkaisu on myös erilainen.

Näyttelyssä olleet **geolaudat** olivat puisia lautoja, joihin oli lyöty nauvoja riveihin, vierekkäin ja allekkain. Geolaudan naulojen väliin pingotetaan kuminauhoja, joiden avulla voidaan muodostaa erilaisia geometrisia kuvioita. Geolaudat sopivat hyvin geometrian opetukseen, kun tutkitaan yksinkertaisia muotoja ja niiden ominaisuuksia.

**Naum Gabo** oli Venäjällä vuonna 1890 syntynyt taitelija, joka loi veistoksia pingottamalla lankoja erilaisiin kehyksiin. Tällä tavalla hän loi kauniita kaaria ja muotoja. (Dahl Nordqvist 1995, s. 15) Näyttelyssä oli geolautojen lisäksi Naum Gabo -lautoja, joihin pingotettiin kuminauhoja. Kuminauhat pingotettiin suoriksi. Suorien avulla saatiin muodostettua kaarevia muotoja, samaan tapaan kuin Naum Gabo oli taiteessaan tehnyt.

**Tesselaatio** sana tulee latinasta ja tarkoittaa pientä mosaiikin palaa. Tesselaatio tehtävässä tarkoituksena on sovittaa erilaisia geometrisia muotoja yhteen niin, että palojen väliin ei jää rakoja. Palat eivät myöskään saa mennä päällekkäin. Näyttelyssä olleista paloista sai mielensä mukaan koota kauniita kuvioita. Palojen avulla pystyi tekemään myös symmetrisiä kuvioita ja näin havainnollistamana symmetrian käsitettä. Tesselaatiota käytetään muun muassa laatoituksessa, käsitöissä ja tape-toinnissa. Luonnossa tesselaatioita löytyy esimerkiksi hämähäkin verkosta ja kilpikonnan kuoresta.

Näyttelytilan seinällä oli kuvia **Escherin** taideteoksista. M. C. Escher oli 1898 syntynyt hollantilainen kuvataiteilija. Hän on tunnettu mahdottomia asioita ja esineitä kuvaavista taideteoksistaan. Kuvissa Escher vääristelee perspektiiviä, jolloin hän saa objektit taipumaan toivotunlaisiksi. Työt ovat vaatineet geometrista tarkkuutta. Kuvia katsellessa katsoja yrittää hahmottaa geometrisia muotoja ja kappaleita, mutta se on lähes mahdonta. (Kilpamäki 2010)

**Ubongo** on lautapeli, jossa pelaajilla on joukko erimuotoisia palikoita, jotka pitää asettaa annetulle alustalle siten, että ne peittävät sen kokonaan. Ubongo on ongelmanratkaisupeli, jossa tarvitaan muotojen hahmottamista sekä yhteensopivuuksien havaitsemista.

Näyttelyssä oli erilaisia **neljän suoraa** ja risti-nollaa muistuttavia pelejä. Taval-

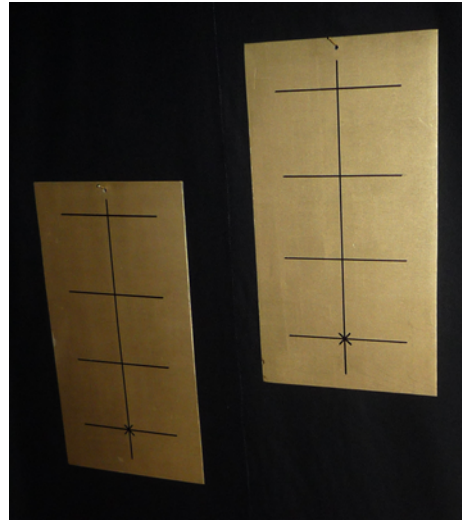
lisessä neljän suorassa pelaajat pudottavat pelinappuloitaan vuorotellen kaksiulotteiseen pelilautaan tarkoituksena saada omat nappulat pystysuoraan, vaakasuoraan tai vinoon neljän suoraan. Tavallisen version lisäksi näyttelyssä oli 3D versio, missä pelilauta on kolmiulotteinen. Täysi pelilauta on kuution muotoinen. Peli vaatii huomattavasti enemmän hahmottamista kuin tavallinen versio, koska neljänsuora voi muodostua kuution sivuille, keskelle tai lävistäjille. Pelin avulla voidaan havainnollistaa kuution eri osia.

Pelissä nimeltä **Quarto** on myös tarkoitus saada neljä pelinappulaa suoraan. Quartossa nappuloilla on erilaisia ominaisuuksia. Neljän suorassa olevilla nappuloilla pitää olla jokin yhdistävä ominaisuus. Niiden tulee esimerkiksi olla samanmuotoisia, värisiä tai kokoisia. **Pentagossa** tarkoitus on saada viisi pelinappulaa suoraan. Pelilauta koostuu neljästä  $3 \times 3$ -ruudukosta. Peli eroaa neljän suorasta siten, että vuoronsa päätteeksi pelaajat kääntävät yhtä laudan neljänneksistä 90 astetta. Pelaajan tulee siis ottaa huomioon kuinka nappuloiden paikka kääntämisen seurauksena muuttuu.

**Quoridor** pelissä tarkoituksena on selviytyä omalla pelinappulalla laudan toiselle puolelle. Vastapelaajan etenemistä estetään rakentamalla aitoja. Joka vuorolla pelaaja voi valita, asettaako aidan vai siirtääkö nappulaansa. Aitoja on rajallisesti, joten niiden pelaaminen siten, että ne estävät vastapelaajaa parhaimmalla tavalla, eivätkä haittaa omaa etenemistä, on vaativaa. Peli kehittää avaruudellista hahmottamista.

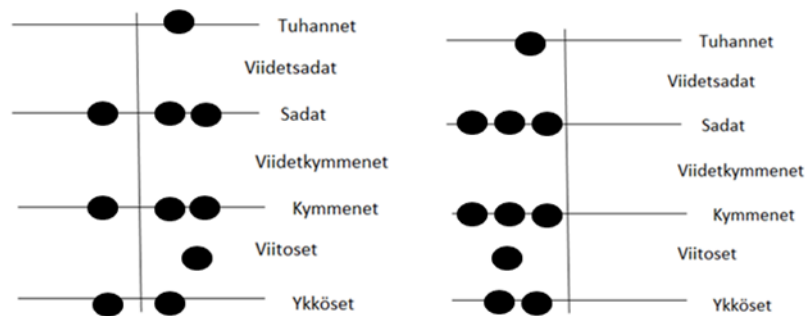
## 6.2 Luvut ja laskutoimitukset

**Laske laudalla** tehtävän avulla voidaan harjoitella isoilla luvuilla yhteen laskemista. Näyttelyssä olleet taulut, kuva 9, soveltuvat yhteenlaskuihin, joiden suurin summa on 4999. Tauluihin voisi kuitenkin lisätä viivoja, jolloin pystytään laskemaan vielä isommilla luvuilla.



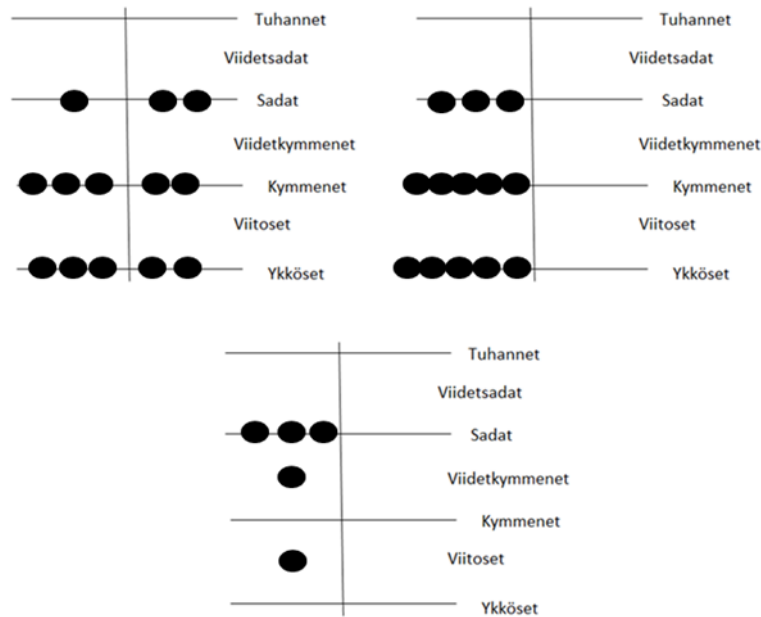
Kuva 9: Laske laudalla -alustat

Laudalle muodostetaan lukuja, niin että viivoille ja viivojen väliin asetetaan lukua vastaava määrä kiviä tai muita nappuloita. Alimmalle viivalle tulee ykkösiä vastaava määrä nappuloita, toiselle viivalle kymmeniä vastaava, kolmannelle satoja ja niin edelleen. Viivojen väliin tulee viitokset, viidet kymmenet, viidet sadat ja niin edelleen. Jos esimerkiksi halutaan laskea yhteen luvut 111 ja 1226, asetetaan ensin 111 laskin laudan vasemmalle puolelle ja 1226 laudan oikealle puolelle. Sitten nappulat siirretään viivoja pitkin kaikki samalle puolelle, kuten kuvassa 10. Nyt voidaan lukea laudalta uusi luku eli esimerkkitapauksessa 1337, joka on vastaus laskutoimitukseen  $111 + 1226$ .

Kuva 10: Laske laudalla esimerkki 1:  $111 + 1226 = 1337$ 

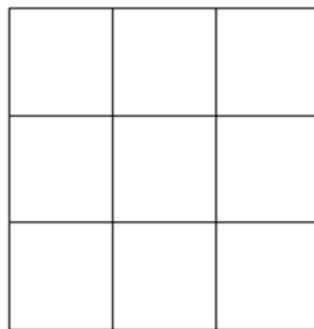
Jokaiselle viivalle mahtuu kerrallaan vain neljä nappulaa ja viivojen välissä voi olla vain yksi nappula. Jos viiva tai väli täyttyy, nappulat korvataan yhdellä ylempään tason napilla. Kuvassa 11 on esitetty lukujen 133 ja 222 yhteenlasku. Nyt alimmalle viivalle tulee viisi nappulaa, joten ne pitää korvata yhdellä viivojen välissä olevalla

viitosta tarkoittavalla nappulalla. Samoin käy kymmenien kohdalla. Vastaukseksi saadaan siis 355.



Kuva 11: Laske laudalla esimerkki 2:  $133 + 222 = 355$

**Ajattele tuhatta -pelissä** käytetään yksinkertaista peliruudukkoa, joka on kuvassa 12. Jokainen peliin osallistuva oppilas piirtää itselleen  $3 \times 3$  ruudukon.



Kuva 12: Ajattele tuhatta -peliruudukko

Sitten heitetään noppaa. Nopan heittänyt sanoo luvun ääneen ja kaikki peliin osallistuvat kirjaavat luvun johonkin yhdeksästä ruudusta. Noppaa heitetään yhdeksän kertaa. Kun ruudukko on täynnä, lasketaan muodostuneet kolminumeroiset luvut yhteen. Voittaja on se, jonka lukujen summa on lähimpänä lukua 1000. Peli on yksinkertainen toteuttaa ja se sopii kolminumeroisten lukujen yhteenlaskun harjoitteluun. Peliä voi muuttaa myös vähennyslaskuksi, jolloin voidaan tavoitella esimerkiksi lukua 100. Peli ei perustu pelkästään tuuriin nopan heitossa, vaan oppilas joutuu miettimään, mihin yksittäinen luku kannattaa ruudukossa sijoittaa.

**Suurin ja pienin** on yksinkertainen kahdella nopalla sekä paperilla ja kynällä toteutettava peli. Pelaaja heittää kahta noppaa ja muodostaa numeroista mahdollisimman suuren luvun. Jos pelaaja esimerkiksi heittää luvut 3 ja 5, niin ylös kirjattava luku on 53. Pelaaja heittää nopat vielä uudestaan ja muodostaa mahdollisimman pienen luvun. Jos luku on suurempi kuin ensimmäisellä heitolla saatu, heitetään nopat uudestaan. Sitten ensin heitetystä suuresta luvusta vähennetään toisella heitolla saatu pienempi luku. Nyt on seuraavan pelaajan vuoro. Se, kumpi saa laskutoimituksesta isomman luvun, johtaa. Peliä voidaan pelata useampi kierros ja laskea kierrosten tulokset yhteen esimerkiksi niin kauan, että jompikumpi pääsee lukuun 100. Peliä voidaan pelata myös heittämällä kolmea noppaa ja muodostamalla kolminumeroisia lukuja. Suurin ja pienin peli sopii hyvin yhteen- ja vähennyslaskujen mekaaniseen harjoitteluun.

**Tric Trac-pelissä**, joka tunnetaan myös nimellä shut the box, heitetään kahta noppaa. Pelaajan heitettyä nopat, hän sulkee pelilaudassa olevia laatikoita. Laatikot ovat numeroituja luvuilla 1-9 ja pelaaja saa sulkea yhden tai useamman laatikon, joiden numerot vastaavat nopilla heitettyä summaa. Pelilauta on esitetty kuvassa 13. Pelivuoro päättyy, kun pelaaja ei enää pysty sulkemaan laatikoita. Auki jääneet laatikot lasketaan miinuspisteiksi. Peliä voi käyttää lukukäsitteiden (0-9) ja yksinkertaisten yhteenlaskujen opetteluun.



Kuva 13: Tric Trac

Näyttelyssä olleista **ananaksesta** ja **kävystä** pystyttiin huomaamaan spiraalin muoto. Kun lasketaan myötöpäivään ja vastapäivään kulkevat spiraalit, saadaan kaksi lukua, jotka ovat peräkkäin Fibonaccin lukujonossa. Fibonacci oli matemaatikko, joka eli 1200-luvulla Italiassa. Fibonaccin lukujonossa seuraava luku on aina kahden sitä edeltävän luvun summa. (Dahl Nordqvist 1995, s. 40-43)

**Nim-pelissä** laitetaan kasa lasikiviä pöydälle. Pelissä nostetaan kiviä vuorotellen niin, että joka pelaajan pitää nostaa vähintään yksi kivi omalla vuorollaan. Ensimmäinen pelaaja ei saa nostaa kaikkia kiviä kerrallaan. Pelaaja saa nostaa kor-



keintaan kaksinkertaisen määrän kiviä viimeksi vuorossa olleen pelaajan nostamaan kivimäärään verrattuna. Viimeiset kivet nostava pelaaja voittaa. Nim-peli liittyy Fibbonaccin lukujonoihin. Pelissä voikin pohtia, että kannattaako peli aloittaa, jos kivien määrä on joku Fibbonaccin lukujonon luku.

### 6.3 Todennäköisyys

**Kolikon heitto** on hieman samantyyppinen todennäköisyyteen liittyvä tehtävä kuin aiemmin esitelty maapallo ja meteoriitti peli. Kolikon heitossa yksinkertaisesti heitetään kolikkoa esimerkiksi 50 kertaa ja kirjataan joka heitolla ylös tuliko kruuna vai klaava. Kun kolikkoa on heitetty tarpeeksi monta kertaa, voidaan laskea kuinka monesta prosentista heittoja tuli esimerkiksi klaava. Tehtävä voidaan toistaa useita kertoja ja verrata saatuja tuloksia. Tehtävässä voidaan miettiä todennäköisyyksiä ja sattuman merkitystä peleissä.

**Vaihtaisitko vai et? -tehtävässä** on kolme rasiaa, joista yhteen pelinvetäjä piilottaa kiven. Pelaajan tehtävänä on arvata, missä rasiassa kivi on. Kun pelaaja arvaa yhden rasioista, pelinvetäjä avaa jäljelle jääneistä rasioista tyhjän. Nyt pelinvetäjä kysyy, että haluaako pelaaja vaihtaa vastaustaan. Useimmiten vaihtaminen kannattaa. Peli perustuu TV-ohjelmaan, jossa kilpailija yrittää voittaa palkinnon arvaamalla, minkä oven takana palkinto on.

**Karamellikulhossa** on 20 vihreää, 20 oranssia ja 20 keltaista karamellia. Tehtävässä kysymyksenä on, että kuinka montaa kertaa täytyy poimia karkki, että voi olla varma saavansa kaksi samanväristä, kolme samanväristä tai kolme eriväristä karkkia. Koska karkit ovat nyt oikeasti kulhossa, voi oppilas selvittää tehtävää konkreettisesti kokeilemalla ja myöhemmin pohtia ongelmaa kynän ja paperin kanssa.

**Sukat hujanhajan!-tehtävä** on samantyyppinen kuin karamellikulho. Nyt laatikossa on 6 vihreää, 6 valkoista ja 6 punaista sukkaa. Tehtävänä on kokeilla ja päätellä, kuinka monta kertaa sotkuisesta sukkalaatikosta pitää nostaa kaksi sukkaa, että saa varmasti samanvärisen parin.

**Mikä taulu!-tehtävässä** on kuvat neljästä taulusta. Kysymyksenä on, että kuinka moneen eri järjestykseen taulut voidaan seinälle laittaa. Koska kuvat ovat irrallisia, voi oppilas selvittää tehtävään ratkaisua kokeilemalla.

**Kädenpuristus!-tehtävässä** kysytään, että kun 5 ihmistä tapaa, niin kuinka monta kädenpuristusta tulee, kun kaikki ovat kätelleet keskenään. Jotta tehtävä voidaan

suorittaa toiminnallisesti, tarvitaan tehtävän tekemiseen 5 oppilasta.

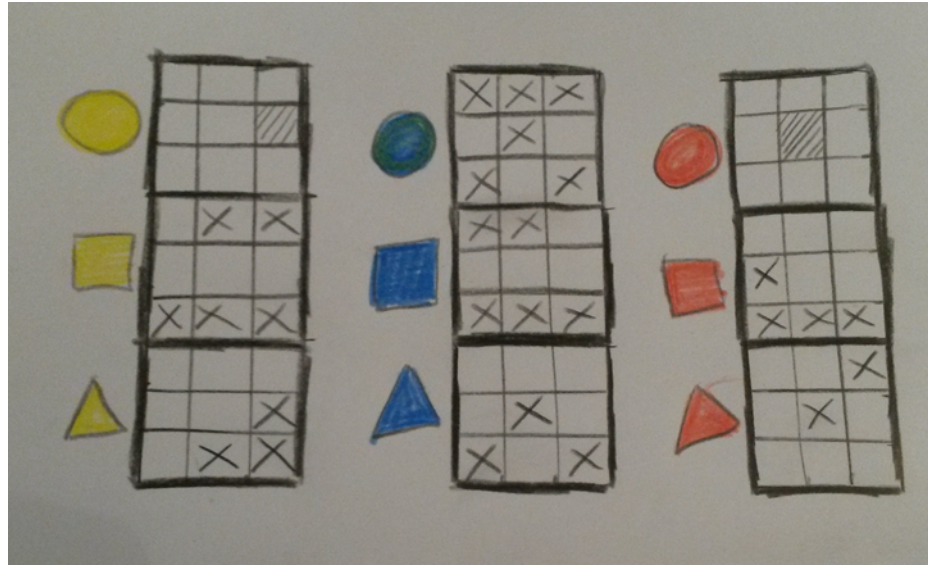
## 6.4 Ongelmanratkaisu

**Shakki** oli näyttelyssä esillä hienosti. Kuvassa 14 olevan pöydän ääressä oli mukava istua näyttävillä tuoleilla. Timo Akkanen (2007) on esitellyt artikkelissaan ranskalaisen kasvatustieteilijä Michel Noirin tekemää väitöskirjaa shakin peluun vaikutuksesta oppimistuloksiin. Tutkimuksen mukaan shakki kehittää keskittymiskykyä, ongelmanratkaisutaitoja, analysoinnin nopeutta, loogista ja luovaa ajattelua, muistikapasiteettia ja kielellistä valmiutta. Shakkia harrastaneiden oppilaiden ongelmanratkaisutaidot olivat jopa 32 % paremmat kuin verrokkiryhmällä. (Akkanen 2007)

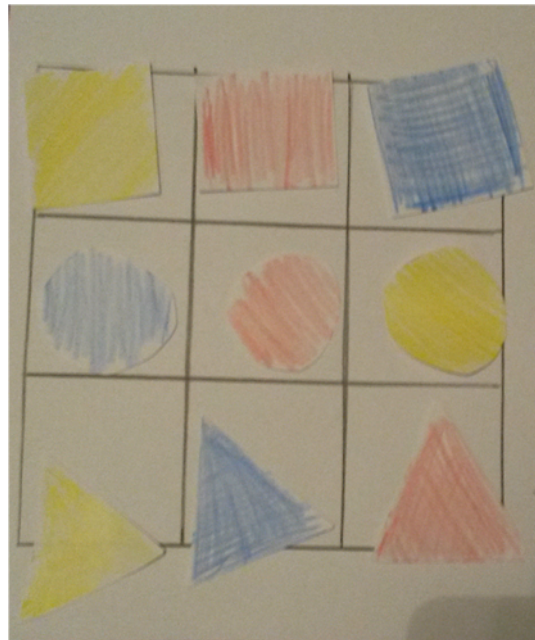


Kuva 14: Näyttelyn shakkipöytä

**Logix- pelissä** sijoitetaan erivärisiä kolmioita, neliöitä ja ympyröitä 3 x 3 ruudukkoon vihjeiden mukaan. Näyttelyn Logix pelissä oli valmiit vihjekortit, muoviset kuviot ja pelilaudat, mutta tarvikkeet voi tehdä myös itse. Oppilaat voivat esimerkiksi keksiä tehtäviä toisilleen. Logix-pelin vihjekorteissa on annettu vinkkejä siihen, missä kohtaa peliruudukkoa kuvion tulee olla. Varjostettu ruutu tarkoittaa, että kuvion tulee olla juuri siinä ruudussa. Rastitettu ruutu tarkoittaa, että kuvio ei saa olla siinä paikalla. Tietyllä värillä väritetystä ruudusta tietää kuvion värin, mutta ei muotoa. Valkoiseksi piirretty kuvio taas kertoo kuvion muodon, mutta ei väriä. Kuvassa 15 on esimerkki itse tehdystä vihjekortista ja kuvassa 16 on kuviot aseteltu pelilaudalle oikeaan järjestykseen.



Kuva 15: Logix-pelin vihjekortti



Kuva 16: Logix-pelilauta

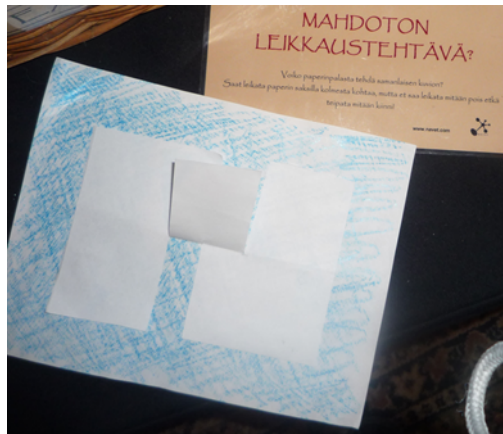
**Hanoin tornissa** on päällekkäin erikokoisia levyjä järjestyksessä niin, että alimmainen levy on isoin ja päällimmäinen pienin. Tehtävänä on siirtää torni yhdestä tikusta toiseen kolmatta tikkua apuna käyttäen. Levyjä saa siirtää vain yksi kerrallaan eikä isompaa levyä saa koskaan laittaa pienemmän päälle. Peli pitää ratkaista käyttämällä mahdollisimman vähän siirtoja. Siirtojen vähimmäismäärä saadaan kaavasta  $2^n - 1$ , missä  $n$  on levyjen määrä.

Hanoin torniin liittyy vanhan taru, jonka mukaan Vietnamin pääkaupungin Hanoin temppeliin asetettiin maailman alussa pronssilevy, jossa on pystyssä kolme timant-

tista neulaa. Yhteen neuloista pinottiin 64 erikokoista kultaista kiekkoa Hanoiin torniksi. Temppelin pappien tehtävä on siirtää tauotta kiekkoja neulasta toiseen. Kiekkoja saa siirtää vain yhden kerrallaan, eikä suurempaa kiekkoa koskaan saa laittaa pienemmän päälle. Torni pitää saada siirrettyä ensimmäiseltä timanttineulalta viimeiselle. Tarun mukaan maailmanloppu koittaa, kun koko torni on saatu siirrettyä. Maailmanloppu ei kuitenkaan taida koittaa kovin pian. Siirtoja tarvitaan  $2^{64} - 1$  eli 18446744073709551615 kappaletta. Vaikka papeilla kestäisi yhden siirron tekemiseen vain sekunti, kuluisi tornin siirtämiseen aikaa melkein 585 miljardia vuotta. (Lahdenperä 2014)

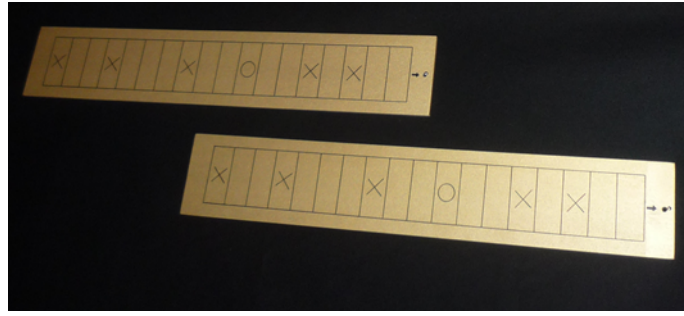
**Rush Hour eli ruuhka-aika** on pulmapeli, jossa tehtävänä on saada punainen auto ulos täyteen ahdetulta pelilaudalta siirtämällä muut autot sen tieltä pois. Pelissä on eri vaikeustasoisia tehtäväkortteja.

**Mahdottomassa leikkaustehtävässä** suorakaiteen muotoista paperinpala saa leikata kolme kertaa, niin että sen saa kuvassa 17 esitettyyn muotoon. Paperista ei saa leikata mitään pois, eikä teippiä saa käyttää. Tehtävän jippona on leikata oikeista kohdista ja kääntää paperia molemmista päistä eri suuntiin.



Kuva 17: Mahdoton leikkaustehtävä?

**Karamellipelissä** pelilaudalle piirrettyjen raksien kohtaan asetetaan kivi ja ympyrän kohtaan karamelli. Kuvassa 18 on tyhjä pelilauta. Tavoitteena on saada itselleen karamelli. Pelaaja voi omalla vuorollaan siirtää yhtä kiveä tai karamellia haluamansa määrän nuolen osoittamaan suuntaan. Lähimpänä nuolta olevan kiven saa poistaa kokonaan pelilaudalta. Toisen pelinappulan kanssa ei saa mennä samaan ruutuun eikä toista nappulaa saa ylittää. Pelin voittaa se, joka saa siirrettyä karamellin pois pelilaudalta.



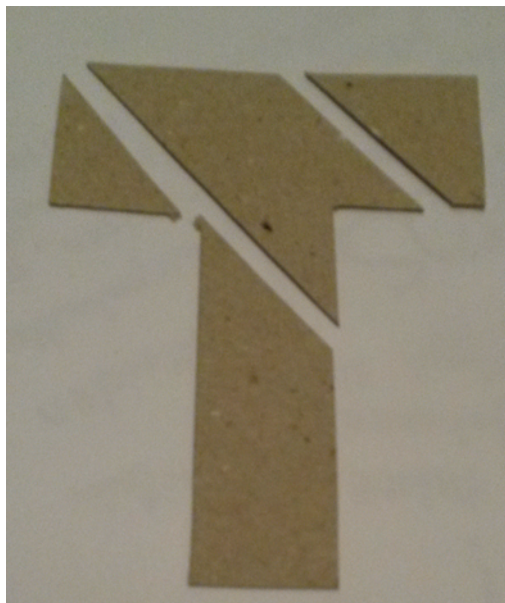
Kuva 18: Karamellipelin pelilauta

**Punaiset ja siniset kuulat -pelissä** tarkoituksena on vaihtaa sinisten ja punaisten kuulien paikkaa keskenään. Pelin lähtötilanne on esitetty kuvassa 19. Kuulia saa siirtää yhden askeleen lähimmälle tikulle tai hyppäämällä erivärisen kuulan yli. Kuulia ei saa siirtää taaksepäin eikä samanvärisen kuulan yli saa hypätä.



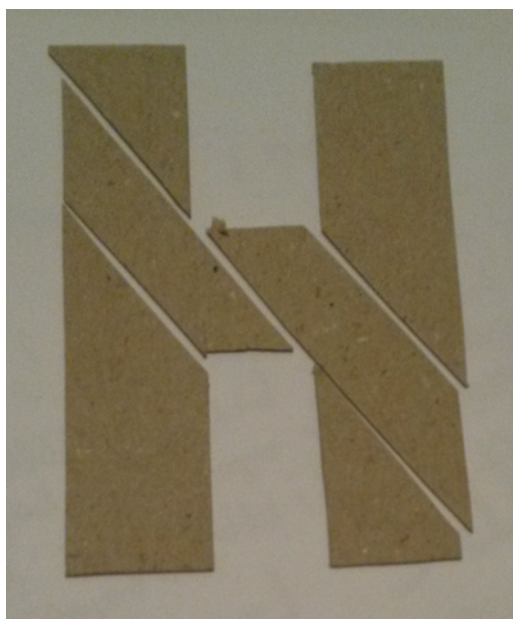
Kuva 19: Punaiset ja siniset kuulat

**T-palapeli** on pulmatehtävä, jossa annetuista paloista pitää koota T-kirjaimen muotoinen. Tehtävän ratkaisu on kuvassa 20.



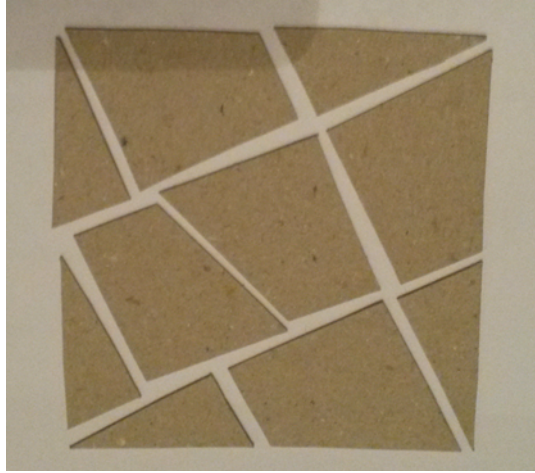
Kuva 20: T-palapeli

**H-palapeli** on pulmatehtävä, jossa annetuista paloista pitää koota H-kirjaimen muotoinen. Tehtävän ratkaisu on kuvassa 21.



Kuva 21: H-palapeli

**Neliöpalapeli** on pulmatehtävä, jossa annetuista paloista pitää koota neliö. Tehtävän ratkaisu on kuvassa 20. Paloista saa helposti koottua suorakaiteen, mutta neliö on huomattavasti haastavampi. Ratkaisua voi lähteä hakemaan, pohtimalla mikä kolmion sivuista on pisin. Näiden sivujen pitää tulla neliön reunoille.



Kuva 22: Neliö-palapeli



## 7. POHDINTAA TOIMINNALLISESTA MATEMATIIKASTA

Luvuilla laskeminen on tärkeä osa matematiikkaa, mutta matematiikka on paljon muutakin. Matematiikka on kieli, jonka ymmärtämiseksi pitää oppia sanoja ja sääntöjä. Matematiikka on työkalu, jonka avulla laaditaan teorioita eri tieteenaloilla. Matematiikka on apuneuvo sekä arkielämässä että tieteessä. Matematiikka on mielikuvitusta, jonka avulla voidaan luoda uusia käsitteitä ja ajatusrakenteita. Matematiikkaa on kaikkialla ympärillämme. (Dahl Nordqvist 1995, s.5-9) Toiminnallisen matematiikan avulla pyritään tuomaan esille matematiikan monet puolet, jotta matematiikkaa ei aina yhdistettäisi vain laskemiseen. Toiminnallisessa matematiikassa opetusvälineiden, työtapojen ja tehtävien avulla sidotaan matematiikka ympärillämme oleviin asioihin ja ilmiöihin.

Bagdad-matematiikkanäyttelyn tavoitteena oli tarjota innostava näkökulma matematiikkaan. Ohjaajien palautteiden perusteella oppilaat olivat innokkaita ja suurimmalla osalla näytti olevan hauskaa näyttelyn aktiviteettien parissa. Opettajien ja ohjaajien mielestä oli ilo seurata lasten innostusta ja riemua. Oppilaiden antamien palautteiden mukaan osa oppilaista oli oppinut, että matematiikka voi olla hauskaa. Oppilaiden antamassa palautteessa vain yksi vastasi, että näyttelyssä ei ollut kivaa. Näyttely toi siis suurimmalle osalle oppilaista positiivisia matematiikkakokemuksia. Oppilaat innostuivat siitä, että matematiikka oli ihan erilaista kuin koulussa. Voidaan siis ajatella, että oppilaat kaipaisivat vaihtelua ja monipuolisia työtapoja kouluopetukseen.

Ohjaajien palautteiden perusteella ihanteellisin kohderyhmä näyttelylle olivat viides- ja kuudesluokkalaiset, joille suurin osa tehtävistä oli oikean tasoisia. Nuoremmille oppilaille osa tehtävistä oli liian vaikeita ja vanhemmille oppilaille taas liian helppoja. Oppilaat eivät välttämättä osanneet valita omaan tasoonsa nähden sopivaa materiaalia laajasta ja oppilaille vieraasta valikoimasta. Ohjaajatkään eivät aina voineet auttaa oikeissa valinnoissa, koska oppilaat olivat vieraita, eivätkä ohjaajat tienneet mitään oppilaiden matematiikkakäsityksistä tai taidoista. Ohjaajat huoma-



sivatkin opettajan merkityksen oppilaiden innostajana. Innostunut ja kiinnostunut opettaja sai myös ryhmänsä kiinnostumaan ja innostumaan tehtävistä.

Yhtenä näyttelyn tavoitteena oli saada osallistujat huomaamaan matematiikkaa kaikkialla ympärillään. Palautteiden perusteella osa oppilaista oli huomannut, että matematiikka ei ole vain laskemista, vaan matematiikkaa on osa arkea ja ympäröivää maailmaa. Moni ei osannut yhdistää näyttelyn pelien ja tehtävien kuuluvan matematiikkaan. Tämä saattaa johtua siitä, että koulumatematiikassa keskitytään pitkälti oppikirjasta, opettajajohtoisesti opiskeluun. Näyttely laajensi käsitystä matematiikasta niin oppilaille kuin opettajillakin. Näyttelykerran lopussa käydyssä ohjaajien ja oppilaiden välisessä keskustelussa pohdittiin vielä yhdessä, miten kaikki näyttelyssä olleet asiat liittyivät matematiikkaan.

Näyttely herätti opettajia huomaamaan toiminnallisuuden, konkreettisuuden ja mielikuvituksen merkityksen matematiikan opiskelussa. Opettajat saivat palautteiden perusteella uusia ideoita omaan matematiikan opetukseensa. Näyttelyn tehtäviä voisi hyvin ottaa mukaan matematiikan tunneille. Osa peleistä oli ennestään tuttuja, mutta niiden käyttöä opetuksessa ei ollut osattu ajatella.

Tulevaisuudessa oppiminen on kokonaisvaltaisempaa eikä niin oppiainejakoon perustuvaa kuin nyt. Opetus on oppilaita aktivoivaa, oppilaslähtöistä ja oppilaiden kokemusmaailmaan liittyvää. Oppiminen on tiedon rakentamista ja luomista, joka nidotaan oppilaiden aikaisempiin käsityksiin. Opiskelijoita aktivoivat ja ymmärtämisestä tukevat menetelmät ovat sekä älyllisesti kehittäviä että oppilaita motivoivia. (Lonka 2011, s.345-352) Uuden, vuonna 2016 käyttöön otettavan, perusopetuksen opetussuunnitelman perusteiden mukaan konkreetilla ja toiminnallisuudella on keskeinen osa tulevaisuuden matematiikan opetuksessa ja opiskelussa. Matematiikan opetuksessa tulee käyttää vaihtelevia opetustapoja ja opetusvälineitä ja matematiikan opetuksen tulee tukea oppilaiden myönteistä asennetta matematiikkaa kohtaan. Lähtökohtana opetuksessa käytetään tuttuja, oppilaita kiinnostavia aiheita ja ongelmia, jotta oppilaille on mahdollisuus löytää ja hyödyntää matematiikkaa omassa elämässään. Opettajien matematiikkanäyttelystä antamissa palautteissa nousi esiin, että aika ei opetussuunnitelmassa tunnu riittävän esimerkiksi pelailuun. Toivottavasti uusi opetussuunnitelma muuttaa ajankäyttöä matematiikan opetuksessa niin, että toiminnallisuudella, pelailulla ja monipuolisilla työtavoilla tulee jatkossa olemaan tärkeä rooli peruskoulun matematiikan opetuksessa.

## LÄHTEET

- Ahtee M., Pehkonen E., *Johdatus matemaattisten aineiden didaktiikkaan*, 2000, Oy Edita Ab, Helsinki, 100 sivua.
- Akkanen, T., *Shakkipeli ja kouluoppiminen*, 2007, 4 sivua, [verkkoartikkeli] saatavilla osoitteesta [http://www.shakkiopetus.net/Shakkivalmennusartikkeli\\_SS.pdf](http://www.shakkiopetus.net/Shakkivalmennusartikkeli_SS.pdf) [Viitattu 1.10.2015]
- Berry B., Sahlberg P, *Matematiikka elämään*, 1995, WSOY, Juva, 135 sivua.
- Boyer, C., *Tieteiden kuningatar : matematiikan historia. Osa 1*, 1994, WSOY, Porvoo, 468 sivua.
- Bransford, J., Brown, A. Cocking, R., *Miten opimme. Aivot, mieli, kokemus ja koulu*, 2004, National Research Council WSOY, Juva, 394 sivua.
- Dahl, K., Nordqvist, S., *Hauskaa matematiikkaa*, 1995, Tammi, Helsinki, 63 sivua.
- Haapasalo L., *Ongelmanratkaisukulttuuri konstruktivistismin peruselementtinä*, Teoksessa Räsänen P. , Kupari P., Ahonen T. Malinen P. (toim.) *Matematiikka näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen*, 2004, Niilo Mäki Instituutti, Jyväskylä, 456 sivua.
- Hayes, M., Höynälänmaa, K., *Montessori pedagogiikka*, 1985, Otava, Keuruu 124 sivua
- Höynälänmaa, K., *Maria Montessori ja montessoripedagogiikan synty*, Teoksessa Paalasmaa, J. (toim.) *Lapsesta käsin. Kasvatuksen ja opetuksen vaihtoehtoja*, 2011, PS-Kustannus, Jyväskylä, 364 sivua
- Ikäheimo, H., Risku, A., *Matematiikan esi- ja alkuopetuksesta* Teoksessa Räsänen, P. (toim.) *Matematiikka - näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen*, 2004, Niilo Mäki Instituutti, Jyväskylä, 456 sivua.

Joutsenlahti, J., *Kielentäminen matematiikan opiskelussa*, 2003, Hämeenlinna, Tampereen yliopisto, 11 sivua, saatavilla osoitteesta <http://www.joutsenlahti.net/Languaging.pdf> [viitattu 10.4.2015]

Kilpamäki, H., *Matemaattisen sääntillistä taidetta*, 2010, [verkkoartikkeli] Saatavissa osoitteesta <http://www.tylkkari.fi/kulttuuri/matemaattisen-santillista-taidetta> [Viitattu 1.10.2015]

Kissanmaan koulu [www] <http://koulut.tampere.fi/kissanmaa/> [viitattu 15.10.2015]

Koponen, R., *Matematiikan didaktiikkaa luokanopettajille*, 1995, Atena Kustannus Oy, Jyväskylä, 253 sivua.

Korhonen, H., *Matematiikan historian henkilöahmoja*, 1995 MFKA-kustannus oy, Lahti, 172 sivua.

Lahdenperä, J., *Hanoin torni*, 2014, [verkkojulkaisu] saatavissa osoitteesta [http://blogs.helsinki.fi/summamutikka/files/2014/09/Hanoin\\_torni.pdf](http://blogs.helsinki.fi/summamutikka/files/2014/09/Hanoin_torni.pdf) [Viitattu 1.10.2015]

Lampinen A., Korhonen H., *Matematiikkaa kaikille Eszter Neményin haastattelu*, 2010, Dimensio 1/2010. Saatavissa osoitteesta [http://www.maol.fi/fileadmin/users/EDimensio/Dimensiossa\\_julkaistua/Nemenyi.pdf](http://www.maol.fi/fileadmin/users/EDimensio/Dimensiossa_julkaistua/Nemenyi.pdf) [Viitattu 10.9.2015]

Lindgren, S., *Toimintamateriaalin käyttö matematiikan opiskelussa : matikkatupakoikeilu peruskoulun toisella luokalla*, 1990, Tampereen yliopisto, Vammalan kirjapaino, Vammala, 204 sivua.

Lonka, K., *Oppiminen ja opetus tulevaisuudessa: bulimia-oppimisesta hyvään oppimiseen* Teoksessa Paalasmaa, J. (toim.) *Lapsesta käsin. Kasvatuksen ja opetuksen vaihtoehtoja*, 2011, PS-Kustannus, Jyväskylä, 364 sivua.

LUMA-keskus Suomi, [www], <http://www.luma.fi/keskus/> [Viitattu 15.9.2015]

LUMA SUOMI, Valtakunnallinen luonnontieteiden ja matematiikan esi- ja perusopetuksen kehittämissuunnitelma 2014-2019 [www] <http://www.luma.fi/suomi/> [viitattu 15.9.2015]

*Matematiikan käsikirja*, toimittanut Thompson J., 1994, Tammi, Juva, 431 sivua.

Montessori, M., *Lapsen salaisuus*, 1983, WSOY, Porvoo, 170 sivua

Nurminen, M., *Tiedon tyttäret : oppineita eurooppalaisia naisia antiikista valistukseen*, 2008, WSOY, Helsinki, 445 sivua.

Opetushallitus, *Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet 2004*, 2004, Vammalan kirjapaino, Vammala, 320 sivua, saatavilla osoitteesta [http://www.oph.fi/download/139848\\_pops\\_web.pdf](http://www.oph.fi/download/139848_pops_web.pdf) [Viitattu 10.9.2015]

Opetushallitus, *Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet 2014*, 2015, Juvenes Print, Tampere, 472 sivua, saatavilla osoitteesta [http://www.oph.fi/download/163777\\_perusopetuksen\\_opetussuunnitelman\\_perusteet\\_2014.pdf](http://www.oph.fi/download/163777_perusopetuksen_opetussuunnitelman_perusteet_2014.pdf) [Viitattu 10.9.2015]

Opperi [www] Saatavilla osoitteesta [http://www.opperi.fi/07\\_matikkamaa/07\\_matikkamaa.html](http://www.opperi.fi/07_matikkamaa/07_matikkamaa.html) [viitattu 15.9.2015]

Pappas, T. *Matematiikan ilot. Näe matematiikka ympärilläsi*, 2006, Terra cognita, Hakapaino, Helsinki, 256 sivua.

Partanen, A., *Challenging the School Mathematics Culture: An Investigative Small-Group Approach*, 2011, Rovaniemi, Lapin yliopistokustannus, 223 sivua, saatavilla osoitteesta [https://lauda.ulapland.fi/bitstream/handle/10024/61640/Partanen\\_Anna-Maija\\_DORIA.pdf?sequence=1](https://lauda.ulapland.fi/bitstream/handle/10024/61640/Partanen_Anna-Maija_DORIA.pdf?sequence=1) [viitattu 16.9.2015]

Summamutikka-keskus, [www] <http://www.luma.fi/summamutikka> [viitattu 15.10.2015]

Tampereen LUMATE-keskus, [www], <https://www.lumate.fi/lumatekeskus/> [viitattu 15.10.2015]

Tikkanen, P., *"Helpompaa ja hauskeempaa kuin luulin"Matematiikka suomalaisten ja unkarilaisten perusopetuksen neljäsluokkalaisten kokemana*, 2008, Jyväskylän yliopisto, Jyväskylä, 318 sivua.

Törmä, T., *Bagdad ja äärettömyys matematiikkanäyttely Tietomaassa*, 2012, [verkoartikkeli] saatavilla osoitteesta <http://ouluma.fi/2012/05/bagdad-ja-aarettomyys-matematiikkanayttely-tietomaassa/> [Viitattu 12.7.2015]

Varga-Nemenyi ry, 2015, [www], saatavilla osoitteesta <http://varganemenyi.fi/menetelma/tietoa-menetelmasta/varga-nemenyi-menetelma/24-menetelman-osiot/36-todellisuuteen-perustuvien-kokemusten-hankkiminen> [Viitattu 10.9.2015]

## A. LIITTEET

### A.1 Oppilaiden palautelomake

Ikä \_\_\_\_\_

Olen tyttö \_\_\_ poika \_\_\_\_\_

Mikä oli kivointa?

Mitä uutta opit?

Minkä näyttelyssä olleen asian et tiennyt liittyvän matematiikkaan?

## A.2 Opettajien palautelomake

Ryhmän luokka-aste \_\_\_\_\_

Saitko uusia ideoita matematiikantunneille? Mitä?

Mikä näyttelyssä oli hyvää ja mitä voisi parantaa?

### A.3 Ohjaajien palautelomake

PVM \_\_\_\_\_ Klo \_\_\_\_\_

Luokka-aste \_\_\_\_\_

Ryhmän koko \_\_\_\_\_

Miten ryhmä toimi? Mikä tuntui mielenkiintoiselta? Oliko haasteita? Oliko oppilailla hauskaa? Mitä voisi parantaa?