



TAMPEREEN TEKNILLINEN YLIOPISTO

HENRI RIIHIMÄKI
EUKLIDISEN AVARUUDEN \mathbb{R}^N KONFORMINEN MALLI JA
SEN MÖBIUS-KUVAUKSET

Diplomityö

Tarkastajat: Sirkka-Liisa Eriksson
Heikki Orelma

Tarkastajat ja aihe hyväksytty
Tieto- ja sähkötekniikan tiedekuntaneu-
voston kokouksessa 9.5.2012

TIIVISTELMÄ

TAMPEREEN TEKNILLINEN YLIOPISTO

Sähkötekniikan koulutusohjelma

HENRI RIIHIMÄKI: Euklidisen avaruuden \mathbb{R}^n konforminen malli ja sen Möbius-kuvaukset

Diplomityö, 49 sivua

Marraskuu 2012

Pääaine: Teknillinen matematiikka

Tarkastajat: Sirkka-Liisa Eriksson , Heikki Orelma

Avainsanat: Cliffordin algebra, geometrinen algebra, konforminen malli, Möbius-kuvaukset

Avaruus on matematiikan perustavimpia käsitteitä. Yksinkertaisimmillaan avaruus on joukko, jonka alkioilla ei ole muuta ominaisuutta kuin kuuluminen joukkoon. Joukon ja sen alkioiden hedelmällinen tutkiminen vaatii kuitenkin lisärakenteiden muodostamista joukkoon. Tämä vaatimus korostuu erityisesti, kun avaruutta käytetään mallintamaan fysikaalista todellisuutta. Tässä työssä mallinamme yhtä matemaattista struktuuria toisella matemaattisella rakenteella. Malliesimerkin tästä tarjoaa tason \mathbb{R}^2 vektoreiden mallintaminen kompleksilukujen avulla. Tällöin kompleksialgebra laajentaa vektoreiden laskennallista käsittelyä. Tässä työssä tutkimme euklidisen avaruuden \mathbb{R}^n konformista mallia, jossa pohjana oleva perusavaruus mallinetaan $(n + 2)$ -ulotteisessa avaruudessa \mathbb{R}^{n+2} . Konformisessa mallissa sisätulolla on mielekäs geometrinen tulkinta ja erilaisille geometrisille konstruktioille saadaan esitykset duaalivektoreiden avulla. Laskennallisena työkaluna käytämme Cliffordin geometrinen algebraa.

Työn toisena osuutena on tutkia kompleksianalyysistä tuttuja Möbius-kuvauksia konformisessa mallissa. Tällöin kaikki Möbius-kuvaukset esitetään Cliffordin algebran peilauksina ja rotaatioina. Nämä ovat algebran ortogonaalikuvauksia, jotka voidaan esittää hyvin tehokkaasti. Konforminen malli siis homogenisoi Möbius-kuvausten esityksiä. Perinteisesti Möbius-kuvaukset voidaan ajatella geometrisesti peilauksina erilaisten geometrinen konstruktioiden suhteen. Esimerkiksi inversio vastaa peilausta ympyrän suhteen. Koska konformisessa mallissa geometriset konstruktiot voidaan esittää duaalisten vektoreiden avulla, Cliffordin algebra ja konforminen malli yhdessä tuovat Möbius-kuvausten esityksiin mukaan niiden taustalla olevat geometriset ideat.

ABSTRACT

TAMPERE UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

Degree Programme in Electrical Engineering

HENRI RIIHIMÄKI: Conformal model of Euclidean space \mathbb{R}^n and Möbius-transformations of the model

Master of Science Thesis, 49 pages

November 2012

Major: Technical mathematics

Examiners: Sirkka-Liisa Eriksson , Heikki Orelma

Keywords: Clifford algebra, geometric algebra, conformal model, Möbius-transformations

Space is one the most fundamental concepts in mathematics. In it's most simple form space is nothing but a set, whose elements have no other properties than being in the set. However, fruitful study of the set and it's elements requires more structure to be defined in the set. This requirement plays even bigger role when space is used to model physical reality. In this thesis we model one mathematical structure with another mathematical construction. Modeling the vectors of the plane \mathbb{R}^2 with the help of complex numbers offers prototypical example. This way complex algebra brings more computational power to the traditional vector algebra. In this thesis we study the conformal model of the Euclidean space \mathbb{R}^n . In this model the base space is modeled in $(n + 2)$ -dimensional space \mathbb{R}^{n+2} . Inner product has nice geometric interpretation and different geometric constructions can be represented with dual vectors in the conformal model. We will use Clifford's geometric algebra as computational tool.

Second goal of this work is to study Möbius-transformations famous from complex analysis in the conformal model. In the model all the Möbius-transformations are represented as reflections and rotations of Clifford algebra. These are orthogonal mappings of the algebra, which can be represented very efficiently. Conformal model thus homogenizes the representation of Möbius-transformations. Traditionally Möbius-transformations can be geometrically thought of as reflections with respect to different geometric constructions. For example, inversion corresponds to a reflection with respect to a circle. Clifford algebra and conformal model together bring the geometric ideas behind Möbius-transformations to the representation of these, as geometric constructions can be represented with dual vectors in the conformal model.

ALKUSANAT

Muutaman vuoden matemaattisen valaistumisen etsinnän jälkeen tämä opinnäyte kokoaa vihdoin tekemäni työn tulokset. Diplomityön ensimmäiset rivit kirjoitin keuhalla 2010 työskennellessäni TTY:n Matematiikan laitoksella professori Sirkka-Liisa Erikssonin ohjauksessa. Tuon kesän jälkeen elämäni on mahtunut muun muassa vaihtovuosi Itävallassa, muutto Helsinkiin ja työskentely VTT:llä sekä viimeisimpänä tuore muutto Ranskaan työskentelemään Euroopan hiukkasfysiikan tutkimuskeskukseen CERNiin. Väistämättä diplomityö on jäänyt välillä pienemmälle huomiolle ja sen valmistuminen venyi tilastollista keskiarvoa pidemmäksi. Pitkäksi venynyt kirjoitusprosessi on kuitenkin tarjonnut hyvää aikaa matemaattisen ajattelun kypsyymiselle. Ehdin myös tutustua runsaasti lähdeaineistoon, mikä vakuutti minua entisestään Cliffordin algebran voimasta matemaattisena työkaluna. Erityisesti työni viimeistä lukua kirjoitin innon puuskassa, kun edellä rakennettua teoriaa ja koneistoa pystyi soveltamaan suoraviivaisesti Möbius-kuvausten tutkimiseen. Voin sanoa työn opettaneen minulle entistä enemmän miten matematiikka toimii, niin teoriassa kuin käytännössä.

Haluan esittää kiitokset työni tarkastajille Sirkka-Liisa Erikssonille ja Heikki Orelmalle ohjauksesta. Erityiskiitokset professori Erikssonille, joka tarjosi minulle työn aiheita ja on jaksanut näiden muutaman vuoden ajan antaa ohjausta ja keskustella työstä. Kiitokset myös Matleenalle ja tyttöystävälleni Tiinalle vertaistukiryhmästä ja ajatusten viemisestä välillä muualle. Samoin kaikille kavereille, joiden kanssa on voinut jo n kappaleeksi kertyneiden opiskeluvuosien aikana rentoutua ja pitää hauskaa. Kiitos myös äidille ja mummulle, jotka ovat aina olleet kiinnostuneita opiskelujeni ja diplomityöni etenemisestä.

CERN 9.10.2012

Henri Riihimäki

SISÄLLYS

1. Johdanto	1
1.1 Euklidisen avaruuden mallinnus	1
1.2 Avaruus \mathbb{R}^n	3
1.3 Avaruuden kuvauksista	3
1.4 Esimerkki: \mathbb{R}^2 , sen kuvaukset ja kompleksiluvut	4
1.5 Tämän työn rakenne ja yhteys muihin julkaisuihin	5
2. Cliffordin algebra	6
2.1 Cliffordin algebran määrittely	6
2.2 Involuutiot	12
2.3 Paravektorit ja avaruuden mallinnus	12
3. Peilaukset, rotaatiot ja roottorit	14
3.1 Peilaukset	14
3.2 Rotaatiot ja roottorit	17
4. Homogeeniset koordinaatit	21
4.1 Avaruuden \mathbb{R}^n epäformaali laajennus homogeeniseksi	21
4.2 Homogeenisen avaruuden \mathbb{R}^{n+1} matemaattinen määrittely	23
5. Konforminen malli	27
5.1 Etäisyys sisätulon avulla	27
5.2 Stereografinen projektio	29
5.3 Geometrisia konstruktioita konformisessa mallissa	34
5.4 Esimerkkilaskuja konformisessa mallissa	35
6. Möbius-kuvaukset	37
6.1 Translaatio	37
6.2 Rotaatio	39
6.3 Inversio	40
6.4 Dilataatio	41
7. Yhteenveto	46
Lähteet	48

TERMIT JA SYMBOLIT

\mathbb{N}	luonnollisten lukujen joukko
\mathbb{R}	reaalilukujen joukko
\mathbb{C}	kompleksilukujen joukko
\mathbb{R}^n	euklidinen n -ulotteinen vektoriavaruus
A, V	vektoriavaruuksia
$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$	kuvaus reaaliluvuilta reaaliluvuille
$P : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$	peilaus, katso Määritelmä 3.1
$P_n : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$	peilaus hypertason suhteen, katso Lause 3.1
$I : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$	isometria, katso Määritelmä 3.2
$R : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$	rotaatio tai roottorikuvaus, katso Lause 3.2
$\frac{d}{dx}$	differentiaalioperaattori
$z = x + iy$	kompleksiluku
\bar{z}	kompleksiluvun kompleksikonjugaatti
$ z , w $	kompleksilukujen pituuksia
$\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{m}, \mathbf{n}, \mathbf{l}, \mathbf{k}$	vektoreita
$\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \hat{\mathbf{w}}$	vektoreita
\mathbf{a}^{-1}	vektorin käänteisvektori
$\mathbf{e}, \bar{\mathbf{e}}, \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j$	kantavektoreita
$\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_{a_h}, \mathbf{e}_0, \mathbf{e}_\infty$	kantavektoreita
\mathbf{e}_A	kantavektoreiden Cliffordin tulo
B, N	yksikköbivektoreita
$ \mathbf{x} $	vektorin normi
$x_n, a_1, a_2, a_3, k, l, t$	reaalilukuja
$\alpha, \beta, \gamma, \delta, \lambda, \rho_1, \rho_2$	reaalilukuja
i, j, k, n, p, q	luonnollisia lukuja
δ_{ij}	Kroneckerin delta
$Cl_{p,q,r}$	Cliffordin algebra, katso Määritelmä 2.3
\cdot	sisätulo
\wedge	ulkotulo
ϕ, θ	kulmia
$', *, -$	pääinvoluutio, reversio ja konjugaatio, katso kappale 2.2
P, Q, X, Y	homogeenisen tai konformisen mallin esitysvektoreita
\mathcal{P}, \mathcal{Q}	euklidisen avaruuden pisteitä
$d^2(\mathcal{P}, \mathcal{Q})$	pisteiden välinen etäisyys
π	tason duaalinen esitysvektori konformisessa mallissa
σ	pallon duaalinen esitysvektori konformisessa mallissa
T_a	translaatio

S	dilataatio
\sim	ekvivalenssirelaatio
$[x]$	alkion x määräämä ekvivalenssiluokka

1. JOHDANTO

1.1 Euklidisen avaruuden mallinnus

Avaruus on matematiikan perustavimpia käsitteitä. Alkeellisimmillaan avaruuden muodostaa joukko, jonka alkioilla ei ole muuta ominaisuutta kuin kuuluminen tarkasteltavaan joukkoon. Työskentely näin alkeellisen joukon kanssa ei kuitenkaan ole kovin hedelmällistä. Joukon alkioita koskevien tulosten johtaminen vaatii yleensä jonkinlaisen lisästruktuurin tuomista joukkoon. Strukturi muodostuu avaruuden alkioista ja matemaattisista objekteista kuten relaatioista ja operaatioista, jotka määräävät mitä avaruuden alkioille voi tehdä [17]. Strukturi on siten abstrakti konstruktio, joka kiteyttää tarkasteltavaan joukkoon liitetyt ominaisuudet [17]. Käytettäessä matematiikkaa fysikaalisen maailmamme tarkastelemiseen vaatii avaruus väistämättä rakennetta, koska ympäristömme ilmenee meille havaintomme mukanaan tuomien ominaisuuksien verhoamana. Eräs yksinkertainen maailmamme alkoiden välillä havaittava seikka on niiden välinen etäisyys. Matemaattisestikin helpoimpia tapoja tuoda avaruuteen strukturia on esitellä avaruuden alkoiden välille keino mitata etäisyyttä eli metriikka, jolloin sanomme syntyvää avaruutta metriseksi avaruudeksi.

Geometria tutkii avaruutta tai sen osajoukkoja. Felix Kleinin aloittaman näkemyksen mukaan geometria on avaruuden muunnoksissa invariantteina pysyvien ominaisuuksien ja vastaavien muunnosryhmien tutkimista [8]. Esimerkki avaruuden muunnoksesta on translaatio, jossa jokaista avaruuden pistettä siirretään tietyn verran tiettyyn suuntaan. Vanhemman käsityksen mukaan geometria on kiinnostunut osajoukkojen välisistä relaatioista. Voimme vaikkapa määritellä kaksi avaruuden suoraa ja leikkausrelaation, jossa suorat ovat relaatiossa toisiinsa, jos niillä on yksi yhteinen piste. Oli näkemys geometriasta kumpi tahansa edeltävistä, avaruuden geometrian tutkiminen jaetaan tavallisesti synteettiseen ja analyyttiseen lähestymistapaan. Synteettisessä lähestymisessä perustana on jokin aksiomajärjestelmä, jonka pohjalta johdetaan loogisen päättelyn avulla geometrinen primitiivien kuten pisteiden ja suorien välisiä geometrisia relaatioita tai muunnosominaisuuksia [19]. Analyyttisessä lähestymistavassa avaruuteen määritellään koordinaattijärjestelmä ja geometriset primitiivit sekä muunnokset esitellään koordinaattien tai yhtälöiden kautta [19]. Synteettinen lähestymistapa on riippumaton koordinaattijärjestelmästä mutta ak-

siomaattiseen päättelyyn perustuva geometrian tutkiminen voi olla hankalaa ja raskasta. Analyttisessä geometriassa taas joudutaan liittämään avaruuteen mielivaltainen koordinaatisto mutta sen jälkeen geometrian tutkimisessa voidaan käyttää algebraa ja analyysiä työkaluina.

Jotta ylipäänsä pystymme tutkimaan avaruutta tai sen geometriaa, on avaruus mallinnettava jollain tavalla. Tämä saattaa kuulostaa kehäpäättelmältä: haluamme tutkia avaruutta, minkä vuoksi rakennamme mallin, joka kertoo millainen kyseinen avaruus on. Jokainen avaruus tai jokaisen avaruuden geometria pohjautuu kuitenkin apriorisiin väitteisiin¹, jotka kiteyttävät kyseiseen avaruuteen tai sen geometriisiin primitiiveihin liittyvät ominaisuudet. Jos nämä väitteet toteutuvat jossain toisessa avaruudessa, jonka alkioilla voi tietysti olla jotain tutkimastamme avaruudesta riippumatonta struktuuria, voimme käyttää tätä avaruutta mallina avaruudelle, jota tosiasiallisesti haluamme tarkastella. Esimerkiksi kompleksitason ylempää puolitasa voidaan käyttää mallina hyperboliselle avaruudelle. Mallilla tarkoitamme siis mallintavan avaruuden ja geometrinen primitiivien esitystavan valintaa.

Euklidinen avaruus on yksinkertaisimpia mutta samalla tärkeimpiä avaruuksia soveluksissa ja fysiikassa. Euklidiseksi avaruudeksi sanomme avaruutta, jossa alkiot, tai pisteet, ovat määrättyillä etäisyyksillä toisistaan ja euklidinen geometria pitää paikkansa [4, 17]. Euklidisen avaruuden metriikka on tuttu Pythagoraan lauseen yleistys ja euklidisessa avaruudessa voidaan määrittellä etäisyyden perustuen kulma [19]. Euklidisessa avaruudessa ei varsinaisesti ole origoa [4]. Piirrettäessä kolmioita paperille tai mitattaessa käveltyä matkaa, millään tietyllä pisteellä ei ole erityisasemaa muihin pisteisiin verrattuna, vaan mikä tahansa piste on kelvollinen origoksi, jonka suhteen mitata etäisyyksiä. Origin valinta on siis mielivaltainen konventio, jota toki voidaan käyttää laskennassa hyödyksi. Yhtä mielivaltainen konventio on kiinnittää origoon kanta ja sitä kautta koordinaattijärjestelmä avaruuteen. Äärettömyys ei myöskään ole mukana euklidisessa avaruudessa [4]. Äärettömyys on kuitenkin oleellinen käsite jo Eukleideen aksioomissa, joiden mukaan mikä tahansa kaksi pistettä yhdistävä jana voidaan jatkaa äärettömyyteen.

Yleinen malli euklidiselle avaruudelle on vektoriavaruus. Tässä mallissa euklidisen avaruuden piste identifioidaan vektoriavaruuden aksioomat täyttävän olion kanssa. Vektoriavaruuteen määriteltävän sisätulon avulla voimme palauttaa euklidisen etäisyyden ja tutkia kulmia [11]. Vektoriavaruudessa on kuitenkin haittapuolensa euklidisen avaruuden mallina. Vektoriavaruuden aksioomissa nollavektori eli origo

¹Tietysti väitteet voivat olla aposteriorisia, havaintoon perustuen valittuja väitteitä. Esimerkiksi Eukleideen postulaateissa tiivistyy arkihavainto ympäröivästä maailmasta ja aksioomien totuutta pidetään itsestäänselvytenä kokemukseen perustuen. Moderni matemaatikko voi kuitenkin valita mielivaltaisesti väitteensä ja tutkia niiden seurauksena syntyvää teoriaa.

on erityisasemassa, kun taas edellä todetun mukaan euklidisessa avaruudessa ei ole mitään muista pisteistä poikkeavaa origoa [10]. Myös äärettömyyden käsittely on hankalaa vektoriavaruuden viitekehyyksessä. Koska vektoriavaruus tarjoaa pohjan euklidisen avaruuden algebralliselle käsittelylle, olisi edullista laajentaa sitä euklidisempaan suuntaan. Tässä työssä laajennamme vektoriavaruutta aluksi euklidisen avaruuden homogeeniseksi malliksi, jossa nollavektori saadaan identtiseksi vektoriavaruuden muiden alkioiden kanssa. Tämän jälkeen esitellään konforminen malli, jonka sisätulo palauttaa pisteiden euklidisen etäisyyden ja jossa saadaan esitys äärettömyydelle.

1.2 Avaruus \mathbb{R}^n

Tarkastellaan vielä avaruutta \mathbb{R}^n , jota kirjallisuudessa toisinaan kutsutaan vektoriavaruudeksi tai euklidiseksi avaruudeksi. Tarkasti ottaen \mathbb{R}^n on karteesinen, reaalinen n -avaruus, joka muodostuu n -jonoista, joita voidaan käyttää tarkasteltavan avaruuden koordinaattilistoina. Avaruus \mathbb{R}^n itsessään ei toteuta vektoriavaruuden tai Eukleideen aksioomia. Aivan samoin vektoriavaruus tai Eukleideen aksioomat eivät ole riippuvaisia mistään tietystä koordinaattijärjestelmästä. Määrittelemällä avaruuteen \mathbb{R}^n yhteenlasku ja skalaarilla kertominen komponenteittain sekä näiltä vaadittavat vektoriavaruuden aksioomat, saadaan vektoriavaruus \mathbb{R}^n [11]. Kääntäen, vektoriavaruuden kanta määrittelee isomorfismin vektoriavaruuden ja avaruuden \mathbb{R}^n välille [9]. Euklidisesta avaruudesta \mathbb{R}^n voidaan puhua, kun määritellään vektoriavaruuteen \mathbb{R}^n sisätulo, jonka avulla voidaan laskea euklidinen etäisyys ja tutkia kulmia [11].

Tässä työssä pidämme aina vektoriavaruutta \mathbb{R}^n euklidisena. Oletamme myös, että avaruudessa on ortonormaali kanta, joka muodostuu vektoreista \mathbf{e}_i , $i = 1 \dots n$. Vektori \mathbf{a} esitetään tässä kannassa muodossa $\mathbf{a} = a_1 \mathbf{e}_1 + \dots + a_n \mathbf{e}_n$, missä luvut a_1, \dots, a_n ovat vektorin komponentit kannassa $\{\mathbf{e}_i\}$. Sisätulona käytämme standardia pistetuloa, jolloin kantavektoreille pätee $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = 1$, kun $i = j$ ja $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = 0$, kun $i \neq j$. Vektoreille \mathbf{a} ja \mathbf{b} pätee $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + \dots + a_n b_n$. Pistetulon avulla voidaan laskea vektorin pituus: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = |\mathbf{a}|^2$. Geometrisesti määrittelemme sisätulon vektoreiden välisen kulman θ avulla: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos(\theta)$.

1.3 Avaruuden kuvauksista

Lähes koko matematiikka tutkii avaruuden kuvauksia muodossa tai toisessa. Funktio, muunnos ja operaattori ovat muita tuttuja nimiä kuvauksille. Kuvaus on operaatio, joka liittää kahden avaruuden alkioit toisiinsa. Yksinkertainen esimerkki on reaali-funktio $f(x) = x^3$, joka on funktio $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eli kuvaus reaalilukujen avaruudesta itselleen. Differentiaalioperaattori $\frac{d}{dx}$ on esimerkki kuvauksesta, joka kuvaa

derivoituvien funktioiden avaruuden jatkuvien funktioiden avaruuteen. Matriisi

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

on kuvaus $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, joka vastaa avaruuden \mathbb{R}^2 kiertoa. Yleisesti matriisit ovat esimerkki tärkeistä lineaarikuvauksista. Tässä työssä tutkimuksen kohteena ovat kompleksianalyysistä tutut Möbius-kuvaukset avaruudessa \mathbb{R}^n .

Kuvausten tärkeän aseman ja lähes kaikkialla matematiikassa esiintymisen takia on tärkeä pystyä esittämään ne tehokkaasti. Avaruuden esittäminen toisen matemaattisen struktuurin avulla voi tarjota keinot esittää itse mallinnettavan avaruuden lisäksi myös mallinnettavan avaruuden kuvauksia uudella tavalla. Tarkastellaan seuraavaksi esimerkkitapauksena kompleksilukujen ja avaruuden \mathbb{R}^2 vektorien välistä yhteyttä.

1.4 Esimerkki: \mathbb{R}^2 , sen kuvaukset ja kompleksiluvut

Kompleksiluvut voidaan geometrisesti esittää tason pisteinä. Tämä yhteys tarjoaa tyyppiesimerkin vektoriavaruuksen mallintamisesta toisella matemaattisella struktuurilla. Varustamalla vektoriavaruuksella \mathbb{R}^2 karteesisella koordinaatistolla, voimme identifoida kompleksiluvun $z = x + iy$ pisteen $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ kanssa [11]. Kaikki vektoriavaruuksien aksioomat toteutuvat myös kompleksiluvuilla.

Merkittävää on kuitenkin kompleksilukujen kuntaominaisuuksista identifioinnin myötä saatava tulo-operaatio vektorien välille. Jotta mallintamisen mukanaan tuomat operaatiot olisivat hyödyllisiä, meidän on tietysti tulkittava mitä niiden tulokset tarkoittavat mallinnettavassa avaruudessa. Vektorin pituus voidaan esittää muodossa $\sqrt{z\bar{z}}$, missä \bar{z} on z :n kompleksikonjugaatti. Jos $z = x + iy$ ja $w = u + iv$, niin niiden tulossa $z\bar{w} = xu + vy + i(uy - vx)$ reaaliosa palauttaa esitettävien vektorien pistetulon ja imaginääriosaa niiden virittämän suunnikkaan suunnatun pinta-alan. [11, 3]

Kompleksilukujen polaariesitys tarjoaa tehokkaan tavan jo edellä olleen avaruuden \mathbb{R}^2 rotaation esittämiseen. Olkoon $z = |z|e^{i\theta}$ ja $w = e^{i\phi}$, missä $|w| = 1$. Kompleksiluvun z esittämän vektorin rotaatio kulman ϕ verran voidaan esittää yksinkertaisesti kertomalla yksikkökompleksiluvulla w : $wz = |z|e^{i(\theta+\phi)}$. Möbius-kuvauksiin kuuluva inversio esitetään muodossa $z^{-1} = \frac{\bar{z}}{z}$.

1.5 Tämän työn rakenne ja yhteys muihin julkaisuihin

Edellä olleessa johdannossa pohjustettiin käsillä olevaa työtä. Tarkoituksenamme on tutkia erästä uutta keinoa euklidisen avaruuden \mathbb{R}^n mallintamiseen, niin kutsuttua konformista mallia. Konformisessa mallissa vektoriavaruuden aksioomissa esiintyvän nolla-alkion erikoisasema saadaan poistettua ja äärettömyydelle saadaan myös esitys yhtenä mallin vektorina. Konforminen malli siis yhtenäistää avaruuden eri alkioita. Vaatimuksena on, että laajennamme mallinnettavaa perusavaruutta \mathbb{R}^n kahdella lisäulottuvuudella. Konformisen mallin pohjana toimii projektiivisesta geometriasta tutut homogeeniset koordinaatit, joihin myös tutustumme. Lopullisena tavoitteena on tutkia Möbius-kuvausten, eli translaation, rotaation, inversion ja dilataation, esitystä avaruuden \mathbb{R}^n konformisessa mallissa. Konforminen malli myös yhtenäistää näiden kuvausten esitystä. Kaikki Möbius-kuvaukset konformisessa mallissa voidaan esittää ortogonaalikuvauksina, kuten tulemme huomaamaan.

Matemaattisena koneistona käytämme Cliffordin geometrinen algebraa, joka esitellään luvussa 2. Cliffordin algebrassa vektoreiden välille saadaan tulo-operaatio, jolla on geometrinen tulkinta. Tämä Cliffordin tulo tuo huomattavasti lisää laskennallista voimaa perinteiseen vektorilaskentaan. Luvussa 3 tutkitaan erästä Cliffordin algebran voimakkainta piirrettä, peilausten ja rotaatioiden esittämistä. Näiden avulla esitämme myös Möbius-kuvaukset ortogonaalikuvauksina luvussa 6. Luvussa 4 pohjustamme konformista mallia tutustumalla homogeenisiin koordinaatteihin ja luvussa 5 rakennamme itse konformisen mallin.

Tämän työn päälähteenä toimii [3], jonka esitystä seurailemme melko paljon. Tässä kirjassa esitellään konforminen malli ja sen Möbius-kuvaukset. Kirjasta kuitenkin puuttuu huomattava määrä selventäviä välivaiheita. Käsillä olevassa työssä täydennämme näitä välivaiheita ja tuomme lähteen [3] esitykseen tarkkuutta. Tässä hyvänä apuna toimii lähde [4]. Konforminen malli on vielä melko tuore struktuuri mutta siitä on jo löydettävissä uusia oppikirjatasoisia esityksiä, esimerkkeinä [21] ja [16]. Konformista mallia ja sen sovelluksia esitellään myös kokoomateoksissa [1] ja [6]. Struktuurin tuoreuden takia eri kirjoittajilla on hieman erilaiset esitykset mallille, mikä aiheuttaa jonkin verran hankaluutta ja vaatii tarkkuutta eri lähteitä lukiessa.

2. CLIFFORDIN ALGEBRA

Algebran hyödyntäminen useampiulotteisten avaruuksien tutkimuksessa vaatii perinteisiä piste- ja ristituloja tehokkaamman tulo-operaation. Tässä luvussa tarkastellaan vektoriavaruuteen \mathbb{R}^n rakennettua Cliffordin algebraa, jonka perustana on algebrallisesti mielekäs tulo-operaatio, Cliffordin tulo¹. Cliffordin algebran paravektorit tarjoavat myös keinon avaruuden \mathbb{R}^{n+1} mallintamiseen. Luku on koottu pääasiassa lähteistä [11], [20], [14] ja [15].

2.1 Cliffordin algebran määrittely

Tässä kappaleessa rakennetaan Cliffordin algebra reaaliseen vektoriavaruuteen \mathbb{R}^n . Ennen varsinaista Cliffordin algebran määritelmää käydään kuitenkin läpi muutamia oleellisia määritelmiä. Aloitetaan luonnollisesti vektoriavaruudesta.

Määritelmä 2.1. Reaalinen vektoriavaruus V muodostuu alkioista, joille on määritetty summa ja skalaarilla kertominen, jotka toteuttavat seuraavat ominaisuudet kaikilla $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in V$ ja kaikilla $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} + \mathbf{y} &\in V, \\ (\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z} &= \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z}), \\ \text{on olemassa } \mathbf{0} \in V : \mathbf{x} + \mathbf{0} &= \mathbf{x}, \\ \text{on olemassa } \mathbf{y} \in V : \mathbf{x} + \mathbf{y} &= \mathbf{0}, \\ \mathbf{x} + \mathbf{y} &= \mathbf{y} + \mathbf{x}, \\ \alpha(\mathbf{x} + \mathbf{y}) &= \alpha\mathbf{x} + \alpha\mathbf{y}, \\ (\alpha + \beta)\mathbf{x} &= \alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{x}, \\ (\alpha\beta)\mathbf{x} &= \alpha(\beta\mathbf{x}), \\ 1\mathbf{x} &= \mathbf{x}. \end{aligned}$$

Vektoriavaruuden määrittelyn jälkeen on luontevaa käydä läpi siihen pohjautuva algebran käsite.

¹Cliffordin tulo on myös tehokas geometrinen operaatio. Geometrisuutta korostavasta laskennasta käytetään kirjallisuudessa tavallisesti nimeä geometrinen algebra ja tulo-operaatiota kutsutaan geometriseksi tuloksi. Hyvän johdatuksen geometriseen laskentaan löytää lähteestä [4]. Haastavampi mutta erittäin mielenkiintoinen johdatus geometriseen algebraan fyysikoille löytyy lähteestä [3].

Määritelmä 2.2. Algebra, jonka kerroinkunta on \mathbb{R} , on \mathbb{R} -kertoiminen vektoriavaruus A , jossa on määritelty bilineaarinen kuvaus $A \times A \rightarrow A$, $(x, y) \mapsto xy$, toisinaan sanoen kaikilla $\lambda \in \mathbb{R}$ ja kaikilla $x, y, z \in A$ on voimassa

$$x(y + z) = xy + xz \quad \text{ja} \quad (x + y)z = xz + yz \quad (2.1)$$

$$(\lambda x)y = x(\lambda y) = \lambda xy. \quad (2.2)$$

Algebrassa on ykkösalkio $\mathbf{1}$, jos jokaiselle $x \in A$ pätee

$$\mathbf{1}x = x\mathbf{1} = x. \quad (2.3)$$

Algebra on assosiatiivinen, jos jokaiselle $x, y, z \in A$ pätee

$$(xy)z = x(yz). \quad (2.4)$$

Algebra on kommutatiivinen, jos jokaiselle $x, y \in A$ pätee

$$xy = yx. \quad (2.5)$$

Algebran kannan muodostavat sen ykkösalkion, vektoriavaruuden kannan alkioden sekä näiden kaikkien mahdollisten tulojen yhdiste. Algebran dimensio on sen kantajoukon alkioden lukumäärä.

Avaruutta \mathbb{R}^2 tutkittaessa voidaan tason vektorit samaistaa kompleksilukujen kanssa, jolloin vektorien välille tulee kompleksiluvuilta tuttu assosiatiivinen, distributiivinen ja kommutatiivinen tulo. Juuri kompleksilukujen välille määritelty tulo on mahdollistanut kompleksianalyysin eli funktioteorian laajenemisen hyvin pitkälle kehittyneeksi ja vahvoja tuloksia sisältäväksi teoriaksi. Perinteisessä Gibbsin vektorilaskennassa on kaksi tuloa, pistetulo \cdot ja ristitulo \times . Kumpikaan näistä tuloista ei kuitenkaan ole assosiatiivinen. Lisäksi ristitulo on rajoitettu vain kolmeen ulottuvuuteen. Useampiulotteisen avaruuden \mathbb{R}^n tutkimista varten vektorien välille olisi siten pystyttävä muodostamaan algebrallisilta ominaisuuksiltaan mielekkäämpi tulo-operaatio. Reaalilukuihin mukautuen kaikkien vektoriavaruuden vektorien tulo itsensä kanssa olisi myös oltava yhtä kuin vektorin pituuden neliö:

$$\mathbf{x}^2 = |\mathbf{x}|^2, \quad (2.6)$$

Vaativuudet täyttävä algebrallinen työkalu on seuraavaksi määriteltävä Cliffordin algebra.

Määritelmä 2.3. Olkoon $p, q, r \in \mathbb{N}$. Olkoon \mathbb{R}^n reaalinen vektoriavaruus, jolla on ortonormaali kanta \mathbf{e}_k , kun $k = 1, \dots, p+q+r$ ja $p+q+r = n$. Universaali, reaalinen

Cliffordin algebra $Cl_{p,q,r}$ on vektoreiden e_k generoima assosiatiiivinen, ykkösellinen algebra, joka toteuttaa ehdot

$$e_i e_j + e_j e_i = \begin{cases} 2\delta_{ij}, & \text{kun } i \leq p, \\ -2\delta_{ij}, & \text{kun } p < i \leq p + q, \\ 0\delta_{ij}, & \text{kun } p + q < i \leq n. \end{cases} \quad (2.7)$$

Vektoreiden välistä tuloa algebrassa $Cl_{p,q,r}$ kutsutaan Cliffordin tuloksi. Tässä työssä käsitellään runsaasti myös algebroja, joissa ei ole edellisessä määritelmässä esiintyviä nollavektoreita. Näitä algebroja $Cl_{p,q,0}$ merkitsemme lyhyemmin $Cl_{p,q}$.

Määritellään järjestetty joukko $A = \{a_1, \dots, a_h\} \subset M = \{1, \dots, n\}$. Algebran $Cl_{p,q,r}$ kanta on tällöin joukko

$$\{1\} \cup \{e_A = e_{a_1} \dots e_{a_h} \mid 1 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_h \leq n\}.$$

Erityisesti määritellään $e_\emptyset = 1$. Jokaisella $x \in Cl_{p,q,r}$ on tällöin esitys

$$x = \sum_{A \subset M} x_A e_A,$$

missä $x_A \in \mathbb{R}$ jokaiselle $A \subset M$. Esimerkiksi avaruuden \mathbb{R}^3 tapauksessa joukosta $M = \{1, 2, 3\}$ voidaan muodostaa järjestetyt osajoukot $\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}$ ja $\{1, 2, 3\}$. Tällöin algebran $Cl_{3,0}$ alkiolla x on esitys

$$x = x_\emptyset 1 + x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 + x_{12} e_1 e_2 + x_{13} e_1 e_3 + x_{23} e_2 e_3 + x_{123} e_1 e_2 e_3.$$

Merkitään joukon A alkioiden lukumäärää symbolilla $|A|$. Algebramme muotoa

$$x = \sum_{|A|=k} x_A e_A,$$

olevia alkiota kutsutaan k -multivektoreiksi. Niiden joukkoa merkitsemme $Cl_{p,q,r}^k$. Täten $Cl_{p,q,r}^0 = \mathbb{R}$ ja $Cl_{p,q,r}^1 = \mathbb{R}^n$. Algebra $Cl_{p,q,r}$ voidaan nyt esittää aliavaruuksien suorana summana:

$$Cl_{p,q,r} = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^n \oplus Cl_{p,q,r}^2 \oplus \dots \oplus Cl_{p,q,r}^n.$$

Algebran projektioita $Cl_{p,q,r} \rightarrow Cl_{p,q,r}^k$ merkitään $[\cdot]_k$. Projektioiden avulla voimme nyt määritellä Cliffordin algebrassamme sisätulon ja alunperin Grassmannin esittämisen ulkotulon.

Määritelmä 2.4. Sisätulo \cdot Cliffordin algebrassa $Cl_{p,q,r}$ määritellään i - ja j -multivektoreiden välille asettamalla

$$[x]_i \cdot [y]_j = \begin{cases} [[x]_i [y]_j]_{|i-j|}, & \text{kun } i, j \neq 0, \\ 0, & \text{muulloin.} \end{cases} \quad (2.8)$$

Sisätulo laajennetaan lineaarisesti koko Cliffordin algebraan $Cl_{p,q,r}$:

$$x \cdot y = \sum_{j,k=1}^n [[x]_i [y]_j]_{|i-j|}. \quad (2.9)$$

Määritelmä 2.5. Ulkotulo \wedge Cliffordin algebraassa $Cl_{p,q,r}$ määritellään i - ja j -multivektoreiden välille asettamalla

$$[x]_i \wedge [y]_j = [[x]_i [y]_j]_{i+j} \quad (2.10)$$

ja laajentamalla lineaarisesti koko Cliffordin algebraan $Cl_{p,q,r}$:

$$x \wedge y = \sum_{j,k=0}^n [[x]_i [y]_j]_{i+j}. \quad (2.11)$$

Esimerkiksi avaruuden \mathbb{R}^n ortonormaalin kannan 1-multivektoreiden e_i ja e_j välille saadaan algebraassa $Cl_{n,0}$ (kun $i \neq j$)

$$e_i \cdot e_j = [e_i e_j]_0 = 0, \quad (2.12)$$

koska 2-multivektorissa ei ole 0-multivektoriosaa. Vastaavasti

$$e_i \cdot e_i = [e_i e_i]_0 = 1, \quad (2.13)$$

Cliffordin algebran määritelmän mukaan. Ulkotulossa kantavektoreille e_i ja e_j saadaan ominaisuudet

$$e_i \wedge e_j = [e_i e_j]_2 = [-e_j e_i]_2 = -e_j \wedge e_i \quad (2.14)$$

ja

$$e_i \wedge e_i = [e_i e_i]_2 = [1]_2 = 0 \quad (2.15)$$

Cliffordin algebran määritelmästä.

Tuloa $\mathbf{a}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{a}_k$ kutsutaan k -vektoriksi. Ominaisuuden $\mathbf{a} \wedge \mathbf{a} = 0$ nojalla samaan, vektorin \mathbf{a} virittämään, yksiulotteiseen aliavaruuteen kuuluville vektoreille $\alpha \mathbf{a}$ ja $\beta \mathbf{a}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, tulo $\alpha \mathbf{a} \wedge \beta \mathbf{a}$ on nolla. Ulkotulon ominaisuuksien avulla voimme seuraavaksi yleistää tämän vektoriavaruuksia ja erityisesti aliavaruuksia koskevan merkittävän tuloksen.

Lemma 2.1. *Olkoon l -ulotteisella vektoriarvaruudella T kanta $\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_l\}$. Jos $\mathbf{x} \in T$, niin $\mathbf{a}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{a}_l \wedge \mathbf{x} = 0$.*

Todistus. Koska $\mathbf{x} \in T$, se voidaan esittää muodossa $\mathbf{x} = x_1\mathbf{a}_1 + \dots + x_l\mathbf{a}_l$, $x_1, \dots, x_l \in \mathbb{R}$. Tällöin

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{a}_l \wedge \mathbf{x} &= \mathbf{a}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{a}_l \wedge (x_1\mathbf{a}_1 + \dots + x_l\mathbf{a}_l) \\ &= x_1\mathbf{a}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{a}_l \wedge \mathbf{a}_1 + \dots + x_l\mathbf{a}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{a}_l \wedge \mathbf{a}_l. \end{aligned}$$

Vaihtamalla kaikissa paitsi viimeisessä termissä tulojärjestystä, saadaan viimeisestä muodosta ulkotulon antikommutoinnin takia

$$(-1)^{l-1}x_1\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{a}_l + \dots + x_l\mathbf{a}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{a}_l \wedge \mathbf{a}_l.$$

Tämä on nolla, koska $\mathbf{a}_l \wedge \mathbf{a}_l = 0$ kaikilla l . □

Jos T on aliavaruus, niin vektorin \mathbf{x} kuulumiselle tähän aliavaruuteen on voimassa ehto $\mathbf{a}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{a}_l \wedge \mathbf{x} = 0$. Tässä mielessä sanomme, että l -vektori $\mathbf{a}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{a}_l$ esittää vektoreiden \mathbf{a}_l virittämää l -ulotteista aliavaruutta.

Kahden vektorin \mathbf{a} ja \mathbf{b} Cliffordin tuloa merkitään \mathbf{ab} ilman mitään omaa tulosymbolia. Lasketaan esimerkkinä vektorin $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$ tulo itsensä kanssa algebrassa $Cl_{3,0}$ käyttämällä algebran ominaisuuksia (2.1), (2.2) ja (2.7):

$$\begin{aligned} \mathbf{aa} &= (a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3)(a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3) \\ &= a_1\mathbf{e}_1(a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3) + a_2\mathbf{e}_2(a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3) \\ &\quad + a_3\mathbf{e}_3(a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3) \\ &= a_1^2 + a_1a_2\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 + a_1a_3\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3 - a_1a_2\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 + a_2^2 + a_2a_3\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 - a_1a_3\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3 \\ &\quad - a_2a_3\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 + a_3^2 \\ &= a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = |\mathbf{a}|^2. \end{aligned}$$

Tulolta haluttu ominaisuus (2.6) siis toteutuu. Tämä ominaisuus antaa Cliffordin tuloon perustuvalla vektorilaskennalla suuren laskennallisen voiman, koska voimme nyt jakaa vektorilla. Jos $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, määritellään algebrassa $Cl_{n,0}$ käänteisvektori $\mathbf{a}^{-1} = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|^2}$, koska

$$\mathbf{aa}^{-1} = \mathbf{a} \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|^2} = \frac{|\mathbf{a}|^2}{|\mathbf{a}|^2} = 1.$$

Erityisesti yksikkövektorin käänteisvektori on vektori itse.

Vektoreiden \mathbf{a} ja \mathbf{b} Cliffordin tulo voidaan esittää sisä- ja ulkotulojen avulla al-

gebrassa $Cl_{n,0}$ muodossa

$$\mathbf{ab} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \wedge \mathbf{b}. \quad (2.16)$$

Antikommutoiva osa $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$ ei ole skalaari eikä vektori vaan uusi olio, bivektori, joka on tämän työn kannalta merkittävässä osassa. Bivektori $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$ esittää Lemman 2.1 mielessä vektoreiden \mathbf{a} ja \mathbf{b} virittämää suunnattua tasoa eli avaruuden \mathbb{R}^n aliavaruutta. Kaikki tasolla olevat vektorit ovat muotoa $\alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b}$ ja selvästi $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge (\alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b}) = 0$. Bivektorille määritelty suuruus $|\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin(\alpha)$, jossa α on vektorien \mathbf{a} ja \mathbf{b} välinen kulma, vastaa vektorien \mathbf{a} ja \mathbf{b} virittämän suunnikkaan pinta-alaa. Ulkotulon ominaisuudet vastaavat tasoon liittyviä ominaisuuksia. Antikommutointi $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = -\mathbf{b} \wedge \mathbf{a}$ vastaa tason suunnistuksen vaihtamista. Vektori ei viritä tasoa itsensä kanssa, joten $\mathbf{a} \wedge \mathbf{a} = 0$. Edellisen mukaan puhumme bivektorin $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$ määrittämisestä tasosta tai yksinkertaisesti tasosta $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$.

Myöhemmin tarvitsemme bivektorin potensseja, joten lasketaan bivektorin $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$ neliö:

$$\begin{aligned} (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) &= (\mathbf{ab} - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b})(\mathbf{ab} - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \\ &= -\mathbf{ab}^2\mathbf{a} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 + \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}(\mathbf{ab} + \mathbf{ba}) \\ &= -\mathbf{a}^2\mathbf{b}^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 + 2(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 \\ &= -\mathbf{a}^2\mathbf{b}^2 + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 \\ &= -\mathbf{a}^2\mathbf{b}^2 + \mathbf{a}^2\mathbf{b}^2\cos^2(\theta) \\ &= -\mathbf{a}^2\mathbf{b}^2\sin^2(\theta), \end{aligned} \quad (2.17)$$

missä θ on vektorien \mathbf{a} ja \mathbf{b} välinen kulma.

Laskemalla tulo (2.16) toisinpäin saadaan

$$\mathbf{ba} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{b} \wedge \mathbf{a} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} - \mathbf{a} \wedge \mathbf{b}. \quad (2.18)$$

Laskemalla yhtälöt (2.16) ja (2.18) yhteen saadaan esitys pistetulolle,

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \frac{1}{2}(\mathbf{ab} + \mathbf{ba}), \quad (2.19)$$

ja ulkotulolle,

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = \frac{1}{2}(\mathbf{ab} - \mathbf{ba}). \quad (2.20)$$

Pistetulon esityksestä (2.19) saadaan käytännöllinen muoto

$$\mathbf{ab} = 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} - \mathbf{ba}. \quad (2.21)$$

Tämän avulla voidaan usein vaihtaa tulontekijöiden järjestys.

Vektorit $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ ja $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ ovat kohtisuorat, jos $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$. Kohtisuorille vektoreille tulo \mathbf{ab} on puhdas bivektori $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$. Tästä syystä kohtisuorat vektorit myös antikommutoivat eli $\mathbf{ab} = -\mathbf{ba}$. Vektorit ovat yhdensuuntaiset, jos $\mathbf{b} = \lambda \mathbf{a}$. Yhdensuuntaisten vektorien tulo on niiden välinen pistetulo ja yhdensuuntaiset vektorit siis kommutoivat.

2.2 Involuutiot

Cliffordin algebrassa on muutamia involuutioita, jotka esittelemme lyhyesti.

Pääinvoluutio $' : Cl_{p,q,r} \mapsto Cl_{p,q,r}$ Cliffordin algebrassa määritellään asettamalla $\mathbf{x}' = -\mathbf{x}$. Tulolle pätee $(\mathbf{ab})' = \mathbf{a}'\mathbf{b}'$.

Reversio $* : Cl_{p,q,r} \mapsto Cl_{p,q,r}$ on identiteettikuvaus vektoreille, eli $\mathbf{x}^* = \mathbf{x}$. Reversio kuitenkin vaihtaa tulon järjestyksen: $(\mathbf{ab})^* = \mathbf{b}^*\mathbf{a}^*$. Jos $\mathbf{ab} = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$, niin $(\mathbf{ab})^* = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^* = \mathbf{b}^*\mathbf{a}^* = \mathbf{ba} = \mathbf{b} \wedge \mathbf{a} = -\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$. Reversio siis vaihtaa bivektorin etumerkin. Reversiota tarvitsemme erityisesti tämän työn puitteissa, kun tutustumme peilauksiin ja rotaatioihin.

Konjugaatio $- : Cl_{p,q,r} \mapsto Cl_{p,q,r}$ määritellään edellisten involuutioiden yhdistettynä kuvauksena asettamalla $\bar{\mathbf{x}} = -\mathbf{x}$ ja $\overline{(\mathbf{ab})} = \bar{\mathbf{b}}\bar{\mathbf{a}}$.

2.3 Paravektorit ja avaruuden mallinnus

Algebrat $Cl_{n,0}$ ja $Cl_{0,n}$ ovat tärkeitä, jos haluamme laskea vektorin normin käyttämällä algebramme tulo-operaatiota. Algebrassa $Cl_{n,0}$ määritellään vektorin Euklidinen normi asettamalla

$$|\mathbf{x}|^2 = \mathbf{x}\mathbf{x} \quad (2.22)$$

ja algebrassa $Cl_{0,n}$

$$|\mathbf{x}|^2 = \mathbf{x}\bar{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{x}}\mathbf{x}. \quad (2.23)$$

Merkitään $\mathbf{e}_0 = 1$. Cliffordin algebran alkioita $x_0\mathbf{e}_0 + x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \dots + x_n\mathbf{e}_n$ kutsutaan paravektoreiksi. Avaruuden \mathbb{R}^{n+1} alkio x voidaan nyt samaistaa paravektorin $x = x_0 + \mathbf{x}$ kanssa. Paravektorin konjugaatti on $\bar{x} = x_0 - \mathbf{x}$, josta nähdään suora vastaavuus kompleksikonjugoinnin kanssa. Skalaarin ja vektorin sekoittaminen paravektorissa voi vaikuttaa kummalliselta. Sama kuitenkin tapahtuu myös kompleksiluvuilla, joissa summataan reaali- ja imaginaariosat. Kyseessä ei ole erilaisten matemaattisten otusten yhteenlaskeminen, vaan avaruuden hajottaminen aliavaruuksiin

ja koko avaruuden esittäminen eri aliavaruuksien suorana summana.

Kompleksiluvun potenssit ovat edelleen kompleksilukuja eli potenssiinkorotus avaruudessa on laskennallisesti mukavasti käyttäytyvä kuvaus kompleksilukujen joukolta itselleen. Samanlaista ominaisuutta toivottaisiin myös korkeampiulotteisiin avaruuksiin. Analyyttisten funktioiden teorian kannalta potenssikuvauksilla on myös erityisen tärkeä asema. Katsotaan miten potenssikuvaus käyttäytyy paravektoreilla mallinnetussa avaruudessa \mathbb{R}^{n+1} laskemalla paravektorin neliö:

$$(x_0 + \mathbf{x})(x_0 + \mathbf{x}) = x_0^2 + \mathbf{x}^2 + 2x_0\mathbf{x}.$$

Algebrassa $Cl_{n,0}$ vastaa \mathbf{x}^2 vektorin normia $|\mathbf{x}^2| \in \mathbb{R}$ yhtälön (2.22) mukaan. Algebrassa $Cl_{0,n}$ \mathbf{x}^2 on

$$\begin{aligned} & (x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \dots x_n\mathbf{e}_n)(x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \dots x_n\mathbf{e}_n) \\ &= x_1x_1\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1 + x_1x_2\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 + \dots + x_1x_n\mathbf{e}_1\mathbf{e}_n \\ &+ x_2x_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1 + x_2x_2\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2 + \dots + x_2x_n\mathbf{e}_2\mathbf{e}_n + \dots \\ &+ x_nx_1\mathbf{e}_n\mathbf{e}_1 + x_nx_2\mathbf{e}_n\mathbf{e}_2 + \dots + x_nx_n\mathbf{e}_n\mathbf{e}_n. \end{aligned}$$

Antikommutoinnin $\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j = -\mathbf{e}_j\mathbf{e}_i$ takia termejä supistuu ja neliöimisäännön $\mathbf{e}_i^2 = -1$ jälkeen saadaan lopulta

$$(x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \dots x_n\mathbf{e}_n)(x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \dots x_n\mathbf{e}_n) = -x_1^2 - x_2^2 - \dots - x_n^2 = -|\mathbf{x}|^2 \in \mathbb{R}.$$

Kummassakin algebrassa paravektorin potenssit ovat edelleen paravektoreita ja potenssiinkorotus on laskennallisesti mielekäs kuvaus avaruudesta \mathbb{R}^{n+1} avaruuteen \mathbb{R}^{n+1} . Jos sen sijaan mallintaisimme avaruutta pelkillä vektoreilla asettamalla $x_0 = 0$, alkion neliö olisikin kuvaus avaruudesta \mathbb{R}^{n+1} reaalilukujen joukkoon, kuten edelliset laskut osoittavat.

3. PEILAUKSET, ROTAATIOT JA ROOTTORIT

Cliffordin geometrisen laskennan voima tulee esille erityisesti vektorien peilauksissa ja rotaatioissa. Rotaatiot ovat pääosassa myös tämän työn lopussa, kun tarkastelemme Möbius-kuvauksia. Tästä syystä perehdymme tässä luvussa peilauksiin ja rotaatioihin, pääasiassa lähteiden [3], [20] ja [11] mukaan. Cliffordin algebrana käytämme kautta luvun algebraa $Cl_{n,0}$.

3.1 Peilaukset

Olkoon \mathbb{R}^n sisätulolla varustettu, täten siis euklidinen, vektoriavaruus. Käydään aluksi läpi muutamia tämän vektoriavaruuden kuvauksiin liittyviä määritelmiä ja tuloksia.

Määritelmä 3.1. Lineaarinen kuvaus $P : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ on *peilaus* avaruudessa \mathbb{R}^n , jos kaikilla vektoreilla $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ pätee

$$P\mathbf{x} = -\mathbf{x} \text{ ja } P\mathbf{y} = \mathbf{y}, \text{ jos } \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 0. \quad (3.1)$$

Määritelmä 3.2. Lineaarinen kuvaus $I : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ on avaruuden \mathbb{R}^n isometria, jos kaikilla $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ on voimassa

$$|I\mathbf{x}| = |\mathbf{x}|. \quad (3.2)$$

Lemma 3.1. *Olkoon I isometria vektoriavaruudessa \mathbb{R}^n . Tällöin pätee kaikilla $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$*

$$I\mathbf{x} \cdot I\mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}. \quad (3.3)$$

Todistus. Isometrian määritelmän mukaan

$$|I(\mathbf{x} + \mathbf{y})|^2 = |\mathbf{x} + \mathbf{y}|^2. \quad (3.4)$$

Isometrian lineaarisuuden perusteella yhtälön (3.4) vasen puoli on

$$\begin{aligned}
 |I(\mathbf{x} + \mathbf{y})|^2 &= |I\mathbf{x} + I\mathbf{y}|^2 \\
 &= (I\mathbf{x} + I\mathbf{y}) \cdot (I\mathbf{x} + I\mathbf{y}) \\
 &= |I\mathbf{x}|^2 + 2I\mathbf{x} \cdot I\mathbf{y} + |I\mathbf{y}|^2 \\
 &= |\mathbf{x}|^2 + 2I\mathbf{x} \cdot I\mathbf{y} + |\mathbf{y}|^2.
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

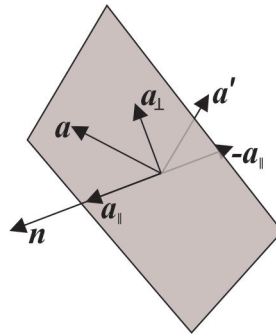
Yhtälön (3.4) oikea puoli on

$$|\mathbf{x} + \mathbf{y}|^2 = (\mathbf{x} + \mathbf{y}) \cdot (\mathbf{x} + \mathbf{y}) = |\mathbf{x}|^2 + 2\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} + |\mathbf{y}|^2 \tag{3.6}$$

ja väite seuraa välittömästi. \square

Lemman 3.1 ominaisuutta sanotaan ortogonaalisuudeksi.

Oletetaan, että meillä on avaruudessa \mathbb{R}^n hypertaso, jonka yksikkönormaalivektori on \mathbf{n} . Jos voisimme jakaa vektorin \mathbf{a} normaalin suhteen yhdensuuntaiseen ja kohtisuoraan osaan eli $\mathbf{a} = \mathbf{a}_{\parallel} + \mathbf{a}_{\perp}$ ja valitsisimme Määritelmässä 3.1 vektorit $\mathbf{x} = \mathbf{a}_{\parallel}$ ja $\mathbf{y} = \mathbf{a}_{\perp}$, voitaisiin peilauksia ajatella peilauksina hypertason suhteen. Kuva 3.1 selventää tarkastelemamme peilauksen ideaa.



Kuva 3.1

Suoritetaan nyt tällainen peilaus ja katsotaan, kuinka se voidaan esittää geometrisen algebran avulla. Tätä varten jaamme aluksi vektorin \mathbf{a} normaalin \mathbf{n} suhteen yhdensuuntaiseen ja kohtisuoraan osaan, mikä onnistuu yksinkertaisesti Cliffordin tulon avulla. Vektoreiden \mathbf{n} ja \mathbf{a} Cliffordin tulo on

$$\mathbf{n}\mathbf{a} = \mathbf{n}(\mathbf{a}_{\parallel} + \mathbf{a}_{\perp}) = \mathbf{n}\mathbf{a}_{\parallel} + \mathbf{n}\mathbf{a}_{\perp}. \tag{3.7}$$

Toisaalta

$$\mathbf{n}\mathbf{a} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{n} \wedge \mathbf{a}. \tag{3.8}$$

Jakamalla vektorilla \mathbf{n} , eli kertomalla puolittain kyseisellä vektorilla, saadaan ratkaistua yhdensuuntainen ja kohtisuora komponentti:

$$\mathbf{a}_{\parallel} = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{a})\mathbf{n} \quad \text{ja} \quad \mathbf{a}_{\perp} = \mathbf{n}(\mathbf{n} \wedge \mathbf{a}). \quad (3.9)$$

Komponentti \mathbf{a}_{\parallel} on selvästi yhdensuuntainen vektorin \mathbf{n} kanssa. Kohtisuoran komponentin kohtisuoruus voidaan osoittaa hyödyntämällä esityksiä (2.20) ja (2.21):

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \cdot \mathbf{a}_{\perp} &= \mathbf{n} \cdot (\mathbf{n}(\mathbf{n} \wedge \mathbf{a})) = \mathbf{n} \cdot (\mathbf{n} \frac{1}{2}(\mathbf{n}\mathbf{a} - \mathbf{a}\mathbf{n})) \\ &= \mathbf{n} \cdot (\frac{1}{2}(\mathbf{a} - \mathbf{n}\mathbf{a}\mathbf{n})) = \mathbf{n} \cdot (\frac{1}{2}(\mathbf{a} - (2\mathbf{n} \cdot \mathbf{a} - \mathbf{a}\mathbf{n})\mathbf{n})) \\ &= \mathbf{n} \cdot (\frac{1}{2}\mathbf{a} - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{a})\mathbf{n} + \frac{1}{2}\mathbf{a}) = \mathbf{n} \cdot \mathbf{a} - \mathbf{n} \cdot \mathbf{a} = 0. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Vektorin \mathbf{a} peilaaminen tason suhteen, jonka normaali on \mathbf{n} , jättää komponentin \mathbf{a}_{\perp} samaksi ja kääntää komponentin \mathbf{a}_{\parallel} vastavektorikseen. Tuloksena saadaan siis vektori $\mathbf{a}' = \mathbf{a}_{\perp} - \mathbf{a}_{\parallel}$. Tämä vektori saadaan vektorista \mathbf{a} yksinkertaisella kuvauksella:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}' &= \mathbf{n}(\mathbf{n} \wedge \mathbf{a}) - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{a})\mathbf{n} \\ &= \mathbf{n}(-\mathbf{a} \cdot \mathbf{n} - \mathbf{a} \wedge \mathbf{n}) \\ &= -\mathbf{n}\mathbf{a}\mathbf{n}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Vektorin peilaus onnistuu siis kaksipuolisella kertolaskulla peilaustason normaalivektorin kanssa. Todistetaan tälle kuvaukselle kappaleen alussa esitetyt ominaisuudet.

Lause 3.1. *Kuvaus $P_{\mathbf{n}} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\mathbf{a} \mapsto -\mathbf{n}\mathbf{a}\mathbf{n}$ on*

I) lineaarinen

II) peilaus

III) isometria ja ortogonaalinen.

Todistus. I) Lineaarisuus seuraa suoraan Cliffordin tulon bilineaarisuudesta:

$$-\mathbf{n}(\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b})\mathbf{n} = (-\alpha\mathbf{n}\mathbf{a} - \beta\mathbf{n}\mathbf{b})\mathbf{n} = -\alpha\mathbf{n}\mathbf{a}\mathbf{n} - \beta\mathbf{n}\mathbf{b}\mathbf{n}.$$

II) Kuvaus (3.11) täyttää Määritelmän 3.1 peilaukselta vaatimat ominaisuudet:

$$-\mathbf{n}\mathbf{n}\mathbf{n} = -\mathbf{n} \quad \text{ja} \quad -\mathbf{n}\mathbf{a}_{\perp}\mathbf{n} = -\mathbf{n}(2\mathbf{a}_{\perp} \cdot \mathbf{n} - \mathbf{n}\mathbf{a}_{\perp}) = \mathbf{a}_{\perp}.$$

III) Isometrisyys on helppo osoittaa Cliffordin tulon avulla:

$$|-\mathbf{n}\mathbf{a}\mathbf{n}|^2 = (-\mathbf{n}\mathbf{a}\mathbf{n})(-\mathbf{n}\mathbf{a}\mathbf{n}) = \mathbf{n}\mathbf{n}|\mathbf{a}|^2 = |\mathbf{a}|^2.$$

Ortogonaalisuus seuraa suoraan isometrisyydestä. □

3.2 Rotaatiot ja roottorit

Vektoriavaruuden rotaatiot eivät muuta vektorien pituuksia, ainoastaan niiden suuntia. Näin ollen rotaatiot ovat isometrisiä kuvauksia. Rotaatioiden tarkastelumme lähtökohtana on Cartanin ja Dieudonnen teoreeman erikoistapauksena saatava tulos, jonka mukaan jokainen n -ulotteisen avaruuden isometria voidaan esittää enintään $n:n$ peilauksen yhdistettynä kuvauksena [7]. Edellä tutustuimme peilauksiin ja havaitsimme, että ne voidaan esittää hyvin yksinkertaisesti Cliffordin algebran avulla. Tässä kappaleessa näemme, kuinka tämä yksinkertainen esitystapa laajenee myös rotaatioihin.

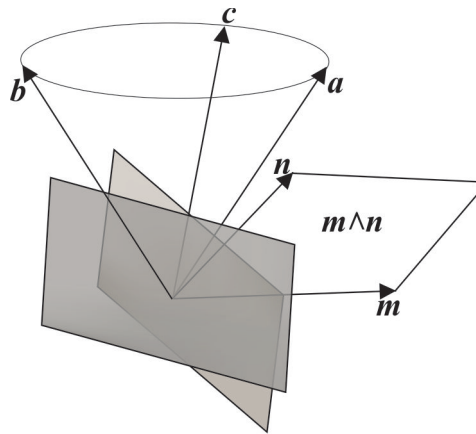
Olkoon \mathbf{m} ja \mathbf{n} kahden hypertason yksikkönormaalit. Normaalit muodostavat bivektorin $\mathbf{m} \wedge \mathbf{n}$ ja niiden välinen kulma θ saadaan pistetulon avulla: $\mathbf{m} \cdot \mathbf{n} = \cos(\theta)$. Peilataan aluksi vektori \mathbf{a} vektorin \mathbf{m} määräämän hypertason suhteen:

$$\mathbf{b} = -\mathbf{m}\mathbf{a}\mathbf{m}. \quad (3.12)$$

Suoritetaan sitten vektorille \mathbf{b} peilaus vektorin \mathbf{n} määräämän hypertason suhteen:

$$\mathbf{c} = -\mathbf{n}\mathbf{b}\mathbf{n} = -\mathbf{n}(-\mathbf{m}\mathbf{a}\mathbf{m})\mathbf{n} = \mathbf{n}\mathbf{m}\mathbf{a}\mathbf{m}\mathbf{n}. \quad (3.13)$$

Kuva 3.2 havainnollistaa eri peilauksia ja bivektoria $\mathbf{m} \wedge \mathbf{n}$.



Kuva 3.2

Merkitään $R = \mathbf{n}\mathbf{m}$, jolloin kuvauksemme voidaan esittää muodossa $\mathbf{a} \mapsto R\mathbf{a}R^*$. Kuvausta R kutsutaan roottoriksi. Tehtäväksemme jää tutkia sen ominaisuuksia ja osoittaa, että se todella suorittaa vektorin rotaation.

Geometrisesti ajatellen rotaatio on ”jäykkä” kuvaus, se säilyttää kuvioden koon ja muodon, toisin sanoen kulmat pysyvät muuttumattomina. Koon muuttumattomuus vaatii rotaation isometrisyyttä. Kulmat ovat sidoksissa sisätuloon, joten Lemman 3.1

mukaan rotaation on oltava myös ortogonaalikuvaus. Koska ortogonaalisuus seuraa isometrisyydestä, riittää kun osoitamme roottorin R olevan isometria. Tätä ennen kuitenkin huomioimme roottorille välittömästi saatavan tuloksen:

$$RR^* = \mathbf{nm}(\mathbf{nm})^* = \mathbf{nmnm} = 1 = \mathbf{mnmn} = R^*R. \quad (3.14)$$

Nyt voimme osoittaa, että roottori toteuttaa edellä mainitut rotaation ominaisuudet ja on lisäksi lineaarikuvaus.

Lause 3.2. *Kuvaus $R : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\mathbf{a} \mapsto R\mathbf{a}R^*$ on*

I) lineaarinen

II) isometria ja ortogonaalinen.

Todistus. I) Lineaarisuus seuraa jälleen suoraan Cliffordin tulon bilineaarisuudesta:

$$R(\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b})R^* = (\alpha R\mathbf{a} - \beta R\mathbf{b})R^* = \alpha R\mathbf{a}R^* - \beta R\mathbf{b}R^*.$$

II) Isometrisyys on helppo osoittaa Cliffordin tulon ja tuloksen (3.14) avulla:

$$|R\mathbf{a}R^*|^2 = R\mathbf{a}R^*R\mathbf{a}R^* = R|\mathbf{a}|^2R^* = |\mathbf{a}|^2.$$

Ortogonaalisuus seuraa suoraan isometrisyydestä. □

Tutkitaan seuraavaksi mitä roottori tekee muutamille vektoreille. Olkoon vektori \mathbf{k} kohtisuorassa tasoa $\mathbf{m} \wedge \mathbf{n}$ vastaan eli $\mathbf{k} \cdot \mathbf{n} = 0$ ja $\mathbf{k} \cdot \mathbf{m} = 0$. Tästä saadaan antikommutoinnit $\mathbf{kn} = -\mathbf{nk}$ ja $\mathbf{km} = -\mathbf{mk}$. Näiden avulla voidaan osoittaa, että roottori säilyttää tasoa $\mathbf{m} \wedge \mathbf{n}$ vastaan kohtisuorat vektorit muuttumattomina:

$$R\mathbf{k}R^* = \mathbf{nmkmn} = -\mathbf{nmkn} = \mathbf{mnmk} = \mathbf{k}. \quad (3.15)$$

Tarkastellaan seuraavaksi roottorin vaikutusta tason $\mathbf{m} \wedge \mathbf{n}$ virittäviin vektoreihin:

$$\mathbf{m}' = \mathbf{nmnmn} = \mathbf{nmn} = (2\mathbf{n} \cdot \mathbf{m} - \mathbf{mn})\mathbf{n} = 2\cos(\theta)\mathbf{n} - \mathbf{m}, \quad (3.16)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{n}' &= \mathbf{nmnmn} = \mathbf{nm}(2\mathbf{n} \cdot \mathbf{m} - \mathbf{mn})\mathbf{n} = \mathbf{nm}(2\cos(\theta)\mathbf{n} - \mathbf{m}) \\ &= 2\cos(\theta)\mathbf{nmn} - \mathbf{n} = 2\cos(\theta)(2\cos(\theta)\mathbf{n} - \mathbf{m}) - \mathbf{n} \\ &= 4\cos^2(\theta)\mathbf{n} - 2\cos(\theta)\mathbf{m} - \mathbf{n} = (4\cos^2(\theta) - 1)\mathbf{n} - 2\cos(\theta)\mathbf{m} \\ &= (2\cos(2\theta) + 1)\mathbf{n} - 2\cos(\theta)\mathbf{m}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Olkoon k ja l reaalilukuja. Cliffordin tulon bilineaarisuuden perusteella kaikille vek-

toreiden \mathbf{m} ja \mathbf{n} suuntaisille vektoreille $k\mathbf{m}$ ja $l\mathbf{n}$ pätee

$$(k\mathbf{m})' = R(k\mathbf{m})R^* = k\mathbf{m}' \quad \text{ja} \quad (l\mathbf{n})' = R(l\mathbf{n})R^* = l\mathbf{n}'. \quad (3.18)$$

Mielenkiintoista tietoa roottorista saadaan tutkimalla vektoreiden $k\mathbf{m}$ ja $l\mathbf{n}$ ja niiden kuvavektoreiden välisiä kulmia. Vektoreiden $k\mathbf{m}$ ja $k\mathbf{m}'$ välinen kulma voidaan laskea sisätulon avulla:

$$\begin{aligned} \alpha &= \arccos\left(\frac{k\mathbf{m} \cdot k\mathbf{m}'}{|k\mathbf{m}||k\mathbf{m}'|}\right) = \arccos\left(\frac{k^2\mathbf{m} \cdot \mathbf{m}'}{k^2|\mathbf{m}||\mathbf{m}'|}\right) = \arccos(\mathbf{m} \cdot \mathbf{m}') \\ &= \arccos(2\cos(\theta)\mathbf{m} \cdot \mathbf{n} - \mathbf{m} \cdot \mathbf{m}) = \arccos(2\cos^2(\theta) - 1) \\ &= \arccos(\cos(2\theta)) = 2\theta. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Vastaavasti vektoreiden $l\mathbf{n}$ ja $l\mathbf{n}'$ väliselle kulmalle:

$$\begin{aligned} \beta &= \arccos(\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}') = \arccos((2\cos(2\theta) + 1)\mathbf{n} \cdot \mathbf{n} - 2\cos(\theta)\mathbf{m} \cdot \mathbf{n}) \\ &= \arccos((2\cos(2\theta) + 1) - 2\cos^2(\theta)) = \arccos(2\cos(2\theta) + 1 - 1 - \cos(2\theta)) \\ &= \arccos(\cos(2\theta)) = 2\theta. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Roottori siis kiertää tason $\mathbf{m} \wedge \mathbf{n}$ vektoreita $k\mathbf{m}$ ja $l\mathbf{n}$ kulman 2θ verran, missä θ oli siis tason bivektorin virittävien vektoreiden \mathbf{m} ja \mathbf{n} välinen kulma. Koska jokainen tason vektori voidaan esittää lineaarikombinaationa $\mathbf{a} = k\mathbf{m} + l\mathbf{n}$, roottori siis kiertää kaikkia tason vektoreita kulman 2θ verran. Edelleen jokainen avaruuden vektori \mathbf{x} voidaan esittää muodossa $\mathbf{x} = \mathbf{x}_\perp + \mathbf{x}_\parallel$, missä \mathbf{x}_\perp on tasoa $\mathbf{m} \wedge \mathbf{n}$ vastaan kohtisuorassa ja \mathbf{x}_\parallel on tasolla. Koska roottori säilyttää kohtisuoran osan muuttumattomana, se kiertää avaruuden vektoreita kulman 2θ verran tasolla $\mathbf{m} \wedge \mathbf{n}$. Roottorikuvauksemme siis on avaruuden rotaatio.

Roottorille on mahdollista saada myös vaihtoehtoinen esitys. Kirjoitamme aluksi

$$R = \mathbf{n}\mathbf{m} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{m} + \mathbf{n} \wedge \mathbf{m} = \cos(\theta) + \mathbf{n} \wedge \mathbf{m}. \quad (3.21)$$

Yhtälön (2.17) mukaan

$$(\mathbf{n} \wedge \mathbf{m})(\mathbf{n} \wedge \mathbf{m}) = -\sin^2(\theta). \quad (3.22)$$

Täten määrittelemme tason $\mathbf{m} \wedge \mathbf{n}$ yksikköbivektorin

$$B = \frac{\mathbf{m} \wedge \mathbf{n}}{\sin(\theta)}, \quad B^2 = -1. \quad (3.23)$$

Bivektorin B avulla roottorin esitys (3.21) saadaan muotoon

$$R = \cos(\theta) - \frac{\mathbf{m} \wedge \mathbf{n}}{\sin(\theta)} \sin(\theta) = \cos(\theta) - B \sin(\theta). \quad (3.24)$$

Tätä esitystä voidaan edelleen muokata. Sitä varten esitämme trigonometriset funktiot aluksi sarjamuodossa:

$$R = \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \dots\right) - B\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \dots\right). \quad (3.25)$$

Bivektorin B ominaisuuden $B^2 = -1$ ansiosta edellinen voidaan kirjoittaa muodossa

$$R = \left(1 + \frac{(-B\theta)^2}{2!} + \frac{(-B\theta)^4}{4!} - \dots\right) + \left(-B\theta + \frac{-B(-B)^2\theta^3}{3!} + \frac{-B(-B)^4\theta^5}{5!} - \dots\right). \quad (3.26)$$

Mutta tästä voidaan tunnistaa eksponenttifunktion sarjaesitys ja roottorille saatiin näin formaali muoto

$$R = e^{-B\theta}. \quad (3.27)$$

Koska edellinen roottori suorittaa rotaation kulman $\frac{\theta}{2}$ verran, kirjoitetaan kulman θ suorittava roottori muodossa

$$R = e^{-B\theta/2}. \quad (3.28)$$

Vektorin \mathbf{a} rotaatio tasolla B kulman θ verran on nyt kuvaus

$$\mathbf{a} \mapsto \mathbf{a}' = e^{-B\theta/2} \mathbf{a} e^{B\theta/2}. \quad (3.29)$$

4. HOMOGEENISET KOORDINAATIT

Homogeeniset koordinaatit ovat projektiivisen geometrian koordinaattijärjestelmä. Ne esitetään tavallisesti lisäämällä euklidisiin koordinaatteihin yksi koordinaatti lisää¹. Täten esimerkiksi kolmiulotteisen euklidisen avaruuden piste (x, y, z) esitetään homogeenisissa koordinaateissa nelikkona $[X, Y, Z, W]$ ehdoilla $x = \frac{X}{W}$, $y = \frac{Y}{W}$ ja $z = \frac{Z}{W}$. Luonnollinen projektio saadaan asettamalla $W = 1$ [18, 2]. Koska siirtyminen euklidisiin koordinaatteihin tehdään jakamalla viimeisellä koordinaatilla, on euklidisen pisteen esitys skaalauksen suhteen invariantti. Homogeeniset koordinaatit $[X, Y, Z, W]$ ja $[\lambda X, \lambda Y, \lambda Z, \lambda W]$ esittävät siis samaa pistettä, kun $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$. Piste $(0, 0, 0, 0)$ suljetaan pois homogeenisista koordinaateista; euklidinen piste $(0, 0, 0)$ esitetään homogeenisilla koordinaateilla muodossa $(0, 0, 0, \lambda)$.

Homogeeniset koordinaatit saivat alkunsa tarpeesta esittää matemaattisesti projektiivisiä ominaisuuksia ja liittää pisteet äärettömydessä euklidiseen avaruuteen. Piste äärettömydessä voidaan esittää homogeenisesti äärellisillä koordinaateilla $[X, Y, Z, 0]$. Homogeenisten koordinaattien avulla myös teoreemat projektiivisessä geometriassa saavat symmetrisemmän muodon, esimerkiksi yhdensuuntaisetkin suorat leikkaavat pisteessä äärettömydessä [13]. Tämän työn kannalta mielenkiinto kohdistuu nolla-alkion erityisaseman poistamiseen vektoriavaruudesta ja translaation linearisoimiseen homogeenisten koordinaattien avulla. Luvun pääasialliset lähteet ovat [4] ja [12].

4.1 Avaruuden \mathbb{R}^n epäformaali laajennus homogeeniseksi

Määritelmässä 2.1 esiteltiin tarkastelemamme vektoriavaruuden \mathbb{R}^n rakenteen määräävät aksioomat. Aksioomat käsittelevät vektoriavaruuden alkioita identtisinä yhtä merkittävää poikkeusta lukuunottamatta. Tämä poikkeus on vektoriavaruuden aksioomissa esille tuleva avaruuden nolla-alkio. Vektorit ovat objekteja, joille voidaan määritellä suunta ja suuruus. Nollavektorille voidaan toki määritellä suuruus mutta sen suunta on määrittelemätön. Koordinaatteihin upotettuna nolla-alkio taas määrää avaruuteemme origon. Tästä seuraa ongelmia kun siirrymme tarkastelemaan

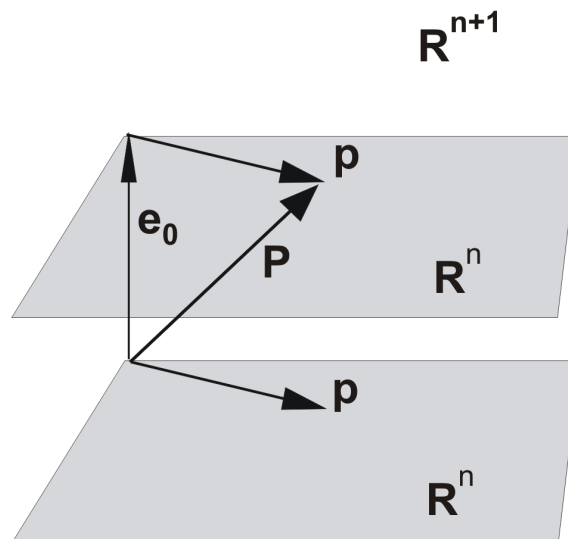
¹Huomattavasti intuitiivisemmän ja havainnollisemman esityksen kolmiulotteisen avaruuden pisteen ja origon yhdistävän suoran suuntakosinien avulla löytää lähteestä [13]. Tässä työssä käytämme kuitenkin yhden ulottuvuuden lisäämiseen perustuvaa lähestymistapaa.

avaruuden kuvauksia, erityisesti translaatiota. Translaatiossa origo, siten siis nolla-alkio, siirtyy, kun taas suunnat avaruudessa pysyvät muuttumattomina. Translaatio ei myöskään ole lineaarinen operaatio:

$$T_{\mathbf{a}}(\alpha \mathbf{x} + \beta \mathbf{y}) = \alpha \mathbf{x} + \beta \mathbf{y} + \mathbf{a} \neq \alpha \mathbf{x} + \alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{y} + \beta \mathbf{a} = \alpha T_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) + \beta T_{\mathbf{a}}(\mathbf{y}).$$

Haluaisimme jollain tavalla poistaa tämän sopimattoman käytöksen ja käsitellä translaatiota lineaarikuvauksena. Seuraavaksi tarkastelemme, kuinka tämä voidaan tehdä muuttamalla hieman näkökulmaamme avaruudestamme.

Tavoitteenamme on siis poistaa nolla-alkion erityisasema vektoriavaruudesta ja käsitellä sitä identtisenä muiden alkioden kanssa. Tämä saavutetaan kasvattamalla avaruuden dimensiota yhdellä eli siirtymällä avaruudesta \mathbb{R}^n avaruuteen \mathbb{R}^{n+1} . Itse avaruutta \mathbb{R}^n emme muuta, esitämme sen vain korkeampiulotteisen avaruuden aliavaruutena. Kuvasta 4.1 selviää rakentelumme taustalla oleva idea.



Kuva 4.1

Olkoon \mathbb{R}^n perusavaruutemme, jota haluamme tarkastella. Siirtyminen korkeampaan ulottuvuuteen tehdään suoraviivaisesti: lisäämme yhden vektorin \mathbf{e}_0 , joka on ortogonaalinen aliavaruuden \mathbb{R}^n kanssa. Valitsemme siis sisätuloksi $\mathbf{e}_0 \cdot \mathbf{x} = 0$ kaikilla $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Avaruutta \mathbb{R}^{n+1} kutsumme esitysavaruudeksi, jonka aliavaruutena on perusavaruutemme \mathbb{R}^n . Perusavaruuden piste voidaan esitysavaruudessa esittää suorana, jolla on suuntavektorina $P = \mathbf{p} + \mathbf{e}_0$.

Lisäulottuvuuden rooli esitysavaruudessa voi olla hieman epäselvä. Joukko $\{\lambda \mathbf{e}_0 \mid \mathbf{e}_0 \in \mathbb{R}^{n+1}\}$ on esitysavaruuden aliavaruus. Aivan kuten perusavaruuden piste \mathbf{p} esitetään suorana, jolla on suuntavektori $P = \mathbf{p} + \mathbf{e}_0$, piste $\mathbf{0}$ voidaan esittää

suorana, jolla on suuntavektori $O = \mathbf{0} + \mathbf{e}_0 = \mathbf{e}_0$. Samaistamme siis vektorin \mathbf{e}_0 avaruuden \mathbb{R}^{n+1} origon kanssa. Alkuperäinen tavoite on nyt saavutettu: nolla-alkiolla ei enää ole esitysavaruuksessa erityisasemaa vaan se on avaruuden muiden alkioden lailla vektori. Olemme suoraviivaisella tavalla homogenisoinneet avaruuden \mathbb{R}^{n+1} alkiodet. Koordinaattilistana vektori \mathbf{e}_0 on $\mathbf{e}_0 = (0, 0, \dots, 0, 1)$. Menettelymme siis vastaa tavallista homogeenisten koordinaattien esitystä.

Kuvasta 4.1 käy intuitiivisesti ilmi, että aliavaruuden \mathbb{R}^n pisteen \mathbf{p} esitys riippuu esitysavaruuksien \mathbb{R}^{n+1} vektorin P suunnasta. Skaalamalla vektoria P vakiolla $\lambda \neq 0$ ei P :n suunta muutu. Vektori λP esittää siis edelleen pistettä \mathbf{p} . Homogeeninen esitystapamme \mathbb{R}^n :n pisteille on siis skaalauksen suhteen invariantti. Koska tarkoituksemme oli poistaa perusavaruuksien nolla-alkio esityksestämme, emme salli tapausta $\lambda = 0$.

Lisäintuitiota homogeenisiin koordinaatteihin saadaan ajattelemalla kolmiulotteisen kappaleen projisointia kaksiulotteiselle tasolle. Tätä varten teemme pienen ajatuskokeen. Valitaan aluksi esimerkiksi seinältä yksi kiinnitetty piste, johon kiinnitämme hyvin ohuen nuoran. Kolmiulotteisen kappaleemme asetamme vaikkapa pöydälle ja pöydän sekä seinällä olevan kiintopisteen väliin asetamme kaksiulotteisen tason. Seuraavaksi viritämme nuoran kireälle kappaleen yhden pisteen ja kiintopisteen väliin, jolloin nuora leikkaa kaksiulotteisen tason yhdessä pisteessä. Tämä tason piste vastaa nyt kolmiulotteisen kappaleen yhtä pistettä. Toistamalla operaatio kaikille kappaleen pisteille, saamme muodostettua kolmiulotteisen kappaleen projektion kaksiulotteiselle tasolle². Tärkeintä tässä kokeessa meidän kannaltamme on huomata, että koko projektionuora esittää aina sitä kappaleen pistettä, johon nuora on kiinnitetty. Projektiotasoa voidaan vapaasti liikuttaa kappaleen ja seinän välissä, jolloin projektion kokoa voidaan skaalata. Mutta jos kappaleen paikka ja seinältä valittu kiintopiste pysyvät muuttumattomina, nuora vastaa aina yhtä kappaleen pistettä. Toisaalta kaksiulotteisen tason pistettä vastaa koko projektionuora ja käytämme projisointiin nyt projektioavaruuksia, kolmiulotteista kappaletta. Tämänkaltaista intuitiota käyttäen rakennamme homogeeniset koordinaatit seuraavaksi matemaattisesti.

4.2 Homogeenisen avaruuden \mathbb{R}^{n+1} matemaattinen määrittely

Matemaattisesti voimme samaistaa joukon alkioita valitun säännön mukaan ekvivalenssirelaation avulla.

Määritelmä 4.1. Olkoon J joukko, $x, y, z \in J$ ja \sim joukon J relaatio, joka on
I) refleksiivinen, eli $x \sim x$,

²Todellisuudessa projisoinnin suorittaminen tällä tavalla vaatisi melko ihmeellisen kaksiulotteisen tason. Projektionuora repisi lopulta silpuksi esimerkiksi kappaleen ja seinän väliin viritetyn paperisen tason. Ajatuskokeessa olemme onneksi vapaita tällaisista rajoituksista.

II) symmetrinen, eli $y \sim x$ aina, kun $x \sim y$,

III) transitiiivinen, eli $x \sim z$ aina, kun $x \sim y$ ja $y \sim z$.

Tällöin \sim on ekvivalenssirelaatio joukossa J .

Alkion $x \in J$ määräämä ekvivalenssiluokka, $[x]$, muodostuu niistä joukon J alkioista, jotka ovat relaatioissa \sim alkioon x eli $[x] = \{y \in J | y \sim x\}$. Kaikkien relaation \sim määräämien ekvivalenssiluokkien joukkoa kutsutaan J :n tekijäavaruudeksi, J/\sim . Toisin sanoen $J/\sim = \{[x] | x \in J\}$. Seuraavan tärkeän lauseen mukaan ekvivalenssirelaatio voidaan korvata aidolla yhtäsuuruudella, jos alkioiden sijaan tarkastellaan niiden määräämiä ekvivalenssiluokkia.

Lause 4.1. *Olkoon \sim joukon J ekvivalenssirelaatio. Tällöin kaikilla $x, y \in J$*

$$y \sim x \iff [y] = [x]. \quad (4.1)$$

Todistus. Olkoon ensin $y \sim x$. Ekvivalenssirelaation symmetrisyyden nojalla $x \sim y$. Jos $z \in [y]$ on mielivaltainen, niin ekvivalenssiluokan määritelmän nojalla $z \sim y$. Nyt $z \sim y$ ja $y \sim x$ eli ekvivalenssin transitiiivisuuden perusteella $z \sim x$. Tästä saadaan edelleen ekvivalenssiluokan määritelmän mukaan, että z on myös joukossa $[x]$ eli $[y] \subset [x]$.

Jos $z \in [x]$ on mielivaltainen, niin $z \sim x$. Oletuksen ja ekvivalenssin symmetrisyyden nojalla $x \sim y$, jolloin transitiiivisyydestä seuraa, että $z \sim y$. Tällöin $z \in [y]$, $[x] \subset [y]$ ja täten $[y] = [x]$. Olkoon sitten $[y] = [x]$, jolloin

$$y \sim y \implies y \in [y] \implies y \in [x] \implies y \sim x. \quad (4.2)$$

□

Tästä lähtien avaruuden \mathbb{R}^{n+1} vektorit $x_0\mathbf{e}_0 + x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \dots + x_n\mathbf{e}_n$ samaistetaan Cliffordin algebran paravektoreiden kanssa. Avaruuden \mathbb{R}^{n+1} paravektorissa \mathbf{e}_0 on skalaariosan asemassa, joten määritellään sen neliö Cliffordin tulossa siten, että $\mathbf{e}_0^2 = 1$. Valitaan algebraksemme siis $Cl_{n+1,0}$. Homogeeniset koordinaatit ovat skaalauksen suhteen invariantteja, joten mielivaltaisten paravektoreiden vertailua varten valitsemme mittakaavan. Paravektoria $X = x_0\mathbf{e}_0 + \dots + x_n\mathbf{e}_n$ sanotaan normalisoiduksi, kun $x_0 = 1$. Kun $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + \dots + x_n\mathbf{e}_n \in \mathbb{R}^n$, ortogonaalisuusehdon $\mathbf{e}_0 \cdot \mathbf{x} = 0$ myötä paravektoreiden normalisointi voidaan tehdä skaalaamalla tekijällä $X \cdot \mathbf{e}_0$:

$$\frac{X}{X \cdot \mathbf{e}_0} = \frac{X}{x_0} = \mathbf{e}_0 + \frac{x_1}{x_0}\mathbf{e}_1 + \dots + \frac{x_n}{x_0}\mathbf{e}_n. \quad (4.3)$$

Tämä vastaa euklidisen pisteen palauttamista perinteisistä homogeenisista koordi-

naateista $[X, Y, Z, W]$ projisoimalla tasolle $W = 1$.

Nyt voimme muodostaa esitysavaruuden \mathbb{R}^{n+1} homogeeniset koordinaatit paravektoreiden välisen ekvivalenssirelaation avulla.

Lause 4.2. *Olkoon $X, Y \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ paravektoreita. Tällöin relaatio*

$$X \sim Y \iff \text{on olemassa sellainen } \lambda \in \mathbb{R} \setminus 0 \text{ niin, että } X = \lambda Y \quad (4.4)$$

on ekvivalenssirelaatio.

Todistus. Koska $X = 1X$, niin $X \sim X$ ja relaatio on refleksiivinen. Olkoon $X \sim Y$, jolloin $X = \lambda Y$. Tällöin $Y = \frac{1}{\lambda}X$ ja $Y \sim X$ eli relaatio on symmetrinen. Olkoon sitten $X \sim Y$ ja $Y \sim Z$ eli $X = \lambda Y$ ja $Y = \gamma Z$. Tällöin $X = \lambda\gamma Z$, $X \sim Z$ ja relaatio on transitiivinen. \square

Käytännössä paravektori X on siis relaatiossa kaikkiin sen monikertoihin λX , lukuunottamatta monikertaa $0X$. Paravektorin X määräämä ekvivalenssiluokka on $[X] = \{\lambda X \mid \lambda \in \mathbb{R} \setminus 0\}$, toisin sanoen kaksi paravektoria ovat ekvivalentteja, jos ne kuuluvat samaan yksiulotteiseen aliavaruuteen³. Määritellään esitysavaruutemme kaikkien ekvivalenssiluokkien joukoksi.

Määritelmä 4.2. Homogeeninen avaruus $\mathbb{H}\mathbb{R}^{n+1}$ on ekvivalenssirelaation \sim määräämä tekijäavaruus \mathbb{R}^{n+1}/\sim . Tekijäavaruuden ekvivalenssiluokkaa kutsutaan homogeenisen avaruuden $\mathbb{H}\mathbb{R}^{n+1}$ pisteeksi.

Lauseen (4.1) mukaan $[X] = [\lambda X]$, koska $X \sim \lambda X$. Täten paravektoreiden skaalaus ei muuta homogeenisen mallin pistettä. Homogeeniset koordinaatit siis ovat skaalauksen suhteen invariantteja. Käytännön laskutoimitukset tehdään valitsemalla ekvivalenssiluokasta jokin luokan, eli homogeenisen mallin pisteen, edustaja. Yleisesti edustajaksi valitaan normalisoitu paravektori, jolle siis e_0 -osan kerroin on 1.

Ekvivalenssiluokkien määräämään tekijäavaruuteen voidaan tuoda laskusäännöt, jos ne ovat yhteensopivia ekvivalenssirelaation kanssa. Määritellään seuraavaksi tämä yhteensopivuus.

Määritelmä 4.3. Olkoon $*$ laskutoimitus ja \sim ekvivalenssirelaatio joukossa J . Ne ovat yhteensopivat, jos $a * b \sim a' * b'$ aina, kun $a \sim a'$ ja $b \sim b'$. Laskutoimitus $*$ määrää tekijälaskutoimituksen $*$ joukossa J/\sim säännöllä $[a] * [b] = [a * b]$.

³Yleisenä visuaalisena mallina projektiivisen avaruuden homogeenisille koordinaateille käytetään origon kautta kulkevia suoria. Jokainen suoran piste, origoa lukuunottamatta, kuuluu samaan määrittlemämme ekvivalenssirelaation määräämään ekvivalenssiluokkaan, katso esimerkiksi [8] ja [2].

Nyt voimme osoittaa, että ekvivalenssirelaatiomme ja Cliffordin tulo ovat yhteensopivia.

Lause 4.3. *Ekvivalenssirelaatio \sim joukossa $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{\mathbf{0}\}$ on yhteensopiva Cliffordin tulon kanssa.*

Todistus. Olkoot X, X', Y, Y' esitysavaruuden \mathbb{R}^{n+1} pisteitä. Olkoon edelleen $X \sim X'$ ja $Y \sim Y'$, jolloin on olemassa $r, k \in \mathbb{R} \setminus 0$ niin, että $X = rX'$ ja $Y = kY'$.

Tällöin $XY = rX'kY' = rkX'Y'$. Koska $r, k \in \mathbb{R} \setminus 0$, niin $XY \sim X'Y'$ ja Cliffordin tulo on yhteensopiva homogeenisen mallin määrittelevän ekvivalenssirelaation kanssa. \square

Kuten edellä mainittiin, homogeeniset koordinaatit ovat skaalauksen suhteen invariantteja. Erityisesti paravektorit A ja $(\alpha + \beta)A$ esittävät samaa pistettä. Tämän avulla voidaan osoittaa, että translaatio on lineaarinen homogeenisessä mallissa:

$$\begin{aligned}
 T_A(\alpha X + \beta Y) &= \alpha X + \beta Y + A \\
 &= \alpha X + \beta Y + (\alpha + \beta)A \\
 &= \alpha X + \alpha A + \beta Y + \beta A \\
 &= \alpha(X + A) + \beta(Y + A) \\
 &= \alpha T_A(X) + \beta T_A(Y),
 \end{aligned} \tag{4.5}$$

missä X, Y ja A ovat pisteitä homogeenisessä avaruudessa $\mathbb{H}\mathbb{R}^{n+1}$.

5. KONFORMINEN MALLI

Edellä kehitetyssä euklidisen avaruuden homogeenisessa mallissa vektoriavaruus pystyttiin homogenisoimaan identifioimalla nollavektori yhden lisäulottuvuuden kanssa. Samalla translaatio saatiin lineaarikuvaukseksi. Äärettömyydelle ei kuitenkaan vielä saatu nolla-alkiota vastaavaa esitystä. Myös euklidisen avaruuden perusominaisuutta, pisteiden välistä etäisyyttä, ei homogeenisessa mallissa pysty yksikäsitteisesti määrittelemään, koska mallin paravektorit ovat skaalauksen suhteen invariantteja. Konformisen mallin lähtökohtana on korjata homogeenisen mallin puutteita antamalla äärettömyydelle eksplisiittinen esitys ja sisällyttämällä avaruuden \mathbb{R}^n pisteiden välinen etäisyys korkeampiulotteisen avaruuden \mathbb{R}^{n+2} vektoreiden sisätuloon. Tähän päästään valitsemalla lisäulottuvuuksien sisätulot sopivasti. Tässä luvussa muodostamme konformisen mallin aluksi pisteiden välisestä etäisyydestä lähtien ja tämän jälkeen osoitamme, että malli on ekvivalentti stereografisella projektiolla muodostetun konstruktion kanssa. Pääasialliset lähteet ovat [4], [3] ja [5]

5.1 Etäisyys sisätulon avulla

Olkoon euklidisen avaruuden pisteillä \mathcal{P} ja \mathcal{Q} vektoriesitykset \mathbf{p} ja \mathbf{q} vektoriavaruudessa \mathbb{R}^n . Vektoriavaruuden sisätulo indusoi pisteiden \mathcal{P} ja \mathcal{Q} välisen etäisyyden seuraavan määritelmän mukaan:

$$d^2(\mathcal{P}, \mathcal{Q}) = d^2(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = |\mathbf{p} - \mathbf{q}|^2 = (\mathbf{p} - \mathbf{q}) \cdot (\mathbf{p} - \mathbf{q}).$$

Purkamalla auki viimeinen pistetulo saadaan

$$(\mathbf{p} - \mathbf{q}) \cdot (\mathbf{p} - \mathbf{q}) = \mathbf{p} \cdot \mathbf{p} + \mathbf{q} \cdot \mathbf{q} - 2\mathbf{p} \cdot \mathbf{q} = |\mathbf{p}|^2 + |\mathbf{q}|^2 - 2\mathbf{p} \cdot \mathbf{q},$$

ja kahdesta edellisestä yhtälöstä edelleen tuttu kosinilause

$$d^2(\mathcal{P}, \mathcal{Q}) = d^2(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = |\mathbf{p}|^2 + |\mathbf{q}|^2 - 2\mathbf{p} \cdot \mathbf{q}. \quad (5.1)$$

Yhtälöstä (5.1) nähdään, että sisätulon avulla olisi mahdollista esittää euklidisten pisteiden välinen etäisyys, jos esitysvektorit olisivat nollavektoreita, joille $|\mathbf{p}|^2 =$

$\mathbf{p}^2 = 0$. Homogeenisessa mallissa ei tämän toteuttavia paravektoreita ole:

$$\mathbf{p}^2 = (\mathbf{e}_0 + \mathbf{p})(\mathbf{e}_0 + \mathbf{p}) = \mathbf{e}_0^2 + \mathbf{p}^2. \quad (5.2)$$

Vaikka on mahdollista valita $\mathbf{e}_0^2 = 0$, ei \mathbb{R}^n :n vektoreista toteuta ehtoa $\mathbf{p}^2 = 0$ kuin nollavektori $\mathbf{0}$. Homogeenisessa mallissa ei siis ole mahdollista sisällyttää euklidisten pisteiden välistä etäisyyttä esitysavaruuksien paravektoreiden sisätuloon. Mutta tämä ominaisuus on mahdollista toteuttaa hieman toisenlaisessa esitysavaruuksessa.

Konformisessa mallissa lähtökohtana on muodostaa avaruuden \mathbb{R}^n vektoreille esitykset P ja Q , joille pätee yhtälön (5.1) mukaan $P \cdot Q = -\frac{1}{2}d^2(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = -\frac{1}{2}d^2(\mathcal{P}, \mathcal{Q})$. Tätä varten avaruus \mathbb{R}^n esitetään aliavaruutena $(n+2)$ -ulotteisessa avaruudessa. Laajennetaanpa homogeenista mallia yhdellä lisäulottuvuudella \mathbf{e}_∞ , jonka identifioimme äärettömyyden kanssa. Esitysvektori on siis muotoa $P = \mathbf{e}_0 + \mathbf{p} + \alpha\mathbf{e}_\infty$, jossa tunnistamme alkuosassa homogeenisen esityksen. Edellä todettiin, että esitysvektorin on oltava nollavektori, jos sisätulon halutaan palauttavan esitettävien pisteiden välinen euklidinen etäisyys. Nollavektorivaatimus on tietysti tällöin ilmeistä, koska pisteen etäisyys itseensä on nolla. Nollavektorivaatimuksen avulla voidaan ratkaista esitysvektorissa oleva kerroin α . Lasketaan esitysvektorin sisätulo itsensä kanssa:

$$\begin{aligned} P \cdot P &= (\mathbf{e}_0 + \mathbf{p} + \alpha\mathbf{e}_\infty) \cdot (\mathbf{e}_0 + \mathbf{p} + \alpha\mathbf{e}_\infty) \\ &= \mathbf{e}_0 \cdot (\mathbf{e}_0 + \mathbf{p} + \alpha\mathbf{e}_\infty) + \mathbf{p} \cdot (\mathbf{e}_0 + \mathbf{p} + \alpha\mathbf{e}_\infty) + \alpha\mathbf{e}_\infty \cdot (\mathbf{e}_0 + \mathbf{p} + \alpha\mathbf{e}_\infty). \end{aligned} \quad (5.3)$$

Koska \mathbf{e}_0 ja \mathbf{e}_∞ esittävät pisteitä origossa ja äärettömyydessä, on niiden oltava nollavektoreita, eli saadaan laskusäännöt $\mathbf{e}_0^2 = 0$ ja $\mathbf{e}_\infty^2 = 0$. Cliffordin algebra mallissa on siis $Cl_{n,0,2}$. Olkoon lisäulottuvuudet myös ortogonaalisia avaruuden \mathbb{R}^n kanssa, jolloin $\mathbf{e}_0 \cdot \mathbf{p} = 0$ ja $\mathbf{e}_\infty \cdot \mathbf{p} = 0$. Yhtälö (5.3) supistuu näillä säännöillä muotoon

$$P \cdot P = 2\alpha\mathbf{e}_0 \cdot \mathbf{e}_\infty + \mathbf{p}^2.$$

Vaatimuksesta $P \cdot P = 0$ saadaan nyt ratkaistua $\alpha = -\frac{\mathbf{p}^2}{2\mathbf{e}_0 \cdot \mathbf{e}_\infty}$. Vektorit \mathbf{e}_0 ja \mathbf{e}_∞ eivät ole tarkastelemassamme avaruudessa \mathbb{R}^n , joten sisätulolle $\mathbf{e}_0 \cdot \mathbf{e}_\infty$ voidaan valita arvo vapaasti. Asettamalla $\mathbf{e}_0 \cdot \mathbf{e}_\infty = -1$ konformisen avaruuden \mathbb{R}^{n+2} vektorille P saadaan esitys

$$P = \mathbf{e}_0 + \mathbf{p} + \frac{1}{2}\mathbf{p}^2\mathbf{e}_\infty. \quad (5.4)$$

Vektoreiden \mathbf{e}_0 ja \mathbf{e}_∞ sisätulon avulla voimme vielä osoittaa, että ne ovat lineaarisesti riippumattomia ratkaisemalla yhtälön

$$\lambda_1\mathbf{e}_0 + \lambda_2\mathbf{e}_\infty = \mathbf{0}.$$

Ottamalla puolittain sisätulo vektorin \mathbf{e}_0 kanssa saamme

$$\lambda_2 \mathbf{e}_\infty \cdot \mathbf{e}_0 = 0.$$

Koska $\mathbf{e}_0 \cdot \mathbf{e}_\infty = -1$, on oltava $\lambda_2 = 0$. Sijoittamalla tämä alkuperäiseen yhtälöön saadaan, että myös $\lambda_1 = 0$.

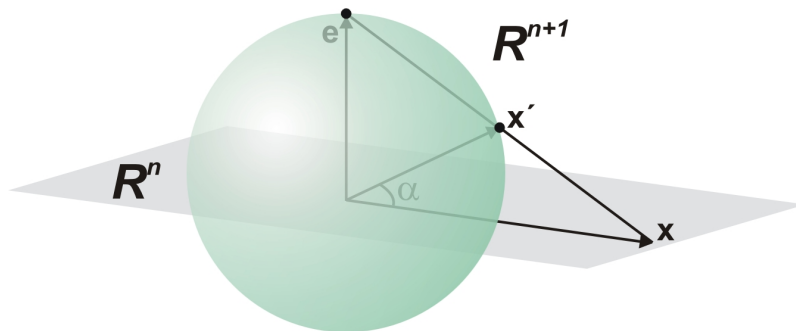
Konformisen avaruuden nollavektorin esitysmuodon avulla voimme vihdoin laskea kahden eri vektorin sisätulon:

$$\begin{aligned} P \cdot Q &= (\mathbf{e}_0 + \mathbf{p} + \frac{1}{2}\mathbf{p}^2\mathbf{e}_\infty) \cdot (\mathbf{e}_0 + \mathbf{q} + \frac{1}{2}\mathbf{q}^2\mathbf{e}_\infty) \\ &= \mathbf{e}_0 \cdot (\mathbf{e}_0 + \mathbf{q} + \frac{1}{2}\mathbf{q}^2\mathbf{e}_\infty) + \mathbf{p} \cdot (\mathbf{e}_0 + \mathbf{q} + \frac{1}{2}\mathbf{q}^2\mathbf{e}_\infty) + \mathbf{p}^2\mathbf{e}_\infty \cdot (\mathbf{e}_0 + \mathbf{q} + \frac{1}{2}\mathbf{q}^2\mathbf{e}_\infty) \\ &= (0 + 0 - \frac{1}{2}\mathbf{q}^2) + (0 + \mathbf{p} \cdot \mathbf{q} + 0) + (-\frac{1}{2}\mathbf{p}^2 + 0 + 0) \\ &= -\frac{1}{2}d^2(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = -\frac{1}{2}d^2(\mathcal{P}, \mathcal{Q}). \end{aligned} \quad (5.5)$$

Konformisen mallin esitysvektoreiden sisätulo palauttaa siis pisteiden \mathcal{P} ja \mathcal{Q} välisen etäisyyden, juuri kuten halusimme! Vektori \mathbf{e}_0 todella esittää konformisessakin mallissa \mathbb{R}^n :n origoa, mikä nähdään helposti asettamalla $\mathbf{p} = \mathbf{0}$ esityksessä (5.4).

5.2 Stereografinen projektio

Stereografisella projektioilla voidaan kuvata n -ulotteinen avaruus $(n+1)$ -ulotteisen hyperpallon pinnalle. Topologiselta kannalta kyseessä on avaruuden yhden pisteen kompaktisointi. Tässä työssä stereografisella projektioilla muodostetaan siis unioni $\mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$.

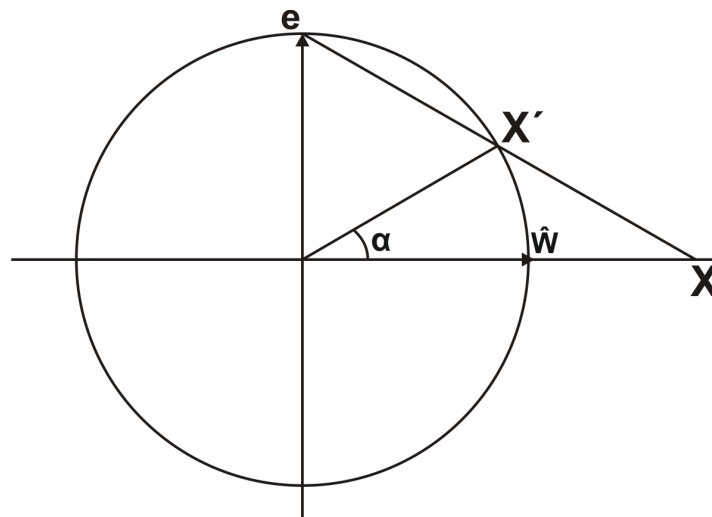


Kuva 5.1

Kuvassa 5.1 on esitetty stereografisen projektion idea. Avaruus \mathbb{R}^n on aliavaruutena avaruudessa \mathbb{R}^{n+1} , jonka lisäulottuvuutta olemme merkinneet yksikkövektorilla \mathbf{e} . Olkoon lisäulottuvuudelle voimassa $\mathbf{e}^2 = 1$. Avaruuden \mathbb{R}^{n+1} yksikköpallon S^n keskipiste on aliavaruuden \mathbb{R}^n origossa. Piste \mathbf{e} on yhdistetty avaruuden \mathbb{R}^n pisteeseen

\mathbf{x} projektiosuoralla. Tämän projektiosuoran kautta jokainen avaruuden \mathbb{R}^n äärellinen piste voidaan kuvata bijektiivisesti yksikköpallon pinnalle. Kuvatussa äärettömyyttä lähestyviä pisteitä projektiosuora lähestyy pallon 'pohjoisnavalla' olevaa tangenttitasoa. Kun projektiosuora on tangenttitasolla ei se enää leikkaa avaruutta \mathbb{R}^n missään äärellisessä pisteessä. Tästä syystä identifioimme pallon 'pohjoisnavan', eli lisäulottuvuuden \mathbf{e} , äärettömyyden kanssa.

Muodostetaan avaruuden \mathbb{R}^n projektio yksikköhyperpallolle nyt täsmällisesti. Kuvan 5.1 mukaisesti tarkastelemme hyperpallon pisteitä \mathbf{x}' ja niitä vastaavia kuvia \mathbf{x} avaruudessa \mathbb{R}^n . Valitaan avaruudesta \mathbb{R}^n yksikkövektori $\hat{\mathbf{w}}$, joka on avaruudessa \mathbb{R}^{n+1} olevan vektorin \mathbf{x}' kohtisuoran projektion suuntainen. Tällöin aliavaruuden \mathbb{R}^n vektorit yksikkövektorin $\hat{\mathbf{w}}$ määräämässä suunnassa ovat muotoa $\mathbf{x} = |\mathbf{x}|\hat{\mathbf{w}}$. Vektori \mathbf{x}' muodostaa kulman α aliavaruuden \mathbb{R}^n kanssa. Vektorit $\hat{\mathbf{w}}$ ja \mathbf{e} määrittävät yhdessä tason. Tätä tasoa kohtisuorasta suunnasta katsottaessa tarkastelumme tyypistyy avaruudessa \mathbb{R}^{n+1} olevalle yksikköympyrälle. Kuvassa 5.2 on esitetty uusi tilanne.



Kuva 5.2

Vektorien $\hat{\mathbf{w}}$ ja \mathbf{e} määräämässä tasossa ovat hyperpallon vektorit \mathbf{x}' esitetään muodossa

$$\mathbf{x}' = \cos\alpha\hat{\mathbf{w}} + \sin\alpha\mathbf{e}. \quad (5.6)$$

Tarvitsemme myös tiedon vektorin \mathbf{x}' kuvasta aliavaruudessa \mathbb{R}^n , kun kulma α muuttuu. Kuvan 5.2 mukaan vektori \mathbf{x} voidaan lausua suoran vektoriyhtälön avulla muodossa

$$\mathbf{x} = \mathbf{e} + t(\mathbf{x}' - \mathbf{e}), \text{ jollain } t \in \mathbb{R}. \quad (5.7)$$

Muuttuja t voidaan ratkaista vaatimuksesta $\mathbf{e} \cdot \mathbf{x} = 0$:

$$\mathbf{e} \cdot (\mathbf{e} + t(\mathbf{x}' - \mathbf{e})) = \mathbf{e} \cdot (\mathbf{e} + t\cos\alpha\hat{\mathbf{w}} + t\sin\alpha\mathbf{e} - t\mathbf{e}) = 1 - t + t\sin\alpha = 0.$$

Koska $e^2 = 1$, saamme ratkaisuksi $t = \frac{1}{1-\sin\alpha}$. Nyt meillä on yhtälöpari hyperpallon vektorille \mathbf{x}' ja stereografisessa projektiossa sitä vastaavalle aliavaruuden \mathbb{R}^n vektorille \mathbf{x} :

$$\mathbf{x}' = \cos\alpha\hat{\mathbf{w}} + \sin\alpha\mathbf{e} \quad (5.8)$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{e} + \frac{1}{1-\sin\alpha}(\mathbf{x}' - \mathbf{e}). \quad (5.9)$$

Stereografinen projektio on bijektiivinen kuvaus, joten voimme esittää hyperpallon vektorin \mathbf{x}' suoraan sitä vastaavan, avaruuden \mathbb{R}^n vektorin \mathbf{x} avulla, ilman nyt mukana olevaa kulmamuuttujaa α . Tätä varten ratkaistaan yhtälöparista aluksi vektori \mathbf{x} sijoittamalla yhtälö (5.8) yhtälöön (5.9):

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \mathbf{e} + \frac{1}{1-\sin\alpha}(\cos\alpha\hat{\mathbf{w}} + \sin\alpha\mathbf{e} - \mathbf{e}) \\ &= \mathbf{e} \left(1 - \frac{1}{1-\sin\alpha} + \frac{\sin\alpha}{1-\sin\alpha} \right) + \frac{\cos\alpha}{1-\sin\alpha}\hat{\mathbf{w}} \\ &= \mathbf{e} \left(\frac{1-\sin\alpha-1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha} \right) + \frac{\cos\alpha}{1-\sin\alpha}\hat{\mathbf{w}} \\ &= \frac{\cos\alpha}{1-\sin\alpha}\hat{\mathbf{w}}. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Korottamalla yhtälö (5.10) puolittain neliöön ja käyttämällä trigonometrista identiteettiä $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$, päästään muotoon

$$\mathbf{x}^2 = \frac{1 - \sin^2\alpha}{1 - 2\sin\alpha + \sin^2\alpha}. \quad (5.11)$$

Tästä saamme toisen asteen yhtälön

$$(\mathbf{x}^2 + 1)\sin^2\alpha - 2\mathbf{x}^2\sin\alpha + (\mathbf{x}^2 - 1) = 0, \quad (5.12)$$

jonka ratkaisut ovat

$$\sin\alpha = \frac{2\mathbf{x}^2 \pm \sqrt{4\mathbf{x}^4 - 4(\mathbf{x}^4 - 1)}}{2(\mathbf{x}^2 + 1)} = \frac{2\mathbf{x}^2 \pm 2}{2(\mathbf{x}^2 + 1)}. \quad (5.13)$$

Valinta $\sin\alpha = \frac{2\mathbf{x}^2+2}{2(\mathbf{x}^2+1)}$ tuottaa degeneroituneen tapauksen $\sin\alpha = 1$. Valitaan siis

$$\sin\alpha = \frac{2\mathbf{x}^2 - 2}{2(\mathbf{x}^2 + 1)} = \frac{\mathbf{x}^2 - 1}{\mathbf{x}^2 + 1}. \quad (5.14)$$

Sijoittamalla ratkaistu $\sin\alpha$ yhtälöön (5.10) ja käyttämällä lauseketta $\mathbf{x} = |\mathbf{x}|\hat{\mathbf{w}}$

saadaan yhtälö

$$|\mathbf{x}| = \frac{\cos\alpha}{1 - \frac{\mathbf{x}^2 - 1}{\mathbf{x}^2 + 1}} = \frac{\cos\alpha}{\frac{\mathbf{x}^2 + 1 - \mathbf{x}^2 + 1}{\mathbf{x}^2 + 1}}, \quad (5.15)$$

mistä ratkeaa

$$\cos\alpha = \frac{2|\mathbf{x}|}{\mathbf{x}^2 + 1}. \quad (5.16)$$

Hyperpallon pisteille saadaan vektoriesitys

$$\mathbf{x}' = \frac{2|\mathbf{x}|}{\mathbf{x}^2 + 1} \hat{\mathbf{w}} + \frac{\mathbf{x}^2 - 1}{\mathbf{x}^2 + 1} \mathbf{e} = \frac{2}{\mathbf{x}^2 + 1} \mathbf{x} + \frac{\mathbf{x}^2 - 1}{\mathbf{x}^2 + 1} \mathbf{e}. \quad (5.17)$$

Nyt olemme siis kuvanneet avaruuden \mathbb{R}^n hyperpallolle S^n , jonka vektoreita $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ vastaavat pisteet esitetään lausekkeen (5.17) mukaisina vektoreina.

Tehdään mallista vielä homogeeninen edellisen luvun tapaan lisäämällä vektori $\bar{\mathbf{e}}$ ja määrittelemällä ekvivalenssirelaatio vektorien välille. Tälle vektorille on voimassa $\bar{\mathbf{e}}^2 = -1$, $\bar{\mathbf{e}} \cdot \mathbf{e} = 0$ ja $\bar{\mathbf{e}} \cdot \mathbf{x} = 0$, kun $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Merkitään lisäksi tästä lähtien konformisen mallin vektoreita isoilla kirjaimilla, jolloin esitysvektorimme ovat muotoa

$$X = \frac{2}{\mathbf{x}^2 + 1} \mathbf{x} + \frac{\mathbf{x}^2 - 1}{\mathbf{x}^2 + 1} \mathbf{e} + \bar{\mathbf{e}}. \quad (5.18)$$

Homogeenisuuden ansiosta voimme yksinkertaistaa esitystä kertomalla sen vakiolla $\mathbf{x}^2 + 1$, joka ei koskaan ole nolla:

$$X = 2\mathbf{x} + (\mathbf{x}^2 - 1)\mathbf{e} + (\mathbf{x}^2 + 1)\bar{\mathbf{e}} = 2\mathbf{x} + \mathbf{x}^2(\mathbf{e} + \bar{\mathbf{e}}) + (\bar{\mathbf{e}} - \mathbf{e}). \quad (5.19)$$

Otetaan käyttöön vielä uudet kantavektorit $\mathbf{e}_0 = \bar{\mathbf{e}} - \mathbf{e}$ ja $\mathbf{e}_\infty = \mathbf{e} + \bar{\mathbf{e}}$, jolloin lopulliseksi konformisen mallin esitysvektoriksi saadaan

$$X = 2\mathbf{x} + \mathbf{x}^2 \mathbf{e}_\infty + \mathbf{e}_0. \quad (5.20)$$

Kertomalla (5.19) vakiolla $\frac{1}{2}$ saadaan muoto

$$X = \mathbf{x} + \mathbf{x}^2 \frac{(\mathbf{e} + \bar{\mathbf{e}})}{2} + \frac{(\bar{\mathbf{e}} - \mathbf{e})}{2}. \quad (5.21)$$

Stereografisella projektiolla muodostettu malli on siis yksinkertaisen kannanvaihdon,

$$\mathbf{e}_\infty = (\mathbf{e} + \bar{\mathbf{e}}) \quad \text{ja} \quad \mathbf{e}_0 = \frac{(\bar{\mathbf{e}} - \mathbf{e})}{2}, \quad (5.22)$$

avulla ekvivalentti kappaleessa 5.1 muodostetun mallin kanssa¹. Tässä työssä on

¹Konforminen malli ei ole vielä täysin vakiintunut ja eri kirjoittajat käyttävätkin erilaisia esityksiä. Lähteessä [21] vertaillaan eri kirjoittajien käyttämiä malleja.

tarkoituksena kuitenkin tarkastella Möbius-kuvauksia lähde[3] mukailleen, joten käytämme mallia (5.20).

Suoraviivaisesti voidaan todentaa seuraavat laskusäännöt:

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_0 = \mathbf{x} \cdot (\bar{\mathbf{e}} - \mathbf{e}) = 0, \quad (5.23a)$$

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_\infty = \mathbf{x} \cdot (\mathbf{e} + \bar{\mathbf{e}}) = 0, \quad (5.23b)$$

$$\mathbf{e}_0^2 = (\bar{\mathbf{e}} - \mathbf{e})(\bar{\mathbf{e}} - \mathbf{e}) = \bar{\mathbf{e}}^2 + \mathbf{e}^2 = 0, \quad (5.23c)$$

$$\mathbf{e}_\infty^2 = (\mathbf{e} + \bar{\mathbf{e}})(\mathbf{e} + \bar{\mathbf{e}}) = \mathbf{e}^2 + \bar{\mathbf{e}}^2 = 0, \quad (5.23d)$$

$$\mathbf{e}_0 \cdot \mathbf{e}_\infty = (\bar{\mathbf{e}} - \mathbf{e}) \cdot (\mathbf{e} + \bar{\mathbf{e}}) = -1 - 1 = -2. \quad (5.23e)$$

Vektoreiden \mathbf{e}_∞ ja \mathbf{e}_0 neliöimissäntöjen mukaan Cliffordin algebra mallissa on $Cl_{n,0,2}$. Homogeenisuuden takia konformisen mallin vektorit λX , missä $\lambda \in \mathbb{R} \setminus 0$, vastaavat samaa perusavaruuden pistettä, toisin sanoen kuuluvat samaan ekvivalenssiluokkaan. Koska laskusääntöjen (5.23) avulla laskettuna $X \cdot \mathbf{e}_\infty = -2$, voidaan mielivaltainen esitysvektori λX normalisoida kertomalla tekijällä $\frac{-2}{X \cdot \mathbf{e}_\infty}$. Laskusääntöjen avulla voidaan osoittaa, että konformisen mallin esitysvektorit ovat nollavektoreita:

$$X^2 = |X|^2 = (2\mathbf{x} + \mathbf{x}^2\mathbf{e}_\infty + \mathbf{e}_0)(2\mathbf{x} + \mathbf{x}^2\mathbf{e}_\infty + \mathbf{e}_0) = 4\mathbf{x}^2 - 2\mathbf{x}^2 - 2\mathbf{x}^2 = 0. \quad (5.24)$$

Konformisessa mallissa avaruuden \mathbb{R}^n vektorit esitetään siis $(n+2)$ -ulotteisen esitysarvuuden nollavektoreina. Asettamalla $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ nähdään, että \mathbf{e}_0 esittää \mathbb{R}^n :n nollavektoria. Ulottuvuudelle \mathbf{e}_∞ saadaan tulkinta tutkimalla esitysvektoria $X(\mathbf{x}^2) = \frac{1}{\mathbf{x}^2}X$, joka on perusavaruuden vektorin \mathbf{x} pituuden funktio:

$$X(\mathbf{x}^2) = \frac{1}{\mathbf{x}^2}X = \frac{2}{\mathbf{x}^2}\mathbf{x} + \mathbf{e}_\infty + \frac{1}{\mathbf{x}^2}\mathbf{e}_0. \quad (5.25)$$

Jos nyt annamme perusavaruudessa vektorin \mathbf{x} lähestyä äärettömyyttä eli annamme sen pituuden kasvaa rajatta, $\mathbf{x}^2 \rightarrow \infty$, näemme, että $X(\mathbf{x}^2) \rightarrow \mathbf{e}_\infty$. Tulkitsemme siis vektorin \mathbf{e}_∞ esittävän ääretöntä.

Helposti laskemalla voidaan osoittaa, että stereografisella projektiollakin muodostetussa mallissa esitysvektoreiden sisätulo palauttaa perusavaruuden vektoreiden välisen etäisyyden:

$$\begin{aligned} X \cdot Y &= (2\mathbf{x} + \mathbf{x}^2\mathbf{e}_\infty + \mathbf{e}_0) \cdot (2\mathbf{y} + \mathbf{y}^2\mathbf{e}_\infty + \mathbf{e}_0) \\ &= 4\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} - 2\mathbf{x}^2 - 2\mathbf{y}^2 \\ &= -2d^2(\mathbf{x}, \mathbf{y}). \end{aligned} \quad (5.26)$$

5.3 Geometrisia konstruktioita konformisessa mallissa

Tarkastellaan seuraavaksi lyhyesti muutamia geometrisia konstruktioita mallissamme. Tätä varten tarvitsemme duaalisityksen käsitettä. Protoyypin käsitteen esittelyyn tarjoaa taso ja sen esittäminen. Taso voidaan esittää suoraan yhtälön avulla, jonka ratkaisuna saadaan kaikki tasolle kuuluvat avaruuden pisteet. Tällä tavalla taso esitetään suoraan avaruuden pistejoukkona. Toisaalta taso voidaan esittää duaalisesti sen normaalivektorin \mathbf{n} ja yhtälön $\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} = 0$ avulla, jonka ratkaisuna saadaan kaikki normaalia kohtisuorassa olevat vektorit \mathbf{x} . Taso siis esitetään ”epäsuorasti” sen duaalivektorin avulla.

Tätä myötäillen tutkimme mitä perusavaruutemme geometrista konstruktioita konformisen mallin vektori V esittää. Tähän tarkoitukseen käytämme esitysavaruudessamme olevaa sisätuloa (5.26) tutkimalla yhtälöä $X \cdot V = 0$, missä X on muotoa $2\mathbf{x} + \mathbf{x}^2\mathbf{e}_\infty + \mathbf{e}_0$ oleva nollavektori. Sisätulohan palautti konformisen mallin vektoreiden avaruudessa \mathbb{R}^n sijaitsevien vasteiden välisen euklidisen etäisyyden. Formaalisti esitelty yhtälö kiteyttää idean, että geometriseen konstruktioon kuuluvat ne vektorit, jotka ovat etäisyydellä 0 kyseistä konstruktioita duaalisesti esittävästä vektorista. Yhtälön ratkaisuna olemme kiinnostuneita selvittämään mitä perusavaruuden joukkoa vektori V vastaa.

Aiemmasta tiedämme jo, että nollavektori $2\mathbf{v} + \mathbf{v}^2\mathbf{e}_\infty + \mathbf{e}_0$ esittää euklidisen avaruuden vektoria \mathbf{v} . Tämä voidaan selvittää edellä esitellyllä tavalla. Tutkimme siis yhtälöä $X \cdot V = -2d^2(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = 0$, joka toteutuu vain, jos $\mathbf{x} = \mathbf{v}$ eli V vastaa perusavaruuden pistettä.

Tarkastellaan seuraavaksi vektoria $\pi = \mathbf{n} + \delta\mathbf{e}_\infty$, missä δ on vakio. Jälleen tutkimme yhtälön $X \cdot \pi = 0$ ratkaisua (muista laskusäännöt (5.23)):

$$X \cdot \pi = (2\mathbf{x} + \mathbf{x}^2\mathbf{e}_\infty + \mathbf{e}_0) \cdot (\mathbf{n} + \delta\mathbf{e}_\infty) = 2\mathbf{x} \cdot \mathbf{n} - 2\delta = 0 \iff \mathbf{x} \cdot \mathbf{n} - \delta = 0. \quad (5.27)$$

Yhtälön (5.27) viimeisestä muodosta $\mathbf{x} \cdot \mathbf{n} = \delta$ voidaan tunnistaa perusavaruuden origosta (eli nollavektorista $\mathbf{0}$) etäisyydellä $\frac{|\delta|}{|\mathbf{n}|}$ olevan tason yhtälö, missä \mathbf{n} on tason normaalivektori. Vektori π siis esittää duaalisesti perusavaruuden tasoa.

Vektori $\sigma = Y - \rho^2\mathbf{e}_\infty$, missä $Y = 2\mathbf{y} + \mathbf{y}^2\mathbf{e}_\infty + \mathbf{e}_0$ ja ρ on vakio, esittää duaalisesti perusavaruuden palloa:

$$X \cdot \sigma = X \cdot (Y - \rho^2\mathbf{e}_\infty) = X \cdot Y - \rho^2 X \cdot \mathbf{e}_\infty = -2d^2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + 2\rho^2 = 0 \iff |\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2 = \rho^2. \quad (5.28)$$

Saimme siis yhtälön ρ -säteiselle pallolle, jonka keskipiste on \mathbf{y} .

5.4 Esimerkkilaskuja konformisessa mallissa

Laittaaksemme konformisen mallin konkreettisemmalle pohjalle, tarkastelemme tässä luvussa joitakin esimerkkilaskuja mallissa. Olkoon meillä aluksi euklidisen avaruuden \mathbb{R}^3 vektori

$$\mathbf{x} = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 - 5\mathbf{e}_3.$$

Tämän vektorin pituuden neliö on $|\mathbf{x}|^2 = \mathbf{x}^2 = 1^2 + 2^2 + (-5)^2 = 30$. Laittamalla \mathbf{x} ja \mathbf{x}^2 yhtälöön (5.20), saadaan vektorin \mathbf{x} konformiseksi esitykseksi

$$X = 2(\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 - 5\mathbf{e}_3) + 30\mathbf{e}_\infty + \mathbf{e}_0 = 2\mathbf{e}_1 + 4\mathbf{e}_2 - 10\mathbf{e}_3 + 30\mathbf{e}_\infty + \mathbf{e}_0.$$

Vektorin \mathbf{x} etäisyyden neliö avaruuden \mathbb{R}^3 nollavektorista on $d^2(\mathbf{x}, \mathbf{0}) = |\mathbf{x} - \mathbf{0}|^2 = \mathbf{x}^2 = 30$. Konformisen mallin perusyhtälöllä (5.26) pitäisi voida laskea perusavaruuden vektoreiden välisiä etäisyyksiä: $d^2(\mathbf{x}, \mathbf{0}) = -\frac{1}{2}X \cdot \mathbf{e}_0$. Tarkistetaan tämä laske-
malla:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}X \cdot \mathbf{e}_0 &= -\frac{1}{2}(2\mathbf{e}_1 + 4\mathbf{e}_2 - 10\mathbf{e}_3 + 30\mathbf{e}_\infty + \mathbf{e}_0) \cdot \mathbf{e}_0 \\ &= -\frac{1}{2}(30 \cdot (-2)) = 30 = d^2(\mathbf{x}, \mathbf{0}). \end{aligned}$$

Tutkitaan seuraavaksi avaruuden \mathbb{R}^4 vektoreita

$$\mathbf{x} = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 - 5\mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_4$$

ja

$$\mathbf{y} = -2\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2 + 7\mathbf{e}_3 - 3\mathbf{e}_4.$$

Näiden vektoreiden pituuksien neliöt ovat $\mathbf{x}^2 = 31$ ja $\mathbf{y}^2 = 71$, jolloin esitysvektoreiksi saadaan

$$X = 2\mathbf{e}_1 + 4\mathbf{e}_2 - 10\mathbf{e}_3 - 2\mathbf{e}_4 + 31\mathbf{e}_\infty + \mathbf{e}_0$$

ja

$$Y = -4\mathbf{e}_1 + 6\mathbf{e}_2 + 14\mathbf{e}_3 - 6\mathbf{e}_4 + 71\mathbf{e}_\infty + \mathbf{e}_0.$$

Lasketaan vektoreiden \mathbf{x} ja \mathbf{y} etäisyyden neliö yhtälöllä (5.26):

$$\begin{aligned} d^2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= -\frac{1}{2}X \cdot Y \\ &= -2\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} + \mathbf{x}^2 + \mathbf{y}^2 \\ &= -2(-2 + 6 - 35 + 3) + 31 + 71 = 158. \end{aligned}$$

Tarkistetaan tulos laskemalla $|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2$ avaruudessa \mathbb{R}^4 :

$$\begin{aligned} |\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2 &= |(\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 - 5\mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_4) - (-2\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2 + 7\mathbf{e}_3 - 3\mathbf{e}_4)|^2 \\ &= |3\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 - 12\mathbf{e}_3 + 2\mathbf{e}_4|^2 \\ &= 9 + 1 + 144 + 4 = 158. \end{aligned}$$

Konformisen mallin esitysvektorista saadaan palautettua perusavaruuden vektori normalisoinnilla eli kertomalla tekijällä $\frac{-2}{\mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_\infty}$. Oletetaan, että olemme päätyneet konformisen mallin vektoriin

$$W = 16\mathbf{e}_1 + 7\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3 + \frac{153}{4}\mathbf{e}_\infty + 8\mathbf{e}_0.$$

Tällöin

$$W \cdot \mathbf{e}_\infty = 8\mathbf{e}_0 \cdot \mathbf{e}_\infty = -16,$$

joten

$$\begin{aligned} \frac{-2}{W \cdot \mathbf{e}_\infty} W &= \frac{1}{8}(16\mathbf{e}_1 + 7\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3 + \frac{153}{4}\mathbf{e}_\infty + 8\mathbf{e}_0) \\ &= 2\mathbf{e}_1 + \frac{7}{8}\mathbf{e}_2 - \frac{1}{8}\mathbf{e}_3 + \frac{153}{32}\mathbf{e}_\infty + \mathbf{e}_0. \end{aligned}$$

Konformisen mallin vektori W siis vastaa perusavaruuden \mathbb{R}^3 vektoria

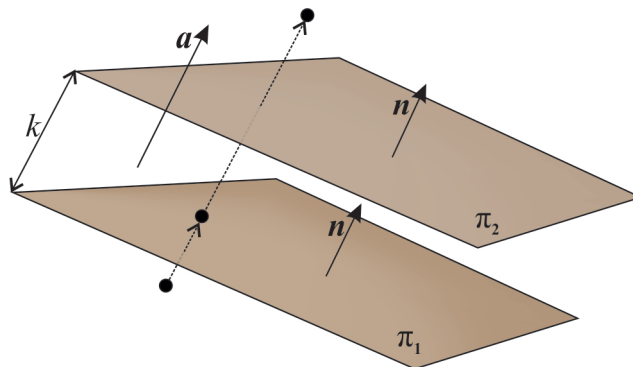
$$\mathbf{w} = 2\mathbf{e}_1 + \frac{7}{8}\mathbf{e}_2 - \frac{1}{8}\mathbf{e}_3.$$

6. MÖBIUS-KUVAUKSET

Möbius-kuvaukset ovat erityisesti kompleksianalyysistä tuttuja konformisia kuvauksia. Tässä kappaleessa kokoamme yhteen edellä rakennetun matemaattisen koneiston ja euklidisen avaruuden mallin tutkimalla niiden avulla avaruuden \mathbb{R}^n Möbius-kuvauksia. Tässä luvussa emme enää niin eksplisiittisesti mainitse kaikkia laskuissa käytettyjä tekniikoita, ne on edellä esitelty erityisesti kappaleissa 2 ja 3. Myös luvun 5 konformisen mallin lisäulottuvuuksia esittäviä vektoreita koskevat laskusäännöt kannattaa muistaa. Pääasiallisina lähteinä toimivat [4], [3] ja [5].

6.1 Translaatio

Euklidisen avaruuden geometriasta on tunnettua, että translaatio siirtymän $2k$, $k \in \mathbb{R}^+$, verran vektorin \mathbf{a} määräämään suuntaan voidaan esittää peilauksena kahden yhdensuuntaisen tason suhteen, joiden välinen etäisyys on k ja joilla on vektorin \mathbf{a} suuntaiset normaalit. Tämä on jälleen Cartanin ja Dieudonnen teoreeman erikoistapaus. Translaation orientaatio on aina sama kuin tasojen normaaleille; translaatio on siis suuntaan \mathbf{a} tai $-\mathbf{a}$. Konformisessa mallissa translaatio suoritetaan peilamalla kahden hypertason suhteen, jotka esitetään duaalisesti vektoreina π_1 ja π_2 kappaleen 5.3 mukaan. Kuva 6.1 selventää translaation ideaa.



Kuva 6.1

Olkoon siis $\pi_1 = \mathbf{n} + \delta_1 \mathbf{e}_\infty$ ja $\pi_2 = \mathbf{n} + \delta_2 \mathbf{e}_\infty$ kaksi duaalisesti esitettyä peilavaa tasoa etäisyyksillä δ_1 ja δ_2 origosta. Tasot ovat yhdensuuntaiset, joten niillä on sama yksikkönormaali \mathbf{n} . Kuten kappaleessa 3.1 osoitettiin, peilaus geometrisessa algebrassa tehdään kertomalla peilattava vektori molemmilta puolilta tason määrävään vektorin kanssa. Koska translaatio muodostetaan kahden peilauksen avulla,

lasketaan tasoja esittävien vektoriemme tulo:

$$\begin{aligned} (\mathbf{n} + \delta_2 \mathbf{e}_\infty)(\mathbf{n} + \delta_1 \mathbf{e}_\infty) &= 1 + \delta_1 \mathbf{n} \mathbf{e}_\infty + \delta_2 \mathbf{e}_\infty \mathbf{n} = 1 + \delta_2 \mathbf{e}_\infty \mathbf{n} - \delta_1 \mathbf{e}_\infty \mathbf{n} \\ &= 1 + (\delta_2 - \delta_1) \mathbf{e}_\infty \mathbf{n} = 1 + \frac{\mathbf{e}_\infty \mathbf{a}}{2}. \end{aligned} \quad (6.1)$$

Viimeisessä vaiheessa määrittelimme vektorin $\mathbf{a} = 2(\delta_2 - \delta_1)\mathbf{n}$. Tämä siitä syystä, että oletamme peilauksemme suorittavan translaation. Kuten kappaleen alussa todettiin, peilaus kahden yhdensuuntaisen tason suhteen muodostaa translaation kaksi kertaa tasojen välisen etäisyyden verran tasojen normaalien määräämässä suunnassa. Tämä idea on sisällytetty vektoriin \mathbf{a} .

Merkitään $T_a = 1 + \frac{\mathbf{e}_\infty \mathbf{a}}{2}$. Koska $\mathbf{e}_\infty \cdot \mathbf{a} = 0$, voitaisiin yhtä hyvin merkitä $T_a = 1 + \frac{\mathbf{e}_\infty \wedge \mathbf{a}}{2}$. Pysymme kuitenkin edellisessä muodossa. Nyt voimme tutkia kuinka peilauksemme vaikuttaa muutamiin vektoreihin. Tutkitaan aluksi origon käyttäytymistä:

$$\begin{aligned} T_a \mathbf{e}_0 T_a^* &= \left(1 + \frac{\mathbf{e}_\infty \mathbf{a}}{2}\right) \mathbf{e}_0 \left(1 - \frac{\mathbf{e}_\infty \mathbf{a}}{2}\right) = \left(\mathbf{e}_0 + \frac{\mathbf{e}_\infty \mathbf{a} \mathbf{e}_0}{2}\right) \left(1 - \frac{\mathbf{e}_\infty \mathbf{a}}{2}\right) \\ &= \mathbf{e}_0 - \frac{\mathbf{e}_0 \mathbf{e}_\infty \mathbf{a}}{2} + \frac{\mathbf{e}_\infty \mathbf{a} \mathbf{e}_0}{2} - \frac{\mathbf{e}_\infty \mathbf{a} \mathbf{e}_0 \mathbf{e}_\infty \mathbf{a}}{4} \\ &= \mathbf{e}_0 - \frac{1}{2}(\mathbf{e}_0 \mathbf{e}_\infty + \mathbf{e}_\infty \mathbf{e}_0) \mathbf{a} - \frac{\mathbf{e}_\infty \mathbf{e}_0 \mathbf{e}_\infty}{4} \mathbf{a}^2 \end{aligned} \quad (6.2)$$

$$\begin{aligned} &= \mathbf{e}_0 + 2\mathbf{a} - \frac{\mathbf{a}^2 \mathbf{e}_\infty}{4} (2\mathbf{e}_0 \cdot \mathbf{e}_\infty - \mathbf{e}_\infty \mathbf{e}_0) \\ &= \mathbf{e}_0 + 2\mathbf{a} - \frac{(-4)\mathbf{a}^2 \mathbf{e}_\infty}{4} = \mathbf{e}_0 + 2\mathbf{a} + \mathbf{a}^2 \mathbf{e}_\infty. \end{aligned} \quad (6.3)$$

Tämä on perusavaruuden pisteen \mathbf{a} esitys konformisessa mallissa, joten T_a todella siirsi origoa vektorin \mathbf{a} verran. Äärettömyyden sen sijaan pitäisi säilyä invarianttina translaatiossa, joten tarkastellaan tätä seuraavaksi:

$$\begin{aligned} T_a \mathbf{e}_\infty T_a^* &= \left(1 + \frac{\mathbf{e}_\infty \mathbf{a}}{2}\right) \mathbf{e}_\infty \left(1 - \frac{\mathbf{e}_\infty \mathbf{a}}{2}\right) \\ &= \mathbf{e}_\infty - \frac{\mathbf{e}_\infty \mathbf{a} \mathbf{e}_\infty}{2} = \mathbf{e}_\infty + \frac{\mathbf{e}_\infty \mathbf{e}_\infty \mathbf{a}}{2} = \mathbf{e}_\infty. \end{aligned} \quad (6.4)$$

Myös äärettömyydeltä haluttu ominaisuus toteutuu peilauksessa T_a . Vektorille $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ saadaan

$$\begin{aligned} T_a \mathbf{x} T_a^* &= \left(1 + \frac{\mathbf{e}_\infty \mathbf{a}}{2}\right) \mathbf{x} \left(1 - \frac{\mathbf{e}_\infty \mathbf{a}}{2}\right) = \left(\mathbf{x} + \frac{\mathbf{e}_\infty \mathbf{a} \mathbf{x}}{2}\right) \left(1 - \frac{\mathbf{e}_\infty \mathbf{a}}{2}\right) \\ &= \mathbf{x} - \frac{\mathbf{x} \mathbf{e}_\infty \mathbf{a}}{2} + \frac{\mathbf{e}_\infty \mathbf{a} \mathbf{x}}{2} - \frac{\mathbf{e}_\infty \mathbf{a} \mathbf{x} \mathbf{e}_\infty \mathbf{a}}{4} \\ &= \mathbf{x} + \frac{\mathbf{e}_\infty}{2} (\mathbf{x} \mathbf{a} + \mathbf{a} \mathbf{x}) = \mathbf{x} + (\mathbf{x} \cdot \mathbf{a}) \mathbf{e}_\infty. \end{aligned} \quad (6.5)$$

Yhdistämällä edelliset voidaan laskea kuvauksen T_a vaikutus yleiseen konformiseen

mallin vektoriin:

$$\begin{aligned} T_a(e_0 + 2\mathbf{x} + \mathbf{x}^2 e_\infty)T_a^* &= e_0 + 2\mathbf{a} + \mathbf{a}^2 e_\infty + 2(\mathbf{x} + (\mathbf{x} \cdot \mathbf{a})e_\infty) + \mathbf{x}^2 e_\infty \\ &= e_0 + 2(\mathbf{x} + \mathbf{a}) + (\mathbf{x}^2 + 2(\mathbf{x} \cdot \mathbf{a}) + \mathbf{a}^2)e_\infty \\ &= e_0 + 2(\mathbf{x} + \mathbf{a}) + (\mathbf{x} + \mathbf{a})^2 e_\infty. \end{aligned} \quad (6.6)$$

Tämä on perusavaruuden pisteen $\mathbf{x} + \mathbf{a}$ esitys konformisessa mallissa. Kuvaus T_a siis todella on konformisen mallin translaatio !

Konformisen mallin translaatiokuvaus T_a esitetään samaan tapaan roottorina kuin luvussa 3 teimme rotaatioille. Translaatio voidaan täten osoittaa olevan isometrisen ja ortogonaalisen lineaarikuvaus Lauseen 3.2 tapaan, kun huomioidaan yhtälöä (3.14) vastaava tulos:

$$\begin{aligned} T_a T_a^* &= T_a^* T_a = \left(1 + \frac{e_\infty \mathbf{a}}{2}\right) \left(1 - \frac{e_\infty \mathbf{a}}{2}\right) \\ &= 1 - \frac{e_\infty \mathbf{a}}{2} + \frac{e_\infty \mathbf{a}}{2} + \frac{e_\infty \mathbf{a} e_\infty \mathbf{a}}{4} \\ &= 1 + \frac{e_\infty^2 \mathbf{a}^2}{4} = 1. \end{aligned} \quad (6.7)$$

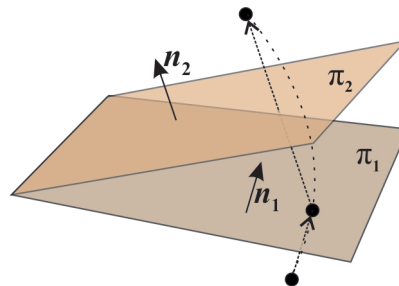
Identiteetin $T_a^* = (1 - \frac{e_\infty \mathbf{a}}{2}) = (1 + \frac{e_\infty (-\mathbf{a})}{2}) = T_{-\mathbf{a}}$ myötä translaation käänteiskuvaus vastaa translaatiota vastakkaiseen suuntaan, kuten pitääkin.

Translaatiolle saadaan myös eksponenttiesitys luvun 3 rotaation tapaan. Tämä seuraa siitä, että $e_\infty^2 = 0$. Tällöin $(\frac{e_\infty \mathbf{a}}{2})^2 = \frac{e_\infty^2 \mathbf{a}^2}{4} = 0$ ja

$$T_a = 1 + \frac{e_\infty \mathbf{a}}{2} = 1 + \frac{e_\infty \mathbf{a}}{2} + \frac{1}{2!} \left(\frac{e_\infty \mathbf{a}}{2}\right)^2 + \dots = e^{e_\infty \mathbf{a}/2}. \quad (6.8)$$

6.2 Rotaatio

Translaation tapaan rotaatio euklidisessa geometriassa esitetään peilauksena hyper-tasojen suhteen. Rotaation tapauksessa tasot eivät kuitenkaan ole yhdensuuntaisia kuvan 6.2 mukaan.



Kuva 6.2

Tarkastellaan kahta origon kautta kulkevaa tasoa. Tässä tapauksessa perusavaruuden tason duaaliesityksessä $\pi = \mathbf{n} + \delta \mathbf{e}_\infty$ etäisyys origosta δ on nolla. Tasot siis esitetään duaalisesti niiden euklidisten yksikkönormaalien avulla eli $\pi_1 = \mathbf{n}_1$ ja $\pi_2 = \mathbf{n}_2$. Tason esitysten tulo on

$$\pi_2 \pi_1 = \mathbf{n}_2 \mathbf{n}_1. \quad (6.9)$$

Mutta tämä vastaa täysin rotaation suorittavaa roottoria R , joiden teoria käsiteltiin jo luvussa 3. Rotaatiot siis esitetään konformisessa mallissa aivan samalla tavalla kuin perusavaruudessa. Tämä voidaan osoittaa laskemalla roottorin vaikutus konformisen mallin vektoriin. Merkitään $\mathbf{n}_2 \mathbf{n}_1 = R$ ja muistetaan, että perusavaruuden vektorit \mathbf{n}_1 ja \mathbf{n}_2 antikommutoivat vektoreiden \mathbf{e}_0 ja \mathbf{e}_∞ kanssa. Tällöin

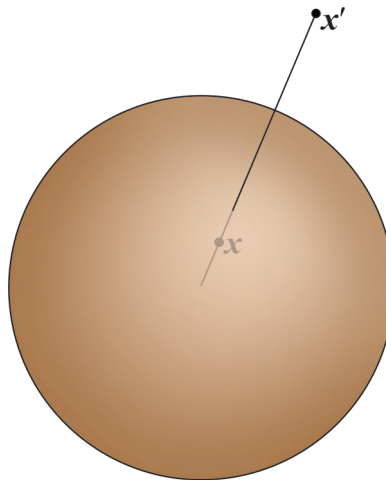
$$\begin{aligned} R(\mathbf{e}_0 + 2\mathbf{x} + \mathbf{x}^2 \mathbf{e}_\infty)R^* &= R\mathbf{e}_0R^* + 2R\mathbf{x}R^* + \mathbf{x}^2 R\mathbf{e}_\infty R^* \\ &= \mathbf{e}_0 + 2R\mathbf{x}R^* + \mathbf{x}^2 \mathbf{e}_\infty \\ &= \mathbf{e}_0 + 2R\mathbf{x}R^* + (R\mathbf{x}R^*)^2 \mathbf{e}_\infty \end{aligned} \quad (6.10)$$

ja tämä on perusavaruuden pisteen $R\mathbf{x}R^*$ konforminen esitys. Viimeisessä vaiheessa käytimme hyväksi rotaation isometrisyyttä.

Tutkimamme rotaatio oli origon ympäri. Edellä tutustuimme kuitenkin translaatioon, joten rotaatio mielivaltaisen pisteen \mathbf{a} ympäri voidaan tehdä siirtämällä piste \mathbf{a} ensin origoon, suorittamalla rotaatio ja siirtymällä sitten takaisin alkuperäiseen pisteeseen translaation avulla.

6.3 Inversio

Inversiolla $\mathbf{x}^{-1} = \frac{\mathbf{x}}{\mathbf{x}^2}$ tarkoitetaan peilausta pallon suhteen kuten on esitetty kuvassa 6.3.



Kuva 6.3

Tarkastellaan inversiota origossa yksikköpallon σ suhteen. Konformisessa mallissa tämä pallo voidaan esittää yhtälön (5.28) mukaan muodossa $\sigma = \mathbf{e}_0 - \mathbf{e}_\infty$. Tutkitaan peilauksia konformisen mallin eri vektoreille:

$$-\sigma \mathbf{x} \sigma = -(\mathbf{e}_0 - \mathbf{e}_\infty) \mathbf{x} (\mathbf{e}_0 - \mathbf{e}_\infty) = (\mathbf{e}_0 - \mathbf{e}_\infty)^2 \mathbf{x} = 4\mathbf{x}, \quad (6.11)$$

$$-\sigma \mathbf{e}_\infty \sigma = -(\mathbf{e}_0 - \mathbf{e}_\infty) \mathbf{e}_\infty (\mathbf{e}_0 - \mathbf{e}_\infty) = \mathbf{e}_0 \mathbf{e}_\infty \mathbf{e}_0 = 4\mathbf{e}_0, \quad (6.12)$$

$$-\sigma \mathbf{e}_0 \sigma = -(\mathbf{e}_0 - \mathbf{e}_\infty) \mathbf{e}_0 (\mathbf{e}_0 - \mathbf{e}_\infty) = \mathbf{e}_\infty \mathbf{e}_0 \mathbf{e}_\infty = 4\mathbf{e}_\infty. \quad (6.13)$$

Vektoreille \mathbf{e}_0 ja \mathbf{e}_∞ kuvaus toimii skaalausta lukuunottamatta oikein eli vaihtaa origon ja äärettömän keskenään. Skaalauksesta päästään eroon, kun muistetaan yhtälön (5.19) jälkeiset esitykset $\mathbf{e}_0 = \bar{\mathbf{e}} - \mathbf{e}$ ja $\mathbf{e}_\infty = \mathbf{e} + \bar{\mathbf{e}}$. Tällöin $\sigma = \bar{\mathbf{e}} - \mathbf{e} - \mathbf{e} - \bar{\mathbf{e}} = -2\mathbf{e}$. Jos nyt tarkastelemmekin kuvauksia $-\frac{\sigma}{2} \mathbf{a} \frac{\sigma}{2} = -\mathbf{e} \mathbf{a} \mathbf{e}$, saadaan yhtälöistä (6.11)-(6.13)

$$-\mathbf{e} \mathbf{x} \mathbf{e} = \mathbf{x}, \quad -\mathbf{e} \mathbf{e}_\infty \mathbf{e} = \mathbf{e}_0 \quad \text{ja} \quad -\mathbf{e} \mathbf{e}_0 \mathbf{e} = \mathbf{e}_\infty. \quad (6.14)$$

Konformisen mallin vektorin X kuvaus saadaan nyt edelliset yhdistämällä:

$$-\mathbf{e} X \mathbf{e} = 2\mathbf{x} + \mathbf{x}^2 \mathbf{e}_0 + \mathbf{e}_\infty = \mathbf{x}^2 (2\mathbf{x}^{-1} + \mathbf{e}_0 + (\mathbf{x}^{-1})^2 \mathbf{e}_\infty). \quad (6.15)$$

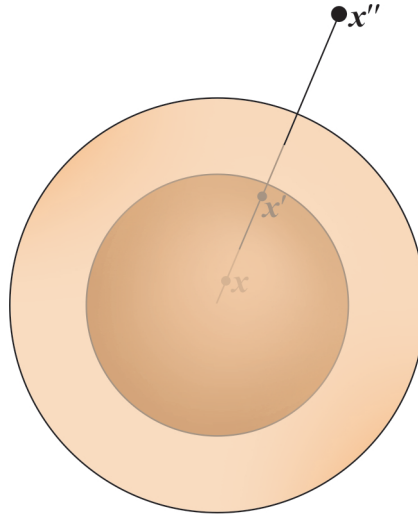
Tunnistamme invertoidun vektorin \mathbf{x}^{-1} konformisen esityksen, joka siis saadaan aikaan vektorin \mathbf{x} esityksestä peilaamalla vektorin \mathbf{e} suhteen. Konformisen mallin homogeenisuuden takia kerroin \mathbf{x}^2 voidaan unohtaa.

Inversio mielivaltaisen pisteen \mathbf{a} ympäri voidaan jälleen tehdä siirtämällä piste \mathbf{a} ensin origoon, suorittamalla inversio origon suhteen ja siirtymällä sitten takaisin alkuperäiseen pisteeseen translaation avulla.

6.4 Dilataatio

Geometrisesti dilataatio eli skaalaus origon suhteen voidaan tehdä peilauksena kahden erisäteisen ja samankeskisen pallon suhteen, eli siis kahtena inversiona. Kuva 6.4 esittelee dilataation idean.

Olkoon siis meillä kaksi duaalista palloa $\mathbf{e}_0 - \rho_1^2 \mathbf{e}_\infty$ ja $\mathbf{e}_0 - \rho_2^2 \mathbf{e}_\infty$. Tutusti peilaus geometrisessa algebrassa tehdään peilaavien vektorien tulon avulla, joten lasketaan



Kuva 6.4

tulo $(\mathbf{e}_0 - \rho_2^2 \mathbf{e}_\infty)(\mathbf{e}_0 - \rho_1^2 \mathbf{e}_\infty)$:

$$\begin{aligned}
 & (\mathbf{e}_0 - \rho_2^2 \mathbf{e}_\infty)(\mathbf{e}_0 - \rho_1^2 \mathbf{e}_\infty) \\
 &= -\rho_1^2 \mathbf{e}_0 \mathbf{e}_\infty - \rho_2^2 \mathbf{e}_\infty \mathbf{e}_0 \\
 &= -\rho_1^2(-2 + \mathbf{e}_0 \wedge \mathbf{e}_\infty) - \rho_2^2(-2 - \mathbf{e}_0 \wedge \mathbf{e}_\infty) \quad (6.16) \\
 &= 2\rho_1^2 - \rho_1^2 \mathbf{e}_0 \wedge \mathbf{e}_\infty + 2\rho_2^2 + \rho_2^2 \mathbf{e}_0 \wedge \mathbf{e}_\infty \\
 &= 2(\rho_1^2 + \rho_2^2) - (\rho_1^2 - \rho_2^2) \mathbf{e}_0 \wedge \mathbf{e}_\infty.
 \end{aligned}$$

Tulo saadaan tutumpaan roottorimuotoon, kun skaalaamme sen ensin vakiolla $\frac{1}{4\rho_1\rho_2}$:

$$\frac{1}{4\rho_1\rho_2}(2(\rho_1^2 + \rho_2^2) - (\rho_1^2 - \rho_2^2)\mathbf{e}_0 \wedge \mathbf{e}_\infty) = \frac{1}{2}\left(\frac{\rho_1}{\rho_2} + \frac{\rho_2}{\rho_1}\right) - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{\rho_1}{\rho_2} - \frac{\rho_2}{\rho_1}\right)\mathbf{e}_0 \wedge \mathbf{e}_\infty. \quad (6.17)$$

Jos vielä määrittelemme $e^{(\gamma/2)} = \frac{\rho_2}{\rho_1}$, saadaan edellisestä

$$\frac{1}{2}(e^{(-\gamma/2)} + e^{(\gamma/2)}) - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}(e^{(-\gamma/2)} - e^{(\gamma/2)})\mathbf{e}_0 \wedge \mathbf{e}_\infty = \cosh\left(\frac{\gamma}{2}\right) + \sinh\left(\frac{\gamma}{2}\right)N, \quad (6.18)$$

missä määrittelimme bivektorin $N = \frac{1}{2}\mathbf{e}_0 \wedge \mathbf{e}_\infty$. Tälle roottorille saadaan myös eksponenttitesitys, johon pääsemme luvun 3 tapaan, kunhan laskemme bivektorin N neliön. Laskussa voimme käyttää hyödyksi yhtälön (2.17) välivaihetta $(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) = -\mathbf{a}^2 \mathbf{b}^2 + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2$:

$$N^2 = \frac{1}{4}(\mathbf{e}_0 \wedge \mathbf{e}_\infty)^2 = \frac{1}{4}(-\mathbf{e}_0^2 \mathbf{e}_\infty^2 + (\mathbf{e}_0 \cdot \mathbf{e}_\infty)^2) = \frac{1}{4} \cdot 4 = 1. \quad (6.19)$$

Tämän ja hyperbolisten funktioiden sarjakehitelmien avulla päästään viimein root-

torin eksponenttitesitykseen:

$$\begin{aligned}
& \cosh\left(\frac{\gamma}{2}\right) + \sinh\left(\frac{\gamma}{2}\right)N \\
&= 1 + \frac{\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2}{2!} + \frac{\left(\frac{\gamma}{2}\right)^4}{4!} + \dots \left(\frac{\gamma}{2} + \frac{\left(\frac{\gamma}{2}\right)^3}{3!} + \frac{\left(\frac{\gamma}{2}\right)^5}{5!} + \dots\right)N \\
&= 1 + \frac{\gamma N}{2} + \frac{\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2}{2!} + \frac{\left(\frac{\gamma}{2}\right)^3 N}{3!} + \frac{\left(\frac{\gamma}{2}\right)^4}{4!} + \frac{\left(\frac{\gamma}{2}\right)^5 N}{5!} + \dots \\
&= 1 + \frac{\gamma N}{2} + \frac{\left(\frac{\gamma N}{2}\right)^2}{2!} + \frac{\left(\frac{\gamma N}{2}\right)^3}{3!} + \frac{\left(\frac{\gamma N}{2}\right)^4}{4!} + \frac{\left(\frac{\gamma N}{2}\right)^5}{5!} + \dots \\
&= e^{\frac{\gamma N}{2}}.
\end{aligned} \tag{6.20}$$

Ennen kuin siirrymme tutkimaan, mitä roottori $S = \cosh\left(\frac{\gamma}{2}\right) + \sinh\left(\frac{\gamma}{2}\right)N$ tekee konformisen mallin esitysvektorin eri komponenteille, lasketaan näiden komponenttien ja bivektorin N väliset kommutaatiorelaatiot:

$$\begin{aligned}
Ne_0 &= \left(\frac{1}{2}e_0 \wedge e_\infty\right)e_0 = \frac{1}{4}(e_0e_\infty - e_\infty e_0)e_0 \\
&= \frac{1}{4}e_0e_\infty e_0 = \frac{1}{4}e_0(2e_\infty \cdot e_0 - e_0e_\infty) \\
&= -e_0,
\end{aligned} \tag{6.21}$$

$$e_0N = e_0\frac{1}{4}(e_0e_\infty - e_\infty e_0) = -\frac{1}{4}e_0e_\infty e_0 = e_0, \tag{6.22}$$

$$Ne_\infty = \frac{1}{4}(e_0e_\infty - e_\infty e_0)e_\infty = -\frac{1}{4}e_\infty e_0e_\infty = -\frac{1}{4}(2e_\infty \cdot e_0 - e_0e_\infty)e_\infty = e_\infty, \tag{6.23}$$

$$e_\infty N = e_\infty\left(\frac{1}{4}(e_0e_\infty - e_\infty e_0)\right) = \frac{1}{4}e_\infty e_0e_\infty = -e_\infty, \tag{6.24}$$

$$\mathbf{x}N = \frac{1}{4}(\mathbf{x}e_0e_\infty - \mathbf{x}e_\infty e_0) = \frac{1}{4}(e_0e_\infty\mathbf{x} - e_\infty e_0\mathbf{x}) = N\mathbf{x}. \tag{6.25}$$

Viimeisessä yhtälössä käytimme apuna tietoa, että \mathbf{x} antikommutoi vektorien e_0 ja e_∞ kanssa.

Nyt tarkastelemme vihdoin kuvauksen $S\mathbf{a}S^*$ vaikutusta konformisen mallin eri vektoreihin. Laskuissa käytämme hyödyksi edellisiä kommutaatiorelaatioita ja roottorin

esitystä $S = \cosh(\frac{\gamma}{2}) + \sinh(\frac{\gamma}{2})N$.

$$\begin{aligned}
S\mathbf{e}_0S^* &= (\cosh(\frac{\gamma}{2}) + \sinh(\frac{\gamma}{2})N)\mathbf{e}_0(\cosh(\frac{\gamma}{2}) - \sinh(\frac{\gamma}{2})N) \\
&= (\cosh(\frac{\gamma}{2}) + \sinh(\frac{\gamma}{2})N)\mathbf{e}_0(\cosh(\frac{\gamma}{2}) - \sinh(\frac{\gamma}{2})) \\
&= (\cosh(\frac{\gamma}{2}) - \sinh(\frac{\gamma}{2}))(\cosh(\frac{\gamma}{2}) - \sinh(\frac{\gamma}{2}))\mathbf{e}_0 \\
&= (\cosh^2(\frac{\gamma}{2}) + \sinh^2(\frac{\gamma}{2}) - 2\cosh(\frac{\gamma}{2})\sinh(\frac{\gamma}{2}))\mathbf{e}_0 \\
&= (\cosh(\gamma) - \sinh(\gamma))\mathbf{e}_0 = e^{-\gamma}\mathbf{e}_0.
\end{aligned} \tag{6.26}$$

$$\begin{aligned}
S\mathbf{e}_\infty S^* &= (\cosh(\frac{\gamma}{2}) + \sinh(\frac{\gamma}{2})N)\mathbf{e}_\infty(\cosh(\frac{\gamma}{2}) - \sinh(\frac{\gamma}{2})N) \\
&= (\cosh(\frac{\gamma}{2}) + \sinh(\frac{\gamma}{2})N)\mathbf{e}_\infty(\cosh(\frac{\gamma}{2}) + \sinh(\frac{\gamma}{2})) \\
&= (\cosh(\frac{\gamma}{2}) + \sinh(\frac{\gamma}{2}))(\cosh(\frac{\gamma}{2}) + \sinh(\frac{\gamma}{2}))\mathbf{e}_\infty
\end{aligned} \tag{6.27}$$

$$= (\cosh(\frac{\gamma}{2}) + \sinh(\frac{\gamma}{2}))^2\mathbf{e}_\infty = e^\gamma\mathbf{e}_\infty \tag{6.28}$$

$$\begin{aligned}
S\mathbf{x}S^* &= (\cosh(\frac{\gamma}{2}) + \sinh(\frac{\gamma}{2})N)\mathbf{x}(\cosh(\frac{\gamma}{2}) - \sinh(\frac{\gamma}{2})N) \\
&= (\cosh(\frac{\gamma}{2}) + \sinh(\frac{\gamma}{2})N)(\cosh(\frac{\gamma}{2})\sinh(\frac{\gamma}{2}))\mathbf{x} \\
&= (\cosh^2(\frac{\gamma}{2}) - \sinh^2(\frac{\gamma}{2}))\mathbf{x} \\
&= (\frac{1}{2}\cosh(\gamma) + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cosh(\gamma) + \frac{1}{2})\mathbf{x} = \mathbf{x}.
\end{aligned} \tag{6.29}$$

Yhdistämällä taas edellä lasketut komponenttien kuvaukset saadaan konformisen mallin vektorin X kuvaus:

$$SXS^* = e^{-\gamma}\mathbf{e}_0 + 2\mathbf{x} + e^\gamma\mathbf{e}_\infty\mathbf{x}^2\mathbf{e}_\infty = e^{-\gamma}(\mathbf{e}_0 + 2e^\gamma\mathbf{x} + (e^\gamma\mathbf{x})^2\mathbf{e}_\infty). \tag{6.30}$$

Suluissa on vektorin $e^\gamma\mathbf{x}$ konforminen esitys. Roottori S siis vastaa dilataatiota konformisessa mallissa. Homogeenisuuden takia vakiokerroin voidaan unohtaa. Tutkimamme dilataatio oli origon suhteen. Dilataatio mielivaltaisen pisteen suhteen tehdään jälleen translaation ja dilataation kompositiiona.

Dilataatiomme vastasi skaalausta kertoimella e^γ . Jos haluamme tehdä mielivaltaisen skaalauksen $\mathbf{x} \mapsto \alpha\mathbf{x}$, niin tällöin $e^\gamma = \alpha$ eli $\gamma = \ln\alpha$. Tästä pääsemme tutkimaan miten peilaavien pallojen säteet tulisi valita, jos skaalauskerroin olisi α . Määritelmän

$e^{(\gamma/2)} = \frac{\rho_2}{\rho_1}$ avulla saadaan

$$\begin{aligned} 2\ln \frac{\rho_2}{\rho_1} &= \ln \alpha \\ \iff e^{2\ln \frac{\rho_2}{\rho_1}} &= e^{\ln \alpha} \\ \iff \left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^2 &= \alpha \\ \implies \frac{\rho_2}{\rho_1} &= \sqrt{\alpha}. \end{aligned} \tag{6.31}$$

Voisimme siis valita ensimmäisen peilaavan pallon yksikköpalloksi, jolloin toisen pallon säteen olisi oltava $\sqrt{\alpha}$.

7. YHTEENVETO

Tässä työssä tutkimme euklidisen avaruuden \mathbb{R}^n konformista mallia ja Möbius-kuvauksia tässä mallissa. Matemaattisena koneistona käytimme Cliffordin geometrista algebraa, johon tutustuimme kattavasti työn alussa. Erityisesti peilausten ja rotaatioiden esittämiseen Cliffordin algebran avulla perehdyimme yhden luvun verran. Peilaukset ja rotaatiot muodostivat työn lopussa perustan Möbius-kuvausten esittämiseksi. Ennen konformiseen malliin tutustumista tutkimme myös projektiivisestä geometriasta tuttuja homogeenisia koordinaatteja, jotka luovat pohjan myös konformiselle mallille.

Konformisessa mallissa mallinnettavan perusavaruuden vektori \mathbf{x} esitettiin muodossa $2\mathbf{x} + \mathbf{x}^2\mathbf{e}_\infty + \mathbf{e}_0$. Avaruus \mathbb{R}^n siis mallinnettiin $(n + 2)$ -ulotteisessa avaruudessa \mathbb{R}^{n+2} , jossa lisätyt kantavektorit \mathbf{e}_∞ ja \mathbf{e}_0 ovat nollavektoreita. Konformisen mallin taustalla olevana yhtenä ideana on saada vektoriesitykset origolle ja äärettömyydelle siinä missä mille tahansa muullekin perusavaruuden pisteelle. Nimiensä mukaisesti kantavektori \mathbf{e}_0 esitti origoa ja \mathbf{e}_∞ äärettömyyttä. Kaikki perusavaruuden pisteet siis ovat tasavertaisessa asemassa konformisessa mallissa.

Konformisen mallin esitysvektoreiden sisätulo palautti perusavaruuden vektoreiden välisen etäisyyden. Tämän avulla pystyimme tutkimaan kuinka erilaiset geometriset konstruktiot esitetään duaalisesti konformisessa mallissa. Duaalinen esitys tarkoitti tämän työn puitteissa tietyn konstruktion, toisin sanoen tietynlaisen pistejoukon, esittämistä duaalivektorin avulla. Mallinesimerkkinä toimi tason esittäminen. Taso voidaan määrätä antamalla tason yhtälö, jonka ratkaisuna on tasolle kuuluvat pisteet. Toisaalta taso voidaan määrittellä duaalisesti pelkästään tason normaalivektorin avulla, jolloin tason muodostaa kaikki vektorit, jotka ovat kohtisuorassa normaalivektoriin nähden. Konformisessa mallissa ajattelimme, että tiettyyn geometriseen konstruktion kuuluvat pisteet ovat etäisyydellä nolla konstruktiota duaalisesti esittävästä vektorista. Tutkimme siis yhtälöä $X \cdot V = 0$, missä X oli muotoa $2\mathbf{x} + \mathbf{x}^2\mathbf{e}_\infty + \mathbf{e}_0$ oleva esitysvektori ja V oletettua konstruktiota duaalisesti esittävä vektori. Esimerkiksi konformisen mallin vektori $\pi = \mathbf{n} + \delta\mathbf{e}_\infty$ esitti duaalisesti perusavaruuden tasoa.

Cliffordin algebran ja konformisen mallin voima tuli erityisesti esille työn lopussa

Möbius-kuvausten esittämistä tutkittaessa. Kaikki Möbius-kuvaukset konformisessa mallissa voitiin esittää yksinkertaisina ortogonaalikuvauksina. Tämä perustui kahden seikkaan. Ensinnäkin Cliffordin algebran peilaukset ja rotaatiot ovat ortogonaalikuvauksia. Nämä esitetään yksinkertaisesti kertomalla operoitava vektori molemmilta puolilta peilaavalla vektorilla peilauksessa tai kahden peilaavan vektorin tulolla rotaation tapauksessa. Toiseksi geometriset konstruktiot voitiin esittää konformisessa mallissa duaalivektoreina. Esimerkiksi translaatio voidaan muodostaa kahden yhdensuuntaisen tason peilauksena. Konformisessa mallissa tämä tehtiin yksinkertaisesti kertomalla vektori, jolle translaatio haluttiin suorittaa, molemmilta puolilta kahta yhdensuuntaista tasoa duaalisesti esittävien vektorien tulolla. Näin Cliffordin algebra ja konforminen malli yhdessä tuovat kuvausten esityksiin selkeästi mukaan niiden taustalla olevat geometriset ideat.

LÄHTEET

- [1] Eduardo Bayro-Corrochano, Gerik Scheuermann, Geometric Algebra Computing in Engineering and Computer Science, Springer London, 2010.
- [2] Jules Bloomenthal, Jon Rokne, Homogeneous coordinates, The Visual Computer vol. 11, no. 1, pp. 15-26, 1994.
- [3] Chris Doran, Anthony Lasenby, Geometric Algebra for Physicists, Cambridge University Press, 1. edition, 2003.
- [4] Leo Dorst, Daniel Fontijne and Stephen Mann, Geometric Algebra For Computer Science, Morgan Kaufmann, 1. edition, 2007.
- [5] Leo Dorst, Tutorial: Structure-Preserving Representation of Euclidean Motions Through Conformal Geometric Algebra, teoksessa Eduardo Bayro-Corrochano, Gerik Scheuermann (eds.): Geometric Algebra Computing in Engineering and Computer Science, Springer London, 2010.
- [6] Leo Dorst, Joan Lasenby, Guide to Geometric Algebra in Practice, Springer London, 2011.
- [7] Jean Gallier, Geometric methods and applications for computer science and engineering, Springer New York, 2001.
- [8] Ana Irene Ramírez Galarza, José Seade, Introduction to Classical Geometries, Birkhäuser, 2007.
- [9] Paul R. Halmos, Finite-Dimensional Vector Spaces, Springer, 2. edition, 1974.
- [10] Hongbo Li, David Hestenes, Alyn Rockwood, Generalized Homogeneous Coordinates for Computational Geometry, teoksessa Gerald Sommer (ed.): Geometric Computing with Clifford Algebras, Springer, 1. edition, 2001.
- [11] Pertti Lounesto, Clifford Algebras and Spinors, London Mathematical Society Lecture Note Series 286. Cambridge University Press, 2. edition, 2001.
- [12] Duncan Marsh, Applied Geometry for Computer Graphics and CAD, Springer London, 2. edition, 2005.
- [13] James Roy Newman (ed.), The World of Mathematics, Volume 3, Dover Publications, 2000.
- [14] Heikki Orelma, Cliffordin analyysiä avaruudessa \mathbb{R}^3 , diplomityö, Tampereen teknillinen yliopisto, 2005.

- [15] Heikki Orelma, *New Perspectives in Hyperbolic Function Theory*, väitöskirja, TTY Julkaisu 892, Tampereen Yliopistopaino, 2010.
- [16] Christian Perwass, *Geometric Algebra with Applications in Engineering*, Springer Berlin, 2009.
- [17] Pasi Raunonen, *Mathematical Structures for Dimensional Reduction and Equivalence Classification of Electromagnetic Boundary Value Problems*, väitöskirja, TTY Julkaisu 811, Tampereen Yliopistopaino, 2009.
- [18] Richard Riesenfeld, *Homogeneous Coordinates and Projective Planes in Computer Graphics*, IEEE Computer Graphics and Applications vol. 1, no. 1, pp. 50-55, 1981.
- [19] J.G. Semple, G.T. Kneebone, *Algebraic Projective Geometry*, Oxford University Press, 1998.
- [20] Tony Sudbery: Introduction to quaternions, teoksessa Sirkka-Liisa Eriksson (ed.), *Clifford Algebras and Potential Theory*, University of Joensuu, Department of Mathematics Report Series no. 7, Joensuun yliopistopaino, 2004.
- [21] John Vince, *Geometric Algebra for Computer Graphics*, Springer London, 2008.