
TAMPEREEN YLIOPISTO
Pro gradu -tutkielma

Maiju Kohonen

Pallotrigonometriaa:
pallokolmio

Informaatiotieteiden yksikkö
Matematiikka
Kesäkuu 2016

Tampereen yliopisto

Informaatiotieteiden yksikkö

KOHONEN, MAIJU: Pallotrigonometriaa; pallokolmio

Pro gradu -tutkielma, 24 s.

Matematiikka

Kesäkuu 2016

Tiivistelmä

Tämä pro gradu -tutkielma käsittelee pallotrigonometriaa hyvin havainnollistavasta näkökulmasta ja tekee katsauksen pallotrigonometrian tarpeeseen ja kehitykseen.

Pallotrigonometria on epäeuklidisen geometrian ala, jonka työskentelypintana on pallo. Pallotrigonometrian perusobjekti on pallokolmio, jonka isoympyrän kaarista muodostuvia sivuja ja kaarien leikkauksista muodostuvia kulmia voidaan ratkaista tutkielmassa johdettavien pallotrigonometrian sini- ja kosinilauseiden avulla.

Tutkielmassa määritellään pallokoordinaatit, joiden avulla voidaan ilmaista minkä tahansa pisteen paikka pallolla. Pallokoordinaatteja ja maantieteellisiä koordinaatteja verrataan toisiinsa ja esitetään esimerkkejä maantieteen ja maapallon avulla.

Lähteitä tutkielmassa on käytetty monipuolisesti eikä varsinaisia päälähteitä voi nimetä, mutta suomenkielisistä lähteistä erityisesti Karttusen yms. teos Tähtitieteen perusteet sekä Vermeer ja Rasilan Maailman kartta - johdatus matemaattiseen geodesiaan ovat olleet tärkeitä suomenkielisen pallotrigonometriaan liittyvän käsitteistön laajentamisessa ja haltuun ottamisessa.

Avainsanat: pallotrigonometria, pallokoordinaatit, pallokolmio

Sisältö

1	Johdanto	1
2	Peruskäsitteet	2
3	Koordinaatit	7
4	Pallokolmio	13
4.1	Sini- ja kosinilause	17
4.2	Etäisyyksien mittaaminen	21
	Viitteet	24

1 Johdanto

Tässä tutkielmassa perehdytään pallotrigonometriaan ja sen perusobjektiin pallokolmioon. Kaikki asiat pyritään selittämään ja havainnollistamaan kuvien ja esimerkein niin hyvin, että lukijan olisi mahdollista todella hahmottaa ja ymmärtää käsiteltävät asiat. Aihetta käsitellään kolmiulotteisessa avaruudessa jättäen puhdas aksiomaattinen lähestymistapa vähemmälle. Kuvien hahmottelussa on käytetty apuna erityisesti lähteitä [2, 3, 7, 8, 11].

Pallotrigonometria on epäeuklidisen geometrian ala, jossa työskentelypintana toimii pallo. Esimerkeissä tullaan käsittelemään maapalloa pallona huomioimatta sen todellista muotoa. Maapallon todellinen muoto poikkeaa pallosta niin vähän, ettei se tule esimerkeissä aiheuttamaan ongelmaa tai sekaannusta. Euklidisen geometrian lailla pisteet ovat tärkeässä roolissa myös pallotrigonometriassa. Pallotrigonometrian selvästi havaittava poikkeus perinteisempään euklidiseen geometriaan on, että pallon pinnalla ei kulje euklidisestä geometriasta tuttuja suorja. Tutkimuksen kohteena pallotrigonometriassa ovat kaaret eli ympyröiden kehien osat pallon pinnalla olevien pisteiden välillä. Epäeuklidisena geometriana pallotrigonometriassa pätevätkin Eukleideen aksiomista viidettä aksiomaa, paralleeliaksiomaa, lukuun ottamatta kaikki muut aksiomat [1, 8]. Tässä harjoitusaineessa ja lopullisessa pro gradu -tutkielmassa oletetaan Eukleideen aksiomaattisen järjestelmän sekä tasogeometrian ja avaruusgeometrian perusteet tunnetuiksi tarvittavin osin (tarvittaessa kts. esim. [1]). Tämän lisäksi lukijalta tullaan vaatimaan kykyä hahmottaa palloa ja sen osia kolmiulotteisessa maailmassa.

Pallotrigonometria ja sen tutkimus johtaa juurensa käytännön tarpeisiin mitata matkaa ja navigoida paikasta toiseen maapallon pinnalla sekä löytää työkaluja maapallon tutkimiseen ja kuvantamiseen karttojen avulla [2]. Myös tähtitieteellä on omat tarpeensa pallotrigonometrian tuntemukselle [3] ja tähtitiede onkin kerta toisensa jälkeen yksi selkeimmin esille tulevista tieteenaloista, jossa pallotrigonometriaan ja sen käyttöön on törmätty vuosisadoista toiseen.

Luvussa 2 käydään läpi pallotrigonometrian tarvetta historiassa sekä esitellään joitain peruskäsitteitä, jotka ovat välttämättömiä pallotrigonometrian ymmärtämiseksi. Luku aloitetaan määrittelemällä pallo ja joitain sen osia, joista tutkielman kannalta tärkeimpiä ovat isoympyrä, isoympyrän kaari ja isoympyröiden välinen kulma. Luku 2 antaa pohjaa luvussa 3 käsiteltäville pallokoordinaateille. Luvussa 3 esiteltävät pallokoordinaatit antavat ehkä koko työn selkeimmän konkreettisen linkin arkipäivään ja nykypäivänäkin käytettäviin maantieteellisiin koordinaatteihin, joita edelleen käytetään monissa yhteyksissä sellaisenaan.

Luvussa 4 esitellään pallokolmio sekä johdetaan pallotrigonometrian sini- ja kosinilauseet, joiden avulla päästään pallotrigonometrian keinoin ratkaisemaan pallokolmion tuntemattomia osia. Luku 4 kokoaa lopuksi yhteen tutkielmassa määritellyt ja käsitellyt asiat.

2 Peruskäsitteet

Tässä luvussa määritellään pallotrigonometriassa tarvittavia peruskäsitteitä, kuten pallo, navat, isoympyrä ja pikkuympyrä, sekä muutamia näihin liittyviä ominaisuuksia. Näiden määrittelyssä tullaan käyttämään muutakin pallotrigonometriaan liittyvää käsitteistöä. Tutkielmassa pyritään tekemään viittauksia käytännön maailmaan mahdollisimman monesta merkittävästä käsitteestä. Tämän tarkoituksena on helpottaa tilanteen avaruudellista hahmotusta.

Pallo on pallotrigonometrian työskentelypinta siinä missä taso on eukleidisen tasogeometrian työskentelypinta. Pallolle avaruuskappaleena pätevät kaikki euklidisen avaruuden aksioomat, mutta pallon pinnalla tarkasteltava pallotrigonometria on oma epäeuklidinen geometriansa, jossa kaikki euklidisen geometrian aksioomat eivät päde. Tarkennetaan tätä myöhemmin.

Määritelmä 2.1. *Pallo*, jonka säde on $r > 0$, muodostuu kaikista niistä eukleidisen avaruuden pisteistä, joiden etäisyys tietyistä avaruuden pisteistä O on r . Kutsutaan pistettä O pallon *keskipisteeksi* ja etäisyyttä r pallon *säteeksi*.

Palloa tullaan vertaamaan maapalloon monesti tämän tutkielman aikana, joten lienee tarpeen tehdä heti tiettyjä huomioita pallon ja maapallon eroista. Tärkeimpänä huomattakoon, että maapallosta puhuttaessa usein käsitetään siihen kuuluvan sekä maankuoren että kaiken sen sisuksen. Pallon määritelmä kuitenkin käsittää palloon kuuluvan vain sen keskipisteestä tasan säteen päässä olevan kuoren tai pinnan eikä lainkaan sisusta sen ja keskipisteen välissä. Esimerkeissä jätetään siis tyypillisesti huomioimatta maapallosta koko sen pinnan alla oleva osa ja käsitetään se symmetrisenä ja yksikäsitteisenä huomioimatta sen todellisia pinnanmuotoja.

Todellisuudessa vaikka maapallon pinnalta silotettaisiin vuoret ja syvänteet, ei lopputulos silti olisi täysin määritelmän mukainen pallo. Tämän tutkielman esimerkkien tarpeisiin maapallo on kuitenkin niin lähellä palloa, että voimme käyttää sitä havainnollistamisen apuna. Todellisuudessa maapallo on hieman litistynyt, ikään kuin sitä olisi samaan aikaan litistetty ylhäältä ja alhaalta ja keskeltä se olisi tämän vuoksi pullahtanut hieman enemmän ulospäin. Maapallon halkaisija on noin 42 km lyhyempi pohjoisnavalta etelänavalle kuin maapallon halkaisija päiväntasaajan kohdalla ja maapallon pinta kaartuu hieman voimakkaammin päiväntasaajan kohdalla kuin pohjois- ja etelämantereella.

Pallotrigonometriassa käsitellään kuitenkin palloa, joka on yksikäsitteisesti määritelty sen keskipisteen ja säteen avulla. Maapallo ajatellaan esimerkeissä tällaisena pallona.

Käsitys maapallon muodosta on vaihdellut, mutta palloksi maa on käsitetty jo antiikin aikaan. Pythagoras, Platon, Aristoteles ja Arkhimedes pitivät maata pallona. Eratosthenes käytti pituus- ja leveyspiirejä sijainnin

määrittämiseen maapallon pinnalla ja mittasi maapallon säteen. Hipparkhos ja Ptolemaios laativat projektioita pallosta tasoon karttojen piirtämistä varten. Kuitenkin kristinuskon ottaessa jalansijaa jäivät filosofien käsitykset maan muodosta varjoon ja karttoja piirrettiin kuin maa olisi pannukakku, nelikulmio, ympyräinen tai soikea. Keskeisimpänä kartoissa oli kristinuskon kannalta tärkeimmät kohteet ja muu tarkkuus oli toissijaista [5], [2].

1200-luvulla yleistyivät kompassin käyttö sekä purjehdustaidon ja suuntien hakemisen tarve. Tarve piirtää tarkkoja karttoja koko maapallosta lisääntyi ja uudet projektiot pallosta tasoon tulivat tärkeiksi. 1300-1600-lukujen kartoissa on piirrettynä kompassiruusu kertomaan kartan suunta, mutta ei projektiosta tai laajemmasta sijainnin määrittämisestä kertovaa asteverkkoa [2].

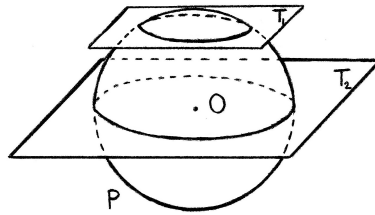
Tarve piirtää mahdollisimman tarkkoja karttoja tasoon ja tähtitieteen harjoittaminen ovat jo antiikin ajoista lähtien olleet kaksi keskeisintä käytännön tarvetta, jotka ovat vieneet pallotrigonometriaa eteenpäin. Toisaalta taas molempien taustalla on ollut yksi ja sama tarve navigoida ja päästä kulkemaan paikasta toiseen eksymättä. Erityisesti avomerellä sijainnin määrittäminen on täytynyt pystyä tekemään ilman kiinteitä kohteita tai pinnanmuotoja ja tällöin apuna on ollut vain taivaankappaleet, kompassi ja pallotrigonometria. Nykyään navigointi ja sijainnin määrittäminen voidaan tehdä GPS:n avulla riippumatta vuorokauden ajasta tai taivaan pilvisyydestä ja ilman, että käyttäjä itse ymmärtää tai osaa soveltaa pallotrigonometriaa navigoimiseen, mutta on hyvä tuoda hieman esille mistä lähtökohdista ja tarpeesta pallotrigonometria on kehittynyt.

Tässä tutkielmassa ei tulla esittämään projektioita kaarevasta pallon pinnasta tasoon karttojen piirtämiseksi, mutta mainittakoon, että mikään projektiot pallosta tasoon ei voi samaan aikaan säilyttää sekä kulmia että pintaaloja [6]. Vaikka siis piirrettäisiin minkälaisella projektiolla tahansa kartta maapallon pinnalta tasoon, ei se milloinkaan pidä kaikilta ominaisuuksiltaan täysin paikkaansa.

Sen sijaan tähtitieteessä pallotrigonometria on varsin tarpeellista hyvinkin sellaisenaan kuin tulen sitä jatkossa käsittelemään. Esimerkkejä ei kuitenkaan tähtitieteen puolelta tulla esittämään, sillä tähtitieteessä pallotrigonometriaa sovelletaan pääsääntöisesti niin kutsuttuun taivaanpalloon, joka taas saattaa olla vaikeammin hahmotettavissa eikä ainakaan tarjoa monelle yhtä arkisia esimerkkejä kuin maapallo.

Määritellään seuraavaksi pallolle maapallon akselin, napojen ja päiväntasaajan kaltaiset osat.

Määritelmä 2.2. Olkoon P r -säteinen pallo, jossa $r > 0$ ja jonka keskipiste on O . Pallon P ja tason T leikkausta kutsutaan *isoympyräksi*, kun taso T kulkee keskipisteen O kautta. Tason T leikatessa pallon P etäisyydeltä x keskipisteestä O , missä $0 < x < r$, tason T ja pallon P leikkausta kutsutaan *pikkuympyräksi*.



Kuva 1: Pallo P ja sen kaksi eri leikkausta tasojen T_1 ja T_2 kanssa.

Kuvassa 1 on esitetty eräs esimerkki pallon ja tasojen leikkauksista. Kuvassa tason T_1 ja pallon P leikkaus muodostaa pikkuympyrän ja tason T_2 ja pallon P leikkaus isoympyrän.

Toisaalta mikä tahansa pallon leikkaava taso määrittää isoympyrän tai pikkuympyrän, mutta myös isoympyrä tai pikkuympyrä määrittää tason. Ympyrät muodostuvat äärettömästä määrästä samassa tasossa olevia pallon pisteitä ja tason määrittämiseen yksikäsitteisesti riittää euklidisen tasogeometrian oppien mukaan jo kolme näistä pisteistä.

Tutuin esimerkki isoympyrästä lienee päiväntasaaja ja pikkuympyrästä Kauriin ja Kravun kääntöpiirit. Epämuodollisesti tuntuisi luontevalta kuvaila päiväntasaajaa maapallon pulleimman kohdan ympäri piirrettynä suorana tai suurimpana mahdollisena ympyränä, jota maapallon pinnalle voidaan piirtää. Pikkuympyröitä kuvaavat kääntöpiirit taas ovat selvästi pienempiä ympyröitä maapallon pinnalla. Eivät pelkkiä pisteitä, mutteivät kuitenkaan yhtä suuria ja pitkiä kuin isoympyrän kaltainen päiväntasaaja. Jos minkä tahansa pallon halkaisisi isoympyrän määräämää tasoa pitkin, jäisi jäljelle kaksi yhtä suurta puolikasta, mutta halkaisemalla pallo pikkuympyrän määräämää tasoa pitkin, olisivat osat eri suuruiset.

Määritelmä 2.3. Olkoon r -säteisen pallon *halkaisija* mikä tahansa sen keskipisteen kautta kulkeva $2r$ -pituisen jana, jonka alku- ja loppupiste ovat pallolla. Lävistäjän ja pallon leikkauspisteitä kutsutaan pallon *vastakkaisiksi pisteiksi*.

Määritelmä 2.4. Isoympyrän määrittämää tasoa kohtisuorassa olevaa pallon halkaisijaa kutsutaan pallon *akseliksi*. Akselin ja pallon leikkauspisteitä kutsutaan *navoiksi* tai *isoympyrän navoiksi*.

Halkaisija voidaan rinnastaa maapallon akseliin ja navat pohjois- ja etelänapoihin. On helppo ajatella maapallon pyörivän akselinsa ympäri, tasaisesti ja harmonisesti akselin kulkiessa täysin keskeltä. Tai jos seisoisimme pohjoisnavalla ja meiltä kysyttäisiin, minne päätyisimme, jos kaivaisimme reiän maapallon läpi, osaisi moni varmaan mielessään ajatella reiän kulkevan pallon keskipisteeseen rinnastettavan maapallon ytimen läpi etelänavalle, jolloin tämä kaivettu reikä vastaisi maapallon halkaisijaa.

Lause 2.5. *Kahden pallon pinnalla olevan pisteen kautta kulkee täsmälleen yksi isoympyrä, kun pisteet eivät ole vastakkaisia.*

Todistus. Jos pallon P pisteet A ja B eivät ole vastakkaisia, niin pisteet A , B ja pallon keskipiste O eivät ole samalla suoralla. On siis olemassa täsmälleen yksi taso, joka sisältää kaikki kolme pistettä. Tämä taso määrää yksikäsitteisesti isoympyrän, jolla pisteet A ja B ovat. \square

Todistus palautuu nopeasti euklidisen tasogeometrian oppeihin, mutta pallolta tilannetta saattaa olla haastavampi nähdä. On jo aikaisemmin todettu, että halkaisemalla pallo isoympyrän määräämää tasoa pitkin jakautuu se tasan kahtia. Toisaalta myös isoympyrän määritelmässä todetaan, että tällöin kuljetaan pallon keskipisteen kautta. Yksinkertaisuudessaan voidaan havainnollistaa tilannetta appelsiinin halkaisulla. Piirretään appelsiinin pinnalle kaksi pistettä ja halkaistaan appelsiini kahteen yhtä suureen osaan leikaten näiden pisteiden kautta. Appelsiinia ei voi leikata kovinkaan monella tavalla, jos halutaan kulkea molempien pisteiden kautta. Lisäksi appelsiini halutaan tasan kahtia, joten samalla on leikattava myös keskipisteen kautta. Tällöin leikkaustapoja piirretyille pisteillä jää vain yksi mahdollinen.

Appelsiinin jakaminen tasan kahteen yhtäsuureen osaan voi tuntua varsin selkeältä, mutta entä sen jakaminen neljään tai kuuteen yhtäsuureen osaan. Tai edes neljään tai kuuteen yhtä pitkään lohkokoon.

Lause 2.6. *Mitkä tahansa kaksi toisistaan eroavaa isoympyrää leikkaavat täsmälleen kaksi kertaa vastakkaisissa pisteissä.*

Todistus. Isoympyröiden Y_1 ja Y_2 määrittämät tasot T_1 ja T_2 kulkevat pallon P keskipisteen kautta ja Eukleideen aksioomista seuraa, että tasot leikkaavat suoralla S . Saadaan $Y_1 \cap Y_2 = (T_1 \cap P) \cap (T_2 \cap P) = (T_1 \cap T_2) \cap P = S \cap P$. Leikkaussuora siis kulkee pallon keskipisteen kautta ja leikkaa pallon tasan kaksi kertaa, joten määritelmän 2.3 mukaan sen ja pallon leikkauspisteet ovat vastakkaiset [6]. \square

Siis jos määritetään kaksi tietyssä pisteessä leikkaavaa isoympyrää, leikkaavat ne välttämättä myös tämän pisteen vastakkaisessa pisteessä. Toisaalta jos määritetään kolmas isoympyrä, joka kulkee kahden ensimmäisen isoympyrän jomman kumman leikkauspisteen kautta, kulkee se välttämättä niiden molempien leikkauspisteiden kautta.

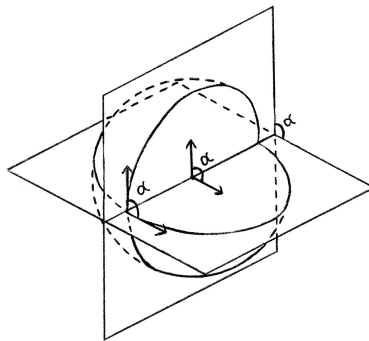
Käytännön esimerkiksi sopii hyvin pituuspiirit. Isoympyrän kaltainen päiväntasaaja on yksi paikanmäärittämisessä käytettävistä leveyspiireistä ja muut leveyspiirit, jotka ovat pikkuympyröitä, kulkevat vastaavasti vaakatasossa maapallon ympäri toisiaan leikkaamatta. Pystysuorassa kulkevat pituuspiirit ovat isoympyröiden kaaria, jolloin lauseesta 2.6 seuraa, että näitä vastaavat isoympyrät leikkaavat toisensa välttämättä kaksi kertaa. Jos pituuspiirit sijoittaisi miten sattuu maapallon pinnalle, tulisi melkoinen sokkelo, jossa jokainen pituuspiiri leikkaisi kaikki muut kaksi kertaa. Asia kuitenkin selkenee

huomattavasti helpommin hahmotettavaksi kun kaikki pituuspiirit kulkevat pohjois- ja etelänavan kautta. Siis kahden vastakkaisen pisteen kautta, joissa ne leikkaavat jokaisen muun samalla tavalla ominaisuuksiltaan isoympyrän kaltaisen pituuspiirin.

Euklidisessa tasogeometriassa suorat muodostavat kulmia leikatessaan. Tarkastellaan nyt miten tason suoria pallotrigonometriassa vastaavat isoympyrät käyttäytyvät eli voidaanko esimerkiksi määrittellä vastaavasti niiden välinen kulma. Kun kaksi käyrää leikkaavat, määritetään niiden välinen kulma käyrien tangenteilla leikkauspisteessä. Tangenttisuorien voidaan nähdä muodostavan leikkauspisteeseen neljä kulmaa; vieruskulmat, joiden yhteen laskettu suuruus on π , sekä näiden vastinkulmat. Tarkastellaan tässä kohtaa pienempiä kulmia ja keskitytään niistä vain toiseen. Vastaavasti tarkoitetaan isoympyröiden välisellä kulmalla tätä pienintä kulmaa niiden välillä.

Käyrien tangenttien sijaan voidaan isoympyröiden välinen kulma määrittää myös toisella tavalla kuten kuvassa 2. Mietitään isoympyröitä määrittäviä tasoja. Voidaan tarkastella mitä tahansa kohtaa näiden tasojen leikkaus-suoralla ja määrittää kyseisten tasojen välinen kulma tässä kohdassa. Tämä kulma vastaa isoympyröiden välistä kulmaa.

Määritelmä 2.7. Olkoon Y_1 ja Y_2 isoympyröitä. Isoympyröiden leikkaukseen muodostuva isoympyröiden välinen *kulma* on sama kuin isoympyröiden määräämien tasojen välinen kulma. Kutsutaan isoympyröiden välistä kulmaa pallolla *pallokulmaksi* ja isoympyröiden määräämien tasojen välistä yhtä suurta kulmaa *diedrikulmaksi*.



Kuva 2: Pallokulman havainnollistus tasojen avulla.

Isoympyröiden välisen kulman määrittämiseen on olemassa käytännön tarve kun halutaan määrittää sijaintia pallopinnalla. Seuraavassa luvussa käsitelläänkin koordinaatteja ja niiden määrittämistä pallolla.

Sijainnin määrittäminen on vain yksi esimerkki siitä, mitä tähän asti määritellyillä käsitteillä voi tehdä. Myöhemmissä luvuissa tullaan huomaamaan, että nyt määritellyt pallotrigonometrian peruskäsitteet ovat pohja muillekin pallotrigonometrian sovellutuksille.

3 Koordinaatit

Edellisessä luvussa käsitellyn isoympyröiden välisen kulman avulla pystytään määrittämään mikä tahansa piste maapallon pinnalla kertomalla kuinka monta astetta ollaan pohjoisessa tai etelässä päiväntasaajaan nähden ja kuinka monta astetta ollaan idässä tai lännessä niin sanotusta nollameridiäänistä nähden. Kahteen eri suuntaan mitattavat asteet määrittävät yksikäsitteisesti minkä tahansa pisteen pallolla.

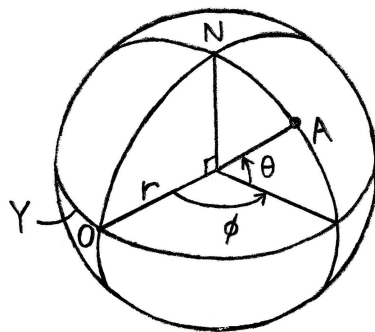
Nyt määriteltävät pallokoordinaatit eroavat hieman maantieteellisistä koordinaateista. Molemmat tavat määrittää koordinaatit antavat pallolla samat tulokset, mutta eivät maapallolla. Jos määritettäisiin todellisen muotoiselle maapallolle koordinaatit nyt esiteltävien pallokoordinaattien määritelmien mukaan, ei saataisi täysin samoja koordinaatteja kuin maantieteellisten koordinaattien määritelmällä. Palataan tähän eroon myöhemmin hieman tarkemmin.

Määritelmä 3.1. Merkitään pallokoordinaatteja (θ, ϕ) tai (r, θ, ϕ) , missä r on pallon säde ja θ ja ϕ ovat keskuskulmia. Pallon P pisteen A sijainti määritetään yksikäsitteisesti kulmien θ ja ϕ avulla. Olkoon Y pallon P isoympyrä ja piste N isoympyrän Y napa. Piste O on isoympyrällä Y . Kiinnitetään pisteet N ja O sekä isoympyrä Y (kts. kuva 3).

Kulma θ on pisteen A kulmaetäisyys isoympyrän Y määräämästä tasosta. Kulma ϕ on isoympyrän Y määräämän tason suuntainen ja pisteen N suunnasta katsottuna vastapäivään mitattu kulmaetäisyys pisteestä O pisteeseen A .

$$0^\circ \leq \phi < 360^\circ \text{ ja } -90^\circ \leq \theta \leq 90^\circ.$$

Jos piste A on jompi kumpi isoympyrän Y navoista eli pisteelle A kulma $|\theta| = 90^\circ$, niin tällöin pistettä vastaava kulma $\phi = 0^\circ$.



Kuva 3: Pallokoordinaatteja vastaavat kulmat.

Kuten jo aikasemmin todettiin, maantieteelliset koordinaatit määritellään eri tavalla kuin pallokoordinaatit. Määritelmät kuitenkin yhtenevät ja

tuottavat täysin toisiaan vastaavat koordinaatit sovellettaessa niitä palloon. Pallokoordinaateilla mitattava kulma on aina pallon keskipisteessä, mutta maantieteellisillä koordinaateilla mitattava kulma ei pituusasteiden osalta useimmiten muodostu maapallon keskipisteeseen. Maapallolla käytettäessä maantieteellisten koordinaattien määritelmän mukaista mittaustapaa mitattava kulma muodostuu kysytyn pisteen kautta kulkevan tangenttitason normaalisuoran ja päiväntasaajan muodostaman tason välisenä kulmana. Normaalisuora ja päiväntasaajan määräämä taso eivät maapallon tapauksessa leikkaa maapallon keskipisteessä, joten myöskään mitattava kulma ei siis muodostu sinne. Pallon tapauksessa jokaisen sen pisteen kautta kulkevan tangenttitason normaalisuora kulkee pallon keskipisteen kautta. Siispä eri lähtökohdista tehdyillä määritelmillä päästään pallolla täysin samaan lopputulokseen.

Maapallolla määritelmän 3.1 kulma ϕ vastaisi pituusasteita ja kulma θ leveysasteita. Määritelmän mukainen isoympyrä Y vastaisi maapallon päiväntasaajaa ja piste O sijaitisi päiväntasaajalla pituusasteiden nollakohdassa eli niin kutsutulla *nollameridiaanilla*. Jos kulmat olisi saatu maantieteellisten koordinaattien määritelmän avulla, kutsuttaisiin näitä kahta kulmamittaa (ϕ, θ) sellaisenaan *maantieteellisiksi leveys- ja pituuskoordinaateiksi*. Jos koordinaatteihin otettaisiin mukaan korkeus h , merkittäisiin (ϕ, θ, h) ja koordinaatteja kutsuttaisiin *geodeettisiksi leveys- ja pituuskoordinaateiksi*. Pituus- ja leveysasteissa käytetään vain positiivisia arvoja ja merkitään kulman suuruutta radiaanien sijaan asteina. Leveysasteiden nollakohta on päiväntasaaja ja leveysasteet suurenevät napoja kohti aina 90° :seen asti. Leveysasteet saavat arvoja samalta väliltä kuin pallokoordinaattien θ . Päiväntasaajasta pohjoiseen puhutaan asteista pohjoisena leveytenä ja päiväntasaajasta etelään puhutaan eteläisestä leveydestä. Näin ei sekoiteta kummalla puolella maapalloa ollaan, vaikka puhutaan saman suuruisista asteista. Vastaavasti pituusasteista on tapana puhua läntisenä pituutena tai itäisenä pituutena. Tämä tarkoittaa sitä, että pituusasteet ovat aina välillä $0 - 180^\circ$, toisin kuin pallokoordinaattien vastaava kulma ϕ , joka mitataan positiivisena arvona vain yhteen suuntaan ja siten saa arvoja lähes 360° :seen asti. Maantieteellisissä koordinaateissa kulmien suunta eli tieto siitä onko kulma mitattu positiiviseen vai negatiiviseen suuntaan sisältyykin koordinaatin yhteydessä ilmaistavaan kirjaimen. Esimerkiksi pohjoista leveyttä ilmaisevan koordinaatin yhteydessä kansainvälisesti käytettävä kirjain N (north) kertoo, että kulma on mitattu positiiviseen suuntaan, kun taas eteläistä leveyttä ilmaisevan koordinaatin yhteydessä kansainvälisesti käytettävä kirjain S (south) kertoo, että kulma on mitattu negatiiviseen suuntaan. Varsinaista negatiivista etumerkkiä ei siis tarvita lisäksi.

Pituusasteiden nollakohdaksi eli nollameridiaaniksi on sovittu Lontoon Greenwichin observatorion kautta kulkeva pituuspiiri. Nollameridiaanin valinta ei ole aina ollut selviö, vaan sen paikka on vaihdellut vuosisadoista ja -tuhansista toiseen. Ensimmäisen kerran nollameridiaanin paikan valitsi vuo-

den 100 jKr. paikkeilla tähtitieteilijä Ptolemaios. Tuolloin nollameridiaaniksi valikoitui Kanarian läntisin saari, Ferro. Sitä pidettiin maailman läntisimpänä paikkana, jolloin oli selkeää ilmoittaa sijainnit Ferrosta itään. 1500-luvulla Ferro vahvisti asemansa myös Ranskassa ja kartat piirrettiin se lähtökohtana, mutta myöhemmin 1600-luvun puolella siirryttiin käyttämään Ferrosta 20 astetta idempänä sijaistevaa Pariisin observatoriota nollameridiaanin kulkeuttina.

Nollameridiaanin määrittämisessä ovat pääsääntöisesti olleet taustalla tähtitieteilijät ja nollameridiaani onkin useimmiten kulkenut jonkin merkittävän observatorion kautta. Pitkään sen paikasta ei ollut yksimielisyyttä ja eri valtiot saattoivat käyttää kartoissaan eri nollameridiaania.

1600-luvulla Englantiin Lontoon lähelle perustettu Greenwichin observatorio vakiinnutti asemaansa nollameridiaanina julkaisemalla 1700-luvulta lähtien merikarttoja ja almanakkoja, joissa paikan ja ajanmääritykseen oli käytetty Greenwichin observatoriota nollameridiaanina. Vuonna 1884 pidetyssä Washingtonin kokouksessa Greenwichin observatorio vei voiton valittaessa kansainvälisesti yhtenäistä nollameridiaania, sillä tuolloin jo 70 prosenttia maailman merikartoista oli piirretty sen mukaan. [5]

Nollameridiaanin merkitys ei ole ollut pelkästään paikanmäärityksessä ja yhtenäisten karttojen piirtämisessä vaan sen avulla on ollut mahdollista yhtenäistää kansainvälistä ajanmääritystä. Greenwichin nollameridiaanista 15 astetta itään kulkee seuraava *perusviiva*, pituuspiiri, joka määrittää seuraavan aikavyöhykkeen. Perusviivoiksi kutsuttavia pituuspiirejä kulkee aina 15 asteen välein läpi koko maapallon pinnan. Näiden avulla määrittyvät aikavyöhykkeet jokaiselle 24 tunnille vuorokaudessa. Ajatus on selkeä. Aurinko nousee eri aikaan eri puolilla maapalloa. Nollameridiaanin kohdalla on Greenwichin aika, GMT 0 (Greenwich Mean Time), ja tästä 15 astetta itään aika on tunnin edellä Greenwichin aikaa eli GMT+1 ja vastaavasti 15 astetta Greenwichistä länteen aika on GMT-1. Valtioiden rajat eivät kuitenkaan noudata pituuspiirejä tai aikavyöhykkeitä, mutta ajan määrityksen perustuessa yhdessä sovittuun *normaaliaikaan* ja aikaerojen ollessa tasatunteja tai joissain tapauksissa myös puolikkaita, helpottuu valtioiden välinen yhteydenpito huomattavasti.

Vuonna 1972 käyttöön tullut atomikelloihin perustuva UTC eli koordinoitu yleisaika (Coordinated Universal Time) syrjäytti GMT:n, mutta nollameridiaani ja aikavyöhykkeet ovat pysyneet ennallaan.

Sijainti voidaan ilmoittaa tarkemminkin kuin yhden asteen eli $\frac{1}{360}$ tarkkuudella.

Määritelmä 3.2. 1 aste on 60 *minuuttia* ja vastaavasti 1 minuutti on 60 *sekuntia*. Merkitään $1^\circ = 60'$ ja $1' = 60''$.

Esimerkki 3.3. Tampereen yliopiston koordinaatit ovat N $61^\circ 29' 38''$ E $23^\circ 46' 43''$ eli se sijaitsee noin 61,5 astetta päiväntasaajasta pohjoiseen ja 23,8 astetta nollameridiaanista itään.

Selvitetään minne päätyisimme jos kaivautuisimme tästä pisteestä suoraan maapallon toiselle puolelle eli vastakkaiseen pisteeseen.

Leveysasteet saamme suoraan ilmoittamalla pohjoista leveyttä olevat asteet eteläisenä leveytenä, sillä tiedämme lävistäjän leikkaavan päiväntasaajan tason leveysasteita vastaavassa kulmassa pallon pohjoispuolella ja vastaavasti muodostavan yhtä suuren kulman päiväntasaajan tason kanssa jatkaessaan pallon eteläiselle puolelle. Merkitään $S 61^{\circ}29'38''$.

Pituusasteet joudumme laskemaan. Tiedämme, että kokonainen ympyrä maapallon ympäri olisi 360° eli vastakkaisten pisteiden välinen ero on 180° . Lasketaan koordinaattien välinen etäisyys $|23^{\circ}46'43'' - 180^{\circ}| = 156^{\circ}13'17''$. Tulos on siis $W 156^{\circ}13'17''$. Kulkemalla Tampereen yliopistolta länteen, tulemme ensin nollameridiaanille jonka jälkeen asteet lähtevät taas kasvamaan välillä $0 - 180^{\circ}$.

Päätyisimme siis Tampereen yliopistolta koordinaatteihin $S 61^{\circ}29'38''$ $W 156^{\circ}13'17''$ jotka ovat keskellä Eteläistä jäämerta, yli 2000 km päässä Etelämantereesta ja Uudesta-Seelannista sekä yli 4000 km päässä Etelä-Amerikasta.

Esimerkki 3.4. Tutkitaan minne päädyimme jos liikumme yhden asteen verran maapallon pintaa pitkin.

Pallotrigonometrian määritelmien mukaan yksi leveysaste pallopintaa pitkin on aina vakio, mutta kuten aiemmin olemme todenneet, ei maapallo ole täysin pallo ja siitä johtuen yhtä leveysastetta vastaava matka maan pintaa pitkin ei ole täysin vakio. Suomessa yksi leveysaste vastaa kuitenkin noin 111,5 km matkaa ja vastaavasti yksi minuutti noin 1858 metriä ja yksi sekunti noin 31 metriä.

Tämä tarkoittaa, että liikkumalla Tampereen yliopistolta suoraan etelään yhden leveysasteen verran, päätyisimme Someron ja Lohjan rajalle. Vastaavasti jos ajaisimme moottoritietä pitkin Helsinkiin päin, pääsisimme 111,5 kilometrillä Tampereen yliopistolta vain Riihimäen paikkeille.

Pituusasteita vastaava etäisyys maapallon pinnalla vaihtelee enemmän. Päiväntasaajaa pitkin liikuttaessa yksi aste on noin 111,3 km, mutta mitä lähemmäs napoja tullaan, sitä lyhyempi on yhtä astetta vastaava matka, sillä pituuspiirit lähenevät toisiaan. Tampereen yliopiston korkeudella yksi aste vastaa enää noin 53 kilometriä maan pintaa pitkin. Liikkumalla yhden asteen itään Tampereen yliopistolta, olisi edelleen Kangasalan puolella.

Pallon pisteen määrittämiseen voidaan käyttää myös seuraavaa tapaa:

Määritelmä 3.5. Merkitään *avaruuskoordinaatteja* (x, y, z) , missä x , y ja z ovat suorakulmaisen *avaruuskoordinaatiston* koordinaatteja. Mikä tahansa pallon P piste voidaan määrittää yksikäsitteisesti koordinaattien x , y ja z avulla.

Olkoon P origokeskeinen r säteinen pallo ja xyz -koordinaatisto origokeskeinen. Olkoon piste N pallon P kiinnitetty piste ja isoympyrä Y se isoympyrä, jonka napa piste N on. Kiinnitetään piste O isoympyrältä Y .

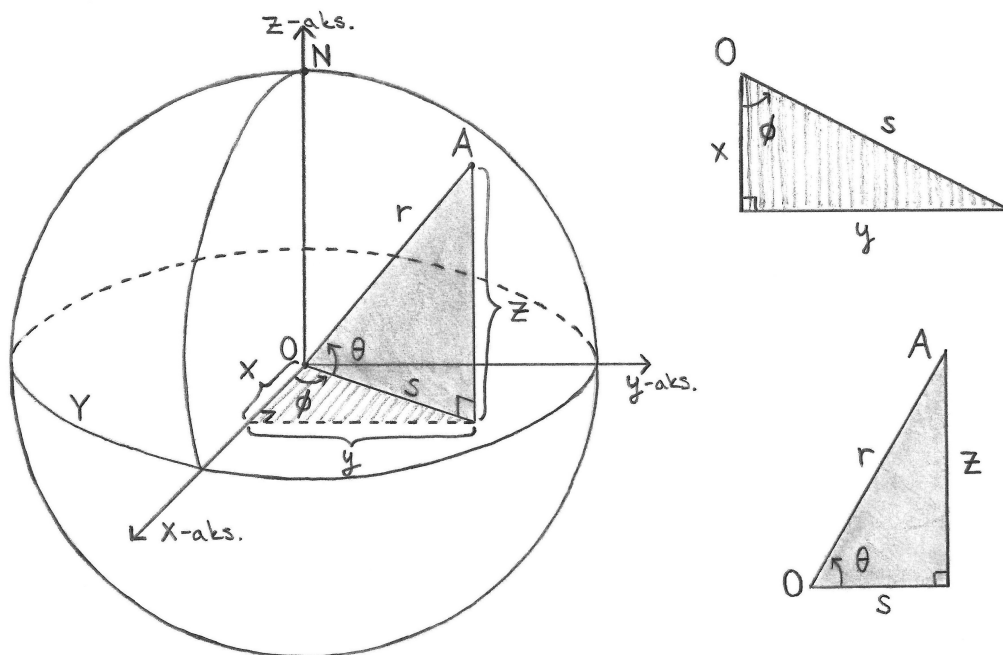
Olkoon koordinaatisto *suunnattu* siten, että positiivinen x -akseli kulkee pisteen O kautta ja positiivinen y -akseli leikkaa isoympyrän Y 90° etäisyydellä isoympyrän Y ja positiivisen x -akselin leikkauspisteestä vastapäivään mitattuna pisteestä N katsottuna. Positiivinen z -akseli kulkee pisteen N kautta.

Voidaan ajatella isoympyrä Y päiväntasaajana, pallon ympäri vaakasuoraan kulkevana pisimpänä leveyspiirinä ja napa N pohjoisnapana. Näin xy -taso mieltyy vaakatasossa kulkevaksi ja z -akseli maapallon akseliin yhdistyväksi.

Äsken esitettyjen xyz -koordinaattien avulla voidaan ilmaista mikä tahansa piste pallolla tai maapallon pinnalla, mutta tapa ei ole helpoin ymmärtää tai havainnollisin jos yritetään esimerkiksi verrata kahden eri pisteen sijaintia pallolla. xyz -koordinaatein ilmaistuista pisteen koordinaateista on vaikea suoraan nähdä, onko piste edes pallolla vai sijaitseeko se pallon sisällä tai sen ulkopuolella. Pallokoordinaatit taas ilmaisevat aina pisteen sijainnin pallolla, ellei kolmannella muuttujalla, säteellä, erikseen määritetä toisin.

Havainnollisempi tapa on siis määrittää sijainti pallolla pallokoordinaattien eli kahden kulman avulla, kuten tässä tutkielmassa on aikaisemmin tehty.

Pallokoordinaattien ja avaruuskoordinaattien välillä voidaan käyttää seuraavia muuntokaavoja.



Kuva 4: Pallo P , suorakulmainen xyz -koordinaatisto ja apukolmiot nostettuna esiin.

Muunnokset xyz -koordinaatistoon ovat:

$$(3.1) \quad x = r \cos \phi \cos \theta$$

$$(3.2) \quad y = r \sin \phi \cos \theta$$

$$(3.3) \quad z = r \sin \theta.$$

Tutkitaan kuvan 4 avulla miten kaavat on saatu. Tarkastellaan alemmaa apukolmiota ja sen sivua s . Ilmaistaan sivu s sivun r , eli pallon P säteen, ja kulman θ avulla.

Saadaan

$$\frac{s}{r} = \cos \theta$$
$$s = r \cos \theta.$$

Johdetaan nyt ylemmän apukolmion avulla muuntokaava 3.1 koordinaatille x . Käytetään apuna sivulle s saatua kaavaa.

$$\frac{x}{s} = \cos \phi$$
$$\frac{x}{r \cos \theta} = \cos \phi$$
$$x = r \cos \phi \cos \theta$$

Muuntokaava 3.2 koordinaatille y saadaan vastaavasti.

$$\frac{y}{s} = \sin \phi$$
$$\frac{y}{r \cos \theta} = \sin \phi$$
$$y = r \sin \phi \cos \theta$$

Muuntokaava 3.3 koordinaatille z saadaan johdettua ilman sivua s .

$$\frac{z}{r} = \sin \theta$$
$$z = r \sin \theta$$

Vastaavasti muunnokset xyz -koordinaatistosta pallokoordinaatistoon ovat:

$$(3.4) \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$(3.5) \quad \phi = \arctan \frac{y}{x}$$

$$(3.6) \quad \theta = \arctan \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Ensimmäinen muuntokaavoista eli 3.4 pallon säteelle r vastaa suorakulmaisen särmiön avaruuslävistäjän kaavaa, missä särmiön sivujen pituuksia vastaa toisiaan kohtisuorassa olevat x , y ja z -koordinaatit.

Kulman ϕ muuntokaava 3.5 saadaan lähes suoraan kuvan 4 ylemmästä apukolmiosta.

$$\tan \phi = \frac{y}{x}$$

$$\phi = \arctan \frac{y}{x}$$

Viimeinen muuntokaavoista eli muuntokaava 3.6 kulmalle θ saadaan myös apukolmioista, mutta sen johtamiseksi pitää ensin ilmaista sivu s sivujen x ja y avulla. Käytetään tähän apuna ylempää apukolmiota.

$$s^2 = x^2 + y^2$$

$$s = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Sivulle s saadun kaavan, sivun z ja alemman apukolmion avulla saadaan johdettua viimeinenkin muuntokaava 3.6.

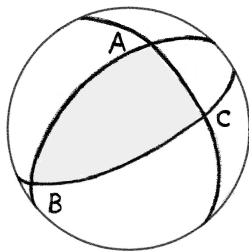
$$\tan \theta = \frac{z}{s}$$

$$\tan \theta = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\theta = \arctan \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

4 Pallokolmio

Määritellään tässä luvussa pallokolmio (kts. kuva 5) ja tarkastellaan muutamia sen ominaisuuksia.



Kuva 5: Pallokolmio ABC

Määritelmä 4.1. Olkoot A , B ja C r -säteisen pallon P pisteitä siten, että yksikään isoympyrä ei sisällä niitä kaikkia ja $r > 0$. Tällöin *pallokolmio* ABC muodostuu isoympyrän kaarien yhdisteestä $\widehat{AB} \cup \widehat{BC} \cup \widehat{CA}$, missä $\widehat{AB} < 180^\circ$, $\widehat{BC} < 180^\circ$ ja $\widehat{CA} < 180^\circ$. Kaaria kutsutaan kolmion *sivuiksi* ja kaarien leikkauspisteitä kolmion *kärjiksi*. Pallokolmio on pallotrigonometrian perusobjekti.

Isoympyröiden leikatessa syntyy kaksi pallokolmiota, sisempi ja ulompi. Tässä työssä käsittelemme vain sisempää eli aitoa pallokolmiota, jota yleensä oletetaan tarkoittettavan kun puhutaan pallokolmiosta. Tarkennetaan seuraavassa määritelmässä tätä aitoa pallokolmoita.

Määritelmä 4.2. Pallokolmiota kutsutaan *aidoksi pallokolmioksi* kun sen jokaisen kulman suuruus on aina pienempi kuin 180° .

Aidon pallokolmion kulmien summa on aina $]180^\circ, 540^\circ[$. Perustellaan kulmien summan alarajaa myöhemmin. Olemme tottuneet, että tasogeometriassa kolmion kulmien summa on aina vakio 180° ja tästä syystä kolmio voi sisältää vain yhden suoran tai tylpän kulman. Pallokolmiossa voi kuitenkin olla useampi suora tai tylppä kulma. Jopa kaikki pallokolmion kolme kulmaa voivat olla tylppiä. Kunhan yksikään kulmista ei ole kupera, on edelleen kyseessä aito pallokolmio.

Kupera pallon pinta aiheuttaa sen, että aidon pallokolmion kulmat ovat aina vähintään yhtä suuret kuin pallokolmion kärkipisteiden kautta piirretyllä tasokolmiolla. Tarkalleen ottaen, mitä pienempi pallokolmio on pallon pinnalla, sitä lähempänä se on tasokolmiota ja sitä lähempänä sen kulmien summa on 180° . Kuitenkaan edes äärettömän pieni pallokolmio ei ikinä ole täysin tasossa, eivätkä sen kulmat siis ikinä saavuta 180° summaa, vaikka hyvin lähelle tätä päästäisiinkin.

Lause 4.3. *Jos ABC on pallokolmio, niin vastakkaisella pallokolmiolla $(-A)(-B)(-C)$ on täsmälleen yhtä suuret kulmat ja sivujen pituudet kuin pallokolmiolla ABC . Pallokolmioiden pinta-ala on sama.*

Todistus. Lauseen 2.6 mukaan isoympyrät leikkaavat täsmälleen kaksi kertaa vastakkaisissa pisteissä, josta seuraa, että kolmion vastakkaiselle puolelle syntyy täysin yhtenevä pallokolmio $(-A)(-B)(-C)$. \square

Olemme tottuneet, että kolmion kulmien summa on aina vakio. Pallotrigonometriassa näin ei siis ole. Kulmien summa on aina suurempi kuin totuttu 180° , mutta kuinka paljon kulmien summa on suurempi riippuu kolmiosta.

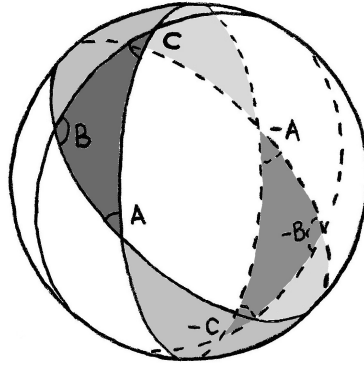
Määritelmä 4.4. Pallokolmion ABC kulmien summan 180° :en yli menevää osaa kutsutaan *palloeksessiksi E* eli *palloylijäämäksi*. Siis $\angle A + \angle B + \angle C - 180^\circ = E$.

Lause 4.5. *Palloeksessin E ja pallon säteen r avulla voidaan määrittää pallokolmion ABC pinta-ala A_{ABC} kaavalla*

$$A_{ABC} = Er^2,$$

missä siis pallokolmiolle ABC $E = \angle A + \angle B + \angle C - \pi$.

Todistus. Jatketaan kolmion ABC sivuja siten, että ne muodostavat täydellisen isoympyrän (kts. kuva 6). Näin muodostuvat viipaleet pitävät kukin sisälleen sekä alkuperäisen pallokolmion ABC että sen vastakkaisen pallokolmion $(-A)(-B)(-C)$. Kuvassa 6 on korostettu $\angle A$ sivujen jatkeiden rajaama viipale. Viipaleet yhdessä peittävät koko pallon pinnan, mutta menevät myös päällekkäin pallokolmion ABC ja sen vastakkaisen pallokolmion $(-A)(-B)(-C)$ kohdalta.



Kuva 6: Pallokolmio ABC ja sen vastakkainen pallokolmio sekä $\angle A$ sivujen jatkeiden rajaama viipale.

Yhden viipaleen pinta-ala on

$$V_A = \frac{2\angle A}{2\pi} 4\pi r^2 = \frac{\angle A}{\pi} 4\pi r^2.$$

Viipaleiden yhteispinta-ala vastaa siis koko pallon pinta-alaa, mutta tämän lisäksi vielä neljän pallokolmion pinta-alaa.

Muodostetaan yhtälö viipaleiden yhteispinta-alalle ja pallon pinta-alalle, johon on lisätty nuo "ylimääräiset" pallokolmion pinta-alat.

Saadaan

$$(V_A + V_B + V_C) = 4\pi r^2 + 4A_{ABC}.$$

Sijoitetaan viipaleiden pinta-aloja vastaavat kaavat ja ratkaistaan yhtälö sieventämällä ja järjestämällä termejä.

$$\begin{aligned} \frac{\angle A + \angle B + \angle C}{\pi} 4\pi r^2 &= 4\pi r^2 + 4A_{ABC} \\ (\angle A + \angle B + \angle C)r^2 &= \pi r^2 + A_{ABC} \\ (\angle A + \angle B + \angle C)r^2 - \pi r^2 &= A_{ABC} \\ (\angle A + \angle B + \angle C - \pi)r^2 &= A_{ABC} \\ Er^2 &= A_{ABC}. \end{aligned}$$

□

Isoympyrän kaarta vastaavan pallokolmion sivun pituus ilmaistaan kaarta vastaavan keskuskulman suuruutena ja sitä merkitään pallokolmion vastakkaisen kulman nimen mukaan pienellä kirjaimella.

Pallokolmion kulmat on tapana nimetä kreikkalaisilla kirjaimilla tai kärkipisteen tai kulman vastaisen sivun mukaan isolla kirjaimella.

Pallokolmiosta siis ilmaistaan sekä kaarien pituudet, että kulmien suuruudet kulmamittoina. Huomioitavaa on, että kaaren pituus keskuskulman avulla ilmaistuna on sama, vaikka pallon säde vaihtelisi ja tämän seurauksena myös pallon pintaa pitkin mitattu samaa keskuskulmaa vastaava kaaren pituus olisi eri säteisillä palloilla eri.

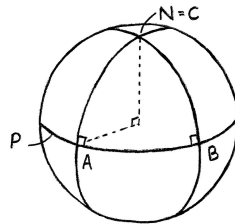
Lause 4.6. *Pallokolmion sivujen summa on pienempi kuin 360° .*

Todistus. Tarkastelemalla pallokolmion keskuskulmia voidaan todeta, että pallokolmion sivujen keskuskulmien summa on alle 360° . \square

Perehdytään esimerkin avulla vielä pallokolmioon, jossa on kaksi suoraa kulmaa.

Esimerkki 4.7. Olkoon ABC pallokolmio, jonka $\angle A$ ja $\angle B$ ovat isoympyrällä P , jota kutsumme päiväntasaajaksi. Pisteiden A ja B etäisyydellä toisistaan ei ole merkitystä, kunhan niiden etäisyys on alle 180° . Tämän isoympyrän P napaa N kutsumme pohjoisnavaksi. Isoympyrä P ja sen napa N vastaavat siis asemoinniltaan maapallon päiväntasaajaa ja pohjoisnapaa (kts. kuva 7). \widehat{AC} on kohtisuorassa päiväntasaajaa kohden ja kulkee pisteestä A pisteeseen N . Siis piste $C = N$. Vastaavasti \widehat{BC} on kohtisuorassa päiväntasaajaa kohden ja kulkee pisteestä B pisteeseen N . \widehat{AB} , \widehat{AC} ja \widehat{BC} muodostavat siis pallokolmion ABC , jonka $\angle A$ ja $\angle B$ ovat suorat.

Tässä asetelmassa \widehat{AC} ja \widehat{BC} vastaavat siis pituuspiirien kaltaisia kaaria päiväntasaajalta pohjoisnavalle. Voidaan siis hahmottaa, että päiväntasaaja ja pituuspiirit muodostavat pallokolmioita, joilla on vähintään kaksi suoraa kulmaa.



Kuva 7: Esimerkki pallokolmiosta, jossa on kaksi suoraa kulmaa

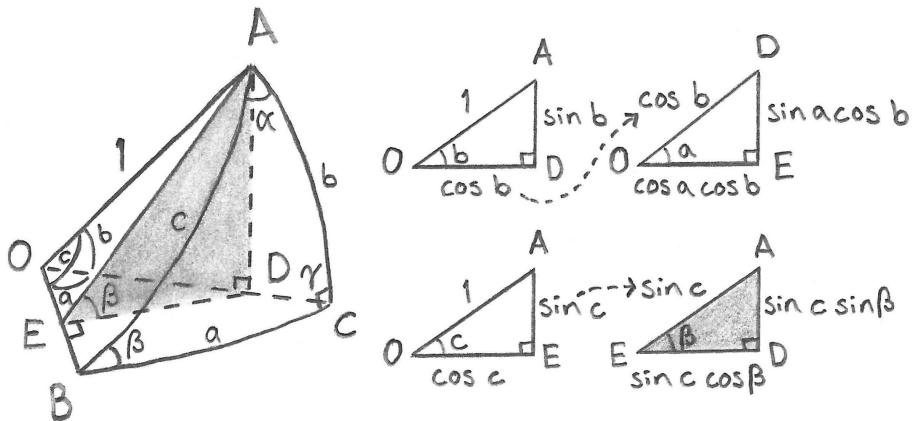
Jos pisteiden A ja B etäisyys päiväntasaajaa pitkin on tarkalleen 90° , myös $\angle C$ on suora ja siten pallokolmio ABC :n kaikki kolme kulmaa ovat suorat.

4.1 Sini- ja kosinilause

Pallokolmion tuntemattomat osat voidaan ratkaista tunnettujen avulla sini- ja kosinilauseiden avulla. Koska käytämme pallokolmion sivujen ja kulmien mittoina asteita, jotka eivät muutu pallon säteen mukaan, pätevät seuraavat tarkastelun tulokset kaikille pallokolmioille. Selkeyden vuoksi pallokolmion määritelmä 4.1 kuitenkin rajaa, että pallokolmiota vastaavalla pallolla oltava $r > 0$. Oletetaan näin myös seuraavassa tarkastelussa.

Tarkastellaan kuitenkin ensin suorakulmaista pallokolmiota yksikköpallolla, eli pallokolmiota, jolla on yksi suora kulma.

Tarkastellaan seuraavaa kuvaa (kuva 8).



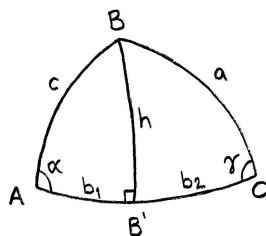
Kuva 8: Pallokolmio ABC ja sen osakolmiot.

Kuvassa on yksikköpallolle piirretty pallokolmio ABC , sen määräämä tetraedrikulma sekä sen esiin nostettu osakolmioita. Näistä saadaan suoraan kaavat:

$$EO = \cos c = \cos a \cos b,$$

$$DE = \sin c \cos \beta = \sin a \cos b,$$

$$AD = \sin c \sin \beta = \sin b.$$



Kuva 9: Yleinen pallokolmio ABC.

Näiden suorakulmisen kolmion kaavojen avulla saadaan johdettua ratkaisukaavat yleiselle pallokolmiolle (kts. kuva 9). Tarkastellaan edelleen yksikköpallolle piirrettyä pallokolmiota ABC , joka jaetaan kahteen suorakulmaiseen pallokolmioon ABB' ja CBB' .

Pallokolmion sivu b on siis jaettu kahteen osaan siten, että $b = b_1 + b_2$ ja kummankin suorakulmisen pallokolmion yksi sivu on yleisen pallokolmion ABC korkeusjana h . Soveltamalla näille suorakulmaisille pallokolmioille ABB' ja CBB' äsken johdettuja kaavoja, saadaan:

$$\begin{aligned}\cos a &= \cos h \cos b_2, \\ \sin a \cos \gamma &= \cos h \sin b_2, \\ \sin a \sin \gamma &= \sin h,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos c &= \cos h \cos b_1, \\ \sin c \cos \alpha &= \cos h \sin b_1, \\ \sin c \sin \alpha &= \sin h.\end{aligned}$$

Laajennetaan suorakulmaisten osakolmioiden kaavat yleiselle pallokolmiolle.

Sijoittamalla osakolmioiden kaavoihin

$$\begin{aligned}\sin b_1 &= \sin(b - b_2) = \sin b \cos b_2 - \cos b \sin b_2, \\ \cos b_1 &= \cos(b - b_2) = \cos b \cos b_2 + \sin b \sin b_2\end{aligned}$$

saadaan pallokolmiolle *kosinilause*

$$\begin{aligned}\cos c &= \cos h(\cos b \cos b_2 + \sin b \sin b_2) \\ &= \cos b(\cos h \cos b_2) + \sin b(\cos h \sin b_2) \\ &= \cos b \cos a + \sin b \sin a \cos \gamma.\end{aligned}$$

Sivujen ja kulmien kiertovaihtelulla saadaan loput kosinilauseet.

Lause 4.8. *Pallotrigonometrian (ensimmäinen) kosinilause ja sen eri versiot ovat*

$$\begin{aligned}\cos c &= \cos b \cos a + \sin b \sin a \cos \gamma, \\ \cos a &= \cos c \cos b + \sin c \sin b \cos \alpha, \\ \cos b &= \cos a \cos c + \sin a \sin c \cos \beta.\end{aligned}$$

Yleisen pallokolmion ABC suorakulmaisille osakolmioille johdettujen kaavojen kahdesta ”sin h ” -kaavasta saadaan pallokolmion *sinilause*

$$\begin{aligned}\sin c \sin \alpha &= \sin a \sin \gamma \\ \frac{\sin a}{\sin \alpha} &= \frac{\sin c}{\sin \gamma}\end{aligned}$$

Yleinen kaikille sivuille ja kulmille pätevä kaava seuraa osakolmioiden valinnasta.

Lause 4.9. *Pallotrigonometrian sinilause on*

$$\frac{\sin a}{\sin \angle A} = \frac{\sin b}{\sin \angle B} = \frac{\sin c}{\sin \angle C}$$

Pallotrigonometrian sinilause on hyvin lähellä tasogeometrian sinilauseetta

$$\frac{a}{\sin \angle A} = \frac{b}{\sin \angle B} = \frac{c}{\sin \angle C}$$

ja pienellä kolmiolla, lähes tasossa olevalla, yhtäläisyys onkin selvä. Pallotrigonometrian kosinilauseeseen ja tasogeometrian kosinilauseeseen

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

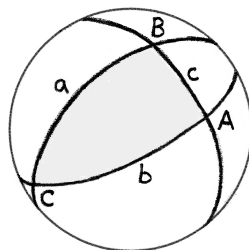
yhtäläisyys ei enää ole yhtä selvä.

Tutkitaan hieman miten pallotrigonometrian sini- ja kosinilause toimivat käytännössä.

Pallokolmion tuntemattomien osien ratkaisemiseen sini- ja kosinilauseella on joitain rajoitteita ja joskus saatetaan tarvita muitakin lauseita, jotta kaikki sivut saadaan selville. Pääsääntönä kuitenkin on, että kun tunnetaan pallokolmion kuudesta osasta jotkin kolme, saadaan loput selvitettyä. Aina vastaus ei myöskään ole yksikäsitteinen, kuten se ei ole tasogeometriassaakaan.

Otetaan nyt kuitenkin esimerkki, joka voidaan ratkaista kosinilauseen avulla ja jonka vastaus on yksikäsitteinen.

Esimerkki 4.10. Olkoon ABC pallokolmio (kuva 10), jonka sivu $a = 106$, 42° , sivu $c = 42$, 28° ja $\angle B = 114$, 89° .



Kuva 10: Pallokolmio ABC

Ratkaistaan pallokolmion loput osat. Aloitetaan ratkaisemalla sivu b kosinilauseen avulla.

$$\begin{aligned} \cos b &= \cos a \cos c + \sin a \sin c \cos \angle B \\ \Rightarrow b &= \arccos(\cos a \cos c + \sin a \sin c \cos \angle B) \end{aligned}$$

Sijoitetaan tunnetut osat

$$\begin{aligned} b &= \arccos(\cos 106,42^\circ \cos 42,28^\circ + \sin 106,42^\circ \sin 42,28^\circ \cos 114,89^\circ) \\ &\approx 118,73^\circ \end{aligned}$$

Käytetään saatua sivun pituutta kulmien ratkaisemiseen.

$$\begin{aligned} \cos a &= \cos c \cos b + \sin c \sin b \cos \angle A \\ \Rightarrow \cos \angle A &= \frac{\cos a - \cos c \cos b}{\sin c \sin b} \\ \Rightarrow \angle A &= \arccos\left(\frac{\cos a - \cos c \cos b}{\sin c \sin b}\right) \end{aligned}$$

Sijoitetaan

$$\begin{aligned} \angle A &= \arccos\left(\frac{\cos 106,42^\circ - \cos 42,28^\circ \cos 118,73^\circ}{\sin 42,28^\circ \sin 118,73^\circ}\right) \\ &\approx 82,90^\circ \end{aligned}$$

Ja vastaavasti

$$\begin{aligned} \cos c &= \cos b \cos a + \sin b \sin a \cos \angle C \\ \Rightarrow \cos \angle C &= \frac{\cos c - \cos b \cos a}{\sin b \sin a} \\ \Rightarrow \angle C &= \arccos\left(\frac{\cos c - \cos b \cos a}{\sin b \sin a}\right) \end{aligned}$$

Sijoitetaan

$$\begin{aligned} \angle C &= \arccos\left(\frac{\cos 42,28^\circ - \cos 118,73^\circ \cos 106,42^\circ}{\sin 118,73^\circ \sin 106,42^\circ}\right) \\ &\approx 44,10^\circ \end{aligned}$$

Siis sivu $b = 118,73^\circ$, $\angle A = 82,90^\circ$ ja $\angle C = 44,10^\circ$.

Tarkastetaan vielä saadut tulokset oikeiksi sinilauseen avulla.

$$\frac{\sin a}{\sin \angle A} = \frac{\sin b}{\sin \angle B} = \frac{\sin c}{\sin \angle C}$$

$$\frac{\sin 106,42^\circ}{\sin 82,90^\circ} \approx 0,967, \frac{\sin 118,73^\circ}{\sin 114,89^\circ} \approx 0,967, \frac{\sin 42,28^\circ}{\sin 44,10^\circ} \approx 0,967.$$

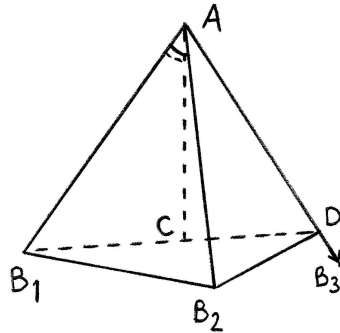
4.2 Etäisyyksien mittaaminen

Äsken määritellyt sini- ja kosinilause tulevat hyödyllisiksi kun halutaan esimerkiksi ratkaista kahden paikan etäisyyttä maapallon eri puolilla eikä enää voidakaan käsitellä matkaa tasogeometrian opeilla. Kun tahdotaan tutkia kahden pisteen etäisyyttä pallolla, tulee ensin ymmärtää mitä kautta lyhin reitti näiden kahden pisteen välillä kulkee.

Mutta ennen sitä esitellään tasogeometriastakin tuttu lause, joka pätee myös pallokolmiolle.

Lause 4.11 (Kolmioepäyhtälö). *Pallokolmion kahden sivun summa on aina suurempi kuin kolmas sivu.*

Todistus. Todistus seuraa kaaria vastaavien keskuskulmien vertailusta. Pallokolmiota vastaavan tetraedrikulman kahden keskuskulman summa on aina suurempi kuin saman tetraedrikulman kolmas keskuskulma.



Kuva 11: Tetraedrikulma $AB_1B_2B_3$

Yksi tetraedrikulman $AB_1B_2B_3$ (kuvassa 11) keskuskulmista on välttämättä suurin tai vähintään yhtä suuri kuin muut. Nimetään kulmat siten, että tämä "suurin" keskuskulma (jatkossa pelkkä \angle) on $\angle B_3AB_1$.

Lauseen todistamiseksi tulee siis todistaa, että $\angle B_1AB_2 + \angle B_2AB_3 > \angle B_3AB_1$. Koska $\angle B_3AB_1 \geq \angle B_1AB_2$ on olemassa piste C pisteiden A, B_1 ja B_3 määräämässä tasossa ja $\angle B_3AB_1$:ssa siten, että $\angle B_1AC = \angle B_1AB_2$ ja $AC = AB_2$. Nyt siis kolmiot $B_1AB_2 \cong B_1AC$ ja siitä seuraa, että $B_1B_2 = B_1C$.

Jatketaan janaa B_1C siten, että se leikkaa janan AB_3 pisteessä D . Käytetään tasogeometrian kolmioepäyhtälöä kolmiolle B_1B_2D ja huomataan, että $B_1B_2 + B_2D > B_1D$ eli $B_1B_2 + B_2D > B_1C + CD$. Koska $B_1B_2 = B_1C$ pätee myös $B_2D > CD$.

Nyt siis $AB_2 = AC$ ja jana AD on yhteinen kolmiolle B_2AD ja CAD . Tästä seuraa, että $B_2D > DC$ ja siten $\angle B_2AD > \angle CAD$.

Saadaan $\angle B_1AB_2 + \angle B_2AD > \angle B_1AC + \angle CAD$ eli $\angle B_1AB_2 + \angle B_2AB_3 > \angle B_1AC + \angle CAD = \angle B_1AD = \angle B_1AB_3$.

□

Lause 4.12. *Lyhin reitti kahden pisteen välillä kulkee niiden määräämän isoympyrän kaarta pitkin.*

Vastakkaisilla pisteillä tämä on helppo hahmottaa, mutta selvennetään vielä, miten tämä pätee tarkalleen ottaen kahdelle ei vastakkaiselle pisteelle.

Todistus. Olkoon A ja B pisteitä ja \widehat{AB} näiden pisteiden määräämän isoympyrän kaarista lyhyempi. Oletetaan, että pisteitä A ja B yhdistävät myös \widehat{AC} ja \widehat{CB} , missä piste C ei ole \widehat{AB} :lla. Riittää tarkastella reitteinä pelkkiä kaaria. Näin ollen kolmioepäyhtälöstä seuraa, että $\widehat{AB} < \widehat{AC} + \widehat{CB}$ ja lyhin reitti pisteiden A ja B välillä on siis isoympyrän kaarta \widehat{AB} pitkin. Vastavaan tulokseen pääsemme tarkastelemalla useammista kaarista muodostuvia vaihtoehtoisia reittejä, sillä nämä voidaan aina palauttaa nyt käsiteltyyn kahdesta kaaresta muodostuvaan vaihtoehtoiseen reittiin. Vain kahden kaaren muodostaman vaihtoehtoisen reitin tarkastelu siis riittää. \square

Pisteiden etäisyyksiä ja sijaintia toisiinsa nähden voidaan tutkia tarkemmin erilaisten koordinaatisto muunnosten avulla, mutta tässä tutkielmassa ei mennä koordinaatistomuunnoksiin sen enempää kuin mitä luvussa 3 niistä mainittiin. Käytännönläheisempi tapa tutkia kahden pisteen välistä etäisyyttä on esimerkiksi seuraavanlainen.

Esimerkki 4.13. Otetaan esimerkissä kaksi paikkakuntaa, jotka kuitenkin ovat samalla puolella päiväntasaajaa ja nollameridiaania. Tämä helpottaa ongelman hahmottamista ja ratkaisemista huomattavasti.

Selvitetään kuinka pitkä etäisyys on Tampereen ja Rooman välillä. Karttapalvelu Google Mapsin mukaiset koordinaatit Tampereen keskustorille ovat $N\ 61^{\circ}29'53''$ $E\ 23^{\circ}45'39''$ ja Rooman Colosseumille $N\ 41^{\circ}53'24''$ $E\ 12^{\circ}29'32''$.

Muodostetaan pallokolmio, jonka yksi kärki on pohjoisnapa N ja toiset kärjet Tampereen keskustori T ja Rooman Colosseum C . Muodostuu siis pallokolmio NTC .

Muunnetaan koordinaattien minuutti- ja sekuntiosat asteiksi.

$$61^{\circ}29'53'' \approx 61,498^{\circ},$$

$$23^{\circ}45'39'' \approx 23,761^{\circ},$$

$$41^{\circ}53'24'' = 41,89^{\circ},$$

$$12^{\circ}29'32'' \approx 12,192^{\circ}.$$

Paikkojen koordinaateista voimme suoraan nähdä, että pallokolmion sivu \widehat{NT} on $90^{\circ} - 61,498^{\circ} = 28,502^{\circ}$ ja sivu \widehat{NC} $90^{\circ} - 41,89^{\circ} = 48,11^{\circ}$.

Lisäksi pallokolmion $\angle N$ on $23,761^{\circ} - 12,192^{\circ} = 11,569^{\circ}$

Muodostetusta pallokolmiosta tiedetään nyt siis kaksi sivua \widehat{NT} ja \widehat{NC} ja niiden välinen kulma. Halutaan saada selville tiedossa olevan $\angle N$ vastassa olevan sivun \widehat{TC} pituus. Saatujen tietojen avulla pystytään selvittämään

pallokolmiosta kaikki loput osat, kuten on tehty jo aikaisemmin esimerkissä 4.10. Nyt kuitenkin tarvitaan vain yhden sivun pituus. Selvitetään se kosinilauseen avulla kuten aikaisemmassakin esimerkissä.

Edelleen esimerkin 4.10 tapaan saadaan, että

$$\begin{aligned}\widehat{TC} &= \arccos(\cos \widehat{NC} \cos \widehat{NT} + \sin \widehat{NC} \sin \widehat{NT} \cos \sphericalangle N) \\ &= \arccos(\cos 48,11^\circ \cos 28,502^\circ + \sin 48,11^\circ \sin 28,502^\circ \cos \sphericalangle 11,569^\circ) \\ &\approx 20,805^\circ\end{aligned}$$

Muutetaan vielä kaarta vastaava asteluku kilometreiksi.

Käytetään maapallon ympärysmittana 40000 kilometriä.

Saadaan etäisyys linnuntietä

$$\frac{20,805^\circ}{360^\circ} \cdot 40000 \text{ km} \approx 2311,685 \text{ km} \approx 2312 \text{ km}.$$

Lyhin Google Maps karttapalvelun antama reitti olemassa olevia teitä ja lauttayhteyksiä käyttäen näyttää 3 027 km.

Viitteet

- [1] Lehtinen, M., Merikoski, J., Tossavainen, T. *Johdatus tasogeometriaan*. Porvoo: WSOY Oppimateriaalit, 2007
- [2] Rosenberg, E. *Geometria*. Helsinki: Limes ry, 1996.
- [3] Karttunen, H., Donner J.K., Kröger, P., Oja, H., Poutanen, M. *Tähtitieteen perusteet*. Helsinki: Tähtitieteellinen yhdistys Ursa, 5. painos, 2010.
- [4] Thurston, H. *Early astronomy*. New York: Springer-Verlag, 1994.
- [5] Oja, H. *Aikakirja 2013*. Helsinki: Helsingin yliopiston almanakkatoimisto, 6. painos, 2013.
- [6] Agricola, I., Friedrich, T. *Elementary geometry*. Providence (R.I.): American Mathematical Society, 2007.
- [7] Meyer, W. *Geometry and its applications*. Amsterdam: Elsevier/Academic Press, 2. painos, 2006.
- [8] Berele, A., Goldman, J. *Geometry: theorems and constructions*. Upper Saddle River (N.J.): Prentice Hall, 2001.
- [9] <http://www.maanmittauslaitos.fi/kartat/koordinaatit/koordinaattikorkeusjarjestelmat>
- [10] <http://maps.google.fi>
- [11] Vermeer, M., Rasila, A. *Maaailman kartta - johdatus matemaattiseen geodesiaan*. Helsinki: Tähtitieteellinen yhdistys Ursa, 2014.
- [12] Todhunter, I. *Spherical Trigonometry: For the Use of Colleges and Shools*. Lontoo: Macmillan and Co., 5. painos, 1886. <http://www.gutenberg.org/ebooks/19770>