

---

TAMPEREEN YLIOPISTO  
Pro gradu -tutkielma

---

Riina Mylläri

Vektoridifferentiaalilaskennan  
sovelluksia luonnonilmiöissä

---

Informaatiotieteiden yksikkö  
Matematiikka  
Toukokuu 2016

---

Tampereen yliopisto

Informaatiotieteiden yksikkö

MYLLÄRI, RIINA: Vektoridifferentiaalilaskennan sovelluksia luonnonilmiöissä

Pro gradu -tutkielma, 36 s.

Matematiikka

Toukokuu 2016

---

## Tiivistelmä

Tämä tutkielma käsittelee vektoridifferentiaalilaskennan sovelluksia kahdessa erilaisessa luonnonilmiössä. Tarkasteltavat luonnonilmiöt ovat coriolisvaikutus ilmakehän liikkeisiin sekä sekä Keplerin lait. Valmisteluvina tarkasteluina tutkielmassa perehdytään yhden muuttujan vektorifunktioiden, napakoordinaatiston sekä ellipsin teoriaan. Tarkasteluissa esitellään vektorifunktioiden käytännöllisyyttä fysikaalisten suureiden kuvaajina, pohditaan edellisten vektorisuureiden olemusta napakoordinaatistossa sekä johdetaan yhteys napakoordinaatistossa esitetyn ellipsin ja karteesisen koordinaatiston ellipsin kuvaajien välille.

Näillä tiedoilla varustautuneena on mukavampi lähteä käsittelemään itse tutkielman pääaihetta eli vektoridifferentiaalilaskennan sovelluksia luonnonilmiöihin. Tarkastelu aloitetaan mallintamalla maapallon pyörimisestä aiheutuvia näennäisvoimia kahden erillisen kantavektorijärjestelmän avulla. Huomataan, että maapallon pyörimisliikkeestä aiheutuvat näennäisvoimat ovat suurelta osin syyllisiä vallitseviin ilmasto-oloihin maapallon pinnalla.

Toisena sovellusalueena käsitellään Keplerin lakeja, joista ensimmäisenä johdetaan Keplerin toinen; pinnanopeutta käsittelevä laki. Tämä tehdään poikkeuksellisesti, varsin matemaattisesti, hyödyntäen Newtonin kuuluisaa toista lakia, planeetan paikkaa ja nopeutta kuvaavien vektorifunktioiden ominaisuuksia sekä lähes nerokkaita akselivalintoja. Tulos viimeistellään vielä pinta-alaintegraalin ja differentiaaliyhtälön avulla. Toisen lain jälkeen johdetaan Keplerin ensimmäinen ja ehkä kuuluisin laki planeettojen kiertoratojen ellipsiluonteesta. Tästä suoriudutaan hyödyntämällä Newtonin painovoimalakia, integroimalla planeetan kiihtyvyyksilauseke sekä jälleen tekemällä muutama nerokas akselivalinta. Keplerin kolmas, kiertoaikoihin liittyvä laki johdetaan lopuksi vaivattomasti ensimmäisen ja toisen lain perusteella.

# Sisältö

<b>1</b>	<b>Johdanto</b>	<b>4</b>
<b>2</b>	<b>Valmistelevia tarkasteluja</b>	<b>5</b>
2.1	Yhden muuttujan vektorifunktiot . . . . .	5
2.2	Napakordinaatisto . . . . .	11
2.2.1	Yhteys karteesiseen koordinaatistoon . . . . .	13
2.2.2	Nopeuden ja kiihtyvyyden polaarikomponentit . . . . .	15
2.3	Ellipsi . . . . .	17
2.3.1	Ellipsin määritelmiä . . . . .	17
2.3.2	Ellipsit polaarikoordinaatistossa . . . . .	19
<b>3</b>	<b>Vektoridifferentiaalilaskennan sovelluksia</b>	<b>23</b>
3.1	Coriolisvaikutus . . . . .	23
3.1.1	Ympyräliike . . . . .	23
3.1.2	Pyörivä kehys ja coriolisvaikutus . . . . .	24
3.2	Keplerin lait . . . . .	30
3.2.1	Keskeisvoimat ja Keplerin toinen laki . . . . .	31
3.2.2	Keplerin ensimmäisen ja kolmannen lain johtaminen . . . . .	32
	<b>Kirjallisuutta</b>	<b>36</b>

# Luku 1

## Johdanto

Tämän tutkielman pääluvussa 3 tarkastellaan vektoridifferentiaalilaskennan sovelluksia kahdessa erilaisessa luonnonilmiössä. Ensin käsitellään alaluvussa 3.1 maapallon pyörimisestä aiheutuvan coriolis-ilmiön vaikutuksia ilmastoon. Aihetta lähestytään vektorifunktioiden ja pyörivän kehyksen näkökulmasta. Toisessa alaluvussa 3.2 tarkasteluun otetaan Keplerin lait ja niiden matemaattinen todistaminen, poikkeuksellisesti vektorifunktioita hyödyntäen. Keplerin lakien todistaminen ei ole vierasta monenkään tieteenalan näkökulmasta, yleistesti ne on kuitenkin todistettu kahden kappaleen ongelmaan perustuen (vertaa [2, s. 175–187], [3, s. 105–107] ja [5, s. 741–746]), kun tämän tutkielman todistuksessa puolestaan nojataan vektorifunktioiden ominaisuuksiin ja juonikkaisiin akselivalintoihin.

Ennen itse asiaan pääsemistä syvennytään kuitenkin luvussa 3 käsiteltävää pääaiheen ymmärtämistä helpottaviin aihealueisiin. Näitä ovat luvussa 2 esitettävät yhden muuttujan vektorifunktiot, napakoordinaatisto sekä ellipsi. Esitettävien esitietojen lisäksi lukijalta odotetaan joidenkin analyysin, erityisesti vektorianalyysin, perustietoja pystyäkseen ymmärtämään tutkielman sisällön. Tavoitteena on avata vektoridifferentiaalilaskennan käytännön merkitystä aiheesta kiinnostuneille. Pääasiallisena lähdeveksena tutkielmassa on käytettään Adamsin ja Essexin kirjan *Calculus: A complete course* luku 11, jota on täydennetty eri tieteenalojen (tähtitiede, fysiikka, maantiede, matematiikka) muilla lähteillä.

# Luku 2

## Valmistelevia tarkasteluja

### 2.1 Yhden muuttujan vektorifunktiot

Tässä luvussa esitetään lyhyesti joitakin aiheen ymmärtämisen edellytyksenä olevia esitietoja. Tämä aliluku keskittyy yhden muuttujan vektorifunktioiden käsittelemiseen tutkielman ymmärtämisen kannalta hyödyllisten differentiaali- ja integraalilaskennan osa-alueisiin. Lähteenä tässä aliluvussa on käytetty Adamsin ja Essexin teoksen *Calculus: A complete course* kappaletta 11.1 soveltuvien osin. [1, s. 623–625, 627–629] Pohdittaessa kappaleen liikettä avaruudessa on kappaleen paikkafunktiota luonnollista kuvata reaali- ja vektorimuuttujan, käytännössä ajan,  $t$  vektorifunktion avulla. Tämän *paikkavektorin* derivaatat ovat näin ollen muita vektorifunktioita, jotka kuvaavat kappaleen nopeutta ja kiihtyvyyttä. Tässä tutkielmassa keskitytään edellä mainittujen vektorifunktioiden tarkastelemiseen lähinnä kolmiulotteisessa avaruudessa joidenkin taso- ja tila-esitysten siivittämänä. Kaksiulotteisissa tapauksissa kolmas komponentti asetetaan nolaksi ja jätetään huomiotta.

Kappaleen liikuessa kolmiulotteisessa avaruudessa voidaan sen paikka avaruudessa ilmaista koordinaattifunktiona ajan suhteen seuraavasti:

$$x = x(t), \quad y = y(t) \quad \text{ja} \quad z = z(t)$$

Käytännöllisempää on kuitenkin korvata nämä kolme yhtälöä yhdellä vektorifunktiolla,

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t),$$

joka on siis liikkuvan kappaleen paikkavektori ajan  $t$  funktiona. (Pisteen paikkavektorin tarkoittaa vektoria origosta kyseessä olevaan pisteeseen.) Paikkavektori ajan suhteen voidaan merkitä seuraavasti yksikkökoordinaattivektorien avulla:

$$(2.1) \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$$

Muuttujan  $t$  arvon kasvaessa kappale liikkuu *polkua* pitkin, siis kolmiulotteisena käyränä  $\mathcal{C}$ . Jos  $z(t) = 0$ , niin silloin  $\mathcal{C}$  on tasokäyrä  $xy$ -tasossa. Ole-

tetaan, että  $\mathcal{C}$  on *jatkuva käyrä*, jolloin kappale ei pysty yhtäkkiä "hyp-päämään" paikasta toiseen. Tämä vastaa sitä, että funktion komponentit  $x(t), y(t)$  ja  $z(t)$  ovat jatkuvia muuttujan  $t$  suhteen. Näin ollen myös  $\mathbf{r}(t)$  on jatkuva funktio parametrin/ajan  $t$  suhteen.

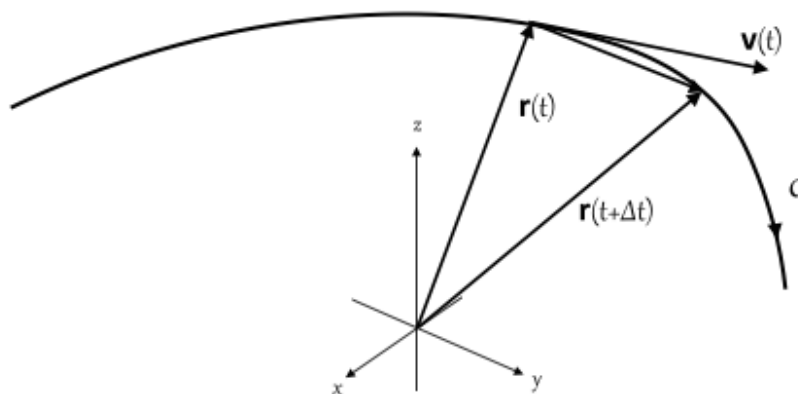
Aikavälillä  $[t, t + \Delta t]$  kappale liikkuu paikasta  $\mathbf{r}(t)$  paikkaan  $\mathbf{r}(t + \Delta t)$ . Näin ollen kappaleen keskinopeus on

$$(2.2) \quad \frac{\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t},$$

joka on yhdensuuntainen paikkavektorien  $\mathbf{r}(t)$  ja  $\mathbf{r}(t + \Delta t)$  välisen sekantti-vektorin, eli erotusvektorin  $\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)$  kanssa. Jos keskinopeudella on raja-arvo, kun  $\Delta t \rightarrow 0$ , niin funktion  $\mathbf{r}$  sanotaan olevan *derivoituva* pisteessä  $t$ . Tätä raja-arvoa kutsutaan kappaleen hetkelliseksi *nopeudeksi* hetkellä  $t$ . Nopeusvektori voidaan määritellä ajan, ja paikan, suhteen seuraavasti:

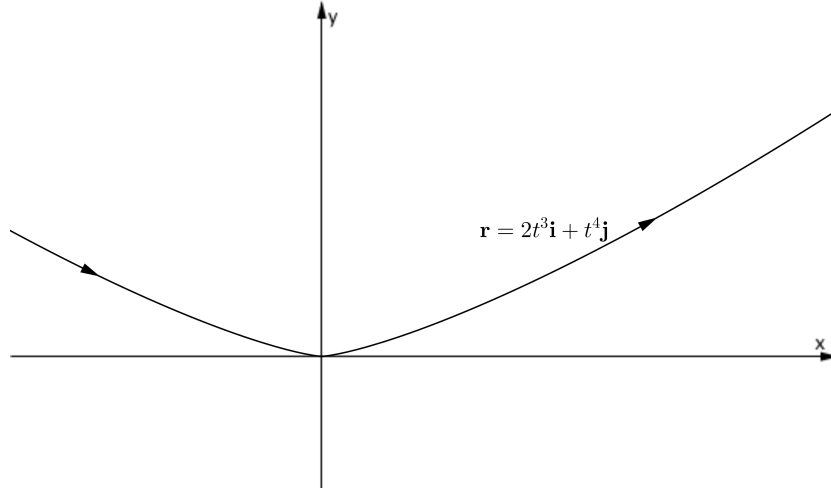
$$(2.3) \quad \mathbf{v}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t} = \frac{d}{dt} \mathbf{r}(t).$$

Nopeusvektori on käyrän  $\mathcal{C}$  tangentin suuntainen pisteen  $\mathbf{r}(t)$  kohdalla, osoit-taen liikkeen suuntaan (kuva 2.1). Nopeusvektorin pituutta,  $v(t) = |\mathbf{v}(t)|$  kutsutaan kappaleen *vauhdiksi*. Kaikkiällä missä nopeusvektori on määritelty, missä se on jatkuva ja missä se ei häviä on  $\mathcal{C}$  *sileä* käyrä; sille voidaan siis määritellä "jatkuvasti muuttuva" tangentti. Käyrän kulkema polku voi poi-keta sileästä kohdissa, joissa nopeus on nolla, vaikka nopeusvektorin kompo-nentit olisivatkin ajan  $t$  suhteen sileitä.



Kuva 2.1: Nopeus  $\mathbf{v}(t)$  on paikkavektorin  $\mathbf{r}(t)$  derivaatta ja osoittaa käyrän tangentin suuntaan pisteessä, jonka paikkavektori on  $\mathbf{r}(t)$ .

**Esimerkki 2.1.** Tarkastellaan tasokäyrää  $\mathbf{r}(t) = 2t^2\mathbf{i} + t^3\mathbf{j}$ , jonka komponenttifunktioiden  $2t^2$  ja  $t^3$  kaikki derivaatat ovat jatkuvia. Käyrä ei kuitenkaan ole sileä origossa ( $t = 0$ ), missä sen nopeus  $\mathbf{v}(0) = \mathbf{r}'(0) = 4(0)\mathbf{i} + 3(0)^2\mathbf{j} = \mathbf{0}$ . Käyrä on sileä kaikkialla, missä  $\mathbf{v}(t) \neq \mathbf{0}$ . (Kuva 2.2.)



Kuva 2.2: Funktion  $\mathbf{r}(t) = 2t^2\mathbf{i} + t^3\mathbf{j}$  komponentit ovat sileitä ajan  $t$  funktioita, mutta käyrä ei ole sileä origossa, missä  $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ .

Vektorien yhteenlaskun ja skalaarikertolaskun perusteella voidaan sanoa, että

$$\begin{aligned}
 (2.4) \quad \mathbf{v} &= \frac{d\mathbf{r}}{dt} \\
 &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left( \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} \mathbf{i} + \frac{y(t + \Delta t) - y(t)}{\Delta t} \mathbf{j} + \frac{z(t + \Delta t) - z(t)}{\Delta t} \mathbf{k} \right) \\
 &= \frac{dx}{dt} \mathbf{i} + \frac{dy}{dt} \mathbf{j} + \frac{dz}{dt} \mathbf{k}.
 \end{aligned}$$

Näin ollen, vektorifunktio  $\mathbf{r}$  on derivoituva kohdassa  $t$ , jos ja vain jos sen kolme skalaarikomponenttia  $x, y$  ja  $z$  ovat derivoituvia kohdassa  $t$ . Yleisesti vektorifunktiot ovat derivoitavissa (tai integroitavissa) derivoimalla niiden komponenttifunktiot.

Liikkuvan kappaleen kiihtyvyys nopeuden aikaderivaattana voidaan määrittellä seuraavasti:

$$(2.5) \quad \mathbf{a}(t) = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}.$$

Newtonin toisen liikelain mukaan kiihtyvyys on verrannollinen, ja samansuuntainen, liikkeen aiheuttavan voiman  $\mathbf{F}$  kanssa. Kappaleen massan ollessa  $m$  laki voidaan ilmaista vektoryhtälöllä  $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ .

**Esimerkki 2.2.** Määritetään nopeus, vauhti ja kiihtyvyys sekä kuvaillaan kappaleen liikettä, kun kappaleen paikkaa ajanhetkellä  $t$  kuvaa yhtälö

$$\mathbf{r} = 10 \sin \omega t \mathbf{i} + 8 \cos \omega t \mathbf{j} + 6 \cos \omega t \mathbf{k}.$$

Nopeus, vauhti ja kiihtyvyys saadaan helposti

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \frac{d\mathbf{r}}{dt} = 10\omega \cos \omega t \mathbf{i} - 8\omega \sin \omega t \mathbf{j} - 6\omega \sin \omega t \mathbf{k} \\ v = |\mathbf{v}| &= \sqrt{(10\omega \cos \omega t)^2 + (-8\omega \sin \omega t)^2 + (-6\omega \sin \omega t)^2} \\ &= \sqrt{100\omega^2 \cos^2 \omega t + 100\omega^2 \sin^2 \omega t} \\ &= \sqrt{100\omega^2(\cos^2 \omega t + \sin^2 \omega t)} = 10\omega \sqrt{\cos^2 \omega t + \sin^2 \omega t} = 10\omega \\ \mathbf{a} &= \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -10\omega^2 \sin \omega t \mathbf{i} - 8\omega^2 \cos \omega t \mathbf{j} - 6\omega^2 \cos \omega t \mathbf{k} \\ &= -\omega^2(10 \sin \omega t \mathbf{i} + 8 \cos \omega t \mathbf{j} + 6 \cos \omega t \mathbf{k}) = -\omega^2 \mathbf{r}. \end{aligned}$$

Huomataan, että

$$\begin{aligned} |\mathbf{r}| &= \sqrt{(10 \sin \omega t)^2 + (8 \cos \omega t)^2 + (6 \cos \omega t)^2} \\ &= \sqrt{100 \sin^2 \omega t + 100 \cos^2 \omega t} \\ &= \sqrt{100(\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t)} = 10. \end{aligned}$$

Koska kappaleen etäisyys origosta on aina 10, kulkee kappale siis pallon kehällä, jonka yhtälö on  $x^2 + y^2 + z^2 = 100$ . Koska  $y = 8 \cos \omega t$  ja  $z = 6 \cos \omega t$ , kulkee kappale myös pystysuoralla tasolla  $6y = 8z$ . Näin ollen kappale liikkuu origokeskeisen ympyrän kehällä, jonka säde on 5 ja joka sijaitsee tasossa  $6y = 8z$ . Lisäksi  $\mathbf{r}$  on jaksollinen, jakso on  $2\pi/\omega$ . Näin ollen kappale kiertää ympyrän kehän kertaalleen ajassa  $2\pi/\omega$ . Kiihtyvyys on aina vektorin  $-\mathbf{r}$  suuntaisesti, siis kohti origoa. Tästä ympyräliikkeen keskelle suuntautuvasta voimasta käytetään nimitystä *keskihakuvoima*.

**Esimerkki 2.3.** Kappaleen liikkuessa oikealle käyrän  $y = x^3 + 1$  mukaista polkua vakionopeudella  $v = 10$  voidaan sen nopeus ja kiihtyvyys kohdassa  $(1, 1)$  ratkaista seuraavasti:

Kappaleen paikka millä tahansa ajanhetkellä  $t$  on

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + (x^3 + 1)\mathbf{j},$$

missä  $x$ , kappaleen paikan  $x$ -koordinaatti, on ajan  $t$  funktio. Kappaleen no-



peudeksi, vauhdiksi ja kiihtyvyydeksi ajanhetkellä  $t$  saadaan

$$\begin{aligned}\mathbf{v} &= \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + 3x^2\frac{dx}{dt}\mathbf{j} = (\mathbf{i} + 3x^2\mathbf{j})\frac{dx}{dt}, \\ v = |\mathbf{v}| &= \left| \sqrt{1 + (3x^2)^2}\frac{dx}{dt} \right| = \sqrt{1 + 9x^4}\frac{dx}{dt}, \\ \mathbf{a} &= \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\mathbf{i} + 3x^2\mathbf{j})\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{dt}\left(6x\mathbf{j}\frac{dx}{dt}\right) + (\mathbf{i} + 3x^2\mathbf{j})\frac{d}{dt}\frac{dx}{dt} \\ &= 6x\mathbf{j}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + (\mathbf{i} + 3x^2\mathbf{j})\frac{d^2x}{dt^2}.\end{aligned}$$

(Nopeuslaskuissa voidaan käyttää  $|dx/dt| = dx/dt$ , koska kappale liikkuu oikealle, siis positiiviseen suuntaan.) Koska nopeus on vakio ( $v = 10$ ), saadaan, että

$$\frac{dx}{dt} = \frac{10}{\sqrt{1 + 9x^4}}.$$

Kun  $x = 1$ , saadaan  $dx/dt = 10/\sqrt{1 + 9(1)^4} = 10/\sqrt{10} = \sqrt{10}$ . Näin ollen kappaleen nopeus kyseessä olevassa pisteessä on  $\mathbf{v} = \sqrt{10}\mathbf{i} + 3(1)^2\sqrt{10}\mathbf{j} = \sqrt{10}\mathbf{i} + 3\sqrt{10}\mathbf{j}$ . Nyt voidaan laskea ketjusäännön avulla

$$\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2} &= \frac{d}{dt}\frac{10}{\sqrt{1 + 9x^4}} = \left(\frac{d}{dx}\frac{10}{\sqrt{1 + 9x^4}}\right)\frac{dx}{dt} \\ &= \left(-\frac{10}{2(1 + 9x^4)^{3/2}}36x^3\right)\frac{10}{\sqrt{1 + 9x^4}} = -\frac{1800x^3}{(1 + 9x^4)^2}.\end{aligned}$$

Kohdassa  $x = 1$  saadaan

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{1800(1)^3}{(1 + 9(1)^4)^2} = -\frac{1800}{(10)^2} = -\frac{1800}{100} = -18.$$

Tällöin kiihtyvyys tässä pisteessä on  $\mathbf{a} = 6(1)\mathbf{j}(\sqrt{10}) + (\mathbf{i} + 3(1)^2\mathbf{j})(-18) = 60\mathbf{j} - 18\mathbf{i} - 54\mathbf{j} = -18\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$ .

Tässä alaluvussa käsitellään vektorifunktioiden derivointia. Vektoreita ja skalaareita voidaan yhdistää monella tavalla muodostaen toisia vektoreita ja skalaareja. Vektoreita voidaan laskea yhteen tai niitä voidaan kertoa skalaareilla ja ne voivat olla tekijöitä piste- ja ristituloissa. Soveltuvat derivointisäännöt pätevät näissä erilaisissa vektori- ja skalaariyhdisteissä. Seuraavassa lauseessa esitetään nämä säännöt.

**Lause 2.1.** *Olko  $\mathbf{u}(t)$  ja  $\mathbf{v}(t)$  derivoituvia vektorifunktioita ja  $\lambda(t)$  derivoituva skalaariarvoinen funktio. Merkitään tästä eteenpäin  $\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}$  ja  $\lambda(t) = \lambda$ , ellei toisin mainita. Tällöin  $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ ,  $\lambda\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ ,  $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$  ja  $\mathbf{u}(\lambda)$  ovat*

derivoituvia sekä

$$(2.6) \quad \frac{d}{dt}(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \mathbf{u}' + \mathbf{v}'$$

$$(2.7) \quad \frac{d}{dt}\lambda\mathbf{u} = \lambda'\mathbf{u} + \lambda\mathbf{u}'$$

$$(2.8) \quad \frac{d}{dt}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = \mathbf{u}' \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}'$$

$$(2.9) \quad \frac{d}{dt}(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \mathbf{u}' \times \mathbf{v} + \mathbf{u} \times \mathbf{v}'$$

$$(2.10) \quad \frac{d}{dt}\mathbf{u}(\lambda) = \lambda'\mathbf{u}'(\lambda).$$

Lisäksi kaikkialla missä  $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ ,

$$(2.11) \quad \frac{d}{dt}|\mathbf{u}| = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}'}{|\mathbf{u}|}.$$

*Huomio* Näistä kaavat (2.7), (2.8) ja (2.9) ovat tulosäännön sovelluksia. Kaava (2.10) puolestaan on ketjusäännön sovellus. Kaavassa (2.11) sovelletaan vektorin pituutta  $|\mathbf{u}| = \sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}$  ja tulos saadaan seuraavasti

$$\frac{d}{dt}|\mathbf{u}| = \frac{d}{dt}\sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}} = \frac{d}{dt}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u})^{\frac{1}{2}} = (\mathbf{u}' \cdot \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}') \frac{1}{2}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u})^{-\frac{1}{2}} = \frac{2\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}'}{2(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u})^{\frac{1}{2}}} = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}'}{|\mathbf{u}|}$$

Huomaa, että kaikki tekijät ovat samassa järjestyksessä ristituloon sovelletussa tulosäännössä kohdassa (2.9). Järjestyksen säilyttäminen on erityisen tärkeää, koska toisin kuin pistetulossa tai skalaarilla kerrottaessa, ristitulo ei ole kommutatiivinen eikä vaihdannainen.

**Esimerkki 2.4.** Osoitetaan, että liikkuvan kappaleen vauhti pysyy vakiona ajan suhteen, jos ja vain jos kiihtyvyys on kohtisuorassa nopeutta vastaan koko aikavälillä.

Koska  $(v(t))^2 = \mathbf{v}(t) \cdot \mathbf{v}(t)$ , saadaan

$$\begin{aligned} 2v(t)\frac{dv}{dt} &= \frac{d}{dt}(v(t))^2 = \frac{d}{dt}(\mathbf{v}(t) \cdot \mathbf{v}(t)) \\ &= \mathbf{a}(t) \cdot \mathbf{v}(t) + \mathbf{v}(t) \cdot \mathbf{a}(t) = 2\mathbf{v}(t) \cdot \mathbf{a}(t). \end{aligned}$$

Jos oletetaan, että  $v(t) \neq 0$ , niin seuraa, että  $dv/dt = 0$ , jos ja vain jos  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{a} = 0$ . Vauhti on tällöin vakio, jos ja vain jos nopeus- ja kiihtyvyysvektorit ovat kohtisuoria.

**Esimerkki 2.5.** Lasketaan ja sievennetään kolmesti derivoituvan funktion  $\mathbf{u}$  skalaarikolmitulon derivaatta

$$\frac{d}{dt} \left( \mathbf{u} \cdot \left( \frac{d\mathbf{u}}{dt} \times \frac{d^2\mathbf{u}}{dt^2} \right) \right).$$

Tulonderivointisääntöä (kaavoja (2.8) ja (2.9)) soveltaen saadaan

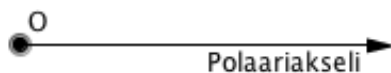
$$\begin{aligned}
 & \frac{d}{dt} \left( \mathbf{u} \cdot \left( \frac{d\mathbf{u}}{dt} \times \frac{d^2\mathbf{u}}{dt^2} \right) \right) \\
 &= \frac{d\mathbf{u}}{dt} \cdot \left( \frac{d\mathbf{u}}{dt} \times \frac{d^2\mathbf{u}}{dt^2} \right) + \mathbf{u} \cdot \left( \frac{d}{dt} \frac{d\mathbf{u}}{dt} \times \frac{d^2\mathbf{u}}{dt^2} \right) + \mathbf{u} \cdot \left( \frac{d\mathbf{u}}{dt} \times \frac{d}{dt} \frac{d^2\mathbf{u}}{dt^2} \right) \\
 &= \frac{d\mathbf{u}}{dt} \cdot \left( \frac{d\mathbf{u}}{dt} \times \frac{d^2\mathbf{u}}{dt^2} \right) + \mathbf{u} \cdot \left( \frac{d^2\mathbf{u}}{dt^2} \times \frac{d^2\mathbf{u}}{dt^2} \right) + \mathbf{u} \cdot \left( \frac{d\mathbf{u}}{dt} \times \frac{d^3\mathbf{u}}{dt^3} \right) \\
 &= 0 + 0 + \mathbf{u} \cdot \left( \frac{d\mathbf{u}}{dt} \times \frac{d^3\mathbf{u}}{dt^3} \right) = \mathbf{u} \cdot \left( \frac{d\mathbf{u}}{dt} \times \frac{d^3\mathbf{u}}{dt^3} \right).
 \end{aligned}$$

Ensimmäinen termi on nolla, koska  $d\mathbf{u}/dt$  on kohtisuorassa toisen vektorin ristitulon kanssa; toinen termi puolestaan katoaa, koska se on kahden identtisen vektorin ristitulo.

## 2.2 Napakordinaatisto

Koordinaatistot ovat olemassa, jotta voisimme kuvata kappaleen paikkaa suhteessa kiinnitettyyn kehykseen. Suorakulmaisen koordinaatiston, toisin sanoen karteesisen koordinaatiston, viitekehys on kaksi kohtisuoraa janaa. Joskus kuitenkin kohdataan tilanteita, joissa toisenlainen koordinaatisto kuvaa tilannetta paremmin ja selkeämmin. Esimerkki tällaisesta ovat käyrät, jotka kiertyvät pisteen ympäri, tai käyrät, jotka ovat erityisen symmetrisiä. Tällaisissa tilanteissa napakoordinaatisto tai ns. polaarikoordinaatisto osoittautuu varsin käyttökelpoiseksi. Tässä luvussa käsitellään napakoordinaatiston ominaisuuksia [5, s. 478-480], sen yhteyttä tavalliseen karteesiseen koordinaatistoon [5, s. 480-481] sekä aikaisemmin (luvussa 2.1) määritellyiden nopeuden ja kiihtyvyyden polaarikomponentit [1, s. 661-662].

Napakoordinaatistossa viitekehys muodostuu pisteestä  $O$ , jotka kutsutaan navaksi sekä tästä pisteestä alkavasta säteestä, eli napasäteestä tai toisin sanoen polaariksi. (Kuva 2.3)

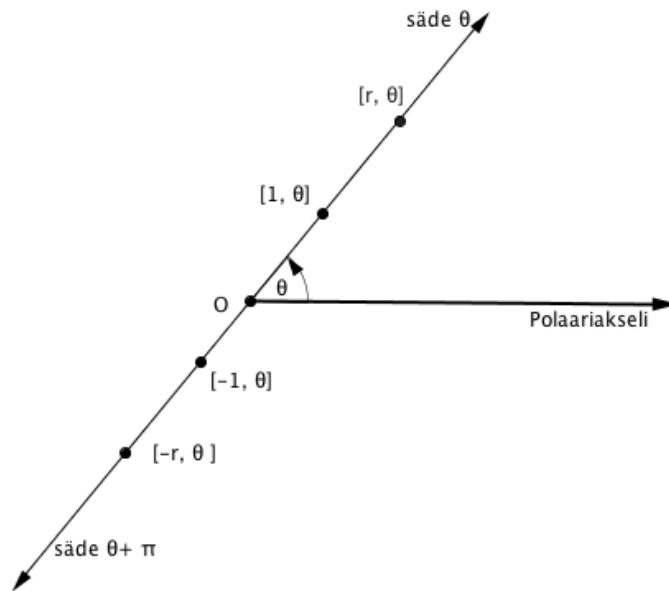


Kuva 2.3: Polaarikoordinaatisto

Yleisesti voidaan määrittellä jokaiselle pisteelle avaruudessa polaarikordi-

naatit  $[r, \theta]$ , jos se sijaitsee etäisyyden  $|r|$  päässä navasta

säteellä  $\theta$ , jos  $r \geq 0$ , ja säteellä  $\theta + \pi$ , jos  $r < 0$ . (Kuva 2.4)



Kuva 2.4: Pisteet polaarikoordinaatistossa

Polaarikoordinaatit eivät ole yksikäsitteisiä, vaan on olemassa monia pareja  $[r, \theta]$ , jotka voivat kuvata samaa pistettä.

1. Tapauksissa, joissa pisteen etäisyys navasta on nolla, ei kulman suuruudella ole merkitystä, piste on aina navassa. Eli

$$(2.12) \quad O = [0, \theta] \quad \text{kaikilla kulman } \theta \text{ arvoilla.}$$

2. Geometrisesti eivät pisteet, jotka eroavat toisistaan vain luvun  $2\pi$  moninkertoina, eroa toisistaan millään tavalla. Voidaan siis sanoa, että

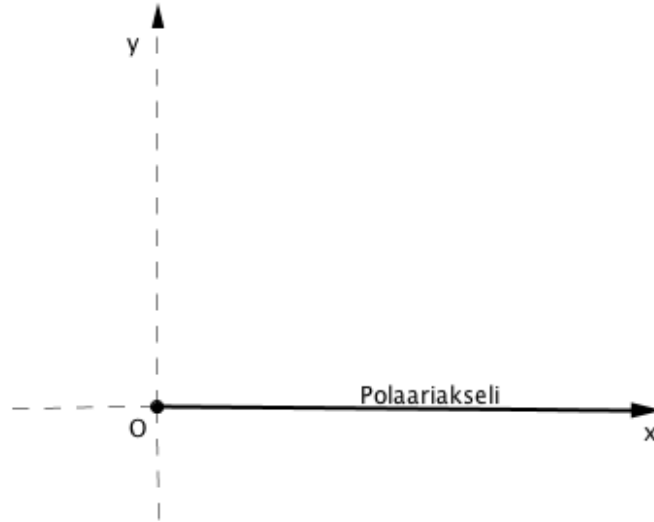
$$(2.13) \quad [r, \theta] = [r, \theta + 2n\pi] \quad \text{kaikilla } n \in \mathbb{Z}.$$

3. Lisäksi luvun  $\pi$  lisääminen kulmaan vastaa pisteen etäisyyden muuttamista vastaluvukseen. Toisinsanoen

$$(2.14) \quad [r, \theta + \pi] = [-r, \theta].$$

## 2.2.1 Yhteys karteesiseen koordinaatistoon

Napakoordinaattien suhteuttaminen karteesiseen koordinaatistoon onnistuu jotakuinkin vaivattomasti, kun napakoordinaatiston napa sijoitetaan karteesisen koordinaatiston origoon ja polaariakseli asetetaan osoittamaan positiivisen  $x$ -akselin suuntaan. (Kuva 2.5.)



Kuva 2.5: Napakoordinaatisto ja karteesinen koordinaatisto sijoitettuna päällekkäin.

Polaarikoordinaattien  $[r, \theta]$  suhde karteesiseen koordinaatistoon  $(x, y)$  voidaan ilmaista yhtälöillä

$$(2.15) \quad x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta.$$

*Todistus.* Osoitetaan tämä kolmessa eri tapauksessa:  $r = 0$ ,  $r > 0$  ja  $r < 0$

Tapaus 1:  $r = 0$ .

Tässä tapauksessa yhtälö on pätevä, sillä piste  $[r, \theta]$  on origossa ja molemmat,  $x$  ja  $y$  ovat nolliä:

$$0 = 0 \cos \theta, \quad 0 = 0 \sin \theta.$$

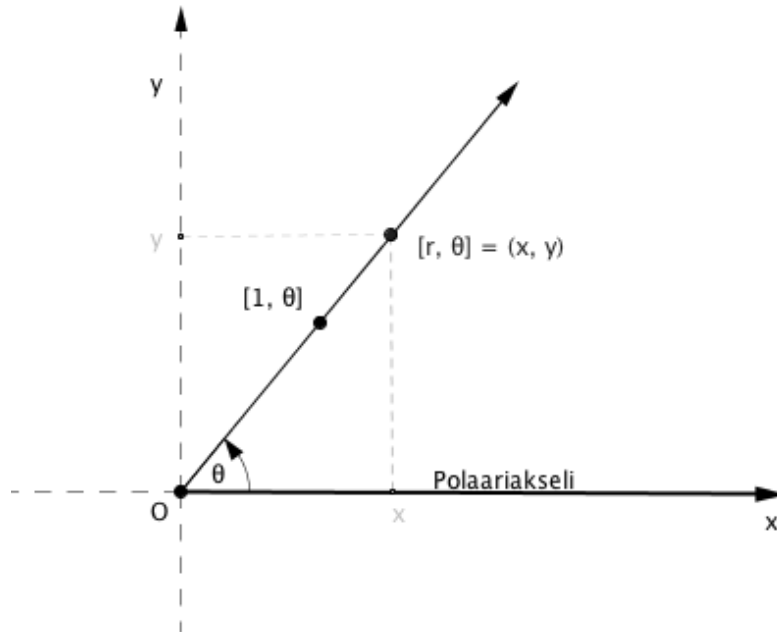
Tapaus 2:  $r > 0$ .

Oletetaan, että  $[r, \theta] = (x, y)$ . Tällöin  $(x, y)$  on säteellä  $\theta$ , kuten on myös piste  $(x/r, y/r)$ . (Kuva 2.6) Sinin ja kosinin määritelmästä tiedetään, että

$$\frac{x}{r} = \cos \theta, \quad \frac{y}{r} = \sin \theta,$$

josta puolittain kertomalla saadaan

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta.$$



Kuva 2.6: Molemmat pisteet  $(x, y)$  ja  $(x/r, y/r)$  asettuvat säteelle  $\theta$

Tapaus 3:  $r < 0$ .

Koska napakoordinaattien määritelmästä (kaava (2.13))  $[r, \theta + \pi] = [-r, \theta]$  ja  $-r > 0$ , jonka lisäksi edellisessä kohdassa todettiin, että

$$x = -r \cos(\theta + \pi), \quad y = -r \sin(\theta + \pi).$$

Nyt koska sinin ja kosinin määritelmistä tiedetään, että  $\cos(\theta + \pi) = -\cos \theta$  ja  $\sin(\theta + \pi) = -\sin \theta$ , saadaan

$$x = -r(-\cos(\theta)), \quad y = -r(-\sin(\theta)),$$

$$\text{siis jälleen } x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta.$$

□

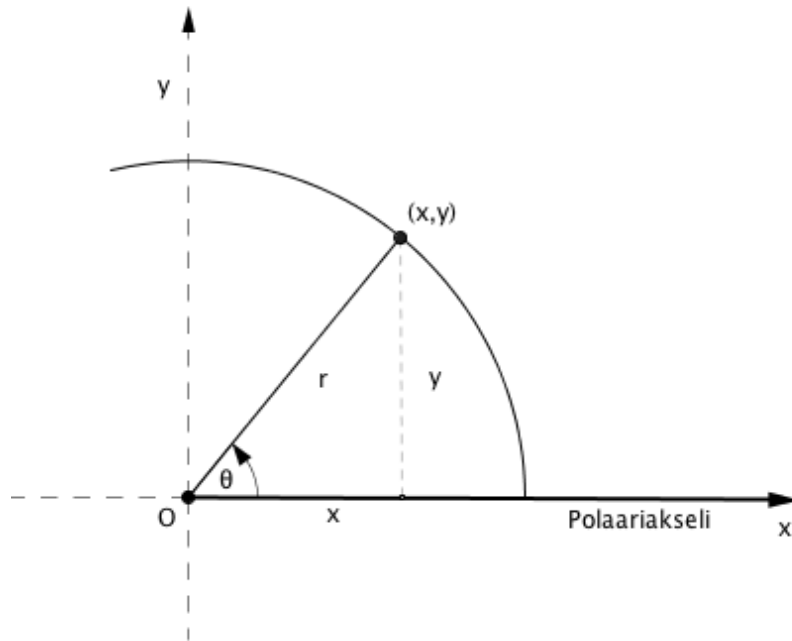
Edellisen todistuksen perusteella voidaan myös sanoa, että

$$(2.16) \quad \tan \theta = \frac{y}{x} \quad \text{kun } x \neq 0,$$

sekä

$$(2.17) \quad x^2 + y^2 = r^2.$$

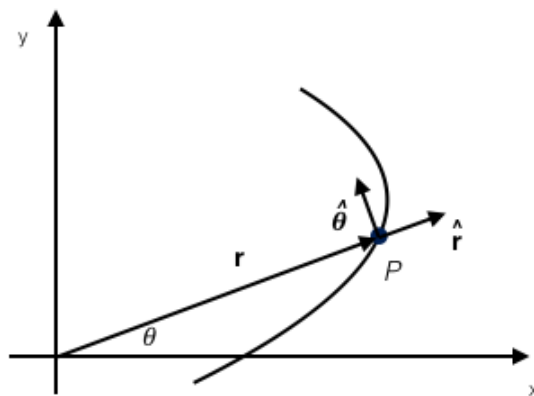
Nämä havainnollistuvat vielä kuvassa 2.7.



Kuva 2.7: Polaarikoordinaatiston yhteys karteesiseen koordinaatistoon piirrettyyn kolmioon.

### 2.2.2 Nopeuden ja kiihtyvyyden polaarikomponentit

Asetetaan  $\mathbf{r}(t)$  kappaleen  $P$  paikkavektoriksi ajanhetkellä  $t$ , kappaleen liikkuessa  $xy$ -tasossa. Voidaan muodostaa kaksi yksikkövektoria pisteestä  $P$ , toinen  $\hat{\mathbf{r}}$  osoittaa samaan suuntaan paikkavektorin  $\mathbf{r}(t)$  kanssa ja toinen  $\hat{\boldsymbol{\theta}}$  on kierretty  $90^\circ$  vastapäivään vektorista  $\hat{\mathbf{r}}$ . (Kuva 2.8) Jos pisteellä  $P$  on



Kuva 2.8: Kantavektorit kasvavan  $r$ :n ja  $\theta$ :n suuntaan.

polaarikoordinaatit  $[r, \theta]$ , tällöin  $\hat{\mathbf{r}}$  osoittaa kohdasta  $P$  kasvavan säteen  $r$  suuntaisesti ja  $\hat{\boldsymbol{\theta}}$  kohti kulman  $\theta$  kasvavaa suuntaa. Selvästi siis

$$(2.18) \quad \hat{\mathbf{r}} = \cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j}$$

$$(2.19) \quad \hat{\boldsymbol{\theta}} = -\sin \theta \mathbf{i} + \cos \theta \mathbf{j}.$$

Huomaataan, että yksikkövektorit  $\hat{\mathbf{r}}$  ja  $\hat{\boldsymbol{\theta}}$  riippuvat pelkästään kulmasta  $\theta$ , eivät etäisyydestä  $r$ :

$$(2.20) \quad \frac{d\hat{\mathbf{r}}}{d\theta} = \hat{\boldsymbol{\theta}}, \quad \frac{d\hat{\boldsymbol{\theta}}}{d\theta} = -\hat{\mathbf{r}} \quad \text{ja} \quad \frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dr} = \frac{d\hat{\boldsymbol{\theta}}}{dr} = \mathbf{0}.$$

Pari  $\{\hat{\mathbf{r}}, \hat{\boldsymbol{\theta}}\}$  muodostaa kannan pisteessä  $P$  siinä mielessä, että tason vektorit voidaan ilmaista näiden kahden yksikkövektorin avulla. Vektorin komponenttia  $\hat{\mathbf{r}}$  kutsutaan *radiaalikomponentiksi* ja komponenttia kutsutaan  $\hat{\boldsymbol{\theta}}$  poikittais- eli *transversaalikomponentiksi*. Kanta muuttuu pisteestä pisteeseen, joten on muistettava, että sekä  $\hat{\mathbf{r}}$  että  $\hat{\boldsymbol{\theta}}$  ovat ajan  $t$  funktioita. Tämän liikkuvan kannan avulla pisteen  $P$  paikka  $\mathbf{r}(t)$  voidaan ilmaista yksinkertaisesti:

$$\mathbf{r} = r\hat{\mathbf{r}},$$

missä  $r = r(t) = |\mathbf{r}(t)|$  on pisteen  $P$  etäisyys origosta ajanhetkellä  $t$ .

Seuraavassa derivoidaan paikan yhtälö puolittain ajan  $t$  suhteen, jotta voimme ilmaista pisteen  $P$  kannan avulla sekä kiihtyvyyden että nopeuden. Liikeradan mukaisesti  $\mathbf{r}$  voidaan muodostaa joko vektorin  $\theta$  tai ajan  $t$  funktiona;  $\theta$  itsessään on ajan  $t$  funktio. Selvyyden takaamiseksi otetaan käyttöön mekaniikassa paljon käytetty merkintä, jonka kaltaista itse Newton käytti analyyseissään. Merkintätavassa piste suureen yläpuolella merkitsee suureen ensimmäistä ja kaksi pistettä toista aikaderivaattaa. Näin ollen voidaan merkitä:

$$\dot{u} = du/dt \quad \text{ja} \quad \ddot{u} = d^2u/dt^2.$$

Aloitetaan kirjaamalla ylös vektoreiden  $\hat{\mathbf{r}}$  ja  $\hat{\boldsymbol{\theta}}$  aikaderivaatat. Ketjusäännön perusteella saadaan, että

$$\dot{\hat{\mathbf{r}}} = \frac{d\hat{\mathbf{r}}}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta} \hat{\boldsymbol{\theta}} \quad \text{ja} \quad \dot{\hat{\boldsymbol{\theta}}} = \frac{d\hat{\boldsymbol{\theta}}}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = -\dot{\theta} \hat{\mathbf{r}}.$$

Nyt pisteen  $P$  nopeus on

$$(2.21) \quad \mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \frac{d}{dt}(r\hat{\mathbf{r}}) = \dot{r}\hat{\mathbf{r}} + r\dot{\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}}.$$



Tästä saadaan nopeuden polaarikomponenteille määritelmät: nopeuden *radiaalikomponentti* on  $\dot{r}$  ja *transversaalikomponentti* on  $r\dot{\theta}$ . Koska  $\hat{r}$  ja  $\hat{\theta}$  ovat keskenään kohtisuoria yksikkövektoreita, pisteen  $P$  vauhti saadaan yhtälöstä:

$$v = |\mathbf{v}| = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2}.$$

Vastaavasti pisteen  $P$  kiihtyvyys voidaan ilmaista radiaali- ja transversaalikomponenttien avulla seuraavasti:

$$\begin{aligned} (2.22) \quad \mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = \ddot{\mathbf{r}} &= \frac{d}{dt}(\dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}) \\ &= \ddot{r}\hat{r} + \dot{r}\dot{\theta}\hat{\theta} + \dot{r}\dot{\theta}\hat{\theta} + r\ddot{\theta}\hat{\theta} - r\dot{\theta}^2\hat{r} \\ &= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{r} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\hat{\theta}. \end{aligned}$$

Kiihtyvyyden polaarikomponentit ovat siten seuraavat:

$$(2.23) \quad \text{Kiihtyvyyden radiaalikomponentti on } \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$$

$$(2.24) \quad \text{Kiihtyvyyden kulmakomponentti on } r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}.$$

## 2.3 Ellipsi

Tässä luvussa käsitellään ellipsin yleistä määritelmää [4, s. 10–11] sekä ellipsiä polaarikoordinaatistossa [1, s. 659–661], jossa johdetaan myös yhteys polaarikoordinaatti ellipsin ja sen karteesisen vastineen välille.

### 2.3.1 Ellipsin määritelmiä

Ellipsille voidaan esittää esimerkiksi pistejoukkomääritelmä, joka nojaa polttopisteistä laskettuihin etäisyyksiin.

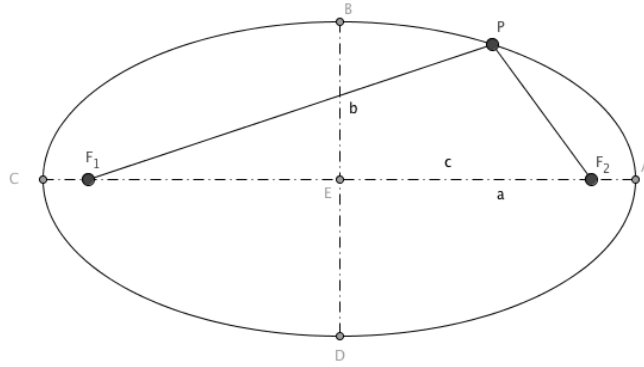
**Määritelmä 2.1.** *Ellipsiksi* sanotaan niiden pisteiden joukkoa, joiden kahdesta kiinteästä pisteestä mitattujen etäisyyksien summa on vakio. (Kuva 2.9.)

Ellipsin yhtälöä kirjoitettaessa on tapana valita  $x$ -akseliksi polttopisteiden kautta kulkeva suora ja  $y$ -akseli janan  $F_1F_2$  keskinormaali. Polttopisteiden koordinaatit ovat tällöin  $F_1 = (-c, 0)$  ja  $F_2 = (c, 0)$ . Ellipsin mielivaltaisen pisteen  $P = (x, y)$  toteuttaa yhtälön

$$|F_1P| + |F_2P| = 2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a.$$

Neliöjuurien poistamiseksi suoritetaan useampi uudelleen järjestely, kaksi neliöön korotusta ja roppakaupalla sievennystä:



Kuva 2.9:  $F_1$  ja  $F_2$  polttopisteet;  $EA$  isoakselin puolikas. Merkitään tätä  $a$ :lla;  $EB$  pikkuakselin puolikas. Merkitään tätä  $b$ :llä;  $EF_2$  polttopisteiden välin puolikas, merkitään tätä  $c$ :llä;  $F_1P$  ja  $F_2P$  polttosäteitä.

$$\begin{aligned}
\left(\sqrt{(x+c)^2+y^2}\right)^2 &= \left(2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2}\right)^2 \\
(x+c)^2+y^2 &= 4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2 \\
(x+c)^2+y^2-(x-c)^2-y^2-4a^2 &= -4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} \\
-(x+c)^2-y^2+(x-c)^2+y^2+4a^2 &= 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} \\
\frac{1}{4a}\left(-(x+c)^2-y^2+(x-c)^2+y^2+4a^2\right) &= \sqrt{(x-c)^2+y^2} \\
\frac{1}{4a}\left(-x^2-2xc-c^2-y^2+x^2-2xc+c^2+y^2+4a^2\right) &= \sqrt{(x-c)^2+y^2} \\
\frac{1}{4a}\left(-4xc+4a^2\right) &= \sqrt{(x-c)^2+y^2} \\
-\frac{xc}{a}+a &= \sqrt{(x-c)^2+y^2} \\
a-\frac{c}{a}x &= \sqrt{(x-c)^2+y^2} \\
\left(a-\frac{c}{a}x\right)^2 &= \left(\sqrt{(x-c)^2+y^2}\right)^2 \\
a^2-2xc+\frac{c^2}{a^2}x^2 &= (x-c)^2+y^2 \\
a^2-2xc+\frac{c^2}{a^2}x^2 &= x^2-2xc+c^2+y^2 \\
a^2+\frac{c^2}{a^2}x^2 &= x^2+c^2+y^2 \\
a^2-c^2 &= -\frac{c^2}{a^2}x^2+x^2+y^2 \\
a^2-c^2 &= \left(1-\frac{c^2}{a^2}\right)x^2+y^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a^2 - c^2 &= \left( \frac{a^2 - c^2}{a^2} \right) x^2 + y^2 \\
\frac{a^2 - c^2}{a^2 - c^2} &= \frac{1}{a^2 - c^2} \left( \frac{a^2 - c^2}{a^2} \right) x^2 + y^2 \frac{1}{a^2 - c^2} \\
1 &= \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2}.
\end{aligned}$$

Neliön korotus ei tuota ekvivalentteja yhtälöitä ja niinpä edellinen yhtälö esittääkin tarkoitettun ellipsin lisäksi hyperbeliä, jolla on samat polttopisteet ja etäisyyksien erotus  $2a$ . Vasta kolmioon  $F_1F_2P$  nojaten voidaan yhtälö rajata koskemaan pelkästään ellipsiä. Kun valitaan  $P$  janan  $F_1F_2$  keskinormaalille, on pisteen  $P$  kohdassa  $(0, b)$ . Nyt pisteen  $P$  etäisyys kannasta  $F_1F_2$  on siis  $b$ . Voidaan muodostaa suorakulmainen kolmio  $OF_2P$ , jonka perusteella  $b^2 = a^2 - c^2$  ja yhtälö saadaan vain ellipsiä koskevaksi yhtälöksi

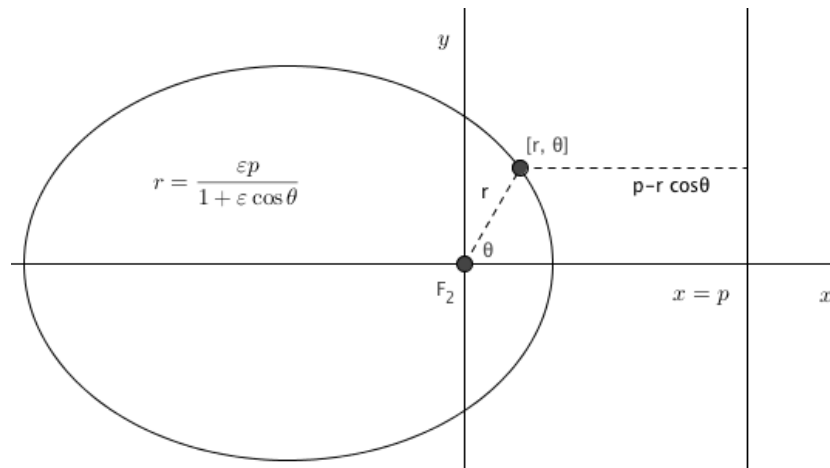
$$(2.25) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

### 2.3.2 Ellipsit polaarikoordinaatistossa

Olkoon tason pisteen polaarikoordinaatti  $[r, \theta]$ . Pisteen etäisyys suorasta  $x = p$  on  $p - r \cos \theta$  (kuva 2.10). Voidaan kirjoittaa  $r = \varepsilon(p - r \cos \theta)$ , josta saadaan

$$(2.26) \quad r = \frac{\ell}{1 + \varepsilon \cos \theta},$$

missä  $\ell = \varepsilon p$  ja  $\varepsilon$  on positiivinen reaaliluku. Kun  $\varepsilon$  on välillä  $0 \leq \varepsilon < 1$ , yhtälö kuvaa ellipsiä, jonka *eksentrisyys* on  $\varepsilon$ . (Funktio kuvaa ympyrää, jos  $\varepsilon = 0$ .) Jotta tämä olisi selkeämmin hahmotettavissa, muunnetaan se karteesisen



Kuva 2.10: Ellipsi, jonka toinen polttopiste on origossa, johtosuora on  $x = p$  ja jonka eksentrisyys on  $\varepsilon$ .

koordinaatistoon:

$$\begin{aligned}
x^2 + y^2 &= r^2 \\
&= \varepsilon^2(p - r \cos \theta)^2 \text{ koska } p - r \cos \theta \\
&= \varepsilon^2(p - x)^2 \\
&= \varepsilon^2(p^2 - 2px + x^2) \\
&= \varepsilon^2 p^2 - 2\varepsilon^2 px + \varepsilon^2 x^2 \\
x^2 + y^2 + \varepsilon^2 2px - \varepsilon^2 x^2 &= \varepsilon^2 p^2 \\
x^2(1 - \varepsilon^2) + y^2 + \varepsilon^2 2px &= \varepsilon^2 p^2.
\end{aligned}$$

Jotta yhtälö muistuttaisi yleistä ellipsin yhtälöä, kerrotaan puolittain luvulla  $(1 - \varepsilon^2)$ . Nyt saadaan

$$\begin{aligned}
(1 - \varepsilon^2)(x^2(1 - \varepsilon^2) + y^2 + 2p\varepsilon^2 x) &= \varepsilon^2 p^2(1 - \varepsilon^2) \\
x^2(1 - \varepsilon^2)^2 + y^2(1 - \varepsilon^2) + 2p\varepsilon^2 x(1 - \varepsilon^2) &= \varepsilon^2 p^2 - \varepsilon^2 p^2 \varepsilon^2 \\
x^2(1 - \varepsilon^2)^2 + y^2(1 - \varepsilon^2) + 2p\varepsilon^2 x(1 - \varepsilon^2) + \varepsilon^2 p^2 \varepsilon^2 &= \varepsilon^2 p^2 \\
\frac{x^2(1 - \varepsilon^2)^2 + y^2(1 - \varepsilon^2) + 2p\varepsilon^2 x(1 - \varepsilon^2) + \varepsilon^2 p^2 \varepsilon^2}{\varepsilon^2 p^2} &= 1 \\
\frac{(1 - \varepsilon^2)^2 \left( x^2 + \frac{2p\varepsilon^2 x}{1 - \varepsilon^2} + \left( \frac{p\varepsilon^2}{1 - \varepsilon^2} \right)^2 \right) + y^2(1 - \varepsilon^2)}{\varepsilon^2 p^2} &= 1 \\
\frac{(1 - \varepsilon^2)^2 \left( x + \frac{p\varepsilon^2}{1 - \varepsilon^2} \right)^2 + y^2(1 - \varepsilon^2)}{\varepsilon^2 p^2} &= 1 \\
\frac{(1 - \varepsilon^2)^2 \left( x + \frac{p\varepsilon^2}{1 - \varepsilon^2} \right)^2}{\varepsilon^2 p^2} + \frac{y^2(1 - \varepsilon^2)}{\varepsilon^2 p^2} &= 1 \\
\frac{\left( x + \frac{p\varepsilon^2}{1 - \varepsilon^2} \right)^2}{\frac{\varepsilon^2 p^2}{(1 - \varepsilon^2)^2}} + \frac{y^2}{\frac{\varepsilon^2 p^2}{1 - \varepsilon^2}} &= 1 \\
\frac{\left( x + \frac{p\varepsilon^2}{1 - \varepsilon^2} \right)^2}{\left( \frac{\varepsilon p}{1 - \varepsilon^2} \right)^2} + \frac{y^2}{\left( \frac{\varepsilon p}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \right)^2} &= 1.
\end{aligned}$$

Sijoitetaan  $\ell = \varepsilon p$ :

$$(2.27) \quad \frac{\left( x + \frac{\ell \varepsilon}{1 - \varepsilon^2} \right)^2}{\left( \frac{\ell}{1 - \varepsilon^2} \right)^2} + \frac{y^2}{\left( \frac{\ell}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \right)^2} = 1.$$

Nyt yhtälö muistuttaa tuttua ellipsin yhtälöä (2.25), missä keskipiste on pisteessä  $C = (-c, 0)$ , jossa nyt siis  $c = \varepsilon \ell / (1 - \varepsilon^2)$  ja puoliakselit  $a$  ja  $b$  ovat määritelmän mukaan

$$(2.28) \quad a = \frac{\ell}{(1 - \varepsilon^2)} \quad (\text{isoakseli})$$

$$(2.29) \quad b = \frac{\ell}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \quad (\text{pikkuakseli})$$

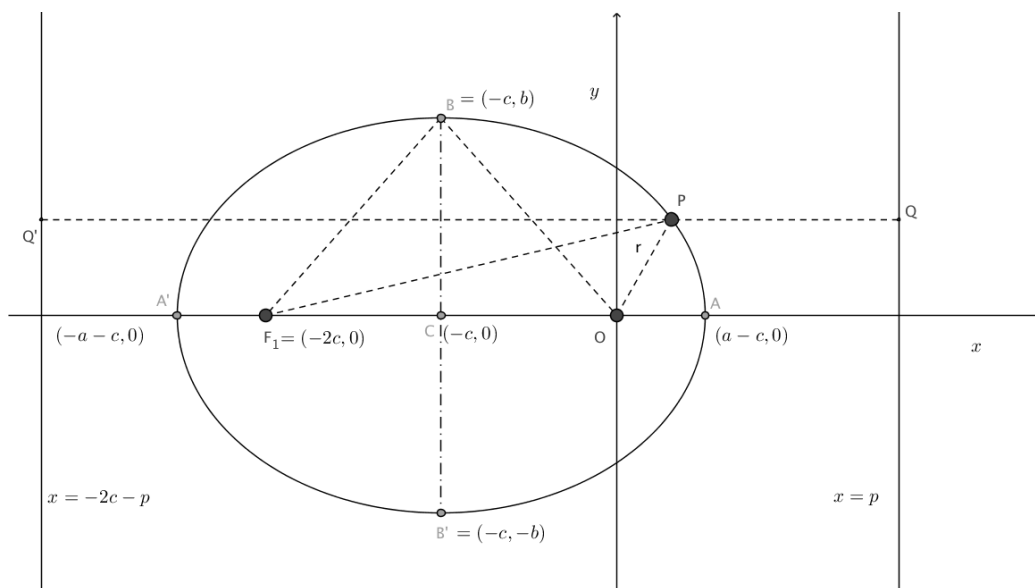
Kartesiset koordinaatit osoittavat, että käyrä on symmetrinen suorien  $x = -c$  sekä  $y = 0$  suhteen, joten toinen polttopiste sijaitsee kohdassa  $F = (-2c, 0)$  ja toisen johtosuoran yhtälö on  $x = -2c - p$ . Isoakselin päätepisteet ovat  $A = (a - c, 0)$  ja  $A' = (-a - c, 0)$ , kun pikkuakselin päätepisteet puolestaan ovat  $B = (-c, b)$  ja  $B' = (-c, -b)$ .

Jos  $P$  on mielivaltainen piste ellipsillä, niin tällöin etäisyys  $OP$  on  $\varepsilon$  kertainen verrattuna etäisyyteen  $PQ$  pisteestä  $P$  oikeaan johtosuoraan. Vastaavasti etäisyys  $F_1P$  on  $\varepsilon$  kertaa etäisyys pisteestä  $Q'$  pisteeseen  $P$  eli pisteen  $P$  etäisyys vasempaan johtosuoraan. Siis polttopisteiden säteiden summa  $OP + F_1P$  on vakio  $\varepsilon Q'Q = \varepsilon(2c + 2p)$  huolimatta siitä, missä kohtaa ellipsiä  $P$  sijaitsee. (Kuva 2.11.) Kun  $P$  on joko  $A$  tai  $B$ , saadaan samalle summalle

$$2a = (a - c) + (a + c) = OA + FA = OB + FB = 2\sqrt{b^2 + c^2},$$

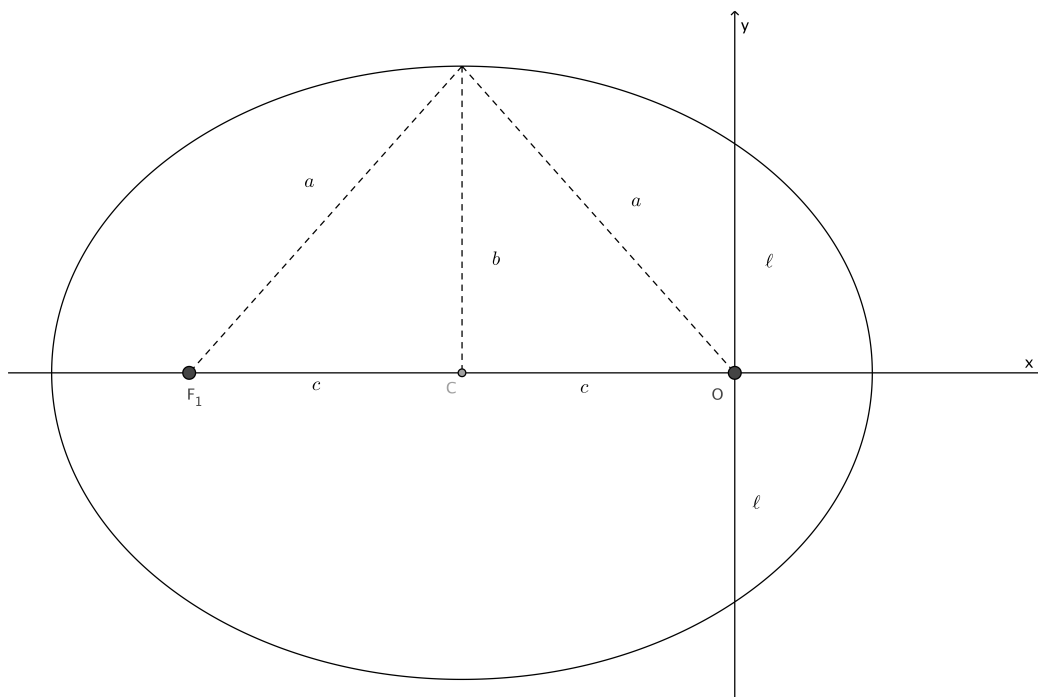
josta seuraa, että

$$a^2 = b^2 + c^2, \quad c = \sqrt{a^2 - b^2} = \frac{\ell\varepsilon}{1 - \varepsilon^2} = \varepsilon a.$$



Kuva 2.11: Ellipsissä polttopisteiden etäisyyksien summa mihin tahansa ellipsin kaaren pisteeseen on vakio;  $\varepsilon$  kertaa johtosuorien etäisyys toisistaan.

Lukua  $\ell$  kutsutaan ellipsin *parametriksi*, eli se on leveys, joka mitataan polttopisteen kautta kohtisuoraan isoakselia kohtaan. (Kuva 2.12.)



Kuva 2.12: Joitakin ellipsin parametrejä.

Huomataan, että polaarifunktio  $r = \ell / (1 + \varepsilon \cos \theta)$  kuvaa ellipsä, vain, jos  $0 < |\varepsilon| < 1$ ; tässä tapauksessa  $\ell / (1 + \varepsilon) \leq r \leq \ell / (1 - \varepsilon)$  kaikissa suunnissa  $\theta$ . Jos  $\varepsilon = 1$ , funktio kuvaa tällöin paraabelia. Jos puolestaan  $\varepsilon > 1$ , käyrä on hyperbeli.

Taivaankappaleiden on mahdollista kulkea hyperbolisilla tai teoriassa jopa parabeloidisilla radoilla, mutta tällöin kappaleet ohittavat auringon vain kerran sen kiertämisen sijaan. Käytännössä paraabeliratoja ei luonnossa havaita, sillä ne edellyttäisivät kappaleen radan energian olevan täsmälleen nolla. Usein monia hyperbolisia ratoja kuitenkin approksimoidaan paraabelisiksi, eksentrisyyden ollessa hyvin lähellä ykköstä asioiden yksinkertaistamiseksi. [2, s.182]

# Luku 3

## Vektoridifferentiaalilaskennan sovelluksia

### 3.1 Coriolisvaikutus

#### 3.1.1 Ympyräliike

Pyörivän kappaleen kulmanopeudella  $\Omega$  tarkoitetaan kappaleen pyörimisliikkeen määrää radiaaneina aikayksikköä kohden. Esimerkiksi majakan lampulla, joka pyörii kolme kierrosta minuutissa, on kulmanopeus  $\Omega = 6\pi$  radiaania minuutissa. Jäykän kappaleen pyörimistä akselinsa ympäri on käytännöllistä ilmaista *kulmanopeusvektorin* avulla pelkän kulmanopeuden sijaan. Tämän kulmanopeusvektorin  $\mathbf{\Omega}$ , suuruus, eli pituus, on sama kuin kulmanopeus  $\Omega$  ja se kulkee pyörimisakselin mukaisesti siten, että ojennettu oikea peukalo osoittaa vektorin  $\mathbf{\Omega}$  suuntaan, sormien kiertyessä pyörimissuunnan mukaisesti pyörimisakselin ympäri.

Jos koordinaatiston origo on sijoitettu pyörimisakselille ja  $\mathbf{R}_0 = \mathbf{R}_0(t)$ <sup>1</sup> on pyörivän kappaleen hetkellisen paikan  $P_0$  paikkavektori ajanhetkellä  $t$ , tällöin piste  $P_0$  kulkee ympyränmuotoista rataa, jonka säde on  $D = |\mathbf{R}_0(t)| \sin \phi$ , missä  $\phi$  on (vakio)kulma vektoreiden  $\mathbf{\Omega}$  ja  $\mathbf{R}_0(t)$  välillä. (Kuva 3.1.)

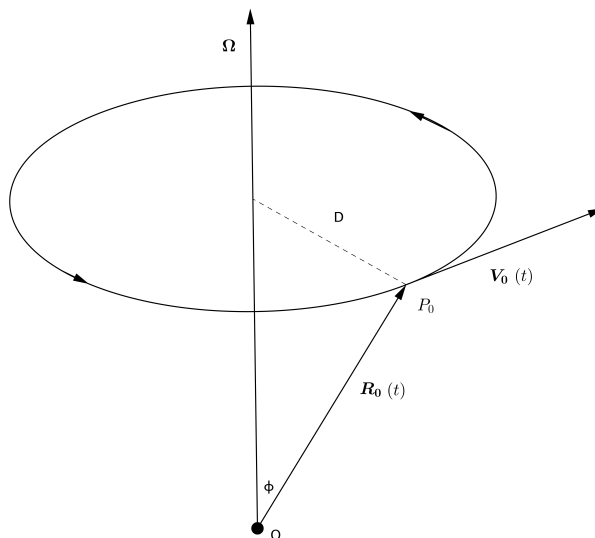
Näin ollen  $P_0$  kulkee matkan  $2\pi D$  ajassa  $2\pi/\Omega$ , ja sen lineaarinen vauhti on

$$(3.1) \quad \frac{\text{matka}}{\text{aika}} = \frac{2\pi D}{2\pi/\Omega} = \Omega D = |\mathbf{\Omega}| |\mathbf{R}_0(t)| \sin \phi = |\mathbf{\Omega} \times \mathbf{R}_0(t)|.$$

Koska kulmanopeusvektori  $\mathbf{\Omega}$  määriteltiin kulkeväksi siten, että  $\mathbf{\Omega} \times \mathbf{R}_0(t)$  osoittaa pisteen  $P_0$  liikkeen suuntaisesti, näin ollen paikan  $P_0$  lineaarinen

---

<sup>1</sup>Tässä luvussa käytetään konventiosta poiketen merkintätapoja  $\mathbf{R}_0$ ,  $\mathbf{V}_0$  sekä  $P_0$ , jotta vältettäisiin sekaannus seuraavassa kappaleessa käytettävien vektorifunktioiden kanssa. Tässä kappaleessa käytetyt vektorifunktiot vastaavat seuraavan aliluvun 3.1.2 origoon kiinnitettyä akselistoa ja siihen liittyviä paikka- ja nopeusvektoreita.



Kuva 3.1: Pyöriminen kulmanopeudella  $\Omega$ .

nopeus ajanhetkellä  $t$  on

$$(3.2) \quad \frac{d\mathbf{R}_0}{dt} = \mathbf{V}_0(t) = \Omega \times \mathbf{R}_0(t).$$

*Huomautus* Newtonin toisen lain mukaan  $\mathbf{F} = \frac{d}{dt}m\mathbf{V}_0 = d\mathbf{p}/dt$ , missä  $\mathbf{p} = m\mathbf{V}_0$  on  $m$  massaisen kappaleen liikemäärä, kun kappale liikkuu jonkin voiman  $\mathbf{F}$  vaikutuspiirissä. Tämä laki kuvaa paremmin pyörivää liikettä muotoiltuna hieman eri tavalla. Jos  $\mathbf{r}(t)$  kuvaa kappaleen paikkaa ajanhetkellä  $t$ , silloin koska  $\mathbf{V}_0 \times \mathbf{V}_0 = \mathbf{0}$ ,

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{R}_0 \times \mathbf{p}) = \frac{d}{dt}(\mathbf{R}_0 \times (m\mathbf{V}_0)) = \mathbf{V}_0 \times (m\mathbf{V}_0) + \mathbf{R}_0 \times \frac{d}{dt}(m\mathbf{V}_0) = \mathbf{R}_0 \times \mathbf{F},$$

jossa  $\mathbf{H} = \mathbf{R}_0 \times \mathbf{p} = \mathbf{R}_0 \times (m\mathbf{V}_0)$  kuvaa kappaleen kulmakiihtyvyyttä origon ympäri sekä  $\mathbf{T} = \mathbf{R}_0 \times \mathbf{F}$  voiman  $\mathbf{F}$  vääntömomenttia origon suhteen. On siis osoitettu, että

$$(3.3) \quad \mathbf{T} = \frac{d\mathbf{H}}{dt};$$

eli ulkoisten voimien vääntömomentti vastaa kappaleen kulmanopeuden muutosta. Tämä on pyörimisliikkeen analogia kaavalle  $\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$ . [1, s. 631–632]

### 3.1.2 Pyörivä kehys ja coriolisvaikutus

Maapallomme on jatkuvassa liikkeessä. Se pyörii niin oman akselinsa ympäri kuin kiertää aurinkoaakin. Globaalit sääilmiöt johtuvat suurelta osin suuriin ilmamassoihin vaikuttavasta pyörimisliikkeestä. Näitä ilmiöitä mallinnettaessa



ei vektorifunktioiden derivoiminen komponenttiensa suhteen ole validi vaihtoehto, sillä nyt kantavektorit itsessään riippuvat derivoitavasta muuttujasta. On siis otettava huomioon se, että vaikka koordinaattisysteemi on kiinnitetty maapalloon, on se pyörimisliikkeessä, koko maa mukaan lukien, suhteessa avaruuteen kiinnitettyihin suuntiin. Nämä pyörivät koordinaattisysteemit sekä niiden vaikutus sääilmiöihin ovat tässä kappaleessa tarkastelun kohteena. Pääasiallisena lähteenä on käytetty Adamsin ja Essexin teoksen *Calculus: A complete course* kappaletta 11.2 soveltuvien osin. [1, s. 632–635]

Jotta voitaisiin ymmärtää koordinaatiston pyörimisen aiheuttamat muutokset nopeuteen ja kiihtyvyyteen, pohditaan ensin kahta karteesta koordinaatistoa. Toinen, kiinnitetty koordinaatisto, jonka kanta on  $\{\mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{K}\}$ , joka ei pyöri maapallon mukana sekä toinen pyörimisliikkeessä oleva kehys, jonka kanta on  $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ , joka on kiinnitetty maanpintaan ja näin ollen pyörii samalla kulmanopeudella maan kanssa, siis  $\frac{\pi}{12}$  radiaania/tunti. Kiinnitetään ensin mainittu akselisto origoon, eli maan keskipisteeseen siten että  $\mathbf{K}$  osoittaa pohjoiseen. Näin ollen maapallon kulmanopeus on  $\Omega = (\pi/12)\mathbf{K}$ . Maapalloon kiinnitetty kehys liikkuu maapallon mukana auringon ympäri, mutta ei pyöri maapallon mukana, ja koska maapallon kiertonopeus auringon ympäri aiheuttaa kulmanopeuden, joka on vain 1/365 osa oman akselinsa ympäri pyörimisen kulmanopeudesta, voidaan auringon ympäri tapahtuvan liikkeen vaikutus jättää huomiotta.

Sijoitetaan liikkuva koordinaatisto maanpinnalla seisovaan tarkkailijan kohdalle pisteeseen  $P_0$  siten, että paikkavektori  $\mathbf{R}_0$  kuvaa pisteen paikkaa kiinnitettyssä koordinaatistossa. Oletetaan, että  $P_0$  sijaitsee paikassa, jossa vektorin  $\mathbf{R}_0$  ja  $\mathbf{K}$ -akselin välinen kulma on  $\phi$  toteuttaen ehdon  $0 < \phi < \pi$  ( jolloin  $P_0$  ei ole pohjois- tai etelänavalla). Oletetaan vielä, että  $\mathbf{i}$  ja  $\mathbf{j}$  osoittavat länteen ja pohjoiseen pisteessä  $P_0$ . Näin ollen,  $\mathbf{k}$  osoittaa suoraan ylöspäin kyseisessä kohdassa. (Kuva 3.2.)

Koska kukin vektori  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  ja  $\mathbf{R}_0$  pyörii maan mukana (kulmanopeudella  $\Omega$ ), saadaan

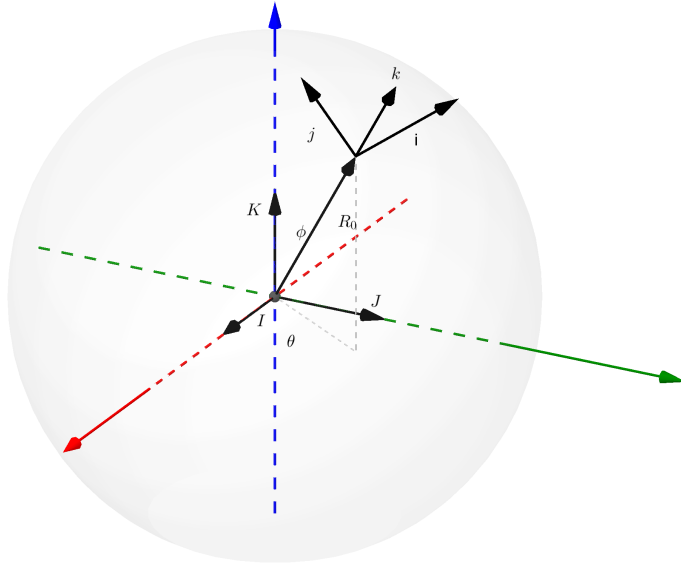
$$\frac{d\mathbf{i}}{dt} = \Omega \times \mathbf{i}, \quad \frac{d\mathbf{j}}{dt} = \Omega \times \mathbf{j}, \quad \frac{d\mathbf{k}}{dt} = \Omega \times \mathbf{k} \quad \text{ja} \quad \frac{d\mathbf{R}_0}{dt} = \Omega \times \mathbf{R}_0.$$

Mikä tahansa vektorifunktio voidaan ilmaista kummalla kannalla tahansa. Olkoot  $\mathbf{R}(t), \mathbf{V}(t)$  ja  $\mathbf{A}(t)$  liikkuvan kappaleen paikka, nopeus ja kiihtyvyys suhteessa kiinnitettyyn koordinaatistoon ja määrätään  $\mathbf{r}(t), \mathbf{v}(t)$  ja  $\mathbf{a}(t)$  samoiksi suureiksi suhteessa pyörivään koordinaatistoon. (Tästä eteenpäin vektorifunktioiden oletetaan olevan ajan funktioita ellei toisin mainita. Lyhyiden vuoksi merkitään siis jatkossa  $\mathbf{R}(t) = \mathbf{R}$ ,  $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}$ , jne.) Näin ollen,

$$(3.4) \quad \mathbf{R} = X\mathbf{I} + Y\mathbf{J} + Z\mathbf{K}, \quad \mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k},$$

$$(3.5) \quad \mathbf{V} = \frac{dX}{dt}\mathbf{I} + \frac{dY}{dt}\mathbf{J} + \frac{dZ}{dt}\mathbf{K}, \quad \mathbf{v} = \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} + \frac{dz}{dt}\mathbf{k},$$

$$(3.6) \quad \mathbf{A} = \frac{d^2X}{dt^2}\mathbf{I} + \frac{d^2Y}{dt^2}\mathbf{J} + \frac{d^2Z}{dt^2}\mathbf{K}, \quad \mathbf{a} = \frac{d^2x}{dt^2}\mathbf{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\mathbf{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\mathbf{k}.$$



Kuva 3.2: Kiinnitetyt ja paikalliset kehykset.

Mitä nämä pyörivän akseliston vektorien arvot ovat suhteessa kiinnitettyyn akselistoon? Koska pyörivän akseliston origo on pisteessä  $\mathbf{R}_0$ , saadaan, että

$$(3.7) \quad \mathbf{R} = \mathbf{R}_0 + \mathbf{r}.$$

Kun tämä derivoidaan ajan suhteen, on muistettava, että  $\mathbf{R}_0$ ,  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$  ja  $\mathbf{k}$  kaikki riippuvat ajasta. Näin ollen

$$(3.8) \quad \begin{aligned} \mathbf{V} &= \frac{d\mathbf{R}}{dt} = \frac{d\mathbf{R}_0}{dt} + \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + x\frac{d\mathbf{i}}{dt} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} + y\frac{d\mathbf{j}}{dt} + \frac{dz}{dt}\mathbf{k} + z\frac{d\mathbf{k}}{dt} \\ &= \mathbf{v} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{R}_0 + x\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{i} + y\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{j} + z\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{k} \\ &= \mathbf{v} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{R}_0 + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r} \\ &= \mathbf{v} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{R}. \end{aligned}$$

Vastaavasti

$$(3.9) \quad \begin{aligned} \mathbf{A} &= \frac{d\mathbf{V}}{dt} = \frac{d}{dt}(\mathbf{v} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{R}) \\ &= \frac{d^2x}{dt^2}\mathbf{i} + \frac{dx}{dt}\frac{d\mathbf{i}}{dt} + \frac{d^2y}{dt^2}\mathbf{j} + \frac{dy}{dt}\frac{d\mathbf{j}}{dt} + \frac{d^2z}{dt^2}\mathbf{k} + \frac{dz}{dt}\frac{d\mathbf{k}}{dt} + \boldsymbol{\Omega} \times \frac{d\mathbf{R}}{dt} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{d^2x}{dt^2} \mathbf{i} + \frac{d^2y}{dt^2} \mathbf{j} + \frac{d^2z}{dt^2} \mathbf{k} + \frac{dx}{dt} \frac{d\mathbf{i}}{dt} + \frac{dy}{dt} \frac{d\mathbf{j}}{dt} + \frac{dz}{dt} \frac{d\mathbf{k}}{dt} + \boldsymbol{\Omega} \times \frac{d\mathbf{R}}{dt} \\
&= \mathbf{a} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V} \\
&= \mathbf{a} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v} + \boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{v} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{R}) \\
&= \mathbf{a} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v} + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{R}) \\
&= \mathbf{a} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v} + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{R}).
\end{aligned}$$

Termiä  $2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}$  kutsutaan *corioliskiihtyvyydeksi* ja termiä  $\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{R})$  *keskeiskiihtyvyydeksi*.

Oletetaan, että kappaleen massa on  $m$  ja siihen vaikuttaa ulkoinen voima  $\mathbf{F}$ . Newtonin toisen lain mukaan

$$\mathbf{F} = m\mathbf{A} = m\mathbf{a} + 2m\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v} + m\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{R})$$

tai vastaavasti

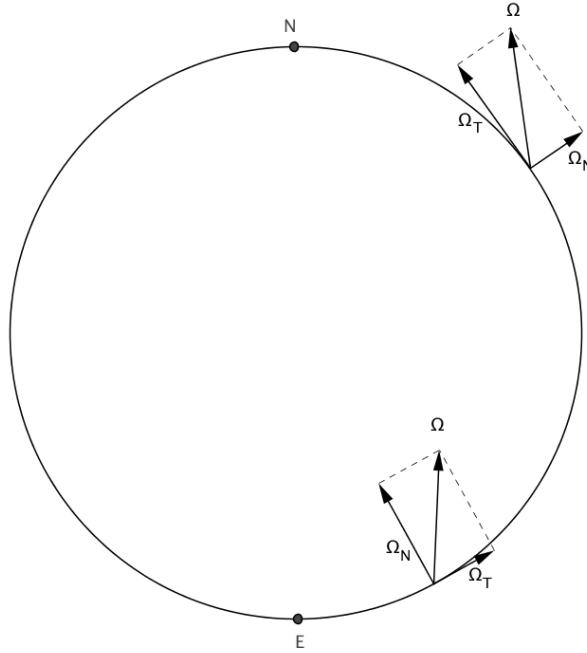
$$(3.10) \quad \mathbf{a} = \frac{\mathbf{F}}{m} - 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v} - \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{R}).$$

Tarkkailijalle, joka sijaitsee pyörivän maan pinnalla, vaikuttaa siltä, että kappaleeseen vaikuttaa voima  $\mathbf{F}$  sekä kaksi muuta voimaa, *coriolisvoima* jonka arvo yhtä massayksikköä kohden on  $-2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}$ , sekä *keskipakovoima*, jonka arvo massayksikköä kohden on  $-\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{R})$ . Keskipako- ja coriolisvoimat eivät ole "oikeita" voimia, jotka vaikuttavat kappaleeseen. Näiden "näennäisvoimien" tarkoitus on kompensoida sitä, että mittaamme kiihtyvyyttä suhteessa koordinaatistoon, jonka olemme kiinnittäneet, sen todellisuudessa pyöriessä ja siis ollen kiihtyvässä liikkeessä.

Kiinnitetään huomiota siihen, että keskipakovoima osoittaa suoraan ulos maan polaariakselistä. Tämä kuvaa kappaleen taipumusta pyrkiä pakenemaan maan vaikutuskentästä ja jatkamaan matkaansa suoraan eteenpäin maan pinnasta, eikä pyöriä pinnan mukana. Tämä voima on suurimmillaan päiväntasaajalla (jossa kulmakiihtyvyys  $\boldsymbol{\Omega}$  on kohtisuorassa paikkavektoria  $\mathbf{R}$  kohtaan). Keskipakovoima on kuitenkin hyvin pieni suuruudeltaan:  $|\boldsymbol{\Omega}|^2 |\mathbf{R}_0| \approx 0,003g$ , jossa  $g$  on normaaliputoamiskiihtyvyys.

Coriolisvoima on luonteeltaan hyvin erilainen keskipakovoimaan nähden. Ennen kaikkea se on nolla silloin kun observoija kokee kappaleen liikumattomana. Voima on kohtisuora molempia, niin nopeutta kuin maan polaariakseliakin kohden ja se voi olla suuruudeltaan jopa  $2|\boldsymbol{\Omega}||\mathbf{v}|$ , ja mikä mielenkiintoisinta se voi olla jopa suurempi kuin keskipakovoima silloin, kun kappaleen vauhti  $|\mathbf{v}|$  on tarpeeksi suuri.

Tuulien reitit myrskynsilman ympärillä ovat oiva esimerkki coriolisvaikutuksesta. Myrskyn reuna toimii matalapaineen alueena, joka imee ilmaa puoleensa. Maapallon pyörimissuunta puolestaan suuntautuu siten, että kulmanopeus  $\boldsymbol{\Omega}$  osoittaa kohti pohjoista ja on yhdensuuntainen maapallon pyörimisakselia vasten. Missä tahansa maapallon pinnan pisteessä  $P$  pystymme



Kuva 3.3: Tangentiaali- ja normaalikiiktyvydet maan pinnalla pohjoisella ja eteläisellä pallonpuoliskolla.

ilmaisemaan kulmanopeuden  $\Omega$  tangentiaalisten (maapallon pintaan nähden) sekä normaalikomponenttien summana (Kuva 3.3)

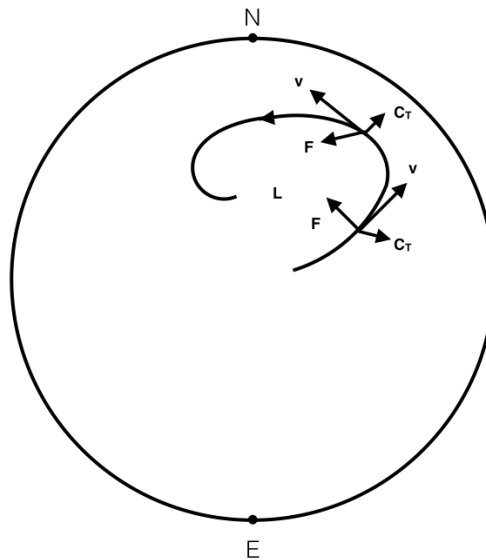
$$(3.11) \quad \Omega(P) = \Omega_T(P) + \Omega_N(P).$$

Jos  $P$  sijaitsee pohjoisella pallonpuoliskolla, kulmanopeuden normaalikomponentti  $\Omega_N(P)$  osoittaa ylöspäin (poispäin maapallon keskipisteestä). Tällaisessa pisteessä coriolisvoima  $\mathbf{C} = -2\Omega(P) \times \mathbf{v}$ , joka vaikuttaa tiettyyn ilmahiukkaseen, liikkuu horisontaalisella nopeudella  $\mathbf{v}$  ja jolla itsellään on horisontaaliset ja normaalikomponentit on muotoa

$$\mathbf{C} = -2\Omega_T \times \mathbf{v} - 2\Omega_N \times \mathbf{v} = \mathbf{C}_N + \mathbf{C}_T.$$

Normaalikomponenttien vaikutus coriolisilmiöön on häviävän pieni, sillä ilma ei ole vapaa vaeltamaan pitkiä matkoja vertikaalisesti. Tästä huolimatta coriolisvoiman tangentiaalinenkomponentti  $\mathbf{C}_T = -2\Omega_N \times \mathbf{v}$ , on  $90^\circ$  nopeusvektorista  $\mathbf{v}$  oikealle (eli myötäpäivään vektorista  $\mathbf{v}$ ). Näin ollen ilmahiukkaset, jotka imeytyvät kohti myrskyn silmää kokevat coriolissiirtymän oikealle ja itse asiassa sinkoutuvat myrskyn silmää kohti vastapäivään kulkeutuvan liikeradan mukaisesti. Vastakkainen vaikutus pätee eteläisellä pallonpuoliskolla, missä normaalikomponentti  $\mathbf{C}_N$  osoittaa alaspäin (maan sisään). Imuvoima  $\mathbf{F}$ , nopeus  $\mathbf{v}$ , sekä coriolisvoiman tangentiaalinen voima kohti maapallon pintaa  $\mathbf{C}_T$  on havainnollistettuna kahdessa eri kohdassa ilmahiukkasen

reitinvarrella, sen pyöriessä matalapainealueen ympäri pohjoisella pallonpuoliskolla kuviossa 3.4. [1, s. 632–635]



Kuva 3.4: Tuuleen vaikuttavat voimat pohjoisella pallonpuoliskolla.

Paikalliset sääilmiöt johtuvat ilmamassojen liikkeestä, siis tuulesta. Yksinkertaisimmillaan ilma liikkuu korkeapaineen alueelta matalapaineen alueelle paine-erosta johtuen. Kun tarkastellaan ilmamassojen liikettä globaalissa mittakaavassa, huomataan, ettei asia olekaan näin yksinkertainen. Ilman liike poikkeaa jonkin verran suorasta korkeapaineesta matalapaineeseen kohdistuvasta liikkeestä. Poikkeama on oikealle pohjoisella pallonpuoliskolla ja vasemmalle eteläisellä pallonpuoliskolla. Lisäksi tämä poikkeama kasvaa kohti napoja mentäessä ja häviää päiväntasaajalla. Kuten edellä havaittiin coriolis-ilmiöllä on vastaava vaikutus kappaleisiin, jotka liikkuvat suhteessa kahteen eri kantaiseen pyörivään koordinaatistoon. Ilmamassoihin vaikuttavia voimia on kaiken kaikkiaan kolme, edellä mainitut paine-erosta johtuva voima sekä sitä sivuttain työntävä coriolisvoima, näiden lisäksi maan pintaa lähellä olevien tuulien reittiin vaikuttaa maan pinnan kitkavoima, joka on kohtisuora paine-erosta aiheutuvaa voimaa kohtaan. Näiden voimien summa määrää tuulen todellisen suunnan. Matalapaineen ympärillä sisäänpäin pyöriviä tuulia kutsutaan sykloneiksi. Näissä ilma pyörii sisään ja ylöspäin, kun puolestaan korkeapaineesta ulos- ja alaspäin pyöriviä tuulia kutsutaan antisykloneiksi. Sykloneille tyypillinen pyöriminen aiheutuu nimenomaan coriolisilmiön ja maan aiheuttaman kitkan yhteisvaikutuksesta. Syklonit pyörivät pohjoisella pallonpuoliskolla vastapäivään, coriolisvoiman vaikuttaessa oikealle, kun samat tuulet pyörivät eteläisellä pallonpuoliskolla myötäpäivään. Tilanne on päinvastainen antisykloneille. Sykloneihin liittyy usein pilvinen ja sateinen sää, kun taas antisykloneiden lämpenevässä ulospäin suuntautumis-

sa ilmamassoissa kondensaatiota, ja näin ollen sadetta ei voi tapahtua ja ne liittyvätkin usein aurinkoisempaan säähän. [6, s. 175, 177]

Yläilmakehän ilman liikkeisiin coriolisilmiöllä on vielä suurempi vaikutus, sillä nyt tuulien suuntaan vaikuttavat pelkästään paine-ero sekä coriolisvoima. Paine-ero kasvaa mitä korkeammalle ilmakehässä noustaan ja näin ollen yläilmakehässä vallitsevatkin hyvin voimakkaat tuulet. Mitä nopeampaa ilman liike on, sen voimakkaampi on myös coriolisvaikutus tuuliin. Suihkuvirtaukset ovat esimerkki näistä nopeista yläilmakehän tuulista. Näistä kaapeista laajoissa kaarissa kaareutuvista tuulista merkittävimmät ovat länteen päin virtaavia. Ilmamassa aiheuttaa myös nopeat länteen päin suuntautuvat suihkuvirtaukset. Ne sijaitsevat yläilmakehässä keskimmaisilla pituuspiireillä molemmilla pallonpuoliskoilla, liikkuen lämpimän ja kylmän ilmamassan rajamailla. Näihin vaadittava energia saadaan lämpimästä trooppisesta ilmasta ja siitä seuraavasta liikkeestä napoja kohti. Pohjoisella pallonpuoliskolla näitä suihkuvirtauksia käytetään hyödyksi länteen suuntaavassa lentoliikenteessä, vastakkaiseen suuntaan lentäessä suihkuvirtauksia pyritään luonnollisesti välttämään. [6, s. 188–190] Näiden suurien ilmamassojen liikkeet ovat avainasemassa paikallisten sääolojen vallitsevaan tilaan. Voitaisiin siis sanoa, että ilman coriolisvaikutuksesta aiheutuvia suunnanmuutoksia tuulissa eläisimme hyvin erinäköisellä maapallolla.

## 3.2 Keplerin lait

1500-luvun loppupuolella ihmismielissä vallitsi myllerrys. Oliko Copernicus sittenkin oikeassa ja kiertävätkö planeetat aurinkoa ympyräradoilla? Uskonnollinen ja filosofinen ilmasto Euroopassa oli yhä vahvasti sitä mieltä, että taivaankappaleet kiersivät maata ympyräradoilla. Tiedettiin, että planeetat, kuten Mars, eivät voineet kulkea maakeskeisellä ympyräradalla, mutta erinäisiä malleja, joissa ne kiersivät ympyräradoilla, jotka kiersivät maakeskeisellä ympyräradalla oli yritetty esittää. Geosentrinen maailmankuva oli kuitenkin muuttumassa ja tämän aallon harjalla matkusti myös tanskalainen astronomi Tycho Brahe (1546–1601). Vuonna 1576 Brahe rakennutti kuninkaansa avokätisesti avustamana yksityiskohtaisen astronomisen observatorion, Venin saarelle, jossa hän aloitti pitkällisen planeettojen paikkojen tarkkailunsa. Reilun kaksi vuosikymmentä Brahe kärsivällisesti tähyili taivaalle ja kirjasi havaintonsa (vieläpä ilman teleskooppia!). Pikkutarkoista muistiinpanoistaan huolimatta ei Brahe pystynyt vetämään mitään lopullisia johtopäätöksiä havainnoistaan. Kunnes vihdoin eräänä päivänä vuonna 1599 nuori Brahen oppilas ja kollega Johannes Kepler (1571–1630) tarttui Brahen massiiviseen datakokoelmaan. Puolentoista vuoden ajan tämä saksalainen matemaatikko-astronomi työskenteli yhdessä Brahen kanssa, aina Brahen kuolemaan asti. Parivaljakko ei tänä aikana kuitenkaan onnistunut saamaan yhtenäistä teoriaa taivaankappaleiden liikkeistä. Kepler ei kuitenkaan hevillä luovuttanut ja

jatkoi yksin tutkimuksiaan, kunnes vihdoinkin miehen sinnikkyys tuotti tulosta. [1, s. 659][5, s. 741]

Brahen havainnot Marsista olivat riittävän tarkkoja, jotta Kepler pystyi oivaltamaan, ettei yksikään yksinkertainen ympyröihin perustuva malli pystyisi jäljentämään Marsin kiertorataa riittävän tarkasti. Kepler kuitenkin pystyi sovittamaan yleisemmän toisen asteen yhtälön, ellipsin, jossa aurinko oli toisessa polttopisteessä, havaintoihin. Tämän menestyksekkään sovituksen rohkaisemana sekä Brahen muiden planeettojen kiertoon perustuvan datan perusteella hän muodosti seuraavat kolme lakia planeettojen liikkeelle:

1. Aurinkoa kiertävän planeetan rata on ellipsi, jonka toisessa polttopisteessä on Aurinko. [2, s. 181]
2. Planeetan paikkavektori pyyhkii yhtä pitkinä aikaväleinä yhtä suuret pinta-alat. [2, s. 185]
3. Planeettojen ratojen isoakselien puolikkaiden kuutiot suhtautuvat toisiinsa kuten kiertoaikojen neliöt. [2, s.186]

Ellipsien valinta kiertoradoiksi oli järkevää sen jälkeen kun valkeni, etteivät ympyrät tulisi toimimaan. Kartioleikkausten ominaisuudet olivat tuohon aikaan hyvin tunnettuja, sillä kreikkalainen matemaatikko Pergan Apollonius oli niitä kehitellyt jo arviolta 200 e.a.a. Tästä huolimatta Keplerin puhtaasti dataan nojaavat päättelyt laeista, teorian sijaan, olivat merkittävä saavutus, etenkin kun Kepler ei pystynyt tarjoamaan selitystä, miksi lait pitivät paikkansa. Mutta minkä Kepler oli havainnut empiirisesti, pystyi Newton myöhemmin selittämään. Lakien teoreettinen ymmärrys saavutettiin vuosia myöhemmin, kun Newton kykeni, eräänä aseenaan kehittelemänsä differentiaali- ja integraalilaskenta, osoittamaan, että Keplerin lait itse asiassa pystyttiin päättelemään hänen liike- ja gravitaatiolaeistaan [1, s. 659] [5, s. 742].

### 3.2.1 Keskeisvoimat ja Keplerin toinen laki

Polaarikoordinaatit ovat käyttökelpoisimpia tilanteissa, joissa analysoidaan liikettä, joka johtuu kohti pistettä (tai siitä pois päin) vaikuttavista keskeisvoimista. Tällöin  $\mathbf{F} = \lambda(\mathbf{r})\hat{\mathbf{r}}$ , missä  $\lambda(\mathbf{r})$  on skalaari, joka riippuu kappaleen paikasta. Jos kappaleen nopeus ja kiihtyvyys ovat  $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$  ja  $\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}}$ , Newtonin toisen lain ( $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ ) mukaan kiihtyvyys  $\mathbf{a}$  ja paikkavektori  $\mathbf{r}$  ovat yhdensuuntaiset. Tästä voidaan päätellä, että

$$(3.12) \quad \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{v}) = \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{v} + \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{v}} = \mathbf{v} \times \mathbf{v} + \mathbf{r} \times \mathbf{a} = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0},$$

ja  $\mathbf{r} \times \mathbf{v} = \mathbf{h}$  on ajan suhteen vakiovektori, joka kertoo kappaleen kulmamomentin massayksikköä kohti origon ympäri. Sen mukaan  $\mathbf{r}$  on aina kohtisuorassa vektoria  $\mathbf{h}$  kohtaan: Niinpä keskeisvoimasta johtuva liike tapahtuu origon kautta kulkevassa tasossa, jolla on normaali  $\mathbf{h}$ . [1, s. 662.]

Valitaan  $z$ -akseli vektorin  $\mathbf{h}$  suuntaan ja merkitään  $|\mathbf{h}| = h$ . Tällöin  $\mathbf{h} = h\mathbf{k}$  ja kappale kulkee  $xy$ -tasossa. Nyt kappaleen paikkaa ja nopeutta kuvaavat vektorit ovat

$$(3.13) \quad \mathbf{r} = r\hat{\mathbf{r}} \quad \text{ja} \quad \mathbf{v} = \dot{r}\hat{\mathbf{r}} + r\dot{\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}}.$$

Koska  $\hat{\mathbf{r}} \times \hat{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{k}$ , saadaan

$$h\mathbf{k} = \mathbf{r} \times \mathbf{v} = r\hat{\mathbf{r}} \times (\dot{r}\hat{\mathbf{r}} + r\dot{\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}}) = r\dot{r}\hat{\mathbf{r}} \times \hat{\mathbf{r}} + r^2\dot{\theta}\hat{\mathbf{r}} \times \hat{\boldsymbol{\theta}} = r^2\dot{\theta}\mathbf{k}.$$

Niinpä mille tahansa keskipakovoimalle altistetulle liikkeelle pätee

$$(3.14) \quad r^2\dot{\theta} = h \quad (\text{liikevakio}).$$

Saatu kaava vastaa Keplerin toista lakia sillä jos  $A(t)$  on pinta-ala, joka rajautuu kiertoratojen ja säteiden  $\theta = \theta_0$  ja  $\theta = \theta(t)$  väliin, niin tällöin

$$A(t) = \frac{1}{2} \int_{\theta_0}^{\theta(t)} r^2 d\theta,$$

josta saadaan

$$(3.15) \quad \frac{dA}{dt} = \frac{dA}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta} = \frac{h}{2}.$$

Pinta-ala pyyhkiytyy siis vakionopeudella  $h/2$  ja yhtä suuret alueet pyyhkiytyvät samassa ajassa. Merkittävää on, että laki ei riipu voiman suuruudesta tai kappaleeseen vaikuttavan voiman suunnasta muuten kuin, että se on keskeistä. Käytännössä pintanopeuden vakioisuus tarkoittaa sitä, että planeetta liikkuu nopeammin ollessaan lähellä Aurinkoa, sen nopeuden ollessa hitaimmillaan aphelissä, eli planeetan ollessaan kauimpana Auringosta. [1, s. 663–664][2, s. 185]

### 3.2.2 Keplerin ensimmäisen ja kolmannen lain johtaminen

Planeetat ja Aurinko kiertävät yhteistä massakeskipistettään. Koska Aurinko on huomattavasti suurempi kuin planeetat, massakeskipiste on likimain Auringon keskipisteessä. Esimerkiksi Maasta ja Auringosta koostuvan systeemin massakeskipiste on Auringon sisällä. Seuraavaa derivointia varten Aurinko ja planeetat samaistetaan pistemäisiksi massoiksi sekä aurinko kiinnitetään sijaitsemaan origossa. Koordinaattiakseleiden suuntia tarkennetaan myöhemmin sen tullessa ajankohtaiseksi.

Newtonin painovoimalain mukaan aurinko aiheuttaa planeettoihin voiman  $\mathbf{F}$ . Planeetan massa  $m$ , ja paikkavektori  $\mathbf{r}$ . Voima  $\mathbf{F}$  on näin ollen

$$(3.16) \quad \mathbf{F} = -\frac{km}{r^2}\hat{\mathbf{r}} = -\frac{km}{r^3}\mathbf{r},$$



missä  $k$  on positiivinen vakio, joka riippuu auringon massasta ( $k = Gm_A$ , missä  $G$  on gravitaatiovakio ja  $m_A$  auringon massa [2, s. 176]) sekä  $\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{r}/r$ .

Kuten aikaisemmin huomattiin, planeettaan vaikuttava voima osoittaa aina origoon, joten  $\mathbf{r} \times \mathbf{v}$  on vakio. Niinpä asetamme  $z$ -akselin siten, että  $\mathbf{r} \times \mathbf{v} = h\mathbf{k}$ , jolloin liike tapahtuu  $xy$ -tasossa ja  $r^2\dot{\theta} = h$ .  $x$  ja  $y$ -akselien suunta ovat vielä määrittelemättä, mutta se suoritetaan piakkoin.  $xy$ -tasossa polaarikoordinaatteja käyttäen voidaan laskea

$$\begin{aligned} m\mathbf{a} &= -\frac{km}{r^2}\hat{\mathbf{r}} \\ \mathbf{a} &= -\frac{k}{r^2}\hat{\mathbf{r}} \\ \frac{d\mathbf{v}}{d\theta} &= \frac{\dot{\mathbf{v}}}{\dot{\theta}} = \frac{-\frac{k}{r^2}\hat{\mathbf{r}}}{\frac{h}{r^2}} = -\frac{k}{h}\hat{\mathbf{r}}. \end{aligned}$$

Koska  $d\hat{\theta}/d\theta = -\hat{\mathbf{r}}$  (yhtälö (2.20)) voidaan edellinen differentiaaliyhtälö integroida puolittain saadaksemme nopeusvektorin  $\mathbf{v}$

$$\mathbf{v} = -\frac{k}{h} \int \hat{\mathbf{r}} d\theta = \frac{k}{h} \int d\hat{\theta} = \frac{k}{h} \hat{\theta} + \mathbf{C},$$

missä  $\mathbf{C}$  on integroinnin vektorivakio. Näin ollen on osoitettu, että

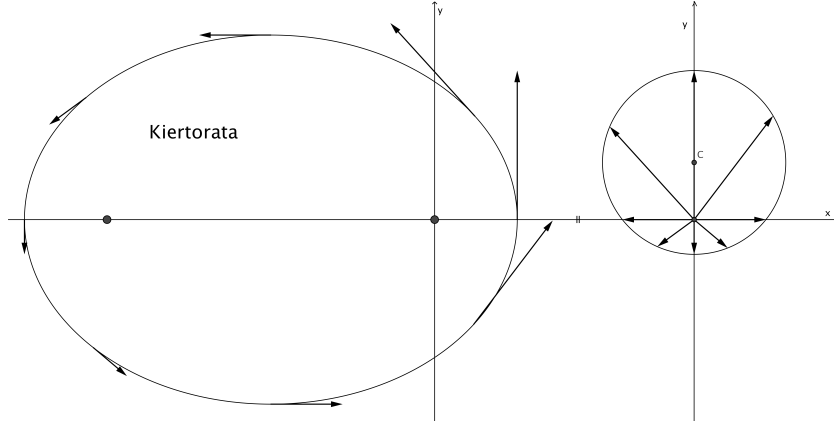
$$|\mathbf{v} - \mathbf{C}| = \frac{k}{h}.$$

Tulos tunnetaan Hamiltonin lauseena, jonka mukaan planeetan liikkuessa kiertoratansa ympäri, sen nopeusvektorit (joiden alkupisteet on sijoitettu origoon) piirtävät ympyrän, jonka keskipisteessä on piste  $\mathbf{C}$ , jolla on paikkavektori  $\mathbf{C}$ . Voidaan siis sanoa, etteivät pohdinnat 1500-luvun loppupuolella kiertoratoihin liittyvistä ympyröistä olleetkaan täysin hakoteillä. Ympyrät eivät tosin liittyneet paikkavektoreihin, vaan nopeusvektoreihin, jotka liikkuvat ympyrän muodossa, kuten kuvasta 3.5 voidaan nähdä. [1, s. 663–664]

Tähän mennessä olemme siis määrittäneet  $z$ -akselin suunnan ja origon paikan. Tämän perusteella tiedämme, missä  $xy$ -taso sijaitsee, mutta emme tiedä mihin suuntaan akselit osoittavat. Valitaan akselit siten, että paikkavektori  $\mathbf{C}$  on  $y$ -akselin suuntainen; sanokaamme  $\mathbf{C} = (\varepsilon k/h)\mathbf{j}$ , missä  $\varepsilon$  on positiivinen vakio. Nyt

$$\mathbf{v} = \frac{k}{h}(\hat{\theta} + \varepsilon\mathbf{j}).$$

Nyt  $x$ -akselin suunta määräytyy sen perusteella, että kaikki kolme vektoria  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$  ja  $\mathbf{k}$  ovat keskenään kohtisuoria ja muodostuvat oikean käden systeemin. Seuraavaksi lasketaan  $\mathbf{r} \times \mathbf{v}$  uudestaan. Koska  $\mathbf{r} = r \cos \theta \mathbf{i} + r \sin \theta \mathbf{j}$  ja lisäksi



Kuva 3.5: Hamiltonin lauseen mukaan planeetan liikkuesssa kiertoratansa ympäri, sen nopeusvektorit määrittävät ympyrän.

$\mathbf{r} = r\hat{\mathbf{r}}$ , saadaan

$$\begin{aligned}
 h\mathbf{k} &= \mathbf{r} \times \mathbf{v} \\
 &= \mathbf{r} \times \frac{k}{h}(\hat{\boldsymbol{\theta}} + \varepsilon\mathbf{j}) \\
 &= \frac{k}{h}(\mathbf{r} \times \hat{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{r} \times \varepsilon\mathbf{j}) \\
 &= \frac{k}{h}(r\hat{\mathbf{r}} \times \hat{\boldsymbol{\theta}} + (r \cos \theta \mathbf{i} + r \sin \theta \mathbf{j}) \times \varepsilon\mathbf{j}) \\
 &= \frac{k}{h}(r\hat{\mathbf{r}} \times \hat{\boldsymbol{\theta}} + r\varepsilon \cos \theta \mathbf{i} \times \mathbf{j} + r\varepsilon \sin \theta \mathbf{j} \times \mathbf{j}) \\
 &= \frac{k}{h}r(1 + \varepsilon \cos \theta)\mathbf{k}.
 \end{aligned}$$

Tästä saadaan, että  $h = \frac{kr}{h}(1 + \varepsilon \cos \theta)$  tai ratkaistuna säteen  $r$  suhteen

$$(3.17) \quad r = \frac{h^2/k}{1 + \varepsilon \cos \theta}.$$

Huomataan, että saatu yhtälö on ellipsin yhtälö polaarikoordinaatistossa (vertaa kaavaa (2.26)). Jos  $\varepsilon < 1$ , niin kiertorata on ellipsi, jonka toinen polttopiste on origossa (Auringossa) ja parametrit saadaan seuraavasti:

$$(3.18) \quad \text{parametri: } l = \frac{h^2}{k}$$

$$(3.19) \quad \text{isoakseli: } a = \frac{h^2}{k(1 - \varepsilon^2)} = \frac{l}{1 - \varepsilon^2}$$

$$(3.20) \quad \text{pikkuakseli: } b = \frac{h^2}{k\sqrt{1 - \varepsilon^2}} = \frac{l}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}}$$

$$(3.21) \quad \text{polttopisteen etäisyys keskipisteestä: } c = \sqrt{a^2 - b^2} = \frac{\varepsilon l}{1 - \varepsilon^2}.$$

[1, s. 664]

On siis johdettu Keplerin ensimmäinen laki. Tehdyt akselien valinnat johtivat siihen, että ellipsin periheli, [2, s. 179] eli kiertoradan piste, joka on lähimpänä Aurinkoa, on positiivisen  $x$ -akselin suuntaan ( $\theta = 0$ ). Maapallo on perihellissä noin tammikuun kolmantena ja aphelionissa eli kauimpana auringosta heinäkuun neljäntenä. Ero Maan ja Auringon välisellä etäisyydellä maapallon ollessa lähimpänä tai kauimpana Auringosta on vain noin kolme prosenttia. [6, s. 54]

Keplerin kolmas laki on mahdollista johtaa kahdesta edellisestä seuraavasti. Koska ellipsin auringosta planeettaan kulkeva säde pyyhkii saman pinta-alan vakionopeudella  $h/2$ , koko kiertoradan sisäänjäävä pinta-ala  $A$  on siis  $A = (h/2)T$ , missä  $T$  on kiertoaika. Ellipsin, jonka puoliakselit ovat  $a$  ja  $b$ , pinta-ala voidaan laskea seuraavasti  $A = \pi ab$ . Koska  $b^2 = la = h^2 a/k$ , saadaan, että

$$T^2 = \frac{4}{h^2} A^2 = \frac{4}{h^2} \pi^2 a^2 b^2 = \frac{4\pi^2}{k} a^3$$

Huomataan, ettei kiertoaajan neliölle  $T^2$  saatu lauseke riipu lainkaan muuttujasta  $h$ , joka on vakio kaikkien planeettojen kiertoradoille, se tosin eroaa planeettakohtaisesti. Vakio  $4\pi^2/k$  ei puolestaan riipu kyseessä olevasta planeetasta. (Vakio  $k$  riippuu auringon massasta ja yleisestä gravitaatiovakios-  
ta). Näin ollen

$$(3.22) \quad T^2 = \frac{4\pi^2}{k} a^3$$

kertoo meille, että planeetan kiertoaajan neliö on verrannollinen pituuden  $2a$  kuutioon, joka on siis kiertoradan isoakseli. Tämä verrannollisuus on yhtäpitävä Keplerin kolmannen lain kanssa. Tarkkaan ottaen se ei kuitenkaan päde edes meidän aurinkokuntamme planeetoille, sillä planeettojen omat massat vaikuttavat myös kiertoaikoihin. Planeettojen omien massojen aiheuttama poikkeama on kuitenkin hyvin pieni. Nykyastronominen data on osoittanut, että  $T^2/a^3$  poikkeaa  $\frac{3}{10}\%$  aurinkokunnan tunnetuilla planeetoilla. Voidaan siis sanoa sen käytännössä pätevän kaikille planeetoille. [1, s. 665] [2, s. 186]

Keplerin kolmatta lakia voidaan käyttää mm. määrittäessämme aurinkokunnan eri kohteiden etäisyyksiä, kunhan kappaleiden kiertoaajat on ensin saatu havainnoitua. Yleisesti avaruuden välimatkoista puhuttaessa yksikkönä käytetään astronomista yksikköä AU:ta, eli auringon etäisyyttä maasta. Vertailut tähän havainnollistavat monia aurinkokunnan mittasuhteita ja etäisyyksiä. Absoluuttisen etäisyyden selvittäminen vaatiikin tämän välimatkan tarkkaa selvittämistä. Perinteisesti tämä on tehty kolmionmittausten avulla havaitsemalla Aurinkoa eri puolilta maapalloa. Näin Auringon parallaksista, eli kahdesta eri paikasta katsomisesta aiheutunut suunnan muutoksen määrästä, pystytään laskemaan Auringon etäisyys. Nykyään mittauksiin käytetään radioteleskooppeja, joiden avulla on selvitetty esimerkiksi Venuksen etäisyys Maasta. [2, s. 45, 186, 203]

# Kirjallisuutta

- [1] Adams, R. & Essex, C. *Calculus: A complete course*. Toronto: Pearson, 2013.
- [2] Karttunen, H. & Donner, K. J. & Kröger, P. & Oja, H. & Poutanen, M. *Tähtitieteen perusteet*, neljäs laitos. Tähtitieteellinen yhdistys Ursa: Helsinki, 2003.
- [3] Mansfield, M. & O'Sullivan, C. *Understanding Physics* John Wiley & sons, Inc.: New York, 2008
- [4] Rosenberg, E. *Geometria* Limes ry: Helsinki 2002
- [5] Sallas, S. & Hille, E. & Etgen, G. *Calculus: one and several variables*, 10th edition. John Wiley & sons, Inc.: New York, 2007
- [6] Strahler, A. & Strahler, A. *Physical Geography: Science and Systems of the Human environment*, 2. edition. John Wiley & sons, Inc.: New York, 2002