TAMPEREEN YLIOPISTO
Pro gradu -tutkielma

Mari Herranen

Ultratulo

Informaatiotieteiden yksikkö
Matematiikka
Marraskuu 2015

Tampereen yliopisto
Informaatiotieteiden yksikkö
HERRANEN, MARI: Ultratulo
Pro gradu -tutkielma, 40 s.
Matematiikka
Marraskuu 2015

Tiivistelmä

Tutkielma käsittelee ultratuloja, joiden avulla voidaan helposti muodostaa malleja. Tutkielmassa tutustutaan ultrafilttereitä ja ultratuloja koskeviin tärkeisiin lauseisiin, kuten ultrafiltterilauseeseen ja Łos'n lauseeseen. Ultrafiltterilause sanoo, että jos joukko E sisältyy joukon I potenssijoukkoon ja joukolla E on äärellisen leikkauksen ominaisuus, niin tällöin on olemassa joukon I ultrafiltteri F, johon E sisältyy. Łos'n lause sanoo, että jos F on joukon I ultrafiltteri, niin kaavalle ϕ ja tulon $\prod A_i/F$ alkioiden jonolle $\boldsymbol{f}/F$ pätee, että ultratulo $\prod \mathfrak{A}_i/F$ ja jono $\boldsymbol{f}/F$ toteuttavat kaavan ϕ jos ja vain jos joukon I alkioiden i joukko, jolla malli $\mathfrak{A}_i$ ja jono $\boldsymbol{f}(i)$ joukon A_i alkioita toteuttavat kaavan ϕ, kuuluu ultrafiltteriin F. Lisäksi esitellään ultratuloille sovelluksena joitakin tuloksia, joiden mukaan tietyt ominaisuudet eivät ole äärellisesti aksiomatisoituvia. Tutkielmassa todistetaan myös kompaktisuuslause ja Gödel-Henkin täydellisyyslause ultratulojen avulla. Tutkielman pääteoksena on J. L. Bellin ja A. B. Slomsonin teos *Models and Ultraproducts*: *an introduction*.

Sisältö

1 Johdanto

Tässä tutkielmassa tutustutaan ultratuloihin. Tutkielman tavoitteena on tehdä tutuksi filtterit, ultrafiltterit, sekä ultratulot ja todistaa näihin liittyviä lauseita. Muun muassa todistetaan Łos'n lause sekä lopuksi todistetaan ultratulojen avulla kompaktisuuslause ja Gödel-Henkin täydellisyyslause.

Tämän tutkielman luvussa 2 esitellään määritelmiä ja lauseita, joita tarvitaan tutkielman varsinaisen aiheen eli ultratulojen perustaksi. Luvun 2 pykälässä 2.1 määritellään muun muassa predikaattilogiikan kieli L^δ, jossa δ on funktio, joka kertoo relaatiosymboleiden paikkaluvut. Pykälässä 2.2 määritellään malli, mallin tulkintajono ja Tarskin totuusrelaatio. Pykälässä 2.3 määritellään predikaattikalkyylin aksioomat ja todistetaan, että jos kaava voidaan todistaa oletuksista, niin on olemassa oletuksien äärellinen osajoukko, josta kaava voidaan myös todistaa. Tätä tulosta kutsutaan predikaattikalkyylin äärellisyyslauseeksi. Pykälässä 2.4 esitellään Boolen algebra, joka on algebrallinen struktuuri, joka toteuttaa tietyt aksioomat. Pykälässä 2.5 määritellään predikaattikalkyylin Lindenbaum algebra. Pykälässä 2.6 käydään läpi predikaattikalkyylin täydellisyyslause, joka sanoo, että jokainen validi lause on todistuva. Pykälässä 2.7 määritellään kielet L^μ ja L^δ_β. Kielessä L^μ on mielivaltainen ääretön joukko relaatiosymboleita, kun taas kielessä L^δ_β on jono vakiosymboleita. Tässä pykälässä määritellään myös minkälainen kielen L^δ_β malli on, ja kuinka totuusrelaatio tällöin eroaa kielen L^δ totuusrelaatiosta.

Tutkielman luvussa 3 esitellään malliteorian peruskäsitteitä ja todistetaan muutamia oleellisia tuloksia. Pykälässä 3.1 määritellään muun muuassa alimallin, isomorfismin ja elementaarisen ekvivalenssin käsitteet. Pykälässä 3.2 määritellään malliketju ja elementaarinen ketju, sekä osoitetaan, että elementaarisen ketjun yhdiste on jokaisen ketjun alkion elementaarinen laajennus. Tätä tulosta kutsutaan elementaarisen ketjun periaatteeksi. Pykälässä 3.3 määritellään, mitä kielen mahtavuus tarkoittaa ja esitetään Löwenheim-Skolem –lause.

Tutkielman luku 4 käsittelee tämän tutkielman varsinaista aihetta eli ultratuloja. Pykälässä 4.1 määritellään filtterin ja ultrafiltterin käsitteet. Tässä pykälässä todistetaan muun muuassa, että jos joukko E sisältyy joukon I potenssijoukkoon ja joukolla E on äärellisen leikkauksen ominaisuus, niin tällöin on olemassa joukon I ultrafiltteri F, johon E sisältyy. Tätä tulosta kutsutaan ultrafiltterilauseeksi, joka on tärkeä lause ultrafilttereiden olemassaolosta. Pykälässä 4.2 esitellään ultratulojen rakenne. Pykälässä 4.3 todistetaan ultratulojen oleellisin lause eli Łos'n lause. Łos'n lauseen jälkeen pykälässä 4.4 esitellään äärellinen aksiomatisointi ja pykälässä 4.5 todistetaan predikaattikalkyylin kompaktisuuslause sekä Gödel-Henkin täydellisyyslause. Lopuksi pykälässä 4.6 osoitetaan, että vahva täydellisyyslause ja valinta-aksiooma ovat yhtäpitäviä.

Lukijalta edellytetään joidenkin joukko-opin ja matemaattisen logiikan perusasioiden tuntemista. Tutkielman pääteoksena on J. L. Bellin ja A. B. Slomsonin kirja Models and Ultraproducts an introduction.

2 Valmistelevia tarkasteluja

2.1 Kieli L^δ

Luvussa 2 esitetään muutamia määritelmiä ja lauseita, joita tarvitaan myöhemmissä luvuissa. Suurin osa todistuksista sivuutetaan tässä luvussa. Tässä pykälässä esitellään predikaattilogiikan kieli sekä kielen kaavat.

Olkoon δ funktio $\delta : \omega \to \omega$. Kielessä L^δ käytetään seuraavia symboleita:

Muuttujasymbolit. Kielen L^δ muuttujat ovat numeroituva joukko

$$\{v_n : n \in \omega\}.$$

Muuttujia voidaan merkitä myös symboleilla $x, y, z, \ldots$, tai symboleilla x_n, $n \in \omega$.

Relaatiosymboli. Kielen L^δ relaatiosymbolit ovat numeroituva joukko

$$\{P_n : n \in \omega\}.$$

Jokaiseen relaatiosymboliin P_n liittyy positiivinen kokonaisluku $\delta(n)$, jota kutsutaan symbolin P_n paikkaluvuksi.

Identiteettisymboli. Kielen L^δ identiteettisymboli on

$$=$$

Loogiset konnektiivit. Kielen L^δ loogiset konnektiivit ovat

$\neg$ (negaatio; lue "ei") ja $\wedge$ (konjunktio; lue "ja")

Eksistenssikvanttori. Kielen L^δ eksistenssikvanttori on

$\exists$ (lue "on olemassa")

Sulkumerkit. Kielen L^δ sulkumerkit ovat

$$(,).$$

Myöhemmin tarkastellaan kieltä, jossa on ääretön määrä relaatiosymboleita. Tässä työssä ei käsitellä funktioita, sillä jokainen funktiosymboli voidaan korvata vastaavalla relaatiosymbolilla (ks. [4, s. 115–117]).

Määritelmä 2.1 (vrt. [1, s. 51]). *Atomikaava* on merkkijono, joka on joko muotoa

$$x = y,$$

missä x ja y ovat muuttujia (eivät välttämättä eri muuttujia) tai muotoa

$$P_n(x_1, \ldots, x_{\delta(n)}),$$

missä $x_1, \ldots, x_{\delta(n)}$ ovat kielen L^δ muuttujia ja $n \in \omega$.

Määritelmä 2.2 (vrt. [1, s. 51]). Kielen L^δ *kaavat* voidaan määritellä rekursiivisesti seuraavalla tavalla:

1. Jokainen atomikaava ϕ on kaava.
2. Jos ϕ ja ψ ovat kaavoja, niin myös $\neg\phi$ ja $(\phi \wedge \psi)$ ovat kaavoja.
3. Jos ϕ on kaava ja x on muuttuja, niin myös $(\exists x)\phi$ on kaava.
4. Merkkijono on kaava jos se voidaan muodostaa soveltamalla sääntöjä 1, 2 ja 3 äärellisen monta kertaa.

Esitellään seuraavaksi muutama uusi looginen symboli, joiden käyttö voi tehdä kaavat helpommin luettaviksi:

$\vee$ (disjunktio; lue "tai"),

$\rightarrow$ (implikaatio; lue "seuraa"),

ja

$\leftrightarrow$ (ekvivalenssi; lue "jos ja vain jos"),

sekä universaalikvanttori:

$\forall$ (lue "kaikilla").

Kaikilla kaavoilla ϕ ja ψ on määritelmät uusille symboleille lyhennysmerkintöinä:

$$\begin{aligned}
(\phi \vee \psi) &=_{def} \neg(\neg\phi \wedge \neg\psi), \\
(\phi \rightarrow \psi) &=_{def} \neg(\phi \wedge \neg\psi), \\
(\phi \leftrightarrow \psi) &=_{def} (\neg(\phi \wedge \neg\psi) \wedge \neg(\psi \wedge \neg\phi)), \\
(\forall x)\phi &=_{def} \neg(\exists x)\neg\phi.
\end{aligned}$$

Määritelmä 2.3 (vrt. [6, s. 8]). Olkoon Var funktio, joka liittää kuhunkin muuttujaan ja relaatiosymboliin siinä esiintyvien muuttujasymbolien joukon. Siis funktio Var määritellään rekursiolla seuraavasti:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(x) &:= \{x\} \\
\mathrm{Var}(R(x_1, \ldots, x_n)) &:= \mathrm{Var}(x_1) \cup \cdots \cup \mathrm{Var}(x_n) \\
\mathrm{Var}(x = y) &= \mathrm{Var}(x) \cup \mathrm{Var}(y).
\end{aligned}$$

Huomautus. Määritelmän mukaan $\mathrm{Var}(R(x_1, \ldots, x_n)) := \{x_1, \ldots, x_n\}$.

Määritelmä 2.4 (vrt. [6, s. 9])**.** Välittömästi kvanttoria seuraavien sulkujen rajaamaa kaavaa kutsutaan kvanttorin *vaikutusalaksi*. Muuttujan x sanotaan olevan *sidottu* kaavassa, jos se kuuluu kvanttorin vaikutusalaan. Vastaavasti muuttuja x on *vapaa*, jos se ei kuulu kvanttorin vaikutusalaan.

Määritelmä 2.5 (vrt. [6, s. 8])**.** Kaavan ϕ vapaiden muuttujien joukko $\mathrm{Free}(\phi)$ määritellään rekursiolla:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Free}(x = y) &:= \mathrm{Var}(x = y) \\
\mathrm{Free}(R(x_1, \ldots, x_n)) &:= \mathrm{Var}(R(x_1, \ldots, x_n)) \\
\mathrm{Free}(\neg\phi) &:= \mathrm{Free}(\phi) \\
\mathrm{Free}((\phi \wedge \psi)) &:= \mathrm{Free}(\phi) \cup \mathrm{Free}(\psi) \\
\mathrm{Free}((\exists x_i)\phi) &:= \mathrm{Free}(\phi) \setminus \{x_i\}.
\end{aligned}$$

Kaava ϕ on *lause*, jos $\mathrm{Free}(\phi) = \emptyset$.

Esimerkki 2.1. Olkoon ϕ kaava $(\exists x)(R(x, y) \wedge (\neg x = y \vee x = y))$.
Tällöin $\mathrm{Free}(\phi) := \{y\}$.

Esimerkki 2.2 (vrt. [6, s. 9])**.** Olkoon ϕ kaava
$(\exists x)(R(x, y) \rightarrow (\forall y)(\neg R(x, y) \wedge y = z)$. Tällöin $\mathrm{Free}(\phi) := \{y, z\}$.

Esimerkki 2.3 (vrt. [6, s. 9])**.** Olkoon ϕ kaava $(\forall y)(\exists x)(R(x, y) \wedge (\neg x = y \vee x = y))$.
Tällöin $\mathrm{Free}(\phi) := \emptyset$. Siis ϕ on lause.

2.2 Mallit

Tässä pykälässä määritellään malli, tulkintajono ja Tarskin totuusrelaatio.

Määritelmä 2.6 (vrt. [1, s. 5])**.** *Malli* on pari

$$\mathfrak{A} = \langle A, \{R_n : n \in \omega\}\rangle,$$

missä A on epätyhjä joukko ja R_n $(n \in \omega)$ on $\delta(n)$-paikkainen relaatio.

Olkoon β ordinaaliluku. β-jonolla tarkoitetaan kuvausta eli funktiota, jonka määrittelyjoukko on β. Jos maalijoukko on A, niin $\boldsymbol{\alpha}$ on kuvaus $\boldsymbol{\alpha} : \beta \rightarrow A$. Merkitään jatkossa usein $\boldsymbol{\alpha}(n) = \alpha_n$ jokaisella $n \in \beta$, tällöin
$\boldsymbol{\alpha} = \langle \alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, \ldots \rangle$. Edelleen merkitään $A^\beta = \{\boldsymbol{\alpha} \mid \boldsymbol{\alpha} : \beta \rightarrow A\}$. Tulkintajonot ovat ω-jonoja.

Määritelmä 2.7 (vrt. [6, s. 10])**.** Mallin $\mathfrak{A}$ *tulkintajono* $\boldsymbol{\alpha} \in A^\omega$ on ääretön jono
$\boldsymbol{\alpha} = \langle \alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, \ldots \rangle$.

Määritelmä 2.8 (vrt. [6, s. 10–11]). Olkoon $\boldsymbol{\alpha} = \langle \alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, \ldots \rangle$. Jos $\boldsymbol{\alpha}$ on mallin $\mathfrak{A}$ tulkintajono, $n \in \omega$ ja $a \in A$, niin merkitään symbolilla $\boldsymbol{\alpha}(n/a)$ tulkintajonoa, joka saadaan tulkintajonosta $\boldsymbol{\alpha}$ muuttamalla muuttujan α_n arvoksi a:

$$\boldsymbol{\alpha}(n/a) = \langle \alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}, a, \alpha_{n+1}, \ldots \rangle.$$

Seuraavaksi määritellään Tarskin totuusrelaatio, joka määrittelee, milloin malli ja sen tulkintajono toteuttavat kaavan.

Määritelmä 2.9 (vrt. [1, s. 56]). Määritellään Tarskin totuusrelaatio $\models$ mallien $\mathfrak{A}$, tulkintajonojen $\boldsymbol{\alpha}$ ja kaavojen ϕ välille rekursiolla:

(2.1) $\quad \mathfrak{A} \models_\alpha v_m = v_n \quad \text{joss} \quad \alpha_m = \alpha_n$

(2.2) $\quad \mathfrak{A} \models_\alpha P_n(v_{i_1}, \ldots, v_{i_{\delta(n)}}) \quad \text{joss} \quad \langle \alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_{\delta(n)}} \rangle \in R_n$

(2.3) $\quad \mathfrak{A} \models_\alpha \neg\phi \quad \text{joss} \quad \mathfrak{A} \not\models_\alpha \phi$

(2.4) $\quad \mathfrak{A} \models_\alpha (\phi \wedge \psi) \quad \text{joss} \quad \mathfrak{A} \models_\alpha \phi \text{ ja } \mathfrak{A} \models_\alpha \psi$

(2.5) $\quad \mathfrak{A} \models_\alpha (\exists v_n)\psi \quad \text{joss} \quad \text{jollain } a \in A \text{ pätee } \mathfrak{A} \models_{\alpha(n/a)} \phi.$

Tässä merkintä $\mathfrak{A} \not\models_\alpha \phi$ tarkoittaa, ettei malli $\mathfrak{A}$ ja tulkintajono $\boldsymbol{\alpha}$ toteuta kaavaa ϕ.

Kun $\mathrm{Free}(\phi) \in \{x_0, \ldots, x_n\}$, on usein tapana merkitä $\mathfrak{A} \models \phi[a_0, \ldots, a_n]$ merkinnän $\mathfrak{A} \models_\alpha \phi$ sijasta, missä $\boldsymbol{\alpha}$ on sellainen tulkintajono, jolla $\alpha_{j_i} = a_i$, kun $x_i = v_{j_i}$.

Jos σ on lause, niin siinä ei esiinny vapaita muuttujia, joten sen totuus ei riipu tulkintajonosta $\boldsymbol{\alpha}$. Siis jos $\mathfrak{A} \models_\alpha \sigma$ jollakin tulkintajonolla $\boldsymbol{\alpha}$, niin $\mathfrak{A} \models_\alpha \sigma$ kaikilla tulkintajonoilla $\boldsymbol{\alpha}$. Tällöin merkitään $\mathfrak{A} \models \sigma$ ja sanotaan, että ϕ on *tosi* mallissa $\mathfrak{A}$, ja $\mathfrak{A}$ on lauseen ϕ *malli*. [vrt. [1, s. 56]].

Määritelmä 2.10 (vrt. [6, s. 13]). Kaava ϕ on *validi*, $\models \phi$, jos jokaisella mallilla $\mathfrak{A}$ ja tulkintajonolla $\boldsymbol{\alpha}$ pätee $\mathfrak{A} \models_\alpha \phi$.

Määritelmä 2.11 (vrt. [6, s. 13]). Kaava ϕ on *toteutuva*, jos on olemassa malli $\mathfrak{A}$ ja tulkintajono $\boldsymbol{\alpha}$ siten, että $\mathfrak{A} \models_\alpha \phi$.

Määritelmä 2.12 (vrt. [1, s. 56]). Jos Σ on joukko kielen L^δ lauseita, niin $\mathfrak{A}$ on joukon Σ malli, jos $\mathfrak{A}$ on joukon Σ jokaisen lauseen malli. Tällöin merkitään $\mathfrak{A} \models \Sigma$.

Esimerkki 2.4. Jos ϕ on kaava $\psi \vee \neg\psi$, niin tällöin kaava ϕ on tosi kaikissa malleissa, eli $\models \phi$.

2.3 Predikaattikalkyylin aksioomat

Aksioomia eli oletuksia käytetään päättelyssä muiden tulosten todistamiseen. Nyt tarkastellaan Hilbert-tyylistä aksiomatisointia predikaattilogiikalle.

Määritelmä 2.13 (vrt. [1, s. 58]). Jos muuttuja x esiintyy vapaana kaavassa ϕ, niin kaavaa ϕ merkitään $\phi(x)$. Vastaavasti jos muuttujat $x_1, \ldots, x_n$ esiintyvät vapaana kaavassa ϕ, niin kaavaa ϕ merkitään $\phi(x_1, \ldots, x_n)$.

Merkintä $\phi(x/y)$ tarkoittaa, että ensin kaikki muuttujan y sidotut esiintymät kaavassa ϕ korvataan sellaisella muuttujalla v_i, joka ei esiinny kaavassa, ja sen jälkeen korvataan kaavan ϕ muuttujan x vapaat esiintymät muuttujalla y.

Kiinnitetään predikaattikalkyylissä seuraavanlainen aksiomatisointi, joka jakautuu kolmeen ryhmään. Ensimmäisessä ryhmässä ovat seuraavat konnektiiviaksioomat:

$$\begin{array}{ll}
\text{PC1.} & \phi \to (\psi \to \phi), \\
\text{PC2.} & [\phi \to (\psi \to \chi)] \to [(\phi \to \psi) \to (\phi \to \chi)], \\
\text{PC3.} & (\neg\phi \to \neg\psi) \to (\psi \to \phi), \\
\text{PC4a.} & (\phi \wedge \psi) \to \phi, \\
\text{PC4b.} & (\phi \wedge \psi) \to \psi, \\
\text{PC5.} & (\chi \to \phi) \to [(\chi \to \psi) \to (\chi \to [\phi \wedge \psi])], \\
\text{PC6a.} & \phi \to (\phi \vee \psi), \\
\text{PC6b.} & \psi \to (\phi \vee \psi), \\
\text{PC7.} & (\phi \to \chi) \to [(\psi \to \chi) \to ([\phi \vee \psi] \to \chi)],
\end{array}$$

missä ϕ, ψ ja χ ovat L^δ-kaavoja.

Toisessa ryhmässä on kaksi kvanttoriaksioomaa:

$$\begin{array}{ll}
\text{PC8.} & (\forall x)\phi \to \phi(x/y), \\
\text{PC9.} & (\forall x)(\phi \to \psi) \to (\phi \to (\forall x)\psi),
\end{array}$$

missä x, y ovat kielen L^δ muuttujia, ψ on L^δ-kaava ja aksioomassa (PC8) ϕ on L^δ-kaava, jossa y on vapaa muuttuja, jolla muuttuja x korvataan, ja aksioomassa (PC9) ϕ on L^δ-kaava, joka ei sisällä muuttujan x vapaita esiintymiä.

Kolmannessa ryhmässä on kaksi identiteettiaksioomaa:

$$\begin{array}{ll}
\text{PC10.} & (\forall x)(x = x), \\
\text{PC11.} & (\forall x)(\forall y)(x = y \to [\phi \to \phi']),
\end{array}$$

missä x on muuttuja, ϕ on L^δ-kaava, jossa y on vapaa muuttuja, jolla muuttuja x korvataan, ja ϕ' on saatu korvaamalla osa, mutta ei välttämättä kaikkia, muuttujan x vapaista esiintymistä kaavassa ϕ muuttujalla y.

Predikaattikalkyylissä (PC) on seuraavat kaksi päättelysääntöä:

Modus ponens: Kaava ψ seuraa kaavoista ϕ ja $\phi \to \psi$.

Yleistys: Kaava $(\forall x)\phi$ seuraa kaavasta ϕ, missä x on muuttuja.

Määritelmä 2.14 (vrt. [1, s. 59])**.** Olkoon Σ kaavajoukko kielessä L^δ. Kaavan ϕ sanotaan olevan *todistuva oletuksista* Σ, jos on olemassa äärellinen jono kaavoja, $\phi_1, \ldots, \phi_n$ siten, että

1. $\phi = \phi_n$, ja

2. jokaisella $i \leq n$ pätee (ainakin) yksi seuraavista:
   (a) ϕ_i on aksiooma
   (b) ϕ_i on yksi joukon Σ kaavoista
   (c) on olemassa $j, k < i$ ja ϕ_i seuraa kaavoista ϕ_j ja ϕ_k säännön *modus ponens* nojalla, tai on olemassa $j < i$ ja ϕ_i seuraa kaavasta ϕ_j säännön *yleistys* nojalla.

Jos kaava ϕ voidaan todistaa oletuksista Σ, kirjoitetaan $\Sigma \vdash \phi$ ja sanotaan, että kaava ϕ *on pääteltävissä* joukosta Σ.

Määritelmä 2.15 (vrt. [1, s. 58])**.** Kaava ϕ on *todistuva*, jos sillä on olemassa todistus tyhjästä joukosta. Jos ϕ on todistuva kaava, kirjoitetaan $\vdash \phi$.

Määritelmä 2.16 (vrt. [1, s. 59])**.** *Kvanttoriton kaava* on kaava, joka ei sisällä kvanttoreita.

Määritelmä 2.17 (vrt. [1, s. 59])**.** Kaavan ϕ *sulkeuma* on kaava, joka saadaan kaavasta ϕ lisäämällä sen alkuun universaalikvanttori $(\forall x)$ jokaista vapaata muuttujaa x kohti:

> jos $\mathrm{Free}(\phi) = \{x_1, \ldots, x_n\}$, missä $x_1, \ldots, x_n$ ovat eri muuttujia, niin kaavan ϕ sulkeuma on
> $$(\forall x_1) \ldots (\forall x_n)\phi.$$

Apulause 2.1. Kaava on todistuva jos ja vain jos sen sulkeuma on todistuva.

Todistus (vrt. [1, s. 59]). Oletetaan ensin, että kaavan ϕ sulkeuma on todistuva. Eli kaava $(\forall x_1) \ldots (\forall x_n)\phi$ on todistuva. Tällöin käyttämällä äärellisen monta kertaa määritelmää 2.14 ja aksioomaa PC8 tapauksessa $x_i = y_i$ nähdään, että $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ on todistuva. Eli siis kaava ϕ on todistuva.

Kääntäen, oletetaan, että kaava ϕ on todistuva. Tällöin käyttämällä äärellisen monta kertaa määritelmää 2.14 ja sääntöä *yleistys* kaavaan ϕ nähdään, että $(\forall x_1) \ldots (\forall x_n)\phi$ on kaavan ϕ seuraus. Siis myös kaavan ϕ sulkeuma on todistuva. □

Todistetaan seuraavaksi, että jos kaava ϕ voidaan todistaa oletuksista Σ, niin tällöin kaava ϕ voidaan todistaa myös oletuksista Σ_0, missä Σ_0 on joukon Σ äärellinen osajoukko.

Lause 2.2. *(Predikaattikalkyylin äärellisyyslause) Jos $\Sigma \vdash \phi$, niin on olemassa joukon Σ äärellinen osajoukko Σ_0 siten, että $\Sigma_0 \vdash \phi$.*

Todistus (vrt. [1, s. 60]). Olkoon jono $\phi_1, \ldots, \phi_n$ kaavan ϕ todistus oletuksista Σ. Olkoon Σ_0 joukon Σ niiden kaavojen joukko, jotka esiintyvät todistuksessa. Joukko Σ_0 on äärellinen ja $\phi_1, \ldots, \phi_n$ on kaavan ϕ todistus oletuksista Σ_0. □

Olkoon Val kaikkien validien lauseiden joukko kielessä L^δ ja olkoon $Prov$ kaikkien todistuvien lauseiden joukko kielessä L^δ. Tutkitaan seuraavaksi näiden kahden joukon suhdetta toisiinsa.

Lause 2.3. *Jokainen todistuva lause on validi.*

Todistus (ks. [1, s. 60]). Todistuksen ideana on, että jokainen aksiooma on validi ja päättelysäännöt modus ponens ja yleistys säilyttävät validisuuden. □

Edellisestä lauseesta nähdään, että $Prov \subseteq Val$.

Määritelmä 2.18 (vrt. [6, s. 30])**.** Kaavajoukko Σ on *konsistentti* eli *ristiriidaton*, jos ei olemassa kaavaa ϕ siten, että kaavat ϕ ja $\neg\phi$ ovat pääteltävissä joukosta Σ.

Seuraus 2.4. (Predikaattikalkyylin konsistenssi) Tyhjä kaavajoukko on konsistentti.

Todistus (ks. [1, s. 60]). Jos kaavat ϕ ja $\neg\phi$ ovat todistuvia ilman oletuksia, niin silloin lauseen 2.3 nojalla molemmat kaavat ϕ ja $\neg\phi$ ovat valideja, mikä on mahdotonta. □

2.4 Boolen algebra

Tässä pykälässä määritellään Boolen algebra.

Määritelmä 2.19 (vrt. [1, s. 7])**.** *Osittain järjestetty joukko* on järjestetty pari $\langle X, \leq \rangle$, missä X on epätyhjä joukko ja $\leq$ on joukon X kaksipaikkainen relaatio, jolla on seuraavat ominaisuudet:

1. $x \leq x$ jokaisella $x \in X$,
2. jos $x \leq y$ ja $y \leq x$, niin $x = y$ jokaisella $x, y \in X$,
3. jos $x \leq y$ ja $y \leq z$, niin $x \leq z$ jokaisella $x, y, z \in X$.

Määritellään seuraavaksi supremumin ja infimumin käsitteet.

Määritelmä 2.20 (vrt. [1, s. 8])**.** Olkoon X osittain järjestetty joukko. Alkio $x \in X$ on joukon $A \subseteq X$ pienin yläraja eli *supremum*, jos alkio x on joukon A yläraja joukossa X ja se on pienempi kuin muut joukon A ylärajat joukossa X. Täten alkio $x \in X$ on joukon $A \subseteq X$ supremum jos ja vain jos jokaisella $a \in A$ pätee $a \leq x$ ja millä tahansa muulla joukon A ylärajalla y joukossa X pätee $x \leq y$. Joukon A supremumia merkitään $\sup(A)$.

Määritelmä 2.21 (vrt. [1, s. 8])**.** Olkoon X osittain järjestetty joukko. Alkio $x \in X$ on joukon $A \subseteq X$ suurin alaraja eli *infimum*, jos alkio x on joukon A alaraja ja se on suurempi kuin muut joukon A alarajat joukossa X. Täten alkio $x \in X$ on joukon $A \subseteq X$ infimum jos ja vain jos jokaisella $a \in A$ pätee $x \leq a$ ja millä tahansa muulla joukon A alarajalla y joukossa X pätee $y \leq x$. Joukon A infimumia merkitään $\inf(A)$.

Määritelmä 2.22 (vrt. [1, s. 11]). *Boolen algebra* $\mathscr{B}$ on algebrallinen struktuuri

$$\mathscr{B} = \langle B, \vee, \wedge, ^*, 0, 1 \rangle,$$

missä $\vee$ ja $\wedge$ ovat kaksipaikkaisia funktiosymboleita, * on yksipaikkainen funktiosymboli ja 0 ja 1 ovat vakioita, ja joka toteuttaa seuraavat aksioomat
(vrt. [3, s. 38–39]): kaikilla $x, y, z \in B$ pätee

Liitäntälait:

$x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z,$ $\quad x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z.$

Vaihdantalait:

$x \vee y = y \vee x,$ $\quad x \wedge y = y \wedge x.$

Idempotenssilait:

$x \vee x = x,$ $\quad x \wedge x = x.$

Osittelulait:

$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z),$ $\quad x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z).$

Absorptiolait:

$x \vee (x \wedge y) = x,$ $\quad x \wedge (x \vee y) = x.$

De Morgan -lait:

$(x \vee y)^* = x^* \wedge y^*,$ $\quad (x \wedge y)^* = x^* \vee y^*.$

Vakioiden 0 ja 1 lait:

$x \vee 0 = x,$ $\quad x \wedge 0 = 0,$

$x \vee 1 = 1,$ $\quad x \wedge 1 = x,$

$0 \neq 1,$

$x \vee x^* = 1,$ $\quad x \wedge x^* = 0.$

Komplementin komplementin laki:

$(x^*)^* = x.$

Boolen algebra voidaan määritellä joukon B osittaisena järjestyksenä $\leq$ siten, että $x \leq y$ jos ja vain jos $x \vee y = y$. Järjestyksessä $\leq$ voidaan määritellä laskutoimitukset $\vee, \wedge, ^*$ ja alkiot $0, 1$. Relaatiolla $\leq$ on pienin alkio 0 ja suurin alkio 1, ja millä tahansa kahdella joukon B alkiolla x ja y on pienin yläraja $\sup(B) = x \vee y$ ja suurin alaraja $\inf(B) = x \wedge y$. Jokaisella alkiolla x on yksikäsitteinen vasta-alkio y siten, että alkion ja vasta-alkion $\sup(x, y) = 1$ ja $\inf(x, y) = 0$.

2.5 Lindenbaum algebra predikaattikalkyylissä

Seuraavaksi esitellään predikaattikalkyylin Lindenbaum algebra.

Määritelmä 2.23 (vrt. [1, s. 61]). Olkoon F kaikkien kielen L^δ kaavojen joukko. Joukon F relaatio $\equiv$ määritellään seuraavasti:

$$\phi \equiv \psi \quad \text{joss} \quad \vdash \phi \to \psi \quad \text{ja} \quad \vdash \psi \to \phi.$$

Relaatio $\equiv$ on ekvivalenssirelaatio joukossa F. Jos ϕ on kaava, niin $|\phi|$ on relaation $\equiv$ ekvivalenssiluokka, johon kaava ϕ kuuluu. Joukon F kaavojen ekvivalenssiluokkien joukkoa merkitään $F/\equiv$.

Määritelmä 2.24 (vrt. [1, s. 61])**.** Joukon $F/\equiv$ relaatio $\leq$ määritellään seuraavasti:

$$|\phi| \leq |\psi| \quad \text{joss} \quad \vdash \phi \rightarrow \psi.$$

Osoitetaan seuraavaksi, että relaatio $\leq$ on hyvinmääritelty.

Apulause 2.5. Jos $|\phi| \leq |\psi|$, $\phi \equiv \phi'$ ja $\psi \equiv \psi'$, niin $|\phi'| \leq |\psi'|$.

Todistus. Oletetaan, että $\phi \equiv \phi'$, $\psi \equiv \psi'$ ja $\vdash \phi \rightarrow \psi$. Tällöin määritelmän 2.23 nojalla saadaan $\vdash \phi \rightarrow \phi'$ ja $\vdash \phi' \rightarrow \phi$, sekä $\vdash \psi \rightarrow \psi'$ ja $\vdash \psi' \rightarrow \psi$. Siis $\vdash \phi' \rightarrow \psi'$, koska $\vdash \phi' \rightarrow \phi$, $\vdash \phi \rightarrow \psi$ ja $\vdash \psi \rightarrow \psi'$. Saadaan siis, että $|\phi'| \leq |\psi'|$. □

Tällöin $\langle F/\equiv, \leq\rangle$ on Boolen algebra predikaattikalkyylin Lindenbaum algebra.

2.6 Predikaattikalkyylin täydellisyys

Luvussa 2.3 todettiin, että $Prov \subseteq Val$. Seuraavan lauseen mukaan predikaattikalkyyli on täydellinen eli myös päinvastainen $Val \subseteq Prov$ pätee.

Lause 2.6. *(Predikaattikalkyylin täydellisyyslause) Jokainen validi lause on todistuva.*

Todistus (Ks. [1, s. 62-63]). Ideana on, että jos σ ei ole todistuva L^δ-lause, niin on olemassa malli, missä lause σ ei ole tosi. Tällöin lause σ ei ole validi. □

Määritellään seuraavaksi kumoutuvuus ja kumoutumattomuus.

Määritelmä 2.25 (vrt. [1, s. 64])**.** Lause σ on *kumoutuva* jos lause $\neg\sigma$ on todistuva. Ja vastaavasti lause σ on *kumoutumaton* jos lause $\neg\sigma$ ei ole todistuva.

Siis täydellisyyslauseen perusteella lauseen σ sanotaan olevan kumoutumaton, jos sen negaatio ei ole tosi kaikissa malleissa. Vastaavasti lause σ on kumoutuva, jos sen negaatio on tosi kaikissa malleissa.

Määritelmä 2.26 (vrt. [1, s. 64])**.** Mallin *mahtavuus* on κ, jos sen määrittelyjoukon mahtavuus on κ. Malli on *numeroituva* jos sen määrittelyjoukko on numeroituva.

Esimerkki 2.5. Mallin $\mathfrak{A} = \langle \mathbb{N}, \{R_n : n \in \omega\}\rangle$ mahtavuus on numeroituvasti ääretön, koska joukon $A = \mathbb{N}$ mahtavuus on ääretön.

Seuraus 2.7. Kielen L^δ lause on kumoutumaton jos ja vain jos lauseella on numeroituva malli.

Todistus. Ks.[1, s. 65]. □

Seuraus 2.8. Äärellinen joukko L^δ-lauseita on konsistentti jos ja vain jos joukolla on numeroituva malli.

Todistus. Ks.[1, s. 65]. □

Huomautus. Täydellisyyslauseesta ja lauseesta (2.3) seuraa:

$$Val = Prov.$$

Todistetaan seuraavaksi deduktioteoreema. Teoreeman todistamiseen tarvitaan seuraavaa lausetta: oletetaan, että $\Sigma \vdash \phi$ ja $\mathfrak{A}$ on L^δ-malli. Jos joukon Σ jokaisen kaavan sulkeuma on tosi mallissa $\mathfrak{A}$, niin kaavan ϕ sulkeuma on tosi mallissa $\mathfrak{A}$.

Lause 2.9. *(Predikaattikalkyylin deduktioteoreema) Olkoon Σ L^δ-lauseiden joukko ja olkoot σ, τ kielen L^δ lauseita siten, että*

$$\Sigma \cup \{\sigma\} \vdash \tau,$$

silloin

$$\Sigma \vdash \sigma \to \tau.$$

Todistus (Ks. [1, s. 66]). Äärellisyyslauseen nojalla on olemassa joukon Σ äärellinen osajoukko $\Sigma_0 = \{\sigma_1, \dots, \sigma_n\}$ siten, että $\Sigma_0 \cup \{\sigma\} \vdash \tau$. Edellisen lauseen nojalla jokainen joukon $\Sigma_0 \cup \{\sigma\}$ malli toteuttaa myös lauseen τ. Tästä seuraa, että $(\sigma_1 \wedge \cdots \wedge \sigma_n) \to (\sigma \to \tau)$ on validi, joten täydellisyyslauseen nojalla se on todistuva. Tästä seuraa, että $\Sigma_0 \vdash \sigma \to \tau$, joten $\Sigma \vdash \sigma \to \tau$. □

2.7 Kieli L^μ ja vakiot

Tässä pykälässä määritellään kielet L^μ ja L^δ_β myöhempää käyttöä varten.

Monessa tapauksessa olisi järkevää tarkastella kieltä, jossa on äärellinen määrä relaatiosymboleita. Rajoittumalla sellaisiin kaavoihin, joissa on äärettömän monta relaatiosymbolia, mistä ollaan kiinnostuneita, tarvitaan yleisempiä kieliä millä hyvänsä funktiolla μ. Määritellään kieli L^μ seuraavaksi.

Määritelmä 2.27 (ks. [1, s. 67])**.** Olkoon μ funktio $\mu : \nu \to \omega$. Olkoon kieli L^μ kuten kieli L^δ paitsi, että kielessä L^μ on mielivaltainen ääretön joukko $\{P_\xi : \xi < \nu\}$ relaatiosymboleita.

Määritelmä 2.28 (ks. [1, s. 73])**.** Olkoot $\mathfrak{A} = \langle A, \{R_\xi : \xi < \nu\}\rangle$ malli ja μ funktio, joka saa joukossa ν arvokseen luonnollisia lukuja, eli $\mu : \nu \to \omega$. Malli $\mathfrak{A}$ on L^μ-malli, jos jokaisella $\xi < \nu$ R_ξ on $\mu(\xi)$-paikkainen relaatio joukossa A, eli jos $R_\xi \subseteq A^{\mu(\xi)}$.

Määritellään seuraavaksi kieli L^δ_β, joka on kuin kieli L^δ, mutta siihen on lisätty vakioita.

Määritelmä 2.29 (vrt. [1, s. 68])**.** Kieli L^δ_β saadaan, kun kieleen L^δ lisätään jono

$$\langle c_\xi : \xi < \beta\rangle$$

vakiosymboleita, joita kutsutaan myös vakioiksi.

Vakioita ja muuttujasymboleita kutsutaan termeiksi.

Määritelmä 2.30 (vrt. [1, s. 68])**.** Kielen L^δ_β atomikaava on jono, joka on joko muotoa

$$t_1 = t_2,$$

tai muotoa

$$P_n(t_1, \dots, t_{\delta(n)}),$$

missä $t_1, \dots, t_{\delta(n)}$ ovat termejä, ja $n \in \omega$.

Määritelmä 2.31 (vrt. [1, s. 68])**.** Kielen L^δ_β malli on kolmikko

$$\mathfrak{A}^+ = \langle A, \{R_n : n \in \omega\}, \langle a_\xi : \xi < \beta \rangle \rangle,$$

missä

$$\mathfrak{A} = \langle A, \{R_n : n \in \omega\} \rangle$$

on L^δ-malli ja

$$\mathbf{a} = \langle a_\xi : \xi < \beta \rangle$$

on β-jono joukon A alkioita, siis $\mathbf{a} \in A^\beta$.

Jatkossa usein käytetään merkintää $(\mathfrak{A}, \mathbf{a})$ tarkoittamaan L^δ_β-mallia, joka on saatu L^δ-mallista $\mathfrak{A}$ lisäämällä jono $\mathbf{a}$ joukon A alkioita.

Tarkastellaan seuraavaksi, miten totuusrelaatio kielen L^δ_β kaavoille eroaa totuusrelaatiosta kielen L^δ kaavoille.

Määritelmä 2.32 (vrt. [1, s. 68–69])**.** Olkoot α tulkintajono ja $\mathfrak{A}$ malli. Totuusrelaatio kielen L^δ_β atomikaavoille laajennetaan seuraavalla tavalla:

$$\begin{aligned}
(\mathfrak{A}, \mathbf{a}) &\models_\alpha t_1 = t_2 \quad \text{joss} \quad b_1 = b_2, \\
(\mathfrak{A}, \mathbf{a}) &\models_\alpha P_n(t_1, \dots, t_{\delta(n)}) \quad \text{joss} \quad \langle b_1, \dots, b_{\delta(n)} \rangle \in R_n,
\end{aligned}$$

missä ensimmäisellä rivillä $b_1 = \alpha_k$ jos t_1 on muuttuja v_k tai $b_1 = a_\xi$ jos t_1 on vakio c_ξ, ja $b_2 = \alpha_l$ jos t_2 ovat muuttuja v_l tai $b_2 = a_\eta$ jos t_2 on vakio c_η, sekä toisella rivillä $b_i = \alpha_k$ jos t_i on muuttuja v_k, ja $b_i = a_\xi$ jos t_i on vakio c_ξ.
Muuten kielen L^δ_β totuusrelaatio kaikille kaavoille määritellään samalla tavalla kuin kielen L^δ totuusrelaatio.

3 Malliteorian alkeita

3.1 Peruskäsitteitä

Tässä luvussa kiinnitetään funktio $\mu : \nu \to \omega$ ja tarkastellaan eri L^μ-mallien välisiä suhteita.

Määritelmä 3.1 (ks. [1, s. 73]). Olkoot

$$\mathfrak{A} = \langle A, \{R_\xi : \xi < \nu\}\rangle \quad \text{ja} \quad \mathfrak{B} = \langle B, \{S_\xi : \xi < \nu\}\rangle$$

malleja. Malli $\mathfrak{A}$ on mallin $\mathfrak{B}$ *alimalli* ja $\mathfrak{B}$ on mallin $\mathfrak{A}$ *laajennus*, jos $A \subseteq B$ ja jokainen mallin $\mathfrak{A}$ relaatio on rajoittuma vastaavasta mallin $\mathfrak{B}$ relaatiosta joukolle A, eli jos jokaisella $\xi < \nu$ pätee

$$R_\xi = S_\xi \cap A^{\mu(\xi)}.$$

Jos malli $\mathfrak{A}$ on mallin $\mathfrak{B}$ alimalli, merkitään $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$.

Määritelmä 3.2 (vrt. [1, s. 73]). Jokaisella joukon B epätyhjällä osajoukolla X on mallia $\mathfrak{B}$ vastaava alimalli

$$\langle X, \{S_\xi \cap X^{\mu(\xi)} : \xi < \nu\}\rangle,$$

jota kutsutaan mallin $\mathfrak{B}$ *rajoittumaksi* joukkoon X, mitä merkitään $\mathfrak{B}\restriction X$.

Jos $\mathfrak{A}' = (\mathfrak{A}, \mathbf{a})$ ja $\mathfrak{B}' = (\mathfrak{B}, \mathbf{b})$ ovat malleja, niin malli $\mathfrak{A}'$ on mallin $\mathfrak{B}'$ alimalli, jos $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ ja $\mathbf{a} = \mathbf{b}$.

Määritelmä 3.3 (vrt. [1, s. 73]). Olkoon h kuvaus joukolta A joukolle B. Kuvaus h on *homomorfismi* mallilta $\mathfrak{A}$ mallille $\mathfrak{B}$, jos jokaisella $\xi < \nu$ ja $(a_1, \ldots, a_{\mu(\xi)}) \in A$ pätee:

$$\langle a_1, \ldots, a_{\mu(\xi)}\rangle \in R_\xi \quad \text{joss} \quad \langle h(a_1), \ldots, h(a_{\mu(\xi)})\rangle \in S_\xi.$$

Täten $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ jos ja vain jos $A \subseteq B$ ja identtinen kuvaus $i : A \to B$, $i(a) = a$, on homomorfismi mallilta $\mathfrak{A}$ mallilla $\mathfrak{B}$. Kuvausta i kutsutaan tällöin *inkluusioksi* mallilta $\mathfrak{A}$ mallille $\mathfrak{B}$.

Määritelmä 3.4 (vrt. [1, s. 73]). Injektiivinen homomorfismi mallilta $\mathfrak{A}$ mallille $\mathfrak{B}$ on *isomorfismi* mallien $\mathfrak{A}$ ja $\mathfrak{B}\restriction h[A]$ välillä. Mallien $\mathfrak{A}$ ja $\mathfrak{B}\restriction h[A]$ isomorfismia kutsutaan myös *upotukseksi* mallilta $\mathfrak{A}$ mallille $\mathfrak{B}$.

Määritelmä 3.5 (vrt. [1, s. 74]). Jos on olemassa isomorfismi mallien $\mathfrak{A}$ ja $\mathfrak{B}$ välillä niin sanotaan, että mallit $\mathfrak{A}$ ja $\mathfrak{B}$ ovat isomorfiset, tätä merkitään $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$.

Relaatio $\cong$ on ekvivalenssirelaatio mallien välillä. Jos $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$, niin malleilla $\mathfrak{A}$ ja $\mathfrak{B}$ on sama struktuuri, mutta niiden alkiot on nimetty erilailla. Siis mallit $\mathfrak{A}$ ja $\mathfrak{B}$ ovat periaatteessa sama malli.

Määritelmä 3.6 (vrt. [1, s. 74]). Malli $\mathfrak{A}$ on *elementaarisesti ekvivalentti* mallin $\mathfrak{B}$ kanssa jos jokainen L^μ-lause, joka on tosi mallissa $\mathfrak{A}$ on tosi myös mallissa $\mathfrak{B}$. Tällöin merkitään $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$.

Apulause 3.1. Jos $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$, niin jokaisella L^μ-lauseella σ pätee

$$\mathfrak{A} \models \sigma \quad \text{joss} \quad \mathfrak{B} \models \sigma.$$

Todistus (vrt. [1, s. 74]). Oletetaan, että $\mathfrak{A} \not\models \sigma$ eli $\mathfrak{A} \models \neg\sigma$. Tällöin määritelmän 3.6 nojalla saadaan, että $\mathfrak{B} \models \neg\sigma$, joten $\mathfrak{B} \not\models \sigma$. □

Esimerkki 3.1 (vrt. [6, s. 16]). Jos $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$, niin $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$. Olkoon $\pi : A \to B$ isomorfismi mallilta $\mathfrak{A}$ mallille $\mathfrak{B}$. Jokaiseen mallin $\mathfrak{A}$ tulkintajonoon $\boldsymbol{\alpha}$ voidaan liittää vastaava mallin $\mathfrak{B}$ tulkintajono $\boldsymbol{\alpha}^\pi$ asettamalla $\alpha_i^\pi = \pi(\alpha_i)$ jokaisella muuttujasymbolilla v_i. Osoitetaan, että

(∗) jokaisella kaavalla ϕ pätee $\mathfrak{A} \models_\alpha \phi$ jos ja vain jos $\mathfrak{B} \models_{\alpha^\pi} \phi$.

Todistetaan väite (∗) induktiolla kaavan ϕ rakenteen suhteen. Oletetaan ensin, että ϕ on atomikaava, joka on muotoa $v_m = v_n$. Tällöin $\mathfrak{A} \models_\alpha v_m = v_n$ jos ja vain jos $\alpha_m = \alpha_n$. Tämä on yhtäpitävää sen kanssa, että $\pi(\alpha_m) = \pi(\alpha_n)$, koska π on injektio. Tämä taas on yhtäpitävää sen kanssa, että $\alpha_m^\pi = \alpha_n^\pi$, koska jokaiselle muuttujalle pätee $\alpha_i^\pi = \pi(\alpha_i)$, siis $\mathfrak{B} \models_{\alpha^\pi} v_m = v_n$.

Oletetaan sitten, että ϕ on atomikaava, joka on muotoa $P_\xi(v_{i_1}, \ldots, v_{i_{\mu(\xi)}})$. Tällöin $\mathfrak{A} \models_\alpha P_\xi(v_{i_1}, \ldots, v_{i_{\mu(\xi)}})$ jos ja vain jos $\langle \alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_{\mu(\xi)}} \rangle \in R_\xi$. Tämä on yhtäpitävää sen kanssa, että $\langle \pi(\alpha_{i_1}), \ldots, \pi(\alpha_{i_{\mu(\xi)}}) \rangle \in S_\xi$, koska π on isomorfismi. Tämä taas on yhtäpitävää sen kanssa, että $\langle \alpha_{i_1}^\pi, \ldots, \alpha_{i_{\mu(\xi)}}^\pi \rangle \in S_\xi$, koska jokaiselle muuttujalle pätee $\alpha_i^\pi = \pi(\alpha_i)$, siis $\mathfrak{B} \models_{\alpha^\pi} P_\xi(v_{i_1}, \ldots, v_{i_{\mu(\xi)}})$.

Oletetaan, että väite (∗) pätee kaavoille ψ ja χ. Tällöin

$$\begin{aligned} \mathfrak{A} \models_\alpha \neg\psi \quad &\text{joss} \quad \mathfrak{A} \not\models_\alpha \psi \\ &\text{joss} \quad \mathfrak{B} \not\models_{\alpha^\pi} \psi \\ &\text{joss} \quad \mathfrak{B} \models_\alpha \neg\psi, \end{aligned}$$

missä toinen ekvivalenssi pätee induktio-oletuksen nojalla. Edelleen

$$\begin{aligned} \mathfrak{A} \models_\alpha \psi \wedge \chi \quad &\text{joss} \quad \mathfrak{A} \models_\alpha \psi \ \text{ ja } \mathfrak{A} \models_\alpha \chi \\ &\text{joss} \quad \mathfrak{B} \models_{\alpha^\pi} \psi \ \text{ ja } \mathfrak{B} \models_{\alpha^\pi} \chi \\ &\text{joss} \quad \mathfrak{B} \models_{\alpha^\pi} \psi \wedge \chi, \end{aligned}$$

missä toinen ekvivalenssi pätee induktio-oletuksen nojalla.

Todistetaan, että väite (∗) pätee myös kaavalle $(\exists v_n)\psi$. Jos $\mathfrak{A} \models_\alpha (\exists v_n)\psi$, niin on olemassa $a \in A$ siten, että $\mathfrak{A} \models_{\alpha(n/a)} \psi$. Selvästi $(\boldsymbol{\alpha}(n/a))^\pi = \boldsymbol{\alpha}^\pi(n/b)$, missä $b = \pi(a)$, joten induktio-oletusta voidaan soveltaa kaavaan ψ sekä tulkintajonoon $\boldsymbol{\alpha}^\pi(n/b) = (\boldsymbol{\alpha}(n/a))^\pi$ ja malliin $\mathfrak{B}$. Siis $\mathfrak{B} \models_{\alpha^\pi(n/b)} \psi$ ja siten $\mathfrak{B} \models_{\alpha^\pi} (\exists v_n)\psi$. Toinen suunta todistetaan vastaavasti.

Kun lopuksi ehtoa $\alpha_i^\pi = \pi(\alpha_i)$ sovelletaan tapaukseen, jossa ϕ on lause, saadaan ekvivalenssiketju:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{A} \models \phi \quad &\text{joss} \quad \mathfrak{A} \models_\alpha \phi \text{ jollain mallin } \mathfrak{A} \text{ tulkintajonolla } \boldsymbol{\alpha} \\
&\text{joss} \quad \mathfrak{B} \models_{\alpha^\pi} \phi \text{ jollain mallin } \mathfrak{A} \text{ tulkintajonolla } \boldsymbol{\alpha}^\pi \\
&\text{joss} \quad \mathfrak{B} \models_{\alpha'} \phi \text{ jollain mallin } \mathfrak{B} \text{ tulkintajonolla } \boldsymbol{\alpha}' \\
&\text{joss} \quad \mathfrak{B} \models \phi,
\end{aligned}$$

missä kolmas ekvivalenssi pätee, koska kaikilla mallin $\mathfrak{B}$ tulkintajonoilla $\boldsymbol{\alpha}'$ on olemassa mallin $\mathfrak{A}$ tulkintajono $\boldsymbol{\alpha}$, jolla $\boldsymbol{\alpha}' = \boldsymbol{\alpha}^\pi$.

Määritelmä 3.7 (vrt. [1, s. 75])**.** Malli $\mathfrak{A}$ on mallin $\mathfrak{B}$ *elementaarinen alimalli* ja malli $\mathfrak{B}$ on mallin $\mathfrak{A}$ *elementaarinen laajennus* jos $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ ja jokaisella L^μ-kaavalla ϕ ja tulkintajonolla $\boldsymbol{\alpha} \in A^\omega$ pätee:

$$\mathfrak{A} \models_\alpha \phi \quad \text{joss} \quad \mathfrak{B} \models_\alpha \phi.$$

Tällöin merkitään $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$.

Selvästi $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$ jos ja vain jos $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ ja jokaisella L^μ-kaavalla $\phi(x_0 \ldots, x_n)$ ja $(a_0 \ldots, a_n) \in A$ pätee:

$$\mathfrak{A} \models \phi[a_0 \ldots, a_n] \quad \text{joss} \quad \mathfrak{B} \models \phi[a_0 \ldots, a_n].$$

Määritelmä 3.8 (vrt. [1, s. 75])**.** Upotus h mallilta $\mathfrak{A}$ mallille $\mathfrak{B}$ on *elementaarinen upotus* mallilta $\mathfrak{A}$ mallille $\mathfrak{B}$ jos jokaisella L^μ-kaavalla $\phi(x_0 \ldots, x_n)$ ja kaikilla $(a_0 \ldots, a_n) \in A$ saadaan

$$\mathfrak{A} \models \phi[a_0 \ldots, a_n] \quad \text{joss} \quad \mathfrak{B} \models \phi[h(a_0) \ldots, h(a_n)].$$

Täten jos $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$, $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$ jos ja vain jos inkluusiokuvaus mallilta $\mathfrak{A}$ mallille $\mathfrak{B}$ on elementaarinen upotus.

Seuraava apulause tarjoaa hyödyllisen kriteerin sille, milloin mallin laajennus on elementaarinen laajennus.

Apulause 3.2. Olkoon $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$. Silloin $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$ jos ja vain jos jokaisella L^μ-kaavalla ϕ ja jokaisella tulkintajonolla $\boldsymbol{\alpha} \in A^\omega$ pätee: jos $\mathfrak{B} \models_\alpha (\exists x_n)\phi$, niin on olemassa alkio $a \in A$ siten, että $\mathfrak{B} \models_{\alpha(n/a)} \phi$.

Todistus (vrt. [1, s. 76]). Oletetaan ensin, että $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$ ja $\mathfrak{B} \models_\alpha (\exists x_n)\phi$. Silloin $\mathfrak{A} \models_\alpha (\exists x_n)\phi$ ja siten $\mathfrak{A} \models_{\alpha(n/a)} \phi$ jollakin $a \in A$. Koska $\mathfrak{A}$ on elementaarinen alimalli, ja niin $\mathfrak{B} \models_{\alpha(n/a)} \phi$.

Oletetaan kääntäen, että kaikilla L^μ-kaavoilla ϕ ja tulkintajonoilla $\boldsymbol{\alpha} \in A^\omega$ oletuksesta $\mathfrak{B} \models_\alpha (\exists x_n)\phi$ seuraa, että on olemassa $a \in A$ siten, että $\mathfrak{B} \models_{\alpha(n/a)} \phi$. Osoitetaan sitten, että $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$ todistamalla, että

(∗) jokaisella L^μ-kaavalla ϕ ja tulkintajonolla $\boldsymbol{\alpha} \in A^\omega$, $\mathfrak{A} \models_\alpha \phi \quad \text{joss} \quad \mathfrak{B} \models_\alpha \phi$

Todistetaan väite $(*)$ induktiolla kaavan ϕ rakenteen suhteen. Väite pätee triviaalisti, kun ϕ on atomikaava, koska $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$.

Oletetaan, että väite $(*)$ pätee kaavoille ψ ja χ. Tällöin

$$\begin{aligned} \mathfrak{A} \models_\alpha \neg\psi \quad & \text{joss} \quad \mathfrak{A} \not\models_\alpha \psi \\ & \text{joss} \quad \mathfrak{B} \not\models_\alpha \psi \\ & \text{joss} \quad \mathfrak{B} \models_\alpha \neg\psi, \end{aligned}$$

missä toinen ekvivalenssi pätee induktio-oletuksen nojalla. Edelleen

$$\begin{aligned} \mathfrak{A} \models_\alpha \psi \wedge \chi \quad & \text{joss} \quad \mathfrak{A} \models_\alpha \psi \ \text{ ja } \mathfrak{A} \models_\alpha \chi \\ & \text{joss} \quad \mathfrak{B} \models_\alpha \psi \ \text{ ja } \mathfrak{B} \models_\alpha \chi \\ & \text{joss} \quad \mathfrak{B} \models_\alpha \psi \wedge \chi, \end{aligned}$$

missä toinen ekvivalenssi pätee induktio-oletuksen nojalla. Siis väite $(*)$ pätee myös kaavoille $\neg\psi$ ja $\psi \wedge \chi$

Oletetaan, että väite $(*)$ pätee kaavalle ψ. Todistetaan, että väite pätee myös kaavalle $(\exists x_n)\psi$. Jos $\mathfrak{A} \models_\alpha (\exists x_n)\psi$, niin on olemassa $a \in A$ siten, että $\mathfrak{A} \models_{\alpha(n/a)} \psi$. Oletuksen nojalla väite $(*)$ pätee kaavalle ψ. Siksi $\mathfrak{B} \models_{\alpha(n/a)} \psi$ ja siten $\mathfrak{B} \models_\alpha (\exists x_n)\psi$. Kääntäen, jos $\mathfrak{B} \models_\alpha (\exists x_n)\psi$, niin apulauseen oletuksen nojalla on olemassa $a \in A$ siten, että $\mathfrak{B} \models_{\alpha(n/a)} \psi$. Induktio-oletuksen nojalla saadaan $\mathfrak{A} \models_{\alpha(n/a)} \psi$ ja siten $\mathfrak{A} \models_\alpha (\exists x_n)\psi$. □

Seuraus 3.3. Jos $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$, niin $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$ jos ja vain jos jokaisella L^μ-kaavalla $\phi(x_0, \ldots, x_n)$, missä $\mathrm{Free}(\phi) \in \{x_0, \ldots, x_n\}$, ja jokaisella joukon A alkiolla $a_0, \ldots, a_{n-1}$ on olemassa $b \in B$, että $\mathfrak{B} \models \phi[a_0, \ldots, a_{n-1}, b]$, niin silloin on olemassa alkio $a \in A$ siten, että $\mathfrak{B} \models \phi[a_0, \ldots, a_{n-1}, a]$.

Todistus. Ks.[1, s. 76]. □

Toinen hyödyllinen kriteeri laajennuksesta elementaariseksi laajennuksi annetaan seuraavassa lauseessa.

Lause 3.4. *Jos $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$, niin seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä:*

(3.1) $\quad \mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$,

(3.2) $\quad (\mathfrak{A}, \mathbf{a}) \equiv (\mathfrak{B}, \mathbf{a})$, *jokaisella* $\mathbf{a} \in A^\beta$, *missä* $\beta < \omega$,

(3.3) $\quad (\mathfrak{A}, \mathbf{a}) \prec (\mathfrak{B}, \mathbf{a})$, *jokaisella* $\mathbf{a} \in A^\beta$, *missä* β *on mielivaltainen*,

(3.4) $\quad (\mathfrak{A}, \mathbf{a}) \equiv (\mathfrak{B}, \mathbf{a})$, *jokaisella* $\mathbf{a} \in A^\beta$, *missä* β *on mielivaltainen*.

Todistus. Ks.[1, s. 78]. □

Määritelmä 3.9 (vrt. [1, s. 78])**.** Olkoon A joukko. Jonoa $\mathbf{a} \in A^\kappa$, missä κ on ordinaali, kutsutaan joukon A *luetteloksi*, jos jokainen joukon A alkio esiintyy vähintään kerran jonossa $\mathbf{a}$.

Määritelmä 3.10 (vrt. [1, s. 78]). Olkoon A joukko. Jonoa $\mathbf{a} \in A^\kappa$ kutsutaan *joukon A luetteloksi ilman toistoja*, jos jokainen joukon A alkio esiintyy täsmälleen kerran jonossa **a**.

Lause 3.5. *Olkoon $\mathfrak{A}$ L^μ-malli ja olkoon $\mathbf{a} \in A^\kappa$ joukon A luettelo. Jos myös $\mathfrak{B}$ on L^μ-malli, niin malli $\mathfrak{A}$ voidaan elementaarisesti upottaa malliin $\mathfrak{B}$ jos ja vain jos on olemassa jono $\mathbf{b} \in B^\kappa$ siten, että laajennetun kielen L_κ suhteen,*

$$(\mathfrak{A}, \mathbf{a}) \equiv (\mathfrak{B}, \mathbf{b}).$$

Todistus. Ks.[1, s. 78]. □

Lause 3.6. *Olkoot $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ L^μ-malleja, joilla on sama mahtavuus, ja olkoon $\mathbf{a} \in A^\kappa$ joukon A luettelo. Tällöin:*

1. *jos $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$, niin on olemassa jono $\mathbf{b} \in B^\kappa$ siten, että $(\mathfrak{A}, \mathbf{a}) \equiv (\mathfrak{B}, \mathbf{b})$;*
2. *jos **b** on joukon B luettelo ja $(\mathfrak{A}, \mathbf{a}) \equiv (\mathfrak{B}, \mathbf{b})$, niin $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$;*
3. *jos $A \subseteq B$, niin $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$ jos ja vain jos $(\mathfrak{A}, \mathbf{a}) \equiv (\mathfrak{B}, \mathbf{a})$.*

Todistus. Ks.[1, s. 79]. □

3.2 Ketjujen yhdisteet

Tässä pykälässä määritellään muutama ketjuihin liittyvä käsite sekä todistetaan elementaarisen ketjun periaate.

Määritelmä 3.11 (vrt. [1, s. 79]). Olkoot $\mathfrak{A}_\xi$ L^μ-malleja. Jonoa $\langle \mathfrak{A}_\xi : \xi < \nu \rangle$ kutsutaan *malliketjuksi* jos $\mathfrak{A}_\xi \subseteq \mathfrak{A}_\eta$, kun $\xi \leq \eta < \nu$.

Malliketjun yhdisteellä tarkoitetaan mallia, jonka perusjoukko $\bigcup_{\xi<\nu} A_\xi$ on kaikkien joukkojen A_ξ, $\xi < \nu$, yhdiste, ja jonka relaatiosymbolien joukko on kaikkien mallien A_ξ relaatiosymboleiden yhdiste. Annetaan ketjun yhdisteelle täsmällinen määritelmä seuraavaksi.

Määritelmä 3.12 (vrt. [1, s. 79]). Oletetaan, että luvulle $\xi < \nu$ pätee:

$$\mathfrak{A}_\xi = \langle A_\xi, \{R_n^\xi : n \in \omega\}\rangle.$$

Ketjun $\langle \mathfrak{A}_\xi : \xi < \nu \rangle$ *yhdisteellä*, jota merkitään $\bigcup_{\xi<\nu} \mathfrak{A}_\xi$, tarkoitamme mallia

$$\Big\langle \bigcup_{\xi<\nu} A_\xi, \Big\{ \bigcup_{\xi<\nu} R_n^\xi : n \in \omega \Big\} \Big\rangle.$$

Määritelmä 3.13 (vrt. [1, s. 79]). Ketjua $\langle \mathfrak{A}_\xi : \xi < \nu \rangle$ kutsutaan *elementaariseksi ketjuksi* jos $\mathfrak{A}_\zeta \prec \mathfrak{A}_\xi$, kaikilla $\zeta \leq \xi < \nu$.

Lause 3.7. *(Ketjujen yhdisteet) Elementaarisen ketjun yhdiste on jokaisen ketjun alkion elementaarinen laajennus.*

Todistus (vrt. [1, s. 79–80]). Olkoon $\langle \mathfrak{A}_\xi : \xi < \nu \rangle$ elementaarinen ketju, jonka yhdiste on $\mathfrak{A}$. Osoitetaan, että

(∗) jokaisella kaavalla $\phi(x_0, \ldots, x_n)$, kaikilla $\xi < \nu$ ja kaikilla $a_0, \ldots, a_n \in A_\xi$ pätee $\mathfrak{A} \models \phi[a_0, \ldots, a_n]$ jos ja vain jos $\mathfrak{A}_\xi \models \phi[a_0, \ldots, a_n]$.

Todistetaan väite (∗) induktiolla kaavan ϕ rakenteen suhteen. Koska $\mathfrak{A}$ on jokaisen mallin $\mathfrak{A}_\xi$ laajennus, niin väite pätee triviaalisti atomikaavoille.

Oletetaan, että väite (∗) pätee kaavoille ψ ja χ. Tällöin

$$\begin{aligned} \mathfrak{A} \models \neg\psi[a_0, \ldots, a_n] \quad & \text{joss} \quad \mathfrak{A} \not\models \psi[a_0, \ldots, a_n] \\ & \text{joss} \quad \mathfrak{A}_\xi \not\models \psi[a_0, \ldots, a_n] \\ & \text{joss} \quad \mathfrak{A}_\xi \models \neg\psi[a_0, \ldots, a_n], \end{aligned}$$

missä toinen ekvivalenssi pätee induktio-oletuksen nojalla. Edelleen

$$\begin{aligned} \mathfrak{A} \models (\psi \wedge \chi)[a_0, \ldots, a_n] \quad & \text{joss} \quad \mathfrak{A} \models \psi[a_0, \ldots, a_n] \text{ ja } \mathfrak{A} \models \chi[a_0, \ldots, a_n] \\ & \text{joss} \quad \mathfrak{A}_\xi \models \psi[a_0, \ldots, a_n] \text{ ja } \mathfrak{A}_\xi \models \chi[a_0, \ldots, a_n] \\ & \text{joss} \quad \mathfrak{A}_\xi \models (\psi \wedge \chi)[a_0, \ldots, a_n], \end{aligned}$$

missä toinen ekvivalenssi pätee induktio-oletuksen nojalla. Siis väite (∗) pätee myös kaavoille ψ ja $\psi \wedge \chi$.

Oletetaan, että väite (∗) pätee kaavalle $\psi(x_0, \ldots x_n)$. Osoitetaan, että väite pätee myös kaavalle $\phi(x_0, \ldots x_{n-1}) = (\exists x_n)\psi(x_0, \ldots x_n)$. Jos $a_0, \ldots a_{n-1} \in A_\xi$ ja $\mathfrak{A}_\xi \models \phi[a_0, \ldots, a_{n-1}]$, niin jollakin $a_n \in A_\xi$ pätee $\mathfrak{A}_\xi \models \psi[a_0, \ldots, a_n]$. Siten induktio-oletuksen nojalla $\mathfrak{A} \models \psi[a_0, \ldots, a_n]$, mistä seuraa $\mathfrak{A} \models \phi[a_0, \ldots, a_{n-1}]$.

Kääntäen, oletetaan, että $\mathfrak{A} \models \phi[a_0, \ldots, a_{n-1}]$. Silloin $\mathfrak{A} \models \psi[a_0, \ldots, a_{n-1}, a]$ jollakin $a \in A$. Jollakin $\eta < \alpha$ pätee $a \in A_\eta$. Olkoon ζ suurempi kuin ξ ja η. Silloin $a_0, \ldots, a_{n-1}, a \in A_\zeta$, joten induktio-oletuksen nojalla $\mathfrak{A}_\zeta \models \psi[a_0, \ldots, a_{n-1}, a]$, mistä seuraa $\mathfrak{A}_\zeta \models \psi[a_0, \ldots, a_{n-1}]$. Mutta $\xi \leq \zeta$ ja koska $\mathfrak{A}_\xi \prec \mathfrak{A}_\zeta$, niin voidaan päätellä, että $\mathfrak{A}_\xi \models \phi[a_0, \ldots, a_{n-1}]$. □

3.3 Löwenheim-Skolem teoreema

Tässä pykälässä haetaan vastausta seuraavaan kysymykseen: kun $\mathfrak{A}$ on malli, jonka mahtavuus on κ, niin missä mahtavuudessa λ mallilla $\mathfrak{A}$ on mahtavuuden λ elementaarisia laajennuksia ja elementaarisia alimalleja.

Määritelmä 3.14 (vrt. [1, s. 80])**.** Kielen L^μ *mahtavuudella* tarkoitetaan kielen symbolijoukon mahtavuutta. Koska kielessä L^μ on ääretön määrä muuttujia, niin kielen mahtavuus on aina ääretön.

Koska kielen L^μ kaavat ovat äärellisiä kielen L^μ symbolijonoja, niin L^μ-kaavojen joukon mahtavuus on sama kuin kielen L^μ mahtavuus.

Olkoon kielen L^μ mahtavuus ρ tämän pykälän loppuun asti.

Lause 3.8. *Olkoon $\mathfrak{A}$ ääretön malli, jonka mahtavuus on κ, ja olkoon C joukon A osajoukko, jonka mahtavuus on γ. Jos λ on kardinaali, jolla pätee ehto $\gamma, \rho \leq \lambda \leq \kappa$, niin rajoittumalla $\mathfrak{A} \restriction C$ on mahtavuutta λ oleva laajennus $\mathfrak{B}$, joka on mallin $\mathfrak{A}$ elementaarinen alimalli.*

Todistus. Ks.[1, s. 80–81]. □

Seuraus 3.9. (Alaspäinen Löwenheim-Skolem) Olkoon Σ lausejoukko, jonka mahtavuus on κ, ja jolla on ääretön malli, jonka mahtavuus on $\lambda \geq \kappa$. Silloin jokaisella äärettömällä γ, jolla $\kappa \leq \gamma \leq \lambda$, on olemassa malli Σ, jonka mahtavuus on γ.

Todistus. Ks.[1, s. 81]. □

Seuraavan lauseen mukaan äärettömällä mallilla on elementaarinen laajennus mielivaltaisen suurissa mahtavuuksissa.

Lause 3.10. *Olkoon $\mathfrak{A}$ ääretön L^{μ}-malli, jonka mahtavuus on κ. Mallilla $\mathfrak{A}$ on elementaarinen laajennus, jonka mahtavuus on $\lambda \geq \kappa, \rho$.*

Todistus. Ks.[1, s. 81–82]. □

Huomautus. Lauseen 3.10 todistuksessa tarvitaan predikaattikalkyylin kompaktisuuslausetta, joka todistetaan luvussa 4.

Seuraus 3.11 (vrt. [1, s. 82])**.** (Ylöspäinen Löwenheim-Skolem) Olkoon Σ lausejoukko, jonka mahtavuus on κ. Jos joukolla Σ on malli, jonka mahtavuus on $\lambda \geq \aleph_0$, niin joukolla Σ on malli, jonka mahtavuus on $\gamma \geq \kappa, \lambda$.

Yhdistämällä edelliset saadaan seuraava lause.

Lause 3.12 (vrt. [1, s. 82])**.** *(Löwenheim-Skolem) Olkoon Σ lausejoukko, jolla on ääretön malli. Jos Σ on äärellinen, niin joukolla Σ on malli, jonka mahtavuus on ääretön. Jos Σ on ääretön joukko, jonka mahtavuus on κ, niin joukolla Σ on malli, jonka mahtavuus on $\lambda \geq \kappa$.*

Huomautus. Alaspäisessä ja ylöspäisessä Löwenheim-Skolem -lauseissa käytetään valinta-aksioomaa, jonka käyttöä ei voi välttää. Lisäksi valinta-aksiooma seuraa alaspäisestä ja ylöspäisestä Löwenheim-Skolem -lauseesta.

4 Ultratulot

4.1 Filtterit ja ultrafiltterit

Tässä pykälässä määritellään filtterin ja ultrafiltterin käsitteet, sekä todistetaan muutama näihin liittyvä lause.

Määritelmä 4.1 (vrt. [2, s. 211])**.** Olkoon I epätyhjä joukko. Olkoon $P(I)$ kaikkien joukon I osajoukkojen joukko. Joukon I *filtteri* F on joukko $F \subseteq P(I)$ siten, että:

1. $I \in F$,
2. jos $X, Y \in F$, niin $X \cap Y \in F$,
3. jos $X \in F$, ja $X \subseteq Z \subseteq I$, niin $Z \in F$.

Havaitaan, että jokainen filtteri F on epätyhjä joukko, koska $I \in F$.

Esimerkki 4.1 (vrt. [3, s. 211])**.** Annetaan muutama esimerkki filttereistä:

1. Joukko $P(I)$ on joukon I filtteri. Sitä kutsutaan *epäaidoksi filtteriksi*. Jos filtteri ei ole epäaito filtteri, niin sitä kutsutaan *aidoksi filtteriksi*.
2. Joukko $\{I\}$ on joukon I filtteri. Sitä kutsutaan *triviaaliksi filtteriksi*.
3. Olkoon Y joukon I osajoukko. Määritellään joukko F_Y joukon I niiden osajoukkojen X joukoksi, joihin joukko Y sisältyy, eli $F_Y = \{X \subseteq I : Y \subseteq X\}$. Tällöin F_Y on filtteri, jota kutsutaan joukon Y määräämäksi *pääfiltteriksi*.

   Todistetaan, että F_Y on todella filtteri. Koska $Y \subseteq I$, niin $I \in F_Y$. Oletetaan, että $X, Z \in F_Y$. Tällöin $Y \subseteq X$ ja $Y \subseteq Z$ ja siis $Y \subseteq X \cap Z \subseteq I$, joten $X \cap Z \in F_Y$. Oletetaan, että $X \in F_Y$ ja $X \subseteq Z \subseteq I$. Koska $X \in F_Y$, niin $Y \subseteq X$. Tällöin myös $Y \subseteq Z$, sillä $X \subseteq Z$. Siis, koska $Y \subseteq Z$ ja $Z \subseteq I$, niin $Z \in F_Y$.
4. Olkoon $F = \{X \in P(I) : I \setminus X \text{ on äärellinen}\}$. Tällöin F on filtteri, jota kutsutaan *Fréchet-filtteriksi*.

Määritelmä 4.2 (vrt. [2, s. 492])**.** Olkoon I epätyhjä joukko ja olkoon E joukon $P(I)$ osajoukko. Joukon E *virittämällä filtterillä* tarkoitetaan kaikkien niiden joukon I filtterien leikkausta $\langle E \rangle$, joiden osajoukko E on. Siis

$$\langle E \rangle = \bigcap \Big\{ G : E \subseteq G \quad \text{ja G on joukon I filtteri} \Big\}.$$

Joukolla E on *äärellisen leikkauksen ominaisuus* jos ja vain jos kaikilla $Y_1, \ldots, Y_n \in E$, kun $n \geq 1$, pätee $Y_1 \cap \cdots \cap Y_n \neq \emptyset$.

Lause 4.1. *Olkoon E joukon $P(I)$ osajoukko ja olkoon $\langle E \rangle$ joukon E virittämä filtteri. Silloin:*

1. *$\langle E\rangle$ on joukon I filtteri.*

2. *Filtteri $\langle E\rangle$ on kaikkien osajoukkojen $X \in P(I)$ joukko siten, että joko $X = I$ tai joillakin $Y_1, \ldots, Y_n \in E$ pätee:*

$$Y_1 \cap \cdots \cap Y_n \subseteq X.$$

3. *$\langle E\rangle$ on aito filtteri jos ja vain jos joukolla E on äärellisen leikkauksen ominaisuus.*

Todistus (vrt. [3, s. 212]). Merkitään:

$$\mathscr{E} = \{G : E \subseteq G \quad \text{ja G on joukon I filtteri}\}.$$

Joukko $\mathscr{E}$ on epätyhjä, sillä selvästi $P(I) \in \mathscr{E}$.
1. Osoitetaan, että $\langle E\rangle$ on joukon I filtteri. Osoitetaan ensin, että $I \in \mathscr{E}$. Oletetaan siis, että $G \in \mathscr{E}$. Koska G on filtteri, niin $I \in G$. Siis joukko I kuuluu jokaiseen joukkoon G, eli $I \in \mathscr{E}$. Siis $I \in \langle E\rangle$. Oletetaan seuraavaksi, että $X, Y \in \langle E\rangle$. Tällöin joukot X ja Y kuuluvat jokaiseen joukkoon G eli $X, Y \in \mathscr{E}$. Ja koska G on filtteri, niin $X \cap Y \in G$ jokaisella $G \in \mathscr{E}$, joten $X \cap Y \in \mathscr{E}$. Siis $X \cap Y \in \langle E\rangle$. Oletetaan sitten, että $X \in \langle E\rangle$ ja $X \subseteq Z \subseteq I$. Tällöin joukko X kuuluu jokaiseen joukkoon G, eli $X \in \mathscr{E}$. Koska G on filtteri, niin $Z \in G$ jokaisella $G \in \mathscr{E}$, joten $Z \in \mathscr{E}$. Siis $Z \in \langle E\rangle$.

2. Olkoon F' kaikkien osajoukkojen $X \in P(I)$ joukko siten, että $X = I$ tai joillekin joukoille $Y_1, \ldots, Y_n \in E$ pätee $Y_1 \cap \cdots \cap Y_n \subseteq X$. Osoitetaan, että $\langle E\rangle = F'$. Osoitetaan aluksi, että F' on filtteri. Oletuksen perusteella $I \in F'$. Olkoot $X, X' \in F'$. Jos $X = I$ tai $X' = I$, niin silloin $X \cap X' = X \in F'$ tai $X \cap X' = X' \in F'$. Oletetaan, ettei näin ole. Tällöin on olemassa joukot $Y_1, \ldots, Y_n \in E$ ja $Y_1', \ldots, Y_m' \in E$ siten, että

$$Y_1 \cap \cdots \cap Y_n \subseteq X, \quad Y_1' \cap \cdots \cap Y_m' \subseteq X'.$$

Tällöin

$$Y_1 \cap \cdots \cap Y_n \cap Y_1' \cap \cdots \cap Y_m' \subseteq X \cap X',$$

joten $X \cap X' \in F'$.

Olkoot $X \subseteq Z \subseteq I$ ja $X \in F'$. Jos $X = I$, niin $Z = I \in F'$ tai on olemassa joukot $Y_1, \ldots, Y_n \in E$ siten, että

$$Y_1 \cap \cdots \cap Y_n \subseteq Z,$$

joten $Z \in F'$. Siis F' on joukon I filtteri. Todistetaan, että $F' \in \mathscr{E}$. Selvästi $E \subseteq F'$, sillä mikä hyvänsä joukon E alkio sisältyy joukkoon F'. Ja koska F' on joukon I filtteri, niin $F' \in \mathscr{E}$. Tästä seuraa, että $\langle E\rangle \subseteq F'$.

Tarkastellaan nyt joukon I filtteriä G, johon myös joukko E sisältyy. Silloin $I \in G$. On olemassa joukot $Y_1, \ldots, Y_n \in E$ siten, että $Y_1, \ldots, Y_n \in G$, koska $E \subseteq G$. Ja koska G on filtteri, niin $Y_1 \cap \cdots \cap Y_n \in G$. Näin ollen joukko $X \in P(I)$, joka sisältää joukon $Y_1 \cap \cdots \cap Y_n$, kuuluu filtteriin G. Siten $F' \subseteq G$. Tästä saadaan, että $F' \subseteq \langle E\rangle$. Siis $\langle E\rangle = F'$.

3. Oletetaan, että joukolla E on äärellisen leikkauksen ominaisuus. Jos $\langle E \rangle$ on epäaito, niin $\emptyset \in \langle E \rangle$. Tällöin on olemassa leikkaus $Y_1 \cap \cdots \cap Y_n \subseteq \langle E \rangle$, joten ei päde, että leikkaus on epätyhjä. Oletetaan sitten, että $\langle E \rangle$ on aito filtteri. Oletetaan, että joukolla E ei ole äärellisen leikkauksen ominaisuutta, eli joillakin joukoilla $Y_1, \ldots, Y_n \in E$ pätee $Y_1 \cap \cdots \cap Y_n = \emptyset$. Koska leikkaus $Y_1 \cap \cdots \cap Y_n$ kuuluu joukon E virittämään filtteriin $\langle E \rangle$, niin $\langle E \rangle$ on epäaito filtteri. □

Määritellään seuraavaksi ultrafiltteri ja todistetaan muutama ultrafilttereihin liittyvä lause.

Määritelmä 4.3 (vrt. [3, s. 213])**.** Joukko F on joukon I *ultrafiltteri* jos ja vain jos F on joukon I filtteri siten, että kaikilla $X \in P(I)$ pätee:

$$X \in F \quad \text{joss} \quad (I \setminus X) \notin F.$$

Lause 4.2. *Seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä:*

1. *F on joukon I ultrafiltteri.*

2. *F on joukon I maksimaalinen aito filtteri.*

Todistus (vrt. [3, s. 213–214]). Oletetaan ensin, että F on joukon I ultrafiltteri. Silloin $\emptyset \notin F$, koska $I \in F$ ja $\emptyset = I \setminus I$. Siten F on aito filtteri. Olkoon E joukon I jokin aito filtteri, joka sisältää filtterin F. Jos $X \in E$ ja $X \notin F$, niin $I \setminus X \in F$, mistä seuraa $I \setminus X \in E$ ja

$$\emptyset = X \cap (I \setminus X) \in E.$$

Tämä on ristiriidassa oletetuksen kanssa, että E on aito. Täten $E \subseteq F$, joten $E = F$, siis F on joukon I maksimaalinen aito filtteri.

Kääntäen, oletetaan, että F on joukon I maksimaalinen aito filtteri. Tarkastellaan joukkoa $X \in P(I)$. Ei voi olla, että sekä $X \in F$ ja $I \setminus X \in F$, koska silloin $\emptyset \in F$, mistä seuraisi, että jokainen $Y \in P(I)$ sisältyisi joukkoon F ja F ei olisi aito filtteri. Riittää todistaa, että jos $I \setminus X \notin F$, niin $X \in F$. Oletetaan, että $I \setminus X \notin F$. Olkoon $E = F \cup \{X\}$, ja olkoon $\langle E \rangle$ joukon E virittämä filtteri. Tarkastellaan joukkoja $Y_1, \ldots, Y_n \in E$, ja olkoon

$$Z = Y_1 \cap \cdots \cap Y_n.$$

Koska F on suljettu äärellisten leikkauksien suhteen, niin joko $Z \in F$ tai $Z = Y \cap X$ jollakin $Y \in F$. Ensimmäisessä tapauksessa $Z \neq \emptyset$, koska $\emptyset \notin F$. Toisessa tapauksessa myös $Z \neq \emptyset$, sillä muuten olisi $Y \cap X = \emptyset$, $Y \subseteq I \setminus X$, mistä saadaan, että $I \setminus X \in F$. Siis joka tapauksessa $Z \neq \emptyset$. Lauseen 4.1 nojalla nähdään, että $\emptyset \notin \langle E \rangle$. Tämä tarkoittaa, että $\langle E \rangle$ on aito filtteri, joka sisältää filtterin F, joten väitteen (2) perusteella $\langle E \rangle = F$. Siksi $E \subseteq F$ ja $X \in F$. Siis F on joukon I ultrafiltteri. □

Määritelmä 4.4 (ks. [5, s. 65])**.** Joukko $B \subseteq P(I)$ on ketju, jos ehto

$$C \subseteq D \quad \text{tai} \quad D \subseteq C$$

pätee kaikilla $C, D \in B$.

Todistetaan seuraavaksi tärkeä lause ultrafilttereiden olemassaolosta. Todistamiseen tarvitaan Zornin lemmaa (ks. [5, s. 65]): Olkoon $A \subseteq P(I)$ joukko, jolla $\bigcup B \in A$ jokaisella ketjulla $B \subseteq A$. Tällöin joukko A sisältää maksimaalisen alkion. Tässä alkio M on maksimaalinen, jos sillä pätee $M \in A \wedge \forall C \in A(M \subseteq C \rightarrow M = C)$.

Lause 4.3. *(Ultrafiltterilause) Jos $E \subseteq P(I)$ ja joukolla E on äärellisen leikkauksen ominaisuus, niin silloin on olemassa joukon I ultrafiltteri F siten, että $E \subseteq F$.*

Todistus (vrt. [3, s. 214] ja [1, s. 15]). Olkoon $\mathscr{A}$ kaikkien niiden joukon I aitojen filttereiden joukko, joihin joukko E sisältyy. Lauseen 4.1 nojalla joukko $\mathscr{A}$ on epätyhjä, koska joukko $\langle E \rangle$ kuuluu siihen. Jos $C \subseteq \mathscr{A}$, niin joukko $\bigcup C$ on joukon I aito filtteri. Todistetaan tämä seuraavaksi. Koska joukko $\bigcup C$ on joukkojen, joihin kuuluu joukko I, yhdiste, niin $I \in \bigcup C$. Oletetaan sitten, että $X, Y \in \bigcup C$. Tällöin joillakin $C_1, C_2 \in C$ pätee $X \in C_1$ ja $Y \in C_2$. Koska C on ketju, niin pätee joko $C_1 \subseteq C_2$ tai $C_2 \subseteq C_1$. Oletetaan, että $C_1 \subseteq C_2$. Tällöin $X, Y \in C_2$ ja koska C_2 on filtteri, niin $X \cap Y \in C_2 \subseteq \bigcup C$. Siis $X \cap Y \in \bigcup C$. Oletetaan lopuksi, että $X \in \bigcup C$ ja $X \subseteq Z \subseteq I$. Tällöin jollakin $C_1 \in C$ pätee $X \in C_1$ ja koska C_1 on filtteri, niin $Z \in C_1 \subseteq \bigcup C$. Siis $Z \in \bigcup C$. Joukko $\bigcup C$ on aito filtteri, sillä $\emptyset$ ei kuulu siihen.

Lisäksi jos jokainen $F \in C$ sisältää joukon E, niin joukko $\bigcup C$ sisältää joukon E. Zornin lemmasta seuraa, että kaikkien joukon I aitojen filttereiden joukolla $\mathscr{A}$, johon kuuluu myös joukko E, on maksimaalinen alkio M. Täten $E \subseteq F$. Filtteri F on joukon I maksimaalinen aito filtteri, koska jos F' on aito filtteri, joka kuuluu joukkoon F, niin $E \subseteq F'$, joten F' sisältyy joukkoon $\mathscr{A}$ ja $F' = F$. Täten lauseen 4.2 nojalla F on joukon I ultrafiltteri. □

4.2 Ultratulojen rakenne

Tässä luvussa tutustutaan ultratuloihin. Asioiden tarkastelujen helpottamiseksi rajoitutaan tarkastelemaan malleja, jotka koostuvat epätyhjästä joukosta ja joukon yhdestä kaksipaikkaisesta relaatiosta. Sopiva kieli tällaisille malleilla, joilla on yksi relaatiosymboli P_0, jonka paikkaluku on kaksi, on kieli L^{μ_0}, missä $\mu_0 = \{\langle 0, 2 \rangle\}$. Kaikki asiat voidaan myös laajentaa koskemaan kieltä L^{μ} millä hyvänsä funktiolla μ.

Olkoon $\mathfrak{A}_i = \langle A_i, R_i \rangle$ L^{μ_0}-malli jokaisella $i \in I$. Olkoon $A = \prod_{i \in I} A_i$ joukkojen A_i karteesinen tulo. (Jatkossa kirjoitetaan lyhyemmin joko $\prod_i A_i$ tai $\prod A_i$.)

Käytetään symboleja f, g, $h, \ldots$ tarkoittamaan joukon A alkioita.

Olkoot $i \in I$ ja $f \in A$. Funktio f voidaan ajatella jonona, missä f_i on sen i-koordinaatti, jota merkitään joko $f(i)$ tai f_i.

Määritelmä 4.5 (vrt. [1, s. 87]). Olkoon F kokoelma joukon I osajoukkoja. Joukon A relaatio $\sim_F$ määritellään seuraavasti:

$$f \sim_F g \quad \text{joss} \quad \{i \in I : f(i) = g(i)\} \in F.$$

Seuraava tulos on olennainen.

Apulause 4.4. Jos F on joukon I filtteri, niin $\sim_F$ on ekvivalenssirelaatio joukossa $\prod A_i$.

Todistus (vrt. [1, s. 87–88]). Täytyy osoittaa, että relaatio $\sim_F$ on refleksiivinen, symmetrinen ja transitiivinen.

Refleksiivisyys: Jos F on joukon I filtteri, niin $I \in F$. Huomataan, että $I = \{i \in I : f(i) = f(i)\}$, joten $\sim_F$ on refleksiivinen.

Symmetrisyys: Oletetaan, että $f \sim_F g$. Silloin relaation $\sim_F$ määritelmän nojalla saadaan:

$$X = \{i \in I : f(i) = g(i)\} \in F,$$

eli

$$Y = \{i \in I : g(i) = f(i)\} \in F.$$

Siis $g \sim_F f$.

Transitiivisuus: Oletetaan, että $f \sim_F g$ ja $g \sim_F h$. Silloin relaation $\sim_F$ määritelmän nojalla saadaan:

$$X = \{i \in I : f(i) = g(i)\} \in F,$$

ja

$$Y = \{i \in I : g(i) = h(i)\} \in F.$$

Koska F on filtteri, niin $X \cap Y \in F$. Mutta

$$X \cap Y \subseteq Z = \{i \in I : f(i) = h(i)\},$$

ja niin $Z \in F$, joten $f \sim_f h$. Siis relaatio $\sim_F$ on transitiivinen. Täten $\sim_F$ on ekvivalenssirelaatio. □

Tästä lähtien oletetaan, että F on joukon I filtteri. Intuitiivisesti joukon I filtteri koostuu joukon I "isoista"osajoukoista. Relaatiosta $f \sim_F g$ voidaan sanoa, että f yhtyy joukkoon g melkein kaikilla sen koordinaateilla. Tätä ideaa voi laajentaa määrittelemällä joukon $\prod A_i$ relaatio R_I seuraavasti:

Määritelmä 4.6 (vrt. [1, s. 88]). Relaatio R_I joukossa $\prod A_i$ määritellään seuraavasti:

$$\langle f, g\rangle \in R_I \quad \text{joss} \quad \{i \in I : \langle f(i), g(i)\rangle \in R_i\} \in F.$$

Seuraava apulause osoittaa toisen tärkeän filttereiden ominaisuuden. Lause osoittaa, että relaatio R_I ei erottele joukon $\prod A_i$ sellaisia alkioita toisistaan, jotka ovat relaation $\sim_F$ suhteen ekvivalentteja.

Apulause 4.5. Relaatio $\sim_F$ on kongruenssi relaation R_I suhteen, eli jos $f \sim_F f'$, $g \sim_F g'$ ja $\langle f, g\rangle \in R_I$, niin $\langle f', g'\rangle \in R_I$.

Todistus (vrt. [1, s. 88]). Oletetaan, että $f \sim_F f'$ ja $g \sim_F g'$. Tällöin

$$X = \{i \in I : f(i) = f'(i)\} \in F$$

ja

$$Y = \{i \in I : g(i) = g'(i)\} \in F.$$

Edelleen, jos $\langle f, g\rangle \in R_I$, niin

$$Z = \{i \in I : \langle f(i), g(i)\rangle \in R_i\} \in F.$$

Koska F on filtteri, niin $X \cap Y \cap Z \in F$. Mutta

$$X \cap Y \cap Z \subseteq W = \{i \in I : \langle f'(i), g'(i)\rangle \in R_i\},$$

ja siksi $W \in F$. Tästä voidaan päätellä, että $\langle f', g'\rangle \in R_I$. □

Määritelmä 4.7 (ks. [1, s. 89]). Olkoon $f \in \prod A_i$, tällöin f/F on joukon f *ekvivalenssiluokka* relaation $\sim_F$ suhteen, ja merkitään

$$\prod A_i/F = \left\{f/F : f \in \prod A_i\right\}.$$

Määritelmä 4.8 (vrt. [1, s. 89]). Joukon $\prod A_i/F$ relaatio R_F saadaan joukon $\prod A_i$ relaatiosta R_I, ja se määritellään seuraavasti:

$$\langle f/F, g/F\rangle \in R_F \quad \text{joss} \quad \langle f, g\rangle \in R_I.$$

Relaatio R_F on hyvinmääritelty apulauseen 4.5 nojalla.

Määritelmä 4.9 (vrt. [1, s. 89]). Olkoon $\prod \mathfrak{A}_i/F$ malli $\langle \prod A_i/F, R_F\rangle$.

Tuloa $\prod \mathfrak{A}_i/F$ kutsutaan perheen $\{\mathfrak{A}_i : i \in I\}$ *redusoiduksi tuloksi* filtterin F suhteen.

Jos F on ultrafiltteri, niin redusoitua tuloa $\prod \mathfrak{A}_i/F$ kutsutaan *ultratuloksi*.

Jos jokaisella $i \in I$ pätee $\mathfrak{A}_i = \mathfrak{A}$, niin redusoitua tuloa merkitään $\mathfrak{A}^I/F$ ja sitä kutsutaan mallin $\mathfrak{A}$ *redusoiduksi potenssiksi* filtterin F suhteen.

Jos F on ultrafiltteri, niin redusoitua potenssia $\mathfrak{A}^I/F$ kutsutaan mallin $\mathfrak{A}^I/F$ *ultrapotenssiksi*.

4.3 Łos'n lause

Olkoon $\{\mathfrak{A}_i : i \in I\}$ perhe L^{μ_0}-malleja, ja olkoon F joukon I ultrafiltteri. Ultratulo $\prod \mathfrak{A}_i/F$ on L_0^{μ}-malli. Łos'n lause antaa täydellisen vastauksen kysymykseen: miten lauseiden totuus ultratulossa $\prod \mathfrak{A}_i/F$ määräytyy näiden lauseiden totuudessa malleissa $\mathfrak{A}_i$, $i \in I$.

Määritelmä 4.10 (vrt. [1, s. 89]). Olkoon $\boldsymbol{f} = \langle f_1, \dots, f_n, \dots \rangle$ jono tulon $\prod A_i$ alkioita, eli $\boldsymbol{f} \in (\prod A_i)^\omega$. Tällöin $\boldsymbol{f}/F$ tarkoittaa tulon $\prod A_i/F$ alkioiden jonoa

$$\boldsymbol{f}/F = \langle f_1/F, \dots, f_n/F, \dots \rangle,$$

toisin sanoen

$$\boldsymbol{f}/F \in \left(\prod A_i/F\right)^\omega.$$

Lisäksi jokaisella $i \in I$, $\boldsymbol{f}(i)$ on jono

$$\boldsymbol{f}(i) = \langle f_1(i), \dots, f_n(i), \dots \rangle$$

joukon A_i alkioita.

Lause 4.6. *(Łos'n lause) Jos F on joukon I ultrafiltteri, niin L^{μ_0}-kaavalle ϕ ja jonolle $\boldsymbol{f}/F \in (\prod A_i/F)^\omega$ pätee*

$$\prod \mathfrak{A}_i/F \models_{\boldsymbol{f}/F} \phi \quad \textit{joss} \quad \{i \in I : \mathfrak{A}_i \models_{\boldsymbol{f}(i)} \phi\} \in F.$$

Todistus (vrt. [1, s. 90–91]). Todistetaan induktiolla kaavan ϕ rakenteen suhteen.

Oletetaan ensin, että ϕ on atomikaava, joka on muotoa $v_m = v_n$. Silloin

$$\begin{aligned}
\prod \mathfrak{A}_i/F \models_{\boldsymbol{f}/F} v_m = v_n \quad &\text{joss} \quad f_m/F = f_n/F,\\
&\text{joss} \quad f_m \sim_F f_n,\\
&\text{joss} \quad \{i \in I : f_m(i) = f_n(i)\} \in F,\\
&\text{joss} \quad \{i \in I : \mathfrak{A}_i \models_{\boldsymbol{f}(i)} v_m = v_n\} \in F.
\end{aligned}$$

Oletetaan sitten, että ϕ on atomikaava, joka on muotoa $P_0(v_m, v_n)$. Silloin

$$\begin{aligned}
\prod \mathfrak{A}_i/F \models_{\boldsymbol{f}/F} P_0(v_m, v_n) \quad &\text{joss} \quad \langle f_m/F, f_n/F \rangle \in R_F,\\
&\text{joss} \quad \langle f_m, f_n \rangle \in R_I,\\
&\text{joss} \quad \{i \in I : \langle f_m(i), f_n(i) \rangle \in R_i\} \in F,\\
&\text{joss} \quad \{i \in I : \mathfrak{A}_i \models_{\boldsymbol{f}(i)} P_0(v_m, v_n)\} \in F.
\end{aligned}$$

Siis väite pätee kaikilla atomikaavoilla.

Oletetaan, että ϕ on kaava ja väite pätee kaikille kaavan ϕ alikaavoille. Tällöin on kolme tapausta, jotka täytyy käsitellä:

(1) Kaava ϕ on muotoa $\neg\psi$. Nyt

$$\begin{aligned}
\prod \mathfrak{A}_i/F \models_{\boldsymbol{f}/F} \neg\psi \quad &\text{joss} \quad \prod \mathfrak{A}_i/F \not\models_{\boldsymbol{f}/F} \psi,\\
&\text{joss} \quad \{i \in I : \mathfrak{A}_i \models_{\boldsymbol{f}(i)} \psi\} \notin F,\\
&\text{joss} \quad I \setminus \{i \in I : \mathfrak{A}_i \models_{\boldsymbol{f}(i)} \psi\} \in F,\\
&\text{joss} \quad \{i \in I : \mathfrak{A}_i \models_{\boldsymbol{f}(i)} \neg\psi\} \in F.
\end{aligned}$$

Missä toinen ekvivalenssi pätee induktio-oletuksen nojalla ja kolmas ekvivalenssi pätee, koska F on ultrafiltteri. Siis väite pätee kaavalle $\phi = \neg\psi$.

(2) Kaava ϕ on muotoa $\psi \wedge \chi$. Olkoon

$$D_\psi = \{i \in I : \mathfrak{A}_i \models_{f(i)} \psi\}$$

ja

$$D_\chi = \{i \in I : \mathfrak{A}_i \models_{f(i)} \chi\}.$$

Silloin

$$D_\psi \cap D_\chi = \{i \in I : \mathfrak{A}_i \models_{f(i)} \psi \wedge \chi\}.$$

Nyt

$$\begin{aligned} \prod \mathfrak{A}_i/F \models_{f/F} \psi \wedge \chi \quad & \text{joss} \quad \prod \mathfrak{A}_i/F \models_{f/F} \psi \quad \text{ja} \quad \prod \mathfrak{A}_i/F \models_{f/F} \chi, \\ & \text{joss} \quad D_\psi \in F \quad \text{ja} \quad D_\chi \in F, \\ & \text{joss} \quad D_\psi \cap D_\chi \in F. \end{aligned}$$

Missä toinen ekvivalenssi pätee induktio-oletuksen nojalla ja kolmas ekvivalenssi pätee, koska F on filtteri. Siis väite pätee kaavalle $\phi = \psi \wedge \chi$.

(3) Kaava ϕ on muotoa $(\exists v_n)\psi$. Olkoon

$$D = \{i \in I : \mathfrak{A}_i \models_{f(i)} (\exists v_n)\psi\}.$$

Silloin täytyy osoittaa, että

$$\prod \mathfrak{A}_i/F \models_{f/F} (\exists v_n)\psi \quad \text{joss} \quad D \in F.$$

Oletetaan ensin, että

$$\prod \mathfrak{A}_i/F \models_{f/F} (\exists v_n)\psi.$$

Silloin on olemassa jokin $b \in \prod A_i$ siten, että

$$\prod \mathfrak{A}_i/F \models_{f(n/b)/F} \psi.$$

Olkoon $H = \{i \in I : \mathfrak{A}_i \models_{f(n/b)(i)} \psi\}$. Induktio-oletuksen nojalla saadaan, että $H \in F$. Koska

$$f(n/b)(i) = f(i)(n/b_i),$$

niin $H \subseteq D$, ja koska F on filtteri, niin $D \in F$.

Oletetaan sitten, että $D \in F$. Jos $i \in D$, niin

$$\mathfrak{A}_i \models_{f(i)} (\exists v_n)\psi$$

ja siten on olemassa jokin $c \in A_i$ siten, että

$$\mathfrak{A}_i \models_{f(i)(n/c)} \psi.$$

Valinta-aksiooman nojalla on olemassa $b \in \prod A_i$ siten, että $\mathfrak{A}_i \models_{f(i)(n/b)} \psi$ jokaisella $i \in D$, ja muuten on joukon A_i mielivaltainen alkio. Silloin

$$D \subseteq \{i \in I : \mathfrak{A}_i \models_{f(n/b)(i)} \psi\} = B.$$

Siksi $B \in F$ ja induktio-oletuksen nojalla

$$\prod \mathfrak{A}_i/F \models_{f/F(n/b)} \psi,$$

joten

$$\prod \mathfrak{A}_i/F \models_{f/F} (\exists v_n)\psi.$$

Siis väite pätee kaavalle $\phi = (\exists v_n)\psi$. □

Erityisesti lauseille saadaan:

Seuraus 4.7. Jos σ on L^{μ_0}-lause, niin

$$\prod \mathfrak{A}_i/F \models \sigma \quad \text{joss} \quad \{i \in I : \mathfrak{A}_i \models \sigma\} \in F.$$

Todistus (ks [1, s. 91]). Väite seuraa selvästi lauseesta 4.6. Koska lauseet eivät sisällä vapaita muuttujia, niin sen totuus ei riipu tulkintajonosta. □

Määritelmä 4.11 (vrt. [1, s. 92])**.** Olkoon $\mathfrak{A}$ malli ja olkoon F joukon I ultrafiltteri. Olkoon $a^* \in A^I$ jokaisella $a \in A$ siten, että $a^*(i) = a$ jokaisella $i \in I$. Määritellään kuvaus $d : A \to A^I/F$ seuraavasti:

$$d(a) = a^*/F.$$

Kuvasta d kutsutaan mallin $\mathfrak{A}$ *kanoniseksi upotukseksi* mallille $\mathfrak{A}^I/F$.

Apulause 4.8. Kanoninen upotus on mallin $\mathfrak{A}$ elementaarinen upotus mallille $\mathfrak{A}^I/F$, ja siten $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{A}^I/F$.

Todistus (ks [1, s. 92]). Olkoon $\phi(x_0, \ldots, x_n)$ L^{μ_0}-kaava ja olkoot $a_0, \ldots, a_n$ joukon A alkioita. Silloin Łos'n lauseen nojalla saadaan

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}^I/F \models \phi[a_0^*/F, \ldots, a_n^*/F] \quad & \text{joss} \quad \{i \in I : \mathfrak{A} \models \phi[a_0^*(i), \ldots, a_n^*(i)]\} \in F \\ & \text{joss} \quad \{i \in I : \mathfrak{A} \models \phi[a_0, \ldots, a_n]\} \in F \\ & \text{joss} \quad \mathfrak{A} \models \phi[a_0, \ldots, a_n]. \end{aligned}$$

Missä ensimmäinen ekvivalenssi pätee Łos'n lauseen perusteella. Toinen ekvivalenssi pätee edellisen määritelmän perusteella ja koska mallit ovat samoja. Kolmas ekvivalenssi pätee, koska F on ultrafiltteri. Siksi kuvaus d elementaarinen upotus. □

Esimerkki 4.2 (vrt. [1, s. 92])**.** Tutkitaan millaisilla L^{μ_0}-kaavoilla Łos'n lause pätee, kun F on joukon I filtteri, eikä välttämättä ultrafiltteri. Łos'n lauseen todistuksesta huomataan, että atomikaavojen, kaavan $\psi \wedge \chi$ ja kaavan $(\exists v_n)\psi$ todistuksissa riitti, että F on filtteri. Siis Łos'n-lause pätee kaavoille, joissa ei ole ollenkaan negaatiota, kun F on joukon I filtteri.

4.4 Äärellinen aksiomatisointi

Tässä pykälässä tutustutaan äärelliseen aksiomatisointiin. Oletetaan edelleen, että tarkastellaan L^{μ_0}-malleja.

Määritelmä 4.12 (vrt. [1, s. 92])**.** Mallien ominaisuutta $\mathscr{P}$ kutsutaan *ensimmäisen kertaluvun ominaisuudeksi*, jos on olemassa lause σ siten, että

$$\mathfrak{A} \models \sigma \quad \text{joss} \quad \text{mallilla } \mathfrak{A} \text{ on ominaisuus } \mathscr{P}.$$

Tällöin ominaisuus $\mathscr{P}$ on *äärellisesti aksiomatisoituva*.

Määritelmä 4.13 (vrt. [1, s. 93])**.** *Yleisellä ensimmäisen kertaluvun ominaisuudella* tarkoitetaan ominaisuutta $\mathscr{P}$ siten, että on olemassa lausejoukko Σ siten, että mallilla on ominaisuus $\mathscr{P}$ jos ja vain jos se on joukon Σ malli.

Esimerkki 4.3. Jokaisella kokonaisluvulla n olkoon $\sigma^{\geq n}$ lause

$$(\exists x_1)\ldots(\exists x_n)[x_1 \neq x_2 \wedge \cdots \wedge x_1 \neq x_n \wedge x_2 \neq x_3 \wedge \cdots \wedge x_{n-1} \neq v_n].$$

Tällöin $\mathfrak{A} \models \sigma^{\geq n}$ jos ja vain jos joukko A sisältää vähintään n alkiota. Siis ominaisuus, että malli sisältää vähintään n alkiota, on ensimmäisen kertaluvun ominaisuus. Olkoon $\sigma^{!n}$ lause

$$\sigma^{\geq n} \wedge \neg\sigma^{\geq n+1}.$$

Tällöin $\mathfrak{A} \models \sigma^{!n}$ jos ja vain jos joukko A sisältää täsmälleen n alkiota. Täten ominaisuus, että mallin mahtavuus on $n < \omega$, on ensimmäisen kertaluvun ominaisuus.

On luonnollista miettiä, onko äärellisyys ensimmäisen kertaluvun ominaisuus tai vastaavasti, onko äärettömyys ensimmäisen kertaluvun ominaisuus. Łos'n lauseen seuraus osoittaa, että vastaus on ei.

Lause 4.9. *Olkoon Σ lausejoukko. Jos on olemassa joukon Σ mielivaltaisen suuria äärellisiä malleja, niin on olemassa joukon Σ ääretön malli.*

Todistus (ks. [1, s. 93]). Jos joukolla Σ on mielivaltaisen suuria äärellisiä malleja, niin on olemassa joukon Σ äärellisten mallien jono $\langle \mathfrak{A}_r : r < \omega \rangle$ siten, että jos joukon A_r mahtavuus on n_r, niin $n_r < n_s$ aina, kun $r < s < \omega$.

Olkoon F joukon ω ultrafiltteri, joka ei ole pääfiltteri, ja olkoon $\mathfrak{A} = \prod \mathfrak{A}_r/F$ ultratulo. Koska jokainen joukon Σ lause on tosi mallissa $\mathfrak{A}_r$, niin Łos'n lauseesta seuraa, että ultratulo $\mathfrak{A}$ on myös joukon Σ malli. Lause $\sigma^{!n}$ on tosi korkeintaan yhdessä mallissa $\mathfrak{A}_r$ jokaisella kokonaisluvulla n. Koska F ei ole pääfiltteri, niin yhden alkion osajoukko ei kuulu siihen. Niiden alkioiden $r < \omega$ joukko, jolla malli $\mathfrak{A}_r$ toteuttaa lauseen $\sigma^{!n}$, sisältää korkeintaan yhden alkion r, jolla $n_r = n$. Siis Łos'n lauseen nojalla lause $\sigma^{!n}$ ei ole tosi ultratulossa $\mathfrak{A}$ millään $n < \omega$. Siksi ultratulo $\mathfrak{A}$ on ääretön. $\square$

Seuraus 4.10. Mallin äärellisyys ei ole yleinen ensimmäisen kertaluvun ominaisuus.

Todistus (Vrt. [1, s. 93]). Tehdään vastaoletus: äärellisyys on yleinen ensimmäisen kertaluvun ominaisuus. Olkoon Σ lausejoukko, joka määrittelee sen. Koska lausejoukko Σ määrittelee äärellisyyden, sillä on mielivaltaisen suuria äärellisiä malleja. Edellisen lauseen 4.9 nojalla on olemassa joukon Σ ääretön malli, joten vastoin oletusta äärellisyys ei ole yleinen ensimmäisen kertaluvun ominaisuus. □

Määritelmä 4.14 (ks. [5, s. 49])**.** Joukon A lineaarijärjestys $<$ on *hyvinjärjestys*, jos jokaisessa joukon A epätyhjässä osajoukossa on pienin alkio järjestyksen $<$ suhteen.

Lause 4.11. *Olkoon $<$ joukon A lineaarijärjestys. Tällöin $<$ on hyvinjärjestys jos ja vain jos ei ole olemassa funktiota $f : \omega \to A$, jolla pätee*

$$(\forall n \in \omega)\big(f(n+1) < f(n)\big).$$

Todistus (ks. [5, s. 77]). Jos funktio $f : \omega \to A$ toteuttaa ehdon $f(n+1) < f(n)$ jokaisella $n \in \omega$, niin osajoukossa $\mathrm{ran}(f) \subseteq A$ ei ole pienintä alkiota. Täten edellisen määritelmän nojalla $<$ ei ole hyvinjärjestys.

Oletetaan sitten, että $<$ ei ole hyvinjärjestys. On siis olemassa osajoukko $B \subseteq A$, jolla ei ole pienintä alkiota eli

$$(\forall x \in B)(\exists y \in B)(y < x).$$

Olkoon $b_1 \in B$. Koska $<$ on lineaarijärjestys, muttei hyvinjärjestys, niin löytyy $b_2 \in B$, $b_2 \neq b_1$ siten, että $b_2 < b_1$. Vastaavasti löytyy $b_3 \in B$, $b_3 \neq b_2$ siten, että $b_3 < b_2$. Soveltamalla tätä rekursiivisesti saadaan joukko $B_n = \{b_1, b_2, \dots\} \subseteq B$, jossa $b_{i+1} < b_i$. Olkoon $f : \omega \to B$ funktio siten, että $f(n) = b_n$ jokaisella $n \in \omega$. Siis $f(n+1) = b_{n+1} < b_n = f(n)$ jokaisella $n \in \omega$. Siis f on funktio $f : \omega \to B$, jolla pätee $f(n+1) < f(n)$ jokaisella $n \in \omega$. □

Esimerkki 4.4 (vrt. [1, s. 94])**.** Olkoon σ_O lause

$$\begin{aligned}(\forall x_0)\neg P(x_0,x_0) \wedge (\forall x_0)(\forall x_1)[P(x_0,x_1) \vee P(x_1,x_0) \vee x_0 = x_1]\\ \wedge (\forall x_0)(\forall x_1)(\forall x_2)[P(x_0,x_1) \wedge P(x_1,x_2) \to P(x_0,x_2)].\end{aligned}$$

Lause σ_O ilmaisee, että relaatio P on lineaarijärjestys. Olkoon σ_{OL} lause

$$\sigma_O \wedge (\exists x_0)(\forall x_1)\neg P(x_0,x_1),$$

missä jälkimmäinen konjunkti ilmaisee, että järjestyksellä on olemassa suurin alkio. Olkoon lopuksi σ_{DOL} lause

$$\sigma_{OL} \wedge (\forall x_0)[(\exists x_1)P(x_1,x_0) \to (\exists x_2)[P(x_2,x_0) \wedge (\forall x_3)(\neg[P(x_2,x_3) \wedge P(x_3,x_0)])]].$$

Tällöin $\mathfrak{A} = \langle A, R\rangle$ on lauseen σ_{DOL} malli jos ja vain jos R on lineaarijärjestys, jolla on suurin alkio ja jokaisella joukon A alkiolla on välitön edeltäjä.

Olkoon $\mathscr{P}_0$ ensimmäisen kertaluvun ominaisuus ja olkoon $\mathscr{P}_1$ jokin L^{μ_0}-mallin ominaisuus. L^{μ_0}-mallilla on ominaisuus $\mathscr{P}_2$, jos sillä on ominaisuudet $\mathscr{P}_0$ ja $\mathscr{P}_1$. Selvästi $\mathscr{P}_2$ on yleinen ensimmäisen kertaluvun ominaisuus, jos $\mathscr{P}_1$ on yleinen ensimmäisen kertaluvun ominaisuus. Hyödynnetään tätä tietoa seuraavassa lauseessa.

Lause 4.12. *Olkoon $\mathscr{P}$ L^{μ_0}-mallin $\mathfrak{A}$ ominaisuus "relaatio P on joukon hyvinjärjestys". Tällöin ominaisuus $\mathscr{P}$ ei ole yleinen ensimmäisen kertaluvun ominaisuus.*

Todistus (ks. [1, s. 94]). Olkoon σ_{DOL} esimerkin 4.4 lause. On olemassa mielivaltaisen suuria äärellisia hyvinjärjestettyjä lauseen σ_{DOL} malleja, mutta ei ole olemassa äärettömiä hyvinjärjestettyä lauseen σ_{DOL} malleja. Väite seuraa nyt välittömästi lauseesta 4.9 ja edellisistä huomautuksista. □

Olkoon σ_F kunta-aksioomien konjunktio. Kunnat määritellään malleina, joissa laskutoimitukset esitetään kolmipaikkaisina relaatioina. Merkitään summaa vastaavaa relaatiota kirjaimella S, toisin sanoen $S(x, y, z) \leftrightarrow x + y = z$, tuloa vastaavaa relaatiota kirjaimella P, toisin sanoen $P(x, y, z) \leftrightarrow x \cdot y = z$. Edelleen summan neutraalialkiota eli nolla-alkiota vastaa vakiosymboli 0, ja tulon neutraalialkiota eli ykkösalkiota vastaa vakiosymboli 1.

Kuntien aksioomat löytyvät kirjan *Models and Ultraproducts*: *an introduction* [1] sivuilta 95–96. Merkitään niiden aksioomien konjunktiota symbolilla σ_F.

Esimerkki 4.5 (ks. [1, s. 96])**.** Kunnan *karakteristika* on p, jos p on pienin positiivinen kokonaisluku siten, että jokaisella kunnan alkiolla x pätee

$$p \cdot x = 0,$$

missä

$$p \cdot x = \underbrace{x + x + \cdots + x}_{p \text{ kpl}}.$$

Kunnan *karakteristika on* 0, jos sen karakteristika ei ole p millään alkuluvulla p.

Esitetään seuraavaksi lause σ_F^p, joka ilmaisee, että kunnan karakteristika on p. Käytetään seuraavia lyhenteitä:

$$S_1(x, y) \text{ on lyhenne kaavalle } y = x$$

ja

$$S_{n+1}(x, y) \text{ on lyhenne kaavalle } (\exists z)[S_n(x, z) \wedge S(z, x, y)].$$

Täten $S_n(x, y)$ ilmaisee faktan, että $y = n \cdot x$.

Olkoon σ_F^p lauseiden σ_F ja

$$C_p = (\forall x)S_p(x, 0) \wedge \neg[(\forall x)S_{p-1}(x, 0) \vee (\forall x)S_{p-2}(x, 0) \vee \cdots \vee (\forall x)S_1(x, 0)]$$

konjunktio. Silloin $\mathfrak{A}$ on karakteristikaa p oleva kunta jos ja vain jos $\mathfrak{A}$ on lauseen σ_F^p malli. On olemassa karakteristikaa p oleva kunta jos ja vain jos p on alkuluku. Olkoon

$$\Delta_0 = \{\sigma_F\} \cup \{\neg C_p : p < \omega\}$$

lausejoukko, missä C_p on aikaisemmin määritelty lause. Selvästi kunnan $\mathfrak{A}$ karakteristika on 0 jos ja vain jos $\mathfrak{A}$ on lausejoukon Δ_0 malli. Tästä nähdään, että kunnan ominaisuus olla karakteristikaa 0 on yleinen ensimmäisen kertaluvun ominaisuus. Jokaisella kunnalla on yksikäsitteinen karakteristika.

Seuraava tulos osoittaa, että lausejoukkoa Δ_0 ei voi korvata millään äärellisellä lausejoukolla.

Lause 4.13. *Kunnan ominaisuus olla karakteristikaa* 0*, ei ole ensimmäisen kertaluvun ominaisuus.*

Todistus (ks. [1, s. 97]). Oletetaan, että on olemassa lause σ_F^0 siten, että $\mathfrak{A} \models \sigma_F^0$ jos ja vain jos $\mathfrak{A}$ on kunta, jonka karakteristika on 0.

Olkoon $\mathfrak{A}_p$ karakteristikaa p oleva kunta kullakin alkuluvulla p. Siis $\mathfrak{A}_p$ on joukon $\{\sigma_F, C_p\}$ malli. Olkoon F ultrafiltteri, joka ei ole pääfiltteri, kaikkien alkulukujen joukossa ja olkoon

$$\mathfrak{A} = \prod_p \mathfrak{A}_p / F.$$

Koska jokainen $\mathfrak{A}_p$ on lauseen σ_F malli, niin Łos'n lauseen perusteella myös $\mathfrak{A}$ on lauseen σ_F malli. Jokaisella alkuluvulla p lause C_p on tosi täsmälleen yhdessä mallissa $\mathfrak{A}_q$ (missä $q = p$). Koska F on ultrafiltteri, joka ei ole pääfiltteri, niin se ei sisällä yhden alkion joukkoja. Näin ollen, koska lause C_p on tosi täsmälleen yhdessä mallissa, niin niiden alkulukujen p joukko, jolla malli $\mathfrak{A}_p$ toteuttaa lauseen C_p, sisältää korkeintaan yhden alkion q. Siis Łos'n lauseen nojalla $\mathfrak{A}$ ei ole lauseen C_p malli. Tämä osoittaa, että kunta $\mathfrak{A}$ on karakteristikaa nolla ja siten $\mathfrak{A} \models \sigma_F^0$. Koska lause σ_F^0 ei ole tosi yhdessäkään mallissa $\mathfrak{A}_p$, niin tämä on ristiriidassa Łos'n lauseen kanssa, sillä tyhjä joukko ei kuulu filtteriin F. □

Määritelmä 4.15 (vrt. [1, s. 99])**.** Kunta $\mathfrak{A}$ on *algebrallisesti suljettu*, jos jokaisella $\mathfrak{A}$-kertoimisella polynomilla, joka ei ole vakio, on nollakohta kunnassa.

Polynomi kunnassa on funktio f, jonka lauseke on $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$, missä oletetaan, että $a_n \neq 0$, joilloin deg(f)= n.

Seuraavasta tuloksesta voidaan päätellä, että algebrallisesti suljettujen kuntien teoria ei ole äärellisesti aksiomatisoituva.

Lause 4.14. *Jokaisella luvulla $n \in \omega$ on olemassa kunta $\mathfrak{A}_n$, joka ei ole algebrallisesti suljettu, ja jossa kaikilla polynomeilla, joiden aste on $0 < deg(f) \leq n$, on nollakohta.*

Todistus (vrt. [1, s. 100–101]). Olkoon $\mathbb{Q}$ rationaalilukujen kunta ja olkoon $\bar{\mathbb{Q}}$ kunnan algebrallinen sulkeuma. Sulkeuma $\bar{\mathbb{Q}}$ on numeroituva, joten sen alkiot voidaan luetella jonona $\langle q_i : i \in \omega \rangle$.

Määritellään kuntien jono $\langle \mathbb{Q}_r^n : r \in \omega \rangle$ seuraavasti:

$$\mathbb{Q}_0^n = \mathbb{Q}$$

ja

$$\mathbb{Q}_{r+1}^n = \mathbb{Q}_r^n[q],$$

missä q on sulkeuman $\bar{\mathbb{Q}}$ jonon ensimmäinen alkio, joka ei kuulu kuntaan $\mathbb{Q}_r^n$, ja joka on sellaisen polynomin p nollakohta, jolla $0 \leq$ deg(f)$\leq n$, ja jonka kertoimet ovat kunnassa $\mathbb{Q}_r^n$. Selvästi kunta $\mathbb{Q}_{r+1}^n$ on kunnan $\mathbb{Q}$ laajennus.

Olkoon $\mathfrak{A}_n = \bigcup_{r\in\omega} \mathbb{Q}_r^n$. Koska $\mathfrak{A}_n$ on kuntien yhdiste, niin myös $\mathfrak{A}_n$ on kunta. Oletetaan, että $f(x) = a_t x^t + \cdots + a_1 x + a_0$ on astetta $t \leq n$ oleva polynomi, jonka kertoimet ovat kunnassa $\mathfrak{A}_n$. Kaikki kertoimet $a_0, \ldots, a_t$ ovat joukossa $\mathbb{Q}_r^n$ jollakin luonnollisella luvulla $r \in \omega$. Polynomilla $f(x)$ on nollakohta q_i joukossa $\bar{\mathbb{Q}}$, missä q_i sisältyy jonoon $\langle q_i : i \in \omega\rangle$. Silloin on selvää, että $q_i \in \mathbb{Q}_{r'+1}^n$ jollakin $r' > r$, joten polynomilla $f(x)$ on nollakohta kunnassa $\mathfrak{A}_n$.

Päätetään todistus osoittamalla, että kunta $\mathfrak{A}_n$ ei ole algebrallisesti suljettu. Olkoon p alkuluku, joka ei ole tekijänä missään lukua n pienemmässä luvussa. Käyttämällä hyväksi kuntateoriaa (ks. [7, s. 36–49]) voidaan osoittaa, että on olemassa $\mathbb{Q}(q)$-kertoiminen polynomi f, jonka aste on p ja jolla ei ole olemassa yhtään nollakohtaa kunnassa $\mathfrak{A}_n$. Siis kunta $\mathfrak{A}_n$ ei ole algebrallisesti suljettu. □

Olkoon τ_n lause, joka ilmaisee, että jokaisella polynomilla, jolla $2 \leq \deg(f) \leq n$, on nollakohta kunnassa. Algebrallisesti suljettu kunta toteuttaa kaikki lauseet τ_n.

Lause 4.15. *Algebrallisesti suljettujen kuntien teoria ei ole äärellisesti aksiomatisoituva.*

Todistus (ks. [1, s. 101]). Oletetaan, että on olemassa lause σ siten, että malli on algebrallisesti suljettu kunta jos ja vain jos se on lauseen σ malli.

Kullakin luonnollisella luvulla n olkoon $\mathfrak{A}_n$ kunta, kuten edellisessä lauseessa, ja olkoon F joukon ω ultrafiltteri, joka sisältää joukon ω Fréchet-filtterin. Olkoon

$$\mathfrak{A} = \prod \mathfrak{A}_n / F$$

ultratulo. Jokainen kunta $\mathfrak{A}_n$ on lauseen σ_F malli, joten Łos'n lauseen nojalla myös $\mathfrak{A}$ on lauseen σ_F malli. Täten $\mathfrak{A}$ on selvästi kunta. Myös jokainen lause τ_n on tosi kaikissa malleissa $\mathfrak{A}_n$ lukuun ottamatta äärellistä määrää malleja. Siksi käyttämällä uudelleen Łos'n lausetta ja oletusta, että F on ultrafiltteri, joka sisältää Fréchet-filtterin, voidaan päätellä, että jokainen lause τ_n on tosi kunnassa $\mathfrak{A}$. Siksi $\mathfrak{A}$ on algebrallisesti suljettu kunta, joten oletuksen nojalla se on lauseen σ malli. Mutta kunta $\mathfrak{A}_n$ ei ole algebrallisesti suljettu, joten $\mathfrak{A}_n$ on lauseen $\neg\sigma$ malli. Siksi Łos'n lauseen nojalla kunta $\mathfrak{A}$ on myös lauseen $\neg\sigma$ malli. Tämä ristiriita osoittaa, että tällaista lausetta σ ei ole olemassa. □

Seuraus 4.16. Algebrallisesti suljettujen kuntien, joiden karakteristika on 0, teoria ei ole äärellisesti aksiomatisoituva.

Todistus (ks. [1, s. 101]). Riittää todeta, että kaikkien kuntien $\mathfrak{A}_n$, $n \in \omega$, karakteristika on 0. □

Seuraus 4.17. Algebrallisesti suljettujen kuntien, joiden karakteristika on p, teoria ei ole äärellisesti aksiomatisoituva millään alkuluvulla p.

Todistus (ks. [1, s. 101]). Todistetaan vastaavasti kuin edellinen tulos. Tässä tapauksessa kaikkien kuntien $\mathfrak{A}_n$, $n \in \omega$, karakteristika on p ja todistus on samanlainen kuin aikaisempi. □

4.5 Kompaktisuuslause

Todistetaan seuraavaksi kompaktisuuslause ja Gödel-Henkin täydellisyyslause.

Lause 4.18. *(Predikaattikalkyylin kompaktisuus) Kielen L^μ lausejoukolla Σ on malli jos ja vain jos jokaisella joukon Σ äärellisellä osajoukolla on malli.*

Todistus (ks. [1, s. 102]). Jos joukolla Σ on malli, niin triviaalisti jokaisella joukon Σ äärellisellä osajoukolla on malli.

Oletetaan sitten, että jokaisella joukon Σ äärellisellä osajoukolla on malli. Muodostetaan joukon Σ äärellisten osajoukkojen mallien ultratulo. Valitsemalla ultrafiltteri huolellisesti varmistetaan, että muodostettu ultratulo on koko joukon Σ malli.

Olkoon $I = P_\omega(\Sigma)$, missä $P_\omega(\Sigma)$ on joukon Σ kaikkien äärellisten osajoukkojen joukko. Oletuksen nojalla jokaisella joukolla $\Delta \in I$ on olemassa joukon Δ malli $\mathfrak{A}_\Delta$. Olkoon $\Delta^* = \{\Delta' \in I : \Delta \subseteq \Delta'\}$ jokaisella joukolla $\Delta \in I$. Jokainen kokoelma Δ^* on epätyhjä. Myös jokaiselle joukon I äärelliselle osajoukolle, $\{\Delta_1, \dots, \Delta_n\}$, pätee

$$\Delta_1 \cup \cdots \cup \Delta_n \in \Delta_1^* \cap \cdots \cap \Delta_n^*$$

ja siten kokoelmalla $\{\Delta^* : \Delta \in I\}$ on äärellisen leikkauksen ominaisuus. Siksi tämän kokoelman voi laajentaa joukon I ultrafiltteriksi F. Osoitetaan seuraavaksi, että ultratulo

$$\prod_{\Delta \in I} \mathfrak{A}_\Delta / F$$

on joukon Σ malli.

Oletetaan, että lause $\sigma \in \Sigma$. Tällöin $\Delta_0 \in I$, missä $\Delta_0 = \{\sigma\}$. Edelleen $\mathfrak{A}_{\Delta_0} \models \sigma$ ja selvästi $\mathfrak{A}_{\Delta'} \models \sigma$ jos $\Delta_0 \subseteq \Delta'$. Siten

$$\Delta_0^* = \{\Delta' \in I : \Delta_0 \subseteq \Delta'\} \subseteq \{\Delta' \in I : \mathfrak{A}_{\Delta'} \models \sigma\}.$$

Koska $\Delta_0^* \in F$, $\{\Delta' \in I : \mathfrak{A}_{\Delta'} \models \sigma\} \in F$ ja siksi Łos'n lauseen perusteella $\prod \mathfrak{A}_\Delta / F \models \sigma$. □

Lause 4.19. *(Gödel-Henkin täydellisyys) Lausejoukolla Σ on malli jos ja vain jos lausejoukko on konsistentti.*

Todistus (ks. [1, s. 102]). Predikaattikalkyylin äärellisyyslauseen nojalla joukko Σ on konsistentti jos ja vain jos jokainen joukon Σ äärellinen osajoukko on konsistentti. Seurauksen 2.8 nojalla jokainen joukon Σ äärellinen osajoukko on konsistentti jos ja vain jos jokaisella joukon Σ äärellisellä osajoukolla on malli. Kompaktisuuslause osoittaa, että tämä pätee jos ja vain jos joukolla Σ on malli. □

Kompaktisuuslauseessa ja Gödel-Henkin täydellisyyslauseessa ei oletettu, että L^μ on numeroituva kieli. Täten nämä lauseet pätevät kielille, joissa on mielivaltaisen suuri relaatiosymbolijoukko.

Gödel-Henkin täydellisyyslauseesta ja Löwenheim-Skolem lauseesta saadaan seuraava lause.

Lause 4.20 (ks. [1, s. 103]). *Jos Σ on konsistentti lausejoukko, jonka mahtavuus on κ, niin joko joukolla Σ on äärellinen malli tai joukolla Σ on malleja, joiden mahtavuus on ääretön kardinaali, joka on $\geq \kappa$.*

4.6 Täydellisyyslause, valinta-aksiooma ja ultrafiltterilause

Kompaktisuus- ja täydellisyyslauseen todistuksissa tarvitaan valinta-aksioomaa eksplisiittisesti. Esimerkiksi kompaktisuuslauseen todistuksen oletus, että muodostettu ultratulo on epätyhjä, voidaan perustella yleisesti vain käyttämällä valinta-aksioomaa.

Seuraavissa lauseissa tarvitaan joukko-opista tunnettua väitettä, että ehto $\kappa^2 = \kappa$ pätee kaikilla äärettömillä kardinaaleilla.

Lause 4.21. *Väite, että $\kappa^2 = \kappa$ jokaisella äärettömällä kardinaalilla κ on yhtäpitävää valinta-aksiooman kanssa .*

Todistus. Ks.[8, s. 422]. □

Osoitetaan seuraavaksi, että vahva täydellisyyslause ja valinta-aksiooma ovat yhtäpitäviä. Lauseiden 3.12 ja 4.19 perusteella riittää todeta, että vahva täydellisyyslause seuraa valinta-aksioomasta.

Lause 4.22. *Vahva täydellisyyslause on yhtäpitävä valinta-aksiooman kanssa.*

Todistus (ks. [1, s. 103]). On jo osoitettu, että täydellisyyslauseen vahvan muotoilun voi johtaa valinta-aksioomasta.

Oletetaan sitten lauseen 4.20 tulos. Olkoon σ seuraavanlainen lause:

$$(\forall x)(\forall y)(\exists z)(\forall t)[P(x,y,t) \leftrightarrow z = t] \\ \wedge (\forall z)(\exists u)(\exists v)(\forall x)(\forall y)[P(x,y,z) \leftrightarrow x = u \wedge y = v].$$

Selvästi lause σ on tosi mallissa $\mathfrak{A}$, jos relaatio P määrittelee bijektion $A^2 \to A$. Siis lauseella σ on malli, jonka mahtavuus on κ, jos ja vain jos $\kappa^2 = \kappa$. Olkoon $\Sigma = \{\sigma, \sigma^{\geq 2}\}$. Koska $\aleph_0^2 = \aleph_0$, niin joukolla Σ on malli, jonka mahtavuus on $\aleph_0$ ja siksi joukko Σ on konsistentti. Selvästi joukolla Σ ei ole äärellisiä malleja ja siksi täydellisyyslauseen vahvan muotoilun perusteella jokaisella $\kappa \geq \aleph_0$ joukolla Σ on malli, jonka mahtavuus on κ. Siksi kaikille äärettömille kardinaaleille κ pätee $\kappa^2 = \kappa$, mikä on lauseen 4.21 nojalla yhtäpitävää valinta-aksiooman kanssa. □

Päätetään tämä luku lauseeseen, jonka mukaan Gödel-Henkin täydellisyyslause, kompaktisuuslause ja ultrafiltterilause ovat kaikki yhtäpitäviä.

Lause 4.23. *Seuraavat väitteet ovat yhtäpitäviä:*

1. *Jokainen joukon I filtteri voidaan laajentaa joukon I ultrafiltteriksi.*

2. *Jokaisella ensimmäisen kertaluvun predikaattikalkyylin konsistentilla lausejoukolla on malli.*

3. *Jos Σ on joukko ensimmäisen kertaluvun lauseita ja jokaisella joukon Σ äärellisellä osajoukolla on malli, niin joukolla Σ itse on malli.*

Todistus. Ks.[1, s. 104–106]. □

Lähteet

[1] J. L. Bell and A. B. Slomson: *Models and Ultraproducts: an introduction*. Dover Publications, Mineola, New York, 1969.

[2] Blackburn, de Rijke, Venema: *Modal Logic*. Cambridge university press, United Kingdom, Cambridge, 2001.

[3] C.C. Chang, H. J. Keisler: *Model Theory*. 3rd ed., Elsevier science publishers B. V., New York, 1990.

[4] H.-D. Ebbinghaus, J. Flum, W. Thomas: *Mathematical logic*. 2nd ed., Springer, New York, 1994.

[5] Lauri Hella, *Joukko-oppi* [Verkkodokumentti], Tampere, 2011 [Viitattu 6.11.2015]. URL http://www.uta.fi/sis/mattil/joukko-oppi/JO2011.pdf.

[6] Lauri Hella, *Matemaattinen logiikka* [Verkkodokumentti], Tampere, 2015 [Viitattu 6.11.2015]. URL http://www.uta.fi/sis/mtt/mttms8.html.

[7] Kerkko Luosto, *Kuntateoriaa* [Verkkodokumentti], Tampere, 2014 [Viitattu 19.11.2015]. URL http://www.sis.uta.fi/~klkelu/kurssit/algebra2/kunta.pdf.

[8] W Sierpinski: *Cardinal and ordinal numbers*. Panstowe Wydawnictwo Naukowe, Warsaw, 1965.