

TAMPEREEN YLIOPISTO

Kielentämistehtävät lukion lyhyessä matematiikassa

Kasvatustieteiden yksikkö

Kasvatustieteen pro gradu -tutkielma

Marko Blomqvist

Heinäkuu 2015

Kasvatustieteiden yksikkö

Marko Blomqvist: Kielentämistehtävät lukion lyhyessä matematiikassa

Kasvatustieteen pro gradu -tutkielma, 141 sivua, 47 liitesivua

Heinäkuu 2015

Tutkimuksen tarkoituksena oli selvittää onko mahdollista saavuttaa kirjallisen kielentämisen hyödyt erityisillä kielentämistehtävillä ilman opiskelijoiden aiempaa tutustumista kirjalliseen kielentämiseen. Tutkimuksessa selvitettiin kielentämistehtävien tärkeimpiä ominaisuuksia ja niiden tarkoituksenmukaisuutta lukion lyhyessä matematiikassa.

Tutkimus koostui kolmesta osa-alueesta, jotka olivat palautetut kielentämistehtävät, Likert-asteikollinen mielipide- ja asennekysely sekä avoimet kysymykset liittyen kielentämisen hyötyihin ja huonoihin puoliin. Aineisto kerättiin keväällä 2014 kahdesta eri suomalaisesta lukiosta ja tutkimuksen aineistoon valikoitui 63 vastaajaa lukion lyhyen matematiikan MAB3 Matemaattisia malleja 1 -kurssilta.

Vastaajien taustamuuttujina oli sukupuoli ja arvosana, joista jälkimmäinen jaettiin kolmeen arvosanaluokkaan: heikot (4-6), keskitasoiset (7-8) ja hyvät (9-10). Palautetut kielentämistehtävät analysoitiin sisällönanalyysin menetelmin luokittelemalla vastaukset eri vastauskategorioihin. Avoimet kysymykset analysoitiin niin ikään luokittelemalla ja ryhmittelemällä eri vastauksia niitä kuvaavien yläotsikoiden alle. Likert-asteikollinen mielipide- ja asennekysely analysoitiin tilastollisilla menetelmillä, kuten ristiintaulukoimalla.

Tutkimuksen kielentämistehtäviä lähestyttiin opettajan, opiskelijan ja tutkijan näkökulmasta. Tehtävät paljastivat monenlaista osaamista antaen paljon tietoa vastaajan matemaattisesta osaamisesta sekä ajattelusta. Näin ollen ne toimivat erinomaisesti opettajalle välineenä auttaa opiskelijoihin jäsentämään omaa matemaattista ajatteluaan entistä paremmaksi ja edelleen paremmiksi matematiikan osaajiksi. Opiskelijoille kielentämistehtävät antoivat kullekin arvosanaluokalle sen tarvitsemää tukea matematiikan osaamiselleen. Heikoin arvosanaluokka koki kielentämisen auttavan hieman heidän ymmärrystään, keskimäinen koki sen olevan ratkaisun helpottumisen kautta hyödyllistä ja korkein arvosanaluokka näki kielentämisen arvon heidän ajattelunsa edelleen syvenemiselle. Tutkijalle tulokset olivat erinomaisia, sillä ne näyttivät olevan hyödyllisiä jokaisen matematiikan osaamisen erityispiirteen (*käsitteellinen ymmärtäminen, proseduraalinen sujuvuus, strateginen kompetenssi, mukautuva päättely ja yritteliäisyys*) kannalta.

Asenteissa pojat uskoivat omaan osaamiseensa tyttöjä keskimäärin enemmän ja erityisenä ryhmänä parhaimman arvosanaluokan tytöt kokivat kielentämistehtävät turhaksi ja ylipäättään vaikeaksi ilman tarkempaa erittelyä. Tehtävien uutuus ja sen tuoma uudenlainen hankaluus liittyen matematiikkaan lienee vaikuttaneen edellä mainitun marginaaliryhmän asenteisiin.

Tutkimuksen tulokset kertoivat, että tehtäviä, jotka parantavat itsessään monipuolisesti opiskelijoiden matemaattista osaamista ja jäsentävät heidän matemaattista ajatteluaan on mahdollista tehdä. Myös ratkaisujen lukijalle tehtävät antoivat monipuolista tietoa ratkaisijan ajattelusta, mikä mahdollistaa monipuolisemman arvioinnin. Suurin kielentämistehtäviin liittyvä haaste oli niiden ymmärrettävyys, jota omalta osaltaan selittää kielentämisen tuntemattomuus. On syytä uskoa, että tekemällä uusi tehtävätyyppi tutuksi eli harjoittelemalla kielentämistehtäviä on mahdollista saada kielentämisen hyödyt edelleen paremmin esiin. Jatkossa tulisi tutkia kielentämistehtävien vaikuttavuutta oppimiseen verrattuna perinteisiin tehtäviin.

Avainsanat: kielentäminen, kielentämistehtävä, matemaattinen ajattelu, matemaattinen osaaminen

SISÄLLYS

1	JOHDANTO	5
2	MATEMAATTINEN OSAAMINEN JA MATEMAATTINEN AJATTELU	7
2.1	OPPIMINEN	7
2.2	TIEDON LUOKITTELUN HISTORIAA	8
2.3	YMMÄRTÄMISEN MERKITYS MATEMATIIKASSA	10
2.4	MATEMAATTINEN OSAAMINEN JA OPPIMINEN MATEMATIIKASSA	11
2.4.1	<i>Matematiikan osaamisen erityispiirteet</i>	11
2.4.2	<i>Konseptuaalinen -, proseduraalinen - ja strategiatieto</i>	14
2.5	MATEMAATTINEN AJATTELU	16
3	KIRJALLINEN KIELENTÄMINEN	19
3.1	KIELENTÄMINEN JA KIRJALLINEN KIELENTÄMINEN	19
3.2	KIRJALLISEN KIELENTÄMISEN ERITYISPIIRTEITÄ	20
3.2.1	<i>Vaikutukset oppimiseen</i>	21
3.2.2	<i>Haasteet</i>	23
3.3	SANALLISET TEHTÄVÄT MATEMATIIKASSA	24
3.4	ERILAISIA KIRJALLISIA KIELENTÄMISMALLEJA	25
3.5	KIELENTÄMISTEHTÄVÄTYYPPEJÄ	28
3.6	TUTKIMUKSEN LÄHESTYMISTAPA KIELENTÄMISEEN	29
4	TUTKIMUSKYSYMYKSET JA TUTKIMUSTEHTÄVÄ	31
4.1	TUTKIMUSKYSYMYKSET	31
4.2	KIELENTÄMISTEHTÄVÄT	32
4.3	ASENNE- JA MIELIPIDEVÄITTÄMÄT	42
4.4	AVOIMET KYSYMYKSET	42
5	ANALYYSI	43
5.1	AINEISTON KUVAILUA	43
5.2	KIELENTÄMISTEHTÄVÄT	44
5.2.1	<i>Lineaarinen malli</i>	46
5.3	ASENNE- JA MIELIPIDEKYSELY	49
5.4	AVOIMET KYSYMYKSET	50
5.4.1	<i>Kielentämisen hyödyt</i>	50
5.4.2	<i>Kielentämisen huonot puolet</i>	54
6	TULOKSET	60
6.1	KIELENTÄMISTEHTÄVÄT	60
6.1.1	<i>Lineaarinen malli</i>	61
6.1.2	<i>Potenssilauseke</i>	66
6.1.3	<i>Eksponenttifunktio</i>	72
6.1.4	<i>Eksponenttiyhtälö ja logaritmin määritelmä</i>	75
6.1.5	<i>Eksponenttiyhtälö ja logaritmi</i>	79
6.2	ASENNE- JA MIELIPIDEKYSELY	82
6.2.1	<i>Sukupuolen vaikutus asenteisiin ja mielipiteisiin</i>	83
6.2.2	<i>Arvosanalujan vaikutus asenteisiin ja mielipiteisiin</i>	87
6.3	AVOIMET KYSYMYKSET	91
6.3.1	<i>Kielentämisen hyödyt</i>	92
6.3.2	<i>Kielentämisen huonot puolet</i>	109
7	TULOSTEN JOHTOPÄÄTÖKSET	127
7.1	OPETTAJAN NÄKÖKULMA	127
7.2	OPPILAAN NÄKÖKULMA	129
7.3	MIELIPITEET JA ASEENTEET	131
7.4	TUTKIJAN NÄKÖKULMA	132
8	POHDINTA	135

8.1	POHDINTAA TUTKIMUKSEN TULOKSISTA	135
8.2	TUTKIMUKSEN LUOTETTAVUUS	136
8.3	JATKOTUTKIMUKSET KIELENTÄMISTEHTÄVISSÄ.....	138
8.4	KIELENTÄMINEN JA TIEDONLAJIT UUDESSA LUKION OPETUSSUUNNITELMASSA	139
8.5	DIGITAALINEN TOIMINTAMATERIAALI KIELENTÄMISEN NÄKÖKULMASTA	140
9	LIITTEET.....	147

1 JOHDANTO

Kielentämistä ja sen vaikutuksia matematiikan oppimiseen on tutkittu runsaasti (ks. Morgan, 2001; Joutsenlahti, 2003; 2010; Joutsenlahti & Kulju, 2010; Joutsenlahti & Rättyä, 2015). Tutkimukseni lukeutuu samaan tutkimusperheeseen, kuin Tampereen yliopiston opettajankoulutuslaitoksen Hämeenlinnan yksikössä vuonna 2008 alkanut ”Sanan lasku” -tutkimusprojekti, jossa tutkitaan matematiikan ja äidinkielen vahvuuksien synergiaa ja tukea toisilleen (Joutsenlahti & Kulju, 2010, 77). Aiemmissä tutkimuksissa opiskelijoille on esitelty kielentämisen ideaa ja myöhemmin erilaisia kielentämisen malleja etukäteen, joita he ovat saaneet käyttää ja soveltaa perinteisiin sanallisiin tehtäviin (ks. Joutsenlahti, 2010).

Perinteisesti matematiikan kirjallinen ilmaisu tapahtuu erinäisillä matematiikan symboleilla (Morgan, 2001, 235) ja tehtävien ratkaisuun vaaditaan matemaattista ajattelua, mutta lopullisen tuloksen oikeellisuuden ratkaisee lasku ja siitä saatu tulos. Nykyään lukioissa on jo käytössä CAS-laskimet, joilla voi suoraan laskea symboleita käyttäen ja vuonna 2019 ylioppilaskirjoitusten on tarkoitus muuttua täysin sähköisiksi, jolloin jokaisella kokelaalla on suunnitelmien mukaan keussa käytössä tietokone. On selvää, että laskuproseduurin tehokkuudessa ihminen ei pärjää siihen erikseen suunnitellulle koneelle. Matematiikan tehtäviltä tullaan siis vaatimaan uudenlaisia mitattavia ominaisuuksia, kun laskemisen osaamisen merkitys vähenee.

Tutkimuksessani lähdin liikkeelle ajatuksesta, että edelliset tutkimukset ovat jo osoittaneet kielentämisen positiiviset vaikutukset matemaattiselle ajattelulle ja tehtävien ratkaisemiselle, joten sen uudelleen osoittaminen ei ole minun näkökulmastani mielekäästä. Jatkankin Hanna Sarikan diplomityön (2014) tutkimusaihetta liittyen kielentämistehtäviin, joissa perinteinen, ennalta määrätty laskijaa ohjaava laskuproseduuri ei näyttele pääosaa ja jotka pakottavat ratkaisijansa jäsentämään ajatteluaan uudella tavalla toisin sanottuna kielentämään ratkaisujaan. Lisäksi Sarikan (2014) tapaan tutkimukseni lähestymistapa on, ettei opiskelijoille ole esitelty kielentämistä etukäteen, vaan pyrin rakentamaan tehtävistä sellaisia, jotka itsessään ohjaavat opiskelijaa kielentämään heidän ajatteluansa.

Matematiikassa ajatellaan olevan neljä eri kieltä: *symbolikieli*, *kuviokieli*, *luonnollinen kieli* sekä *taktillinen toiminnan kieli* (Joutsenlahti & Rättyä, 2015, 52). Tutkimissani kielentämistehtävissä käytetään monipuolisesti eri kieliä ja laskuproseduuri ei ole pääosassa. Tein tehtävät Joutsen-

lahden tutkimuksista nousseiden mallien (ks. luku 3.4), jotka ovat standardi-, kertomus-, tiekartta-, päiväkirja- ja kommenttimalli (Joutsenlahti, 2010, 6-7,12) sekä Sarikan (2014) esittelemien tehtävätyyppien (ks. luku 3.5) mukaan, joita ovat muun muassa täydennys, ratkaisusta tehtävä ja ratkaisun argumentointi. Lisäksi tehtävissä oli kuvaajien kautta merkitysten tuottamista. Tutkimuksen tehtävät kysyvät ja etsivät vastauksia ennen kaikkea laadulliseen miksi-kysymykseen, joka antaa merkityksen laskulle ja laskemiselle niin laskijalle itselleen kuin myös ratkaisun lukijalle, kuten esimerkiksi arvioijalle. Tuloksena saadaankin pelkän ”oikein tai väärin” –tyyppisen määrällisen lukuarvon sijaan erityisesti merkitysrikkaasta kielennettyä laadullista matemaattista ajattelua, jossa näkyy pelkän seurauksen lisäksi se tärkein, eli syy.

2 MATEMAATTINEN OSAAMINEN JA MATEMAATTINEN AJATTELU

Koska tutkin kielentämistehtäviä lukiomatematiikassa, oppilaiden suhtautumista niihin ja niiden käytön tarkoituksenmukaisuutta oppimisessa ja arvioinnissa, lienee paikallaan määritellä sitä mitä tarkoitetaan matemaattisella osaamisella, toisaalta kielentämisellä ja kirjallisella kielentämisellä. Lähdän liikkeelle ilmiöstä, joka antaa alkusysäyksen osaamiselle, *oppiminen*.

2.1 Oppiminen

Oppimisella tarkoitetaan tiedon ja kokemuksen karttumista, siten että ihmisen tietoisuudessa ja toiminnassa ilmenee pysyviä muutoksia, jotka ovat tapahtuneet ihmisen ja ympäristön vuorovaikutuksesta, joko tahallisesti tai tahattomasti (Hirsjärvi, 1982, 136; Hirsjärvi ja Huttunen, 1995, 43). Erilaisia oppimislajeja on muun muassa assosiaatio-, malli- sekä kognitiivinen oppiminen ja ne liittyvät aina kiinteästi toimintaan (Rauste-von Wright & von Wright, 1994, 19).

Mallioppimisessa opitaan mallista, kuten että opettaja tekee edellä ja oppilaat toistavat mallin mukaan. Myös assosiaatio-oppimista tapahtuu luokassa. Tällöin eri aistien kautta luokkatilanteessa tulevat ärsykkeet herättävät oppilaassa ajatuksia (ks. Locke, J.: *mielteitä*), jotka linkittyvät monimutkaisimmiksi ajatusverkoiksi. (Mt. 106.) Toisaalta myös kielellistä assosiaatiota voi tapahtua, jolloin esimerkiksi aiemmin opittu sana neliö linkittyy sanaan nelikulmio ja edelleen geometrian käsitteeseen. Tämä on verrattavissa ajattelun jäsentymiseen kielentämisen näkökulmasta (ks. luku 3). Kognitiivinen oppiminen olisi matematiikanopettajan näkökulmasta ihanteellisin vaihtoehto, koska silloin oppiminen on perustunut havaintoon, muistamiseen, ajatteluun ja päätöksentekoon (mt. 17). Toisin sanottuna tällainen oppiminen perustuu järkeen ja loogiseen päättelyyn, jolloin parhaimmillaan vanhaa tietoa on mahdollista soveltaa uudessa tilanteessa ja näin oppia lisää uusia asioita. Rauste-von Wright & von Wright (mt. 45) puhuvat *transferista*, eli oppimisen siirtovaikutuksesta eli siitä, että opittua asiaa voitaisiin käyttää mahdollisimman laajasti jumittumatta siihen asiayhteyteen, jossa asia ollaan opittu.

Nykyään vallalla on konstruktivistinen oppimiskäsitys, joka voidaan nähdä kognitiivisen oppimisen luonnollisena jatkona. Rauste-von Wright & von Wright (1994, 22) kärjistävät, että oppiminen on kognitiivisen toiminnan sivutuote, jossa muistiin eivät tallennu itse tapahtuma, tai teksti vaan oppijan silloiset tehdyt havainnot ja ajatukset. Oppija näin ollen rakentaa omaa tietoisuuttaan aktiivisesti. Konstruktivistisen oppimiskäsityksen yksi tärkeimmistä näkökulmista onkin, että oppija oppii uutta aina jo opitun päälle. (Tynjälä, 1999, 72.) Eli siis oppija rakentaa, konstruoi, uutta tietoa vanhan tiedon päälle ottaen sen huomioon. Tämä seikka tuleekin huomioida opetusta suunniteltaessa.

2.2 Tiedon luokittelun historiaa

Jarkko Leino (1977, 17-18) esittelee Wilsonin (James) taksonomian, eli tieto-/osaamistavoitteiden hierarkian matematiikassa. Wilson on kehittänyt taksonomiensa (1971) Bloomin (Benjamin) taksonomian (1956) pohjalta. (Leino, 1977, 18.) Bloom kehitti luokitusjärjestelmänsä alun perin yliopiston testien tehtäville ja vastaaville kasvatustavoitteille (Åhlberg, 1990, 64).

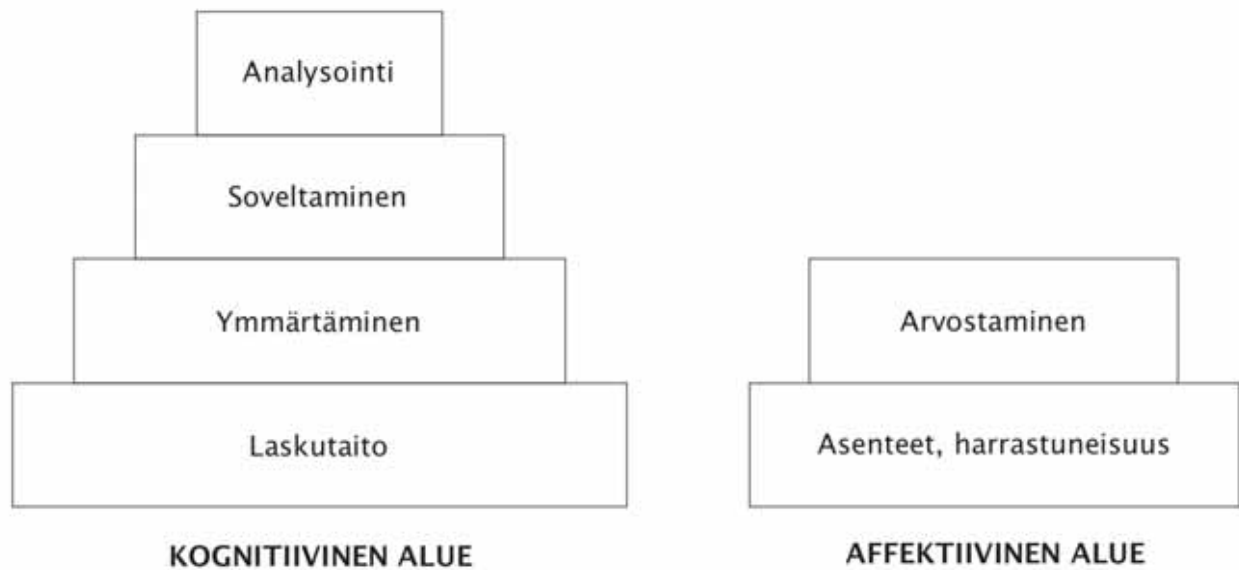
Bloomin taksonomiaa koostuu kahdesta alueesta; kognitiivinen- ja affektiivinen alue. Kognitiivinen alue jakautuu kuudeksi luokaksi:

1. Tietäminen,
2. Ymmärtäminen,
3. Soveltaminen,
4. Analysoiminen,
5. Syntetisoiminen ja
6. Arvioiminen

Affektiivinen alue jakautuu viideksi luokaksi, jotka ovat:

1. Vastaanottaminen,
2. Vastaaminen,
3. Arvostaminen,
4. Arvojen jäsentäminen ja
5. Arvokokonaisuuden leimaama käyttäytyminen.

Bloomin taksonomia on varsin monipuolinen ja siksi hieman hankala soveltaa matematiikan opetukseen, minkä takia Wilson on tehnyt oman luokittelunsa juuri matematiikkaa silmällä pitäen (Leino, 1977, 17-18).



KUVIO 1. Wilsonin tavoitteiden hierarkia matematiikassa (Leino, 1977, 18)

Kuviossa 1 on Leinon esittämänä Wilsonin taksonomian kognitiivinen sekä affektiivinen alue. Leino (1977, 18) avaa Wilsonin taksonomian *laskutaidon* kolmeen osa-alueeseen, jotka ovat: määrittäneiden tosiasioiden tietämiseen, terminologian (*syntaksin*) tunteminen sekä algoritmien osaaminen. Laskutaito on siis silkkää laskemisen ja merkintöjen osaamista.

Leino (mt. 19) jatkaa avaamalla *ymmärtämisen* kuuteen osa-alueeseen, jotka ovat: käsitteiden tietäminen, periaatteen, säännön tai yleistyksen tietäminen, matemaattisen rakenteen tietäminen, probleeman eri osien muuntaminen muodosta toiseen, todistuksen seuraaminen (ja ymmärtäminen) sekä probleeman lukeminen ja tulkitseminen. Ymmärtäminen on laskemisesta seuraava vaihe, mutta edelleen paljon nojaa tietämiseen ja suorittavaan osaamiseen, kuten laskutaitokin.

Edelleen *soveltamiseen* lukeutuu neljä osa-alueetta, jotka ovat: rutiiniprobleemien ratkaiseminen, vertailujen tekeminen, tietojen erittelemine, mallien, symmetrioiden tai rakenneyhtäläisyyksien tunnistaminen. Soveltaessa tulee ymmärtää mistä on kyse, koska saatavilla olevaa dataa jalostetaan eteenpäin kohti haluttua lopputulosta. (Mt. 19-20.)

Analysointi jakautuu viiteen osa-alueeseen, jotka ovat: (ei-rutiini) tehtävän ratkaiseminen, relaation löytäminen, todistuksen konstruointi, todistuksen kritikointi ja yleistyksen muodostaminen ja koettelu. Analysointi on todellista, syvää ymmärtämistä ja vaatii paljon sekä matemaattista tietoa että - taitoa. (Mt. 20-21.)

Wilsonin taksonomiassa ovat omina hierarkioinaan affektiivinen - ja kognitiivinen alue, vaikkakin niiden vaikutusta ja merkitystä ovat luokkatilanteessa erottamattomat. Leino jatkaa, että

lukuisat tutkimukset ovat havainneet asenteiden vaikuttavan voimakkaasti tiedollisten tavoitteiden (toisin sanottuna, taitojen) oppimiseen. (Leino, 1977, 18.)

Kuitenkin nykytiedon valossa Laura Tuohilampi ja Markku S. Hannula (2013, s. 242) ovat päätyneet tulokseen, että osaaminen selittää oppilaiden myönteisiä asenteita enemmän kuin asenne osaamista. Eli luonnollisesti edelleen kognitiivinen ja affektiivinen alue ovat kiinteä osa oppilaan matematiikan osaamista ja ne tulee molemmat ottaa huomioon matematiikan oppimisessa ja opetuksen suunnittelussa, mutta näyttäisi siltä, että osaaminen on jossain määrin ensisijaisempaa. Näin ollen ongelmien, jotka ovat vaikeusasteeltaan sopivan kuormittavia, ratkaiseminen kehittää oppilaan matemaattista osaamista ja edelleen hänen asenteitaan matematiikkaa sekä sitä kohtaan millaisena matematiikan osaajana hän itseään pitää.

2.3 Ymmärtämisen merkitys matematiikassa

Erkki Pehkonen (2000, 376) on kirjoittanut artikkelin ymmärtämisen tärkeydestä matematiikassa ja toisaalta matemaattisen ymmärtämisen luonteesta. Hän korostaa Hiebertin ja Carpenterin (1992) ajatusta, että ymmärtämiselle on ominaista prosessiluonteisuus. Tämä tarkoittaa sitä, että ei ajatella mustavalkoisesti ihmisen joko ymmärtävän, tai ei ymmärtävän asiaa, vaan ajatellaan ihmisen olevan asian suhteen eri ymmärrystasolla. Toisaalta tämä prosessiluonteisuus tarkoittaa, että koskaan ei voi täysin ymmärtää jotain asiaa, vaan aina voi tulla jokin uusi piirre ilmi, joka lisää asian ymmärrystä (ks. konstruktivistinen oppimiskäsitys luku 2.1).

Hiebert ja Carpenter (1992) ovat nostaneet esiin viisi hyötyä, jotka asian ymmärtäminen tuottaa. Nämä ovat että ymmärtäminen auttaa keksimään uutta, se edistää muistamista ja toisaalta se vähentää muistettavan asian määrää, ymmärtäminen tukee oppimisen siirtovaikutusta sekä se vaikuttaa uskomuksiin. (Pehkonen, 2000, 377.) Ymmärtäminen on siis hyödyllistä oppimisen sekä tiedolliselle - (*kognitiivinen*) että tunne- (*affektiivinen*) puolelle.

Hyötyjä, joita ymmärtäminen antaa on vaikea kiistää ja siksi ymmärryksen maksimointia oppilaan kehitystason mukaan tulisi opetuksessa edistää. Ymmärryksen prosessiluonne mahdollistaa ymmärryksen lisääntymisen oppilaalle sopivalla nopeudella ja intensiteetillä. Erityisesti matematiikassa väärin uskomusten murtaminen olisi tärkeää, jotta oppilas voi luottaa matematiikan rakenteisiin ja jotta matematiikka tuntuu järkevältä ja loogiselta. Asioiden ymmärtäminen auttaa tässäkin. Lisäksi liiallinen ulkoa opettelu musertaa matematiikan voimaa ja taikaa, joten jos haluamme oppilaittemme pitävän matematiikasta, meidän tulee auttaa heitä ymmärtämään sitä (ks. Tuohilampi & Hannula, 2013, luku 2.2).

2.4 Matemaattinen osaaminen ja oppiminen matematiikassa

Wilsonin taksonomia on aikansa tuotos, jossa on paljon hyvää. Kuitenkin matematiikan osaaminen on monisyisempää, eikä niin yksiselitteistä, että se voitaisiin rajata tiettyihin portaisiin, joista siirrytään järjestyksessä seuraavalle. Jorma Joutsenlahti (2005, 123) on väitöskirjassaan yhdistänyt Wilsonin kognitiiviset tasot kolmeksi tasoksi:

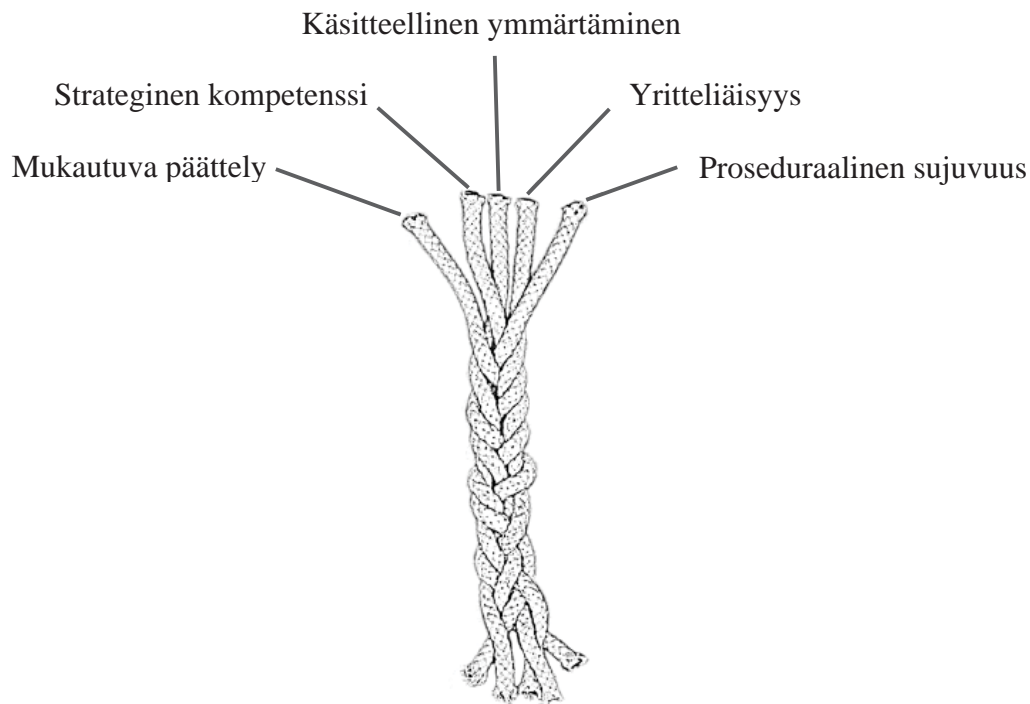
1. Laskutaito/Ymmärtäminen,
2. Ymmärtäminen/Soveltaminen sekä
3. Soveltaminen/Analyysi

Tässä jaottelussa alkuperäiset portaavat lomittuvat ja muodostavat ikään kuin ”häilyvämmän” siirtymän oppimisessa ja siksi näen Joutsenlahden jaottelun todellisuutta paremmin kuvaavana, kuin edeltäjänsä.

2.4.1 Matematiikan osaamisen erityispiirteet

Luvussa 2.3 esittelin Pehkosen (2000) avaamia Hiebertin ja Carpenterin (1992) ajatuksia ymmärtämisen hyödyistä matematiikassa. Jeremy Kilpatrickin, Jane Swaffordin ja Bradford Findellin (2001, 116-117) jatkavat pohtimista matematiikan osaamisen erityispiirteistä jakamalla matematiikan osaamisen (mathematical proficiency) (suom. Joutsenlahti, 2005, 96) viiteen eri piirteeseen. Eri piirteet yhteen punovana voimana on löydettävissä Hiebertin ja Carpenterin ajatukset ymmärtämisen roolista matematiikassa. Kuitenkin Kilpatrick ym. ovat jakaneet matematiikan osaamisen ja edellä mainitun ymmärryksen vaikutuksen pienempiin ja tarkempirajaisempiin piirteisiin. Nämä piirteet ovat:

1. **Käsitteellinen ymmärtäminen** (*conceptual understanding*): matemaattisten käsitteiden, operaatioiden ja relaatioiden ymmärtäminen.
2. **Proseduraalinen sujuvuus** (*procedural fluency*): taito käyttää proseduureja joustavasti, huolellisesti, tehokkaasti ja tarkoituksenmukaisesti.
3. **Strateginen kompetenssi** (*strategic competence*): kyky formuloida, esittää ja ratkaista matemaattisia ongelmia.
4. **Mukautuva päättely** (*adaptive reasoning*): pystyvyys loogiseen ajatteluun, reflektointiin, selittämiseen ja todistamiseen.
5. **Yritteliäisyys** (*productive disposition*): nähdä luontaisesti matematiikka järkevänä, hyödyllisenä ja arvokkaana yhdistettynä uskoon ahkeruuden merkityksestä ja omiin kykyihin.



KUVIO 2. Matemaattisen osaamisen yksittäiset erityispiirteet punoutuvat yhdeksi vahvaksi matematiikan osaamisen köydeksi. (kuva: Kilpatrick ym. 2001, 117; suom. Joutsenlahti, 2005, 96.)

Kuva (kuvio 2) havainnollistaa, miten matematiikan osaamisen osa-alueet ovat sitoutuneet toisiinsa ja näin yhdessä muodostavat matematiikan kokonaisvaltaisen osaamisen. Jokaista eri osa-aluetta tulisi vahvistaa, jotta köysi olisi mahdollisimman vahva ja osaaminen kestäväällä pohjalla. Joutsenlahti (2005, 97-98) on avannut Kilpatrickin ym. (2001, 115-133) ajatuksia seuraavilla tavoilla, joita esittelen omine väliotsikoineen.

Käsitteellinen ymmärtäminen

Joutsenlahti (mt. 97) on avannut Kilpatrickin ym. (2001) ajatuksia käsitteellisestä ymmärtämisestä siten, että opiskelija, joka ymmärtää matematiikkaa käsitteellisesti tietää enemmän kuin vain erillisiä faktoja ja menetelmiä. Voitaisiinkin sanoa, että näin matematiikkaa ymmärtävän oppilaan matemaattinen ymmärrys on suurempi, kuin osastensa summa. Hän vielä jatkaa, että tällainen opiskelija ymmärtää missä kontekstissa matemaattiset käsitteet ovat käyttökelpoisia, miten eri käsitteet liittyvät toisiinsa ja miten uudet käsitteet on hänen hyvin organisoituun tietorakenteeseensa.

Proseduraalinen sujuvuus

Joutsenlahden (2005, 97) mukaan Kilpatrickin ym. (2001) proseduraalinen sujuvuus viittaa proseduurien tuntemiseen, että opiskelija tietää missä tilanteessa ja miten niitä käytetään tarkoituksenmukaisesti. Hän jatkaa:

Proseduraalinen sujuvuus on yhteydessä käsitteelliseen ymmärtämiseen, sillä esimerkiksi paikkajärjestelmän ja rationaalilukujen ymmärtäminen ei ole mahdollista ilman niihin liittyvien proseduurien hallintaa. (Kilpatrick ym. 2001, 121.)

Tämän piirteen voikin tiivistää laskemisen osaamiseksi, jolloin ymmärretään millä operoidaan ja miten, jotta päästään haluttuun lopputulokseen.

Strateginen kompetenssi

Kilpatrickin ym. (2001) määrittelemä strateginen kompetenssi tarkoittaa ongelman ratkaisuun liittyviä menetelmiä, joita opiskelijalla on. Kun opiskelijalla on strategista kompetenssia, hän pystyy arvioimaan tehtävästä saatujen tietojen avulla, millaisin menetelmin (hallittujen prosedurein) kannattaa lähteä tehtävää ratkaisemaan, toisin sanoen muotoilla ongelma ja ratkaista se. Oleellista siis on, että tilanteessa opiskelija ei valmiiksi tiedä oikeaa menetelmää, vaan osaa soveltaa omia tietojaan (*käsitteellinen ymmärtäminen*) ja taitojaan (*proseduraalinen sujuvuus*) tarkoituksenmukaisesti. (Joutsenlahti, 2005, 98.)

Mukautuva päättely

Mukautuva päättely (Kilpatrick ym. 2001) on kykyä ja taitoa loogiseen ajatteluun eri tilanteiden ja suhteiden välillä. Opiskelija on kykenevä mukautuvaan päättelyyn seuraavien kolmen ehdon toteutuessa:

- 1) opiskelijalla on riittävä tietopohja,
- 2) tehtävä on ymmärrettävä ja motivoiva sekä
- 3) tehtävän konteksti on tuttu sekä miellyttävä.

Näitä selittää se, että tärkeä mukautuvan päättelyn ilmenemä on kyky osoittaa riittävät perustelut omille valinnoilleen ja tekemisilleen. (Joutsenlahti, 2005, 98.) Hän jatkaa:

Mukautuva päättely tulee esille parhaiten, ongelmanratkaisussa, jossa opiskelija käyttää strategista kompetenssiaan ongelman muotoilussa ratkaisussa. Mukautuvaa päättelyä opiskelija tarvitsee, kun hän päättää valitun strategian oikeutuksen. (Kilpatrick ym. 2001, 129-130.)

Näin ollen mukautuvassa päättelyssä yhdistyvät sekä strateginen kompetenssi, että käsitteellinen ymmärtäminen. Mukautuvaan päättelyssä on pohjimmiltaan kyse opitun asian siirtämisestä toiseen yhteyteen. (ks. *transfer*, luku 2.1)

Yritteliäisyys

Yritteliäisyys (Kilpatrick ym. 2001) on pyrkimystä nähdä matematiikka mielenkiintoisena ja hyödyllisenä. Lisäksi opiskelijan oma usko tekemiseensä ja siihen että työ palkitaan lukeutuvat yritteliäisyyteen. Jos opiskelijalla on hyvät taidot neljässä edellisessä osa-alueessa, niin hänen varmasti uskoo matematiikan olevan ymmärrettävää ja hyödyllistä (ks. Tuohilampi & Markkula, 2013). Hankalien, ei-rutiininomaisten tehtävien ratkaiseminen vaatii yritteliäisyyttä, joka puolestaan kehittää strategista kompetenssia, mikä edelleen kehittää opiskelijan omaa matematiikkakuvaansa positiivisemmaksi, mikä puolestaan edesauttaa muiden osa-alueiden kehittymistä. (Joutsenlahti, 2005, 98.) Näin ollen perustaidot ja toisaalta yritteliäisyys ovat avainasemassa kun puhutaan matematiikan osaamisesta kokonaisuutena.

2.4.2 Konseptuaalinen -, proseduraalinen - ja strategiatieto

Wilson (1971) jakoi matematiikan taksonomiassaan laskutaitoon, ymmärtämiseen, soveltamiseen sekä analysointiin. Wilsonin taksonomia voidaan ajatella kuin rappusiksi, joissa edetään järjestyksessä alemmalta ylemmäs. Joutsenlahti (2005) rakensi omassa luokittelussaan edellisten rappusten päälle ”liuskan”, jolloin siirtyminen myös kahden eri rappusen välissä on mahdollista. Toisaalta vaikka Kilpatrick ym. (2001) esittivät oman hienojakoisen näkemyksensä matematiikan osaamisesta eli siitä millaisia taitoja oppiminen, toisin sanoen ”rappusissa nouseminen” vaatii, on edelleen mielekästä pohtia matematiikan perinteistä kahtiajakoa; laskeminen ja ymmärtäminen.

Vanha vitsi teknikon, insinöörin ja diplomi-insinöörin eroista on kuvaava puhuttaessa erilaisista tiedoista. Teknikon sanotaan taitavan, eli tietävän miten tehdä erilaiset työvaiheet ja niihin sisältyvät tekniikat, insinööri sen sijaan tietää milloin kyseisiä työvaiheita tarvitaan ja miksi, kun taas diplomi-insinööri taitaa tietää ne. Voidaanko kuitenkin sanoa jommankumman, teknikon tai insinöörin olevan parempi, kuin toinen tai tietävän enemmän kuin toinen? (vrt. Günter Ropohl, 1997. *Knowledge Types in Technology*.)

Lenni Haapasalo (2004) avaa paradoksia käsitteiden konseptuaalinen ja proseduraalinen tieto kautta. Haapasalo (2004, 51) kertoo, miten Hiebert & Lefevre (1986) ovat perinteisesti tulkinneet konseptuaalisen (*conceptual knowledge*) tiedon tiedoksi riippuvuuksista ja proseduraalisen (*procedural knowledge*) tiedon tiedoksi, johon on nimenomaisesti liitetty dynaamisuus sekä kysymys miten. Konseptuaalinen tieto vastaa kysymykseen miksi. Matematiikassa nämä voidaan karri-

koidusti jakaa opetelluiksi säännöiksi ja prosesseiksi. Haapasalo ei ole kuitenkaan tyytyväinen tällaiseen staattiseen kahtiajakoon, vaan on määritellyt ne monipuolisemmin.

Konseptuaalinen tieto

Haapasalo (2004, 52) kertoo, miten he ovat vuoden 2000 julkaisussaan yhdessä Djordje Kadjevichin kanssa pohtineet konseptuaalisen tiedon luonnetta rakentuvana merkityksien verkkona, jonka solmujen ja linkkien tulkintaan ja rakentamiseen oppilas itse kykenee (ks. konstruktivistinen oppimiskäsitys luku 2.1). Oppilas tiedostaa ja ymmärtää toimintansa perusteet ja logiikan. Solmuiksi ja linkeiksi hän luokittelee muun muassa käsitteet, toiminnot tai jopa ongelmat. Huomattavaa on, että solmut ja linkit ovat dynaamisia ja siten yksilön itsensä konstruoitavissa; yksilö rakentaa omaa merkityksiensä verkkoa. Näin ollen konseptuaalisen tiedon rakentumista ei voida ratkaista luomalla valmis kiinteä verkko solmuineen ja linkeineen. Oppilaille on annettava vapaus itse rakentaa omat linkkinsä eri solmujen välille. (Mt. 53.) (ks. luku 3.1.2)

Jorma Joutsenlahti (2005, 82) kirjoittaa, että tieto on konseptuaalista vain, jos henkilö tunnistaa sen yhteyden muihin tietoihin. Toisin sanottuna konseptuaalisen tiedon luonteeseen kuuluu juurikin verkkomaisuus, kuten myös Haapasalo edellä esitti.

Proseduraalinen tieto

Edelleen Haapasalo (2004, 53) jatkaa, että proseduraalinen tieto tarkoittaa dynaamista ja tarkoituksenmukaista sääntöjen, menetelmien tai algoritmien käyttöä. Lisäksi hän mainitsee, että usein näiden käyttäminen vaatii pohjana olevan tietojärjestelmän esitysmuodon ymmärtämistä (ks. ymmärtäminen, luku 2.3), mutta ei näiden ominaisuuksien tietoista ajattelemista, ainakaan kun toiminta on automatisoitunut.

Joutsenlahti (2005, 85) määrittelee proseduraalisen tiedon erityispiirteeksi juurikin tällaisen jonomaisen etenemisen, algoritmin, jossa jokaisen vaiheen olemassaolo on perusteltavissa. (ks. kielennettävissä, luku 3.1.1; ratkaisun argumentointi, luku 3.1.5)

Konseptuaalisen ja proseduraalisen tiedon yhteys sekä strategiatieto

Haapasalo (2004, 54-56) korostaa konseptuaalisen ja proseduraalisen tiedon eron hankaluutta ja hän listaa neljä erilaista julkisessa keskustelussa ollutta näkökulmaa, joissa jokaisessa proseduraalinen (merk. P) ja konseptuaalinen (merk. K) tieto ovat erilaisessa hierarkkisessa vuorovaikutuksessa:

- 1) Riippumattomuuden näkökulma: K:lla ja P:llä ei ole yhteyttä.
- 2) Samanaikaisen aktivoinnin näkökulma: P on välttämätön ja riittävä ehto K:lle.
- 3) Dynaamisen vuorovaikutuksen näkökulma: K on välttämätön, mutta ei riittävä ehto P:lle.

4) Geneettinen näkökulma: P on välttämätön, mutta ei riittävä ehto K:lle.

Haapasalo on itsekin ollut ja on edelleen monen näiden näkökulman kannalla, sillä mikään niistä ei edusta K:n ja P:n yleistä yhteyttä. Opetustilanne ja käsiteltävä aihealue määräävät kuinka näitä näkökulmia tulisi tulkita. Muita tutkijoita hän nimeää mm. Nesher (1986), Resnick & Omanson (1987), Byrnes & Wasik (1991), Kline (1980) ja Sfard (1994) (Haapasalo, 2004, 56).

Palatakseni luvun 2.4.2 alussa olleeseen paradoksiin teknikolle, insinöörille ja diplomi-insinöörille ominaisten tiedonlajien paremmuudesta toisiinsa nähden, on Haapasalon tulkintaan helppo yhtyä, että toisinaan konseptuaalinen tieto tarvitsee rakentua proseduraalista ja vastaavasti on olemassa tilanteita, joissa proseduraalinen tieto tarvitsee konseptuaalista ollakseen merkityksellistä suhteessa muihin ilmiöihin.

Kahden edellisen tiedonlajin lisäksi voidaan ajatella olevan olemassa niin sanottu strategia-tieto. Tämä pitää sisällään muun muassa ongelmanratkaisussa tai esimerkiksi todistamisessa käytettävät strategiat. Matemaattisia strategioita voidaan pitää menetelminä, joissa hyödynnetään matemaattisia käsitteitä, lauseita tai algoritmeja. Strategiatietoon sisältyy myös ratkaisijan omat metakognitiot, jotka ohjaavat edellä mainittujen tapaisia matematiikan perusoperaatioita ja niiden käyttöä. Yhdessä näistä voidaan käyttää nimitystä heuristiset prosessit. (Joutsenlahti, 2005, 89.)

Näissä edellä mainituissa kolmessa tiedonlajissa yhdistyvät Kilpatrickin ym. (2001) piirteet matematiikan osaamisesta. Heuristinen-sana juontuu kreikan kielen sanasta ”*heureka*”, joka tarkoittaa perimältään löytämistä (Abbott, 2004, 80). Omasta ajattelustaan etsiminen ja löytäminen onkin hyvä kielikuva *keksimiselle* ja toisaalta oleellinen osa puhuttaessa matemaattisista ongelmista ja edelleen ongelmanratkaisusta. Ongelmanratkaisun heuristiikkaa on tutkinut muun muassa George Pólya kirjassaan ”How to Solve It?” (1971).

2.5 Matemaattinen ajattelu

Matemaattinen ajattelu ei ole yksiselitteinen, helposti määriteltävä ilmiö (Joutsenlahti, 2005, 64). Matemaattisella ajattelulla tarkoitan sitä uskomusten, kulttuurin, matemaattisten kykyjen, informaation prosessointi- ja ongelmaratkaisutaitojen kokonaisuutta, joista matemaattinen ajattelu rakentuu (mt. 65) ja Joutsenlahti on määritellyt sen seuraavasti:

Opiskelijan matemaattinen ajattelu on hänen metakognitioidensa ohjaamaa matemaattisten tietojen (proseduraalista, konseptuaalista ja strategiatietoa) prosessointia, jossa yksilö organisoii uudelleen tietoverkkoaan. (Joutsenlahti, 2005, 103)

Määritelmä pohjaa Sternbergin artikkeliin ”What is mathematical thinking?” (1996). Siinä lähestytään matemaattista ajattelua eri puolilta. Näitä eri näkökulmia ovat psykometrinen, antropologinen,

pedagoginen, tiedematemaattinen ja tiedon prosessoinnin näkökulma. (ks. kuvio 3) Kuitenkaan nämä näkökulmat eivät sulje toisiaan pois, vaan ovat pikemminkin toisiaan täydentäviä tulkintoja samasta, moniselitteisestä ilmiöstä nimeltään - matemaattinen ajattelu.

Psykometrinen lähestymistapa pitää sisällään oppilaan matemaattiset kyvyt. Ihmismielen, ajattelunkentän ajatellaan olevan kuin kartta, jossa on eri puolilla erikokoisia alueita. (Joutsenlahti, 2005, 64.) Tällä ajattelun kentällä ajattelijat liikkuvat pyrkien hahmottamaan kokonaisuutta. Alueet voivat olla esimerkiksi matemaattisia käsitteitä tai kertolaskutaito. Günter Ropohl on käyttänyt termiä *diletantti* henkilöstä, jonka ajattelukentän kartta on laaja (*horisontaalisesti*), mutta jossa on vain vähän tietoa yksittäisistä alueista. Toisaalta henkilö, jonka kartan tiedot menevät syvälle (*vertikaalisesti*) vain muutamista alueista on *fakki-idiootti*. Sen sijaan henkilö, jonka kartassa on paljon tietoa jostain rajatusta alueesta ja tieto siitä kuinka se kytkeytyy osaksi kokonaisuutta on *generalisti*. (Karin Filanderin luentodia 3.3.2015, TaY)

Antropologinen lähestymistapa pitää sisällään oppilaan ympäröivän kulttuurin vaikutukset ajatteluun. Kulttuuri vaikuttaa arkipäivän matematiikkaan, jota henkilö kokee ja hänen uskomuksiinsa, jotka vaikuttavat edelleen matemaattiseen ajatteluun. (Joutsenlahti, 2005, 65.) Uskomukset vaikuttavat edelleen ajattelijan metakognitioihin ja siten myös matematiikan osaamiseen.

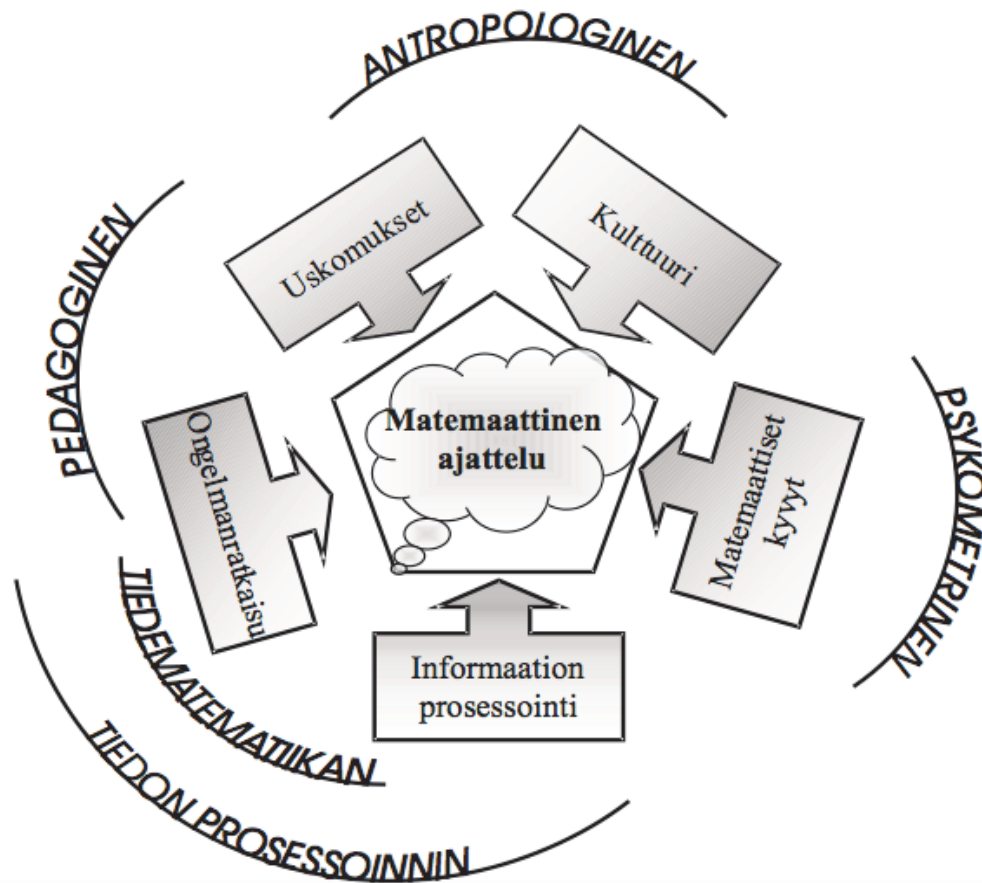
Pedagoginen lähestymistapa ottaa lähtökohdakseen opettamisen näkökulman. Siinä etsitään keinoja kehittää oppilaiden ajattelua. Keskeinen menetelmä opiskelussa on ongelmanratkaisu. Opettamiseen ja oppimiseen vaikuttavia tekijöitä ovat muun muassa oppilaiden uskomukset ja asenteen matematiikasta ja sen opiskelusta, luokassa tapahtuva sosiaalinen vuorovaikutus, opetettavan sisällön kontekstisidonnaisuus sekä mielekkyys oppilaille. (Mt. 65.)

Tiedematematiikan näkökulma tarkastelee mitkä matemaattisen ajattelun piirteet ovat keskeisimpiä muodostettaessa ja opittaessa matemaattisia käsitteitä ja toisaalta ongelmanratkaisussa. Matemaattisesta ajattelusta korostuvat tiedon prosessointi ja ongelmanratkaisutaidot. (Mt. 66.)

Tiedonprosessoinnin lähestymistapa pitää sisällään informaation prosessoinnin ohella myös ongelmanratkaisun koulukontekstissa. Ongelmanratkaisu koostuu erityyppisten tietojen prosessoinnista, joita kuvaamalla päästään kiinni siinä tapahtuvaan matemaattiseen ajatteluun. Henkilön uskomukset vaikuttavat hänen metakognitioihinsa, jotka ohjaavat ongelmaratkaisuprosessia yhdistyksen strategisessa tiedossa. Näin ollen tiedon prosessoinnissa uskomuksilla on merkittävä vaikutus ja ne on syytä ottaa lähestymistavassa tarkasteluun mukaan. (Mt. 66.)

Tässä tutkimuksessa erityisessä huomiossa on pedagoginen lähestymistapa, sillä yksi perimmäinen tarkoitus tutkimuksella on selvittää uusien tehtävätyyppien mahdollista vaikutusta oppilaiden ajatteluun ja oppimiseen. Tutkimuksen tarkoituksena on selvittää toimivatko kielentämistehtävät itsessään opettavaisina auttaen oppilasta jäsentämään ajatteluaan ja toisaalta miettimään mate-

matiikkaa uudella tavalla ja edelleen saadaanko tämä ajattelu näkyväksi ja edelleen arvioitavaksi. Toisaalta myös psykometrinen ja tiedonprosessoinnin lähestymistavat korostuvat, sillä tutkimukseen liittyvät tehtävät edellyttävät oppilaita jo olemassa olevien matemaattisten taitojen ja - tietojen käyttöä uudella tavalla. Siis uudenlaista tapaa lähestyä samoja matemaattisia ongelmia. Näin ollen ongelmanratkaisun myötä myös tiedematemaattinen lähestymistapa on mukana. Antropologisen lähestymistavan ilmiöt vaikuttavat varmasti taustalla ja voivat tulla esiin oppilaiden esittämien esimerkkien ja vastauksissaan antamien merkitysten, ts. kielentämisen (ks. luku 3) kautta.



KUVIO 3. Sternbergin (1996) hahmottelemat matemaattinen ajattelun käsitteelliset lähtökohdat ja lähestymistavat. (Joutsenlahti, 2005, 65.)

3 KIRJALLINEN KIELENTÄMINEN

3.1 Kielentäminen ja kirjallinen kielentäminen

Kielen ajatellaan olevan sovittu merkkijärjestelmä, jossa jokaisella merkillä on muoto ja merkitys (Joutsenlahti, 2003, 4). Matematiikassa eri kieliä ajatellaan olevan neljä: *symbolikieli*, *luonnollinen kieli*, *kuviokieli* ja *taktillinen toiminnan kieli* (Joutsenlahti & Rättyä, 2015, 52).

Kielentäminen (matematiikassa) tarkoittaa matematiikan abstraktien ilmiöiden saattamista havaittavaan muotoon edellä mainittujen kielten avulla. Toisin sanottuna kielentämällä matemaattinen ajattelu saadaan näkyväksi (Joutsenlahti, 2003, 10). Eli matemaattisen ajattelun kautta hahmotetuille matematiikan ilmiöille annetaan *niitä vastaavia eri kielten merkityksiä* kielentämisen avulla (ks. kuvio 7, luku 3.6). Eri kielet ovat vuorovaikutuksessa kielentämisprosessin sisällä ja näin jäsentävät toinen toistaan.

Annetut merkitykset jäsentävät edelleen kielentäjän matemaattista ajattelua ja toisaalta muut, kuten esimerkiksi opettaja, toiset oppilaat tai vanhemmat voivat arvioida ja verrata sitä omaan ajatteluunsa (mt. 8). Merkitysten antaminen toisin sanottuna kielentäminen voi tapahtua, niin sanallisesti, kuvallisesti (mt. 4) kuin myös toiminnan kautta (Joutsenlahti & Rättyä, 2015, 51).

Sanallisesti kielentäminen voi tapahtua suullisesti tai kirjoitetun tekstin välityksellä ja se voi pitää sisällään luonnollisen kielen ilmauksia, mutta myös matematiikan symboleita. Sanallisesti annettuun merkitykseen, eli kielennykseen vaikuttavat puhutussa kielessä myös ilmeet ja eleet. (Joutsenlahti, 2003, 4-5) Toisaalta kirjoitetussa kielessä vastaavia asioita ilmentävät muun muassa hymiöt. Koska tutkimukseni keskittyy kirjallisiin kielentämistehtäviin, jätän suullisen kielentämisen tälle maininnan asteelle.

Perinteisin tapa kielentää matematiikkaa on käyttää matematiikan symboleja ja niitä vastaavia kielen ilmauksia. Kuitenkin luonnolliselle kielelle ominainen luovuus ja rikkaus on merkitysten antamisen ja oppijan ymmärryksen ja matemaattisen ajattelun kannalta tärkeää, mikä jää helposti pois perinteisesti ihannoidun niukan ja tarkan matematiikan ilmaisun edessä (Morgan, 2001, 235).

Kuviokielellä kielentäminen tarkoittaa muun muassa kuvien, kuvioiden ja kuvaajien piirtämistä (Joutsenlahti, 2003, 4-5).

Uusin aktiiviseen keskusteluun noussut matematiikan kieli on niin sanottu taktillinen, kosketuksen kieli, jonka Joutsenlahti ja Rättyä (2015, 51) tulkitsee tulevan käyttöön erityisesti konkreettisten toimintamateriaalien kautta.

Kirjallisella kielentämisellä matematiikassa tarkoitetaan matemaattisen ajattelun ja päättelyn kirjoittamista. (Candia Morgan, 2001, 232) Kieli voi olla, joko niin sanottua luonnollista kieltä, eli esimerkiksi ajattelun kielellä (äidinkielellä) kirjoitettuja lauseita, kuviokieltä, tai matematiikan symbolikieltä (Joutsenlahti & Kulju, 2010, 81). Kaksi ensin mainittua ovat yleisesti kielentämisen kannalta erityisen mielenkiintoisia, sillä perinteisesti matematiikkaan on sisällynyt suhteessa hyvin paljon matematiikan symbolikieltä (Morgan, 2001, 233).

Kielentämisessä oleellinen seikka on eri kielten välillä tapahtuva koodinvaihto. Käsite koodinvaihto (*eng. code-switching*) on noussut kielentutkimuksen parista ja sillä tarkoitetaan kahden tai useamman kielen esiintymistä samassa keskustelussa (Kovács, 2009, 24). Matematiikassa sillä tarkoitetaan esimerkiksi luonnollisella kielellä annetun tehtävän ratkaisemista symbolikielellä. Edelleen on mahdollista, että symbolikielen tuotos annetaan lopullisessa vastauksessa jälleen luonnollisella kielellä, jolloin saman tehtävän aikana koodinvaihto on tapahtunut ainakin kaksi kertaa. Samaan tehtävään liittyen voidaan myös piirtää kuva ja toisaalta käyttää ratkaisun tukena toimintamateriaaleja. Edelleen tehtävästä voidaan puhua muiden kanssa, jolloin koodi vaihtuu jälleen kerran.

Koodinvaihto matematiikan sanallisissa tehtävissä on hyvin luontainen osa laskuproseduuria, eikä siihen välttämättä edes erikseen kiinnitetä huomiota. Poikkeuksen tekee lähinnä se, kun opettaja vaatii vastauksen kokonaisuena virkkeenä ja oppilas tyytyy matematiikan symbolikielen vastaukseen, joka on annettuna merkityksenä oikein, mutta koodattu virheellisesti edustaen siinä tilanteessa väärää matematiikan kieltä.

Myöhemmin tässä pro gradu -tutkimuksessani käytän termiä kielentäminen kirjallisen kielentämisen kontekstissa, koska lähestyn kielentämistä kirjallisen kielentämisen kautta ja aineistoni perustuu pelkästään kirjallisen kielentämisen kautta saatuihin vastauksiin. Jos tarkoitan molempia sekä suullista, että kirjallista kielentämistä tulen mainitsemaan siitä erikseen.

3.2 Kirjallisen kielentämisen erityispiirteitä

Perinteisesti, vaikka vihkot ovatkin olleet täynnä kirjoitusta (toisin sanottuna kynällä tehtyjä merkkejä), oppilaat eivät ole kirjoittaneet luonnollisella kielellään juurikaan matematiikan tunneilla. Ainoa luonnollisen kielen kirjoitus on ollut korkeintaan määritelmien kopiointia taululta. Kuitenkin nykyään ollaan enemmän tietoisia luonnollisen kielen käyttämisen hyödyistä matematiikan opiske-

lussa. Kokemusmaailmaan sidotut matematiikan tapahtumat, kuten erinäiset ongelmanratkaisut sekä tutkimustehtävät panevat oppilaat kommunikoimaan matematiikan symbolikielen ohella myös luonnollisella ja kuvakielellä. (Morgan, 2001, 232)

Kirjallisesta kielentämisestä on hyötyä niin matematiikan oppimisessa, sen ymmärtämisessä ja toisaalta oppilaan osaamisen arvioinnissa. Kielentäminen voi avata uusia, ymmärrettävämpiä näkökulmia matematiikkaan (ks. ymmärtämisen merkitys matematiikassa, luku 2.3). Kielentämisessä tapahtuva reflektio edistää myös oppilaan asenteita. Arviointi monipuolistuu ja tulee oikeudenmukaisemmaksi, kun oppilaan ajatukset ovat paperilla. Lisäksi arviointi ohjaa edelleen oppilaan ajattelua, kun oppilaille konkretisoituu se, mikä hänen matemaattisessa ajattelussaan vaatii korjausta pelkän väärän tuloksen huomioimisen sijaan. (Mt. 232-243) (ks. konstruktivismi ja uuden oppiminen, luku 2.1.)

3.2.1 Vaikutukset oppimiseen

Kielentäminen parantaa matematiikan oppimista, sillä kielentäjän oma ajattelu jäsentyy samalla, kun hän kielentää loogisesti eheää kirjallista tuotosta (ks. konseptuaalinen tieto, luku 2.4.2). Kirjallinen tuotos mahdollistaa omiin (ja toisen) ajatuksiin palaamisen ja näin ajatusten vertailun ja jatkokehityksen. (Mt. 234.)

Kirjallisessa kielentämisessä on erityispiirre, että palautetta ei voi saada heti asian esitettyään, toisin kuin esimerkiksi suullisessa kielentämisessä. Tämä aiheuttaa sen, että tekstin tulee olla hyvin jäsenneiltyä, mutta toisaalta se on mahdollista, koska kielentäjällä on aikaa tarkastaa omaa tekstiään. Näin ollen kirjallinen teksti on parhaassa tapauksessa myös tarkempaa, kuin puhuttu. Syvällisyyttä ja johdonmukaisuutta lisää myös se, että kirjoittaja ei voi kysyä eikä palata myöhemmin ilmeneviin kuuntelijan ymmärryksen aukkoja toisin kuin sanallisessa vuorovaikutuksessa oleva puhuja. (Mt. 233.) Edellä on kuvattu sykli, jossa kirjoitettu tuotos jäsentää kielentäjän omaa ajattelua, mikä voi tuottaa lopulta loogisia ja yksikäsitteisiä merkityksiä edelleen kirjoitettavaan tuotokseen (Joutsenlahti & Rättyä, 2015, 54).

Tarkka kirjallinen tuotos pakottaa kielentäjän ajattelemaan huolella ja pohtimaan omaa ajatteluaan, toisin sanottuna reflektoimaan onko saatu ratkaisu argumentoitu huolella. Näin ollen kielentäjän oma ajattelu jäsentyy samalla, kun hän kielentää ja koko prosessi jäsentää ajattelua ja parantaa matemaattista ajattelua. Nämä seikat yhdessä parantavat kielentäjän kaikkia tiedonlajeja (ks. luku 2.4.2) ja edelleen ongelmaratkaisutaitoja ja toisaalta oman ymmärryksen lisääntyä myös asian esittäminen toisille helpottuu oleellisesti. (Morgan, 2001, 233.)

Kirjallisesti kielennetty tehtävä ja ajatus säilyy sen julkistamishetken jälkeenkin, jolloin siihen voidaan palata myöhemmin. Oppilas voi palata aiempaan ajatukseensa helposti ja vaikka tarpeen vaatiessa jatkaa päättelyään siitä mihin on edellisellä kerralla jäänyt. Lisäksi oppilaat voivat vertailla ajatuksiaan ja todeta niiden erojen ja samankaltaisuuksien pohjalta jotain merkitsevää. (Mt. 234.)

Usein matematiikan ajatellaan olevan kylmää ja hyvin abstraktia (mt. 235). Usein matemaatiikka samaistetaan arkikeskusteluissa jopa laskemiseen. Lupa kirjoittamiseen ja omien ajatusten julki tuomiseen kuvien ja tekstin avulla tuo matematiikkaan uudenlaista luovaa puolta, mikä varmasta motivoi uusia oppilaita matematiikan piiriin parantaen heidän asenteitaan matematiikkaa kohtaan (mt. 235). Lisäksi asenteita parantaa kielentämisestä seuraava ajattelun jäsentyminen (ks. osaamisen ja asenteiden suhde, luku 2.2). Edelleen uusi tapa lähestyä matematiikan tehtäviä varmasti antaa uutta näkökulmaa myös jo valmiiksi matematiikkaa osaaville ja siitä pitävälle.

Motivaation paraneminen tehtävien tekoa kohtaan edistää oppimista. Esimerkiksi kognitiivisten strategioiden (ks. luku 2.4.2) opettelu vaatii oppilaalta ponnistelua, mikä ei onnistu ilman kiinnostusta ja sitoutumista harjoitteluun. (Nurmi, 2013, 548.) Näin ollen on helppo uskoa, että motivaation paraneminen matematiikan harjoittelua kohtaan, lisää harjoittelun määrää, mikä taas osaltaan vaikuttaa positiivisesti matemaattiseen osaamiseen, mikä edelleen vaikuttaa asenteisiin positiivisesti.

Arviointi perustuu standardisoituun, todennettuun osaamiseen, joka pohjautuu behavioristisen perinteen mukaisesti käyttäytymiselle ja siinä havaituille ominaisuuksille ja muutoksille (mm. Leino, 1977). Kirjallisella työllä on ollut ja tulee olemaan suuri merkitys tämän osaamisen näyttämisessä, toteamisessa ja edelleen arvioinnissa.

Kun oppilas kirjaa pelkän vastauksen sijaan, antamansa merkitykset paperille, opettaja pystyy arvioimaan oikeudenmukaisesti ja tarkemmin oppilaan matematiikan osaamista ja ajattelua. Tämä tarkoittaa sitä, että kun arvioinnin kirjallinen osuus pitää sisällään muillakin, kuin vain symbolikielellä tuotettuja merkityksiä, saadaan oppilaan osaamisesta kokonaisvaltaisempi ja tarkempi kuva, jolloin opettaja pystyy suunnittelemaan ja kohdistamaan opetuksensakin tarkemmin yksilön kokemiin hankaliin sisältöihin. Toisaalta kirjoittamisen arviointi auttaa myös oppilaita hahmottamaan selvemmin, mikä on missäkin tapauksessa oikeasti merkityksellistä ja näin ollen auttaa heitä saavuttamaan eheämpää matemaattista ajattelua ja toisaalta ohjaa kirjallista tuottamista tehokkaampaan suuntaan. (Morgan, 2001, 235-241)

3.2.2 Haasteet

Kirjalliseen kielentämiseen liittyy kuitenkin myös haasteita. Ylipäättään kirjallinen kielentäminen on haastavaa, se vaatii enemmän keskittymistä ja ajattelun reflektointia, kuin samojen asioiden mielessä läpikäyminen tai puhuminen niistä. Ylipäättään itsessään kirjoittamiseen liittyy omia haasteita, kuten ajatuksen mielessä prosessointi ja varsinainen kirjoitustyö. Toisaalta opettajan arviointi perustuu edelleen tulkintaan oppilaan tuotoksesta (käyttäytymisestä), joten oppimisen arvioinnin kaikkia ominaisia ongelmia kielentäminen ei myöskään ratkaise. (Morgan, 2001.) Toisaalta kirjallinen kielentäminen on pakottavan ajattelun lisääntymisen takia työlästä ja aikaa vievää, mikä ei välttämättä innosta kaikkia. Tämä ilmiö on rinnastettavissa motivaatioon tai pikemminkin sen puutteeseen ja siten siis siihen, että oppilas ei koe tarpeelliseksi ponnistella kognitiivisen haasteen edessä (Nurmi, 2013, 548).

Kirjallinen kielentäminen, kuten mikä tahansa muukin asia vaatii aktiivista harjoittelua ja ohjausta, jotta siitä tulee tehokasta. Kirjallisen tekstin tuottaminen eroaa puhutusta sen suhteen oleellisesti, että toisin kuin puhuttu kieli, kirjallinen teksti ei ole luonnollinen toiminto. Tällä tarkoitetaan sitä, että kirjallinen teksti on sovittu koodisto, joka on luotu sanallisen tekstin pohjalta ja se ei synny ja kehity automaattisesti. Näin ollen se vaatii tarvitsee erityistä harjoittelua ja ohjausta. (Morgan, 2001, 240-241.)

Kirjallinen kielentäminen on työlästä ja aikaa vievää. (Joutsenlahti, 2010, 10) Se näyttää kielentäjälle itselleen oman ajattelunsa aukkokohtat ja antaa mahdollisuuden paneutua omaan ajatteluunsa ja kirjalliseen tuotokseensa paljon syvemmälle, kuin tulos- ja laskukeskeinen suhtautuminen matematiikkaan. Jos edelleen tavoite on laskea laskuja mahdollisimman paljon, saattaa tällainen tapa työskennellä tuottaa tekijälleen stressiä ja huolta. Joku ymmärtää matematiikan merkitykset ilman luonnollista - tai kuvakieltä, jolloin niiden käyttö voi tuntua turhalta. (Mt. 10.)

Kuitenkin jos tarkoituksena on ymmärtää ja kehittää omaa ajatteluaan, ei ajan kulumisen pitäisi olla ongelma. Kirjoittaminen itsessään saattaa tuntua itselle vieraalta, jolloin sen yhdistäminen matematiikkaan saattaa vieraannuttaa myös matematiikkaa. Ymmärtämällä, että kielentäminen pitää itse asiassa sisällään myös matematiikan, niukan (ja ”kauniin”) symbolikielen auttaa lahjakkaita oppilaita ymmärtämään kielentämisen mielekkyyden. Kielentäjät, joiden asenne runsassanaista luonnollista - tai niukkaa symbolikieltä kohtaan on lähtökohtaisesti negatiivinen, voivat tuottaa merkityksensä myös kuvien, nuolien ja yksittäisten ilmauksien avulla (ks. luku 3.1). Kirjallisessa kielentämisessä muoto ei ole tärkeintä, vaan sisältö eli tuotettu merkitys. Jokainen kielentää itselleen sopivimmalla tavalla luoden merkityksensä matematiikan abstrakteille ilmiöille.

Arvioinnissa tulee muistaa, että kirjoitettu ajatus on aina hieman eri kuin sen synnyttänyt alkuperäinen ajatus (ks. Platon, Ideaoppi). Kirjallisessa kielentämisessäkin täytyy ottaa huomioon, että osaltaan opettaja joutuu edelleen tulkitsemaan oppilaan kielennystä. Tulkintaan vaikuttavat muun muassa opettajan ja oppilaan mielikuvat asiasta. Kuitenkin monipuolistamalla kirjallista työtä matematiikassa ja harjoittelemalla voidaan pienentää tulkinnan osuutta arvioinnissa, jolloin tulkinnan osuus jää pienemmäksi, kuin verrattuna perinteiseen kirjalliseen työhön. (Morgan, 2001, 237.)

3.3 Sanalliset tehtävät matematiikassa

Seuraavassa Joutsenlahden ja Pirjo Kuljun (2010, 82) esittämä esimerkki perinteisestä matematiikan sanallisesta tehtävästä. He ovat ottaneet tehtävän Kolmio-kirjasta (Jaakkola, Latva, Nieminen, Tolvanen & Tuomaala, 2001, 117):

”Lankinen keräsi yhdessä vaimonsa kanssa puolukoita. Lankinen keräsi 5 litraa enemmän kuin vaimonsa ja yhteensä he saivat 37 litraa. Kuinka paljon keräsi Lankinen, kuinka paljon vaimo?”

Joutsenlahti ja Kulju (2010) ovat lähestyneet matematiikan sanallisia tehtäviä kieliteoreettisesta näkökulmasta. Sanalliset tehtävät ovat perinteisesti suljettuja tehtäviä, joissa alku ja lopputilanne on ennalta määrätty. Lyhyttä ja täsmällistä ilmaisua arvostetaan ja pidetään matemaattisesti tyylikkäänä. Sanallisten tehtävien avulla harjoitellaan opiskeltavia matemaattisia proseduureja ja pyritään tukemaan ratkaisijan matemaattisen ajattelun kehittymistä. Matemaattisia olioita kätketään tehtävänantoon tuttuihin tilanteisiin luonnollisen kielen avulla, siten että kätketyt matemaattiset merkitykset ovat mahdollisimman yksiselitteisiä ja toisaalta semanttiset tulkinnat niiden suhteen pyritään pitämään mahdollisimman niukkoina. Lisäksi oletetaan, että tehtävä on ratkaistavissa annetuilla tiedoilla ja että ratkaisuja on vain yksi, jonka ratkaisemiseen käytetään kaikkia annettuja lukuarvoja. (Mt. 82-83.)

Sanallisiin tehtäviin on tyypillisesti sisällytetty vain ratkaisun kannalta oleelliset faktat, toisin sanottuna tehtävänannossa ei ole suurimmaksi osaksi mitään ylimääräistä tietoa. Laskemisen kannalta ylimääräinen tieto liittyy usein siihen kulttuurikontekstiin, johon tehtävä liittyy, kuten esimerkiksi että Lankinen *vaimonsa* kanssa kerää *puolukoita*. Sillä, että Lankinen on oman vaimonsa kanssa keräämässä juuri puolukoita ei ole tulevan laskun matematiikan kannalta merkitystä, mutta rakentaa sitä tehtävän kulttuurikontekstia, jonka me suomalaiset ymmärrämme. (Mt. 82-83.)

Perinteiseen matematiikan sanalliseen tehtävänantoon ei ole siis sisällytetty juurikaan tarinallisia elementtejä. Näitä elementtejä ovat muun muassa syy-seuraus-suhde ja tunnelatauksen ja ar-

vojen tuominen laskijan ratkaisun osaksi. Kuten, edellä mainitussa puolukkaesimerkissä ei kerrota miksi henkilöt menivät ylipäätään puolukkaan, tai oliko jompikumpi esimerkiksi vastentahtoinen tulemaan sinne. Kuitenkin tällaisten tarinallisten elementtien tuomisesta mukaan matematiikan sanallisiin tehtäviin on olemassa Smith, Gerretsonin, Olkunin ja Joutsenlahden tutkimus vuodelta 2010 (Effect of Causal Stories in Solving Mathematical Story Problems), jossa tarinallisuuden merkitystä laskun ratkaisemiselle tutkittiin kolmessa maassa. Tutkimukseen osallistuneet maat olivat USA, Turkki ja Suomi. (Smith ym. 2010.)

Tutkimuksessa laadittiin kahdesta eri tehtävästä kolmen eritasoiset tehtävänannot, joiden ratkaisut pisteytettiin ja pisteytyksiä vertailtiin toisiinsa. Tehtävänannot olivat standardi, jossa tarinalliset elementit ovat minimissään ja malli kuvaa Joutsenlahden ja Kuljun esittämää perinteistä matematiikan sanallista tehtävää. Toinen tehtävänanto piti sisällään hieman tarinallista elementtiä ja kolmas piti sisällään jo reilusti, jopa liioitellen tarinallisuutta, syy-seuraus-suhdetta ja dramatiikkaa. (Mt. 284.) Tutkimukseen osallistuneissa maissa USA:ssa ja Suomessa tarinallisuuden lisääminen paransi tuloksia, mutta Turkissa osattiin standarditehtävä parhaiten. Näin ollen tutkimuksessa mainitaan, että on olemassa viitteitä siitä, että tarinallisuuden lisääminen voisi parantaa oppilaiden matemaattisten tehtävien osaamista, mutta kulttuurisella viitekehyksellä ajateltiin olevan merkitystä, sillä tehtävät oltiin kirjoitettu USA:ssa kristityn länsimaalaisen silmin (mt. 290). Kulttuurimaiseen otti kantaa myös Joutsenlahden ja Kuljun (2010, 83) analyysi sanallisista tehtävistä.

Tarinallisuuden lisäämisen ajateltiin parantavan oppilaan motivaatiota sanallisia tehtäviä kohtaan ja myös parantavan oppimista. Kuitenkin tarvittaneen vielä lisätutkimusta mitkä osa-alueet matematiikassa hyötyvät erityisesti tarinallisuuden lisäämisestä sanallisiin tehtävänantoihin. Kuitenkin näiden elementtien tuominen mukaan ei-rutiinitehtäviin näyttäisi parantavan oppilaan suoritusta, kun otetaan ratkaisijan oma ja tehtävän viitekulttuuri huomioon. (Smith ym. 2010, 291-292.)

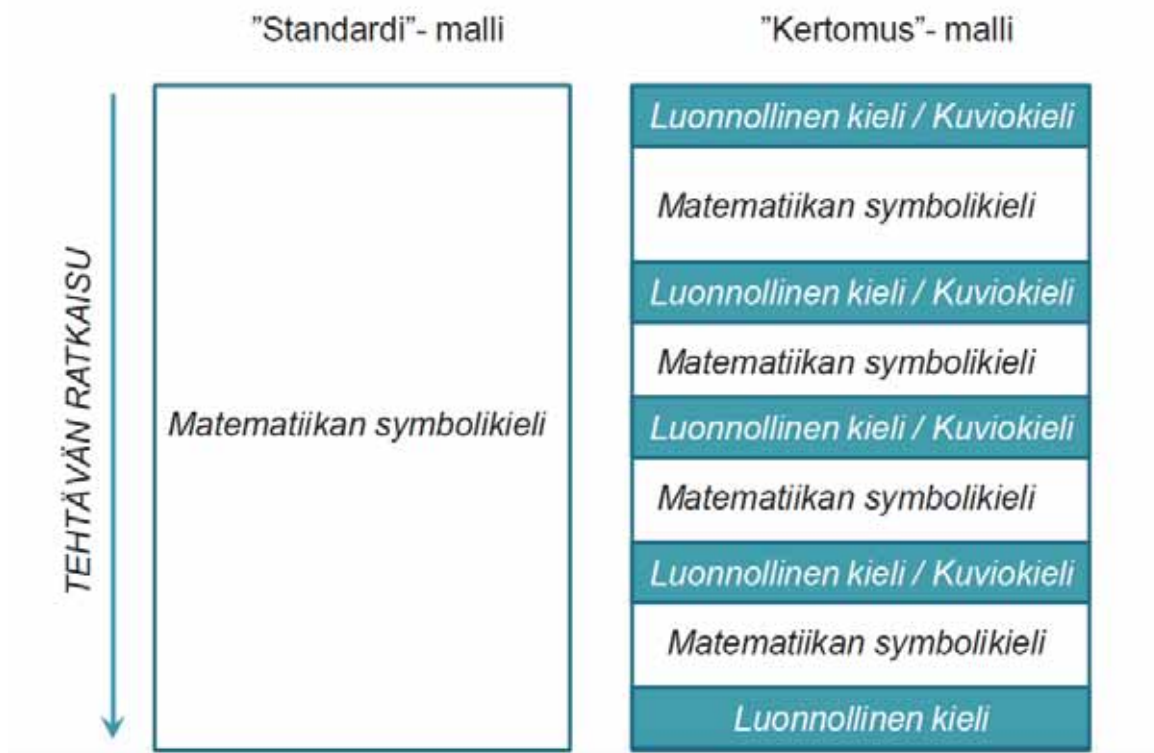
3.4 Erilaisia kirjallisia kielentämismalleja

Joutsenlahti on tutkimustensa pohjalta määritellyt erilaisia kirjallisia kielentämismalleja olevan viisi kappaletta. Nämä ovat ”standardi”-, ”kertomus”-, ”tiekartta”-, ”päiväkirja”- ja ”kommentti”-malli (Joutsenlahti, 2009, 1; 2010, 12). Mallit ovat siis tapoja, joilla niin sanottuja perinteisiä matematiikan tehtäviä voidaan ratkaista käyttämällä apuna kielentämisen ominaisuuksia, kuten koodinvaihtoa.

”Standardi”-malli on perinteisin tapa kielentää matematiikkaa kirjallisesti. Eli ajatustyö tehdään päässä, jonka tuotos muotoillaan paperille matemaattisia symboleita käyttäen. Lopullinen

vastaus on voitu antaa luonnollisella kielellä. (Joutsenlahti, 2010, 7.) Esimerkiksi tehtävänannot ”Muodosta lauseke ja laske.” ja sen tuottamat ratkaisut lukeutuvat usein tähän malliin.

”Kertomus”-mallissa ratkaisussa on perusteluja ja sen eteneminen kuvataan vaiheittain ja väliotsikoiden sanallisesti sekä mahdollisesti kuvia käyttäen. Mallissa symbolinen -, luonnollinen - ja kuvakieli täydentävät toinen toistaan samalla muodostaen ”laskukertomuksen” juonesta helposti seurattavan kokonaisuuden. (Mt. 6.)

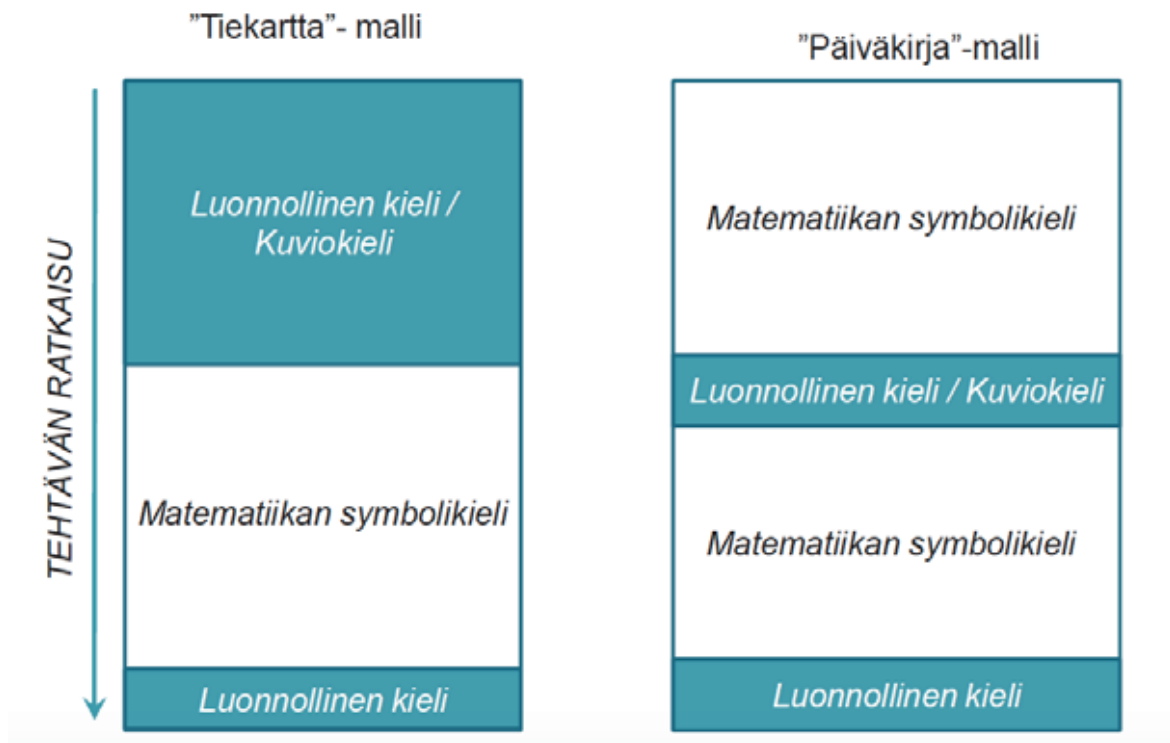


KUVIO 4. Kirjallisen kielentämisen ”standardi”- ja ”kertomus”-malli. (Joutsenlahti, 2009, 6.)

”Tiekartta”-mallissa ratkaisija muotoilee ensin tulevan ratkaisunsa ”punaisen langan” luonnollisen - ja kuvakielen avulla, jonka jälkeen suorittaa edellä kuvaamansa laskut matematiikan symbolikielillä. Verrattuna ”standardi”-malliin ”tiekartta”-mallissa ajatustyö kirjataan myös näkyviin. (Mt. 6-7.)

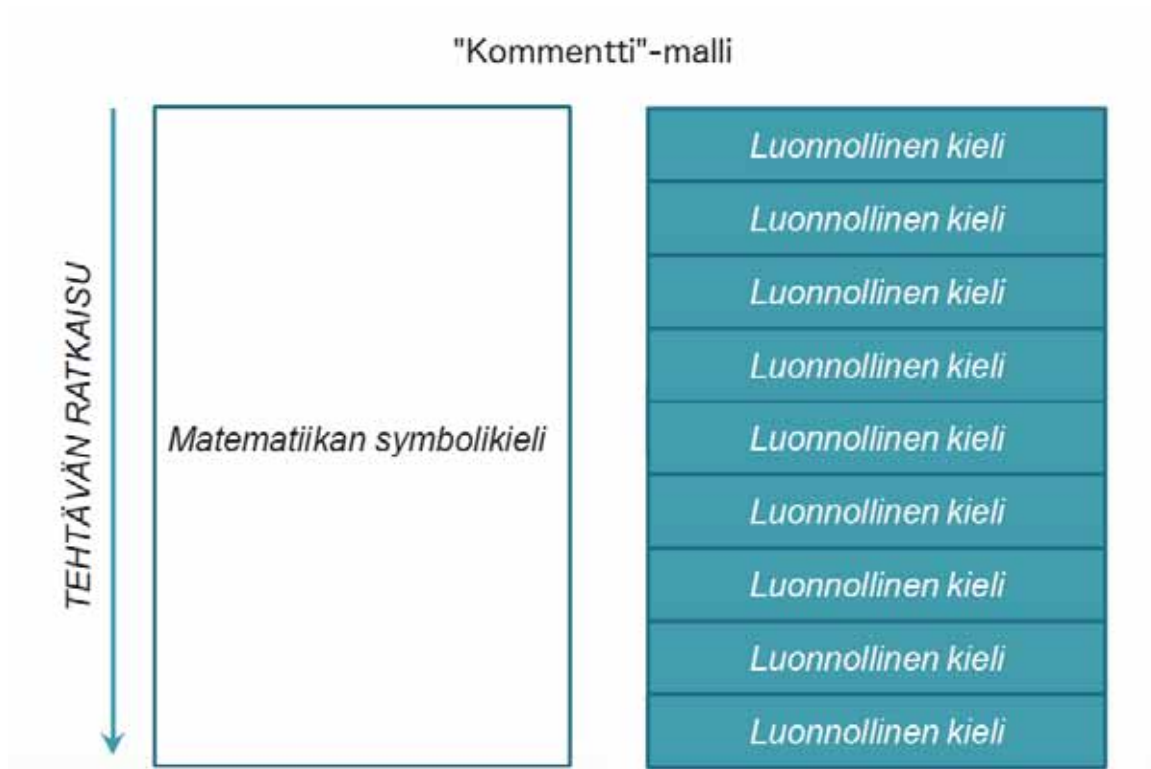
”Päiväkirja”-malli on lähes samanlainen, kuin ”kertomus”-mallikin siinä mielessä, että siinä matematiikan symbolikieli ja luonnollinen - sekä kuvakieli vuorottelevat. Kuitenkin erona ”päiväkirja”-mallissa on se, että tässä symbolikieli väistyy vain niissä tapauksissa, joissa ratkaisija on kohdannut ongelman, joka ei ole ratkennut pelkästään symbolikielen avulla. Hän on jäsentänyt ajatteluaan ylittääkseen ongelman ja siirtyminen muiden kielten käyttöön on perustunut omaan, ei

ulkoisen lukijan tarpeeseen. Kyseessä onkin ”standardi”-malli lisättynä muutamalla pienellä henkilökohtaisella ”päiväkirjamerkinnällä”. (Joutsenlahti, 2010, 7.)



KUVIO 5. Kirjallisen kielentämisen ”tiekartta”- ja ”päiväkirja”-malli. (Joutsenlahti, 2009, 7.)

”Kommentti”-malli on sellainen, jossa on tehtävä on ratkaistu matematiikan symbolikieltä käyttäen ja ratkaisun viereen on kerrottu kyseisen ratkaisuvaiheen perustelut tai syy luonnollisella kielellä. Tämä malli on myös niin sanottu perinteinen pedagoginen malli, jota esimerkiksi opettaja voi käyttää tunnilla, kun laskee laskun ja perustelee välivaiheita laskun vierelle. (Mt. 12-13.)



KUVIO 6. Kirjallisen kielentämisen kommenttimalli. (kuvaidea: Joutsenlahti, 2010, 12-13)

3.5 Kielentämistehtävätyyppejä

Edellä olevista kielentämismalleista on johdettu erilaisia kirjallisia kielentämistehtävätyyppejä. Hanna Sarikka (2014) on tutkinut näitä omassa diplomityössään. Hän tutki kielentämistehtäviä yliopistossa sekä lukion lyhyessä matematiikassa. Erilaisia tehtävätyyppejä Sarikka (mt. 26) luettelee olevan seitsemän kappaletta. (Ks. taulukko 1.)

Kielentämistehtävien vastaukset vastaavat laadullisiin *miten* ja *miksi* -kysymyksiin, ei lähtökohtaisesti määrälliseen *mitä*-kysymykseen. Näin ollen kielentämistehtävätyypit eivät suoraan kehitä laskutaitoon liittyviä ominaisuuksia, kuten laskurutiinia, koska kielentämisen kannalta tuotettu tulos ei ole kiinnostava ilman merkitystä sen takaa. Kuitenkin laskutaitoon liittyvä ominaisuus, kuten huolellisuus ja oikeat merkinnät toki ovat mukana myös näissä tehtävissä. Luvussa 2.4 esitellyn Joutsenlahden yksinkertaistetun Wilsonin taksonomian mukaisesti tehtävätyypit sijoittuvat kaikki kahdelle ylemmälle tasolle. Tiedonlajeittain katsottuna nähdään samanlainen asetelma, että konseptuaalinen tieto ja toisaalta strategiatieto ovat tehtävissä keskiössä, jolloin proseduraalinen tieto lisääntyy näiden tiedonlajien kautta.

TAULUKKO 1. Erilaiset kielentämistehtävätyypit (mukaillen: Sarikka, 2014, 26.)

TEHTÄVÄMALLI	SELITYS
Koodinvaihto	Matematiikan eri kielestä toiseen siirtyminen
Täydennys	Täydennetään annettuun ratkaisuun puuttuvia, mutta ratkaisun kannalta olennaisia asioita.
Virheen etsintä	Etsitään valmiiksi annetusta ratkaisusta virhe(itä).
Ratkaisusta tehtävä	Päätellään annetusta ratkaisusta kysytty asia eli tehtävänanto, johon ratkaisu sopii.
Ratkaisun argumentointi	Perustellaan valmista tai itse tehtyä ratkaisua matematiikan eri kielten avulla.
Tiedonseulonta	Etsitään tehtävänannosta ratkaisun kannalta olennaiset asia.
Omin sanoin selvitys	Annetaan merkitys jollekin asialle kirjallisesti ilman matematiikan symbolikieltä.

3.6 Tutkimuksen lähestymistapa kielentämiseen

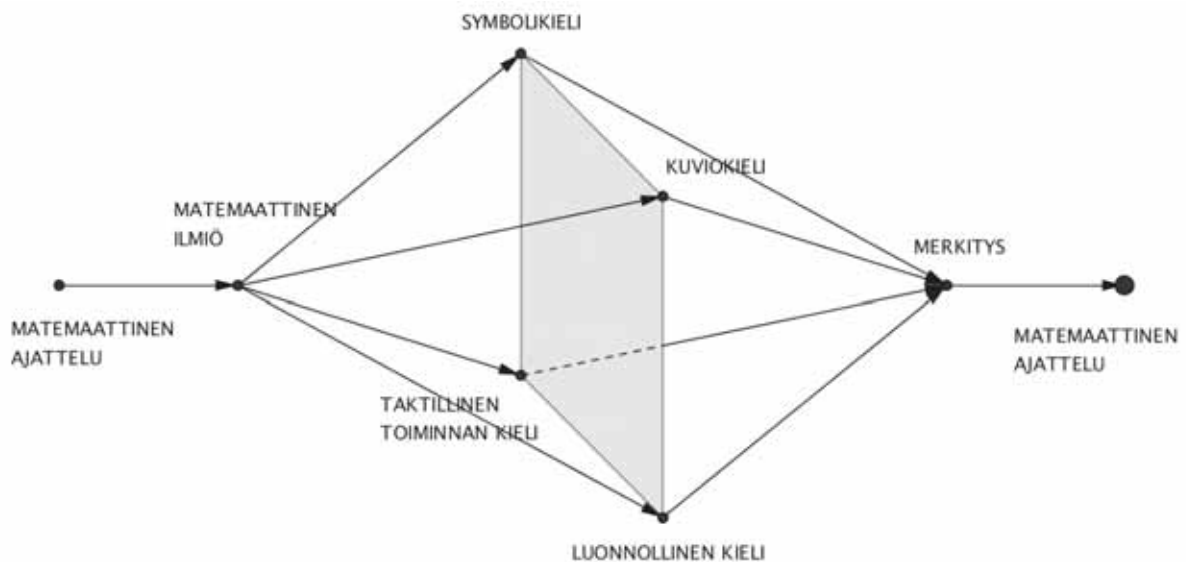
Joutsenlahti ja Kulju (2010) ovat kuvanneet millainen tyypillinen matematiikan sanallinen tehtävä on tekstilajina, jonka kaikki matematiikantehtäviä tehneet voinevat tunnistaa. Epäilen, että tämänkaltaisiin tehtäviin voi syntyä ratkaisustrategia, jossa tehtäviä ratkaistaan sijoittamalla tehtävänannossa esiintyvät lukuarvot oppitunnilla käytävään asiaan ilman todellista ymmärrystä alku- ja lopputilanteen syy-seuraus-suhteesta ja laskuproseduurien merkityksistä. Tällöin voi olla myös opettajana hankala arvioida oppilaan ymmärryksen tasoa.

Smithin ym. (2010) esittämä tarinallisuuden ja ”tosielämän” syy-seuraus-suhteiden tuominen tehtävänantoon voisi positiivisella tavalla häiritä edellä mainitun strategian käyttämistä, koska niin sanottua ylimääräistä tietoa olisi myös tarjolla, jolloin ratkaisija joutuisi pakosta lukemaan tehtävän huolella ja miettimään mitä tietoja tehtävästä tarvitsee ja miksi. Tällöin vastaaja joutuu perustelevaan valintansa itselleen toisin sanottuna antamaan sille ratkaisun kannalta oleellisen merkityksen, jolloin ollaankin kielentämisen ytimessä. Tässä kohtaa Joutsenlahden määrittelemät ratkaisumallit ovat oleellisia, koska pelkkä ”standardi”-malli ei välttämättä avaa merkityksiä riittävästi itse ratkaisijalle, lukijasta puhumattakaan. Jatkankin Sarikan (2014) diplomityön aihetta tutkimalla kielentämistehtäviä, eli tehtäviä, jotka itsessään saavat tekijänsä tuottamaan näkyviä merkityksiä pelkän opitun toiston sijaan.

Huomionarvoista on se, että vaikka lopullinen merkitys tuotetaankin usein vain yhdellä kielellä, niin kielentäjä voi kielentämisprosessinsa aikana ajattelussaan hyödyntää esimerkiksi omaa visuaalista näkemystään kyseisessä ilmiössä. Tällä tarkoitan sitä, että vaikka lopullinen merkitys tuotetaan esimerkiksi luonnollisella kielellä on mahdollista, että kielentämisprosessin aikana kaikki eri kielet ovat olleet vuorovaikutuksessa ja omalta osaltaan vaikuttaneet lopullisen merkityksen syntyyn ja ajattelun jäsentymiseen.

Olen avannut omaa näkö- ja tulokulmaani kielentämiseen (ks. kuvio 7), siten että henkilön matemaattisen ajattelun kautta hahmottama matemaattinen ilmiö saapuu henkilön aktiiviseen ajatteluprosessiin jonkin kielen kautta (*input*). Kuviossa harmaaksi tasoksi kuvattu ajatteluprosessi synnyttää merkityksen, jonka henkilö kielentää edelleen jonkin kielen kautta (*output*). Tämä uusi annettu merkitys rakentaa oppijan matemaattista ajattelua edelleen ja mahdollistaa uusien, hankalampien matemaattisten ilmiöiden hahmottamisen edellä mainitulla tavalla. Kuvio 7 esittää matemaattisen ajattelun rakentumisen varsin lineaarisesti ja vain yhden kerran, mutta huomionarvoista on, ettei prosessi ole suinkaan kertaluontoinen, vaan jatkuu edelleen syklisesti itse itseään täydentäen ja korjaten (ks. Joutsenlahti & Rättyä, 2015, 54).

Inputilla tarkoitan sitä kieltä, jonka kautta matemaattinen ilmiö saapuu osaksi henkilön kielentämisprosessia ja ajattelua. *Outputilla* tarkoitan sitä kieltä, jonka avulla henkilö tuottaa uuden merkityksen ajattelunsa tuotoksesta. Tehtävissäni tehtävänanto toimii *inputtina* ja kielennetty vastaus *outputtina*.



KUVIO 7. Kielentämisen prosessi kuvattuna matemaattisesta ajattelusta eri kielten avulla annettuun matemaattisen ilmiön merkitykseen ja edelleen jäsentyneempään matemaattiseen ajatteluun. Harmaaksi tasoksi kuvatussa ajattelussa eri kielet ovat vuorovaikutuksessa toistensa kanssa.

4 TUTKIMUSKYSYMYKSET JA TUTKIMUSTEHTÄVÄ

Kielentämistä ja sen vaikutuksia matematiikan oppimiseen on tutkittu runsaasti. Aiemmissa tutkimuksissa opiskelijoille on esitelty kielentämisen ideaa ja toisaalta erilaisia kielentämisen malleja etukäteen, joita he ovat soveltaneet sanallisiin tehtäviin. Omassa tutkimuksessani lähdin liikkeelle ajatuksesta, että edelliset tutkimukset ovat jo osoittaneet kielentämisen positiiviset vaikutukset tehtävien ratkaisemiselle ja oppimiselle, joten sen uudelleen osoittaminen ei ole minun näkökulmastani mielekäästä. Sen sijaan tutkimuksessani tutkin konstruoimiani tehtäviä, joissa perinteinen, ennalta määrätty laskijaa ohjaava laskuproseduuri ei näyttele pääosaa ja jotka pakottavat ratkaisijansa jäsentämään matemaattista ajatteluaan uudella tavalla ja antamaan merkityksiä matemaattisille ilmiöille toisin sanottuna kielentämään ratkaisujaan.

Tutkimus on kolmiosainen, joista ensimmäinen osio pitää sisällään palautetut kielentämistehtävät, toinen osio Likert-asteikollisen asenne- ja mielipidekyselyn ja kolmas osio kyselykaavakkeen avoimet kohdat. Tutkimuksen aineiston keruu toteutettiin kevään 2014 aikana.

Kielentämistehtäväkokonaisuuksia oli yhteensä kuusi kappaletta, joista käsittelen tutkimuksessani viittä. Yksi tehtäväkokonaisuus ei valikoitunut tähän tutkimukseen, koska se on osa erästä toista tutkimusta. Opiskelijat työstivät kurssin aikana oman palautusportfolion, johon he tekivät tehtäviä ja lopuksi täytetyn kyselykaavakkeen. Tehtävät oli määrä tehdä kotona ja niihin ei saanut erityistä apua opettajalta.

4.1 Tutkimuskysymykset

Tutkimukseni pyrkii selvittämään seuraavien kysymysten avulla uusien tehtävätyyppien käytön tarkoituksenmukaisuutta lukion lyhyessä matematiikassa oppimisen ja arvioinnin kannalta sekä tietoa siitä, kannattaako ylipäätään ja jos kannattaa, niin kuinka tämän kaltaisia tehtävätyyppejä tulisi jatkossa rakentaa:

Kielentämistehtävät opettajan näkökulmasta:

1. Miten opiskelijat ovat osanneet kielentämistehtäviä?

2. Miten matemaattinen ajattelu ja -osaaminen tulevat esiin tehtävien vastauksissa?

Kielentämistehtävät oppilaan näkökulmasta:

3. Miten opiskelijat suhtautuvat näihin uudentyyppisiin tehtäviin?

4. Miten oppilaat kokevat kielentämistehtävät suhteessa matematiikan osaamiseensa?

Mielipiteet ja asenteet matematiikkaa ja kielentämistä kohtaan tehtyjen tehtävien pohjalta:

5. Minkälaisia tyttöjen ja poikien mielipiteet ja asenteet ovat suhteessa toisiinsa?

6. Minkälaisia matematiikassa heikosti (arvosanat 4-6), keskitasoisesti (arvosanat 7-8) ja hyvin (arvosanat 9-10) suoriutuvien opiskelijoiden mielipiteet ja asenteet ovat suhteessa toisiinsa?

Kielentämistehtävät tutkijan näkökulmasta:

7. Mitkä ominaisuudet tekevät kielentämistehtävästä onnistuneen?

4.2 Kielentämistehtävät

Lähdin tehtävien suunnittelussa liikkeelle Joutsenlahden määrittelemien ratkaisumallien (ks. luku 3.4) kautta ja yhteen tehtävään halusin lisätä tarinallisuutta ja syy-seuraus-suhteen pohdintaa. Kuitenkin, koska lähtökohta on tehdä tavanomaisesta poikkeavia tehtäviä, niin niiden istuttaminen perinteisten tehtävien ratkaisumalleihin ei ollut perusteltua. Lähestymistapa kun on täysin käänteinen. Käytin kuitenkin suunnittelussa apuna aikaisempien tutkimusten tuloksia luonnollisista kirjallisen kielentämisen tavoista sekä Sarikan (ks. luku 3.5) tutkimia tehtävätyyppejä.

Tehtävien suunnittelussa pyrin siihen, että mahdollisimman paljon vastaajan selittää omin sanoin, jolloin vastaajan omaa matemaattista ajattelua on mahdollista arvioida. Sarikan (ks. luku 3.5) tehtävätyypeissä tämä on nimettynä ”*Omin sanoin selvitys*” -tyypiksi. Kuitenkaan en rajannut merkityksen tuottamista vain omiin sanoihin, vaan se tuli voida antaa tehtävänannosta riippuen omista lähtökohdistaan käsin parhaalla katsomallaan tavalla. ”*Omin sanoin selvitys*” olikin mukana tavalla tai toisella jokaisessa tehtävässä. Kaikissa tehtävissä on korostetun paljon koodinvaihtoa eri kielten välillä, mikä on tyypillistä kirjalliselle kielentämiselle (ks. esim. ”*kertomus*”-malli).

Osassa tehtävistä oli myös varattuna tilaa kuvakielen käyttämiseen, mikäli ratkaisija koki sen tarvittavaksi (ks. ”*päiväkirja*”-malli). Lisäksi tehtävissä tuli antaa matematiikan symboli- tai kuvakielellä esitetylle asialle merkitys omin sanoin (ks. *ratkaisun argumentointi*) ja osassa myös kirjallinen tehtävänanto (ks. *ratkaisusta tehtävä*) luonnollisella kielellä. Tällainen asetelma on hyvin tyypillinen kielentämiselle, jossa vastaajan omat ajatukset ja antamat merkitykset ovat keskiössä ja kielentämismalleista vastaa ”*kommentti*”-mallia. Osan tehtävistä voi ajatella mukailevan myös ”*tiekartta*”-mallin ideaa, koska tehtävissä oli varattuna suunnittelulle alussa oma tilansa ja myöhemmin varsinainen tila kirjalliselle vastaukselle. Konstruoin myös ”*täydennys*”-tehtävän, jossa vastaajan tuli täydentää osittain vaillinaiset lauseet matemaattisesti loogiseksi kirjoittamalla jokin

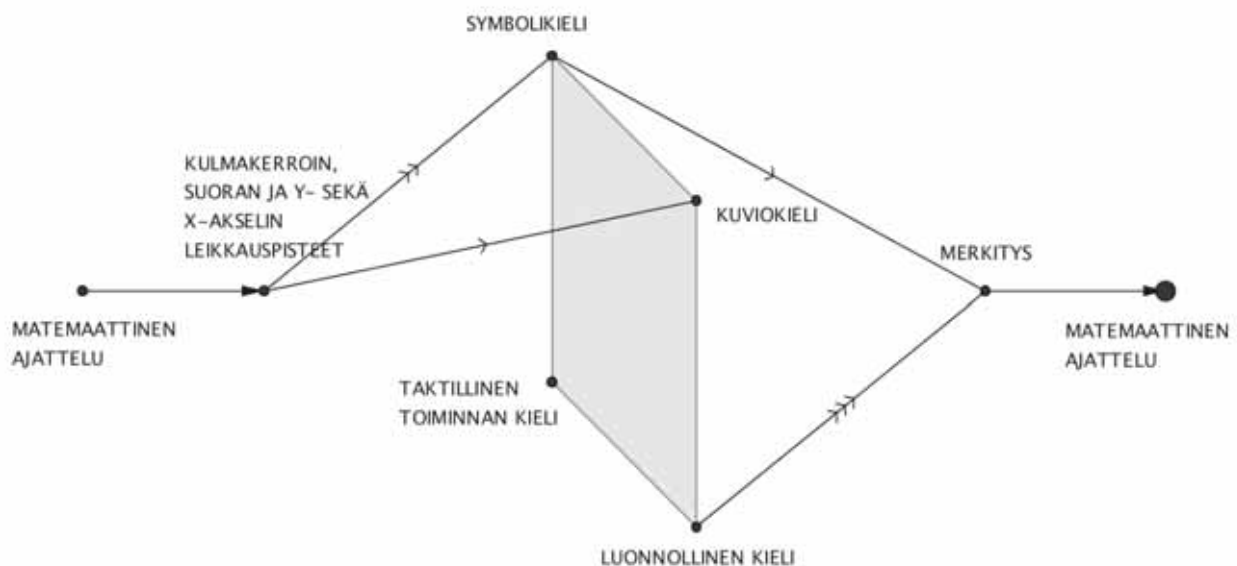
luonnollisen - tai symbolikielen ilmaisu tyhjään kohtaan. Siitä, mitä tyhjään kohtaan tuli kirjoittaa, oli olemassa vihje saman tehtävän yhteydessä. Tarinallisuutta painottava tehtävä oli tehtävän tekemisen kannalta kaikkein lähinnä ”standardi”-mallia ja siinä oli suhteessa eniten laskemista.

Tehtäväkokonaisuuksia oli yhteensä viisi kappaletta ja niiden aihealueet olivat *lineaarinen malli*, *potenssilauseke*, *eksponenttifunktio*, *logaritmin määritelmä* ja *logaritmi* (ks. liite 1). Tein lineaariseen malliin sekä logaritmiin kaksi erilaista tehtäväpaperia, siten että A-tehtäväpaperit oli osoitettu 37 ja vastaavasti B-paperit 26 vastaajalle 63 tehtäviä palauttaneen vastaajan joukosta.

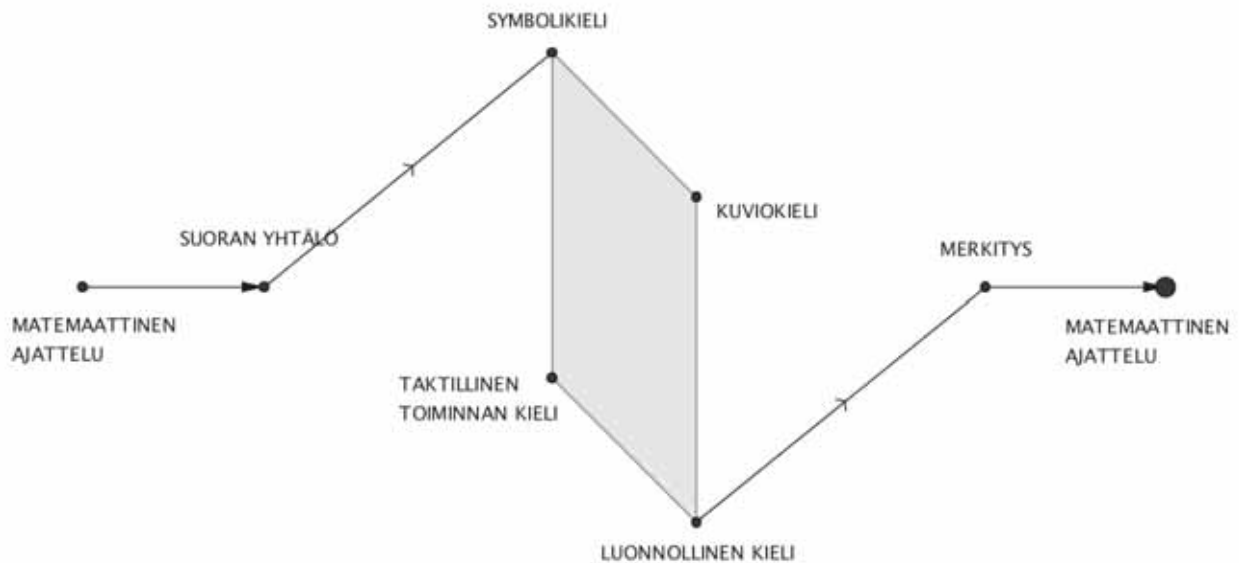
Tehtävissä tehtävänannossa oli annettu ilmiöön liittyen tietoa joko symboli, kuva tai luonnollisella kielellä tai näiden yhdisteellä (*input*). Vastaajan tuli antaa vastauksensa, kielentämä merkityksensä tehtävästä riippuen jollain toisella tai useammalla kielellä (*output*).

Lineaarinen malli

Kaikille yhteinen lineaarisen mallin tehtävässä piti tulkita kuvasta (*kuviokieli*) ja suoran yhtälöstä (*symbolikieli*) suoran kulmakerroin, y-akselin sekä x-akselin leikkauspisteet ja antaa vastaukset jollain toisella kielellä. Ideana oli, että vastaaja muuttaa a-kohdassa kuvankielestä joko symbolikieleksi tai luonnolliseksi kieleksi ja b-kohdassa symbolikielestä luonnolliseen kieleen. Tehtävässä haluttiin vastaus siihen miten joku asia, kuten kulmakerroin saadaan selville, ei pelkästään siihen, mikä se missäkin tilanteessa on. Tehtävässä tuli antaa merkitys omin sanoin ja se lukeutuu ”kertomus”-malliin. (Ks. liite 1(1).)

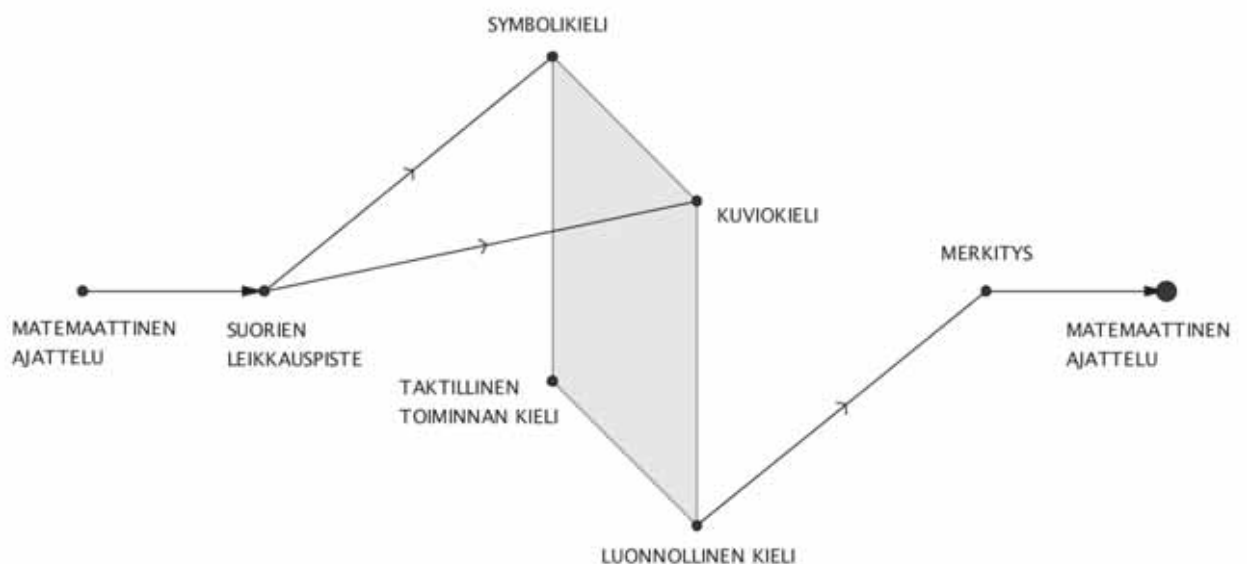


KUVIO 8. Lineaarisen mallin ensimmäisen tehtävä (A- ja B-ryhmä) kielentämisen näkökulmasta. Ilmiönä on kulmakerroin, suoran ja y-akselin sekä suoran ja x-akselin leikkauspiste. (A-kohdan prosessi on kuvattu yhdellä hakasella ja b-kohdan kahdella hakasella.)



KUVIO 9. Lineaarisen mallin 2A-tehtävässä piti keksiä symbolikielen suoran yhtälölle jokin esimerkkutilanne ja kirjoittaa siitä kirjallinen tehtävänanto (ks. liite 2(1)).

Vastaavassa B-tehtävässä oli annettu kuva (*kuviokieli*) ja kuvaan liittyvä ratkaisuprosessi symbolikielillä. Ratkaisun viereen vastaajan piti argumentoida luonnollisella kielellä edellä mainitun ratkaisun vaiheiden merkitykset. Toisin sanottuna vastaajan piti ymmärtää ja kielentää luonnollisella kielellä miksi ratkaisija oli tehnyt kyseisen vaiheen ratkaisussaan. Lopuksi vastaajan piti vielä kirjoittaa mahdollinen alkuperäinen tehtävänanto. (Ks. liite 3(1-2).)

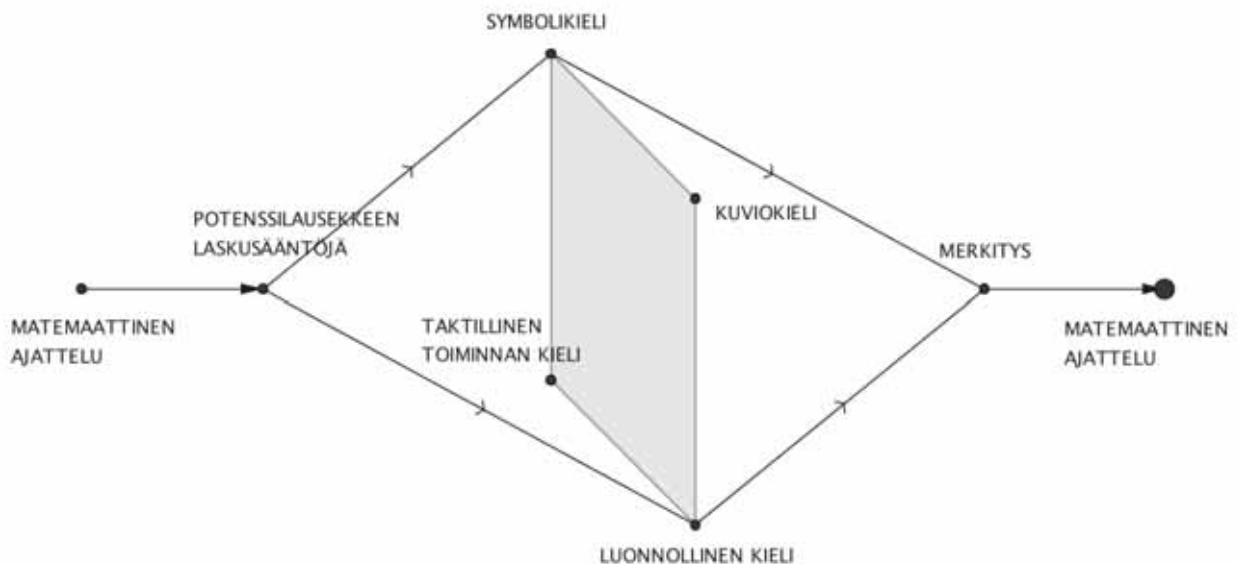


KUVIO 10. Lineaarisen mallin 2B-tehtävän kielentämisprosessi ilmiöstä suorien leikkauspiste.

Potenssilauseke

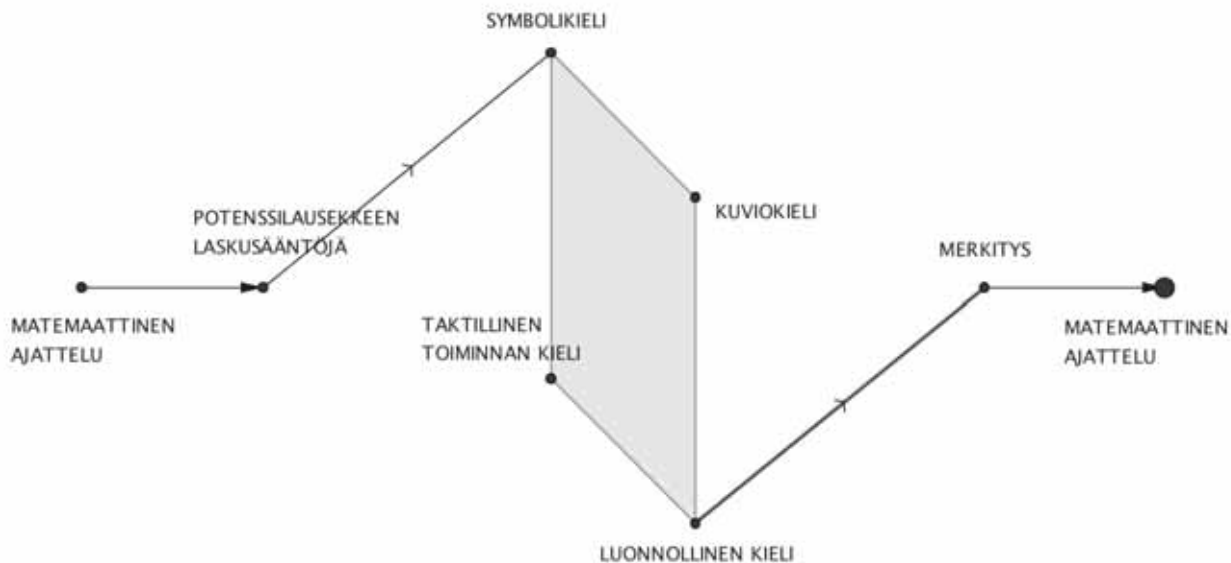
Potenssilausekkeeseen liittyvä tehtävä piti sisällään potenssien laskusääntöjen johtamista. Tehtävä koostui neljästä tapauksesta. Ensimmäinen tapaus tarkasteli tilannetta, jossa sekä kantaluku että eksponentti ovat positiivisia. Toisessa tapauksessa kantaluku oli edelleen positiivinen, mutta eksponentti oli negatiivinen. Kolmannessa tapauksessa eksponentti on nolla, mutta kantaluku on erisuuri kuin nolla. (Ks. liite 4(1).) Neljännessä tapauksessa tutkittiin tilanteita, jossa kantaluku on nolla, mutta a) eksponentti on suurempi kuin, b) pienempi kuin tai c) yhtä suuri kuin nolla (ks. liite 4(2)).

Kaksi ensimmäistä tapausta oli ”täydennys”-tehtäviä, jossa vastaajan piti täydentää sekä luonnollisella sekä paikoin symbolikielellä muotoiltuja potenssilausekkeiden laskusääntöjä loogisesti eheiksi lauseiksi.



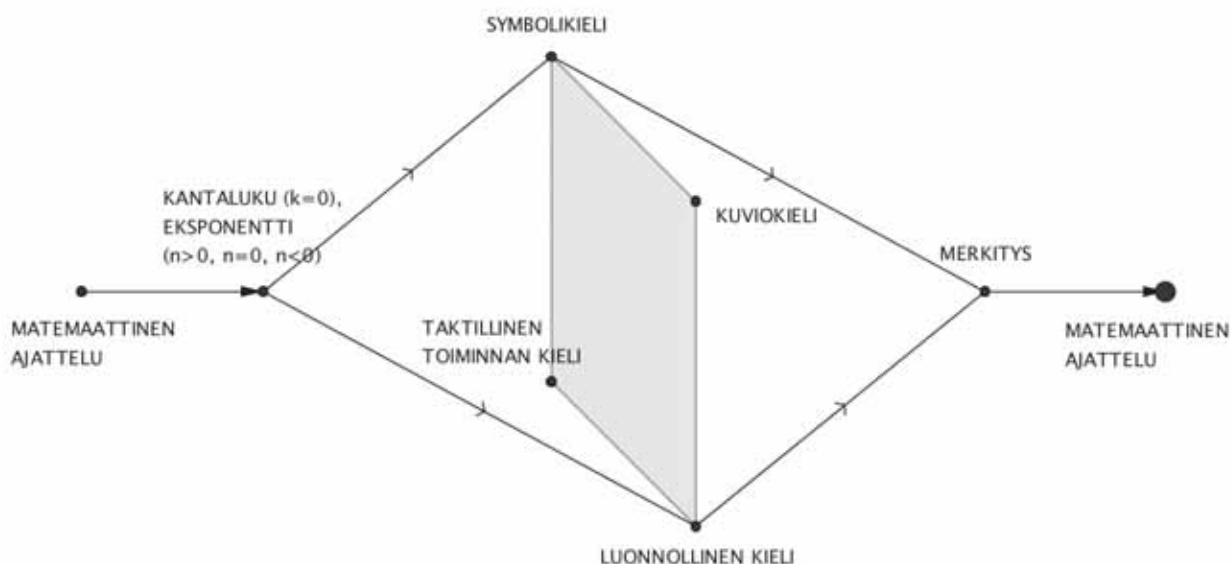
KUVIO 11. Potenssilausekkeen laskusäännöt ”täydennys”-tehtävänä.

Kolmannessa tapauksessa ratkaisu piti argumentoida. Tehtävän vasemmassa sarakkeessa oli symbolikielellä kirjoitettu päättelyprosessi ja sen oikealle puolelle vastaajan tuli antaa luonnollisella kielellä merkitykset eri päättelyn vaiheille.



KUVIO 12. Ratkaisun argumentointi: Eksponentti yhtä suuri kuin nolla, kantaluku erisuuri kuin nolla.

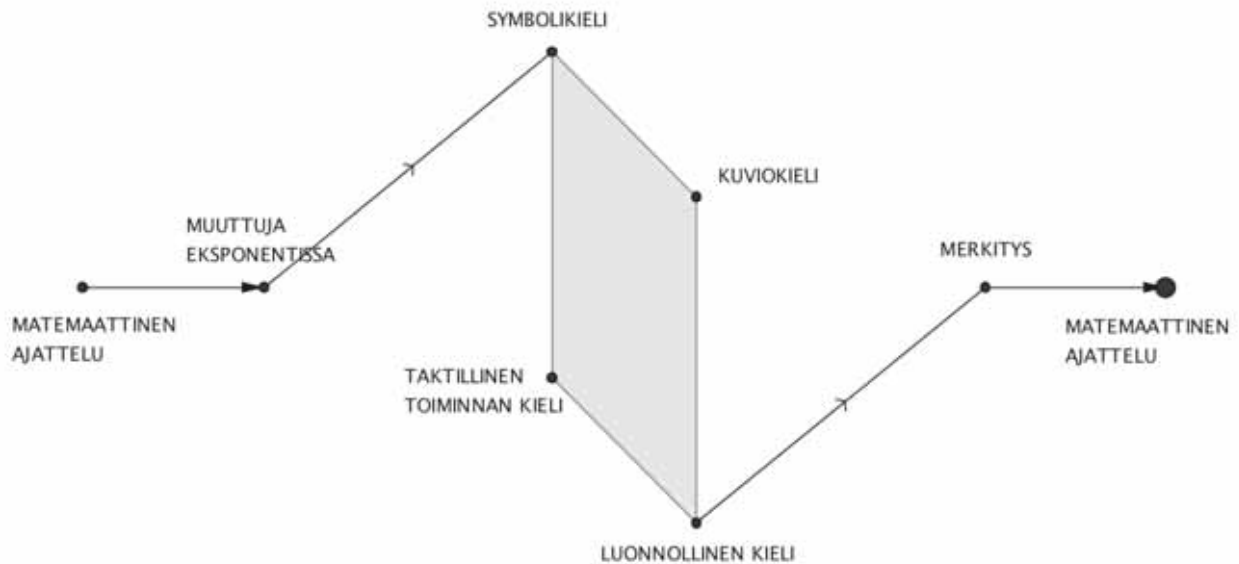
Neljännessä tapauksessa vastaajan piti hyödyntää edellisiä tapauksia 1-3 ja muodostaa omat päätte-lyt eri tilanteille a-c, joissa kantaluvun arvo oli aina nolla, mutta eksponentti oli suurempi, yhtä suuri ja pienempi kuin nolla. Toisaalta tehtävä lukeutui ”kertomus”-malliin, koska tehtävässä vuorotteli symboli- ja luonnollinen kieli, mutta toisaalta tehtävä noudattelee ”tiekartta”-mallille tyypil- listä suunnitelma luonnollisella kielellä – toteutus symbolikielellä -ratkaisua.



KUVIO 13. Edellisten tapausten (1-3) avulla päättely tilanteissa, kun kantaluku on nolla.

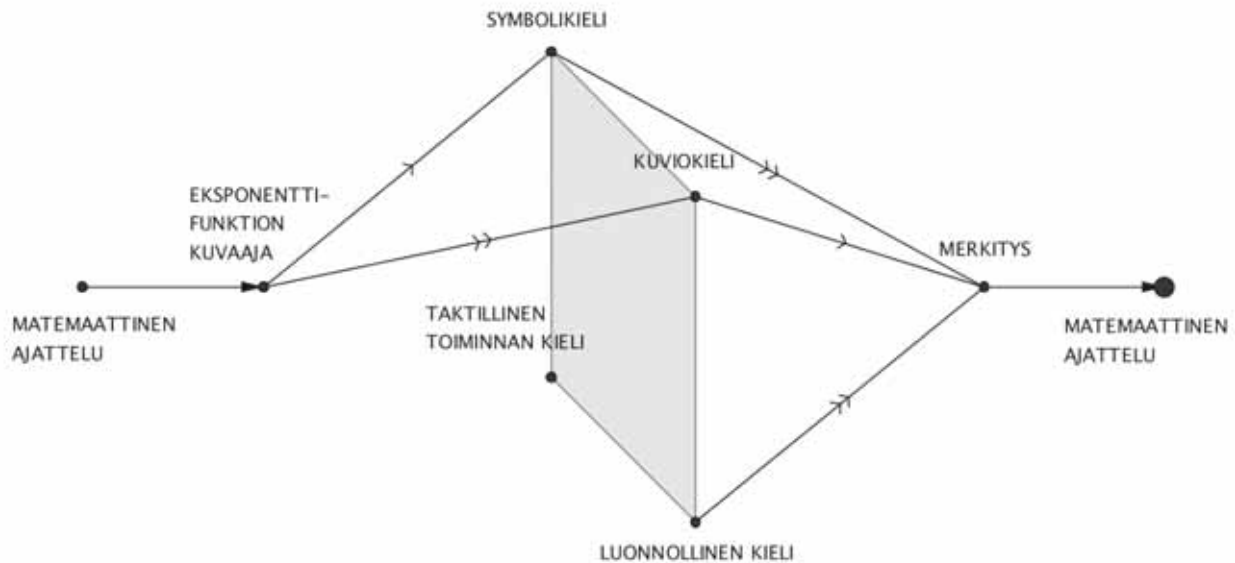
Eksponttifunktio

Tehtävässä tarkasteltiin eksponenttifunktion muuttujan roolia. Tehtävä koostui a, b ja c-kohdista. A-kohdassa on symbolikielellä ilmaistu funktio ja erityisesti muuttujan x roolin merkitys funktion arvolle tuli selittää omin sanoin luonnollisella kielellä. (Ks. liite 5(1).)



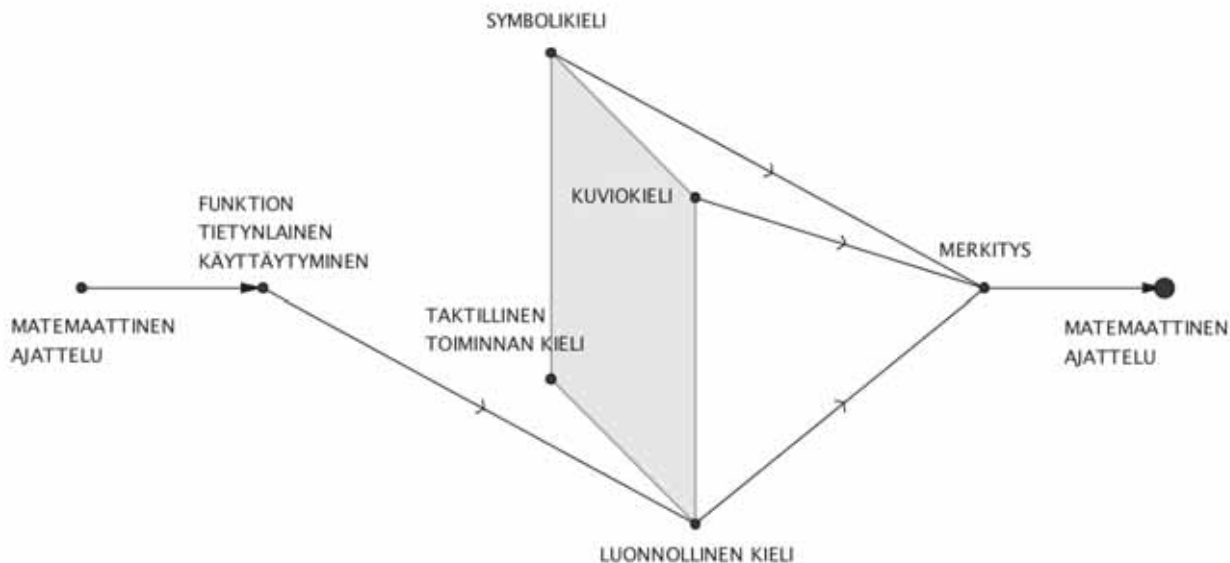
KUVIO 14. Eksponttifunktion a-kohta. Muuttujan rooli funktiossa $f(x)=2^x$.

B-kohdassa piti piirtää kuviokielellä a-kohdan symbolikielen funktio, mikä on suoraviivaisuudessaan hyvin lähellä perinteisen ”standardi”-mallin mukaista toimintaa, joskin kieli on symbolikielen sijaan kuvakieli. Lisäksi piti tulkita omasta piirroksesta missä kohdassa funktio on tullut alkutilanteeseen nähden nelinkertaiseksi ja toiseksi kuinka suuri on funktion arvo kohdassa, kun x on 3. (Ks. liite 5(1).)

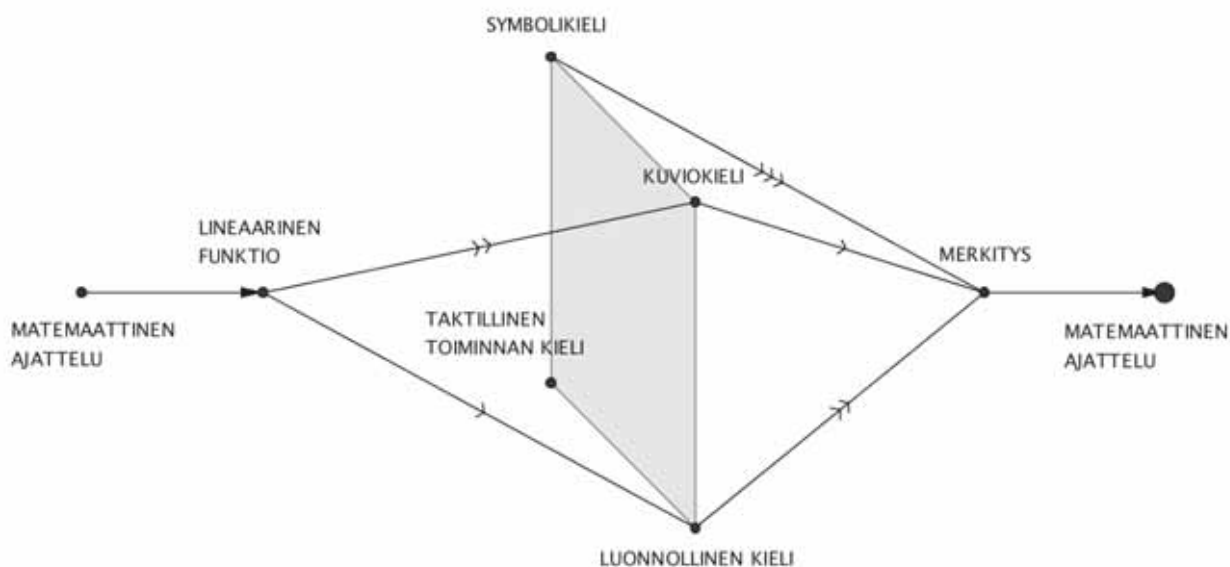


KUVIO 15. Eksponenttifunktion b-kohta. Ensin piirretään edellä mainittu funktion kuvaaja, jonka jälkeen tulkitaan sitä.

C-kohdassa tuli keksiä luonnollisella kielellä annetun funktion kuvausta vastaava funktio sekä esimerkkitalanne, jossa kyseinen funktio voisi esiintyä. Myös funktion kuvaaja piti piirtää. Lisäksi pyydettiin vastaamaan perustelujen kera, että milloin kyseinen funktio saa arvon nolla (ks. kuvio 16). Loppuosassa piti piirtää itse keksitty lineaarinen funktio samaan koordinaatistoon ja muotoilla funktiolle symbolikielinen lauseke. Tämän jälkeen vastaajan tuli tulkita kuvaajasta missä kohtaa funktiot saavat saman arvon (ks. kuvio 17). Loppuosa noudattelee b-kohdan tavoin suoraviivaista ”standardi”-mallin tapaista perinteistä kuvakieleen liittyvää tehtävää. (Ks. liite 5(2).)



KUVIO 16. Esittele funktio, jossa seuraava arvo on aina $\frac{1}{2}$ pienempi, kuin edellinen arvo.

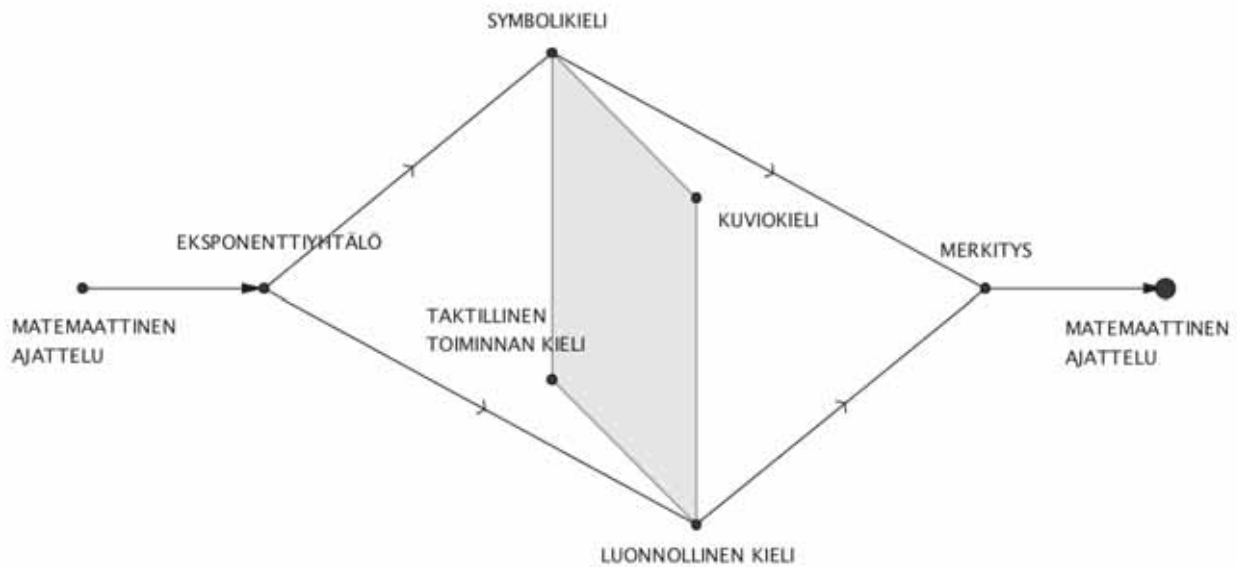


KUVIO 17. Itse konstruoitu lineaarinen funktio samassa koordinaatistossa.

Eksponttiyhtälö ja logaritmin määritelmä

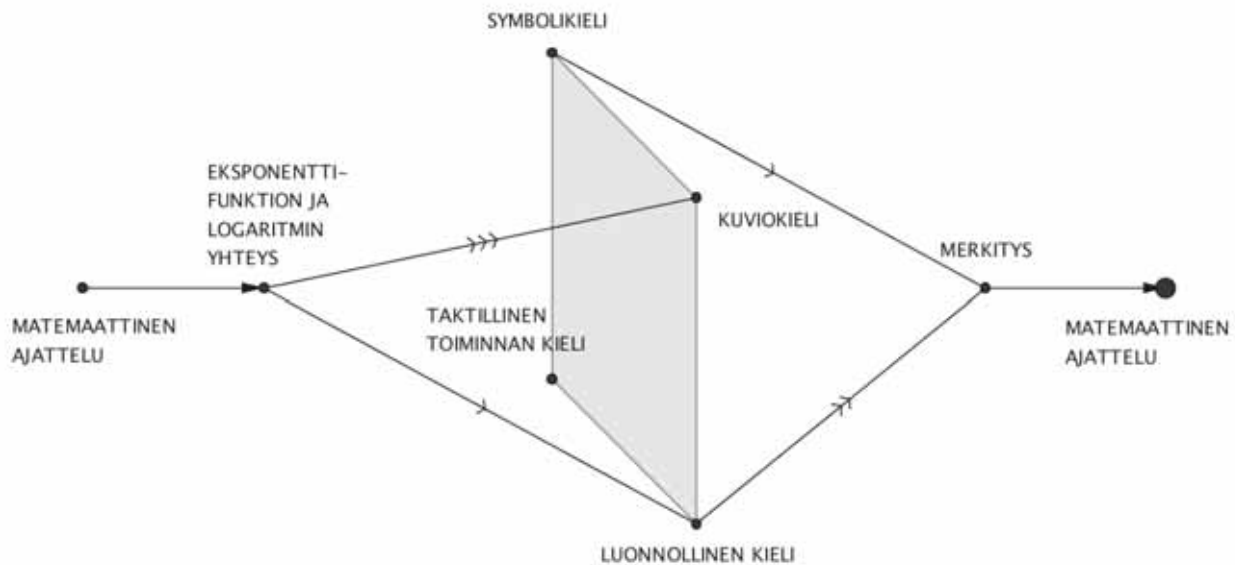
Tehtävässä oli pitkähkö luonnollisen kielen tehtävänanto, jossa oli symbolikielinen eksponenttiyhtälö. Tehtävänannossa oli muun muassa ilmaisuja ”puhua pulputti”, ”hullaannuit” ja ladattu tunneperäistä latausta ja myös syy-seuraus-suhdetta omaan ensiasunnon säästämisen muodossa. Tehtävän alkuosassa vastaajan tuli antaa tehtävänannossa olleelle symbolikielen eksponentti-yhtälölle

merkitys omin sanoin luonnollisella kielellä. Loppuosa tehtävästä oli ”standardi”-mallin mukainen, sillä tehtävässä tuli laskea symbolikielellä eri luonnollisella kielellä kuvattuja tilanteita. Lopuksi oli vielä tunteisiin vetoava kysymys, jossa kysyttiin vastaajan uskoa edellä esitetyn eksponenttiyh-tälön paikkaansa pitävyyteen tosielämässä. (Ks. liite 6(1).)



KUVIO 18. Tehtäväkokonaisuuden ”perinteisin” sanallinen tehtävä, jossa tehtävänannoissa on käytetty tunnevarauksen pitäviä ilmaisuja.

Sama tehtäväpaperi piti sisällään myös eksponenttifunktiota ja eksponenttiyh-tälöä kurssilla seuraavan asian eli logaritmin määritelmän. Logaritmin määritelmää lähestyttiin a-kohdassa eksponentti-funktion kuvaajan ja ”täydennys”-tehtävän avulla, jossa luonnollisen kielen lauseet piti täydentää loogisesti eheällä tavalla kuvaa hyväksi käyttäen. Näin ollen b-kohdassa vastaajan onnistui muo-dostaa 10-kantaisen eksponenttifunktion lauseke matematiikan symbolikielellä. Tämän lausekkeen avulla hän vielä c-kohdassa vertaili kuva- ja symbolikielellä annettua logaritmfunktiota omin sa-noin luonnollisella kielellä. (Ks. liite 6(2).)



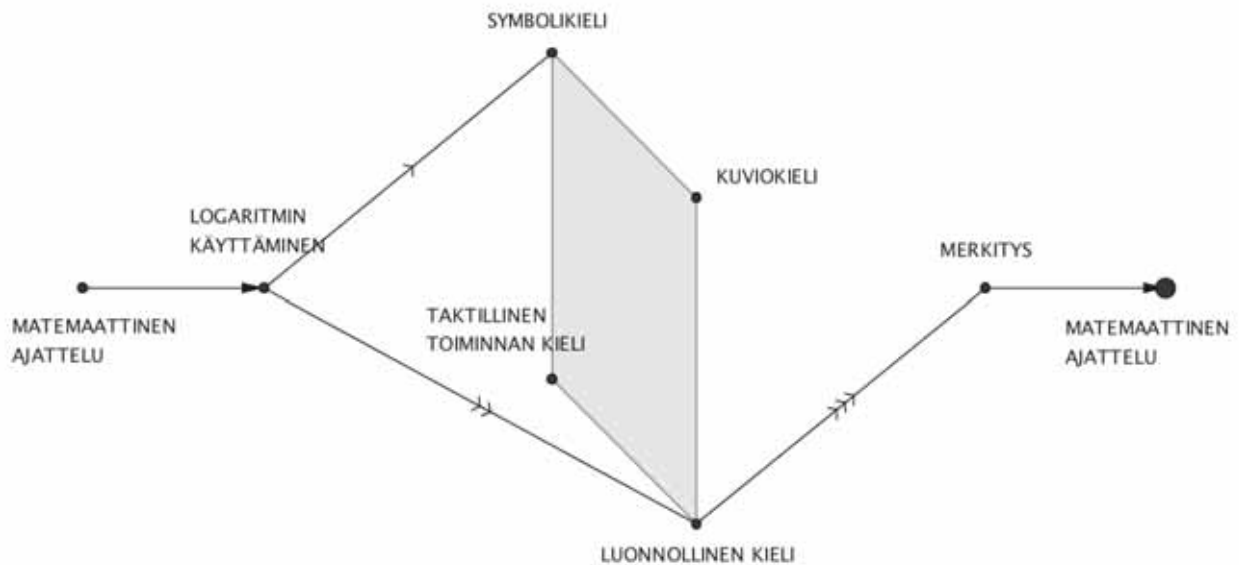
KUVIO 19. 10-kantaisen eksponentti- ja logaritmifunktion yhteys.

Eksponenttiyhtälö sekä logaritmi A ja B

Tämä tehtäväkokonaisuus koostui kahdesta erilaisesta tehtäväpaperista, jotka lähetin eri ryhmille. Edelleen pidin eksponenttiyhtälöä mukana logaritmin käsittelyssä, koska logaritmia on näin helpompi lähestyä ja se on ymmärrettävissä helpommin, kun ajattelee sen eksponenttifunktion käänteisfunktiona. Tehtävissä tarkasteltiin 10-kantaista logaritmia ja vastaavaa eksponenttiyhtälöä.

A-tehtäväpaperin ensimmäisessä tehtävässä hyödynnettiin edellisen tehtäväkokonaisuuden tuloksia eksponenttifunktion ja logaritmin välisestä yhteydestä. Tehtävässä vastaajan tuli antaa merkitykset symbolikielellä esitetyille eksponenttiyhtälön ja logaritmin väliselle suhteelle omin sanoin luonnollisella kielellä. Tehtäväpaperin toinen tehtävä noudatteli ”*ratkaisun argumentointi*” -tyyppiä ja siinä tuli seurata symbolikielellä etenevää päättelyä ja antaa merkitykset päättelyn joka vaiheelle luonnollisella kielellä. Lisäksi vielä lopuksi kysyttiin vastaajan omaa näkemystä logaritmin merkityksestä eksponenttiyhtälöiden ratkaisemisessa. (Ks. liite 7(1).)

B-tehtäväpaperin ”*ratkaisun argumentointi*” -tyypin tehtävässä tuli seurata symbolikielen ratkaisuprosessia ja antaa eri ratkaisun vaiheille merkitykset luonnollisella kielellä. Lopuksi vastaajan piti antaa merkitys koko tehtävälle eli keksiä mahdollinen alkuperäinen tehtävänanto, mikä lukeutuu ”*ratkaisusta tehtävä*” -tehtävätyyppiin. (Ks. liite 8(1).)



KUVIO 20. Logaritmin käyttäminen eksponenttifunktioita ratkaistaessa.

4.3 Asenne- ja mielipideväittämät

Tutkimuksen toisessa osassa oli 19 väittämää, joihin vastaajan tuli vastata 5-portaisella Likert-asteikolla. Vastaukset saavat arvoja $[-2,2]$. Mitä negatiivisempi on arvo, sitä negatiivisempi vastaajan asenne on ja vastaavasti positiivisella puolella. Nolla tarkoittaa ”En osaa sanoa”, eli vastaaja ei ole osannut muotoilla omaa mielipidettään puolesta eikä vastaan.

4.4 Avoimet kysymykset

Asenne- ja mielipidekyselylomakkeen lopussa oli kaksi avointa kysymystä: ”1. Mitä hyötyä koit kielentämisestä matematiikan opiskelussa?” sekä ”2. Mitä huonoja puolia sinun mielestäsi kielentämisessä oli?”.

5 ANALYYSI

5.1 Aineiston kuvailua

Tähän tutkimukseen käytettävä aineisto (N=63) valikoitui koko aineistosta (N=235) siten, että ensinnäkin näiden 63 vastaajan arvosanat tiedetään. Kaiken kaikkiaan 90 vastaajan arvosana tiedettiin, mutta osa heistä ei ollut palauttanut kielentämistehtäviä tai asenne- ja mielipidekyselyä, joten kaikki tässä tutkimuksessa mukana olevat ovat palauttaneet kielentämistehtäviä ja he ovat vastanneet asenne ja mielipidekyselyyn. Mielestäni arvosanat muodostavat oman mielenkiintoisen taustamuuttujansa ja lisäksi en kokenut mielekkääksi ottaa tutkimukseni varsinaiseen analyysiin huomioon tehtäviä palauttamattomien mielipiteitä, joten päätin keskittyä tässä tutkimuksessa tähän vastaajien joukkoon. Aineisto on kerätty kahden eri suomenkielisen lukion kevään 2014 lyhyen matematiikan kurssin MAB3 Matemaattisia malleja 1 aikana.

Sukupuolen jakauma on painottunut voimakkaasti tyttöihin, koska vastaajista noin viisi kuudesosaa (n=53) on tyttöjä, kun taas poikia on 10 kappaletta.

TAULUKKO 2. Sukupuolijakauma koko aineistossa.

	Lukumäärä	Prosentti
Tyttö	53	84%
Poika	10	16%
Yhteensä	63	100%

Kurssiarvosanat olivat myös painottuneet hyviin ja kiitettäviin siten, että hyvien ja kiitettävien osuudet olivat selkeästi muita suuremmat. Kaikista vastaajista n. neljä viidesosaa (n=49, 78%) sai vähintään arvosanan 8. Kaikkien vastaajien keskiarvo on 8.44, yleisin (moodi) sekä mediaani arvosana 9. (ks. taulukko 3)

TAULUKKO 3. Kurssiarvosanat

Arvosana	4	5	6	7	8	9	10	Yhteensä
Lukumäärä	1	1	3	9	14	20	15	90
Prosenttiosuus	2%	2%	5%	14%	22%	32%	24%	100%

Jaoin vastaajat kolmeen ryhmään arvosanoittain siten, että yhden ryhmän muodostivat arvosanat 4-6 (n=5, 8%), toisen ryhmän arvosanat 7-8 (n=23, 37%) ja kolmannen, selkeästi suurimman ryhmän muodostivat arvosanat 9-10 (n=35, 56%). (ks. taulukko 4)

TAULUKKO 4. Arvosanalukot

Arvosanalukko	4-6	7-8	9-10	Yhteensä
Lukumäärä	5	23	35	63
Prosenttiosuus	8%	36,5%	55,5%	100%

Arvosanalukot jakautuivat sukupuolten sisällä siten, että tytöistä 5 (9%) sai arvosanan 4-6, kun taas pojista kukaan ei lukeutunut tähän arvosanalukkaan. Arvosanan 7-8 sai pojista 60%, kun taas tytöistä arvosanalukkaan kuului noin yksi kolmannes (32%). Kiitettävän arvosanan 9-10 sai pojista 40% ja tytöistä yli puolet (59%). (ks. taulukko 5)

TAULUKKO 5. Arvosanalukojen jakautuminen sukupuolittain

		Arvosanalukot			Kaikki yhteensä	
		4-6	7-8	9-10		
Sukupuoli	Tyttö	Lukumäärä	5	17	31	53
		Prosenttia naisista	9%	32%	59%	100%
	Poika	Lukumäärä	0	6	4	10
		Prosenttia miehistä	0%	60%	40%	100%
Molemmat sukupuolet		Lukumäärä	5	23	35	63
		Prosenttiosuus	8%	36,5%	55,5%	100%

5.2 Kielentämistehtävät

Analysoin (N=63) vastaajien palauttamat kielentämistehtävät siten, että luokittelin niiden vastaukset sisällöllisesti yhdeksään toisensa poissulkevaan vastauskategoriaan (ks. taulukko 6). Tehtäväkokonaisuuksia on viisi kappaletta (ks. luku 4.1), joissa omia tutkittavia tehtäviä oli yhteensä 20. Luottamus kysymys oli muodoltaan niin erilainen, ettei sen analysointi samalla tapaa, kuin muiden 19 tehtävän ollut järkevää, joten jätin sen käsittelyn ainoastaan maininnan asteelle pohdintaosiossa (ks. luku 8.3).

Sukupuolen vaikutus tehtävien osaamiseen ei ole perusteltavissa. Sen sijaan taustamuuttujana käytin arvosanalukkoa, joka ilmentää vastaajan matemaattista osaamista ja toisaalta tätä kautta myös matemaattista ajattelua. Näin ollen on mielenkiintoista selvittää tekemieni tehtävien ominai-

suuksia suhteessa eri arvosanaluokkiin. Lisäksi nähdään kuinka tehtävien tekeminen on sujunut eri arvosanaluokkaan kuuluvilta.

TAULUKKO 6. Kielentämistehtävien vastauskategoriat

VASTAUSKATEGORIA	SELITYS
Mestarillinen merkitys	Täysin oikein ja poikkeuksellisen selvä annettu merkitys.
Täysin oikein	Ymmärrys välittyy vastauksesta ja tehtävä tehty oikein.
Puutteellinen	Merkityksiä näkyy vastauksessa, mutta se on osin puutteellinen.
Tulos oikein, ei merkityksiä	Lopputuloks on oikein, mutta vastauksessa ei ole annettuja merkityksiä.
Ei osattu ollenkaan.	Ratkaisijan osaamisesta ei ole mitään merkkejä. Tulos ja merkitykset ovat väärin.
Tyhjä	Vastaus on jätetty tyhjäksi, tai siihen on kirjoitettu etten ymmärrä tms.
Tehtävää ei ole palautettu.	Tehtävää ei ole palautettu, vaikka se on oppilaalle jaettu.
<i>Erityinen</i>	Jotain erityistä vastauksista nousevaa
”Viisastelija”	Vastaaaja on vastannut ylimalkaisesti tehtävänannosta tulevilla sanoilla.

Seuraavaksi käyn läpi ensimmäisen tehtäväkokonaisuuden, Lineaarisen mallin vastauskategorijaottelut merkityksineen. Loppujen tehtäväkokonaisuuksien vastauskategorijaottelut löytyvät liitteestä 10(1-9) ”Tehtäväkokonaisuuksien vastauskategoriat selityksineen”. Huomionarvoista on se, ettei jokainen kategoria ole jokaisessa tehtävässä edustettuna.

Tehtävät ja niiden tavoitteet on kuvattu luvussa 4.1.1 ja jos tehtävä on täysin oikein, on vastaus täyttänyt tehtävän asettaman tavoitteen. Jos tehtävää ei ole osattu ollenkaan, ei vastaus ole ylittänyt tavoitteeseen ollenkaan ja vastaajan ajattelusta ei ole voinut tulkita mitään johdonmukaista annetun vastauksen perusteella. Jos vastaus on luokiteltu kategoriaan ”*Tyhjä*”, on vastaus joko jätetty tyhjäksi tai siihen on kirjoitettu esimerkiksi ”En tajunnut.” tai ”En ymmärrä.”. Puutteellisissa vastauksissa on ollut oikeita merkityksiä, mutta ne ovat olleet hieman puutteellisia. Toisaalta myös vastaukset, joissa merkitykset ovat oikein, mutta tulos on väärä, lukeutuvat myös ”*Puutteellinen*” -kategoriaan. Vastaukset, joissa tulos on oikein, mutta vastauksesta ei ole luettavissa merkityksiä (sytä) tuloksen takaa, lukeutuvat ”*Tulos oikein, ei merkityksiä*” -kategoriaan. Kategoriaan ”*Erityinen*” lukeutuvat sellaiset vastaukset, jotka nousevat vastauksia tarkistettaessa. Esimerkiksi

monessa vastauksessa toistuva sama virhe voi muodostaa tällaisen kategoriaan. ”Viisastelija”-kategoriaan lukeutuvat vastaukset, joissa tehtävään on vastattu ylimalkaisesti tehtävänannosta tulevilla sanoilla ja vastausta lukiessa herää ajatus, että vastaaja on suhtautunut tehtävään ylimielisesti, eikä ole viitsinyt tehdä tehtävää kunnolla. Osa vastauskategorian ”Mestarillinen merkitys” - vastauksista on liitteessä 12(1-16). Liitteen esimerkkivastauksista näkee tehtävien tarjoaman mahdollisuuden tuottaa merkityksiä mitä moninaisimmin tavoin ja toisaalta sen miten on mahdollista nähdä opiskelijan matemaattista ajattelua paperilla.

5.2.1 Lineaarinen malli

Lineaarinen malli 1a

Mestarilliseen merkitykseen pääsi vastauksilla, joissa oli käytetty runsaasti luonnollista kieltä tai värejä (ks. liitteet 12(1,2)). Myös yksi vastaaja oli piirtänyt silmän kuvaamaan kuvaajalta katsomista, minkä tulkitsin kuuluvan myös tähän kategoriaan (ks. liite 12(3)). Puutteellisiksi vastauksiksi luokittelin sellaiset, joissa kuvaajan ja suoran eri ominaisuuksien yhteydet oli tulkittu täysin tai hieman puutteellisesti oikein, mutta kysytyjä arvoja ei oltu ilmoitettu. Kategoriaan ”Tulos oikein, ei merkityksiä” lukeutuivat vastaukset, joissa oltiin kyllä saatu oikeat arvot, mutta vastauksessa ei näkynyt miten vastaaja oli kyseiset arvot saanut. Erityiskategoriana tässä tehtävässä muodostui se, että monella vastaajalla (n=10) oli kulmakertoimessa virhe (arvo, merkitys tai molemmat).

TAULUKKO 7. Lineaarisen mallin 1. tehtävän a-kohdan vastauskategoriat

LINEAARINEN MALLI 1a	SELITYS
Mestarillinen merkitys	Värejä, piirretty silmä, (todella) runsaasti luon. kieltä
Täysin oikein	Ymmärrys välittyy vastauksesta ja tehtävä tehty oikein.
Puutteellinen	Merkitykset on (osin) oikein, mutta ei arvoja.
Tulos oikein, ei merkityksiä	Arvot on saatu, mutta merkitys/ymmärrys ei välity.
Ei osattu ollenkaan.	Ratkaisijan osaamisesta ei ole mitään merkkejä. Tulos ja merkitykset ovat väärin.
<i>Kulmakerroin</i>	Kulmakerroin oli monella (n=10) väärin.

Lineaarinen malli 1b

Mestarilliseen merkitykseen sijoittui vastaukset, joissa oli käytetty runsaasti luonnollista kieltä. Myös yksi vastaus, joka noudatteli ”Kertomus”-mallia (ks. liite 12(4)) sekä vastaus, jossa oli luonnollisen kielen avulla selitetty kuinka x-akselin ja suoran leikkauspisteen löytää, kun piirtää kuvaa ja katsoo siitä. Puutteellisiksi vastauksiksi luokittelin sellaiset, joissa yhtälön ja suoran eri ominaisuuksien yhteydet oli tulkittu täysin tai hieman puutteellisesti oikein, mutta kysytyjä arvoja ei oltu ilmoitettu. Kategoriaan ”Tulos oikein, ei merkityksiä” lukeutuivat vastaukset, joissa oltiin kyllä saatu oikeat arvot, mutta vastauksesta ei voinut päätellä miten vastaaja oli kyseiset arvot saanut. Erityiskategoriana tässä tehtävässä muodostui se, että monella vastaajalla (n=10) oli jätetty x-akselin leikkauspiste kokonaan kommentoimatta.

TAULUKKO 8. Lineaarisen mallin 1. tehtävän b-kohdan vastauskategoriat

LINEAARINEN MALLI 1b	SELITYS
Mestarillinen merkitys	Kertomus-malli, (todella) runsaasti luon. kieltä, piirtämisen kautta x-akselin leikkauspiste
Täysin oikein	Ymmärrys välittyy vastauksesta ja tehtävä tehty oikein.
Puutteellinen	Merkitykset on (osin) oikein, mutta kulmakertoimessa, x-aks. tai y-aks.-leikkauspisteessä virhe.
Tulos oikein, ei merkityksiä	Arvot on saatu, mutta merkitys/ymmärrys ei välity.
Ei osattu ollenkaan.	Ratkaisijan osaamisesta ei ole mitään merkkejä. Tulos ja merkitykset ovat väärin.
<i>X-akselin tyhjiys</i>	Suoran ja x-akselin leikkauspiste oli monella (n=10) tyhjä.

Lineaarinen malli 2A

Mestarilliseen merkitykseen lukeutuivat vastaukset, joissa luonnollisella kielellä annettu tehtävänanto oli poikkeuksellisen hyvä ja tehtävä oli osattu (ks. liitteet 12(5,6,7)). Puutteellisiksi vastauksiksi luokittelin vastaukset, joissa osa annetuista merkityksistä kuvassa tai luonnollisen kielen tehtävänannossa olivat puutteellisia. Kategoriaan ”Tulos oikein, ei merkityksiä” lukeutuivat vastaukset, joissa oli piirretty kuva, mutta luonnollisen kielen tehtävänanto puuttui. Erityiskategoriaan tehtävässä muodostui perinteinen ”standardi”-mallin mukainen varsin suoraviivainen sanallinen tehtävänanto, jossa pääosin symbolikielellä ja muutamalla luonnollisen kielen ilmaisulla kehoitetaan muodostamaan sellaisen suoran yhtälö, joka toteuttaa jonkin tehtävänannossa annetun ehdon. Kuitenkaan varsinaista esimerkkutilannetta näissä vastauksissa ei oltu keksitty. Viisastelija-

kattegoriaan päätyivät vastaukset, joihin on vastattu ylimalkaisesti, kuten ”Muodosta suoran yhtälö.” tai kehotetaan piirtämään jo tehtävänannossakin ollut suoran yhtälö.

TAULUKKO 9. A-tehtäväpaperin lineaarisen mallin 2. tehtävän vastauskategoriat

LINEAARINEN MALLI 2A	SELITYS
Mestarillinen merkitys	Täysin oikein ja poikkeuksellinen luon. kielen tehtävänanto.
Puutteellinen	Luon. kielen tehtävänannon merkitykset ovat puutteelliset.
Tulos oikein, ei merkityksiä	Kuva on, ei luon. kielen merkityksiä.
Ei osattu ollenkaan.	Ratkaisijan osaamisesta ei ole mitään merkkejä. Tulos ja merkitykset ovat väärin.
Tyhjä	Vastaus on jätetty tyhjäksi, tai siihen on kirjoitettu etten ymmärrä tms.
<i>Perinteinen tehtävänanto</i>	Moni (n=13) oli antanut ”standardi”-mallin mukainen, perinteisen sanallisen tehtävänannon, jossa ei ollut esimerkkilannetta.
”Viisastelija”	Vastaaaja on vastannut ylimalkaisesti tehtävänannosta tulevilla sanoilla. esim. ”Muodosta suoranyhtälö.”

Lineaarinen malli 2B

Mestarillisiin merkityksiin lukeutuivat sellaiset vastaukset, joissa kommentteilla annetut merkitykset olivat poikkeuksellisen selvät ja täsmälliset (ks. liite 12(8)). Kattegoriaan ”Tulos oikein, ei merkityksiä” lukeutuvat vastaukset, joissa on saatu mahdollinen tehtävänanto selville, mutta annetut merkitykset ovat kuvailevia vastaten kysymykseen mitä on tehty, eikä merkityksiä antavia jättäen vastaamatta kysymykseen miksi niin on tehty. Lisäksi tähän kattegoriaan kuuluvat ne vastaukset, joiden merkitykset ovat täysin väärä, mutta silti tehtävänanto on saatu pääteltyä.

TAULUKKO 10. B-tehtäväpaperin lineaarisen mallin 2. tehtävän vastauskategoriat

LINEAARINEN MALLI 2B	SELITYS
Mestarillinen merkitys	Poikkeuksellisen selvät ja täsmälliset annetut merkitykset.
Täysin oikein.	On annettu oikeat merkitykset.
Tulos oikein, ei merkityksiä	Tehtävänanto on oikein, mutta merkitykset ”sepitystä”. Osa kommentoinneista kuvailevia, ei selittäviä.
Ei osattu ollenkaan.	Ratkaisijan osaamisesta ei ole mitään merkkejä. Tulos ja merkitykset ovat väärin.
Tyhjä	Vastaus on jätetty tyhjäksi, tai siihen on kirjoitettu etten ymmärrä tms.

5.3 Asenne- ja mielipidekysely

Analysoin Likert-asteikollista kyselylomaketta (ks. liite 9) ristiintaulukoimalla siten, että taulukoin vastauksia sekä sukupuolen, että arvosanaluokan suhteen. Koodasin vastaukset siten, että alkuperäinen 5-portainen asteikko typistyi 3-portaiseksi. Tein tämän, koska aineisto oli hyvin vino sukupuolen ja toisaalta myös alimman arvosanaluokan suhteen, niin ei ollut mielekästä lähteä pilkkomaan vastauksia viiteen eri vastauskategoriaan. 3-portainen asteikko kertoo kuitenkin vastauksen latauksen suhteessa väitteeseen, mikä on tutkimukseni ja tutkimuskysymysteni kannalta oleellista. Jos vastaaja oli jättänyt jonkin väittämän kokonaan vastaamatta, tulkitsin sen siten, ettei vastaaja ollut osannut muodostaa mielipidettään.

Pearsonin χ^2 -testi (Khiin neliö) totesi aineiston olevan liian vino, jotta sitä olisi voinut käyttää sukupuolen tai arvosanojen ja väittämien yhteyden selvittämiseen suoraan ristiintaulukoinnin yhteydessä (Nummenmaa, 2009, 302). Jotta pääsin testaamaan muuttujien välistä yhteyttä, käytin Spearmanin järjestyskorrelaatiokerrointa. Spearmanin järjestyskorrelaatiokerroin antaa myös väittämien väliset korrelaatiot, jolloin voin tulkita kuinka eri väittämien vastaukset ovat toisiinsa yhteydessä. (Mt. 283.)

Luokittelin väittämiä sisältöjensä mukaan teemoittain. Käytin teemoittelussa samansuuntaista luokittelua, kuin Joutsenlahti (2010, 8). Joutsenlahti oli jakanut teemoihin ”*Suhtautuminen oppiaineeseen*” ja ”*Kirjallinen kielentäminen*”. Itse lisäsin vielä kaksi teema, jotka ovat ”*Sukupuolittuneet asenteet*” ja ”*Työskentelykulttuuri*”.

5.4 Avoimet kysymykset

Avoimina kysymyksinä vastaajilta kysyttiin 1. ”Mitä hyötyä koit kielentämisestä matematiikan opiskelussa?” sekä 2. ”Mitä huonoja puolia sinun mielestäsi kielentämisessä oli?” Analysoin kyselyn avoimet kohdat sisällöllisesti etsien tutkimuskysymysten kannalta kiinnostavia asioita.

Aloitin sisällön erittelyllä, missä pyrin kokoamaan yksittäisiä vastauksia niitä kuvaavien ilmaisujen alle. Nämä ilmaisut ryhmittelin sisällöllisesti vastaavien ilmiöiden alle, jotka taas ryhmittelin eri yläotsikoiden alle. Ilmaisut, ilmiöt ja yläotsikot nimesin niiden sisällöistä nousseiden asioiden mukaan, mitä voidaan kutsua myös sisällönanalyysin luokitteluvaiheeksi. (Tuomi & Sarajärvi, 2009, 92-93.) Löytämäni ilmaisut koodasin määrälliseen muotoon ja analysoin tilastollisin menetelmin, kuten ristiintaulukoimalla.

5.4.1 Kielentämisen hyödyt

Vastausten ilmiöt ryhmittäytyivät kuudeksi eri yläotsikoksi:

1. Tyhjä tai en osaa sanoa,
2. Ei hyötyjä,
3. Ymmärrys,
4. Laskuprosessin hahmottaminen,
5. Vaikutukset toimintaan ja
6. Käytännön hyödyt ja motivaatio.

Kaiken kaikkiaan löysin vastauksista 28 yhtäläistä ilmaisua, jotka muodostivat eri ilmiöitä 16 kappaletta, joista 2 oli vastaajan antamalta merkitykseltään epävarmoja. Seuraavaksi käyn läpi eri yläotsikot niihin lukeutuvat ilmiöt sekä ilmiöt muodostavat ilmaisut. Ilmiön perässä on tummennettu, mitä matematiikan osaamisen osa-aluetta (**KY** = Käsitteellinen ymmärtäminen, **PS** = Proseduraalinen sujuvuus, **MP** = Mukautuva päättely, **SK** = Strateginen kompetenssi ja **Y** = Yritteliäisyys) se pitää tulkintani mukaan sisällään (ks. luku2.4.1).

Tyhjä tai en osaa sanoa

Huomasin vastauksia lukiessani seuraavan ongelman: Mitä eroa on vastauksilla: (tyhjä), ”ei mitään” tai ”en osaa sanoa”? Se, ettei osaa sanoa pitää sisällään pienen aatteen siitä, että kenties kielentämisestä oli jotain hyötyä, jota vastaaja ei osaa pukea sanoiksi (lue: kielentää), mutta vastaus ”ei mitään” ei jätä kerrassaan mitään jossittelun varaan. Vastauksena tyhjä, eli vastaamatta jättäminen voidaan tulkita tarkoittavan samaa kuin ”ei mitään”, mutta toisaalta se voi myös tarkoittaa sitä, ettei vastaaja ole osannut pukea ajatuksiaan sanoiksi, eikä siis ole osannut sanoa.

Lähdin analyysissäni siitä ajatuksesta, että loppuen lopuksi vastaukset ”en osaa sanoa” ja tyhjiksi jätetyt vastauskentät antavat tutkijalle ihan yhtä paljon tietoa vastaajan todellisesta ajatuksesta, joten nämä muodostivat oman yläotsikkonsa ”*Tyhjä tai en osaa sanoa*”. Minusta oli kuitenkin mielekästä erottaa ”tyhjistä” omaksi ilmiökseen ”En osaa sanoa”, koska monet vastaajat (n=9) olivat vastanneet etteivät osaa sanoa, joten tämä vastausten joukko on syytä ottaa aineistoa kuvaavana tietona huomioon omana ryhmänään. Kuitenkaan varsinaiseen hyötyjen tuloksiin en ottanut mukaan kannastaan epävarmoja mainintoja liiallisen tulkinnanvaraisuutensa vuoksi.

Ei mitään hyötyä

”Ei mitään” on voimakkaampi ilmaisu, kuin kumpikaan edellisistä ja tosiasiaassa kertoo vastaajan mielipiteen asiasta, minkä vuoksi luokittelin sen omaksi yläotsikokseen ”*Ei mitään hyötyä*”. Vastaukset, kuten ”Ei mitään”, ”En kokenut kovin hyödylliseksi” ja ”En kokenut suurta hyötyä” luokittelin omaksi ilmaukseksi ”*Ei mitään hyötyä*”, joka muodostaa myös oman ilmiönsä ja yläotsikon.

Ymmärrys

Vastauksista löytyi ilmauksia, jotka sijoittuvat kielentämisen hyviin puoliin ymmärtämisen ilmiöiden alla. Näitä ilmiöitä ovat *Ymmärsi hieman paremmin*, *Ymmärsi paremmin* ja *Viimeisteli opitun asian*. Nämä kaikki kolme ilmiötä kuuluvat matematiikan osaamisessa käsitteellisen ymmärtämisen piiriin ja toimivat hierarkkisina, siten että seuraava askel pitää sisällään edelliset. Ilmiöiden alle sijoittuneet ilmaisut ovat osin vastaajan omaa, mutta myös toisaalta tutkijan tulkinnan tulosta, joten aivan absoluuttisesta ymmärryksen lisääntymisestä ei voida puhua tai sitä ei ainakaan voida mitata. Kuitenkin kysymyksen asettelu tekee vastauksista relevantteja suhteessa vastaajan omaan mielikuvaan oman ymmärryksensä kehittymisestä.

Ilmiöön ”Ymmärsi hieman paremmin” liittyy matemaattisten käsitteiden, operaatioiden ja relaatioiden ymmärtäminen, jotka muodostavat Kilpatrickin ym. (2001, 116-117) teoriassa matematiikan *käsitteellisen ymmärtämisen* (suom. Joutsenlahti, 2005, 96). Vastaajat eivät olleet rajanneet tarkemmin, miten heidän ymmärryksensä oli parantunut sekä he ilmaisivat ymmärryksensä parantuneen vain vähän tai siinä oli pieni epävarmuus. Vastaajat kuitenkin uskoivat tehtävistä olleen ainakin jotain apua. **KY**

”Ymmärsi paremmin” ilmiö on samankaltainen, kuin edellä mainittu ilmiö, mutta vastaukset olivat rohkeampia ilmaisuiltaan, kuten ”Ymmärsin paremmin” tai ”Ymmärsin vasta kielentämisen avulla.” Edelleen puhutaan ymmärtämisen parantumisesta, joten ilmiöön liittyy *käsitteellinen ymmärtäminen*. **KY**

Ilmiö ”Viimeisteli opitun asian” oli ymmärryksen kehittymisen suhteen voimakkain. Viimeisteli opitun asian voidaan ajatella pitävän sisällään myös muutakin kuin vain *käsitteellistä ymmärtämistä*. Kun asia oli jo opittu, voidaan ajatella, että sen opitun asian kanssa on siis jo osattu toimia ja siitä on ymmärrettykin jo valmiiksi jotain. Nyt siis tämän kaiken päälle kielentäminen antoi vielä lisää. Uskon, että tämä jokin lisä on *mukautuvaa päättelyä*, joka tietysti tuo mukanaan lisää muita matemaattisen osaamisen piirteitä, kuten *käsitteellistä ymmärrystä* ja toisaalta myös *proseduraalista sujuvuutta*. Itse asiassa, kun jo jotain opittua asiaa vielä viimeistellään, on siinä mukana kaikki matematiikan osaamisen ominaisuudet. Ilmiö pitääkin siis sisällään kaikkia viittä ominaisuutta, mutta erityisesti *mukautuvaa päättelyä*, *proseduraalinen sujuvuus* sekä *käsitteellistä ymmärrystä* korostuvat. **MP(+PS+KY)**

Laskuprosessin hahmottaminen

Vastauksista löytyi ilmaisia, joita ei voi lukea vain puhtaan ymmärryksen kasvamiseksi. Näissä ilmaisuissa korostuu laskuprosessin hahmottaminen, jolloin ymmärryksen ohella myös tekemiseen, kuten laskuihin ja laskemiseen liittyvät asiat paranevat tai selvenevät. Yläotsikon ”Laskuprosessin hahmottaminen ja näkökulmat” ilmiöt ovat *Näkökulma laajeni hieman*, *Hahmotukseni parani*, *Näkökulma laajeni paljon* ja *Laskuprosessin soveltaminen*. Ilmiöt ovat jälleen hierarkkisia toisiinsa nähden.

”Näkökulma laajeni hieman” on ilmaisultaan vaisuin ilmiö, joka liittyy laskuprosesseihin. Ilmiö liittyy matematiikan osaamisessa *käsitteelliseen ymmärtämiseen*, mutta erona ilmiöön ”Ymmärsin hieman paremmin” tässä puhutaan kuitenkin näkökulman saamisesta/kehittymisestä. Näin ollen tähän ilmiöön tulkitsen ilmaiset, joissa vastaaja ilmaisee ymmärtäneensä hieman jotain uutta näkökulmaa tekemisessään toisin sanottuna laskemisessaan. Tällaista näkökulman avartumista voi olla esim. operaatioiden merkitykset tai relaatiot. **KY**

Yhtenä ilmiönä ilmaisuista nousi ”Hahmotus parani”, joka pitää sisällään ilmaiset ”Auttoi hahmottamaan” ja toisaalta ”Oppi hahmottamaan”. Ilmauksina nämä ovat paljon konkreettisempia ja liittyvät vielä enemmän tekemiseen, kuin näkökulman laajeneminen, joten ne kuuluvat oman ilmiönsä alle. Tulkitsen hahmotukseen liittyvien ilmauksien pitävän sisällään käsitteellisen ymmärtämisen ohella myös proseduraalisen sujuvuuden kehittymistä toisin sanottuna laskemisen kehittymistä, kuten tarkoituksenmukaisten proseduurien hallinnan kasvamista. **KY+PS**

Ilmiönä ”Näkökulma laajeni paljon” on tulkinnassani voimakkaampi, kuin hahmotuksen paraneminen. Ilmiön alle kokosin ilmaiset, joissa ilmaistiin näkökulmien perusteellisia laajentumisia, johon rinnastin myös laskujen kulun kokonaiskuvan paranemisen eli laskuprosessin ymmärryksen sekä välivaiheiden merkityksen ymmärryksen lisääntymisen. On ilmeistä, että tällaisessa kehitty-

misessä *käsitteellinen ymmärrys* kasvaa, mutta erityisesti *proseduraalinen sujuvuus* ja *strateginen kompetenssi* nousevat matematiikan osaamisen erityispiirteistä. *Proseduraalisen sujuvuuden* lisääntymisen voi ajatella kulminoituvan välivaiheiden merkityksen kautta, jolloin ymmärtää eri välivaiheiden, toisin sanottuna proseduurien tarkoituksen. Kun saa paremman kokonaiskuvan laskujen kulusta ja toisaalta oma näkökulma laajenee perusteellisesti, niin kyky formuloida, esittää ja ratkaista matemaattisia ongelmia kehittyy, jolloin puhutaan *strategisen kompetenssin* kehittymisestä. **(KY)+PS+SK**

Ylintä laskuprosessiin liittyvää kehittymistasoa edustaa ilmiö ”Laskuprosessin soveltaminen”, joka koostuu ilmaisusta, joissa vastaaja kertoo oppineensa soveltamaan omia tietoja käänteisesti. Tässä on kysymys jo hyvin pitkälle menevästä matematiikan osaamisesta, jolloin erityisesti painoalueiksi muodostuvat *strateginen kompetenssi* ja *mukautuva päättely*. Strateginen kompetenssi näyttäytyy muun muassa matemaattisten ongelmien ratkaisuna ja toisaalta mukautuva päättely taas pystyvyytenä loogiseen ajatteluun ja omien tietojen reflektointiin ja edelleen edellä mainittujen matemaattisten ongelmien ratkaisuun. (ks. transfer, luku 2.1) **(KY+PS)+SK+MP**

Vaikutukset toimintaan

Vastauksien ilmaisusta oli havaittavissa myös kielentämisen vaikutuksia vastaajan toimintaan. Tällaisia vaikutuksia olivat se, että kielentäminen *pakotti kertaamaan* asioita, eli perustiedot eivät riittäneetkään tehtävien ratkaisemiseksi. Toisaalta *itselle selittäminen* nousi toimintana esiin sekä kerrottiin *ajattelun syventyneen*. Ilmiöinä *itselle selittäminen* ja *ajattelun syveneminen* ovat erityisen hedelmällisiä huomioita juuri kirjallista kielentämistä silmällä pitäen. Ovathan nämä kirjallisen kielentämisen yksiä kulmakiviä ja juuri kielentämisen idea. Matematiikan osaamisen osa-alueista *yritteliäisyys* liittyy tämän yläotsikon ilmiöihin. **Y**

On helppo uskoa, että ilmiönä ”Pakotti kertaamaan” vaikuttaa osaamiseen ja vieläpä positiiviseen suuntaan lisäten osaamista. Pakkoon liittyy usein negatiivinen kaiku, mutta tässä yhteydessä pakko on nähty positiivisena asiana. Vastaajat näkivät ja kokivat työnteon mielekkäänä (ks. *yritteliäisyys ja motivaatio*).

”Itselle selittäminen” on kirjallisen kielentämisen yksi kantavista rakenteista ja vastausten ilmaisut, joissa mainitaan suoraan itselle selittäminen tai toisaalta itse miettimisen vaikutus asioiden selkeytymiseen kuuluvat tämän ilmiön alle.

Osittain edellisen ilmiön kanssa samaan asiaan liittyy myös ilmiö ”Ajattelu syventyi”. Ilmiön alle lukeutuvat ilmaisut, kuten ”pakotti miettimään teoriaa ja samalla sisäistin”, tai ”pakotti miettimään eri tavalla” tai että ”tehtäviä piti miettiä kauemmin”. Toisaalta ilmiön kahdessa ilmaisussa puhutaan pakosta, mutta pakko ei liity tässä ilmiössä kertaamiseen vaan ajatteluun. Tehtävissä oli

pakko miettiä ja ajatella laajemmin (horisontaalinen ajattelu, luku 2.5) ja toisaalta syvemmin (vertikaalinen ajattelu, luku 2.5).

Käytännön hyödyt ja asenteet

Osa kielentämisen hyödyistä liittyi käytäntöön eli tekemiseen ja motivaation lisääntymiseen. Näistä kahden seuraavan ilmiön käytännön hyödyt on helppo ymmärtää, kuten *helpotti tehtävän ratkaisua* ja *helpottaa muistamista*. Kolmas ilmiö liittyi edelleen käytännön eli tekemisen tasoon, mutta sisältä päin, eli kielentämistehtävät vaikuttivat asenteisiin ollen uusia ja mielenkiintoisia. Ilmiö sai nimekseen *motivaation kasvu*.

Ilmiö ”Helpotti tehtävän ratkaisua” nousi esiin vastausten ilmaisuista, kuten *helpottaa tehtävän ratkaisua* ja toisaalta koettiin kielentämisestä olleen apua erityisesti jossain laskutyypissä. Matematiikan osaamisen näkökulmasta ilmiö korostaa *proseduraalista sujuvuutta* sekä *strategista kompetenssia*. **PS+SK**

Ilmiö ”Helpottaa muistamista” ja erityisesti muistaminen ei suoranaisesti liity tekemiseen tekniikkaan eli varsinaiseen proseduriin, mutta kun muistaa asioita, niin on selvää että tekeminen helpottuu ja tulee suoraviivaisemmaksi. Vastauksista nousi ilmaus: auttoi muistamaan paremmin, mikä on tietysti hyvä juttu. Kuitenkin muistamisen paranemiseen liittyi usein (*käsitteellisen*) ymmärryksen lisääntyminen, jolloin ei itse asiassa tarvitse muistaa niin paljoa (ks. ymmärtämisen merkitys, luku 2.3). **KY+PS**

Motivaation merkitys käytännön tekemiselle on ilmeinen (ks. luku 3.2.1) ja se muodostaa oman ilmiönsä ”Motivaation kasvu”. Motivaation lisääntymistä kuvaavat ilmaisut, kuten ”kivaa vaihtelua” ja ”toi haastetta”. Matemaattisen osaamisen kannalta motivaation kasvu parantaa *yritteliäisyyttä*, jolloin tekeminen nähdään kannattavana ja hyödyllisenä. **Y**

5.4.2 Kielentämisen huonot puolet

Lähdin analysoimaan kielentämisen huonoja puolia samoin, kuin hyötyjäkin. Sain luokiteltua vastaukset 33 eri ilmaisuun. Ilmaisujen kirjo oli merkityksiltään niin moninainen, että esim. ilmaisu ”*Vaikeaa*” tarkoitti toisessa kohtaa kielentämisen (toiminta) vaikeutta, tehtävien vaikeutta ja toisaalta kokemusta koko kielentämisilmiön tuottamasta asioiden vaikeammaksi tekemisestä. Näin ollen ilmaisut hahmottuivat 16 eri ilmiön alle, jotka muodostivat seitsemän eri yläotsikkoa:

1. *Ei haittoja,*
2. *Tyhjä tai en osaa sanoa,*
3. *Totaalinen tyrmäys,*
4. *Kielentämisen tuntemattomuus,*

5. *Kielentämistehtävien ominaisuuksia,*

6. *Kielentämisen haasteita ja*

7. *Kielentämistehtävien haasteita.*

Aineistosta erottui kolme pientä, mutta merkitsevää yläotsikkoa: Ei haittoja, Totaalinen tyrmäys ja Kielentämisen tuntemattomuus. Oikeastaan positiivisena asiana pidettävä yläotsikko, *Ei haittoja* (n=1) on hyvin pieni, mutta merkitykseltään niin erityinen, ettei sitä voi rinnastaa mihinkään muuhun yläotsikkoon. En myöskään kokenut vastausten tulkitsemista positiivisena mielekkäänä, koska sen vastakohta olisi ollut, että kaikki on hyvää, mikä on ajatuksena mieletön vaikkakin tutkijan silmin houkutteleva.

Yläotsikko, *Totaalinen tyrmäys* pitää sisällään vastausten ilmaiset, joissa kielentämisessä on huonoa kaikki (n=2). Tätä yläotsikkoa ei voida myöskään pienen kokonsa vuoksi sivuuttaa, koska on täysin eri asia olla tätä mieltä, kuin jättää vastaamatta, tai kertoa, ettei osaa sanoa.

Kolmas yläotsikko, *Kielentämisen tuntemattomuus* (n=4), on myös hyvin pieni, mutta vaikuttaa näyttelevän jotain osaa myös joissain muissa yläotsikoista, sillä uskon uuden ja vieraan asian aiheuttavan muutoksia tuttuihin ja turvallisiin toimintamalleihin, jolloin uuden asian opettelu on monella tapaa työlästä, sekavaa ja vaikeaa. Tulkintaa tukee muun muassa asenteita ja mielipiteitä mitanneen kyselyn kannastaan epävarmojen suuri osuus juuri kielentämiseen liittyvissä kysymyksissä (ks. luku 6.2.). Uskon siis yläotsikon ilmiön vaikuttavan myös muissakin kielentämisen huonoissa puolissa, vaikka se oli sanallisesti ilmaistuna vain neljä kertaa.

Näitä kolmea edellistä yläotsikkoa ei ole kokojensa puolesta mielekästä verrata muihin, mutta niiden olemassaolon havaitseminen erityislaatuisuutensa takia on merkitsevää ja erityisesti ilmiönä tuntemattomuuden tunnustaminen on jopa välttämätöntä arvioidessa koettuja kielentämisen huonoja puolia.

Ei haittoja

Vastausten ilmaus, joka oli sitä mieltä ettei haittoja ollut muodostui omaksi yläotsikokseen.

Tyhjä tai en osaa sanoa

Yläotsikkoon löytyi helposti ilmiöt ”Tyhjä” ja ”En osaa sanoa.” Tulkintani tyhjästä vastauskentästä ja toisaalta ”viivasta” on samanlainen kuin hyötyjenkin kohdalla (ks. luku 5.4.1.). Ilmiö ”En osaa sanoa” pitää sisällään ne vastausten ilmaiset, joissa he eivät ole tajunneet termiä kielentäminen tai ne, joissa vastaaja ei ole osannut eritellä toisin sanoen sanoa kielentämisen huonoja puolia. Tutkijana voin siis olettaa, että vastaaja ei ole tällöin ollut täysin varma siitä, etteikö kielentämisessä voisi olla jotain huonoakin, mutta hän ei ole vain osannut pukea sitä sanoiksi. En ottanut tämän

yläotsikon alle lukeutuvia ilmaisia mukaan lopulliseen kaikkien ilmaisujen keskinäiseen vertailuun, koska ne ovat liian tulkinnanvaraisia.

Totaalinen tyrmäys

Osa vastauksien ilmaisuista kuvasivat, että huonoja puolia kielentämisessä on ”kaikki”, tai ettei kielentämisestä ole mitään hyötyä, nämä muodostivat oman ilmiönsä ”*Ei auta mitenkään*”.

Kielentämisen tuntemattomuus

Yläotsikkoon lukeutuu ne ilmiöt, joissa painottui toisaalta kielentämistehtäviin ja kielentämiseen liittyvä tuntemattomuus ja vieraus. Ongelmana pidettiin sitä, että kielentämistä ei harjoitella matematiikan tunnilla ja toisaalta kotona joutuu sitten yksin painimaan tehtävien kanssa. Osa koki myös stressiä tehtävistä. Uskon tämän yläotsikon ilmiöiden selittävän myös osaltaan muita koettuja kielentämisen haasteita, sillä uuteen asiaan tutustuminen voi olla aluksi sekavaa, hämmentävää, vaikeaa ja työlästä. Yläotsikon alle lukeutuvat kolme ilmiötä ovat hyvin lähellä toisiaan ja toisaalta ilmiöihin liittyy yhdistävä tekijä vapaa-ajan käyttöön liittyen.

Vastauksista omana ilmiönään nousi ilmaus ”*Ei harjoitella matematiikan tunneilla*”. Ilmiö ei nosta esiin kielentämiseen tai kielentämistehtäviin liittyviä huonoja puolia, vaan pikemminkin korostaa ristiriitaa, ettei näitä kyseisiä kotona tehtäviä tehtäviä ole harjoiteltu koulussa.

Yhtenä ilmiönä nousi ”*Kotona tekeminen ilman apua*”. Jälleen tehtävät tai kielentäminen eivät ole kritiikin kohteena, vaan pikemminkin oman vapaa-ajan käyttöön ja tehtävien tekoon liittyvät asiat. Ilman apua tekeminen liittyyneen koko yhteiskuntamme yksilöä ja niiden välistä kilpailua korostavaan ajatteluun, mikä projisoituu myös kouluun ja edelleen matematiikan opiskeluun ja oppimisen arviointiin. En ollut kieltänyt tehtävien tekoa yhdessä, mutta opettajalta niihin ei saanut erillistä apua.

Omana ilmiönään nousi myös ilmaus ”*Stressi tehtävistä*”. Tämä ilmiö liittyy läheisesti vapaa-ajan käyttämiseen tehtävien parissa, sillä oppilaiden piti lähtökohtaisesti itse järjestää aika tehtävien teolle. Mutta toisaalta myös siihen, että tehtävät olivat uusia ja siksi vieraita ja vielä jos oletuksena on, että matematiikan tehtävät täytyy pystyä ratkaisemaan yksin, niin ei ole yllättävää, että tehtävät aiheuttivat huolta ja stressiä.

Kielentämistehtävien haasteita

Yläotsikkoon sisältyy ne ilmiöt, jotka liittyvät kiinteästi tehtyihin kielentämistehtäviin. Tehtävät olivat joidenkin vastausten mukaan vaikeita, mihin liittyy myös ylipäätään matematiikan vaikeus. Tehtävänantoja pidettiin myös vaikeaselkoisia. Toisaalta tehtäviä moitittiin siitä, että ne sekoittivat ajatuksia.

Ilmiöön ”*Tehtävien vaikeus*” liittyy vastausten ilmaisut, joissa korostettiin tehtävien vaikeutta. Ilmiö tuli esiin ilmauksista, joissa harmiteltiin, kun ei keksinyt tehtävässä tarvittavaa esimerkiksi, tai kun ymmärtämättömyyden seurauksena tulee selittäneeksi aivan vääriä asioita. Toisaalta myös osassa vastauksista ilmaus, jossa korostettiin tajuamisen vaikeutta, koska edelleen käytetään ”matikkakieltä”.

Vastauksista nousi ilmaus, jossa tehtävänantoja pidettiin epäselvinä tai niitä oli vaikea ymmärtää. Tämä nousi omaksi ilmiökseen ”*Ymmärrettävyys*”. Uudentyyppiset tehtävät saattoivat uututensa ja ratkaisijalleen vierauden takia tuottaa ymmärrettävyydessään ongelmia.

Ilmiöön ”*Sekoitti ajatuksia*” kuuluu ilmaukset, joissa ei eritellä että tehtävänannot olisivat sekavia, vaan ylipäätään tehtävät olivat sekavia toisin sanottuna tehtävä sekoitti ajatukset tai kielentäminen oli sekavaa. Toisaalta myös ilmaus ”hämmentävää” lukeutuu tähän ilmiöön.

Kielentämistehtävien ja kielentämisen ominaisuuksia

Yläotsikkoon sisältyy ilmiöt, jotka kuvasivat tehtävien kautta tulleita itsessään kirjallisen kielentämisen ominaisuuksiin liittyviä ajatuksia. Osassa vastauksista nousi esiin ilmiö, että kielentäminen mutkistaa asioita. Lisäksi kielentämistä pidettiin työläänä ja hitaana tapana käsitellä matematiikkaa. Osa piti kielentämistä turhana.

Ilmiöön ”*Monimutkaistaa asioita*” lukeutuvat ne ilmaisut, joissa ilmeni että kielentäminen tai kielentämistehtävät tuntuivat monimutkaistavan tai tekevän vaikeammaksi asioita. Uusi, vieras tapa lähestyä matematiikkaa saattaa hyvinkin tuntua tältä, minkä uskon vaikuttavan tähän ilmiöön (ks. Kielentämisen tuntemattomuus).

Ilmiöön ”*Työlästä*” lukeutuvat ilmaisut, joissa kuvailtiin kielentämisen tai tehtävien työläyttä. Kirjoittamista pidettiin turhauttavana, työtapaa hitaana ja toisaalta harmiteltiin sitä, kun tehtävänantoa tai sitä mitä pitää tehdä ei ymmärrä niin nopeasti. Tämä on osa kielentämisen ideaa, jolloin pelkästä tehtävänannon muodosta ei voi suoraan päätellä laskuprosessia (vrt. perinteiset sanalliset tehtävät), vaan tehtävänannon merkitykset pitää ensin tulkita ja sitten tuottaa omaa tulkintaa vastaava vastaus. Myös ilmaus, jossa sanottiin kielentämisen hankaloittavan työskentelyä lukeutuu tähän ilmiöön. Oletan tämän ilmaisun pitävän sisällään ajatuksen nopeasta tehtävien tekemisestä, ikään kuin määrällisestä ajattelusta matematiikan opiskelussa, kun taas kielentämisessä painopiste on merkityksissä ja siis enemmänkin laadussa (ks. luku 3.2.2).

Kolmas ilmiö, joka lukeutuu tehtävien ja kielentämisen ominaisuuksiin on se, että osassa ilmaisuista ilmeni, että koko toiminta on ”*Turhaa*”. Tehtäviä pidettiin liian yksinkertaisina ja toisaalta harmiteltiin sitä, että tehtäviin löytyi suorat vastaukset kirjasta, eikä näin ollen todellisia omia oivalluksia syntyneet.

Tutkijan ja tehtävien laatijan näkökulmasta tämä ilmiö on enemmänkin positiivinen ongelma ja kertoo siitä, että kyseiset vastaajat ovat ymmärtäneet tehtävänannot ja osanneet toimia sen mukaisesti. Se, että osaa tulkita uusia tehtävätyyppejä ja löytää vastaavuuden kirjan esitettyihin teorioihin kertoo ratkaisijan kehittyneestä matemaattisesta ajattelusta. Toisaalta tämä ilmiö nostaa esiin sen, että kenties näidenkin tehtävätyyppien ratkaisemisessa oli olemassa helppo (kopioinnin) tie, jolloin omalle oivallukselle ei ollut tarvetta ja matematiikan osaaminen ei parantunut ja uuden oppimista ei tapahtunut. Mutta tässäkin tapauksessa ratkaisijan pitää ymmärtää mikä tieto on missäkin kohtaa oleellista ja kopioinnin arvoista, jolloin voidaan lähtökohtaisesti ajatella kopioijan matemaattisen ymmärryksen olevan varsin hyvällä tasolla.

Kielentämisen haasteita

Tämä yläotsikko pitää sisällään ajatukset kielentämisen toiminnasta. Osa piti kielentämistä kokonaisuudessaan vaikeana ilman erittelyjä. Moni piti kielentämisen, eli merkitysten tuottamista paperille vaikeana ja osa piti tulkintaa ongelmallisena, koska aina kaverin kielentämä vastaus ei ollut auennut itselle.

Ilmiöön ”*Vaikeaa kokonaisuudessaan*” kuuluu ne ilmaisut, jotka totesivat yksiselitteisesti kielentämisen olevan vaikeaa. Osittain uskon vaikeuden selittyvän kielentämisen uutuudella (ks. Kielentämisen tuntemattomuus), eli ilmiö on rinnastettavissa uuden asian opetteluun, joka luonnollisestikin on aluksi vaikeaa.

”*Merkityksen tuottamista*” pidettiin vaikeana asiana. Ilmaisut, joissa kuvattiin ajatusten ja käsitteiden sanoiksi pukemisen hankaluutta, selittämistä tai kirjoittamista vaikeana lukeutuvat ilmiön alle. Myös oikeasta tavasta kielentää kannettiin huolta, mikä osittain liittyy merkityksen tulkintaan ja tässä tapauksessa nimenomaan oman kielennyksen, eli oman tuotetun merkityksen tulkintaan. Sijoitin ilmaisun siis merkityksen tuottamisen ongelmallisuuden ilmiön alle, koska lähtökohtaisesti vastaajalla on ollut hankaluus tuottaa merkitykseltään oikea merkitys.

”*Merkitysten tulkinnan*” alle sijoittui ilmaus, jossa ei osattu nähdä kielentämisen, eli merkityksen tuottamisen ja edelleen sen tulkinnan yhteyttä asian ymmärtämiseen. Eli toisin sanottuna tulkinta kokonaisuudessaan kielentämistehtävistä oli jäänyt puoli tiehen. Toisaalta osasta vastaajista oli hankalaa ymmärtää kaverin kielennystä, toisin sanottuna selitystä ja edelleen hänen tuottamaansa merkitystä. Tämähän avaa oven luonnollisesti suulliseen kielentämiseen ja toisaalta myös kaverin reflektioon omasta kielennyksestään, jolloin koko kielentämisen yhteisöllinen ajatus tulee esiin (ks. luku 3.1).

Ilmiöstä olisi houkuttelevaa käyttää käsitettä matemaattinen empaattisuus, eli eräänlaista kykyä asemoitua toisen tapaan hahmottaa asia ja ymmärtää se siten miten hän on sen ymmärtänyt,

mutta suoranaista tällaista käsitettä ei ole lähdekirjallisuudessa käytetty. Toisen selityksen ymmärtäminen vaatii eheää matemaattista ajattelua (psykometrinen ja tiedematemaattinen lähestymistapa) ja osaamisen erityispiirteistä muun muassa mukautuvaa päättelyä. Opettajien ajattelulle tällainen mukautuminen ja asettuminen toisin sanottuna ”*matemaattinen empatiakyky*” oppilaiden ajattelua kohtaan on välttämätöntä, joten myös pedagoginen lähestymistapa on mukana pohdittaessa minkälaista matemaattista ajattelua kyseinen kyky vaatii.

6 TULOKSET

6.1 Kielentämistehtävät

Yleisesti ottaen parhaimman arvosanaluokan vastaajat osasivat tehtäviä selkeästi paremmin kuin muut luokat. Kahden heikoimman luokan erojen tarkastelu on haastavaa, sillä heikoimman luokan vastaajat jättivät usein vastaamatta, mikä lienee merkki siitä, että tehtävä on ollut heille keskitasoisempia haastavampi edes yrittää. Lisäksi heikoimpaan arvosanaluokkaan kuului vain 5 vastaajaa. Kuitenkin annetut vastaukset noudattivat hyvin arvosanaluokkia, joten tehtävät erottelivat osaamista kiitettävästi siten, että korkeimpaan arvosanaluokkaan kuuluneiden vastaajien vastaukset sijoituivat yleisemmin korkeampaan kategoriaan ja päinvastoin.

Vastaajat osasivat hyvin laskea ja tehdä laskuproseduureja, mutta merkitysten tuottaminen luonnollisella kielellä ja toisaalta samojen merkitysten tulkinta eri kielien välillä eli koodinvaihto oli vaikeaa kaikille arvosanaluokille. Tämä näyttäytyi mm. siinä ettei tehtävänannossa ollutta kuvaa oltu osattu yhdistää tehtävään, joten myös vastauksen merkitykset olivat puutteelliset. Kommentointi oli haastavaa ja usein vastaajat tyytyivät kuvailemaan tehtävänannossa ollutta ratkaisua selittämisen sijaan.

Tämän osion taulukoita luetaan siten, että lukuarvo kertoo vastausten absoluuttisen lukumäärän. Sen vieressä oleva prosenttiluku kertoo vastausten prosenttiosuuden kyseessä olevassa vastauskategoriassa. Näiden lukujen alla on vastausten prosenttiosuus kyseessä olevan arvosanaluokan vastauksista. Taulukkoon on tummennettu mielenkiintoisia havaintoja. Käyn ensin läpi tulokset yleisellä tasolla, jonka jälkeen erikseen jokaisen tehtäväkokonaisuuden tehtävineen.

Täysin oikeita vastauksia oli 17% ja toisaalta vastauksia, joissa osaamista ei näkynyt ollenkaan oli 15% vastauksista. Myös palauttamatta jääneitä tehtäviä oli hieman enemmän, kun 16% vastauksista lukeutui tähän kategoriaan. Muuten vastaukset jakaantuivat varsin tasaisesti eri vastauskategorioihin. Mestarillisiin merkityksiin sijoittuvia vastauksia tuli suhteessa enemmän heikoilta (2%) kuin keskitasoisilta (<1%). Puutteellisia vastauksia tuli hieman enemmän keskitasoisilta (12%). Eniten täysin oikein olevia vastauksia antoi oletetusti paras arvosanaluokka, kun 23% heidän vastauksistaan lukeutui tähän kategoriaan. Keskitasoiset eivät olleet osanneet ollenkaan reilusti eniten (26%) verrattuna muihin arvosanaluokkiin (9%), mutta heikoimman arvosanaluokan vasta-

uksista suhteessa useampi oli tyhjä (17%) tai ei ollut palauttanut koko tehtävää (33%). Heikoimman arvosanaluokan vastauksista siis puolet (49%) sijoittui näihin kahteen kategoriaan ja varsinkin palauttamatta jääneiden tehtävien osuus on huomattavan suuri. Parhaimmankin arvosanaluokan vastauksista 17% on palauttamatta. Viisastelijoita on suhteessa eniten parhaimmassa arvosanaluokassa (3%), mutta ero on pieni muihin verrattuna.

TAULUKKO 11. Vastauskategorioiden osuudet kaikista vastauksista arvosanaluokittain

Kaikki vastaukset	Arvosanaluokka			Yhteensä
	4-6	7-8	9-10	
VASTAUSKATEGORIA	95 (8%)	437 (36%)	665 (56%)	1197 (100%)
Mestarillinen merkitys	2 (5%) 2%	3 (8%) <1%	33 (87%) 5%	38 (3%)
Täysin oikein	7 (3%) 7%	45 (22%) 10%	149 (74%) 23%	201 (17%)
Puutteellinen	8 (8%) 8%	43 (43%) 12%	49 (49%) 7%	100 (8%)
Tulos oikein, ei merkityksiä	3 (3%) 3%	28 (30%) 6%	62 (67%) 9%	93 (8%)
Ei osattu ollenkaan.	9 (5%) 9%	111 (61%) 26%	61 (34%) 9%	181 (15%)
Tyhjä	16 (15%) 17%	55 (52%) 13%	34 (32%) 5%	105 (9%)
Tehtävää ei ole palautettu.	31 (16%) 33%	47 (25%) 11%	112 (59%) 17%	190 (16%)
<i>Erityinen</i>	4 (4%) 4%	43 (40%) 10%	60 (56%) 9%	107 (8%)
”Viisastelija”	1 (3%) 1%	9 (30%) 2%	20 (67%) 3%	30 (3%)
Ei jaettu	14 (9%) 15%	53 (35%) 12%	85 (56%) 13%	152 (13%)
Yhteensä	95 (8%) 100%	437 (36%) 100%	665 (56%) (100%)	1197 (100%)

6.1.1 Lineaarinen malli

Lineaarisen mallin yhteiset tehtävät oli osattu todella hyvin. Ne olivat perustaitoja mittaavia tehtäviä liittyen suoranyhtälön ja toisaalta suoran kuvaajan tulkintaan ja tehtävänannot olivat melko

perinteiset. Arvosanaloukkien erot näkyvät vastausten sijoittumisessa eri kategorioihin, mutta erot ovat pieniä. Toisin sanottuna tehtävät ovat olleet helppoja.

Tehtävässä 2A vain parhaimpaan luokkaan kuuluneiden vastauksia lukeutui mestarillisia merkityksiä sisältäneisiin. Tämä kertoo siitä, että tehtävässä oli jotain sellaista, mikä vaati vastaajalta enemmän matemaattista osaamista. Jopa 38% vastaajista oli antanut kirjalliseksi tehtävänannoksi ”perinteisen” ”standardi”-mallin mukaisen tehtävänannon. Voitaneen siis sanoa, ettei tämän kaltainen ”lihat luiden päälle” -tehtävä ja esimerkkitalanteen antaminen suoran yhtälölle ollut olleenkaan tuttua vastaajille ja toisaalta vastauksista päätellen totutut sanalliset tehtävänannot lienevät hyvin suoraviivaisia laskuproseduriin liittyviä.

Tehtävässä 2B 31% vastauksista oli täysin oikein ja se jakoi osaamista eniten arvosanaloukasta riippumatta, nimittäin mestarillisia merkityksiä antoi sekä heikoin, että paras arvosanaloukka. Vastaukset jakaantuivat tasaisesti eri vastaajaluokkien kesken eri kategorioihin ja lisäksi 38% oli jättänyt tehtävän palauttamatta. Myös osaamattomuus jakaantui eri luokkien kesken tasaisesti. Tässä tehtävässä ei vastaajan arvosanaloukalla ollut merkitystä suhteessa vastauksen sijoittumisessa vastauskategoriaan, mutta palauttamatta jättäneiden osuus on suuri.

Lineaarinen malli 1a

Kaikille yhteinen lineaarisen mallin ensimmäisen tehtävän a-kohdan osasi 73% kaikista vastaajista, joten se oli helppo. Mestarillisen merkityksen antoi 20% sekä parhaimpaan ja heikoimpaan arvosanaloukille kuuluneista vastauksista. Täytyy kuitenkin muistaa, että heikoimpaan luokkaan kuului vastaajia vain viisi kappaletta, joten prosenttiosuus voi antaa hieman optimistisen kuvan osaamisesta. Kuitenkin reilusti yli puolet kustakin arvosanaloukasta kuului kahteen ylimpään arvosanakategoriaan. Erityishuomioksi tämän tehtävän vastauksissa nousi se, että kulmakertoimen kuvasta tulkinnan kanssa oli yllättävän monessa, joka kuudennessa vastauksessa puutteita.

TAULUKKO 12. Lineaarisen mallin 1. tehtävän a-kohdan vastaukset arvosanaluokittain

Kaikki vastaukset	Arvosanaluokka			Yhteensä
	4-6	7-8	9-10	
LINEAARINEN MALLI 1a	5 (8%)	23 (37%)	35 (56%)	63 (100%)
Mestarillinen merkitys	1 (11%) 20%	1 (11%) 4%	7 (78%) 20%	9 (14%)
Täysin oikein	2 (5%) 40%	13 (35%) 57%	22 (59%) 63%	37 (59%)
Puutteellinen	-	2 (100%) 9%	-	2 (3%)
Tulos oikein, ei merkityksiä	-	-	1 (100%) 3%	1 (2%)
Ei osattu ollenkaan.	1 (25%) 20%	3 (75%) 13%	-	4 (6%)
<i>Kulmakerroin väärin</i>	1 (10%) 20%	4 (40%) 17%	5 (50%) 14%	10 (16%)
Yhteensä	5 (8%) 100%	23 (37%) 100%	35 (56%) 100%	63 (100%)

Lineaarinen malli 1b

Yhteisen lineaarisen mallin ensimmäisen tehtävän b-kohdan vastauksista n. puolet (49%) oli oikein ja vain kolme vastausta päätyi kategoriaan ”Ei osattu ollenkaan”. Tämä kertoo siitä, että tehtävä oli osattu todella hyvin. Kuitenkin puutteellisia vastauksia oli paljon (43%) ja jopa 80% heikoimman arvosanaluokan vastaajien vastauksista lukeutui tähän kategoriaan.

TAULUKKO 13. Lineaarisen mallin 1. tehtävän b-kohdan vastaukset arvosanaluokittain

Kaikki vastaukset	Arvosanaluokka			Yhteensä
	4-6	7-8	9-10	
LINEAARINEN MALLI 1b	5 (8%)	23 (37%)	35 (56%)	63 (100%)
Mestarillinen merkitys	-	2 (20%) 9%	8 (80%) 23%	10 (16%)
Täysin oikein	1 (5%) 20%	4 (19%) 17%	16 (76%) 46%	21 (33%)
Puutteellinen	4 (15%) 80%	14 (52%) 61%	9 (33%) 26%	27 (43%)
Tulos oikein, ei merkityksiä	-	-	2 (100%) 6%	2 (3%)
Ei osattu ollenkaan.	-	3 (100%) 13%	-	3 (5%)
Yhteensä	5 (8%) 100%	23 (37%) 100%	35 (56%) 100%	63 (100%)

Lineaarinen malli 2A

4 (11%) vastausta oli oikein ja nämä kaikki olivat tulleet parhaimman arvosanaluokan edustajilta. Lisäksi 14 (38%) oli antanut kirjallisen tehtävänantonsa ”standardi”-mallin mukaan eikä esimerkitilannetta, kuten tehtävänannossa pyydettiin.

TAULUKKO 14. A-tehtäväpaperin lineaarisen mallin 2. tehtävän vastaukset arvosanaluokittain

Tehtäväpaketti A:n vastaukset	Arvosanaluokka			Yhteensä
	4-6	7-8	9-10	
LINEAARINEN MALLI 2A	1 (3%)	16 (43%)	20 (54%)	37 (100%)
Mestarillinen merkitys	-	-	4 (100%) 20%	4 (11%)
Puutteellinen	-	2 (67%) 13%	1 (33%) 5%	3 (8%)
Tulos oikein, ei merkityksiä	-	-	2 (100%) 3%	2 (5%)
Ei osattu ollenkaan.	1 (9%) 100%	3 (75%) 13%	-	4 (6%)
Tyhjä	-	1 (100%) 4%	-	
”Standardi”-malli	-	3 (21%) 19%	11 (79%) 55%	14 (38%)
Ympäripyöreä viisastelija	-	2 (100%) 13%	-	2 (5%)
Yhteensä	1 (3%) 100%	16 (43%) 100%	20 (54%) 100%	37 (100%)
<i>Ei jaettu</i>	4 (15%) 80%	7 (27%) 30%	15 (58%) 42%	26 (41%)

Lineaarinen malli 2B

Prosenttiosuudet ovat jakautuneet tasaisesti jokaiseen arvosanaluokkaan. Noin kolmannes (31%) oli osannut tehtävän, joista puolet tuli parhaimmasta ja loput kaksi neljäsosaa tasan kahdesta alemmasta arvosanaluokasta. Mielenkiintoinen huomio kiinnittyy siihen, että mestarillisia merkityksiä oli 1 heikoimman (25%) ja parhaimman (7%) arvosanaluokan edustajien vastauksista. Parhaimman arvosanaluokan vastauksista 20% lukeutui kategoriaan ”Ei osattu ollenkaan”. Lisäksi 10 (38%) ei ollut palauttanut tehtävää ollenkaan.

TAULUKKO 15. B-tehtäväpaperin lineaarisen mallin 2. tehtävän vastaukset arvosanaluokittain

Tehtäväpaketti B:n vastaukset	Arvosanaluokka			Yhteensä
	4-6	7-8	9-10	
LINEAARINEN MALLI 2B	4 (15%)	7 (27%)	15 (58%)	26 (100%)
Mestarillinen merkitys	1 (50%) 25%	-	1 (50%) 7%	2 (8%)
Täysin oikein	1 (17%) 25%	2 (33%) 29%	3 (50%) 20%	6 (23%)
Tulos oikein, ei merkityksiä	-	1 (33%) 14%	2 (67%) 13%	3 (12%)
Ei osattu ollenkaan.	1 (20%) 25%	1 (20%) 14%	3 (60%) 20%	5 (19%)
Tehtävää ei ole palautettu.	1 (10%) 25%	3 (30%) 43%	6 (60%) 40%	10 (38%)
Yhteensä	4 (15%) 100%	7 (27%) 100%	15 (58%) 100%	26 (100%)
<i>Ei jaettu</i>	<i>1 (2%) 80%</i>	<i>16 (25%) 70%</i>	<i>20 (32%) 57%</i>	<i>37 (59%)</i>

6.1.2 Potenssilauseke

Heikoimmasta arvosanaluokasta 40% ja parhaimmasta 23% ei ollut palauttanut potenssilauseke-tehtäviä lainkaan. Lisäksi tyhjien vastausten osuudet ovat tässä tehtäväkokonaisuudessa heikon arvosanaluokan edustajilla 20-60%, joten heille potenssilausekkeeseen liittyvät kielentämistehtävät ovat olleet jostain syystä erityisen hankalia. Muuten osaaminen jakautui siten että paras arvosanaluokka erottautui osaamisellaan selvästi kahdesta muusta ja keskimäinen luokka osasi vastata vuorostaan paremmin kuin heikoin.

Tehtävissä 1-3 oli kyse täydennystehtävistä ja 4. tehtävässä piti itse osata muotoilla maattista päättelyä edellisten tehtävien avulla. Tämä näkyi heikkojen vastaajien vastausten puuttumisena varsinkin 4. tehtävässä, johon kukaan heistä ei ollut vastannut. Keskitasoisten osuus tehtävistä, joissa ei oltu osattu ollenkaan on suuri, mutta toisaalta he eivät jättäneet juurikaan tehtäviä palauttamatta tai tyhjiksi. 4. tehtävässä palauttamatta jättäneiden ja toisaalta vastauksensa tyhjäksi jättäneiden osuus on yhteensä 40-43% vastaajista.

3. tehtävässä vastaajilla oli ongelmia kommentointitekniikan kanssa ja toisaalta eri välivaiheiden merkitysten kielentämisen kanssa. 4. tehtävässä monet vastaajat päätyivät oikeaan tulokseen, mutta eivät onnistuneet kielentämään tulokseen johtavia merkityksiä, mikä kertoo vastaajan matemaattisen ajattelun olevan tässä suhteessa puutteellista.

Tehtävät vaikeutuivat vähitellen, siten että mitä enemmän tehtävässä on pitänyt itse tuottaa merkityksiä sitä vaikeampi se on ollut. Tämä näkyy hyvin taulukoissa 36-38, joissa prosentiosuudet taulukkojen yläpäässä vähenevät ja toisaalta keskittyvät enemmän oikeaan reunaan tehtävissä eteenpäin mennessä.

Potenssilauseke 1

Tehtävä oli osattu hyvin, sillä 51% vastauksista oli täysin oikein. Näyttäisi siltä, että muut arvosanaluokat ovat jättäneet vastauksensa tyhjäksi tai eivät ole palauttaneet koko tehtävää, kun taas keskitasoiset vastaajat olivat yrittäneet vaikka eivät olisikaan osanneet (30%).

TAULUKKO 16. Potenssilausekkeen 1. tehtävä arvosanaluokittain

Kaikki vastaukset	Arvosanaluokka			Yhteensä
	4-6	7-8	9-10	
POTENSSILAUSEKE 1	5 (8%)	23 (37%)	35 (56%)	63 (100%)
Täysin oikein	2 (8%) 40%	9 (28%) 39%	21 (66%) 60%	32 (51%)
Puutteellinen	-	4 (50%) 17%	4 (50%) 11%	8 (13%)
Ei osattu ollenkaan.	-	7 (78%) 30%	2 (22%) 6%	9 (14%)
Tyhjä	1 (50%) 20%	1 (50%) 4%	-	2 (3%)
Tehtävää ei ole palautettu.	2 (17%) 40%	2 (17%) 9%	8 (67%) 23%	12 (19%)
Yhteensä	5 (8%) 100%	23 (37%) 100%	35 (56%) 100%	63 (100%)

Potenssilauseke 2

Tehtävän oli osannut 37% vastaajista. Puutteellisia vastauksia on 21% ja ne ovat jakautuneet lähes tasan eri arvosanaluokissa. 43% keskitasoisista ei ole osannut ollenkaan tehtävää vastauksensa

perusteella, mutta edelleen heihin lukeutuu suhteessa vähiten tehtävän palauttamatta jättäneitä vastaajia.

TAULUKKO 17. Potenssilausekkeen 2. tehtävä arvosanalukittain

Kaikki vastaukset	Arvosanalukka			Yhteensä
	4-6	7-8	9-10	
POTENSSILAUSEKE 2	5 (8%)	23 (37%)	35 (56%)	63 (100%)
Täysin oikein	1 (4%) 20%	5 (22%) 22%	17 (74%) 49%	23 (37%)
Puutteellinen	1 (4%) 20%	5 (38%) 22%	7 (54%) 20%	12 (21%)
Ei osattu ollenkaan.	-	10 (77%) 43%	3 (23%) 9%	13 (21%)
Tyhjä	1 (50%) 20%	1 (50%) 4%	-	2 (3%)
Tehtävää ei ole palautettu.	2 (17%) 40%	2 (17%) 9%	8 (67%) 23%	12 (19%)
Yhteensä	5 (8%) 100%	23 (37%) 100%	35 (56%) 100%	63 (100%)

Potenssilauseke 3

Erityiseksi huomioksi vastauksista valikoitui se, että 22% keskitasoisista ja 11% parhaimpaan arvosanalukkaan kuuluvista vastaajista ei ollut osannut kommentointitekniikkaa. Samaa tulkintaa tukee se, että 29% vastauksissa oli ongelmia merkitysten kanssa, vaikka tulos oli osattu muotoilla ja siis tiedettiin mihin oltiin vastauksessa pyrkimässä. Tähän vastauskategoriaan lukeutui heikoimmasta arvosanalukasta 40% ja keskimmäisestä 35% ja parhaimmastakin 23%. Paras arvosanalukka on osannut tehtävän selkeästi paremmin (40%) kuin muut luokat (0% ja 9%).

TAULUKKO 18. Potenssilausekkeen 3. tehtävä arvosanaluokittain

Kaikki vastaukset	Arvosanaluokka			Yhteensä
	4-6	7-8	9-10	
POTENSSILAUSEKE 3	5 (8%)	23 (37%)	35 (56%)	63 (100%)
Mestarillinen merkitys	-	-	3 (100%) 9%	3 (5%)
Täysin oikein	-	2 (15%) 9%	11 (85%) 31%	13 (21%)
Tulos oikein, ei merkityksiä	2 (11%) 40%	8 (44%) 35%	8 (44%) 23%	18 (29%)
Ei osattu ollenkaan.	-	4 (80%) 17%	1 (20%) 3%	5 (8%)
Tyhjä	1 (33%) 20%	2 (67%) 9%	-	3 (5%)
Tehtävää ei ole palautettu.	2 (17%) 40%	2 (17%) 9%	8 (67%) 23%	12 (19%)
<i>Ei osattu kommentoida</i>	-	5 (56%) 22%	4 (44%) 11%	9 (14%)
Yhteensä	5 (8%) 100%	23 (37%) 100%	35 (56%) 100%	63 (100%)

Potenssilauseke 4a

Heikoimman arvosanaluokan vastaajista kukaan ja kaikista vastaajista kaksi viidesosaa on ei ole jättänyt vastausta arvioitavaksi. Parhaan arvosanaluokan vastauksista 31% on oikein. Muuten vastaukset jakautuvat tasaisesti arvosanaluokittain katseltuna oletuksen mukaan. Keskimmäisen arvosanaluokan vastaajista 22% on päätenyt oikeaan tulokseen, mutta merkitys on jäänyt epäselväksi.

TAULUKKO 19. Potenssilausekkeen 4. tehtävän a-kohta arvosanaluokittain

Kaikki vastaukset	Arvosanaluokka			Yhteensä
	4-6	7-8	9-10	
POTENSSILAUSEKE 4a	5 (8%)	23 (37%)	35 (56%)	63 (100%)
Täysin oikein	-	1 (8%) 4%	11 (92%) 31%	12 (19%)
Puutteellinen	-	1 (20%) 4%	4 (80%) 11%	5 (8%)
Tulos oikein, ei merkityksiä	-	5 (56%) 22%	4 (44%) 11%	9 (14%)
Ei osattu ollenkaan.	-	7 (58%) 30%	5 (42%) 14%	12 (19%)
Tyhjä	3 (25%) 60%	6 (50%) 26%	3 (5%) 9%	12 (19%)
Tehtävää ei ole palautettu.	2 (15%) 40%	3 (23%) 13%	8 (62%) 23%	13 (21%)
Yhteensä	5 (8%) 100%	23 (37%) 100%	35 (56%) 100%	63 (100%)

Potenssilauseke 4b

Tehtävää ei ollut osannut 32%, sen oli jättänyt tyhjäksi 22% ja kokonaan palauttamatta sen oli jättänyt 21%. Näin ollen 75% oli ollut hankaluuksia tehtävän kanssa. Vain 3 (5%) vastauksista oli täysin oikein tai niissä merkitys oli osattu antaa mestarillisen hyvin. Oikeaan tulokseen ilman hyväksyttäviä perusteluja oltiin päästy 16% vastauksista, joihin lukeutui 23% parhaimman arvosanaluokan vastaajista.

TAULUKKO 20. Potenssilausekkeen 4. tehtävän b-kohta arvosanaluokittain

Kaikki vastaukset	Arvosanaluokka			Yhteensä
	4-6	7-8	9-10	
POTENSSILAUSEKE 4b	5 (8%)	23 (37%)	35 (56%)	63 (100%)
Mestarillinen merkitys	-	-	1 (100%) 3%	1 (2%)
Täysin oikein	-	-	2 (100%) 6%	2 (3%)
Puutteellinen	-	1 (33%) 4%	2 (67%) 6%	3 (5%)
Tulos oikein, ei merkityksiä	-	2 (20%) 9%	8 (80%) 23%	10 (16%)
Ei osattu ollenkaan.	-	11 (55%) 48%	9 (45%) 26%	20 (32%)
Tyhjä	3 (21%) 60%	6 (43%) 26%	5 (36%) 14%	14 (22%)
Tehtävää ei ole palautettu.	2 (15%) 40%	3 (23%) 13%	8 (62%) 23%	13 (21%)
Yhteensä	5 (8%) 100%	23 (37%) 100%	35 (56%) 100%	63 (100%)

Potenssilauseke 4c

Tehtävän oli osannut 12% kaikista vastaajista ja he kaikki olivat parhaimman arvosanaluokan oppilaita. 29% vastaajista ei ollut osannut lainkaan tehtävää ja kaiken kaikkiaan 71% vastauksista lukeutui kolmeen alimpaan vastauskategoriaan.

TAULUKKO 21. Potenssilausekkeen 4. tehtävän c-kohta arvosanaluokittain

Kaikki vastaukset	Arvosanaluokka			Yhteensä
	4-6	7-8	9-10	
POTENSSILAUSEKE 4c	5 (8%)	23 (37%)	35 (56%)	63 (100%)
Mestarillinen merkitys	-	-	1 (100%) 3%	1 (2%)
Täysin oikein	-	-	6 (100%) 17%	6 (10%)
Puutteellinen	-	2 (40%) 9%	3 (60%) 9%	5 (8%)
Tulos oikein, ei merkityksiä	-	1 (17%) 4%	5 (83%) 14%	6 (10%)
Ei osattu ollenkaan.	-	11 (61%) 48%	7 (39%) 20%	18 (29%)
Tyhjä	3 (21%) 60%	6 (43%) 26%	5 (36%) 14%	14 (22%)
Tehtävää ei ole palautettu.	2 (15%) 40%	3 (23%) 13%	8 (62%) 23%	13 (21%)
Yhteensä	5 (8%) 100%	23 (37%) 100%	35 (56%) 100%	63 (100%)

6.1.3 Eksponenttifunktio

Eksponenttifunktiotehtäväkokonaisuuden tehtäväpaperia ei ollut palauttanut 27% vastaajista. A-kohdassa kaikista 37% ja 43% parhaimman arvosanaluokan vastauksista 43% lukeutui kategoriaan ”ympäripyöreä viisastelija”. Vastaajat eivät olleet siis osanneet kielentää kysyttyä merkitystä. Lisäksi 11% oli ”sepittänyt” aivan omia merkityksiään. Vain 11% vastauksista oli oikein ja kaikki parhaimmalta arvosanaluokalta. Tehtävän huono osaaminen on yllättävää, mutta sitä selittänee se että tehtävässä piti antaa merkitys luonnollisella kielellä. Moni oli osannut laskea funktion arvoja eri kohdissa, mutta eivät olleet osanneet antaa tapahtumille merkitystä.

B-kohta osattiin paremmin ja tasaisemmin kuin edellinen kohta, mutta mielenkiintoisesti kuvan ja laskun yhdistämisessä oli ollut tyyppivirheenä parhaimman arvosanaluokan vastaajilla (26%) tulkinnat kuvasta ja toisaalta keskimmäisen luokan vastauksissa usein (13%) kuva puuttui tai se oli virheellinen. Parhaimmastakin arvosanaluokasta tähän kategoriaan kuului 11%, joten näi-

hin kahteen kategoriaan lukeutui yhteensä 37% kyseisestä arvosanaluokasta, mikä on huomattava määrä.

C-kohta oli selkeästi vaikein ja vain 5% vastauksista oli oikein. 76% vastauksista puuttui, oli tyhjä tai oli täysin väärin ja heikoimmasta arvosanaluokasta tähän kuului kaikki, keskimmäisestä 82% ja parhaimmasta 68% vastauksista.

Laskeminen ja laskuproseduurien suorittaminen osataan, mutta merkitysten antaminen tai samojen merkitysten yhteyden kahden eri kielen välillä havaitseminen ja kielentäminen on vaikeaa kaikille arvosanaluokille. Luonnollisen kielen käyttäminen on haastavaa.

Eksponenttifunktio a

Tehtävän oli osannut 11% vastaajista, jotka kaikki olivat parhaimmasta arvosanaluokasta. ”Ympäripyöreitä viisasteluja” oli 37% vastauksista ja tähän kategoriaan kuului parhaimmasta arvosanaluokasta peräti 43% heidän kaikista vastauksistaan. Lisäksi erityisenä havaintona täysin omia ”sepitettyjä” merkityksiä antoi joka viides heikko tai keskitasoinen vastaaja.

TAULUKKO 22. Eksponenttifunktio a-kohdan vastaukset arvosanaluokittain

	Arvosanaluokka			Yhteensä
	4-6	7-8	9-10	
Kaikki vastaukset				
EKSPONENTTIFUNKTIO a	5 (8%)	23 (37%)	35 (56%)	63 (100%)
Mestarillinen merkitys	-	-	3 (100%) 9%	3 (5%)
Täysin oikein	-	-	4 (100%) 11%	4 (6%)
Ei osattu ollenkaan.	-	5 (63%) 22%	3 (38%) 9%	8 (13%)
Tyhjä	-	1 (100%) 4%	-	1 (2%)
Tehtävää ei ole palautettu.	3 (18%) 60%	5 (29%) 22%	9 (53%) 26%	17 (27%)
”Sepitystä”	1 (14%) 20%	5 (71%) 22%	1 (14%) 3%	7 (11%)
”Ympäripyöreä viisastelija”	1 (4%) 20%	7 (30%) 30%	15 (65%) 43%	23 (37%)
Yhteensä	5 (8%) 100%	23 (37%) 100%	35 (56%) 100%	63 (100%)

EkspONENTTIFUNKTIO b

Osaaminen jakautui tehtävässä monipuolisesti ja jokaisen arvosanaryhmän vastauksista oli löydetävissä osaamisen merkkejä. Täysin oikein oli 17% vastauksista. Tehtävästä erottui kaksi erityistä huomiota, nimittäin 16% vastauksista kuva oli oikein, mutta laskuissa oli jokin virhe ja toisaalta 11% vastauksista laskut oli osattu, mutta kuvassa oli jokin virhe tai sitä ei ollut ollenkaan. Edellä mainittuun kategoriaan lukeutui 26% parhaimman ja 4% keskitasoisen luokan vastaajista, kun taas jälkimmäisen kategorian vastaavat luvut ovat 11% ja 13%. Näin ollen kuvan kanssa oli ollut suhteessa enemmän ongelmia keskitasoisilla kuin hyvillä.

TAULUKKO 23. EkspONENTTIFUNKTIO b-kohdan vastaukset arvosanaluokittain

Kaikki vastaukset	Arvosanaluokka			Yhteensä
	4-6	7-8	9-10	
EKSPONENTTIFUNKTIO b	5 (8%)	23 (37%)	35 (56%)	63 (100%)
Täysin oikein	-	3 (27%) 13%	8 (73%) 23%	11 (17%)
Puutteellinen	1 (20%) 20%	3 (60%) 13%	1 (20%) 3%	5 (8%)
Tulos oikein, ei merkityksiä	-	1 (33%) 4%	2 (67%) 6%	3 (5%)
Ei osattu ollenkaan.	-	4 (100%) 17%	-	4 (6%)
Tyhjä	1 (17%) 20%	3 (50%) 13%	2 (33%) 6%	6 (10%)
Tehtävää ei ole palautettu.	3 (18%) 60%	5 (29%) 22%	9 (53%) 26%	17 (27%)
<i>”Kuva oikein, tulkinta/lasku osittain oikein”</i>	-	1 (10%) 4%	9 (90%) 26%	10 (16%)
<i>”Ei kuvaa, lasku/tulkinta osittain oikein”</i>	-	3 (43%) 13%	4 (57%) 11%	7 (11%)
Yhteensä	5 (8%) 100%	23 (37%) 100%	35 (56%) 100%	63 (100%)

EkspONENTTIFUNKTIO c

Tehtävää ei ollut osannut 30% ollenkaan ja arvosanaluokittain vastaukset jakautuvat lähes tasan. Näin ollen 76% vastaajista ei ollut osannut, oli jättänyt tyhjäksi tai ei ollut ollenkaan palauttanut

tehtävää. Kolme parhaimman arvosanaluokan edustajaa oli osannut tehtävän täysin ja jonkinlaista osaamista näkyi 18% vastauksista sekä keskitasoisilla että parhaimmilla.

TAULUKKO 24. Eksponenttifunktio c-kohdan vastaukset arvosanaluokittain

Kaikki vastaukset	Arvosanaluokka			Yhteensä
	4-6	7-8	9-10	
EKSPONENTTIFUNKTIO c	5 (8%)	23 (37%)	35 (56%)	63 (100%)
Mestarillinen merkitys	-	-	2 (100%) 6%	2 (3%)
Täysin oikein	-	-	1 (100%) 3%	1 (2%)
Puutteellinen	-	2 (40%) 9%	3 (60%) 9%	5 (8%)
Tulos oikein, ei merkityksiä	-	2 (40%) 9%	3 (60%) 9%	5 (8%)
Ei osattu ollenkaan.	1 (5%) 20%	7 (37%) 30%	11 (58%) 31%	19 (30%)
Tyhjä	1 (8%) 20%	7 (58%) 30%	4 (33%) 11%	12 (19%)
Tehtävää ei ole palautettu.	3 (18%) 60%	5 (29%) 22%	9 (53%) 26%	17 (27%)
Yhteensä	5 (8%) 100%	23 (37%) 100%	35 (56%) 100%	63 (100%)

6.1.4 Eksponenttiyhtälö ja logaritmin määritelmä

Tehtäviä ei ollut palauttanut lainkaan 19% vastaajista ja osaaminen on jakautunut pääpiirteittäin arvosanaluokan mukaisesti. Eksponenttiyhtälöiden tarinallisessa tehtävässä tuloksellisesti oikeaan, mutta ”ympäripyöreään viisasteluun” lukeutui 14% parhaimman luokan vastauksista ja virheellisiä viisasteluja oli heikoimpien 20%, keskitasoisien 30% ja parhaimpien vastauksista 9%. Virheelliset viisastelut olivat 17% kaikista vastauksista. Jokaisesta arvosanaluokasta löytyy oikein laskettuja vastauksia yhteensä 13%, mutta Paavon antamaa lupaus ei ole kyennyt kukaan heikoimmasta arvosanaluokasta täysin selittämään. Oikean selityksen sekä laskut on osannut keskitasoisista 13% ja parhaimmasta arvosanaluokasta 23%.

Eksponenttiyhtälön ja logaritmin määritelmän a-kohta on täydennystehtävä, jossa 22% vastauksissa on pyrkimys muotoilla eksponenttiyhtälöstä yleinen muoto ilman yhteyttä edellä olevaan

kuvaan. 29% parhaimman arvosanaluokan ja 17% keskitasoisen luokan vastauksista lukeutuu tähän kategoriaan. Heikoin arvosanaluokka ei ole osannut tehtävää ollenkaan, mutta he ovat kuitenkin palauttaneet arvioitavia yrityksiä. Molemmista ylemmistä arvosanaluokista löytyy täysin oikeita vastauksia.

B-kohdassa piti vastata luonnollisella kielelle ja vain 14% vastauksista piti sisällään merkityksiä logaritmin ja eksponenttiyhtälöiden välisestä yhteydestä, mutta 8% oli täysin oikein. 14%:iin lukeutuu myös yksi heikoimman arvosanaluokan vastaus. Keskitasoisten vastauksista 22% ja parhaimpien vastauksista 31% (yhteensä 25% kaikista) piti sisällään jonkin oikean huomion kuvaajista, mutta niiden välistä yhteyttä ei oltu huomattu.

Eksponenttiyhtälö Tarinallisuus

Tehtävä oli täysin oikein 18% vastauksista. 13% keskitasoisista ja 23% parhaimpaan arvosanaluokkaan kuuluvista vastaajista oli vastannut tehtävään täysin oikein. ”Ympäripyöreitä viisastelijoita” oli vain parhaimpaan arvosanaluokkaan kuuluneiden vastauksissa ja heitä oli omasta arvosanaluokastaan 14%. ”Viisastelijoita”, joilla oli virheitä oli kaikista vastauksista 17%, mutta huomionarvoista on että 30% keskitasoisista vastaajista lukeutuu tähän joukkoon. Parhaimmasta luokasta viisastelijoita on yhteensä 23%.

TAULUKKO 25. Eksponenttiyhtälön tarinallisen tehtävän vastaukset arvosanaluokittain

Kaikki vastaukset	Arvosanaluokka			Yhteensä
	4-6	7-8	9-10	
EKSPONENTTIYHTÄLÖ TARINALLISUUS	5 (8%)	23 (37%)	35 (56%)	63 (100%)
Mestarillinen merkitys	-	-	1 (100%) 3%	1 (2%)
Täysin oikein	-	3 (30%) 13%	7 (70%) 20%	10 (16%)
Puutteellinen	-	-	5 (100%) 14%	5 (8%)
Tulos oikein, ei merkityksiä	1 (13%) 20%	2 (25%) 9%	5 (63%) 14%	8 (13%)
Ei osattu ollenkaan.	1 (9%) 20%	8 (73%) 35%	2 (18%) 6%	11 (17%)
Tehtävää ei ole palautettu.	2 (17%) 40%	3 (25%) 13%	7 (58%) 20%	12 (19%)
<i>”Viisastelija, paljon virheitä”</i>	1 (9%) 20%	7 (64%) 30%	3 (27%) 9%	11 (17%)
<i>”Ympäripyöreä viisastelija”</i>	-	-	5 (100%) 14%	5 (8%)
Yhteensä	5 (8%) 100%	23 (37%) 100%	35 (56%) 100%	63 (100%)

Eksponenttiyhtälö ja logaritmin määritelmä a

Huomionarvoista on se, että 22% vastaajista on muotoillut vastauksessaan eksponenttifunktiosta yleisen muodon. Melkein kolmannes (29%) parhaimman ja 17% keskitasoisien arvosanaluokan vastaajista on toiminut tällä tavalla. Kuitenkin molemmista luokista löytyy myös täysin oikeita tulkintoja tehtävänannosta ja sen myötä myös oikeita vastauksia (20% ja 4%). Ei osanneiden osuudet on isot heikoissa (60%) ja keskitasoisissa (39%).

TAULUKKO 26. Eksponenttiyhtälö ja logaritmin määritelmä a-kohdan vastaukset arvosanaluokittain

Kaikki vastaukset	Arvosanaluokka			Yhteensä
	4-6	7-8	9-10	
EKSPONENTTIYHTÄLÖ JA LOGARITMIN MÄÄR. a	5 (8%)	23 (37%)	35 (56%)	63 (100%)
Täysin oikein	-	1 (13%) 4%	7 (88%) 20%	8 (13%)
Puutteellinen	-	2 (40%) 9%	3 (60%) 9%	5 (8%)
Ei osattu ollenkaan.	3 (20%) 60%	9 (60%) 39%	3 (20%) 9%	15 (14%)
Tyhjä	-	4 (44%) 17%	5 (56%) 14%	9 (14%)
Tehtävää ei ole palautettu.	2 (17%) 40%	3 (25%) 13%	7 (58%) 20%	12 (19%)
<i>”Yleinen muoto, ei siis kuvasta”</i>	-	4 (29%) 17%	10 (71%) 29%	14 (22%)
Yhteensä	5 (8%) 100%	23 (37%) 100%	35 (56%) 100%	63 (100%)

Eksponenttiyhtälö ja logaritmin määritelmä b

Joka neljäs vastaaja oli osannut tehdä kuvaajista jonkin oikean huomion, mutta samalla jättänyt yhteyden huomioimatta. Melkein kolmannes (31%) parhaimman arvosanaluokan edustajien vastauksista lukeutuu tähän kategoriaan. Puutteellisen luonnehdinnan oli osannut antaa heikoimmasta luokasta 1 (20%) vastaaja, mikä on suhteutettuna vastaajien lukumääriin selvästi enemmän kuin muissa arvosanaluokissa. Toki 11% parhaimman luokan vastaajista ovat osanneet tehtävän täysin samalla, kun vastaava luku heikoimmilla on 0%.

TAULUKKO 27. Eksponenttiyhtälö ja logaritmin määritelmä b-kohdan vastaukset arvosanaluokittain

Kaikki vastaukset	Arvosanaluokka			Yhteensä
	4-6	7-8	9-10	
EKSPONENTTIYHTÄLÖ JA LOGARITMIN MÄÄR. b	5 (8%)	23 (37%)	35 (56%)	63 (100%)
Täysin oikein	-	1 (20%) 4%	4 (80%) 11%	5 (8%)
Puutteellinen	1 (25%) 20%	1 (25%) 4%	2 (50%) 9%	4 (6%)
Tulos oikein, ei merkityksiä	-	5 (31%) 22%	11 (69%) 31%	16 (25%)
Ei osattu ollenkaan.	1 (14%) 20%	4 (57%) 39%	2 (29%) 9%	7 (11%)
Tyhjä	1 (5%) 20%	9 (47%) 39%	9 (47%) 25%	19 (30%)
Tehtävää ei ole palautettu.	2 (17%) 40%	3 (25%) 13%	7 (58%) 20%	12 (19%)
Yhteensä	5 (8%) 100%	23 (37%) 100%	35 (56%) 100%	63 (100%)

6.1.5 Eksponenttiyhtälö ja logaritmi

Logaritmit tehtäväkokonaisuuden A-tehtäväpaperin 1. tehtävä jakoi vastauksia arvosanaluokasta riippumatta. Tyhjäksi vastauksensa jätti 19% vastaajista. A2-tehtävässä erityinen huomio vastauksissa kiinnittyy siihen, että 49% kaikista vastauksista oli osattu sanoa logaritmin rooli eksponenttifunktion ratkaisussa, mutta sen käyttöä ei oltu osattu pukea oikeiksi merkityksiksi. Lisäksi 19% vastauksista piti sisällään täysin virheellisiä merkityksiä. Tehtävän oli osannut parhaimman arvosanaluokan edustajista 20%. Vastajat siis tietävät mitä tehdään, mutta merkityksen kielentäminen on vaikeaa arvosanaluokasta riippumatta.

B-tehtäväpaperia ei ollut palauttanut 62% vastaajista, mikä on todella iso osa. Osaaminen näyttää jakautuvan sekä heikoimpaan, että parhaimpaan arvosanaluokkaan, mutta palauttamatta jättäneiden suuri osa vaikeuttaa suurten johtopäätösten tekoa.

Logaritmi A1

Tehtävän vastauksista 19% oli täysin oikein ja samalla prosenttiosuudella oli siinä jokin puute. 30% parhaimpaan arvosanaluokkaan kuuluneiden vastauksista oli täysin oikein, mutta toisaalta 35% vastaus oli täysin väärin. Keskitasoisista täysin väärän vastauksen oli antanut 31%. Puutteellisia vastauksia oli parhaimmasta arvosanaluokasta 15% ja keskitasoista 25%. Tyhjäksi vastauksensa oli jättänyt heikoimman arvosanaluokan ainoa edustaja sekä 38% keskimmäisestä luokasta.

TAULUKKO 28. A-tehtäväpaperin logaritmin 1. tehtävän vastaukset arvosanaluokittain

Tehtäväpaketti A:n vastaukset	Arvosanaluokka			Yhteensä
	4-6	7-8	9-10	
LOGARITMI A1	1 (3%)	16 (43%)	20 (54%)	37 (100%)
Täysin oikein	-	1 (14%) 6%	6 (86%) 30%	7 (19%)
Puutteellinen	-	4 (57%) 25%	3 (43%) 15%	7 (19%)
Tulos oikein, ei merkityksiä	-	-	3 (100%) 15%	3 (8%)
Ei osattu ollenkaan.	-	5 (42%) 31%	7 (58%) 35%	12 (32%)
Tyhjä	1 (14%) 100%	6 (86%) 38%	-	7 (19%)
Tehtävää ei ole palautettu	-	-	1 (100%) 5%	1 (3%)
Yhteensä	1 (3%) 100%	16 (43%) 100%	20 (54%) 100%	37 (100%)
<i>Ei jaettu</i>	4 (15%) 80%	7 (27%) 30%	15 (58%) 42%	26 (41%)

Logaritmi A2

Tehtävän oli osannut 22% kaikista vastaajista ja he kaikki olivat parhaimmasta arvosanaluokasta.. Logaritmin roolin eksponenttiyhtälön ratkaisussa tiesi 55% parhaimpaan ja 30% keskimmäiseen arvosanaluokkaan kuuluneista vastauksista, mutta niissä ei oltu osattu antaa merkityksiä sen edellä esitellylle käyttöesimerkille. Lisäksi täysin virheellisiä merkityksiä antoi 10% parhaimman, 25% keskitasoisien ja heikoimman arvosanaluokan ainoa edustaja.

TAULUKKO 29. A-tehtäväpaperin logaritmin 2. tehtävän vastaukset arvosanaluokittain

	Arvosanaluokka			Yhteensä
	4-6	7-8	9-10	
Tehtäväpaketti A:n vastaukset				
LOGARITMI A2	1 (3%)	16 (43%)	20 (54%)	37 (100%)
Mestarilliset merkitykset	-	-	1 (100%) 5%	1 (3%)
Täysin oikein	-	-	3 (10%) 15%	7 (19%)
Puutteellinen	-	-	1 (100%) 5%	1 (3%)
Ei osattu ollenkaan.	-	3 (100%) 19%	-	3 (8%)
Tyhjä	-	2 (67%) 13%	1 (133%) 5%	3 (8%)
Tehtävää ei ole palautettu.	-	-	1 (100%) 5%	1 (3%)
<i>”Logaritmin rooli oikein, merkitykset puutteelliset”</i>	-	7 (39%) 30%	11 (61%) 55%	18 (49%)
<i>”Sepitystä”</i>	1 (14%) 100%	4 (57%) 25%	2 (29%) 10%	7 (19%)
Yhteensä	1 (3%) 100%	16 (43%) 100%	20 (54%) 100%	37 (100%)
<i>Ei jaettu</i>	4 (15%) 80%	7 (27%) 30%	15 (58%) 42%	26 (41%)

Logaritmi B

Tehtävä oli oikein yhdessä vastauksessa ja siinäkin annetut merkitykset olivat mestarillisia. Tehtävää ei ollut palauttanut 62% vastaajista, mikä on todella iso määrä ja näin ollen tehtävän vastauksista johtopäätösten teko on rajallista. Yksi heikoimman arvosanaluokan edustaja oli osannut osittain, mutta puutteellisesti vastata tehtävään, kun vastaavia tai parempia vastauksia ei ollut keskimmaisella luokalla yhtään ja parhaimmallakin vain 2. Näihin kahteen kategoriaan lukeutui siis 12% kaikista vastauksista. 27% parhaimman arvosanaluokan vastaajista oli osannut päätellä tuloksen, mutta annetut merkitykset olivat väärin. Tähän kategoriaan lukeutui 19% kaikista vastauksista.

TAULUKKO 30. B-tehtäväpaperin logaritmit tehtävän vastaukset arvosanaluokittain

Tehtäväpaketti B:n vastaukset	Arvosanaluokka			Yhteensä
	4-6	7-8	9-10	
LOGARITMI B	4 (15%)	7 (27%)	15 (58%)	26 (100%)
Mestarillinen merkitys	-	-	1 (100%) 7%	1 (4%)
Puutteellinen	1 (50%) 25%	-	1 (50%) 7%	2 (8%)
Tulos oikein, ei merkityksiä	-	1 (20%) 14%	4 (80%) 27%	5 (19%)
Ei osattu ollenkaan.	-	1 (50%) 14%	1 (50%) 7%	2 (8%)
Tehtävää ei ole palautettu.	3 (19%) 75%	5 (31%) 71%	8 (50%) 53%	16 (62%)
Yhteensä	4 (15%) 100%	7 (27%) 100%	15 (58%) 100%	26 (100%)
<i>Ei jaettu</i>	1 (2%) 80%	16 (25%) 70%	20 (32%) 57%	37 (59%)

6.2 Asenne- ja mielipidekysely

Päätuloksena voidaan sanoa, että sukupuoli tai arvosanaluokka ei juurikaan selitä asenteita tai mielipiteitä kyselyn väittämiä kohtaan. Tulkintaa tosin häiritsee jakaumien vinous ja toisaalta epävarmojen vastaajien verrattain suuri määrä (31% kaikista vastauksista). Havaintoa tukee Joutsenlahden (2010, 8) vastaavan suuntainen ongelmallinen tilanne omassa tutkimuksessaan.

Pojat uskovat itseensä matematiikan osaajina hieman tyttöjä enemmän ja toisaalta hyvät kokivat heikkoja enemmän olevansa hyviä matematiikassa (V1). Heikommat kokivat kirjallisesta kielentämisestä olevan heille enemmän hyötyä kuin hyvät oppilaat (V8 ja V18). Pojat olivat hieman tyttöjä valmiimpia käyttämään paljon aikaa matematiikan uuden asian opiskeluun ja samansuuntainen trendi oli heikoilla suhteessa hyviin oppilaisiin (V5). Pojat suhtautuivat hieman myönteisemmin väittämiin, joissa korostettiin sukupuolen merkitystä matematiikan osaamisessa, kun taas tytöt eivät nähneet sukupuolen vaikuttavan senkään vertaa (V9 ja V11). Tytöt olivat kriittisiä äidinkielen mukaan tuomisen merkityksestä matematiikan mielekkyydelle (V14). Molemmat sukupuolet kokivat parityöskentelyn hyödyllisenä ymmärtämisen kannalta, mutta tytöt kokivat sen

mielekkäämmäksi, kuin pojat (V16 ja V17). Tietokoneiden hupiarvoa matematiikan opiskelun lisäksi ei tunnustettu missään arvosanaluokassa eikä kummankaan sukupuolen taholta (V19). Seuraavaksi avaan tarkemmin asenne- ja mielipidekyselyn tulokset aloittaen sukupuolen vaikutuksesta.

Tämän luvun taulukoita luetaan siten, että taulukon sarakkeissa, joissa on ilmoitettu kaksi prosenttilukuarvoa ensimmäiseen sijoittuu vastaajat, jotka ovat olleet väittämän kanssa täysin - tai jokseenkin *samaa mieltä* ja toiseen prosenttilukuarvoon ne vastaajat, jotka ovat olleet väittämän kanssa täysin - tai jokseenkin *eri mieltä*.

6.2.1 Sukupuolen vaikutus asenteisiin ja mielipiteisiin

Ensimmäisen teeman ”Suhtautuminen oppiaineeseen” lukeutui kahdeksan väittämää. Olen sijoittanut myös äidinkieleen ja kirjoittamiseen liittyvät väittämät (V12 ja V13) mukaan tähän teemaan Joutsenlahden (mt.) tavoin, koska kirjallisessa kielentämisessä annetaan usein mahdollisuus kirjoittamiseen luonnollisella kielellä ja tämä on tutkimusten mukaan tytöillä vahva osaamisen alue (Joutsenlahti 2010, 8).

Spearmanin järjestyskorrelaatio ei löytänyt tilastollisesti merkitsevää eroa tyttöjen ja poikien asenteissa oppiaineeseen suhtautumisessa. Taulukosta 46 voi lukea, kuinka pojista reilu kaksi kolmasosaa piti itseään hyvänä matematiikassa (V1) ja tytöistä hieman alle puolet. Havainto on linjassa Joutsenlahden 2010 tutkimuksen kanssa, joskin tytöt näyttäisivät uskovan itseensä matematiikan osaajina hieman enemmän tässä tutkimuksessa. Mielenkiintoinen ja tutkimuksissa ennenkin todettu seikka (mm. Niemi, 2008, 77.) on se, että vaikka poikien ja tyttöjen saamien kurssiarvosanojen keskiarvot ovat kymmenykselleen samat, pojat kuitenkin pitävät itseään kysyttäessä useimmin hyvinä matematiikassa kuin tytöt. Toisin sanottuna tytöt ovat hieman kriittisempiä omaa osaamista kohtaan. Kuten sanottua ero ei tämän aineiston mukaan ole kuitenkaan merkitsevä ja väittämässä 4, jossa matematiikan helppona pitämistä verrataan muihin, onkin asetelma jo päälallaan.

Toki voi olla niin, että tosiaan tytöt ovat kriittisempiä omaa osaamista kohtaan, mutta eivät pidä matematiikkaa itsessään kovin vaikeana ja pojat puolestaan pitävät itseään helpommin hyvinä matematiikassa, mutta tiedostavat sen tosiasian, että ei matematiikka ole sen helpompaa itselle kuin muillekaan. Tätä näkemystä tukisi myös väittämä 5, jossa pojat ovat selkeästi valmiimpia työskentelemään pitkänkin ajan ymmärtääkseen uuden asian matematiikassa, kuin tytöt. Epävarmojen osuudet ovat kuitenkin näissä väittämässä liki kolmannes vastaajista, joten kauhean radikaaleja johtopäätöksiä ei ole järkevää vetää. Kuitenkin edellistä havaintoa tukee väittämän 2 molempien sukupuolien varmemmat subjektiiviset mielipiteet siitä, että vaikea matematiikan tehtävä on suhteessa

mieluisampi pojille kuin tytöille. Eli vaikea tehtävä on mieluisampi pojalle kuin tytölle ja toisaalta pojat ovat hieman valmiimpia käyttämään aikaansa sellaisen ratkaisemiseen.

Väittämässä 3 ei poikien ja tyttöjen halussa käyttää aikaa matematiikan opiskeluun ole suurta eroa. Näin ollen voitaneen sanoa, että pojat ymmärtävät työn merkityksen uuden asian oppimisessa ja toisaalta he ovat kiinnostuneempia matemaattisista ongelmista (V6), kuin tytöt.

Äidinkielen ja kirjoittamiseen liittyvissä väittämissä 12 ja 13 eroa ei juurikaan ole. Hieman positiivisemmin tytöt suhtautuvat omaan osaamiseen äidinkielessä kuin pojat ja toisaalta kirjoittamista piti mieluisana tytöistä lähes neljä - ja pojista kolme viidesosaa. Tulos on jälleen aivan saman suuntainen, kuin Joutsenlahden vastaavassa tutkimuksessa. Voin perustaa tuloksen samoille pohdinnoille, että tulos on odotettu, sillä usein lyhyen matematiikan valinneille oppilaille kielet ja reaaliaineet ovat lähempänä sydäntä kuin matematiikka (Joutsenlahti, 2010, 8).

TAULUKKO 31. Sukupuolen vaikutus suhtautumisessa oppiaineeseen (Taulukon sarakkeiden ensimmäinen prosenttilukuarvo ilmoittaa täysin - tai jokseenkin samaa mieltä olleiden ja toinen prosenttilukuarvo täysin - tai jokseenkin eri mieltä olleiden vastaajien määrän.)

	Tytöt	Pojat	Yhteensä	EOS
SUHTAUTUMINEN OPPIAINEESEEN	n=53	n=10	n=63	%
V1 Minä olen hyvä matematiikassa*	47%(32%)	70%(30%)	51%(32%)	18%
V2 Vaikea matematiikan tehtävä tuntuu minusta mieluisalta haasteelta	45% (47%)	70% (20%)	49%(43%)	8%
V3 Haluan käyttää paljon aikaani matematiikan opiskelemiseen.*	30%(43%)	20%(20%)	29%(40%)	32%
V4 Matematiikka on minulle helpompaa kuin useimmille muille.*	53%(23%)	40%(10%)	51%(21%)	29%
V5 Olen valmis työskentelemään pitkänkin aikaa ymmärtääkseni uuden asian matematiikassa.	38% (34%)	60% (10%)	41%(30%)	29%
V6 Olen kiinnostunut matemaattisista ongelmista.	30%(53%)	50% (30%)	33%(49%)	18%
V12 Minä olen hyvä äidinkielessä.	74%(13%)	70%(10%)	73%(13%)	14%
V13 Kirjoittaminen on minulle mieluisaa puuhaa.	77%(17%)	60%(20%)	75%(18%)	8%

* Käännetty myönteiseen muotoon.

Edellinen teema nosti muutaman sukupuolittuneen aselman asenteissa suhteessa omaan matematiikan osaamiseen. Teemassa ”Sukupuolittuneet asenteet” kysytään yleisiä väittämiä tyttöjen ja poikien eroista matematiikkaan (V9 ja V11) ja toisaalta äidinkielen lisäämisen merkityksestä tyttöjen mielenkiintoon matematiikkaa kohtaan (V14). Epävarmojen vastaajien osuus on teeman väittämissä keskimäärin 54%-yksikköä, joten suurten johtopäätösten tekeminen on vähintäänkin kyseenalaista.

Kuitenkin Spearmanin järjestyskorrelaatio löysi melkein merkitsevän yhteyden ($p=0.032$) siihen, että pojat näyttäisivät uskovan hieman tyttöjä enemmän, että tytöt menestyvät heikommin kuin pojat matematiikassa (V9). Merkitsevät yhteydet Spearmanin testi löysi ($p=0.005$) poikien omaan uskoon omaan osaamiseensa (V11). Tämä on mielenkiintoinen ja edelleen linjassa aikaisempaan tietoon oleva havainto, että pojilla on parempi usko oman sukupuolensa edustajien matematiikan osaamiseen, kuin tytöillä (V9 ja V11). Tytöt näyttäisivät olevan täysin samaa mieltä sukupuolen lähtökohtaisesta merkityksestä matematiikan osaamisessa olipa kyseessä sitten poika tai tyttö.

Spearmanin järjestyskorrelaatio löysi merkitsevän yhteyden ($p=0.003$) tyttöjen skeptisyyden ja äidinkielen lisäämisen ja tyttöjen mielenkiinnon lisääntymisen matematiikkaa kohtaan väliltä (V14). Tämä on mielenkiintoinen havainto, sillä Joutsenlahti (2010, 8) mainitsee tutkimustuloksista, joiden mukaan ilmaiseminen luonnollisen kielen kautta on tytöillä usein vahvan osaamisen aluetta. Näin ollen voisi kuvitella, että oman vahvuusalueeseen kuuluvan asian tuominen mukaan matematiikkaan voisi lisätä mielenkiintoa sitä kohtaan. Kuitenkaan tähän tutkimukseen vastanneet tytöt eivät ole kokeneet ajatusta houkuttelevana.

TAULUKKO 32. Sukupuolen vaikutus sukupuolittuneihin asenteisiin oppiaineissa

	Tytöt	Pojat	Yhteensä	EOS
SUKUPUOLITTUNEET ASEENTEET	n=53	n=10	n=63	%
V9 Tytöt menestyvät matematiikassa heikommin kuin pojat.	2%(49%)	20%(20%)	5%(44%)	51%
V11 Pojat menestyvät matematiikassa paremmin kuin tytöt.	2%(43%)	30%(10%)	6%(38%)	56%
V14 Äidinkielen käytön lisääminen matematiikan opiskelussa lisää tyttöjen mielenkiintoa matematiikkaa kohtaan.	4%(49%)	10%(0%)	5%(41%)	54%

Teemassa ”Kirjallinen kielentäminen” Spearmanin järjestyskorrelaatio löysi tilastollisesti melkein merkitsevän yhteyden ($p=0.16$) siitä, että subjektiivinen kokemus kielentämisestä vastaajalle itsel-

leen hyödyllisenä oli poikien mielestä hieman myönteisempi, kuin vastaavasti tytöillä (V10). Kuitenkin epävarmojen vastaajien osuudet ovat tässä teemassa todella isot. Keskimäärin n. 46% yksikköä ilmoitti ettei osaa sanoa teeman väittämiin. Havainto on jälleen samanlainen, kuin vuoden 2010 tutkimuksessa ja tulkintaankin on helppo yhtyä, että kielentäminen on vastaajille niin uusi asia, ettei siihen ole ehtinyt vielä muodostaa selkeää mielipidettä (mt. 8.). Tässä tutkimuksessa opilaille ei edes esitelty kielentämisen ideaa ennen tehtävien tekoa, joten on helposti ymmärrettävissä mielipiteiden muodostamisen epävarmuus. Isona linjana vastauksista voidaan tulkita (ks. taulukko 48), että tytöt kokivat hieman poikia enemmän kielentämisestä olevan hyötyä ratkaisua lukevalle (V7), kun taas pojat näkivät tyttöjä enemmän kielentämisen hyödyn ratkaisijalle itselleen (V8, V10 ja V18).

TAULUKKO 33. Sukupuolen vaikutus asenteisiin kirjallista kielentämistä kohtaan

	Tytöt	Pojat	Yhteensä	EOS
KIRJALLINEN KIELENTÄMINEN	n=53	n=10	n=63	%
V7 Muiden opiskelijoiden on helpompi seurata tehtävän ratkaisua, kun siihen on kirjoitettu väliotsikoita.	42% (6%)	40%(0)	41%(5%)	54%
V8 Kielentäminen auttaa minua ymmärtämään paremmin tehtävien ratkaisut.	23%(28%)	40% (10)	25%(25%)	49%
V10 Kielentäminen sopi minulle opiskelumenetelmänä.	30% (38%)	60% (0)	35%(32%)	33%
V18 Mielestäni omin sanoin kirjoittaminen helpottaa matematiikan tehtävien ratkaisua.	32%(17%)	50% (30%)	35%(19%)	46%

Viimeisen, ”Työskentelykulttuuri” teeman väittämiin ei löytynyt Spearmanin testin mukaan yhteyttä sukupuoleen. Tytöistä noin kolme viidesosaa koki matematiikan mukavammaksi parin tai ryhmän kesken kuin yksinään (V16), kun vastaava luku pojilla on kaksi viidesosaa (ks. taulukko 49). Huomionarvoista on se, että pojilla sama prosenttiosuus suhtautuu väittämään kielteisesti. Kuitenkin molemmat sukupuolet, tytöistä jopa reilu kaksi kolmasosaa ja pojistakin kolme viidesosaa olivat sitä mieltä, että matematiikkaa ymmärtää paremmin parin kanssa. Näyttäisi siis siltä, että pojat eivät lähtökohtaisesti tykkää jakaa ajatuksiaan parin kanssa, mutta myöntävät yhteistyön arvon opiskelussa, mikä on havaintona mielenkiintoinen. Epävarmojen osuudet ovat kuitenkin melko suuria näissäkin vastauksissa, että suurten tulosten johtaminen on mahdotonta. Huomionarvoista on viimeiseen väittämään kohdistunut kriittinen suhtautuminen, että tietokoneella matematiikan tehtävien tekeminen olisi kivaa (V19). Noin kaksi kolmasosaa kaikista vastaajista on jokseenkin tai täysin erimieltä

vastauksen kanssa ja vastaavasti samaa mieltä on vain 8%. Toki jälleen epävarmoja on liki kolmannes vastanneista.

TAULUKKO 34. Sukupuolen vaikutus työskentelykulttuuriin liittyviin väittämiin

	Tytöt	Pojat	Yhteensä	EOS
TYÖSKENTELEYKULTTUURI	n=53	n=10	n=63	%
V15 Matematiikan oppiminen on yksin oppimista.	38%(38%)	30%(20%)	37%(35%)	29%
V16 Matematiikkaa on mukavampi tehdä parin kanssa tai ryhmässä kuin yksin.	62%(25%)	40%(40%)	59%(27%)	14%
V17 Ymmärrän matematiikkaa paremmin, kun saan opiskella sitä yhdessä parin kanssa.	70%(11%)	60%(10%)	68%(11%)	21%
V19 On kivaa tehdä matematiikan tehtäviä tietokoneella.	6%(64%)	20%(50%)	8%(62%)	30%

6.2.2 Arvosanaluvokan vaikutus asenteisiin ja mielipiteisiin

Spearmanin järjestyskorrelaatio löysi erittäin merkitsevän yhteyden ($p < 0.001$) arvosanan ja itsensä hyvänä matematiikassa pitämisen väliltä (V1). Taulukosta 50 on luettavissa, että mitä paremman numeron oppilas on kurssista saanut, sitä myönteisemmin hän kokee oman osaamisensa matematiikassa ja päinvastoin. Vain 18% vastanneista ei osannut muodostaa mielipidettään omaan osaamiseensa, joten tulosta voidaan pitää luotettavana, joskin aika ilmeisenä. Spearmanin testin mukaan melkein merkitsevä ($p = 0.020$) yhteys on sillä, että hyvän arvosanan saanut kokee, että matematiikka on hänelle helpompaa kuin useimmille muille ja vastaavasti päinvastoin (V4). Tämäkin on uskottava tulos ja kertoo siitä, että vastaajien käsitykset omasta tasosta muihin matematiikassa on realistinen. Tässä väittämässä epävarmojen osuus on 29%, mikä kertoo siitä että selvästi hankalammaksi koettiin oman osaamisen arviointi suhteessa muihin, kuin oman subjektiivisen mielipiteen kertominen (V1). Keskimmäiseen arvosanaluvokkaan kuuluneilla näyttäisi olevan eniten hankaluuksia arvioida omaa osaamistaan, mikä sekin on täysin ymmärrettävää. Matematiikkaan liittyvät väittämät muutenkin noudattavat samaa trendiä, että mitä parempi numero, sitä positiivisempi asenne matematiikkaa kohtaan, mikä on helposti uskottavaa ja myös linjassa tutkimustulosten (ks. Tuohilampi & Hannula, 2013) kanssa.

Suhtautumisessa omaan valmiuteen tehdä pitkäkestoista työtä jonkin uuden matematiikan asian ymmärtämiseksi (V5) on mielenkiintoinen havainto, ettei yksikään heikoimman arvosana-

luokan edustajista ole suhtautunut tähän kielteisesti. Epävarmoja on tosin 60%, suhteessa yli kaksi kertaa enemmän muihin arvosanaluokkiin nähden. Positiivisesti suhtautuneita on suhteellisesti lähes saman verran kussakin luokassa.

Väittämiin koskien äidinkieltä vastaukset ovat hyvin lähellä toisiaan ja varsin myönteisiä, kuten todettiin jo sukupuolen yhteydessä ja syynä tässä on mitä luultavimmin lyhyen matematiikan oppilaiden mielenkiinnon suuntautuminen muihin aineisiin kuin matematiikkaan. (Joutsenlahti, 2010, 8.) Alimman arvosanaluokan oppilaista kaikki koki olevansa täysin tai jokseenkin samaa mieltä, että hän on hyvä äidinkielessä (V12) ja toisaalta kirjoittaminen on mieleistä (V13).

TAULUKKO 35. Arvosanaluokan vaikutus oppiaineeseen suhtautumiseen

	Arvosanaluokka			Yhteensä	EOS
	4-6	7-8	9-10		
SUHTAUTUMINEN OPPIAINEESEEN	n=5	n=23	n=35	n=63	%
V1 Minä olen hyvä matematiikassa*	20%(40%)	30%(57%)	69%(14%)	51%(32%)	18%
V2 Vaikea matematiikan tehtävä tuntuu minusta mieltä haasteelta	40%(60%)	44%(57%)	54%(31%)	49%(43%)	8%
V3 Haluan käyttää paljon aikaani matematiikan opiskelemiseen.*	20%(40%)	26%(44%)	31%(37%)	29%(40%)	32%
V4 Matematiikka on minulle hel- pompaa kuin useimmille muille.*	40%(40%)	35%(30%)	63%(11%)	51%(21%)	29%
V5 Olen valmis työskentelemään pitkänkin aikaa ymmärtääkseni uuden asian matematiikassa.	40%(0%)	39%(39%)	43%(29%)	41%(30%)	29%
V6 Olen kiinnostunut matemaatti- sista ongelmista.	20%(80%)	30%(61%)	37%(37%)	33%(49%)	18%
V12 Minä olen hyvä äidinkielessä.	100%(0%)	61%(22%)	77%(9%)	73%(13%)	14%
V13 Kirjoittaminen on minulle mieluisaa puuhaa.	100%(0%)	74%(17%)	71%(20%)	75%(18%)	8%

* Käännetty myönteiseen muotoon.

Teemassa ”Kirjallinen kielentäminen” mielipiteestään epävarmojen osuus on suuri, kuten jo edellä mainitsin noin 46% vastaajista lukeutuu tähän joukkoon. Yli neljännes suhtautuu kielteisesti kielentämisen hyötyihin omassa opiskelussa (V8 ja V10). Heikoimmasta arvosanaluokasta samat

osuudet suhtautuvat kielentämisen sopivuuteen itselleen (V10) myönteisesti ja kielteisesti. Keskimmäisen arvosanaluokan vastaajista 35% kokivat kielentämisen auttavan ymmärtämään tehtävien vastaukset paremmin, mikä on selkeästi positiivisempi viesti väittämän (V8) puolesta, kuin muilla arvosanaluokilla (ks. taulukko 51). Tästä suuntaiseen tulokseen päätyivät myös Mäcklin ja Nikula pro gradu -tutkielmassaan (2010, 7-8.). Tätä tulosta tukee myös havainto V18), että suhteessa hieman useampi keskitasoinen koki omin sanoin kirjoittamisen auttavan tehtävän ratkaisussa.

TAULUKKO 36. Arvosanaluokan vaikutus suhtautumiseen kirjallista kielentämistä kohtaan

	Arvosanaluokka			Yhteensä	EOS
	4-6	7-8	9-10		
KIRJALLINEN KIELENTÄMINEN	n=5	n=23	n=35	n=63	%
V7 Muiden opiskelijoiden on helpompaa seurata tehtävän ratkaisua, kun siihen on kirjoitettu väliotsikoita.	40%(0%)	39%(4%)	43%(6%)	41%(5%)	54%
V8 Kielentäminen auttaa minua ymmärtämään paremmin tehtävien ratkaisut.	20%(40%)	35% (26%)	20%(23%)	25%(25%)	49%
V10 Kielentäminen sopi minulle opiskelumenetelmänä.	40%(40%)	39%(26%)	31%(34%)	35%(32%)	33%
V18 Mielestäni omin sanoin kirjoittaminen helpottaa matematiikan tehtävien ratkaisua.	40%(0%)	44% (30%)	29%(14%)	35%(19%)	46%

Teemassa ”Sukupuolittuneet asenteet” Spearmanin testi löysi melkein merkitsevän ($p=0.025$) negatiivisen yhteyden arvosanan ja väittämän, jonka mukaan pojat menestyisivät tyttöjä paremmin matematiikassa (V11) kanssa. Tämä tarkoittaa siis sitä, että mitä parempi arvosana vastaajalla on, sitä vähemmän hän uskoo poikien lähtökohtaiseen paremmuuteen. Kuitenkin taulukko 52 paljastaa, että epäröivien osuus on yli puolet vastanneista. Testin tulosta ehkä selittää se, että tyttöjä oli enemmän hyvissä arvosanaluokissa (ks. taulukko 5) ja toisaalta taulukon 47 mukainen tyttöjen negatiivinen suhtautuminen edellä mainittuihin väittämiin 9 ja 11, jolloin on luonnollista, että isomman osajoukon (tyttöjen) mielipide muodostaa koko joukossa (arvosanaluokka) dominoivan mielipiteen. Taulukko 52 kuitenkin kertoo sen, ettei mikään näistä sukupuolittuneista väittämisistä selity arvosanalla ja jos selittyisi, olisihan se hyvin mielenkiintoista ja tutkimisen arvoista yhteiskunnallisellakin tasolla.

TAULUKKO 37. Arvosanaluokan vaikutus sukupuolittuneisiin asenteisiin

	Arvosanaluokka			Yhteensä	EOS
	4-6	7-8	9-10		
SUKUPOUOLITTUNEET ASENTEET	n=5	n=23	n=35	n=63	%
V9 Tytöt menestyvät matematiikassa heikommin kuin pojat.	0%(40%)	9%(30%)	3%(54%)	5%(44%)	51%
V11 Pojat menestyvät matematiikassa paremmin kuin tytöt.	0%(40%)	13%(17%)	3%(51%)	6%(38%)	56%
V14 Äidinkielen käytön lisääminen matematiikan opiskelussa lisää tyttöjen mielenkiintoa matematiikkaa kohtaan.	20%(40%)	0%(30%)	6%(49%)	5%(41%)	54%

Työskentelykulttuuriin liittyvissä väittämässä arvosanaluokilla ei ollut merkitystä (ks. taulukko 53) eli luokat olivat toisiinsa verrattuna varsin yksimielisiä. Eniten mielipiteitä jakoi väittämä, että matematiikka on yksin oppimista (V15). Tässä väittämässä jakaantui melkein tasan epäröivien, niiden jotka olivat täysin tai lähes samaa mieltä sekä vastaavasti eri mieltä olleet vastaajat. Muuten vastaajat olivat sitä mieltä, että porukalla on mukavampi ja parempi opiskella matematiikkaa (V16 ja V17). Mielenkiintoinen havainto oli, että yksikään arvosanaluokka ei pitänyt matematiikan tehtävien tekemisestä tietokoneella (V19). Ainoastaan heikoimmassa arvosanaluokassa siihen suhtauduttiin yhtä vähän kielteisesti, kuin myönteisesti, mutta epävarmojen osuus on 60%. Tässä väittämässä kaiken kaikkiaan epäröivien osuus oli vajaa kolmannes, mutta kielteisten osuus on noin kaksi kolmannesta, joten tuloksena se on varteenotettava.

TAULUKKO 38. Arvosanaluokan vaikutus työskentelykulttuuria koskeviin asenteisiin

	Arvosanaluokka			Yhteensä	EOS
	4-6	7-8	9-10		
TYÖSKENTELYKULTTUURI	n=5	n=23	n=35	n=63	%
V15 Matematiikan oppiminen on yksin oppimista.	40%(20%)	30%(30%)	40%(40%)	37%(35%)	29%
V16 Matematiikkaa on mukavampi tehdä parin kanssa tai ryhmässä kuin yksin.	60%(20%)	52%(30%)	63%(26%)	59%(27%)	14%
V17 Ymmärrän matematiikkaa paremmin, kun saan opiskella sitä yhdessä parin kanssa.	60%(20%)	74%(4%)	66%(14%)	68%(11%)	21%
V19 On kivaa tehdä matematiikan tehtäviä tietokoneella.	20%(20%)	8%(65%)	6%(66%)	8%(62%)	30%

6.3 Avoimet kysymykset

10 pojasta 1 (10%) oli jättänyt kokonaan tyhjäksi omat vastauksensa. Toisin sanottuna 9 (90%) oli osannut muodostaa mielipiteensä ainakin toiseen avoimeen kysymykseen. Tytöistä tyhjäksi molemmat vastauksensa jätti 6 (11%) ja 2 (4%) oli kirjannut vastaukseensa, ettei osaa sanoa. Näin ollen tytöistä 45 (85%) oli osannut muodostaa mielipiteensä tehtyjen tehtävien pohjalta ainakin toiseen avoimeen kohtaan.

Arvosanaluokittain heikoimman luokan yksi vastaaja (20%) oli jättänyt molemmat avoimet kohdat tyhjiksi, kun taas keskimmaisessä vastaavat luvut ovat 4 (17%) ja parhaimmassa 2 (6%). Vastaajat, jotka olivat maininneet, etteivät osaa sanoa mielipidettään kumpaankaan avoimeen kohtaan tulivat keskimmaisesta (4%) ja parhaimmasta arvosanaluokasta (3%). Näin ollen heikoimman arvosanaluokan edustajista 80%, keskimmaisen 78% ja parhaimman arvosanaluokan vastaajista 91% osasi muodostaa ainakin toiseen avoimeen kohtaan oman mielipiteensä.

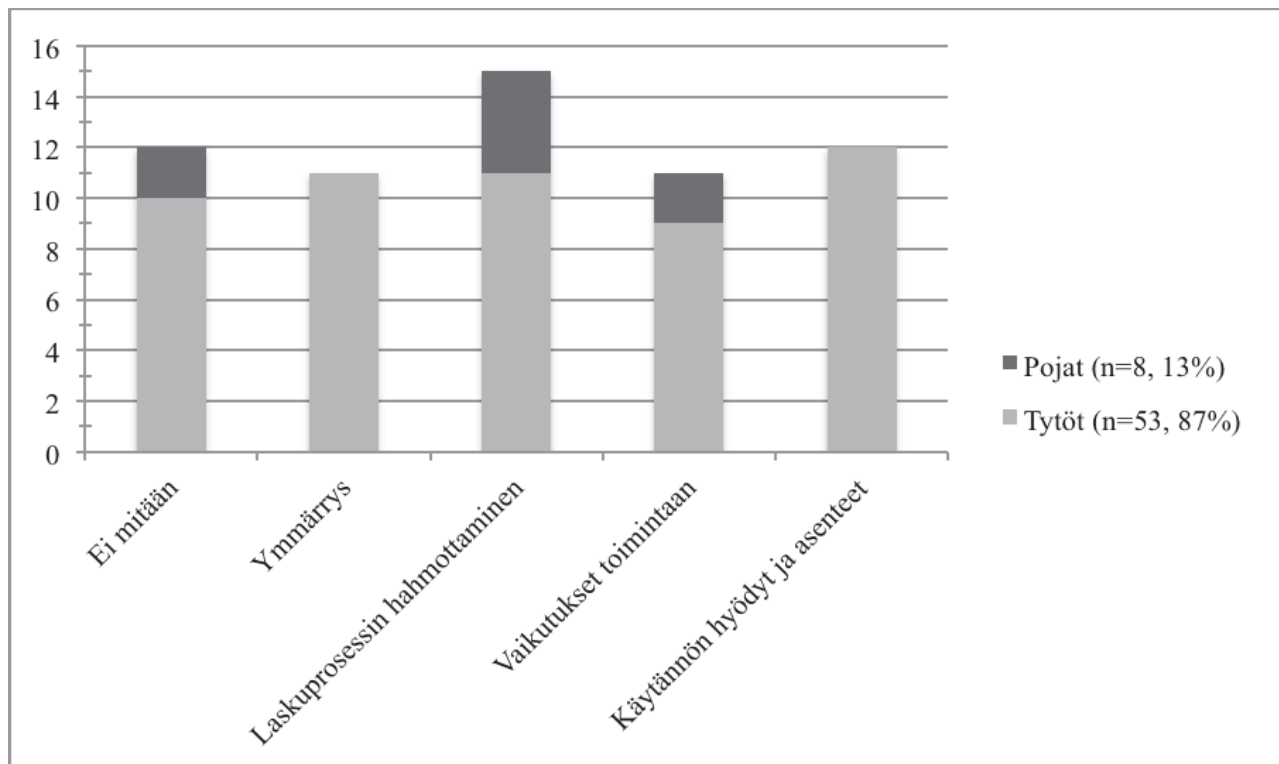
Vastaajat ovat pystyneet muodostamaan mielipiteensä kyselyn avoimiin kohtiin keskimäärin hyvin ja melko tasaisesti. Suhteessa muihin arvosanaluokkiin parhaimman arvosanaluokan edustajat ovat muotoilleet oman mielipiteensä ainakin toiseen avoimeen kohtaan hieman muita luokkia useimmin. Kaikki annetut ilmaukset kielentämisen hyötyihin ja huonoihin puoliin on koostettu liitteisiin 11(2-3, 5-6).

6.3.1 Kielentämisen hyödyt

Kaiken kaikkiaan 63 vastaajan joukosta löytyi 61 kappaletta hyötyihin liittyvää ilmausta. Ilmaisusta 53 (87%) tuli tytöiltä ja 8 (13%) pojilta. Näin ollen ilmaisujen jakauma noudattelee likimäärin vastaajien sukupuolijakaumaa (tytöt 84% ja pojat 16%). Arvosanalukittain katseltuna 61 ilmaisua jakaantuivat siten, että heikoimmasta luokasta tuli 5 (8%), keskimmäisestä 23 (38%) ja parhaimmasta luokasta 33 (54%) ilmaisuista ja tässäkin suhteessa ne noudattavat vastaajien jakaumia arvosanoittain (heikoimmat 8%, keskitasoiset 37% ja parhaimmat 56%).

51 vastaajaa (81%) muodosti kaikkien ilmaisujen antaneiden vastaajien joukon ja osa heistä oli maininnut useamman hyödyn. Heistä 8 oli poikia ja 43 tyttöjä. Näin ollen 80% pojista ja 81% tytöistä ilmaisi mielipiteensä kielentämisen hyötyjä kohtaan. Näiden lisäksi 12 vastaajaa (19%) jätti hyödyt kokonaan mainitsematta (n=8), tai eivät osanneet sanoa kielentämisen hyötyjä (n=4).

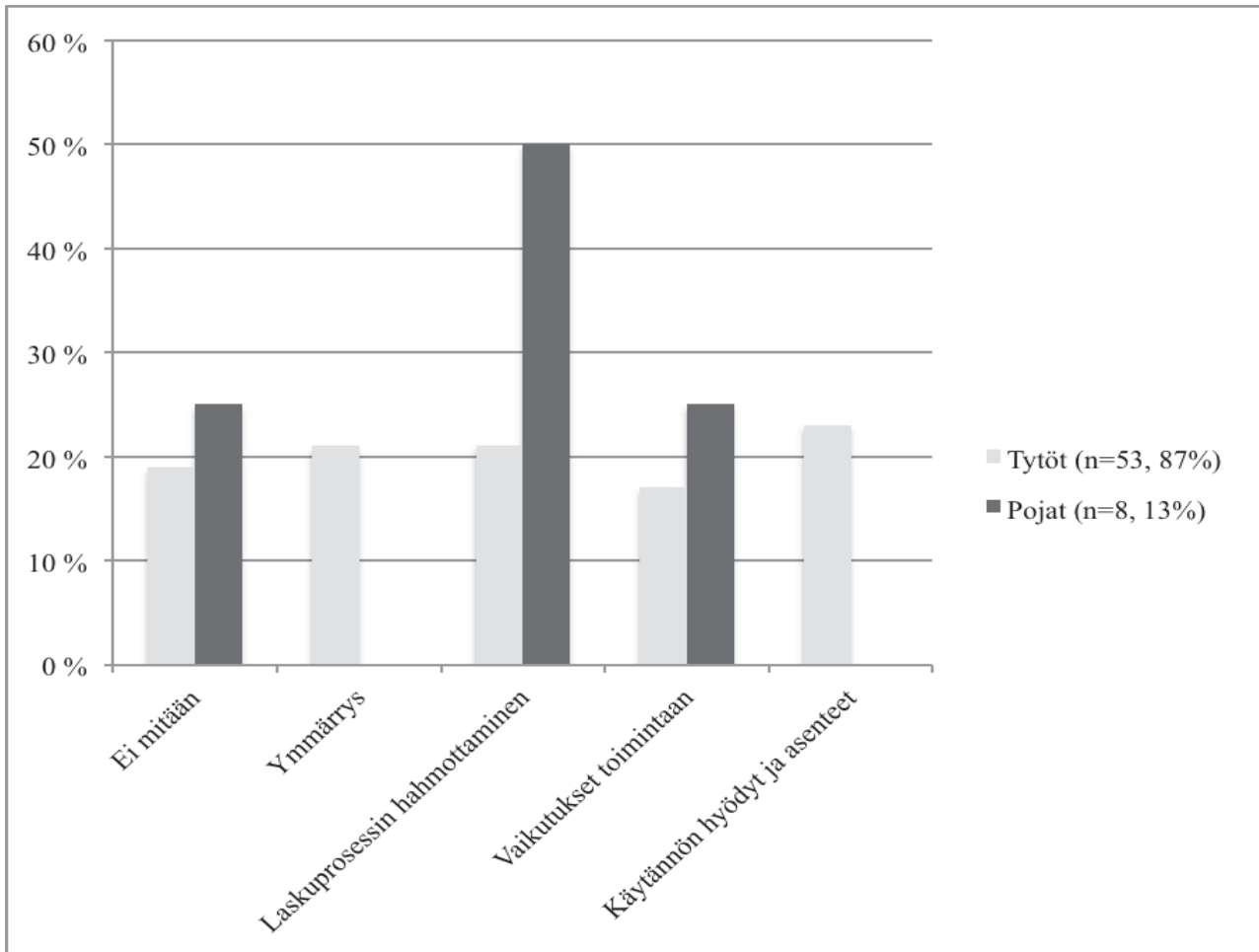
Kaikista ilmaisuista 12 (20%) ei kokenut kielentämistä hyödyllisenä. 11 (18%) ilmaisuista liittyi ymmärryksen paranemiseen. Käytännön hyödyt ja motivaatio löytyivät 12 (20%) ilmaisusta. 15 (25%) piti kielentämistä hyödyllisenä laskuprosessin hahmottamisen kautta. Toimintaan vaikuttavia kielentämisen hyviä puolia painotti niin ikään 11 (18%) ilmaisuista. Näin ollen ilmaiset jakaantuivat yläotsikoittain varsin tasaisesti, joskin ”Laskuprosessin hahmottaminen” erottuu hieman muista, jossa poikien ilmaiset ovat erityisessä asemassa. (Ks. kuvio 21; liite 11(1).)



KUVIO 21. Yläotsikkojen saamat ilmaiset sukupuolittain (N=61)

Sukupuolen vaikutuksen tulkintaa annettujen ilmaisujen sijoittumisessa eri yläotsikoihin häiritsee sukupuolijakauman vinous. Kuitenkin huomionarvoista on se, ettei yksikään poikien ilmaisu lukeudu yläotsikon ”Ymmärtäminen” alle, kun vastaavaan yläotsikkoon tyttöjen ilmaisuista kuuluu 11 (21%). Myös yläotsikko ”Käytännön hyödyt ja asenteet” on edustettuna vain tyttöjen 12 ilmaisulla, joka on 23% kaikista tyttöjen ilmaisuista. Näin ollen 44% tyttöjen ilmaisuista on sellaisia joihin yksikään poika ei ole ottanut omassaan kantaa. Poikien puuttumisen näistä ilmaisuista osaltaan selittää yläotsikon ”Vaikutukset toimintaan” ilmiöt, jotka pitävät sisällään ymmärtämiseen johtavia toimia, kuten ”Itselle selittäminen” ja ”Ajattelun syventyminen”, joita pojat painottivat omissa ilmaisuissaan. Lisäksi mielipidekyselyn tulokset antavat omalta osaltaan selitystä poikien ilmaisujen puuttumiselle viimeisessä yläotsikossa ”Käytännön hyödyt ja asenteet”. Käsittelen kaikkien yläotsikoiden tulokset tarkemmin niiden omassa osuussissaan.

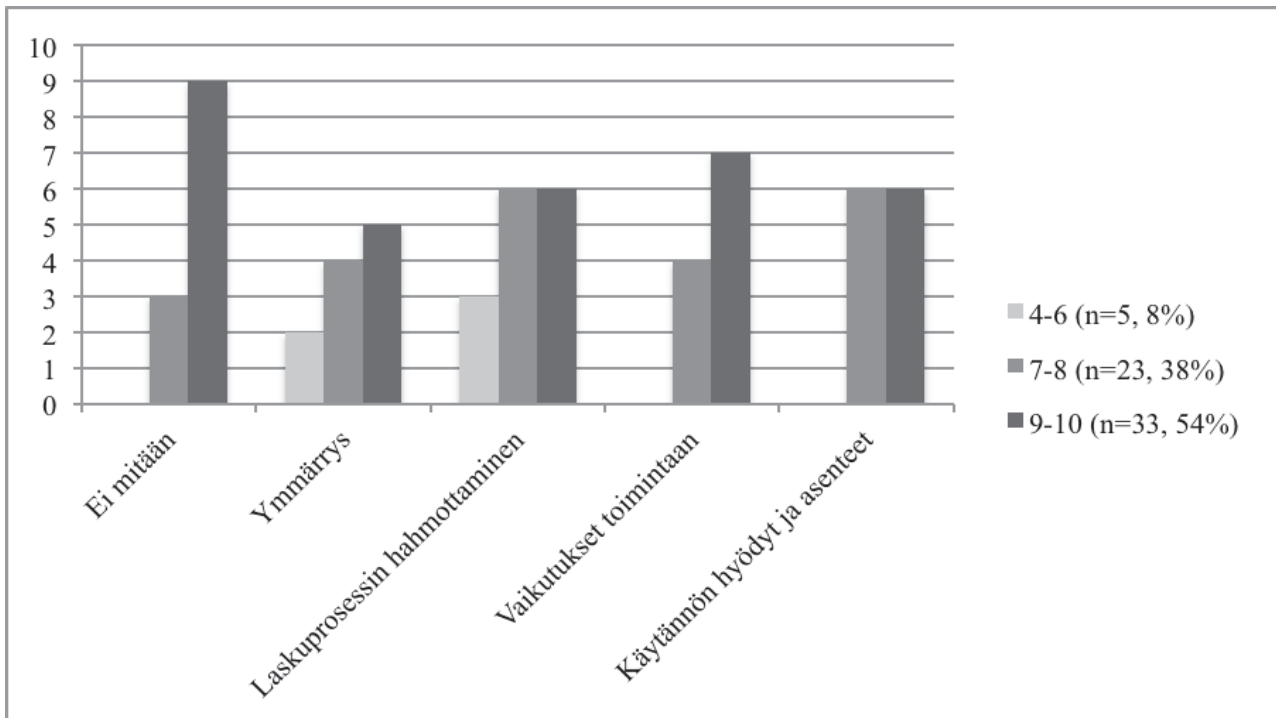
Kuvioon 22 on koottu eri yläotsikoiden saamat ilmaisut sukupuolittain suhteutettuna. Siinä selkeänä erona näkyy ilmaisujen suhteellinen osuus yläotsikossa ”Laskuprosessin hahmottaminen”, johon lukeutuu poikien ilmaisuista puolet ja tytöillä 21%. Tyttöjen ilmaisut jakaantuvat tasaisesti kaikille eri yläotsikoille, kun taas pojilla ilmaisuja on saanut vain kolme yläotsikkoa.



KUVIO 22. Kielentämisen hyötyjen yläotsikoiden saamat ilmaiset sukupuolittain suhteutettuna

Arvosanaluokittain katseltuna luokkien edustajista on ollut suhteellisesti lähes saman verran epävarmoja vastaajia. Heikoimmasta luokasta 4 (80%), keskimmäisestä 17 (74%) ja parhaimmasta luokasta 30 (86%) vastaajaa sai muotoiltua ja ilmaistua oman ajatuksensa suhteessa kielentämistehtävien hyviin puoliin.

Kuviossa 23 näkyy ilmaisujen jakautuminen yläotsikoittain arvosanaluokittain. Kuviosta tarkasteltuna eri arvosanajoukkojen ilmaiset sijoittuvat tasaisesti eri yläotsikoihin. Suurin yksittäinen arvosanaluokan ”ilmaisupiikki” on yläotsikossa ”Ei mitään” ja nämä 9 ilmaisua ovat tulleet parhaimman arvosanaluokan vastaajilta. Toinen pieni parhaimman arvosanaluokan ilmausten korostuminen näkyy yläotsikossa ”Vaikutukset toimintaan”. Kuvion 23 muodostaa ilmaisujen lukumäärät, joten siitä ei näe suoraan yläotsikon saamien ilmaisujen suhteellista osuutta arvosanaluokittain. Suhteelliset osuudet ovat kuvattuna kuviossa 24. (Ks. liite 11(1).)



KUVIO 23. Yläötsikkojen saamat ilmaisut arvosanaluokittain (N=61)

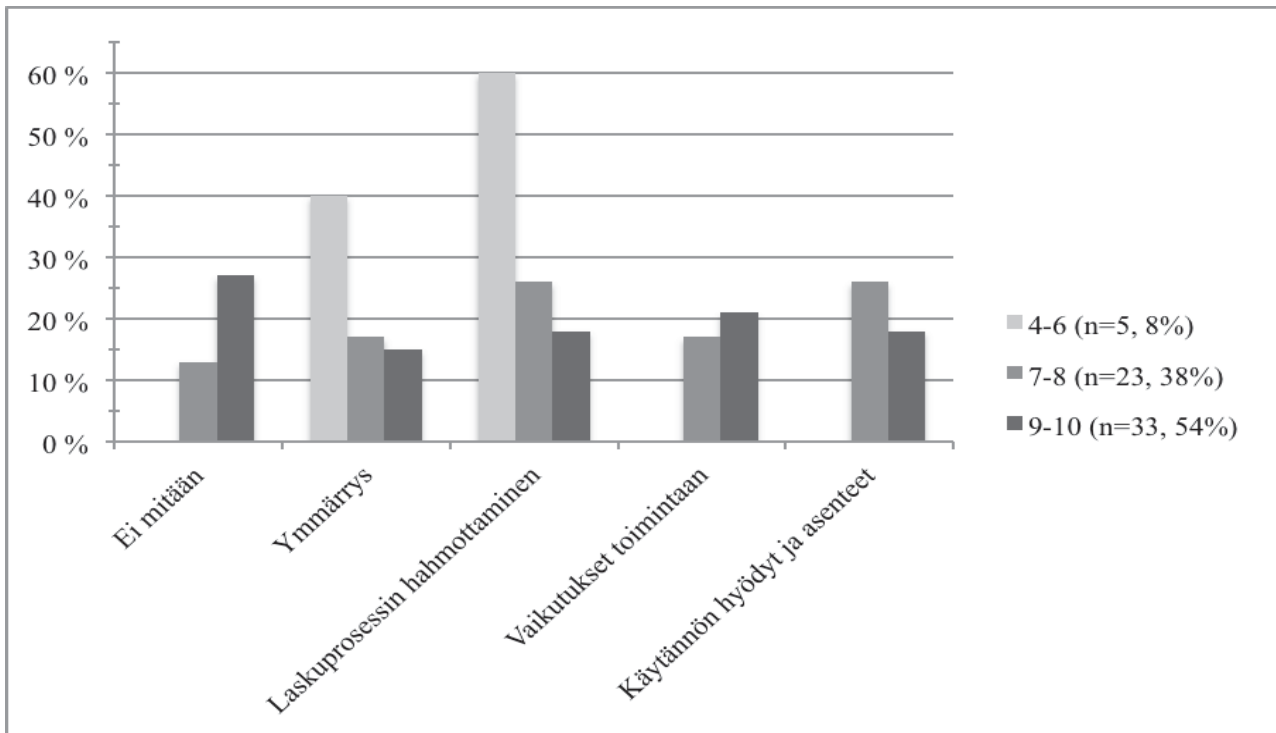
Kun otetaan huomioon vain ilmaukset, joissa on osattu sanoa jotain hyötyjä kielentämiseen liittyen, tulee nämä ilmaukset kaikkiaan 40 (63%) vastaajalta. Pojilla tämä tarkoittaa sitä, että 6 (60%) vastaajaa osasi nimetä jotain hyötyjä kielentämiseen ja tytöillä vastaava luku on 34 (64%). Näin ollen mielipiteet ovat jakautuneet sukupuolten välillä varsin tasaisesti. Yksi tyttö arveli kielentämisestä olevan muistamisen kannalta hyötyä jollekin, mutta ei hänelle itselleen, joten otin hänet mukaan myös hyötyjä ilmaisseiden joukkoon, mutta samalla pidän hänen oman subjektiivisen mielipiteensä mukana tulkinnessa. Ylimmän arvosanaluokan edustajista 21 (60%), keskimmäisen 13 (57%) ja heikoimman arvosanaluokan 4 (80%) edustajaa ovat muodostaneet arvosanaluokkiensa joukot, joissa on osattu nimetä joitain kielentämisen tuomia hyötyjä. Erot ovat pieniä ja koska heikoimpaan arvosanaluokkaa kuuluu vain 5 vastaajaa on heidän positiivisuuteensa suhteessa kielentämisen hyötyihin suhtauduttava pienellä varauksella eikä eroa prosentiosuuksissa voi pitää merkittävänä.

Kuvioon 24 on muodostettu ilmaisujen jakaumat arvosanaluokittain suhteutettuna ja siitä eri arvosanaluokkien ilmaisujen vertailu toisiinsa mahdollista. Toki on muistettava, että heikoimmasta arvosanaluokasta on vain 5 ilmaisua, niiden tulkin kanssa tulee olla varovainen. Heikoimman arvosanaluokan prosentiosuudet yläötsikoissa ”Laskuprosessin hahmottaminen” ja ”Ymmärtäminen” ovat huomattavasti muita arvosanaluokkia suuremmat, mikä osittain selittynee pienellä ilmai-

sujen lukumäärällä tässä arvosanaluokassa. Ero muihin arvosanaluokkiin häviää, kun prosentiosuuksia verrataan näiden kahden yläotsikon välillä arvosanaluokan sisällä. Heikoimmalla arvosanaluokalla yhtä ”Ymmärtämisen” ilmaisua kohden on tullut 1.50 ilmaisua ”Laskuprosessin hahmottamiseen” liittyen. Keskimmaisella arvosanaluokalla vastaava luku on 1.53 ja parhaimmalla arvosanaluokalla 1.20. Näin ollen näitä kahta yläotsikkoa vertaamalla arvosanaluokittain tullaan tulokseen, että kaikki kolme arvosanaluokkaa ovat ilmaisseet suhteessa enemmän laskuprosessiin liittyviä ilmauksia, kuin ymmärtämiseen. Kuitenkin paras arvosanaluokka on ilmaissut suhteessa hieman tasaisemmin näihin yläotsikoihin liittyviä ilmauksia kuin kaksi muuta arvosanaluokkaa ja toisaalta kaksi alinta arvosanaluokkaa ovat ilmaisseet suhteessa enemmän hyötyjä laskuprosessiin kuin ymmärtämiseen liittyen. Toisin sanottuna he ovat nähneet suhteessa enemmän kielentämisen hyötyjä laskuprosessille kuin ymmärtämiselle.

Muita selkeitä eroja kuviosta eri arvosanaluokkien välillä löytyy yläotsikoissa ”Käytännön hyödyt ja asenteet”, ”Laskuprosessin hahmottaminen” ja jo edellisen kuvion kohdalla läpi käyty yläotsikko ”Ei mitään”. Keskimmaisen ja parhaimman arvosanaluokan ilmaisut jakautuvat suhteellisesti samalla tavalla laskuprosessin hahmottamiselle ja käytännön hyödyille ja asenteille, joille he ovat antaneet 26% ja 18% ilmauksistaan. Ero on päinvastainen ja isompi yläotsikossa ”Ei mitään”, johon lukeutuu 27% parhaimman arvosanaluokan ja 13% keskimmaisen ilmaisuista.

Parhaimman arvosanaluokan positiivisista ilmaisuista hyötyihin liittyen eniten ilmaisuja on saanut yläotsikko ”Vaikutukset toimintaan” 21%, mutta ero on pieni muihin arvosanaluokan ilmaisuuksiin. Kuitenkin tämä yläotsikko on saanut eniten positiivisia ilmauksia heiltä, toisin kuin muilta arvosanaluokilta, joen huomio on olennainen.



KUVIO 24. Kielentämisen hyötyjen yläotsikoiden saamat ilmaisut arvosanalukittain suhteutettuna

Tyhjä tai en osaa sanoa

Yhteensä 12 (19%) vastaajaa on sijoittunut tähän yläotsikkoon. Eli 51 (81%) on osannut muotoilla mielipiteensä kielentämisen hyötyihin. Tytöistä 7 (13%) ja pojista 1 (10%) oli jättänyt kielentämisen hyödyt kokonaan kirjaamatta. Tytöistä 3 (6%) ja pojista jälleen 1 (10%) ei ollut osannut sanoa kielentämisen hyviä puolia. Tytöt (19%) ja pojat (20%) ovat jakautuneet tähän yläotsikkoon varsin tasaisesti.

TAULUKKO 39. Yläotsikon ”Tyhjä tai en osaa sanoa” sukupuolijakaumat

Vastaajat (n=63)	Tytöt	Pojat	Yhteensä
KIELENTÄMISEN HYÖDYT	n=53 (84%)	n=10 (16%)	n=63 (100%)
Tyhjä	7 (13%)	1 (10%)	8 (13%)
En osaa sanoa	3 (6%)	1 (10%)	4 (6%)
Yhteensä	10 (19%)	2 (20%)	12 (19%)

Arvosanaluokittain katseltuna heikoimpaan luokkaan kuuluneista 1 (20%) lukeutuu tähän yläotsikkoon. Keskitasoisista 6 (26%) ja parhaimmasta arvosanaluokasta 5 (14%) lukeutuvat tähän ryhmään. Näin ollen arvosanaluokittain vertailtuna kahdella heikommalla arvosanaluokalla on ollut suhteellisesti hieman enemmän hankaluuksia muotoilla omaa mielipidettään kielentämisen hyviin puoliin. Koska heikoimpaan arvosanaluokkaan kuuluu vain 5 vastaajaa, on yhden vastaajan osuus prosentuaalisesti suuri koko joukosta, joten suuri tulkinta on riskialtista. Kuitenkin keskimmäisen arvosanaluokan suuruus on jo vertailtavissa parhaimman arvosanaluokan kanssa, joten näiden ryhmien välillä voidaan sanoa olevan jo selkeää eroa. Näyttäisikin siis siltä, että keskimmäisellä arvosanaluokalla on ollut muita ryhmiä enemmän hankaluuksia muodostaa omaa kantaansa kielentämisen hyötyihin.

TAULUKKO 40. Yläotsikon ”Tyhjä tai en osaa sanoa” jakaumat arvosanaluokittain

Vastaajat (n=63)	Arvosanaluokka			Yhteensä
	4-6	7-8	9-10	
KIELENTÄMISEN HYÖDYT	n=5 (8%)	n=23 (37%)	n=35 (56%)	n=63 (100%)
Tyhjä	1 (20%)	5 (22%)	2 (6%)	8 (13%)
En osaa sanoa	0 (0%)	1 (4%)	3 (6%)	4 (8%)
Yhteensä	1 (20%)	6 (26%)	5 (14%)	12 (19%)

Ei mitään hyötyä

Yhteensä 11 (17%), eli noin joka kuudes vastaaja sijoittui vain tähän yläotsikkoon. Tytöistä 10 (19%) ja pojista 2 (20%) ei nähnyt kielentämisessä mitään hyötyjä itselleen. Kuitenkin yksi tyttö arveli jollekin olevan siitä apua muistamisessa, niin en ota häntä mukaan henkilönä tähän ryhmään, mutta ilmaisuna luonnollisestikin. Poikien kaikista ilmaisuista (n=8) yläotsikon osuus on 25% ja tyttöillä (n=53) 21%. Eli kaikista ilmaisuista joka neljäs pojalta ja joka viides tytöltä tullut ilmaisu lukeutuu tähän yläotsikkoon. Voidaankin sanoa, ettei sukupuolella ollut merkitystä ilmaisujen sijoittumisessa tähän yläotsikkoon ja pienen (4%-yksikön) eron sukupuolten välillä selittänee sukupuolijakauman vinous.

TAULUKKO 41. Vain ”Ei mitään hyötyä” -mieltä olleiden vastaajien sukupuolijakauma

Vastaajat (n=63)	Tytöt	Pojat	Yhteensä
EI MITÄÄN HYÖTYÄ	n=53 (84%)	n=10 (16%)	n=63 (100%)
Ei mitään hyötyä	9 (17%)	2 (20%)	11 (17%)

Arvosanalukittain tarkasteltuna löytyy mielenkiintoinen huomio, että parhaimman luokan edustajista 8 (23%) sijoittuu tähän yläotsikkoon. Keskimmaisella luokalla luku on 3 (13%) ja heikoimmista kukaan ei ole ollut sitä mieltä etteikö kielentämisestä voisi olla jotain hyötyä.

TAULUKKO 42. ”Ei mitään hyötyä” -mieltä olleiden vastaajien jakauma arvosanoittain

Vastaajat (n=63)	Arvosanalukka			Yhteensä
	4-6	7-8	9-10	
EI MITÄÄN HYÖTYÄ	n=5 (8%)	n=23 (37%)	n=35 (56%)	n=63 (100%)
Ei mitään hyötyä	0 (0%)	3 (13%)	8 (23%)	11 (17%)

Tulos on lähes sama kuin Joutsenlahden tutkimuksessa (2010, 11), johon osallistui 40 lukiolaista ja vastaava tulos oli 18%. Tulos kertoo siitä, että näiden kahden tutkimuksen valossa suhtautuminen kielentämisen hyötyihin näyttäisi muodostuvan täysin negatiiviseksi reilulla kuudenneksellä vastaajista oli heille opetettu kielentämisen ideaa ennen tehtävien tekoa tai niin, että he aloittavat tekemään suoraan kielentämistehtäviä ilman perehdytystä itse asiaan.

Joutsenlahti ei ollut tarkastellut arvosanalukittaista jakaumaa, mutta aiemmissa on tutkimuksissa todettu olevan viitteitä, että suhteessa heikommille oppilaille kielentämisestä on enemmän hyötyä, kuin lahjakkaille (ks. Mäcklin & Nikula, 2010, 63). Yllätys kuitenkin oli, että peräti noin joka neljäs (23%) parhaimman arvosanalukokan oppilas ei kokenut kielentämisestä olevan mitään hyötyä.

Ymmärrys

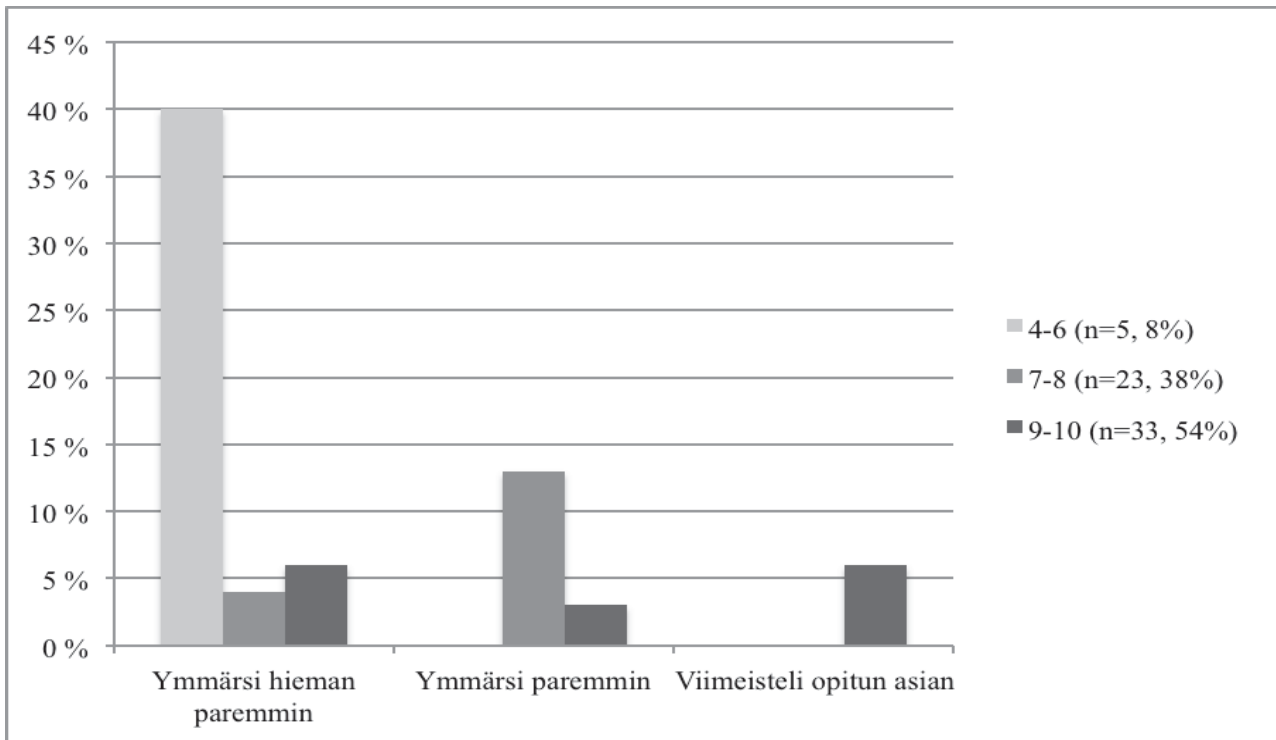
Yläotsikkoon liittyviä ilmauksia oli aineistossa 11 (18%) kappaletta. Huomionarvoista on se, että pojat eivät maininneet kertaakaan, että kielentäminen olisi auttanut heidän ymmärrykseensä, kun

taas tyttöjen ilmaisuista 21% lukeutui tähän yläotsikkoon. Tytöistä 5 (9%) vastauksissa oli ilmiöön ymmärsi hieman paremmin liittyviä ilmauksia, kun taas 4 (8%) ymmärsi paremmin ja 2 (4%) vastauksessa keuhuttiin kielentämisen viimeistelevän opitun asian.

TAULUKKO 43. Yläotsikon ”Ymmärrys” sukupuolijakaumat

Kaikki ilmaisut (n=61)	Tytöt	Pojat	Yhteensä
YMMÄRRYS	n=53 (87%)	n=8 (13%)	n=61 (100%)
Ymmärsi hieman paremmin	5 (9%)	0 (0%)	5 (9%)
Ymmärsi paremmin	4 (8%)	0 (0%)	4 (8%)
Viimeisteli opitun asian	2 (4%)	0 (0%)	2 (4%)
Yhteensä	11 (21%)	0 (0%)	11 (18%)

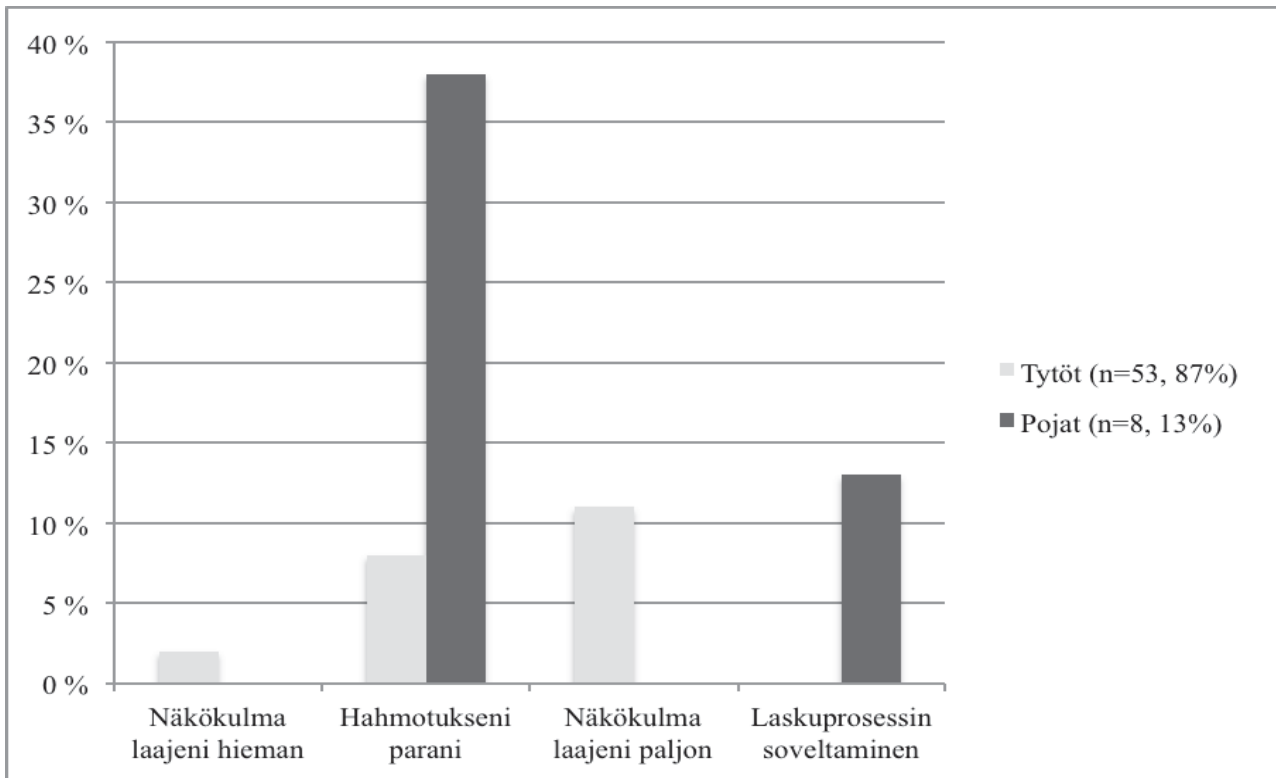
Arvosanoittain ilmaisut jakaantuvat siten, että heikoimman luokan ilmaisuista 2 (40%), keskimmäisen 4 (17%) ja parhaimman luokan ilmaisuista 5 (15%) nimeää ymmärrykseen liittyvät asiat kielentämisen hyödyiksi. Suhteutettuna oman arvosanalokan kaikkiin mainintoihin, heikoimmalla arvosanalokalla ymmärrykseen liittyvät ilmaisut olivat yli kaksi kertaa edustetumpia, kuin muissa arvosanalokissa. Kuitenkin heikoimman arvosanalokan ilmaisuja oli vain 5, joten yksikin ilmaisu vaikuttaa paljon suhteellisesti, joten tulokseen kannattaa suhtautua varovaisesti. Heidän vastauksensa kohdistuivat ilmiöön ”Ymmärsi hieman paremmin”, joka oli ilmaisultaan vaisuin yläotsikon ilmiöistä ja matematiikan osaamisen osa-alueista pitää sisällään käsitteellistä ymmärrystä. Näyttäisi siis siltä, että heikoimman arvosanalokan vastaajat kokivat kielentämisen auttavan heitä jäsentämään heidän ajatteluaan ja parantavan siten ainakin vähän heidän ymmärrystään suhteessa enemmän kuin muilla arvosanalokilla.



KUVIO 25. Yläotsikon ”Ymmärtäminen” ilmiöiden jakautuminen arvosanaluokittain suhteutettuna

Laskuprosessin hahmottaminen ja näkökulmat

Yhteensä yläotsikkoon liittyviä ilmauksia löytyi vastauksista 15 (25%) kappaletta. Pojilla 4 (50%) ja tytöillä 11 (21%) ilmaisuissa lukeutui yläotsikkoon. Tulkintaa sukupuolen vaikutuksesta yläotsikon eri ilmiöiden keräämiin ilmaisiin vaikeuttaa jakauman vinous. Kuvio 26 näyttää miten ilmaisut ovat jakautuneet sukupuolittain suhteutettuna. Poikien ilmaisuista ilmiö ”Hahmotukseni parani” on saanut 3 (38%) kaikista poikien ilmaisuista, kun tytöillä vastaavat luvut ovat 4 (8%). Tämä tarkoittaa sitä, että ”Hahmotukseni paraneminen” sai 47% kaikista yläotsikon ilmaisuista. Toisaalta poikien ilmaisuista 1 (13%) esiintyy ilmiö ”Laskuprosessin soveltaminen”, kun taas tyttöjen vastauksissa sitä ei esiintynyt. Tämän ilmiön suuri prosenttiosuus poikien ilmaisuista osin selittyy pienellä ilmaisujen kokonaismäärällä. Tytöistä 1 (2%) ilmaus kertoi näkökulman laajeneen hieman. Pojilla ei tätä ilmiötä esiintynyt lainkaan. Tytöistä peräti 6 (11%) ilmaisua liittyi ilmiöön ”Näkökulmani laajeni paljon”, joita pojilla ei taas ollut lainkaan.



KUVIO 26. Yläotsikon ”Laskuprosessin hahmottaminen ja näkökulmat” ilmiöiden suhteelliset osuudet sukupuolittain

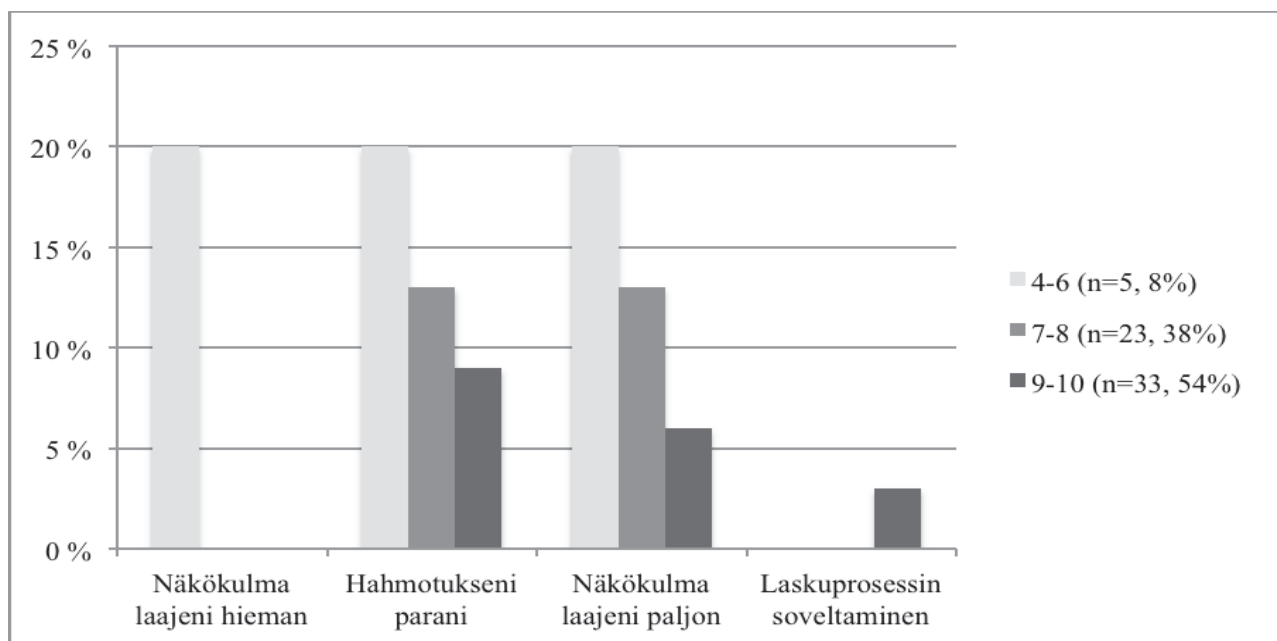
Arvosanalukittain laskuprosessin hahmottamiseen liittyvät ilmaisut jakautuvat suhteellisesti eniten heikkoihin ja keskitasoisiin vastaajiin. Heikkojen ilmaisuista peräti 3 (60%) lukeutuu tähän yläotsikkoon. Keskitasoisilla vastaavat luvut ovat 6 ja 26% ja parhaimmilla ilmaisuja on 6 (18%). Kuviossa 27 näkyy, miten ilmaisut jakautuvat tasaisesti eri ilmiöiden kesken arvosanalukokien sisällä, mutta suhteellisissa osuuksissa luokkien välillä on eroja.

Kaksi ilmiötä ”Hahmotuksen paraneminen” ja ”Näkökulman laajeneminen paljon” saivat 13 ilmaisua ja 87% kaikista yläotsikon ilmaisuista. Hahmotuksen paraneminen pitää sisällään käsitteellisen ymmärryksen lisäksi proseduraalista sujuvuutta matematiikan osaamisen osa-alueista, kun taas ”Näkökulman laajeneminen paljon” sisältää näiden kahden ohella myös strategista kompetenssia. Nämä ilmaisut jakautuivat keskenään suhteellisesti tasaisesti kaikissa arvosanalukissa, mutta ovat suhteellisesti edustetumpia heikommassa arvosanalukissa.

Lisäksi huomionarvoista on, että vain korkeimmasta arvosanalukasta löytyy laskuprosessin soveltamiseen viittaava ilmaisu, joka edustaa ylintä laskuprosessiin liittyvää ilmiötä. Se pitää sisällään matematiikan osaamisen osa-alueista käsitteellisen ymmärtämisen ja proseduraalisen sujuvuuden lisäksi strategista kompetenssia sekä mukautuvaa päättelyä. Toisaalta myöskin on huomi-

oitava yläotsikon vaisuin ilmiö ”Näkökulman laajeni hieman”, joka nousee vain heikoimman arvosanaluokan ilmaisusta ja se pitää sisällään käsitteellisen ymmärtämistä liittyen laskemiseen.

Heikoimmasta arvosanaluokasta on vain 5 (8%) kaikista ilmaisuista, joten jakauma on vino ja voimakkaat tulokset ovat riskialttiita. Kuitenkin huomio, että heikoimmasta arvosanaluokasta tulleet ilmaiset keskittyvät yläotsikon vaisuimpiin ilmiöihin, on todellinen. Tämä sama trendi näkyy myös keskitasoisilla, joiden ilmaiset ovat keskimmaisissa ilmiöissä ja toisaalta parhaimman arvosanaluokan ilmaiset kattavat yläotsikon vaativimmat ilmiöt. Näin ollen tulos on ymmärrettävä, eikä itsessään kovinkaan yllättävä, mutta varmentaa analyysin ja tulkinnan tulosta annetuista avoimista vastauksista.



KUVIO 27. Yläotsikon ”Laskuprosessin hahmottaminen ja näkökulmat” ilmiöiden suhteelliset osuudet arvosanaluokittain

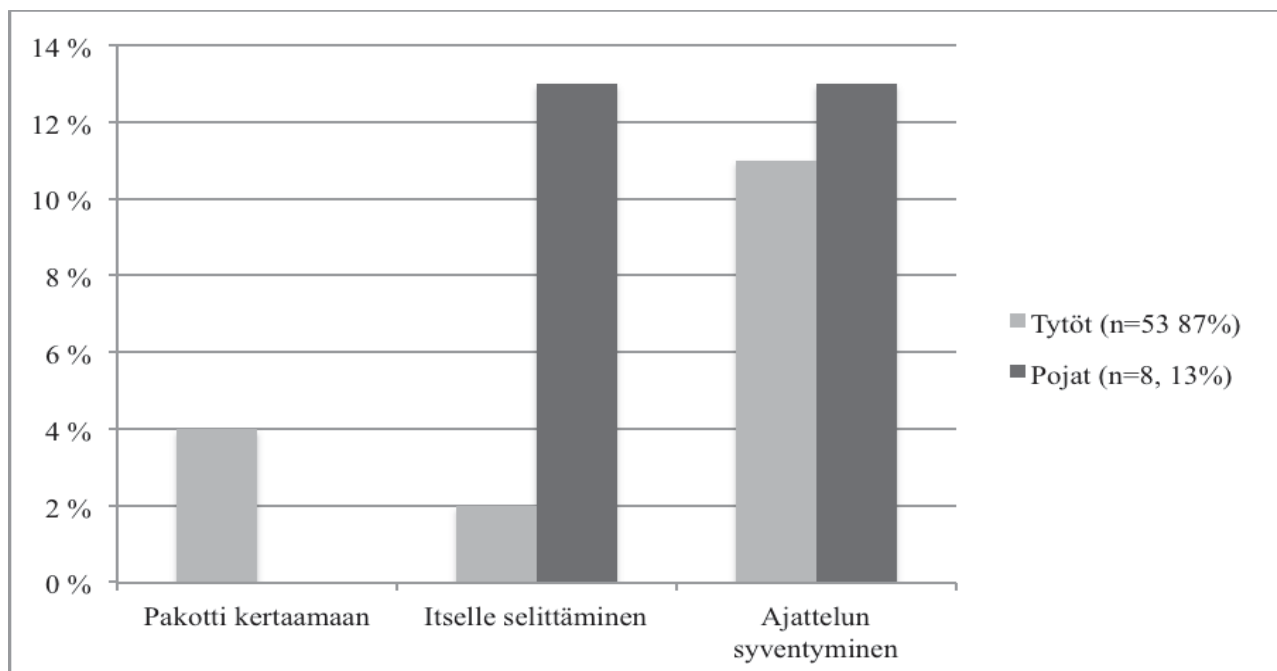
Vaikutukset toimintaan

Yhteensä yläotsikkoon liittyviä ilmauksia löytyi vastauksista 11 (18%) kappaletta. Pojilla 2 ja tytöillä 9 ilmaisua oli sitä mieltä, että kielentäminen vaikuttaa positiivisesti omaan toimintaan. Poikien kaikista ilmaisuista neljäsosa (25%) ja tyttöilläänkin 17% sijoittui tähän yläotsikkoon. Ajattelun syventyminen oli yläotsikon selvästi yleisin ilmiö saaden 64% yläotsikon ja 11% (7) kyselyn kaikista ilmaisuista.

Kuviosta 28 on luettavissa että etenkin tyttöjen ilmaiset ovat keskittyneet suhteellisesti ilmiöön ”Ajattelun syventyminen” (11%) saaden 6 mainintaa. Poikien ilmaiset ovat jakautuneet tasan

”Ajattelun syventymiselle” ja ”Itselle selittämiselle” (13%), kun molemmat ovat saaneet heiltä 1 maininnan. Tytöiltä niin ikään 1 ilmaisu koski itselle selittämistä, mutta suhteutettuna tyttöjen ilmaisiin sen osuus on vain 2%. Lisäksi tyttöjen 2 ilmaisussa (4%) ilmoitettiin kielentämisen pakottavan kertaamaan, kun taas pojilla ei vastaavaa ilmausta löytynyt.

Edelleen tulkintaa häiritsee sukupuolijakauman vinous, mutta oman ajattelun syventymistä ovat molemmat sukupuolet pitäneet kielentämisen hyvänä puolena lähes samalla prosenttiosuudella, mikä kertoo siitä että tämä mittari on suuntaa antava jakauman vinoudesta huolimatta. Toisaalta itselle selittäminen saa suhteellisesti paljon enemmän poikien ilmaisuista kuin tyttöjen ja taas vastaavasti ilmiö ”Pakotti kertaamaan” näkyy vain tyttöjen vastauksissa. Edellinen ilmiön liittyy tiedon etsiminen jostain ulkoisesta lähteestä, kun taas kahdessa muussa ilmiössä tieto rakentuu henkilöön itseensä. Mielenpidevääntämissä nousi samankaltainen ero tyttöjen ja poikien välillä, että pojat näkivät kielentämisen erityisesti itselleen hyödyllisenä (V8, V10 ja V18) ja toisaalta he olivat valmiimpia tekemään töitä pitkänkin aikaa matemaattisen ongelman parissa (V5). Näin ollen kuviossa 28 näkyvä tuloksen suunta on uskottava, mutta sen suuruuteen täytyy suhtautua pienellä varauksella.



KUVIO 28. Yläotsikon ”Vaikutukset toimintaan” ilmiöiden suhteelliset osuudet sukupuolittain

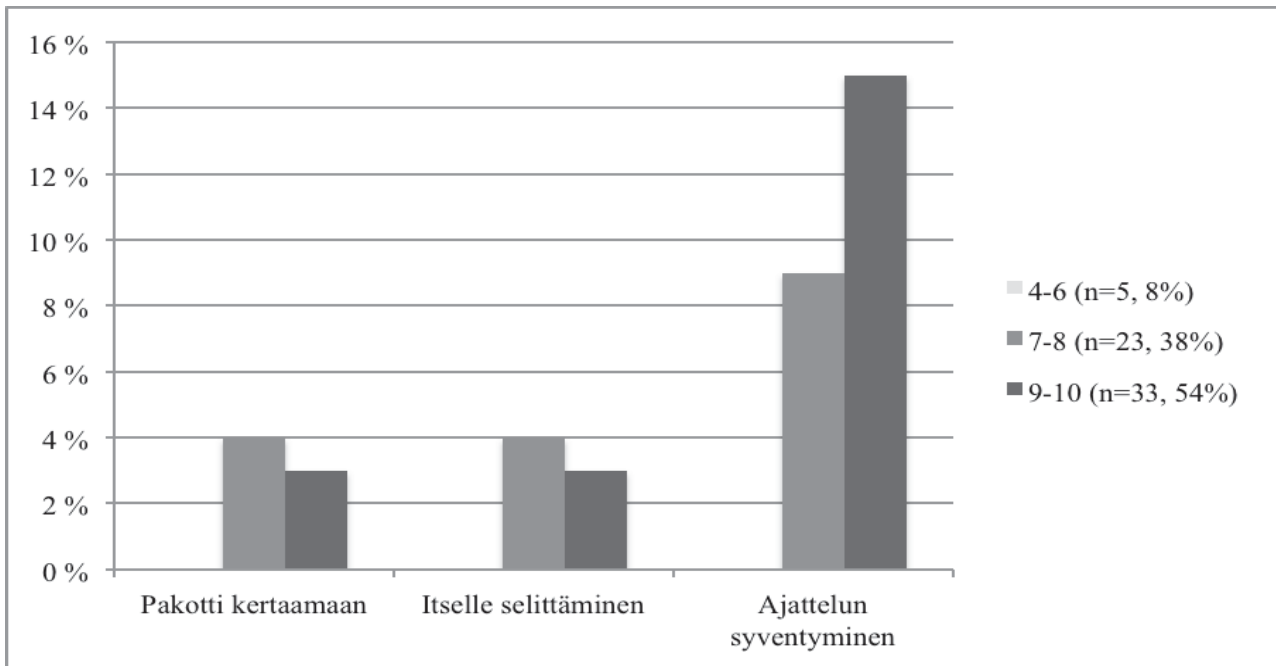
Huomionarvoista on se, ettei yksikään heikoimman arvosanalukon edustajista osannut ilmaista kielentämisen hyviä puolia toimintaan liittyen. Yläotsikon ilmiöihin liittyy matematiikan osa-

alueista yritteliäisyys, jonka osuus on luultavammin sitä suurempi henkilön matematiikan osaamisessa, mitä parempi hän matematiikassa on (ks. Tuohilampi & Markkula, 2013). Näin ollen on ymmärrettävää, että arvosanaluokittain katsottuna korkeimmat arvosanaluokat näkyvät tuloksissa ja toisaalta, että heikoimpien edustajien ilmaisuista ei yksikään lukeutunut tähän yläotsikkoon.

Keskimmäisen ja parhaimman arvosanaluokan välillä ilmiöt saivat suunnilleen vastaavasti ilmaisuja, kun suhteelliset osuudet luokilla koko yläotsikossa olivat 17% ja 21%. Suurimmaksi yksittäiseksi ilmiöksi yläotsikon sisältä muodostui ”Ajattelun syventyminen”, jonka 7 mainintaa oli 63% kaikista yläotsikon maininnoista. Parhaimmasta arvosanaluokan kaikista ilmaisuista ilmiö keräsi 15% ja keskimmaiseltäkin 9%. Näyttäisikin siltä, että kahteen parhaimpaan arvosanaluokkaan kuuluneet vastaajat ja erityisesti korkeimpaan arvosanaluokkaan kuuluneet ovat nähneet kielentämisen hyvissä puolissa juuri kielentämisen mukana tulevan toiminnan arvon ratkaisijan oman ajattelun jäsentymiselle.

Kahdessa muussa yläotsikon ilmiössä erot näiden kahden arvosanaluokkien välillä ovat pienet, mutta erojen suunta on eri kuin eniten ilmauksia keränneessä ilmiössä ”Ajattelun syventyminen”. Havainto on oleellinen, koska ilmiöt ”Pakotti kertaamaan” ja ”Itselle selittäminen” ovat konkreettisempia kuin ilmiö ”Ajattelun syventyminen” ja nämä kaksi edellistä ilmiötä voidaankin ajatella selkeänä, henkilön käytännön toimintana, kun taas ajattelun syventyminen on henkilön ajattelussa tapahtuvaa toimintaa. Tämän tulkinnan ja edellisten yläotsikoiden tulosten valossa on ymmärrettävää, että ilmiö ”Ajattelun syventyminen” korostuu juuri yläotsikkoa ”Ymmärrys” painottaneissa vastaajissa. Eli vastaajissa, jotka kuuluvat parhaimpaan arvosanaluokkaan.

Joutsenlahden (2010, 10) tutkimuksessa hänen vastaajistaan 60% ilmoitti kielentämisen hyödyksi, että se jäsentää omaa ajattelua ratkaisijalle itselleen. Oma tutkimukseni on pilkkonut oman ajattelun jäsentymisen ymmärrykseen, laskuprosessiin sekä vielä varsinaiseen toimintaan, joka vaikuttaa tähän taustalla. Näiden yläotsikoiden yhteenlasketuksi prosenttiosuudeksi kaikista ilmaisuista tulee 61% (37 ilmaisuja). Voinkin siis todeta, että tutkimukseni on linjassa Joutsenlahden tutkimuksen kanssa, mutta antanee vielä tarkempia viitteitä siitä, mitä kielentämisestä saatava hyöty omalle ajattelun jäsentymiselle pitääkään sisällään millekin vastaajaryhmälle.



KUVIO 29. Yläotsikon ”Vaikutukset toimintaan” ilmiöiden suhteelliset osuudet arvosanalukittain

Käytännön hyödyt ja asenteet

Yläotsikkoon liittyviä ilmauksia oli aineistossa 12 (20%) kappaletta. Huomionarvoista on se, että pojat eivät maininneet kertaakaan, että kielentäminen olisi tuonut heille käytännön hyötyä tai parantanut asennetta. Tyttöjen 12 ilmaisua on 23% kaikista heidän ilmaisuistaan ja ne jakautuivat tasaisesti eri ilmiöille, sillä 5:ssä (9%) kielentämisen koettiin helpottavan tehtävän ratkaisua, 3 (6%) vastauksen ilmaisussa todettiin kielentämisen helpottavan muistamista ja motivaation kasvu näkyi 4 (8%) tyttöjen ilmaisuista.

Ero on selkeä, että tytöiltä lähes joka neljäs ilmaisu liittyi yläotsikkoon, mutta pojilta ne puuttuvat täysin, eikä sitä täysin selitä edes jakauman vinous. Mielenpideväittämistä nousi sukupuolten välisenä erona, että pojat suhtautuivat matematiikan tuomiin haasteisiin (V2), toisaalta sen parissa käytettävään aikaan (V5), kuin myös matemaattisiin ongelmiin (V6) keskimäärin tyttöjä suopeammin, mikä voisi antaa viitteitä siihen miksi poikien ilmaisut loistavat poissaolollaan. Heillä on siis jo lähtökohtaisesti mielenpidekyselyiden mukaan motivaatio korkeampi, kuin tytöillä. Toisaalta he eivät näe ratkaisun helpoutta itseisarvona, vaan, kuten edellisessä yläotsikossa huomattiin, he painottavat kielentämisen hyötyjä itselleen ja omalle ajattelulleen hieman tyttöjä enemmän. Kuten sanottua jakauma on hyvin vino, eikä siitä voi vetää liian suuria johtopäätöksiä. Kuitenkin tässä aineistossa on viitteitä tämän suuntaalle tulokselle, jonka kokoluokkaa ei kuitenkaan voida täysin kuvata.

TAULUKKO 44. Yläotsikon ”Käytännön hyödyt ja asenteet” sukupuolijakaumat

Kaikki ilmaiset (n=61)	Tytöt	Pojat	Yhteensä
KÄYTÄNNÖN HYÖDYT JA ASENTEET	n=53 (87%)	n=8 (13%)	n=61 (100%)
Helpotti tehtävän ratkaisua	5 (9%)	0 (0%)	5 (8%)
Helpottaa muistamista	3 (6%)	0 (0%)	3 (5%)
Motivaation kasvu	4 (8%)	0 (0%)	4 (7%)
Yhteensä	12 (23%)	0 (0%)	12 (20%)

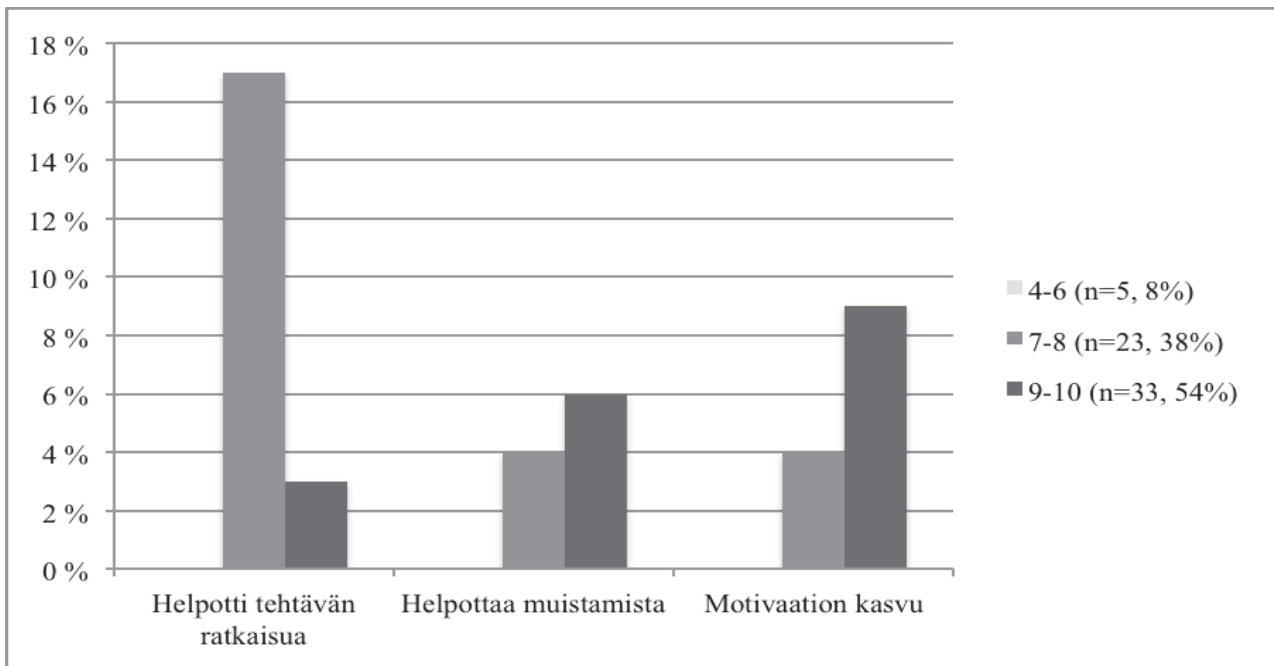
Alimman arvosanaluokan ilmaisuista yksikään ei lukeutunut tähän yläotsikkoon. Keskimäinen arvosanaluokka erottuu suhteellisesti muista arvosanaluokista, sillä 6 (26%) sen maininnoista on tässä yläotsikossa. Parhaimmalla arvosanaluokallakin ilmaisuja on 6, mutta suhteellinen osuus heidän ilmaisuistaan tällä yläotsikolla on 18%.

Keskimäisen arvosanaluokan ilmaisuista 4 (17%) koki kielentämisen helpottavan tehtävän ratkaisua. Se, että juuri keskimäinen arvosanaluokka painottaa ilmaisuissaan juuri tätä käytännönläheistä kielentämisen tuomaa hyötyä ei ole yllättävää, sillä matematiikan osaamisen osa-alueista ilmiö pitää sisällään proseduraalista sujuvuutta ja strategista kompetenssia. Näin ollen tämän ilmiön valossa voidaan kielentämisen ajatella olevan eräänlainen työkalu, jonka he kokivat helpottavan tehtävien ratkaisemista.

Parhaimman arvosanaluokan ilmaisuissa 3 (9%) hieman korostui motivaation kasvu, joka pitää sisällään yritteliäisyyttä. Tämäkään ei ole ihan yllättävä tulos, koska yritteliäisyyteen sisältyy arvoja, kuten matematiikan hyödyllisenä pitäminen, mikä taas ei ole yllättävää parhaimman arvosanaluokan edustajille.

Ilmiö ”Helpottaa muistamista” sai lähes saman verran mainintoja kahdessa ylimmässä arvosanaluokassa. Kuitenkin suhteellisesti hieman enemmän ilmiötä on painottanut korkein arvosanaluokka (6%), kuin keskimäinen (4%). Ero ilmiöön ”Helpottaa ratkaisua” on kuitenkin selkeä, kun parhaimmasta arvosanaluokasta sitä on painottanut 3% ja keskimäisestä 17%. Ilmiöillä on seuraavanlainen syy-seuraus-suhde; muistamisen helpottuminen helpottaa tehtävän ratkaisua, mutta välttämättä tehtävän ratkaisun helpottuminen ei edesauta muistamista. Kun vertaa kahta edellistä ilmiötä toisiinsa, huomaa, että ilmiöiden suhteelliset osuudet arvosanaluokissa ovat käänteiset. Eli arvosanaluokat eroavat toisistaan siinä, mitä he pitävät hyödyllisenä kielentämisessä.

Näin ollen keskimäinen arvosanaluokka on antanut suhteessa enemmän itseisarvoa tehtävän ratkaisulle, kun taas paras arvosanaluokka on arvostanut muistamisen paranemista. Korkeimmalla arvosanaluokalla on siis korostunut matkan helpottuminen kohti päämäärää, kun taas keskimäinen arvosanaluokka on korostanut päämäärää eli ratkaisua.



KUVIO 30. Yläotsikon ”Käytännön hyödyt ja asenteet” ilmiöiden suhteelliset osuudet arvosanaluokittain

Joutsenlahden (2010, 10) tutkimuksen tuloksena 15% vastanneista koki kielentämisen hyödyn muistamiselle, kun tässä tutkimuksessa kaikista ilmaisuista vain 3 (5%) kohdistui juuri tähän ilmiöön. Ero on aika suuri ja myös siksi yllättävä, että muuten tulokset ovat olleet saman suuntaisia. Eroa voi selittää ymmärtämisen ja muistamisen rooli suhteessa osaamiseen (ks. luku 2.3), ja koska tämä tutkimus pilkkoi hyödyt 14 ilmaisultaan yksiselitteiseen eri ilmiöön, kun vastaavasti Joutsenlahdella näitä oli 5, niin omassa tutkimuksessani erottuu muun muassa laskuprosessiin liittyvät ilmiöt toisin kuin Joutsenlahdella. Eli voi olla että omassa tutkimuksessani laskuprosessin ja ymmärtämisen hyödyt ovat omalta osaltaan pienentäneet ilmaisujen suhteellista osuutta muistamiseen liittyen.

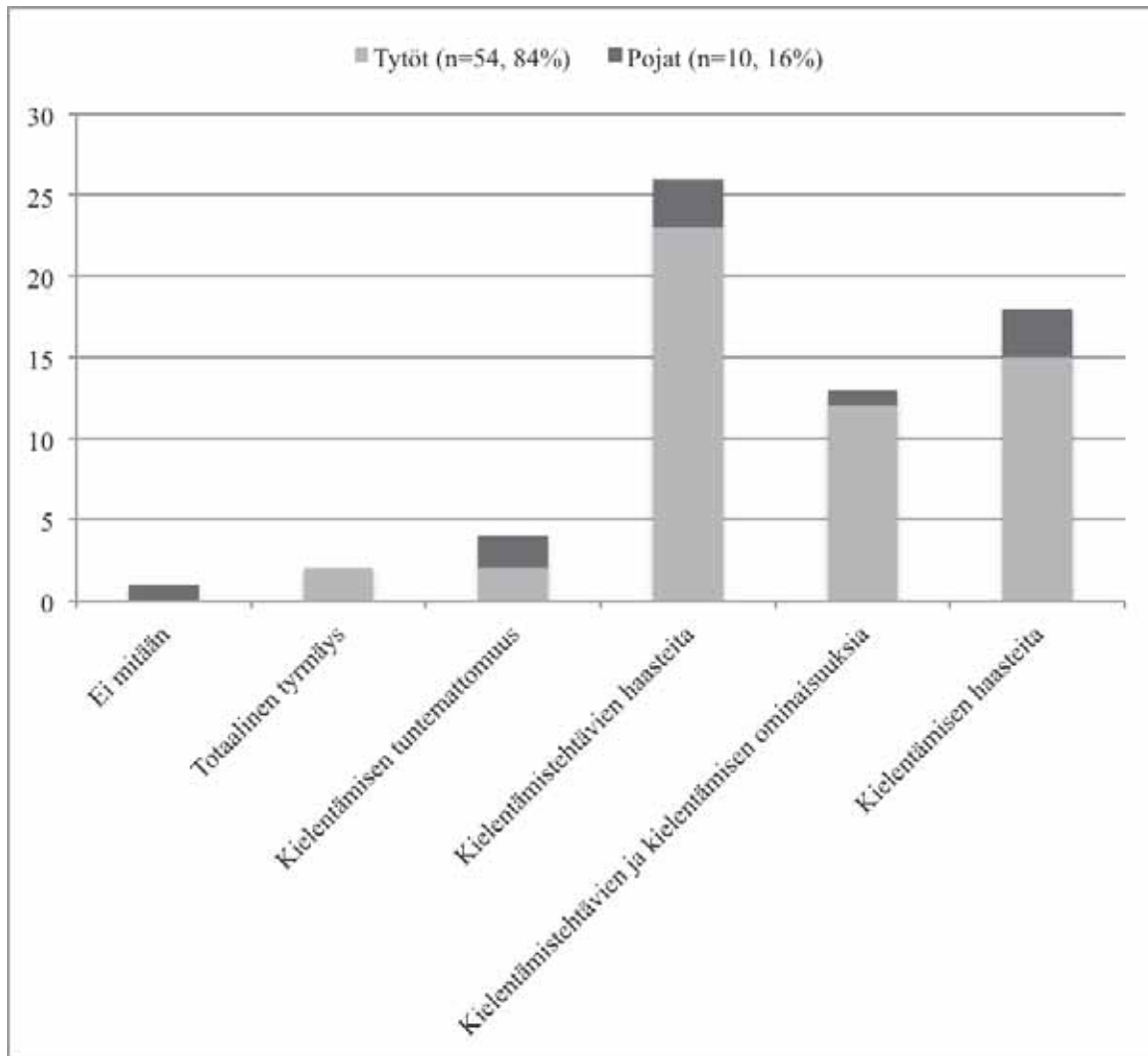
6.3.2 Kielentämisen huonot puolet

Kaiken kaikkiaan 63 vastaajasta 48 vastaajaa (76%) muodosti kaikkien ilmaisujen antaneiden vastaajien joukon. Heistä 8 oli poikia ja 40 tyttöjä, joten 80% pojista ja 75% tytöistä ilmaisi mielipiteensä kielentämisen huonoja puolia kohtaan. Huonoihin puoliin liittyviä ilmaisia oli kaiken kaikkiaan 64 kappaletta, joista 54 (84%) tuli tytöiltä ja 10 (16%) pojilta. Näin ollen ilmaisujen sukupuolijakauma noudattelee hyvin tarkasti vastaajien sukupuolijakaumaa.

Huonojen puolien ilmaiset jakaantuivat monipuolisesti. Toisaalta ilmaiset painoutuivat erinäisiin kielentämisen ja tehtävien haasteisiin siten, että kielentämistehtävien haasteisiin liittyviä ilmauksia oli 26 (41%), itsessään kielentämiseen liittyviä oli 18 (28%) ja kielentämistehtävien ja kielentämisen ominaisuuksiin liittyviä ilmauksia oli 13 (20%). Eli nämä yläotsikot pitivät sisällään 89% kaikista kielentämisen huonoihin puoliin liittyvistä ilmauksista. Loppuosa ilmauksista piti sisällään sen, ettei kielentämisessä ollut haittoja 1 (2%) ilmaisu, 2 (3%) ilmausta, että kielentämisessä on kaikki huonoa ja lisäksi kielentämisen tuntemattomuuteen liittyi 4 (6%) ilmauksista. (Ks. liite 11(4).)

Osa vastaajista nimesi useamman huonon puolen ja kaiken kaikkiaan 48 (76%) vastaajaa osasi ottaa kantaa kielentämisen huonoihin puoliin, mutta itsessään negatiiviset huomiot suhteessa kielentämiseen tulee 47 (75%) kaikista vastaajista (N=63). Näiden annettujen ilmaisujen lisäksi 15 vastaajaa (24%) jätti huonot puolet mainitsematta (n=12), tai eivät osanneet sanoa kielentämisen huonoja puolia (n=3).

Kuviossa 31 on kuvattu kaikkien kielentämisen huonojen puolien ilmaisujakaumat sukupuolittain. Kuviosta nähdään, että kolme yläotsikkoa on saanut selkeästi eniten ilmaisia. Yksi poika on ollut sitä mieltä, ettei kielentämisessä ole mitään huonoja puolia ja toisaalta kaksi tyttöä on ollut sitä mieltä, että kielentämisessä huonoa on kaikki. Kielentämisen tuntemattomuuteen on molemmat sukupuolet antaneet kaksi ilmaisua.

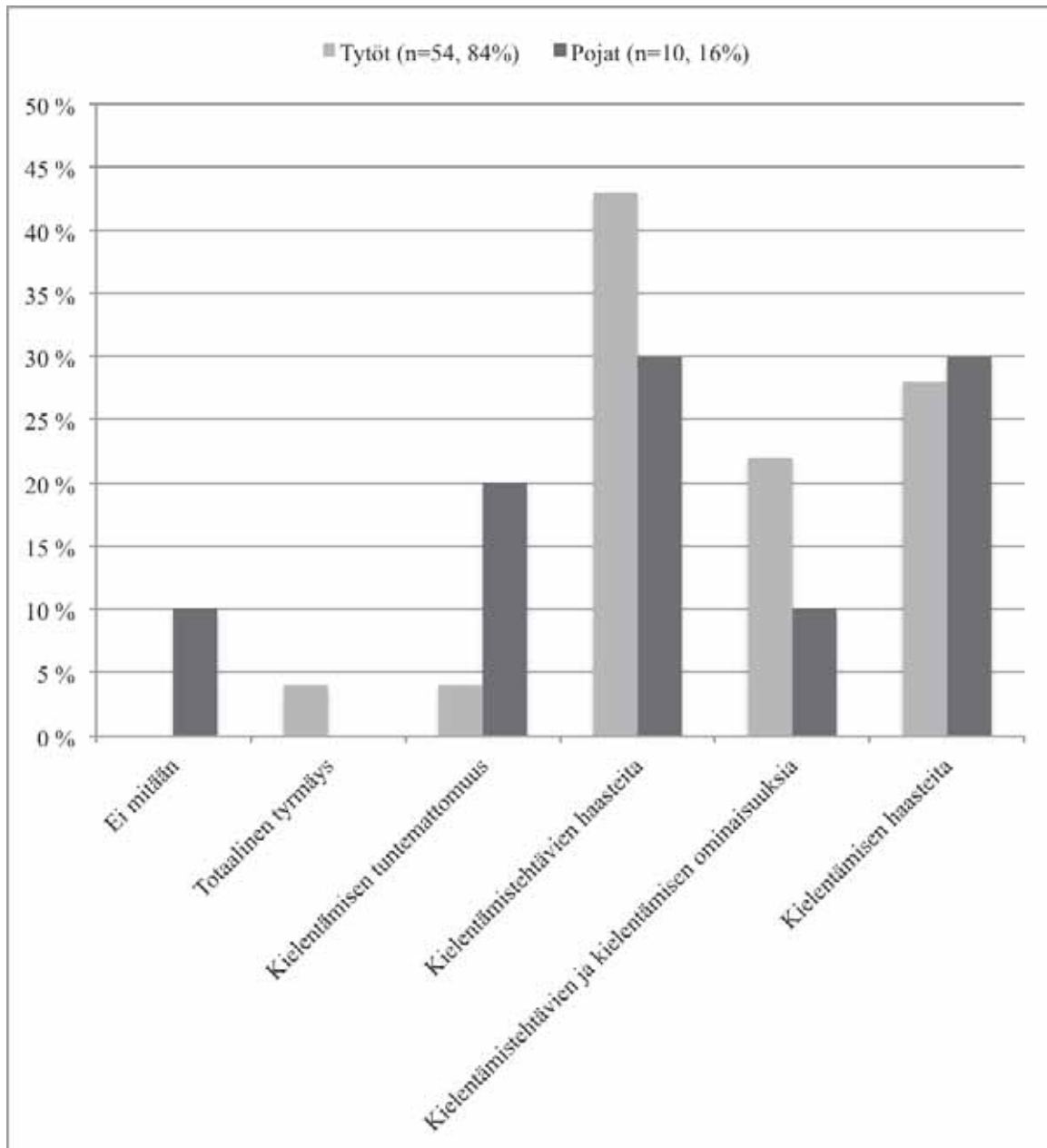


KUVIO 31. Kielentämisen huonojen puolien ilmaisujen (N=63) jakaumat sukupuolittain

Kuvioon 32 on koottu ilmaisujen osuudet sukupuoleen suhteutettuna. Tytöt (43%) ovat kokeneet huonona puolena erityisesti kielentämistehtäviin liittyvät haasteet. Pojillakin yläotsikko saa 30% heidän ilmaisuistaan ja yhtä suuren osuuden on saanut myös yläotsikko ”Kielentämisen haasteet”, joka on puolestaan saanut tytöiltä 28% heidän ilmaisuistaan. Kielentämisen tuntemattomuuteen on ottanut poikien ilmaisuista 20% kantaa, kun tytöillä vastaava luku on 4%. Vastaavasti kielentämistehtävien ja kielentämisen ominaisuuksiin lukeutuu 22% tyttöjen ilmaisuista, kun pojilla vastaava luku 10%.

Tulkintaa häiritsee sukupuolijakauman vinous, mutta näyttäisi siltä, että sukupuolten välillä on mielenkiintoinen näkemyksen suunnan ero. Tytöille huonoina puolina näyttäytyisi suhteessa enemmän kielentämistehtävät ja kielentämisen ominaisuudet, kun taas pojille huonoina puolina näkyy itsessään kielentämisen haastavuus ja toisaalta sen tuntemattomuus. Myös yläotsikkojen ”Ei

mitään” ja ”Totaalinen tyrmäys” ilmaisuosuudet tukevat havaintoa, että sukupuolten välillä voi olla näkemyksissään kielentämisen huonoja puolia kohtaan ainakin hieman eroa.



KUVIO 32. Kielentämisen huonojen puolien ilmaisut sukupuolittain suhteutettuna

Arvosanalukittain tarkasteltuna heikoimmasta luokasta 4 (80%), keskimmäisestä 15 (63%) ja parhaimmasta luokasta 29 (83%) sai muotoiltua oman ajatuksensa suhteessa kielentämistehtävien huonoihin puoliin. Korkeimmasta arvosanalukasta löytyy kuitenkin yksi vastaaja, jonka mielestä kielentämisessä ei ollut mitään huonoa, joten kaiken kaikkiaan negatiivisia ilmauksia osasi antaa

tästä ryhmästä 28 (80%). Ilmaisut jakaantuivat arvosanaluokittain siten, että heikoimmasta luokasta tuli 5 (8%), keskimmäisestä 20 (31%) ja parhaimmasta luokasta 39 (61%) kaikista ilmaisuista, mikä tarkoittaa sitä, että ylimmän arvosanaluokan osuus ilmaisuista on yliedustettuna ja keskimmäisen hieman aliedustettuna aineistossa.

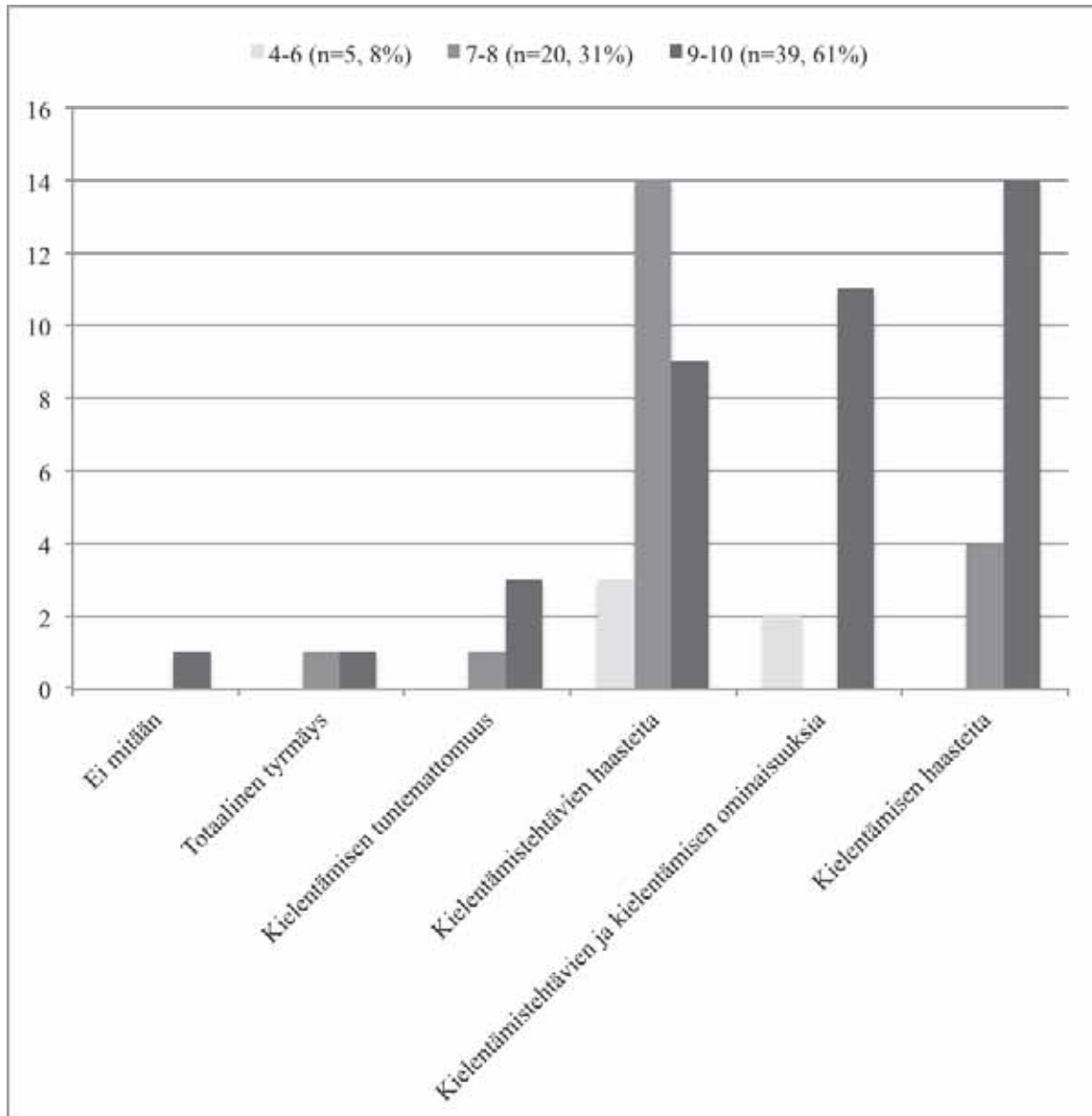
Kuviossa 33 on ilmaisut suhteutettuna arvosanaluokittain ja siitä on luettavissa, että erityisesti kaksi heikointa arvosanaluokkaa kokivat kielentämistehtäviin liittyvät haasteet korostetusti kielentämisen huonoina puolina. Heikoimman arvosanaluokan ilmaisuista 60% ja keskimmäisestä peräti 70% lukeutui tähän yläotsikkoon. Yläotsikko ei saanut korkeimmasta arvosanaluokasta suhteellisesti verrattuna muihin arvosanaluokkiin läheskään yhtä paljon ilmaisuja (23%). Ilmaisueroa selittää palautettujen vastausten tulokset ja on kokonaisuudessaan ymmärrettävä, sillä kielentämistehtävät olivat uudentyyppisiä, eikä niissä keskitytty peruslaskemiseen, mikä oli varmasti suhteessa haastavampaa keskitason ja sen alle oleville vastaajille.

Parhaimman arvosanaluokan edustajien ilmaisut ovat jakautuneet melko tasaisesti kolmen ilmaistuimman yläotsikon kesken. Suhteessa eniten ilmaisuja on kuitenkin saanut yläotsikko ”Kielentämisen haasteet”, joka sai 36% kaikista korkeimman arvosanaluokan ilmaisuista. Seuraavaksi eniten ilmaisuja on kerännyt yläotsikko ”Kielentämistehtävien ja kielentämisen ominaisuuksia” ja vasta kolmanneksi eniten kahden muun arvosanaluokan korostama yläotsikko ”Kielentämistehtävien haasteita”. Näyttäisikin siltä, että paras arvosanaluokka on pitänyt kielentämisen huonoina puolina enemmänkin kielentämisen hankaluutta ja sen ominaisuuksia, kuin tehtävien hankaluutta.

Eli kuvion 33 tulosten valossa parhaimman arvosanaluokan edustajat eivät kokeneet tehtäviä itsessään, vaan tehtävien taustalla vaikuttavat asiat haastavina (ks. liite 11(4)). Kun taas kahdella alemmalla arvosanaluokalla korostui itsessään tehtävien haasteet verrattuna muihin yläotsikoihin. Tulos on samantapainen, kuin oli kielentämisen hyvissä puolissa liittyen kielentämisen arvokkuuden näkemiseen alemmilla arvosanaluokilla tehtävän ratkaisun helpottumisena ja ylimmällä arvosanaluokalla oman ajattelun syventymisenä.

Kolmessa eniten ilmaisuja keränneissä yläotsikoissa on mielenkiintoista hajontaa, sillä myös keskimmäisen arvosanaluokan ilmaisuista 20% lukeutuu yläotsikkoon ”Kielentämisen haasteita”, mutta heikoimmasta arvosanaluokasta yläotsikko ei ole saanut yhtään mainintaa. Toisaalta yläotsikkoon ”Kielentämistehtävien ja kielentämisen ominaisuuksia” on heikoimman arvosanaluokan ilmaisuista sijoittunut peräti 40%, joka on prosenttilukuna paljon ja otettava huomioon. Kuitenkaan tähän yläotsikkoon ei tullut yhtään mainintaa keskimmäiseltä arvosanaluokalta, mikä on erityisen mielenkiintoista, sillä keskimmäisessä arvosanaluokassa mainintoja oli kuitenkin määrällisesti neljä kertaa enemmän kuin heikoimmassa.

Kolmea vähiten ilmaisia saaneiden yläotsikoiden ilmaiset ovat jakautuneet siten, ettei yksikään heikoimman arvosanaluokan edustajan ilmaisu ole ottanut niihin kantaa. Ainoastaan korkeimmasta arvosanaluokasta tullut ilmaisu ei koe kielentämisessä olevan ollenkaan haittoja. Yläotsikoihin ”Kielentämisen tuntemattomuus” ja ”Totaalinen tyrmäys” ovat ottaneet ilmauksillaan kantaa suhteellisesti suunnilleen saman verran kaksi korkeinta arvosanaluokkaa (5% ja 3% sekä 5% ja 8%). Prosenttiosuuksien voimasuhteet ovat kuitenkin erilaiset, joten niiden tarkastelu on mielenkiintoista.



KUVIO 33. Kielentämisen huonojen puolien ilmaiset arvosanaluokittain suhteutettuna

Tyhjä tai en osaa sanoa

Epäröivien, toisin sanottuna niiden vastaajien, jotka eivät ole saaneet ilmaista ajatustaan osuus kielentämisen huonoja puolia kohtaan on 24% (15) kaikista vastaajista. Toisin sanottuna kantansa on osannut muotoilla 76% vastaajista, mikä on hieman vähemmän kuin hyötyjen kohdalla.

Sukupuolittain yläotsikko jakautui aineiston mukaisesti, siten että pojista 2 (20%) ja tytöistä 13 (25%) lukeutui tähän kastiin. Tyhjäksi vastauksensa oli jättänyt tytöistä 11 (21%) ja pojista 1 (10%). Tytöistä 2 (4%) ja pojista 1 (10%) ei ollut osannut sanoa mielipidettään suhteessa kielentämisen huonoihin puoliin.

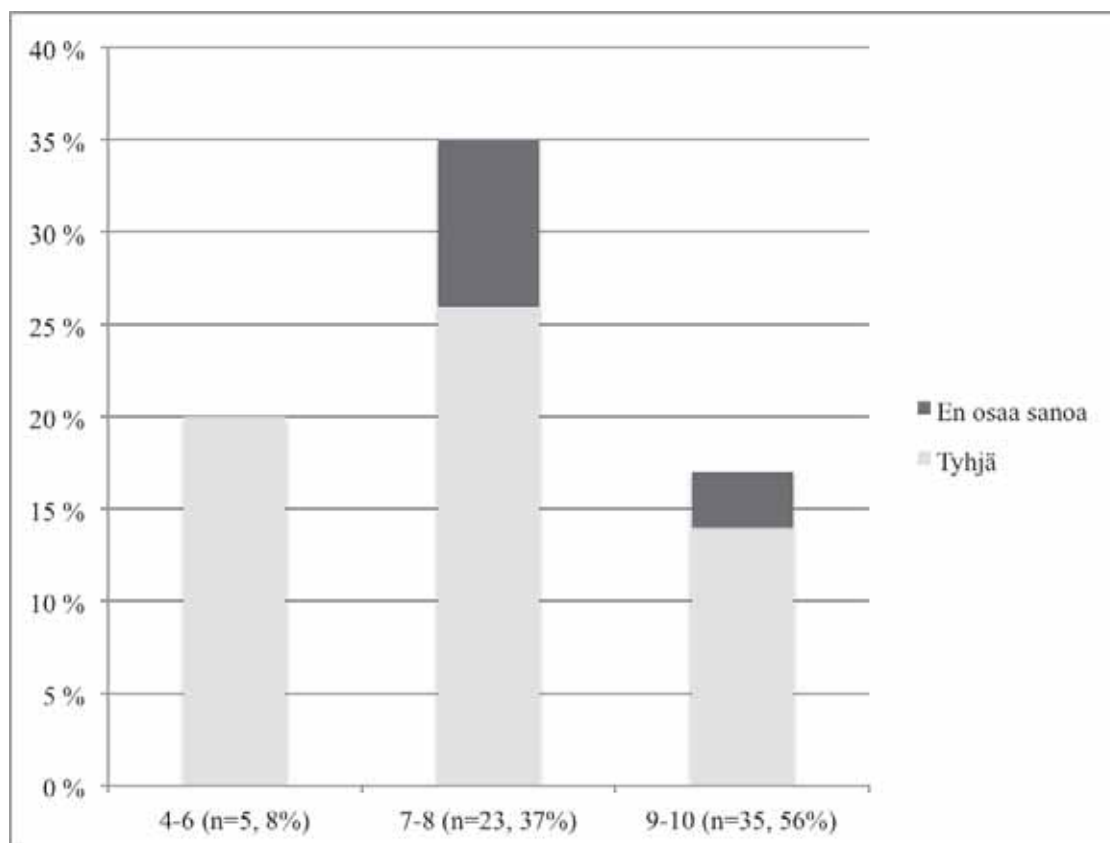
TAULUKKO 45. Yläotsikon ”Tyhjä tai en osaa sanoa” sukupuolijakaumat

Vastaajat (n=63)	Tytöt	Pojat	Yhteensä
KIELENTÄMISEN HUONOT PUOLET	n=53 (84%)	n=10 (16%)	n=63 (100%)
Tyhjä	11 (21%)	1 (10%)	12 (19%)
En osaa sanoa	2 (4%)	1 (10%)	3 (5%)
Yhteensä	13 (25%)	2 (20%)	15 (24%)

Arvosanoittain katseltuna heikoimmasta luokasta sijoittui 1 (20%), keskimmäisestä 8 (35%) ja parhaimmasta 6 (17%) lukeutui tähän yläotsikkoon. Tyhjäksi vastauskenttensä on jättänyt heikoimmasta arvosanalokasta 1 (20%), keskitasoisista 6 (26%) ja parhaimpaan luokkaan kuuluvista 5 (14%). Heitä, jotka eivät olleet osanneet sanoa mielipidettään ei ollut heikoimmasta luokasta yhtään, keskitasoisista 2 (9%) ja parhaimmista 1 (3%). (Ks. kuvio 34; liite 11(7)).

Keskimmäisen arvosanalokan edustajista reilu kolmasosa (35%) kuuluu epäröivien joukkoon, mikä tarkoittaa sitä, että kaikista yläotsikkoon kuuluvista vastaajista keskimmäiseen luokkaan kuuluvia on 53%. Tämä on mielenkiintoinen havainto ja huomattava määrä, mutta linjassa myös kielentämisen hyötyjen tulosten kanssa. Tulos kertoo lähinnä siitä että heille kielentämisessä ei välttämättä ole näin ollen näyttäytynyt selkeitä huonoja (eikä hyötyjä) puolia tai he ovat epävarmoja kannastaan suhteessa kielentämiseen eivätkä näin ole ehtineet muodostaa kantaansa kielentämiseen. Tämä tulkinta on tuttu ja lisäksi epävarmuus suhteessa kielentämiseen ei ole tavatonta ja yhtenä syynä tähän ovat Mäcklin ja Nikula (2010, 61) ajatelleet muun muassa liian lyhyttä aikaa tutustua aiheeseen. Tässä tutkimuksessa vastaajille ei oltu etukäteen puhuttu kielentämisestä, joten sekin vaikuttaa varmasti epävarmojen määrään yleisesti.

Toisaalta parhaimmasta arvosanaluokasta vain noin joka kuudennella (17%) on ollut hankaluuksia huonojen puolien ilmaisussa. Eli suhteessa ylin arvosanaluokka on edustettuna kaksinkertaisesti keskimmäviseen arvosanaluokkaan verrattuna kielentämisen huonojen puolien ilmaisussa. Tästä voidaan tulkita, että kielentäminen on synnyttänyt suhteellisesti huomattavasti eniten negatiivisia ilmauksia juuri lahjakkaimpien oppilaiden keskuudessa ja tulkinta on linjassa kielentämisen hyvien puolien ”Ei mitään hyötyä” yläotsikon tulosten kanssa.



KUVIO 34. Kannastaan epävarmojen vastaajien jakaumat arvosanaluokittain

Ei haittoja

Vain yksi vastaaja totesi, ettei kielentämisessä ole haittoja. Tämä on hyvin marginaalinen (2%) osa kaikista maininnoista, kuten myös parhaimman arvosanaluokan maininnoista (3%). Sukupuolensa edustajana poika edustaa 10% vastaajista, kuin myös 10% kaikista poikien ilmaisuista.

Joutsenlahden (2010, 10-11) tutkimukseen vastanneista peräti 18% oli sitä mieltä, ettei kielentämisessä ole mitään huonoja puolia. Lisäksi 5/7 tätä mieltä olleista oli tyttöjä. Näin ollen tämän tutkimuksen tulos eroaa oleellisesti Joutsenlahden tutkimuksesta. Yhtenä syynä voi olla se, ettei tämän tutkimuksen osallistuneille oltu selitetty etukäteen kielentämistä ja se oli siis heille täysin

uutta. Lisäksi kirjallista kielentämistä lähestyttiin Joutsenlahden tutkimukseen verrattuna eri suunnalta ja uusien tehtävien muodossa, joten tämän tutkimuksen vastaajilla oli varmasti suhteessa enemmän totuttelua tutkittavaan aiheeseen, eli kielentämiseen.

Tämän aineiston tuloksen suunta on kuitenkin eri, kuin Joutsenlahdella. Tässä tutkimuksessa tyttöjen ilmaisut tästä yläotsikosta puuttuvat, joten pojat näyttäisivät suhtautuvan kielentämiseen vähemmän kriittisesti kuin tytöt. Tällaisen johtopäätöksen teko on kuitenkin aineiston vinouden takia mahdotonta. Kuitenkin tämän suuntaisia viitteitä näyttäisi olevan olemassa.

Totaalinen tyrmäys

Edelleen pieni, mutta merkityksellinen havainto oli, että 2 (3%) ilmaisua oli sitä mieltä, ettei kielentäminen auta mitenkään. Molemmat ilmaisut tulivat tytöiltä ja ne edustavat 4% kaikista sukupuolensa ilmaisusta. Pojista kukaan ei ollut tätä mieltä. Osuus on pieni, eikä sukupuolten välillä voida tällä aineistolla todeta mitään merkitsevää eroa. Arvosanaluokittain katsottuna havaitaan, että kahdessa korkeimmassa luokassa ilmaisu on kertaalleen edustettuna, mutta merkitsevää eroa arvosanaluokkien välille ei voida tällä aineistolla kuitenkaan tulkita.

Vaikkei kahden ilmaisun perusteella voida johtaa mitään päätelmiä siitä kuka tyypillisimmin on ollut tätä mieltä, on tämän yläotsikon läsnäolo aineistossa merkitsevää ja antaa luotettavamman kuvan vastauksista kokonaisuudessaan.

Kielentämisen tuntemattomuus

Neljä ilmaisua (6%) kaikista ilmaisusta lukeutui tähän yläotsikkoon. Kuitenkin kuten edellä kuvasin (ks. luku 5.4.2), niin tämä yläotsikko on huomion arvoinen, sillä on tosiasia, että kielentäminen on käsitteenä tuntematonta tutkimukseen osallistuneille, tai ainakaan siihen ei ole erikseen heittä tämän tutkimuksen tiimoilta opastettu. Tämän takia onkin hyvä, että yläotsikko nousi aineistosta omalta osaltaan selittämään muita kielentämiseen liittyviä ilmiöitä.

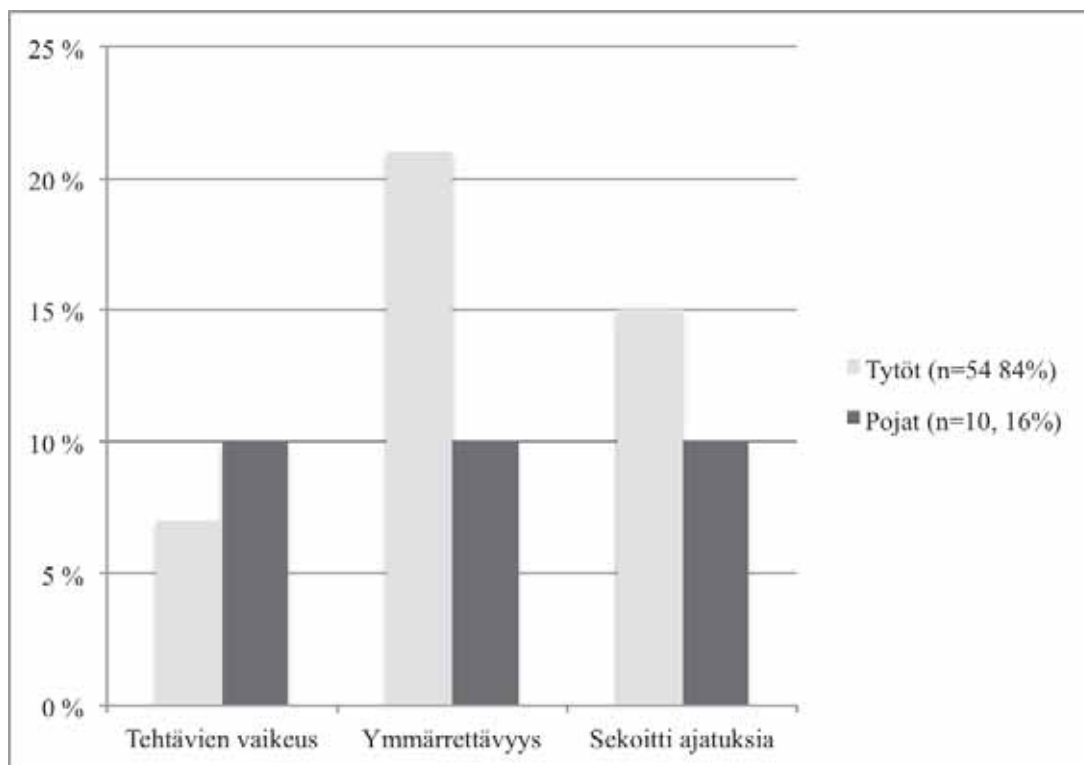
Yläotsikkoon liittyvistä ilmaisusta puolet tuli molemmilta sukupuolilta. Kuitenkin pojilta molemmat ilmaisut ja 20% kaikista poikien ilmaisusta liittyvät siihen ettei kielentämistä harjoitella matematiikan tunnilla ja tytöillä toinen ilmaisu liittyi kotona ilman apua tekemiseen. Lisäksi yksi tyttö ilmaisi tehtävistä tulevan stressiä. Ilmaisua stressiin liittyen tuli keskimmäisestä arvosanaluokasta, muuten ilmaisut tulivat kaikki parhaimman arvosanaluokan edustajilta.

Mikään näistä ilmiöistä ei varsinaisesti arvota kielentämistehtäviä, vaan pikemminkin pitävät sisällään pientä toivetta, että niitä tehtäisiin porukalla koulussa. Aineisto on vino sekä sukupuolen, että arvosanaluokkienkin suhteen, mutta havainto antaa viitteitä, että varsinkin ylimmässä arvosanaluokassa ja toisaalta poikien keskuudessa olisi olemassa pientä mielenkiintoa näitä uusia tehtäviä kohtaan, mutta ne koetaan vieraiksi.

Tehtävistä tullut stressi ja toisaalta kotona tehtävien tekeminen liittyvät vapaa-ajan käyttöön tehtävien parissa. Joutsenlahden tutkimuksessa (2010, 10) eniten huonojen puolien mainintoja (35%) saa ”Vie paljon aikaa”, joka ei näyttäydy tämän tutkimuksen aineistossa suoraan ollenkaan, mutta välillisesti tässä yläotsikossa. Selityksenä tutkimusten erilaisille tuloksille on se, että tutkimusten asetelmat ovat erilaiset siten, että Joutsenlahden tutkimuksessa vastaajat tekivät perinteisiä matematiikan tehtäviä kielentämismallien avulla, jolloin niiden tekeminen vei huomattavasti enemmän aikaa, kuin perinteisellä tavalla tehtynä.

Kielentämistehtävien haasteita

Selkeästi eniten kielentämisen huonoissa puolissa ilmauksia kerännyt yläotsikko oli kielentämistehtävien haasteet. Sitä koski peräti 26 (41%) kaikista ilmaisuista. Tyttöjen ilmaisuista 23 (43%) ja pojillakin 3 (30%) lukeutuu tähän yläotsikkoon. Tehtävien ymmärrettävyys on kaikista ilmaisuista kerännyt 12 (19%) ja tyttöjen kaikista ilmaisuista 11 (21%), joten sitä on pidettävä näiden tehtävien todellisena haasteena. 9 (14%) ilmausta koki tehtävien sekoittavan ajatuksia ja 5 (8%) ilmausta piti tehtäviä vaikeina.

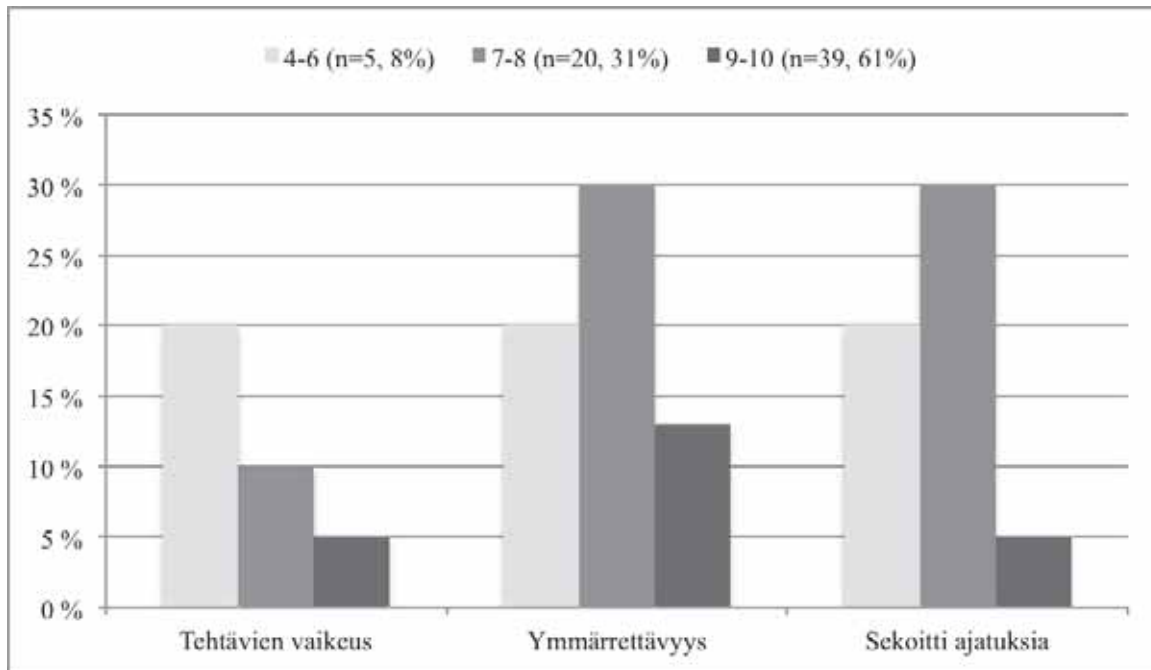


KUVIO 35. Yläotsikon ”Kielentämistehtävien haasteita” ilmiöiden ilmaisuosuudet sukupuolittain suhteutettuna

Kuviosta 35 voidaan tulkita, että nämä kielentämistehtävät olivat molempien sukupuolten ilmaisuissa hankalia ymmärtää ja toisaalta ne sekoittivat ajatuksia, joten ne myös luonnollisesti koettiin vaikeiksi. Pojilla ilmaisut jakautuvat yläotsikon ilmiöiden kesken tasan, kun taas tytöt kokivat poikia enemmän haasteeksi tehtävien ymmärrettävyyden ja sen, että ne sekoittivat ajatuksia. Ilmiössä ”Tehtävien vaikeus” ilmaisujen suhteellinen osuus on päinvastoin, että pojat kokivat sen suurempana haasteena. Ero on kuitenkin vain 3%-yksikköä, joten siitä ei voi tehdä tulkintoja mihinkään suuntaan. Sen sijaan varsinkin ilmiössä ”Ymmärrettävyys” sukupuolten välinen ero on yli kaksinkertainen, joten siinä ilmiössä näyttäisi olevan eroa sukupuolten välillä, joskin edelleen aineisto on vino ja tulkinnoissa täytyy olla varovainen.

Arvosanaluokittain tarkasteltuna tähän yläotsikkoon kuuluu erityisesti keskitasoisten (70%) ja heikkojen (60%) ilmaisut, joskin myös parhaimman arvosanaluokan ilmaisuista vajaa neljännes (23%) lukeutui yläotsikon ilmiöihin. Keskimmäisen arvosanaluokan ilmaisut ovat jakautuneet tasan ilmiöiden ”Ymmärrettävyys” ja ”Sekoitti ajatuksia” kesken (30%) ja ”Tehtävien vaikeus” on saanut ilmaisuista kolmasosan (10%) verrattuna näihin kahteen edellä mainittuun. Parhaimman arvosanaluokan ilmaisuista ilmiö ”Ymmärrettävyys” on saanut eniten (13%) ilmaisuja ja kaksi muuta ilmiötä noin kolmasosan (5%) tästä. Heikoimman arvosanaluokan ilmaisuosuudet ovat menneet tasan kolmelle ilmiölle, joskin heidän ilmaisujaan oli kaiken kaikkiaan vain viisi kappaletta, joten vertailu ilmiöiden ja muiden arvosanaluokkien välillä on haastavaa. Heikoimman arvosanaluokan ilmaisujen osuutta juuri tässä yläotsikossa tukee heidän iso tyhjien ja palauttamatta jääneiden vastausten yhteenlaskettu osuus (50%) kaikista heidän vastauksistaan (ks. luku 6.1). Eli he tosiaan kokivat tehtävät itsessään haasteellisina. Lisäksi huomionarvoista on, että kukin yläotsikon ilmiö on edustettuna jokaisen arvosanaluokan ilmaisuissa.

Tehtävien vaikeus ilmeni arvosanaluokittain vastauksissa varsin oletetusti ja tehtyjen tehtävienkin valossa täsmälleen samalla tavalla, että heikoimmat kokivat vaikeimmiksi ja vastaavasti vahvimmat vähemmän vaikeiksi. Kaikki arvosanaluokat pitivät ”Ymmärrettävyyttä” vähintään yhtä suurena kielentämistehtäviin kohdistuvana haasteena kuin muita yläotsikon ilmiöitä. Ylin arvosanaluokka piti tätä yksinomaan kaikkein suurimpana tehtävien haasteena, kun taas yhtä paljon ilmaisuja keskimmäisestä arvosanaluokasta sai ilmiö ”Sekoitti ajatuksia”. Tästä voi tulkita, että parhaimman arvosanaluokan vastaajat kokivat tehtävät vaikeaselkoisina, mutta heidän matemaattinen ajattelunsa oli keskimmäiseen arvosanaluokkaan verrattuna jäsentyneempää, jolloin he eivät kokeneet niiden kuitenkaan sekoittavan lopullisesti heidän ajatuksiaan.



KUVIO 36. Yläotsikon ”Kielentämistehtävien haasteita” ilmiöiden ilmaisuosuudet arvosanaluokittain suhteutettuna

Kielentäminen ja kielentämistehtävät olivat uusia vastaajille, joten yläotsikon saama ilmaisujen lukumäärä on ymmärrettävä. Tehtävien vaikeus ei ole tehtävien kannalta ongelma, mutta niiden epäselvyys on. Se, että ne sekoittivat ajatuksia, on kielentämistehtävien kannalta hyvin ongelmallista, koska tehtävien perimmäinen tarkoitus oli kirkastaa ja auttaa jäsentämään ratkaisijan omaa ajattelua ei päinvastoin. Omalta osaltaan tietysti tehtävänantojen vaikeaselkoisuus selittää tätä, mutta toisaalta myös kielentämisen tuntemattomuus aiheuttaa varmasti epävarmuutta tehtävien teossa ja ajattelussa.

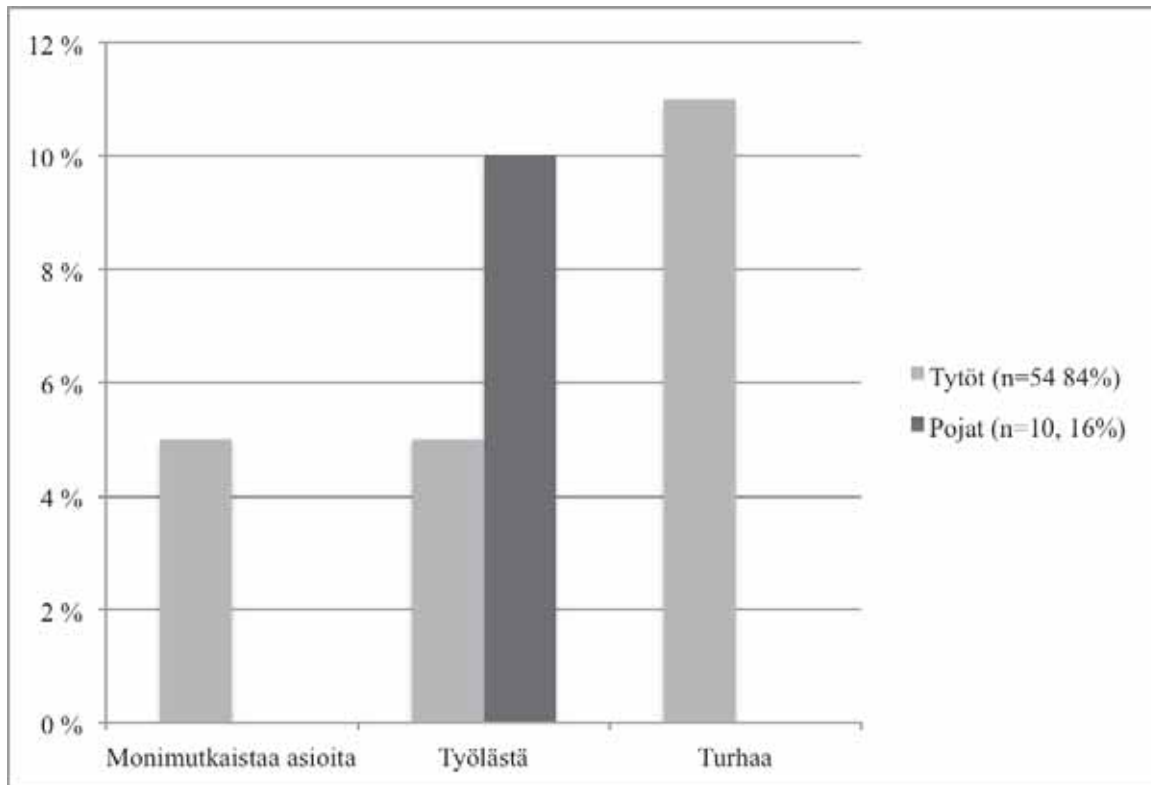
Ilmaisuja liittyen ”Ymmärrettävyyteen” ja ”Sekoitti ajatuksia” tuli kaikista arvosanaluokista yhteensä 21 (33%) kaikista huonoihin puoliin liittyneistä ilmaisuista, mikä on selkeä viesti. Näistä maininnoista yli puolet (57%) tuli keskimmaiselta arvosanaluokalta, mikä voisi selittyä sillä, että tehtävien tapa lähestyä asiaa oli ymmärtävä ei suorittava. Tällöin pelkkä peruslaskeminen ei enää riittänytkään ja tehtävissä tuli keskittyä ja antaa tapahtuvien proseduurien taustalla olevat merkitykset, mikä ei keskimmaisen arvosanaluokan edustajille ollut helppoa sekoittaen heidän ajatuk-sensa. Tätä tulkintaa tukee havainto palautetuista vastauksista, joissa juuri keskimmaisella arvosanaluokalla oli suhteessa kaikkein eniten vastauksia, joissa ei oltu osattu ollenkaan.

Kielentämistehtävien ja kielentämisen ominaisuuksia

Kielentämistehtävien ja kielentämisen ominaisuuksiin liittyviä ilmauksia oli 13 (20%) kaikista ilmauksista. 6 ilmaisua liittyi ilmiöön ”Turhaa” ja ne kaikki ovat tulleet parhaimpaan arvosanaluokkaan kuuluvilta tytöiltä. Myös työläisyys (4) ja monimutkaisuus (3) saavat mainintoja, mutta huomionarvoista on se, että keskimäinen arvosanaluokka ei ole ottanut kertaakaan ilmauksissaan kantaa yläotsikon ilmiöihin.

Tytöiltä tulleiden ilmaisujen (12) osuus näistä on suuri ja reilu viidennes (22%) tyttöjen kaikista ilmaisuista liittyi yläotsikon ilmiöihin. Tyttöjen ilmaisuissa korostuu kielentämisen turhana pitäminen, jota mieltä on ollut 6 (11%) tyttöjen ilmaisuista. Pojilla yläotsikon ilmiöistä vain ”Työlästä” saa maininnan ollen 10% heidän kaikista ilmaisuistaan. Joutsenlahden tutkimuksessa (2010, 10) kielentämistä piti työläänä 25% vastaajista, mikä on huomattavasti suurempi määrä kuin tässä tutkimuksessa. Kuitenkin Joutsenlahden tutkimuksen asetelma oli eri siinä suhteessa, että hänen tutkimuksessaan vastaajat tekivät perinteisiä matematiikan tehtäviä kielentämismallien avulla. Tästä syystä ne saattoivat tuntua vastaajista suhteessa työläämmiltä, kuin tämän tutkimuksen erityiset kielentämistehtävät, joiden tekemiseen ei ollut vastaajilla tarjolla mitään ”vähemmän työlästä” tapaa. Toinen selittävä tekijä tutkimusten erilaisiin tuloksiin on se, että Joutsenlahdella ”työläyden” alle lukeutuu muun muassa se, että osalla vastaajista oli vaikeuksia keksiä miten ilmaisisi ajatteluun kirjoittamalla (mt. 10-11). Tässä tutkimuksessa edellinen lukeutuu yläotsikon ”Kielentämisen haasteet” ja edelleen ilmiön ”Merkityksen tuottaminen” alle. Eli erona Joutsenlahden tutkimukseen, tässä tutkimuksessa vastaukset on jaettu huomattavasti yksityiskohtaisemmin omiin ilmiöihinsä, jolloin yksittäiset prosenttiosuudet jäävät luonnollisesti pienemmiksi.

Sukupuolten välillä on vaarallista lähteä toteamaan vinon jakauman ja vähien ilmauksien taakia mitään suurta, mutta vain tytöt (6) ovat ilmaisseet, että kielentäminen on turhaa. Hyötyjen kohdalla ”Ei mitään hyötyä” -yläotsikon vastaajista 82% oli tyttöjä ja toisaalta huonojen puolien yläotsikossa ”Totaalinen tyrmäys” oli edustettuna vain tytöillä (2) ja toisaalta ”Ei mitään” vain pojilla (1), joten on olemassa pieniä viitteitä siihen suuntaan, että jostain syystä tytöt kokivat kielentämisen tehtyjen kielentämistehtävien pohjalta poikia enemmän negatiivisena, turhana ja toisaalta hyödyttämänä.

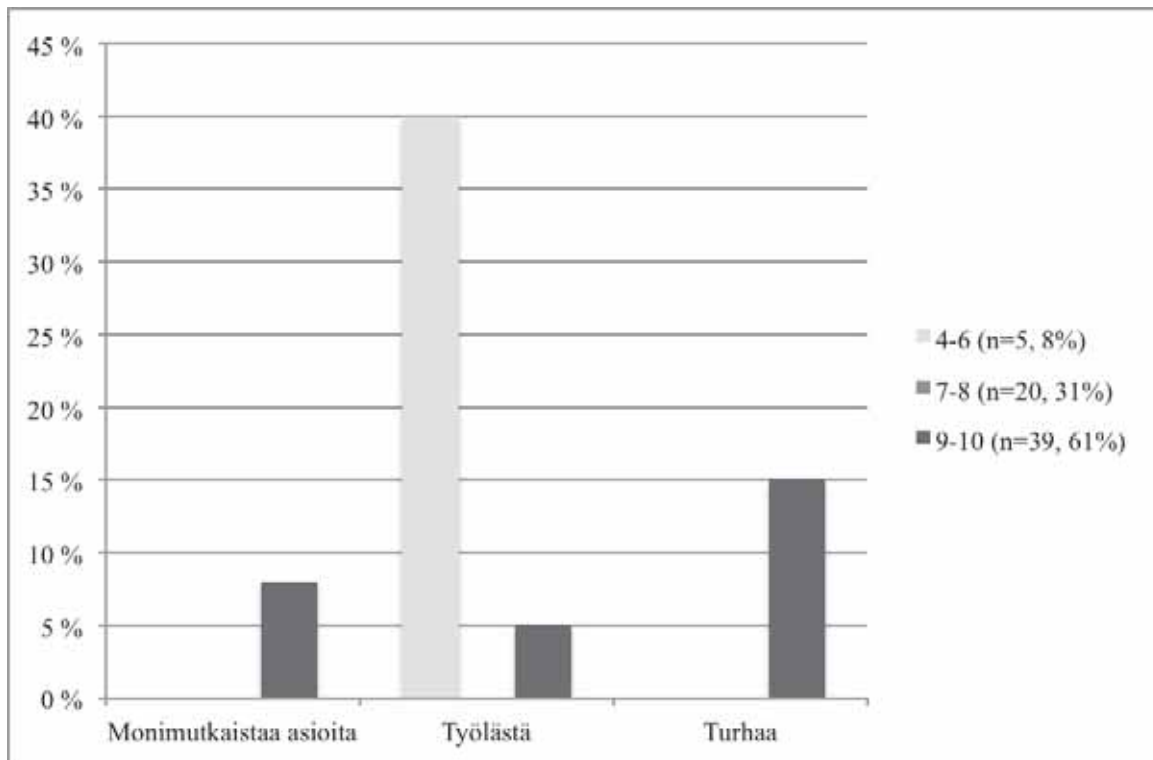


KUVIO 37. Yläotsikon ”Kielentämistehtävien ja kielentämisen ominaisuuksia” ilmiöiden ilmaisuosuudet sukupuolittain suhteutettuna

Arvosanoittain tarkasteltuna huomionarvoista on se, ettei yksikään keskimmaiseen luokkaan kuuluneista vastaajista ole antanut tähän yläotsikkoon liittyviä ilmauksia. Parhaimmasta arvosanalokasta 11 (28%) ilmausta lukeutuvat yläotsikkoon, joista reilu puolet (15%) on pitänyt kielentämistä tehtyjen tehtävien perusteella turhana ja tähän ilmiöön on ottanut kantaa vain kyseisen arvosanalokan vastaajat. Tämä on ymmärrettävää, sillä on helppo uskoa lahjakkaimpien oppilaiden osaan matematiikkaa ja toisaalta ymmärtävän matematiikan merkityksiä ilman erillistä kielentämistä. Tulkinta on saman suuntainen, kuin Joutsenlahdella (2010, 10). Osa parhaimman arvosanalokan edustajista (8%) koki, että kielentäminen monimutkaisti asioita. Tällä tavoin ilmaisseet vastaajat eivät siis kokeneet kielentämistehtävien tuovan lisäarvoa omalle matemaattiselle ajattelulle. Tällaista tulkintaa tukee myös aikaisemmat tutkimustulokset (ks. Mäcklin & Nikula, 2010, 59).

Heikoimman arvosanalokan ilmaisuista 2 (40%) piti kielentämistä tehtyjen tehtävien valossa työläänä ja parhaimmastakin arvosanalokasta ilmiö sai 2 (5%) ilmaisua. On helppo uskoa, että heikoimpaan arvosanalokkaan kuuluneet vastaajat pitivät kielentämistä työläänä, sillä jos aikoi ratkaista tehtävän, se tuli ensinnäkin lukea tarkkaan ja toisaalta ratkaisuunkaan ei ollut useinkaan oikotietä tai suoraa vastausta. Toisekseen palauttamatta jääneiden tehtävien osuus 33% tukee tulosta, että heikoimpaan arvosanalokkaan kuuluneet vastaajat kokivat tehtävät lähtökohtaisesti liian

työläinä edes yrittää. Kovin isoja tulkintoja heikoimmasta arvosanaluokasta ei voida kuitenkaan tehdä heidän lukumääränsä pienuuden takia.



KUVIO 38. Yläotsikon ”Kielentämistehtävien ja kielentämisen ominaisuuksia” ilmiöiden ilmaisuosuudet arvosanaluokittain suhteutettuna

Yläotsikon saamiin ilmaisiin uskon taustalla vaikuttavan myös kielentämistehtävien tuntemattomuuden, sillä uusi asia ja uusi tapa lähestyä matematiikkaa tuntuu varmasti työläältä ja toisaalta saattaa tuntua turhalta ja vain monimutkaistavan totuttua tapaa ajatella ja tehdä matematiikkaa. Sen sijaan keskimmäisen arvosanaluokan kokonaan puuttuminen tästä yläotsikosta on mielenkiintoinen havainto.

Havainto kertoo, että kielentämistehtävät eivät näyttäytyneet keskimmäisen arvosanaluokan edustajille vain epämääräisen työläinä tai monimutkaistavan asioita sen enempää, kuin tavallisetkaan tehtävät. Heille ne eivät myöskään olleet turhia. Palautetuista vastauksista saatiin tulos, että arvosanaluokittain katsottuna suurin vastausten suhteellinen osuus kategoriassa ”Ei osattu ollenkaan” tuli juuri keskimmäiseltä arvosanaluokalta. Toisin sanottuna, he olivat yrittäneet ratkaista tehtäviä, mutta ratkaisu oli ollut täysin väärin. Edellisessä yläotsikossa olen todennut, että keskimmäisen arvosanaluokan edustajat kokivat juuri kielentämistehtäviin liittyvät haasteet suurimpina kielentämisen huonoina puolina. Tosin sanottuna tehtävien työläys ei muodostunut heille on-

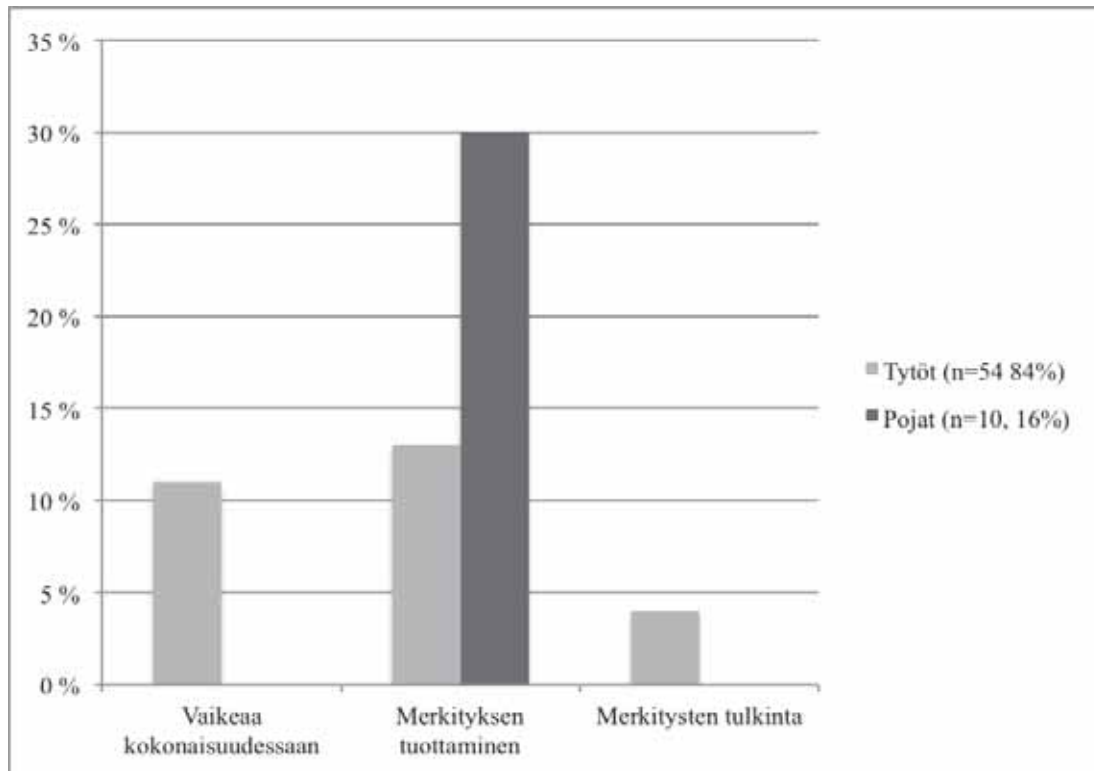
gelmaksi, vaan työläyden tekevät asiat, kuten tehtävien vaikeus, niiden ymmärrettävyys, kuin myös se, että he kokivat niiden sekoittavan heidän ajatuksiaan.

Kielentämisen haasteita

Kielentämiseen itsessään liittyviä ilmaisuja oli kaikista ilmaisuista 18 (28%). Eli reilu neljännes koki kielentämisen jollain tapaa haastavana. Merkityksen tuottamista piti 10 ilmaisua vaikeana ja 2 ilmaisua korosti merkityksen tulkintaa. 6 ilmaisua piti ylipäätään kielentämistä vaikeana ilman erittelyä. Sukupuolittain ilmaisut ovat aineiston mukaan suhteellisesti lähes tasan. Arvosanoittain katsottuna heikoin puuttuu kokonaan, parhaimman ilmaisuista 14 (36%) ja keskimmäisen arvosanaluokan ilmaisuista 4 (20%) lukeutuu yläotsikkoon. Näin ollen yleisesti katsottuna itsessään kielentämisen haasteisiin on ottanut ilmaisullaan kantaa sitä enemmän mitä parempaan arvosanaluokkaan vastaaja on kuulunut sukupuolesta riippumatta.

Tytöillä ilmaisut ovat jakaantuneet aika tasaisesti siten, että ilmaisuja on saanut ilman erittelyä vaikeana pitäminen 6 (11%) ja merkityksen tuottamisen vaikeus 7 (13%). Lisäksi tyttöjen ilmaisuista 2 (4%) lukeutuu ilmiöön ”Merkityksen tulkinta”. Poikien yläotsikon ilmaisuista kaikki 3 (30%) on kokenut juuri merkityksen tuottamisen haastavana.

Molemmat sukupuolet ovat kokeneet merkityksen tuottamisen kielentämisen haasteista isoimpana, mikä on täysin uskottavaa ja ymmärrettävää, sillä sitähan kielentäminen pohjimmiltaan juuri on. Poikien ilmaisuja on kaiken kaikkiaan vain kymmenen kappaletta, joten heidän yksittäisillä ilmaisuillaan on suhteessa suurempi vaikutus, joten eroa sukupuolten välillä on haastavaa tulkita. Tyttöjen osuus ilmiössä ”Vaikeaa kokonaisuudessaan” on yli kymmenen prosenttia, joten periaatteessa pojillakin ilmiö voisi näkyä. Edelleen kuitenkin aineisto on liian vino, jotta tästä voisi jotain isompia tuloksia tulkita.



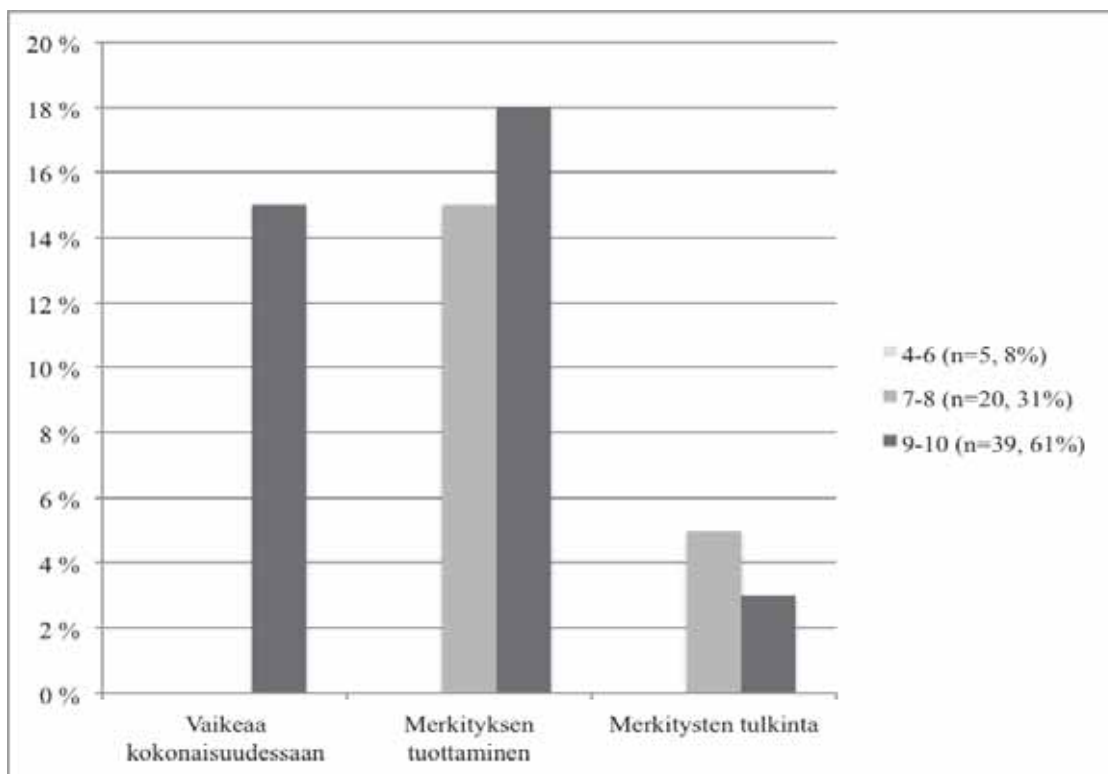
KUVIO 39. Yläotsikon ”Kielentämisen haasteita” ilmiöiden ilmaisuosuudet sukupuolittain suhteutettuna

Ensimmäinen huomio kuvioista 40 on se, ettei heikoimman arvosanaluokan ilmauksista yksikään ole maininnut kielentämiseen itsessään liittyviä haasteita. Korkeimpaan luokkaan kuuluneiden vastaajien ilmaisuista reilu kolmannes (36%) lukeutuu tähän yläotsikkoon. Keskimmäisen luokan ilmaisuista viidennes löytyy tästä yläotsikosta.

Merkityksen tuottaminen nousee ilmaisuista molemmilla arvosanaluokilla saaden yhteensä 56% yläotsikon ilmaisuista. Myös merkityksen tulkinta saa molemmilta arvosanaluokilta suhteessa lähes saman verran ilmaisuja. Näiden kahden ilmiön lisäksi kielentämistä piti vaikeana ilman erittelyä 15% vain korkeimman arvosanaluokan edustajista.

Edelleen on luonnollista, että merkityksen tuottaminen saa muita ilmiöitä enemmän ilmaisuja ja toisaalta ilmaisujen jakautuminen lähes tasan kahden ylimmän arvosanaluokan välillä kahdessa merkityksiin liittyvässä ilmiössä on myöskin viesti siihen suuntaa, että arvosanaluokasta riippumatta ennen kaikkea merkityksen tuottaminen, mutta myös tulkinta on haastavaa. Havainto on luonnollinen, koska merkitysten tuottamiseen ja tulkintaan liittyy aina ajatusprosessi pelkän suoritettavan proseduurin sijaan ja ajattelun kuormittavuuden tulisikin olla suhteessa yhtä isoa riippumatta matemaattisista kyvyistä.

Vain korkeimman arvosanaluokan edustajat ja heissä vielä vain tytöt ovat pitäneet kielentämistä vaikeana kokonaisuudessaan ilman erittelyä. Tämä on mielenkiintoinen huomio ja houkuttelee tulkitsemaan parhaimpaan arvosanaluokkaan kuuluneiden tyttöjen suhtautuneen kielentämiseen ja tehtyihin tehtäviin jotenkin poikkeavalla tavalla muihin vastaajaryhmiin nähden. Suoranaista tällaista tulkintaa ei voida kuitenkaan tällä aineistolla tehdä.



KUVIO 40. Yläotsikon ”Kielentämisen haasteita” ilmiöiden ilmaisuosuudet arvosanaluokittain suhteutettuna

Mielenkiintoista on se, ettei heikoimmasta luokasta löytynyt yhtään ilmaisua kielentämisen haasteisiin ja edelleen sen vaikeuteen liittyen, mutta toki osa oli pitänyt tehtäviä vaikeina ja toisaalta palauttamatta jääneiden vastausten suuri osuus kertovat omaa kieltään siitä, että varmasti myös kielentäminen on ollut heille vaikeaa. Jakauma on hyvin vino, mutta tällä aineistolla on merkkejä, että heikot eivät ole päässeet tehtävien ”pintakerroksen läpi” tehtävän varsinaiseen ytimeen eli kielentämiseen. Näin ollen he eivät ole osanneet eritellä tehtävien vaikeuden synnyttämiä asioita. Toisin sanottuna sanoa sitä, mikä tehtävissä oli vaikeaa. Tällaisen tulkinnan tekeminen on tällä aineistolla riskialtista, mutta toisaalta kannustaa siihen, koska merkityksen tuottaminen ja tulkinta ovat kielentämisessä aivan oleellisimpia asioita ja juuri sitä vaikeaa kielentämisen ja siis myös näiden tehtävien ydintä, joka onnistuessaan jäsentää ratkaisijan ajattelua.

Yläotsikon saamien ilmaisujen taustalla uskon myös kielentämisen tuntemattomuuden vaikuttavan, sillä uusi asia se omine erityisine ”naulankantoinen” on usein aluksi vaikeaa. Metaforana kielentämisen naulankantana on merkityksen tulkinta ja tuottaminen, joihin osuessaan ”kielentämisen naula” uppoaa puuhun eli kielentäjän matemaattinen ajattelu jäsentyy.

7 TULOSTEN JOHTOPÄÄTÖKSET

Tutkimustehtävänä minulla oli selvittää mitkä kielentämistehtävän ominaisuudet ovat tärkeitä ottaa huomioon niiden suunnittelussa, sekä onko kielentämistehtävillä mahdollista saada kielentämisen hyötyjä irti ilman erillistä oppilaiden perehdyttämistä kielentämisen maailmaan lukion lyhyessä matematiikassa ja tässä tutkimuksessa erityisesti MAB3 Matemaattisia malleja 1 -kurssilla. Kysymyksinä minulla oli:

Kielentämistehtävät opettajan näkökulmasta:

1. Miten opiskelijat ovat osanneet kielentämistehtäviä?
2. Miten matemaattinen ajattelu ja -osaaminen tulevat esiin tehtävien vastauksissa?

Kielentämistehtävät oppilaan näkökulmasta:

3. Miten opiskelijat suhtautuvat näihin uudentyyppisiin tehtäviin?
4. Miten oppilaat kokevat kielentämistehtävät suhteessa matematiikan osaamiseensa?

Mielipiteet ja asenteet matematiikkaa ja kielentämistä kohtaan tehtyjen tehtävien pohjalta:

5. Minkälaisia tyttöjen ja poikien mielipiteet ja asenteet ovat suhteessa toisiinsa?
6. Minkälaisia matematiikassa heikosti (arvosanat 4-6), keskitasoisesti (arvosanat 7-8) ja hyvin (arvosanat 9-10) suoriutuvien opiskelijoiden mielipiteet ja asenteet ovat suhteessa toisiinsa?

Kielentämistehtävät tutkijan näkökulmasta:

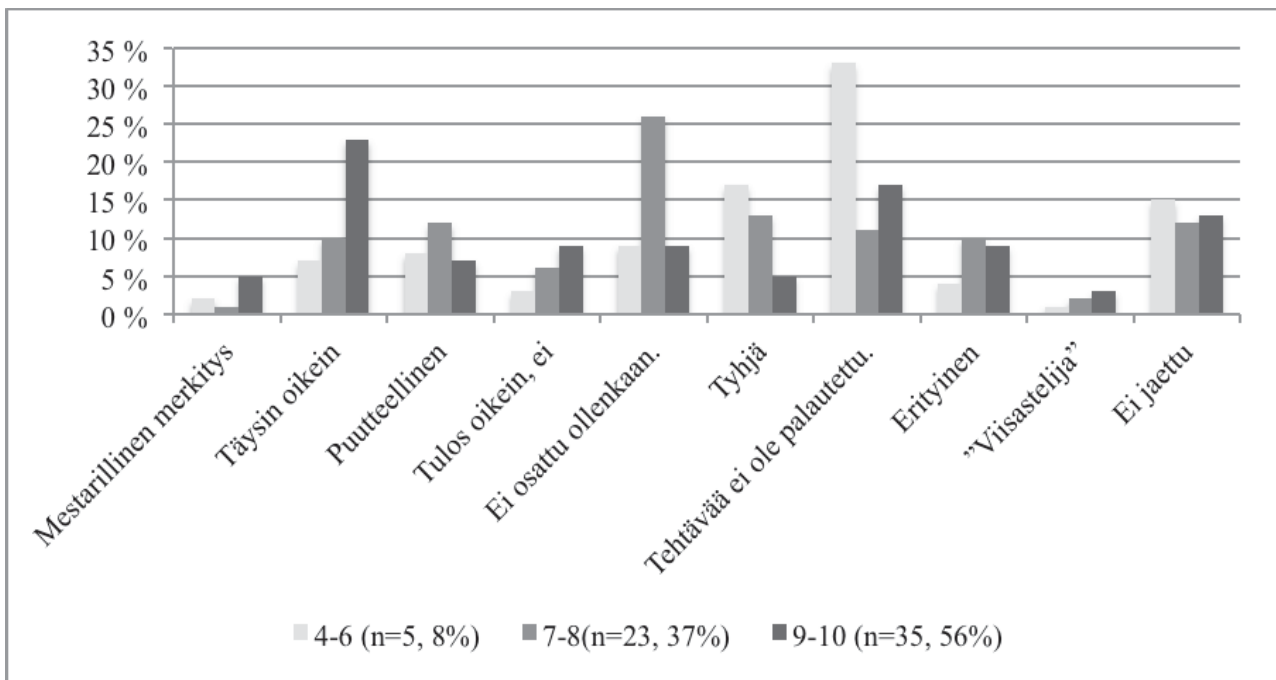
7. Mitkä ominaisuudet tekevät kielentämistehtävästä onnistuneen?

7.1 Opettajan näkökulma

Opettajan näkökulmasta tehtäviä on helppo lähestyä tarkastelemalla miten yleisesti ottaen eri arvosanaluokat osasivat tehdä tehtäviä. Kuviossa 41 on esitetty eri vastauskategorioiden prosenttiosuudet arvosanaluokittain. Siitä on luettavissa, että parhaimpaan arvosanaluokkaan kuuluneet vastaukset keskittyivät kategorioihin ”Täysin oikein” ja ”Tehtävää ei ole palautettu.” Keskimmäisen arvosanaluokan vastaukset keskittyivät ”Ei osattu ollenkaan.” -kategoriaan. Heikoimman arvosanaluokan vastaukset korostuivat kategorioissa ”Tyhjä” ja ”Tehtävää ei ole palautettu.”

Näyttäisikin siltä, että keskitasoiset vastaajat ovat yrittäneet, vaikka eivät ole osanneet tehdä ja toisaalta pieni palauttamattomien tehtävien osuus antaisi viitteitä siitä, että heillä on siis ollut

mielenkiintoa tehdä tehtäviä. Sen sijaan parhaimman arvosanaluokan vastaajat ovat osanneet tehdä tehtäviä, mutta toisaalta heidän iso suhteellinen osuus palauttamattomien joukossa kertoo toisaalta myös siitä, että he eivät ole kokeneet tehtäviä jostain syystä hyödyllisinä tai mielekkäinä tehdä. Tulkintaa tukee avointen kysymysten tulos. Heikoimpaan arvosanaluokkaan kuuluneiden vastaajien vastauksista 49% kuuluu kategorioihin ”Tyhjä” tai ”Tehtävää ei ole palautettu.”, joten näyttäisi siltä, että kielentämistehtävät olivat erityisen haastavia heille tuottaa minkäänlaista vastausta.



KUVIO 41. Vastauskategoriaosuudet arvosanaluokittain suhteutettuna

Vastauksen sijoittumisella eri vastauskategoriaan ja vastaajan arvosanaluokalla oli selvä yhteys (ks. taulukko 11 ja kuvio 41). Toisin sanottuna parempaan arvosanaluokkaan kuuluvat vastaajat osasivat tehdä tehtäviä paremmin ja päinvastoin. Sen sijaan, että vastaukset olisivat tyytyneet näyttämään osasiko vastaaja tehdä tehtävän vai ei, ne myös paljastivat paljon vastaajien matemaattisesta ajattelusta. Vastaajat olivat osanneet laskea ja toisaalta he olivat päätyneet usein oikeisiin tuloksiin, mutta toisaalta tehtävät paljastivat myös monenlaista osaamattomuuttakin, kuten laskuvirheitä sekä ymmärtämättömyyttä suhteessa kuvaan ja symboleihin. Kenties tärkeimpänä tuloksena opettajan näkökulmasta on se, että vastaajat osasivat pääsääntöisesti tehdä laskuproseduureja ja näyttivätkin usein tietävän kysymykseen ”Mitä tehdä?” vastauksen, mutta ”Miksi tehdä?” -kysymys merkityksineen jäi ilman vastausta useimmilla. Ainakin sen vastauksen kielentäminen oli huomattavan hankalaa. Tästä esimerkkinä vaikka eksponenttifunktioitehtävän a-kohta (ks. liite 5(1)), jossa

tuli selittää muuttujan x rooli funktiossa. Useat olivat taulukoineet tehtävässä funktion arvoja eri muuttujan arvoilla, mutta todellinen muuttujan merkitys jäi silti kielentämättä.

Analyysiosiosassa sekä liitteessä 10 on tarkemmin jaoteltu vastauskategorioiden sisältämiä vastauksia, mutta opettajan näkökulmasta tärkein tuloksista saatava johtopäätös on, että nämä tehtävät antoivat laajasti (*horisontaalisesti*, ks. luku 2.5) tietoa vastaajan matemaattisesta ajattelusta ja avasivat niitä pieniä yksityiskohtia vastaajan osaamattomuuden ”verhon” takaa. Toisin sanoen kielentämistehtävät antoivat merkityksiä oppilaiden osaamiselle tai osaamattomuudelle, jolloin opettajana näihin löytyneisiin merkityksiin on mahdollista tarttua ja auttaa oppilasta jäsentämään omaa ajatteluaan eteenpäin ja ymmärtämään matematiikkaa entistä eheämmin. Näin ollen kielentämistehtävät voivat toimia opettajalle hyödyllisenä työkaluna apuna ymmärtää oppilaidensa matemaattista ajattelua entistä syvemmin (*vertikaalisesti*, ks. luku 2.5).

7.2 Oppilaan näkökulma

Oppilaat suhtautuivat kielentämisen hyötyihin tehtyjen kielentämistehtävien pohjalta kaksijakoisesti. Toisaalta niitä pidettiin monella eri tapaa hyödyllisenä, mutta samaan aikaan niistä ei koettu olevan mitään hyötyä. Kaikista vastaajista 17% oli tätä mieltä ja korkeimman arvosanaluokan edustajista peräti 23% lukeutui tähän joukkoon ollen kyseisen arvosanaluokan suhteessa eniten ilmaisia kerännyt yläotsikko ja ilmiö 9 ilmaisullaan ja 29% ilmaisuosuudellaan arvosanaluokassaan. Siis suhteessa eniten kielentämisestä ei kokenut olevan mitään hyötyä kiitettävän arvosanan vastaajat sukupuolesta riippumatta. Tulosta tukee kielentämisen huonojen puolien havainto, että kahdesta parhaimmasta arvosanaluokasta löytyi vastaajat, jotka tyrmäsivät kielentämisen totaalisesti.

Heikoin arvosanaluokka ilmaisi hyötyjä yläotsikoissa ”Ymmärtäminen” ja ”Laskuprosessin hahmottaminen”. Nämä kaksi yläotsikkoa suhtautuivat toisiinsa, siten että korkeimman arvosanaluokan vastaajat painottivat suhteessa hieman enemmän näistä kahdesta ymmärrystä, kuin alemmat arvosanaluokat. Ymmärrystä korosti 18% ilmauksista ja ne kaikki tulivat tytöiltä. Laskuprosessia korosti 25% kaikista ilmauksista ja pojat (50%) korostivat tätä yläotsikkoa suhteessa noin kaksi kertaa useammin kuin tytöt (21%). Yksittäisistä ilmiöistä ”Hahmotukseni parani” keräsi ilmaisia tasaisesti sekä kaikilta arvosanaluokilta, että molemmilta sukupuolilta ja lisäksi se sai 11% kaikista tutkimuksen ilmaisuista ollen tutkimuksen ilmiöiden jaotulla ensimmäisellä sijalla positiivisissa kielentämisen hyödyissä. Näyttäisikin siltä, että tämän aineiston mukaan pojat arvostivat kielentämistehtävien hyötyjä suhteessa enemmän proseduraaliselle tiedolle, kun vastaavasti tytöt näkivät konseptuaalisen tiedon olevan ensisijalla (ks. tiedonlajit, luku 2.4.2).

Kielentämisen vaikutuksia toimintaan korosti 18% ilmaisuista. ”Ajattelun syventyminen” oli koko tutkimuksen ilmiöistä ilmaistu jaetulla ensimmäisellä sijalla niin ikään 11% ilmaisuosuu-
dellaan kaikista ilmaisuista. Erityisesti parhaimman arvosanaluokan vastaajat painottivat tätä ajat-
telun toimintaa, kun taas keskimmäisen arvosanaluokan ilmaisut keskittyivät konkreettisen toimin-
nan ilmiöihin. Pojilla korostui suhteessa tyttöjä enemmän henkilön sisäinen toiminta, kun taas ty-
ttöillä näyttöä asioiden ulkoapäin kertaaminen.

Kielentämisen tuomiin käytännön hyötyihin ja parantuneisiin asenteisiin otti kantaa 20% il-
maisuista, jotka kaikki tulivat tytöiltä. Yläotsikon ilmaisut olivat 23% kaikista tyttöjen ilmaisuista.
Poikien ilmaisujen puuttuminen selittyy osin hieman parempana yleisenä motivaationa ja asente-
na matematiikkaa sekä ongelmanratkaisua kohtaan, mikä näkyy mielipideväittämien tuloksissa.
Keskimmäisen arvosanaluokan ilmaisuista 17% koki kielentämisen helpottavan ratkaisua, mikä on
eniten kyseisen arvosanaluokan ilmaisuja kerännyt yksittäinen ilmiö. Paras arvosanaluokka painot-
ti ilmaisuissaan muistamisen helpottumista ja motivaation kasvua, jotka omalta osaltaan silottavat
tietä kohti päämäärää, eli helpottavat ratkaisua.

Kielentämisen huonot puolet jakaantuivat kuuteen yläotsikkoon, joista kolme liittyi suoraan
kielentämiseen tai tehtyihin tehtäviin ja niiden ominaisuuksiin. Kolme muuta pientä, mutta merki-
tyksellistä yläotsikkoa olivat ”Totaalinen tyrmäys”, johon lukeutui kahdesta ylimmästä arvosana-
luokasta molemmista yksi tyttö. Yläotsikkoon ”Ei haittoja” lukeutui yksi korkeimman arvosana-
luokan poika. Yläotsikkoon ”Kielentämisen tuntemattomuus” otti kantaa suoraan vain 4 ilmaisuja,
mutta yläotsikon läsnäolon ymmärtäminen on välttämätöntä tulosten tulkinnan kannalta. Ilmaisuis-
ta 89% jakaantui kolmelle eniten ilmaisuja saaneelle yläotsikolle. Nämä yläotsikot olivat ”Kielen-
tämistehtävien haasteet” (41%), ”Kielentämisen haasteet” (28%) ja Kielentämistehtävien ja kielen-
tämisen ominaisuudet” (20%).

Kielentämistehtäviin otti kantaa 41% kaikista ilmaisuista, mikä on todella merkittävä määrä.
Tehtävien ymmärrettävyyttä piti haastavana 19% ilmaisuista siten, että tytöillä ilmaisut ovat 21%
heidän ilmaisuistaan ja pojilla 10%. Näyttäisi siltä, että tytöt ovat kokeneet tehtävät hieman poikia
enemmän haasteellisena ymmärtää. Erityisesti keskimäinen (70%) ja heikoin (60%) ar-
vosanaluokka ovat kokeneet kielentämistehtävät haasteellisina ja erityisesti heillä ”Ymmärrettä-
vyys” korostui ilmaisuissa. Se olikin kaikkein eniten ilmaisuja kerännyt yksittäinen ilmiö. Kuiten-
kin myös parhaimman arvosanaluokan ilmaisuista 23% lukeutuu tähän yläotsikkoon. Kaksi alinta
arvosanaluokkaa koki tehtävien sekoittavan heidän ajatuksiaan suhteessa huomattavasti enemmän
kuin paras arvosanaluokka ja sitä vaikeampana tehtäviä piti mitä heikompaan arvosanaluokkaan
vastaaja kuului.

Kielentämistehtävien ja kielentämisen ominaisuuksiin lukeutui 20% kaikista ilmaisuista. Keskimäinen arvosanaluokka ei antanut yhtään yläotsikkoon liittyviä ilmaisuja. Heikoin arvosanaluokka piti tehtäviä työläänä. Tehtävät olivat lähtökohtaisesti heikoimman arvosanaluokan vastaajille liian työläitä edes yrittää, josta kertoo suuri palauttamatta ja vastaamatta jääneiden tehtävien osuus (49%) heidän vastauksistaan. Keskimäiselle arvosanaluokalle tehtävien työläisyys ei ole ollut ongelma, vaan lähinnä edellisen kappaleen asiat, kuten ymmärrettävyys. Vain parhaimman arvosanaluokan vastaajien tytöt (11%) pitivät kielentämistä turhana. Arvosanaluokittain havainto on ymmärrettävä, mutta poikien puuttumisesta ilmiöstä ei voida aineiston vinouden takia tehdä suuria johtopäätöksiä.

Kielentämisen haasteisiin lukeutui 28% ilmaisuista. Yläotsikko oli parhaimman arvosanaluokan eniten ilmaistu yläotsikko 36% ilmaisuosuudellaan. Merkityksen tuottaminen koetaan suurimmaksi kielentämisen haasteeksi, kun yhteensä 56% yläotsikon ilmaisuista mainitsee tämän. Suhteellisesti yli kaksinkertainen määrä poikien (30%), kuin tyttöjen (13%) ilmaisuista lukeutuu tähän. Arvosanaluokittain tähän yläotsikkoon on lukeutunut sitä enemmän ilmaisuja, mitä parempaan arvosanaluokkaan vastaaja on kuulunut ja heikoimmasta arvosanaluokasta ei olekaan yhtään ilmaisua. Nämä ilmaistut haasteet ovatkin olleet itsessään laadullisia kertoen tarkemmin kielentämisen toimintaan kohdistuvista haasteista, jolloin vastaajan on täytynyt pystyä erittelemään tarkemmin se, mikä on ollut haastavaa.

Edelleen tärkeä johtopäätös tästä on se, että parhaimman arvosanaluokan vastaajat ovat pitäneet kielentämistä ongelmallisena, kun taas keskitasoisille ja heikoimmille tehtävät tehtävänantoinen ovat muodostuneet suurimmaksi ongelmaksi. Lisäksi jälleen 6 ilmaisua (11%) parhaimman arvosanaluokan työistä muodostaa oman ilmiönsä ”Vaikeaa kokonaisuudessaan”. Sukupuolijakaumat ovat hyvin vinot, joten suurempia johtopäätöksiä ei voida tällä aineistolla edelleenkään tehdä, mutta aineisto antaa viitteitä, että poikien ja tyttöjen välillä on olemassa näkemuseroa suhtautumisessa tehtyihin kielentämistehtäviin.

7.3 Mielipiteet ja asenteet

Mielipide- ja asenneväittämissä epäröivien vastaajien osuus oli iso, kun 31% kaikista vastauksista lukeutui ”En osaa sanoa” -kohtaan. Arvosanaluokittain katsottuna mitä parempaan arvosanaluokkaan vastaaja kuului, sitä positiivisemmin hän suhtautui omaan matematiikan osaamiseensa sekä uskoonsa, että matematiikka on hänelle helpompaa kuin muille.

Sukupuolittain katsottuna pojat uskovat itseensä matematiikan osaajina hieman tyttöjä enemmän ja he pitävät enemmän vaikeista tehtävistä ja ovat valmiimpia työskentelemään pitkän-

kin ajan sellaisten ratkaisemiseksi. Lisäksi pojat ovat kiinnostuneempia matemaattisista ongelmista kuin tytöt. Pojat kokivat kielentämisestä olevan hyötyä ennen kaikkea heille itselleen, kun taas tytöt näkivät siitä olevan hyötyä ratkaisun lukijalle. Keskimmäiseen arvosanaluokkaan kuuluvat vastaajat ovat suhtautuneet hieman parhaimpaan arvosanaluokkaan kuuluneita vastaajia positiivisemmin kielentämisen hyödyistä itselleen, kun taas paras arvosanaluokka on kokenut hieman positiivisemmin kielentämisen hyödyt ratkaisun lukijalle.

Kaikki vastaajat suhtautuivat kirjoittamiseen positiivisesti, mutta tytöt (77%) suhtautuivat vielä hieman poikia (60%) positiivisemmin. Kuitenkaan tytöt eivät kokeneet kirjoittamisen lisäävän heidän mielenkiintoaan matematiikkaa kohtaan. Parityöskentelyn koettiin olevan hyödyllistä ymmärtämisen kannalta, mutta tytöt kokivat matematiikan tekemisen parin kanssa mukavammaksi kuin pojat. 8% vastaajista koki tietokoneella matematiikan tehtävien tekemisen mielekkääksi ja 62% suhtautui asiaan kielteisesti, mihin pojat suhtautuivat hieman positiivisemmin kuin tytöt.

Aineisto antaa viitteitä siihen suuntaan, että pojat suhtautuisivat tyttöjä rakentavammin uusiin tehtäviin ja niiden mukana tuleviin haasteisiin. Tytöt kokivat poikia enemmän kielentämisen olevan hyödyttöntä, täysin turhaa ja toisaalta pitivät sitä vaikeana ilman erillistä erittelyä, kun taas pojat kokivat ettei kielentämisessä ole mitään huonoa ja toisaalta osasivat eritellä mikä tehtävissä tai tekemisessä oli hankalaa. Erityisesti parhaimman arvosanaluokan tytöt muodostivat oman mielenkiintoisen marginaaliryhmänsä, jonka asenne tehtäviin oli epämääräisen negatiivinen.

7.4 Tutkijan näkökulma

Edellä mainittu tehtävien tarkastajalleen antama vastausten merkitysten kirjo yhdistettynä siihen, että aina joku parhaimman arvosanaluokan vastaajista oli osannut tehtävän täysin oikein, kertovat siitä etteivät tehtävät olleet täysin epäonnistuneita. Kuitenkin puuttuvien ja tyhjien vastausten suuri osuus varsinkin heikon arvosanaluokan keskuudessa (49%) herättää kysymään kenelle nämä ”ei täysin epäonnistuneet” tehtävät olivat suunnattuja. Heikoimmasta arvosanaluokasta oli vain 5 vastaajaa, joten yhdenkin vastaajan vastaus tai vastaamatta jättäminen näkyy heti tilastoissa voimakkaasti, joten liiallisten johtopäätösten tekeminen on riskialtista ja koska heikoimmankin arvosanaluokan vastauksissa oli näkyvissä myös osaamista, en pidä tehtäviä pelkästään jo valmiiksi hyvillä laskijoille suunnattuna. Edellä mainitussa opettajan näkökulmassa tuli hyvin esiin se, että keskitasoiset vastaajat olivat kunnostautuneet tehtävien palauttamisessa toisin sanottuna yrittämisessä muita luokkia paremmin.

Avoimien kysymysten kielentämisen hyödyt nostivat hämmästyttävän hyvin matematiikan eri osa-alueet keskusteluun. Kaikki osa-alueet, kuten *käsitteellinen ymmärtäminen*, *proseduraali-*

nen sujuvuus, strateginen kompetenssi, mukautuva päättely ja yritteliäisyys nousivat vastauksista. Tämä on erinomainen tulos tutkijan näkökulmasta etenkin siksi, ettei vastaajille oltu esitetty kielentämisen ideaa etukäteen ennen tehtävien tekoa. Näin ollen voidaan varauksetta sanoa, että kielentämistehtävillä oli hyötyä jokaiselle matematiikan osa-alueelle.

Tehtävät eivät tietenkään hyödyttäneet kaikkia vastaajia samalla tavalla ja toisaalta parhaimman arvosanaluokan vastaajien iso osuus yläotsikossa ”Ei mitään hyötyä” on suuri. Tehtävät näyttäytyivät parhaimmalle arvosanaluokalle eniten hyödyllisenä ajattelun syventymisen kannalta. Keskimmäisen arvosanaluokan edustajille hyödyllisimpänä kielentämisessä näyttäytyi tehtävän ratkaisun helpottuminen. Vastaavasti heikkomman arvosanaluokan vastaajat kokivat eniten ymmärryksensä hieman parantuneen. Tämäkin tulos on tutkijan kannalta erinomainen, sillä tehtävät näyttivät antavan kullekin arvosanaluokalle sen kaipaamaa apua; heikkojen ymmärrys hieman parani, keskitasoiset saivat työkalun, jolla ratkaista laskuja ja hyvien jo jäsentynyt matemaattinen ajattelu syveni entisestään.

Tehtäväkokonaisuudet olivat pääpiirteittäin hyviä ja erottelivat vastaajien matemaattista ajattelua ja osaamista kiitettävästi. Tutkijan ja tehtävien kehittäjän näkökulmasta suurin ongelma tehtävillä oli niiden tuntemattomuus vastaajilleen, mikä nousi tuloksena myös asenne- ja mielipidekyselyn avoimissa kohdissa. Vastaajat eivät osanneet kommentointitekniikkaa tai he eivät osanneet konstruoida esimerkkitalanteita annetuille symbolikielen yhtälöille tai funktioille. Heillä oli ongelmia myös tulkita eri kielillä annettuja samoja merkityksiä. Toisin sanottuna he eivät olleet tottuneet matematiikan kielentämiseen, muulla kielellä kuin symbolikielellä ja ”perinteisten” ”standardi”-tehtävien tapaan.

Kielentämiseen tottumattomalle vastaajalle hyvästä kielentämistehtävästä tekee hyvän se, että kielentämistehtävän tehtävänanto on todella selkeä ja toisaalta yksiselitteinen. Tämä onkin tehtävän tärkein ominaisuus, joka nousi voimakkaasti avointen kysymysten kielentämisen huonoissa puolissa. Näistä ilmaisuista 41% koski kielentämistehtäviä itsessään, joista 33% piti tehtävien ymmärrettävyyttä haasteena tai koki että ne sekoittivat ajatuksia. Ymmärrettävyys sai kaikilta arvosanaluokilta mainintoja yhteensä 19%, kun taas ajatusten sekoittuminen korostui erityisesti kahdella heikommalla arvosanaluokalla. Kielentämisen ja tehtävien tuntemattomuus selittää osaltaan yläotsikon saamaa mainintojen lukumäärää, mutta tutkijalle viesti on selvä, että kokemattomalle kielentäjälle tehtäviä suunniteltaessa tehtävänannon ymmärrettävyyteen tulee keskittyä huolella. Muuten huonojen puolien ilmaisut liittyivät lähinnä kielentämisen ja tehtävien ominaisuuksiin tai niiden hankaluuteen ja turhana koko toimintaa piti ainoastaan parhaimman arvosanaluokan tytöt. Näin ollen tulokset lisäsivät tietoutta tehtäviin liittyen ja niitä voidaan jatkossa kehittää paremmiksi.

Vastaajat olivat selvästi harjoitelleet laskemista ja laskuproseduurien tekoa, joten tutkimuksen laskemista vaatineet tehtävät sujuivat pääsääntöisesti hyvin. Kuitenkin myös kielentämisen tekeminen, kuten kommentointi eli merkityksen tuottaminen vaatii harjoittelua. Vastauksista näkyi, että on helppo sanoa (ja mitata) mitä tietää, mutta se että miten tai miksi tietää jonkin asian onkin paljon vaikeampi kertoa (ja mitata). Kielentämistehtävät tarjosivat mahdollisuuden tarkastella vastaajien taitoa antaa syitä ja merkityksiä omalle toiminnalleen ja toisaalta omille ajatuksilleen (ks. metakognitiot, matemaattisen ajattelun määritelmä, luku 2.5), mikä oli tehtävien tarkoituskin. Lisäksi tehtävät herättivät vastaajissa ajatuksia, jotka tulivat esiin kiitettävästi avoimissa kohdissa. Näin ollen tehtävät pääsivät osassa vastaajissa pintaa syvemmälle ja toimivat kuten niiden oli tarkoituskin jäsentäen vastaajan matemaattista ajattelua.

8 POHDINTA

8.1 *Pohdintaa tutkimuksen tuloksista*

Tavoitteenanihan oli yrittää saada kielentämisen hyödyt esiin näillä tehtävillä ilman, että vastaajia tarvitsee perehdyttää kielentämiseen etukäteen. Opettajalle vastausten tarkastaminen antoi monipuolista tietoa vastaajien osaamisesta ja heidän matemaattisesta ajattelustaan. Tutkimuksessa vastauksia oli pakko luokitella ja kategorisoida, jotta pääsin analyysissäni eteenpäin, mutta näinhän tosielämässä ei tarvitse tehdä, vaan jokainen vastaaja vastauksineen on yksilöllinen ja vaatii omanlaisensa kohtaamisen. Aidossa opetustilanteessa olisin joissain tapauksissa antanut tehtävän pienellä lisäohjeistuksella uudelleen tehtäväksi tai olisin kysynyt tarkentava kysymyksiä tai olisin pyytänyt opiskelijoita tutkimaan yhdessä tehtävänantoja ja laatimaan yhteisen vastauksen niihin. Opettajan näkökulmasta kielentämistehtävät toimivat ja toivat esiin erilaista osaamista kiitettävästi antaen mahdollisuuden auttaa opiskelijoita jäsentämään ajatteluaan entistäkin paremmaksi.

Kielentämistehtävät näyttivät avointen kysymysten vastausten perusteella auttavan hämmästyttävän monipuolisesti matematiikan osaamisen eri osa-alueita (ks. luku 2.4.1). Lisäksi tulos, että jokaiselle vastaajaluokalle oli tehtävistä jotain erityistä apua oli tuloksena todella kannustava jatkamaan tehtävien kehittämistä. Palautettujen vastausten perusteella heikoimmat olivat jättäneet paljon tehtäviä palauttamatta, mikä on harmi.

Tutkijan ja tehtävien suunnittelijan näkökulmasta uskon kielentämisen harjoittelemisen jo pelkästään lisäävän tehtäviin vastaamisen osaamista ilman, että tehtäviä tarvitsisi kirjoittaa muuttamaan. Tehtävissä ei ollut ehdottoman tiukkaa ennalta määrättyä tapaa ratkaista niitä ja osassa vastaaja sai valita esimerkiksi kuvan tai luonnollisen kielen väliltä, mikä saattoi hämmästyttää ja sekoittaa tottumattoman kielentäjän ajatuksia. Jos tehtävänantoja rajaisi enemmän, epäilen sen rajoittavan myös ratkaisijan matemaattista ajattelua, jolloin osa kielentämisen hyödyistä jäisi saavuttamatta. Kuitenkin kielentämistehtävissä oli havaittavissa ilmiö, kuten kaikessa opetukseen liittyvässä, että lahjakkaimmat oppilaat osasivat tehtäviä tehtävänannoista huolimatta, kun taas heikommat eivät saaneet vastausta jätettyä ollenkaan osaan tehtävistä. Näin ollen kokonaisvaltaisiin muutostöihin tehtävien suhteen ei ole tarvetta, mutta niitä ja niiden tehtävänantoja voisi kehittää vastaamaan paremmin ja yksilöllisemmin vastaajan taitotasoa ja matemaattista ajattelua.

Mielipide- ja asenneväittämät sekä avointen kohtien vastaukset antavat tällä aineistolla mielenkiintoisia viitteitä siitä, että pojille vieraat ja siten hankalat kielentämistehtävät eivät muodosta- neet asenteellista ongelmaa toisin kuin hieman tytöille. Pojat tiedostivat haasteellisuuden, mutta suhtautuivat siihen rakentavammin kuin tytöt, jotka taas tyrmäsivät sen, pitivät sitä täysin turhana tai kokivat sen vaikeaksi kokonaisuudessaan ilman erittelyä. Poikia oli vain 10 ja tyttöjä 53, joten aineisto on vino ja johtopäätös toteaa vain olevan olemassa viitteitä tähän suuntaan. Asenteita pitäisi tutkia lisää, jotta voisi todeta jotain perustavanlaatuisia eroa tyttöjen ja poikien asenteissa. Lisäksi syiden selvittäminen mahdollisten asenne-erojen takaa olisi mielenkiintoista ja itse suhtau- dunkin hieman epäilevästi, että ensisijaisesti poikuus tai tyttöys rakentaisi lähtökohtaista eroa oppi- laan asenteisiin. Haluaisin uskoa, että taustalla enemmän vaikuttaa esimerkiksi perheen sosiaalinen ja/tai ekonominen tausta, kun yksilön sukupuoli (ks. Lahelma, 2009, 138-140). Joka tapauksessa aineistosta noussut ero on mielenkiintoinen ja panee pohtimaan sitä muutosta ja suhtautumisen eroa muutokseen, jonka uudet tehtävät saivat aikaan totuttuihin tapoihin tehdä ja ajatella matema- tiikkaa eri vastaajaryhmien välillä.

Yksinkertainen selitys asenteiden erolle voisikin olla se, että tytöistä useampi kuin pojista kuului parhaimpaan arvosanaluokkaan, jolloin opittu tapa tehdä ja ajatella matematiikkaa ei pel- kästään enää riittänyt kielentämistehtävien ratkaisemiseksi. Näin ollen tehtävät tuntuivat vai- keammilta eli oma osaaminen suhteessa heikommalta, jolloin asenne tehtäviä kohtaan huononi (ks. Tuohilampi & Hannula, luku 2.2). Tällaista tulkintaa tukee myös mielipidekyselyn tulos, että tytöt suhtautuivat omaan osaamiseensa kriittisemmin kuin pojat, jolloin edelleen heidän asenteensakin matematiikkaa kohtaan on poikia enemmän koetuksella.

8.2 Tutkimuksen luotettavuus

Tämän tutkimukseen aineistoksi valikoitui kahdesta koulusta kerätyt kielentämistehtävät ja asenne- ja mielipidekyselyt. Aineiston koulujen ja ryhmien valikoitumiseen osaksi tutkimusta ensisijaisesti vaikutti vastaajan arvosanan tunteminen. Toinen rajaava tekijä oli se, että vähintään yksi tehtävä tuli olla tehtynä ja asenne- ja mielipidekysely palautettuna. Aineisto valikoitui siis ennen kuin olin tarkastanut heidän tehtäviään tai asenteitaan kielentämistehtäviä kohtaan. Näin ollen lähtökohtai- sesti mikään erityinen vastaajaryhmä ei ole tullut valituksi tai suljetuksi pois tutkimuksen aineis- tosta. Koska tutkimus jakaa vastaajat omiin ryhmiinsä ja pyrkii selvittämään kyseisen ryhmän ominaisia piirteitä osaamisessa tai asenteissa, ei vastaajien valikoituminen aineistoon vain kahdesta koulusta ole tulosten kannalta ongelma. Toisin sanottuna en pyri tutkimuksellani kertomaan mitä

lukion lyhyen matematiikan opiskelijat ovat mieltä kielentämistehtävistä, vaan kuinka tytöt ja pojat sekä eri arvosanaluokat suhtautuvat niihin.

Aineisto on vino sekä sukupuolen, että arvosanan suhteen (ks. luku 5.1). Tyttöjen ja poikien suhde aineistossa on 53/10, mikä on hyvin vino, jos oletuksena on, että heitä pitäisi olla saman verran. Kuitenkin kyseessä oli lukion lyhyen matematiikan kurssi, joten uskoisin kyseisen ryhmän olevan painottunut tyttöihin. Näin ollen jakauman vinous ei ole kokonaisuuden kannalta niin suuri ongelma. Tyttöjen ja poikien keskenään vertaaminen on hieman ongelmallista. Tyttöjen asenteista ja mielipiteistä saatiin monipuolinen ja kattava ja pojiltakin heidän painotuksiaan kuvaava kokonaiskuva.

Aineiston painottuminen arvosanoittain kiitettäviin laskijoihin (55,5%, ks. taulukko 4) ja toisaalta heikoimpien pieni osuus aineistosta vaikeuttaa eri arvosanaryhmien välistä vertailua sekä tehdyissä tehtävissä että asenteissa ja mielipiteissä. Asenteissa ja mielipiteissä luotettavuuden pohdinta menee samalla lailla kuin sukupuolen kohdalla, että kahdelta ylimmältä arvosanaluokalta sain varmasti monipuolisen ja kattavan kokonaiskuvan heidän asenteistaan ja heikoimmalta heidän painotuksiaan kuvaavan kuvan. Annettuja vastauksia jokaista vastaajaa kohtaan oli 19, jolloin sain kaikilta arvosanaluokilta kerättyä vastauksia runsaasti (ks. taulukko 11, luku 6.1). Aineisto antaa kin luotettavan tuloksen siitä miten kukin arvosanaluokka osasi tehdä tehtäviä.

Asenne- ja mielipidekyselyssä epävarmojen osuus 29%, kun avointen hyödyissä se on 24% ja huonoissa puolissa 27% vastanneista. Näin ollen epäröivien määrä on pienempi avoimissa kysymyksissä, kuin kyselykaavakkeeseen vastanneiden joukossa, joten näyttäisi siltä, että kyselykaavakkeessa epäröivien oli hieman helpompi muodostaa mielipiteensä avointen kysymysten hyötykohdassa. Tämä huomio on linjassa Mäcklinin ja Nikulan (2010, 61.) ja Joutsenlahden (2010, 8) havaintojen kanssa. Epävarmojen vastaajien suhteelliset osuudet jakaantuvat sukupuolittain molemmissa avoimissa kysymyksissä aineiston jakauman mukaisesti ja arvosanaluokittainkin lähes aineiston mukaisesti, onnistuu ilmaisujen tulkinta ja jonkin asteinen vertailukin eri taustamuuttujien välillä.

En käyttänyt tutkimuksessa taustamuuttujina kuin sukupuolta ja arvosanaluokkaa, mutta analysoidessani tehtäviä huomasin, että yhden opettajan oppilaat olivat jättäneet tehtäviä palauttamatta useimmin, kuin kahdella muulla tutkimukseen osallistuneiden ryhmien opettajilla. Minusta ei ollut mielenkiintoista tutkia eri opettajien mahdollisia vaikutuksia kielentämistehtäviin liittyen, eikä se olisi edes ollut tällä aineistolla mahdollista. Kuitenkin huomio nousi aineistoa lukiessa, että opettajien ryhmistä kaikki annetut tehtävät oli palauttanut **27%**, 93% ja 78% tutkimukseen osallistuneista oppilaista.

Nämä 27% oppilasta oli 11% kaikista oppilaista, eikä siis iso osa koko tutkittavaa joukkoa. Tämä on subjektiivisesti ajateltuna tutkimuksen tuloksen kannalta huono asia, että palauttamatta jätettyjä tehtäviä on paljon, mutta mielestäni parantaa luotettavuutta, sillä nyt tutkimuksen aineisto mallintaa paremmin todellista elämää eikä steriiliä tutkimuslaboratoriota, jossa ilmiöön ei vaikuta ulkoisia voimia. Syitä yhden vastaajaryhmän puuttuvien vastauksien suhteellisesti verrattuna isoon määrään voi olla monia, kuten esimerkiksi kiire kurssilla tai joku muu koulu-/kotiarkeen liittyvä asia. Se voi johtua myös kiinnostuksen puutteesta, mutta sekin on elämää (myös matematiikassa) ja antaa siis luotettavamman, tai pikemminkin realistisemmän kuvan tehtävistä. Näin ollen tutkimustulokset ovat hyvinkin oikean suuntaisia myös tehtäviä palauttamatta jättäneiden kannalta pohdittuna.

8.3 Jatkotutkimukset kielentämistehtävissä

Tutkimuksen tulokset antoivat positiivisen viestin kielentämistehtävien mahdollisuuksista saada kielentämisen hyödyt näkyviin ilman erillistä perehdyttämistä kielentämiseen. Sitä tämä tutkimus ei kuitenkaan kerro, kuinka paljon kielentämistehtävien tekeminen paransi opiskelijoiden osaamista kurssilla. Seuraavaksi olisikin mielenkiintoista laatia tutkimusasetelma, jossa tutkittaisiin kielentämistehtävien tekemisen vaikuttavuutta oppimistuloksiin, eli toisin sanottuna kokeessa pärjäämiseen. Tutkimuskysymyksenä voisi esimerkiksi olla, että parantaako kielentämistehtävien tekeminen osana kurssia oppimistuloksia perinteisesti järjestettyyn opetukseen verrattuna.

Tutkimuksen tulokset eivät myöskään ota kantaa oliko jonkin kielen tulkitseminen tai tuottaminen jollekin vastaajaryhmälle helpompaa kuin toinen. Olen laatinut tehtävistä kielentämisprosessin (ks. kuvio 7, luku 3.6) mukaiset kaaviot, joten edellä mainitun kaltainen tutkiminen olisi mahdollista myös tällä aineistolla, joskin täysin tähän tarkoitukseen tutkimusta ei ole suunniteltu. Jatkan tehtävien tutkimista syksyllä 2015 tutkimalla ja vertaamalla lyhyen matematiikan MAB3-kurssiin liittyviä ylioppilastehtäviä vuosilta 2006-2015. Ajatukseni on luokitella tehtävät kuvaamani kielentämisprosessin (kuvio 7) näkökulmasta ja selvittää vaikeiden tehtävien takaa löytyviä syitä itsestään tehtävien rakenteesta.

Yhtenä kielentämistehtävänä oli kysymys, että luottaisitko tosielämässä Paavon lupaukseen (ks. liite 6(1)). Vastaukset avasivat jopa oppilaiden poliittisia näkemyksiä yhteiskunnasta, mikä antaisikin herkullisen tutkimusasetelman. Lisäksi osa vastaajista oli vastannut todella runsaasti eri merkityksiä antaen tähän kysymykseen, joten myös kielentämisen näkökulmasta olisi mielenkiintoista laskea esimerkiksi sanat tai joitain ilmaisuja annetuista vastauksista. Pelkästään tämän kysymyksen vastausten tulkinta olisi varmasti yhden pro gradun-arvoinen. Kuitenkin taustamuuttuji-

na kenties vanhempien koulutustausta saattaisi olla antoisampi kuin matematiikan kurssiarvosana. Voisikohan myös opettajalla olla vaikutusta oppilaiden poliittisiin asenteisiin? Matematiikan kielentämistehtävien tutkijan näkökulmasta ajatus matematiikan tehtävien avulla tehdystä yhteiskunnallisesta tutkimuksesta on vähintäänkin houkutteleva ja panee kyseenalaistamaan ajatusta matematiikasta abstraktina ja yksiselitteisen ”kylmänä”. Pienenä tuloksena kyseisen tehtävän vastauksista, että valta osa ei luottanut Paavoon, mutta muutamalle helppo raha kelpasi. Joinain vastausesimerkkeinä mainittakoon: Ei luotettu, kun ”pankki on aina pankki” ja toisaalta ”markkinamiehet huijaa aina” tai ”vetää välistä”.

8.4 Kielentäminen ja tiedonlajit uudessa lukion opetussuunnitelmassa

Lukion uusi valtakunnallinen opetussuunnitelma astuu voimaan 1.8.2016. Tätä tutkimusraporttia kirjoittaessa lopullinen opetussuunnitelma ei ollut vielä valmis, mutta 14.4.2015 päivätty luonnos oli vapaasti katsottavissa opetushallituksen sivuilla. Luonnokseen oli kirjattu matematiikan keskeiset tavoitteet sekä arviointiin liittyviä erityisiä huomioita.

Matematiikan opetuksen yleisistä tavoitteissa oppiaineelle annetaan tehtäväksi opettaa käyttämään puhuttua ja kirjoitettua matematiikan kieltä sekä kehittää laskemisen, ilmiöiden mallintamisen ja ongelmien ratkaisemisen taitoja (OPH, 2015, 141). Opetussuunnitelman luonnoksessa puhutaan siis matematiikan kielestä, jolla tarkoitetaan erityisesti matemaattisia käsitteitä. Toisaalta luonnos nostaa laskemisen ja ilmiöiden mallintamisen eli proseduraalisen tiedon yhdeksi keskeiseksi matematiikan tavoitteeksi. Edelleen strategiatieto näyttäytyy tavoitteissa erityisesti ongelmaratkaisutaidon harjaannuttamisen muodossa. Kaikki tiedonlajit ovatkin mukana kiinteästi ainakin opetussuunnitelman luonnosvaiheessa.

Opetustilanteista luonnos käyttää ilmaisia, jotka ovat kuin suoraan kielentämisen ytimestä, eli merkitysten tulkinnasta ja tuottamisesta. Opetustilanteet tulisi järjestää siten, että ne herättävät opiskelijan tekemään havaintojensa pohjalta kysymyksiä, oletuksia ja päätelmiä sekä perustelemaan niitä (mt. 141). Etsitään siis syitä seurausten takaa. Erityisesti opiskelijaa ohjataan hahmottamaan matemaattisten käsitteiden merkityksiä ja tunnistamaan, kuinka ne liittyvät laajempiin kokonaisuuksiin (mt. 141). Sen sijaan, että opiskeltaisiin vain yksittäisiä käsitteitä ulkokohtaisesti, pyritään pääsemään käsiksi niiden merkityksiin ja edelleen hahmottamaan kuinka nämä merkitykset kytkeytyvät kokonaisuuteen. Näyttäisikin siltä, että opetussuunnitelman luonnoksen opiskelijaihanne matematiikan osaamisen suhteen on *generalisti* (ks. luku 2.5). Opiskelijaa rohkaistaan myös käyttämään ajattelua tukevia kuvia, piirroksia ja välineitä (mt. 141). Luonnos ottaa siis suoraan kantaa myös muihin matematiikan kieliin. Luonnos jatkaa, että opiskelijaa kannustetaan ke-

hittämään luovia ratkaisuja matemaattisiin ongelmiin sekä, että opetuksessa tutkitaan matematiikan ja arkielämän välisiä yhteyksiä sekä tietoisesti käytetään eteen tulevia mahdollisuuksia opiskelijan persoonallisuuden kehittämiseen, mikä tarkoittaa muun muassa hänen kiinnostuksensa ohjaamista (OPH, 2015, 141). Juuri omin sanoin kirjoittaminen antaa opiskelijalle luvan käyttää luovuuttaan ja toisaalta muun muassa kielentämistehtävyytyypeistä ”ratkaisusta tehtävä” olisi luonnollinen tapa yhdistää opiskelijan koettua arkielämää ja matematiikan maailmoja.

Kielentämisen näkökulmasta luonnos linjaa arvioinnista mielenkiintoisesti, että arviointi ohjaa opiskelijaa kehittämään matematiikan osaamistaan ja ymmärtämistään sekä pitkäjänteisen työskentelyn taitoja. Arvioinnilla autetaan opiskelijaa kehittämään matemaattisten ratkaisujen esittämistä, tuetaan häntä käsitteiden muodostamisprosessissa ja ohjataan oman työn arvioimiseen. (Mt. 141.) Näitä luonnoksen linjaamia arvioinnin pääkohtia tukee kirjallinen kielentäminen erittäin hyvin (ks. luku 3.2). Kielennettyä vastausta, jossa näkyy syitä ja merkityksiä on mahdollista täydentää tarvittaessa tai sen pohjalta on mahdollista arvioida rakentavasti, joka auttaa opiskelijaa ymmärtämään missä kohdassa hänen matemaattinen ajattelunsa ei ollut riittävää. Toisaalta omien ratkaisujen pohtiminen ja erityisesti kirjallinen kielentäminen lisää pitkäjänteisen työn arvostusta ja toisaalta myös tukee luonnoksen mainitsemaa oman työn arviointia (ks. luku 3.2.1). Edelleen harjaantumalla jäsentämään omaa ajatteluaan paperille ja samalla itselleen, myös sen muille esittäminen helpottuu oleellisesti.

Näyttäisi siltä, että tulevaisuudessa kirjallinen kielentäminen oppimisen ja arvioinnin näkökulmasta tulee olemaan tärkeässä osassa lukio-opetuksessa. Perinteiset laskemiseen painottuneet tehtävät ovat haasteen edessä symbolisen laskemisen ja tietokoneiden mukaan tulemisen myötä. Koska laskujen tuloksia varten kehitellyt koneet ovat varmasti ihmistä tehokkaampia omassa erityistehtävässään, uusilta matematiikan tehtäviltä vaaditaan myös uudenlaisia ominaisuuksia. Näille uusille ominaisuuksille ovat tyypillisiä juuri opetussuunnitelman luonnoksen mainitsemat käsitteiden merkitykset ja niiden väliset suhteet. Toisin sanottuna tehtävien tulee kysyä mitä-kysymysten sijaan miksi-kysymyksiä. Näin ollen tämän tutkimuksen kaltaiset, merkityksiin ja syihin pureutuvat kielentämistehtävät tulevat olemaan tulevaisuudessa erityisen tarpeellisia lukion matematiikan oppimisesta ja opetuksesta puhuttaessa.

8.5 Digitaalinen toimintamateriaali kielentämisen näkökulmasta

Vaikkakin taktillinen, kosketuksen kieli on noussut kielentämiskeskusteluun vasta hiljattain on viitteitä siitä, että sen rooli koko kielentämisen kannalta on tärkeämpi ja oleellisempi kuin on edes

ajateltu. Jos ajattelemme taktillisen kielen koskevan erityisesti ajattelun ohjaamaa toimintaamme, minusta menetämme jotain oleellista ajattelumme rakentumisessa ja merkitysten tuottamisessa.

Nimittäin ihmisen aivojen kehittymistä tutkineet tutkijat (mm. Stanley H. Ambrose, 2001) ovat tulleet siihen johtopäätökseen, että tekeminen ja toiminta on alkujaan edeltänyt ajattelun ja ongelmanratkaisukyvyyn kehittymistä (ks. luku 2.1, Rauste-von Wright & von Wright, toiminnan rooli oppimiselle). Aivojen kehittymisen, aivopuoliskojen erikoistumisen ja edelleen ongelmanratkaisukyvyyn kannalta tekemisessä on ollut erityisen tärkeää ihmisen toiskätisyyden muodostuminen. Siis käsien erilainen käyttö, kuten esimerkiksi vasemmalla kädellä kivistä kiinni pitäminen ja oikealla kädellä sitä lyöminen. (Venkula, 2001, 47; Venkula, 2009, 2.)

Näin ollen ensimmäinen ajattelua jäsentävä ja merkityksiä tuottava ”kieli” itse asiassa on voinut olla taktillinen, kosketuksen kieli. Tästä seuraa se, että jo pelkkä käsin kielentäminen toisin sanoen tekeminen eli varsinainen kielentämisen toiminta itsessään jäsentää ajattelua ja helpottaa ongelmanratkaisua ja edelleen oppimista. Tästä näkökulmasta käsin katsottuna toiminnan kieli on läsnä silloinkin, kun kielennetään kirjallisesti, vaikkei mukana ole varsinaista siihen erikseen kehitettyä toimintamateriaalia, kuten esimerkiksi kynällä kirjoittaessa. Edelleen suullisessa kielentämisessä toiminta tulee mukaan ajattelua jäsentävänä, kun kielentäjä ”puhuu käsillään” eli heiluttelee käsiään ajattelunsa jäsentämiseksi puheen aikana. Toimintamme siis ohjaa yhtäläillä ajatteluamme, kuin myös ajattelumme toimintaamme (Venkula, 2001, 47). Puhuttaessa kielentämisestä eli merkitysten tuottamisesta ja oman ajattelun jäsentymisestä, menetetäänkin jotain merkitsevää, kun siirrymme käsin kirjainten muodostamisesta tekstin tuottamiseen näppäimiä painamalla (Venkula, 2001, 44-45; 2013) (ks. OPH, OPS2014, näppäintaidot).

Toisaalta myös niin sanottua digitaalisia toimintamateriaaleja ei voida täysin varauksetta kielentämismielessä mieltää toimintamateriaaleiksi, koska silloin on kyseessä itse asiassa simulaatio varsinaisesta tekemisestä (Kiilakoski, 2012, 215). Oppija ei itsessään tee/toimi, vaan hän laittaa koneen tai abstraktin asian, kuten pelin tai ohjelman tekemään/toimimaan. Voidaankin sanoa, että tuolloin hän on kuin tekevinään/toimivinaan, mutta ei itse ole toiminnan subjekti. Lisäksi jos lähestyy digitaalista toimintamateriaalia kielentämisen prosessin kautta (ks. kuvio 7, luku 3.6) digitaalisesti näytöllä tapahtuva toiminnan simulaatio vastaa kielentäjälle merkityksen tulkinnan (*input*) näkökulmasta kuviokieltä eikä taktillista toiminnan kieltä. Edelleen merkityksen tuottamisessa (*output*) menetetään ajattelun jäsentymisen kannalta jotain merkitsevää, kun tyydymme simuloimaan toimintaa kuvan kautta. Yksinkertaistettuna esimerkkinä sanottakoon, vaikka palikoiden tai helmien siirtäminen oikeasti käsissämme tai tämän toiminnan simulointi kuvien välityksellä tabletin ruudulla. Jäsentynyt matemaattinen ajattelu kyllä ymmärtää, että ruudulla oleva kuva simuloi tarkoittaen oikeaa palikkaa ja tietää jo valmiiksi miten palikka käyttäytyy, mutta vasta ajatteluun harjoitteleva

kielentäjä ei välttämättä ymmärrä oikean palikan ja kuvaruudun simulaation yhteyttä. Hän itse asiassa oppii tällöin pelistä ei palikoista (ks. simulaatio, Kiilakoski, 2012).

Asenne- ja mielipidekyselyn yksi väittämä (V19) koski matematiikan tehtävien tekemistä tietokoneella ja erityisesti, että koetaanko se kivaksi. Väittämään suhtautui positiivisesti kaikista vastaajista 8% ja negatiivisesti 62%. Tulos kertoo siitä, ettei tietokoneella tekeminen ainakaan matematiikan osalta ole kaikkien vastaajien joukossa kivaa. Pojista positiivisesti väittämään suhtautui 20%. Tulos on sen suhteen mielenkiintoinen, että nykyään puhuttaessa tulevaisuuden koulusta siihen yhdistetään usein digitalisaatio teknologioineen. Lisäksi digitaalisuuden lisäämisen uskotaan kohentavan kouluviihtyvyyttä, kuten alla oleva Helsingin Sanomissa ollut Helsingin yliopiston professorin Kirsti Longan ajatus ilmentää.

”Loppuvuonna julkistetussa Pisa-mittauksessa Suomi oli kouluviihtyvyydessä vasta sijalla 60 – siis viidenneksi huonoin kaikista mitatuista maista. Longan (Kirsti) mielestä se johtuu siitä, ettei koulua ole kehitetty diginatiivien vaan digimuukalaisten ehdoilla. Koulussa pitäisi hyödyntää enemmän pelejä, teknologiaa ja sosiaalista mediaa – kaikkea sellaista, mikä on nuorille arkipäivää.” (Helsingin Sanomien verkkoartikkeli, 15.5.2014.)

Sipilän hallituksen yhtenä tärkeimpänä tavoitteena on osaamisen ja koulutuksen uudistaminen. Hallituskauden yhdeksi kärkihankkeeksi on nimetty uudet oppimisympäristöt ja digitaaliset materiaalit peruskouluihin. (Valtioneuvoston kanslia, 2015, 17.) Tämä tutkimus ei käsittele digitalisaatiota, eikä ota kantaa niin sanottuun uuteen oppimiseen, jonka digitaalinen teknologia ”diginatiiveille” kerrotaan mahdollistavan. Kuitenkin haluan nostaa keskusteluun opetuksen kehittämisen kentällä kriittisen huomion liittyen Suomen intoiluun digitaalisen teknologian lisäämisestä, että esimerkiksi Yhdysvaltojen Piilaakso on tunnettu digitaalisen teknologian kehittämisestä ja muun muassa suur-yritys Apple on sieltä kotoisin. Applen entisen johtajan Steve Jobsin kerrotaan kieltäneen tabletit lapsiltaan ja toisaalta suomalainen teknologiayrittäjä Jyri Engeström on perustanut oman koulunsa (Sesat), jossa toiminnan keskipisteessä ei ole digitaalinen teknologia simuloineen ja peleineen vaan tekijä, eli oppija itse (Taloussanomat, 10.2.2015; Helsingin Sanomat, 12.2.2015).

Tutkimusraportissa käyttämäni Tuohilammen ja Hannulan (2013, s. 242) tulos asenteen ja osaamisen yhteydestä (ks. luku 2.2) yhdistettynä edellä kuvaamaani kielentämisen suhteeseen oppimispeleihin ja -simulaatioihin sekä digitaalisten teknologioiden kehittäjien vastareaktioon omiin laitteisiinsa ja alustoihinsa panee miettimään Suomen tämänhetkistä oppimisen digitalisoimisen syitä ja ennen kaikkea tulevia seurauksia. Itse en usko, että oppiminen itsessään (ks. luku 2.1) on muuttunut digitaalisen teknologian myötä. Toisekseen en usko oppimisen olevan ikinä helppoa ja

vaivatonta, vaan uskon sen aina vaativan ponnisteluja oppijalta itseltään. Nyky- (digi)ajan ihminen on tottunut ajattelemaan, että kaikkeen on olemassa jokin siihen erikseen kehitetty, arkea helpottava ”appsi” (=applikaatio, digitaalinen ohjelma). Tässä asiayhteydessä se on oppimista helpottava peli. Minulle on opetettu, että se mikä kuulostaa liian hyvältä ollakseen totta, ei sitä useimmiten ole. Minusta oppimisen digitalisoiminen kuulostaa juuri tältä, joten en usko siihen varauksetta.

Uskon, että pelimekaniikka on koukuttava ja pelien pelaaminen verrattuna laskujen itse käsin laskemiseen on hausempaa, jos verrataan kahta toimintaa toisiinsa pelkästään tämän muuttujan suhteen. Vaan mikä olikaan asenteen ja osaamisen suhde? (Ks. Tuohilampi & Hannula, 2013.) Edelleen epäilen, että pelatessa pelaaja kiinnostuu ennen kaikkea pelistä, kuin itsessään siitä pelin asiasta. Entä sitten kun peli on pelattu – tarvitaan tietysti jatko-osa, jotta oppiminen (pelaaminen) voi jatkua. Mistä hankitaan tarvittavat jatko-osat ja maksetaanko ne suuremmilla luokkakokoilla? Puhuttaessa pelaamisen sijaan oppimisesta ei synny tarvetta jatko-osille, koska vanhan sanonnan mukaan ”oppia ikä kaikki” – oppiminen, kun ei koskaan tule valmiiksi.

Renkinä digitaalinen teknologia on varmasti hyvä, mutta se että digitaalisuus on kansallisine koulutuspalveluineen sekä Opetushallituksen tilaaman raportin, jonka laatijoina toimi muun muassa IBM, Apple, Microsoft, Rovio, Nokia ja Sanoma Pro (OPH, 15.4.2014) avulla nousemassa isännän rooliin on minusta vähintäänkin hälyttävä kehityssuunta. Varsinkin, kun huomataan muualla maailmassa, kuten digitaalisen teknologian kehityksen ytimessä Kalifornian Piilaaksossa kehityksen suunnan olevan täysin toinen ja toisaalta katsotaan edellä mainitun raportin laatijoiden listaa. Taisi samalla tulla aavistus siitä kuka meille tarvittavat jatko-osat uudenaikaiseen oppimiseen vaadittaviin oppimispeleihin tekee ja laupiaasti ”sopuhintaan” myy. Tässä keskustelussa tuntuukin, että pedagogiikan sijaan keskitytään markkinoihin ja pedagogisten tai didaktisten kysymysten, kuten miksi ja mihin sijaan pohditaan teknis-välineellisiä kysymyksiä, kuten mitä ja miten (ks. Kiilakoski, 2012, 213).

LÄHTEET

Abbott, Andrew, 2004. *Methods of Discovery: Heuristics for the Social Sciences*. Jeffrey C. Alexander (toim.), *Contemporary Societies*. University of Chicago. W. W. Norton & Company, New York London, 2004.

Candia, Morgan, 2001. *The Place of Pupil Writing in Learning, Teaching and Assessing Mathematics*. Teoksessa Gates P. (toim.) *Issues in Mathematics Teaching*, 232-244.

Haapasalo, Lenni, 2004. Pitääkö ymmärtää voidakseen tehdä vai pitääkö tehdä voidakseen ymmärtää?, Teoksessa Räsänen, P., Kupari, P., Ahonen, T. & Malinen, P. (toim.) *Matematiikka – näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen*, Jyväskylä: Niilo Mäki Instituutti, 51-56

Hirsjärvi, Sirkka, 1982. *Kasvatustieteen käsitteistö*, Keuruu: Otava, 1982.

Hirsjärvi, Sirkka & Huttunen, Jouko, 1995. *Johdatus kasvatustieteeseen*, Juva: WSOY, 1995.

Huhtamäki, Markus, 2008. *Suureiden käyttöönnotto ala-asteella*, Progradu-tutkielma, 9-10

Joutsenlahti, Jorma & Rättyä, Kaisu, 2015, *Kielentämisen käsite ainedidaktisissa tutkimuksissa*. Teoksessa Kauppinen M. & Rautiainen M. & Tarnanen M. (toim.) *Rajaton tulevaisuus, Kohti kokonaisvaltaista oppimista. Ainedidaktiikan symposium Jyväskylässä 13.–14.2.2014*. Suomen ainedidaktisen tutkimusseuran julkaisuja Ainedidaktisia tutkimuksia 8. Jyväskylä: Jyväskylän yliopistopaino, 45-62.

Joutsenlahti, Jorma & Kulju, Pirjo, 2010. *Kieliteoreettinen lähestymistapa koulumatematiikan sanallisiin tehtäviin ja niiden kielennettyihin ratkaisuihin*. Teoksessa E. Ropo & H. Silfverberg & T. Soini (toim.) *Toisensa kohtaavat ainedidaktiikat. Ainedidaktiikan symposiumi Tampereella 13.2.2009*. Tampereen yliopiston opettajankoulutuslaitoksen julkaisuja A 31. Tampere: Tampereen yliopisto, 77-90.

Joutsenlahti, Jorma, 2010. *Matematiikan kirjallinen kielentäminen lukiomatematiikassa*. Teoksessa , Asikainen M. & Hirvonen P. E. & Sormunen K. (toim.) *Ajankohtaista matemaattisten aineiden opetuksen ja oppimisen tutkimuksessa, Matematiikan ja luonnontieteiden opetuksen tutkimuspäivät Joensuussa 22.-23.10.2009*, 3-16.

Joutsenlahti, Jorma, 2009. *Matematiikan kielentäminen kirjallisessa työssä*. Teoksessa Raimo Kaasila (toim.) *Matematiikan ja luonnontieteiden opetuksen tutkimuspäivät Rovaniemellä 7.-8.11.2008*. Rovaniemi: Lapin yliopisto, 71-86. (Lapin yliopiston kasvatustieteellisiä raportteja 9).

Joutsenlahti, Jorma, 2005. *Lukiolaisen tehtäväorientoituneen matemaattisen ajattelun piirteitä*, Tampere: Tampereen Yliopistopaino Oy - Juvenes Print, 2005.

Joutsenlahti, Jorma, 2003. *Kielentäminen matematiikan opiskelussa*. Teoksessa A. Virta & O. Marttila (toim.) *Opettaja, asiantuntijuus ja yhteiskunta. Ainedidaktinen symposium 7.2.2003*. Turun yliopisto. Kasvatustieteiden tiedekunnan julkaisusarja B:72, 188–196.

Kiilakoski, Tomi, 2012. Hyvä isäntä vai keho renki – kriittisiä näkökulmia verkkopedagogiikkaan. Teoksessa Kasvatus teknologisessa maailmassa. Tutkimus teknologisoituvasta kasvatuksesta. Nuorisoverkosto. Nuorisotutkimusseura: Julkaisuja 132. Tampereen yliopisto. Unigrafia, Helsinki 2012.

Kilpatrick Jeremy & Swafford Jane & Findell Bradford, 2001. Adding it up. Helping children learn mathematics. Washington DC: National Academy press, 2001.

Kovács, Maldiva, 2009. Koodinvaihto ja kielioppi. Teoksessa Kalliokoski, J., Kotilainen, L. ja Pahlta, P. (toim.) Kielet kohtaavat. Suomen Kirjallisuuden Seura. Tietolipas 227: 24-49. Jyväskylä: Gummerus Kirjapaino Oy, 2009.

Lahelma, Elina, 2009. Tytöt, pojat ja kysymys koulumenestyksestä. Teoksessa Ojala, H. Palmu, T. ja Saarinen, J. (toim.) Sukupuoli ja toimijuus koulutuksessa. Vastapaino, 2009.

Lehto, Essi, 12.2.2015. Helsingin Sanomat. Sosiaalisen median pioneeri: Lapset pois netistä ja aikuiset Tinderistä. <http://www.hs.fi/elama/a1423627805448> (viitattu 7.7.2015)

Leino, Jarkko, 1977. Matematiikan didaktiikka 1, Rauma: Oy Länsi-Suomi, 17-18

Mäcklin, Joanna & Nikula, Marjo, 2010. Matemaattisen ajattelun kirjallinen kielentäminen matemaattisen ongelman ratkaisuvälineenä. Kasvatustieteen pro gradu -tutkielma. Kasvatustieteiden tiedekunta. Tampereen yliopisto, Opettajankoulutuslaitos, Hämeenlinna.

Niemi, Eero, K. 2008. Matematiikan oppimistulosten kansallinen arviointi 6. vuosiluokalla vuonna 2007. Oppimistulosten arviointi 1/2008. Helsinki: Opetushallitus.

Nummenmaa, Lauri, 2009. Käyttäytymistieteiden tilastolliset menetelmät. 3. Painos. Tammi. Latvia: Livonia Print, 2011.

Nurmi, Jari-Erik, 2013. Motivaation merkitys oppimisessa. Kasvatus 5/2013, 548-554. <https://www.jyu.fi/ytk/opiskelijavalinta/psykologian%20artikkelikokoelma2014,%20artikkeli11> (viitattu 24.7.2015)

OPH, 2015. Lukion opetussuunnitelman perusteet 2015/Luonnostekstiä 14.4.2015. http://www.oph.fi/download/166556_lukion_opetussuunnitelman_perusteet_2015_luonnos_14042015.pdf (viitattu 21.7.2015)

OPH, Verkkouutinen, 15.4.2014. Koulutuspilvijaosto luovutti loppuraporttinsa. http://www.oph.fi/ajankohtaista/verkkouutiset/101/0/koulutuspilvijaosto_luovutti_loppuraporttinsa (viitattu 7.7.2015)

Pehkonen, Erkki, 2000. Ymmärtäminen matematiikan opetuksessa, Kasvatus 31, (4), 376-377

Ranta, Elina, 10.2.2015. Taloussanomat. Piilaakson teknoväki suosii tietokoneetonta opetusta. <http://www.taloussanomat.fi/tyo-ja-koulutus/2015/02/10/piilaakson-teknovaki-suosii-tietokoneetonta-opetusta/20151714/139#commentsHere> (viitattu 7.7.2015)

Rauste-von Wright, Maijaliisa & von Wright, Johan, 1994. Oppiminen ja koulutus, Juva: WSOY, 1994.

Saarikoski, Sonja, 15.5.2014. Helsingin Sanomat. Kouluprofessori: Kärsin itse koulussa – luokassa pitäisi olla hauskaa. <http://www.hs.fi/elama/a1400041386828> (viitattu 7.7.2015)

Sarikka, Hanna, 2014. Kielentäminen matematiikan opetuksen ja oppimisen tukena. Matematiikan diplomityö. Teknis-luonnontieteellinen koulutusohjelma. Tampereen teknillinen yliopisto.

Smith, Glenn G., Gerretson, Helen, Olkun, Sinan & Joutsenlahti, Jorma, 2010. Effect of Causal Stories in Solving Mathematical Story Problems. *H. U. Journal of Education*, 39: 284-295 (2010) Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi. <http://www.efdergi.hacettepe.edu.tr/201039GLENN%20GORDON%20SMITH.pdf> (viitattu 24.7.2015)

Tuohilampi, Laura & Hannula, Markku S. 2013. Matematiikkaan liittyvien asenteiden kehitys sekä asenteiden ja osaamisen välinen vuorovaikutus 3., 6. ja 9. luokalla. Teoksessa Jari Metsämuuronen (toim.) Perusopetuksen matematiikan oppimistulosten pitkittäisarviointi vuosina 2005–2012. Opetushallitus. Koulutuksen seurantaraportit 2013:4. Juvenes Print – Suomen Yliopistopaino Oy, Tampere, 231-254.

Tuomi, Jouni & Sarajärvi, Anneli, 2009. Laadullinen tutkimus ja sisällönanalyysi. 5. Painos. Tammi. Jyväskylä: Gummerus Kirjapaino Oy.

Tynjälä, Päivi, 1999. Oppiminen tiedon rakentamisena. Konstruktivistisen oppimiskäsityksen perusteita. Helsinki: Kirjayhtymä.

Valtioneuvoston kanslia, 2015. Ratkaisujen Suomi: Pääministeri Juha Sipilän hallituksen strateginen ohjelma 29.5.2015. Hallituksen julkaisusarja 10/2015. Edita Prima, 2015. http://vnk.fi/documents/10616/1095776/Ratkaisujen+Suomi_FI.pdf/5f59e1a3-bfe8-47cb-a42f-6e18ee6a53a7?version=1.0 (viitattu 24.7.2015)

Venkula, Jaana, 25.11.2013. YLE. (<http://yle.fi/aihe/artikkeli/2013/11/25/vapaa-tutkija-jaana-venkula-tekeminen-muutoksen-alku-pelkka-tieto-ei-riita>) (viitattu 13.3.2015)

Venkula, Jaana, 2009. http://www.oph.fi/download/117725_Venkula21209.pdf (viitattu 13.3.2015)

Venkula, Jaana, 2001. Tekemisen taito. BoD - Books on Demand, 2011, https://books.google.fi/books?id=y5qW2XLJ2usC&printsec=frontcover&hl=fi&source=gbs_ge_summary_r&cad=0 (viitattu 13.3.2015)

Åhlberg, Mauri, 1990. Opetuksen ja oppimisen evaluaatio. Pieni käsikirja opettajille ja tutkijoille. Savonlinnan opettajankoulutuslaitos, Kasvatustieteiden tiedekunnan opetusmonisteita, Joensuu yliopisto, Joensuu: Joensuun yliopiston monistuskeskus.

9 LIITTEET

LIITE 1(1). Lineaarinen malli, kaikille yhteinen tehtävä

LIITE 2(1). Lineaarinen malli, A-ryhmän tehtävä

LIITE 3(1-2). Lineaarinen malli, B-ryhmän tehtävä

LIITE 4(1-2). Potenssilauseke

LIITE 5(1-2). Eksponenttiyhtälö

LIITE 6(1-2). Eksponenttiyhtälö ja logaritmin määritelmä

LIITE 7(1). Logaritmi, A-ryhmän tehtävät 1 ja 2

LIITE 8(1). Logaritmi, B-ryhmän tehtävä

LIITE 9(1-2). Asenne- ja mielipidekyselylomake

LIITE 10(1-9). Tehtäväkokonaisuuksien vastauskategoriat selityksineen

LIITE 11(1-7). Taulukot avoimien kysymysten vastauksista

LIITE 12(1-16). Esimerkkivastauksia mestarillisista merkityksistä

Tehtävä 1:

Kerro tai merkitse kuvaan miten saat selville suoran kulmakertoimen ja y- ja x-akselin leikkauspisteen a) kuvasta b) suoran yhtälöstä.

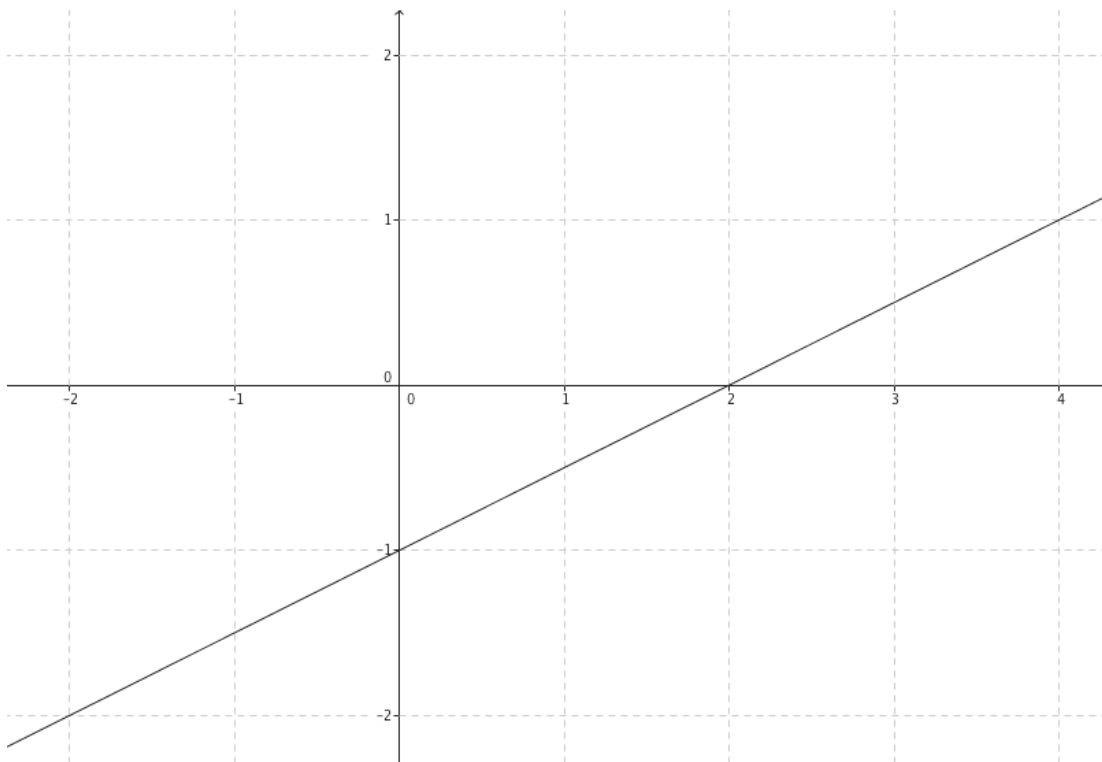
Ilmoita myös niiden arvot.

a. kuvasta

kulmakertoimen:

y-akselin leikkauspisteen:

x-akselin leikkauspisteen:

**b. suoran yhtälöstä** **$y = -2x + 3$**

kulmakertoimen:

y-akselin leikkauspisteen:

x-akselin leikkauspisteen:

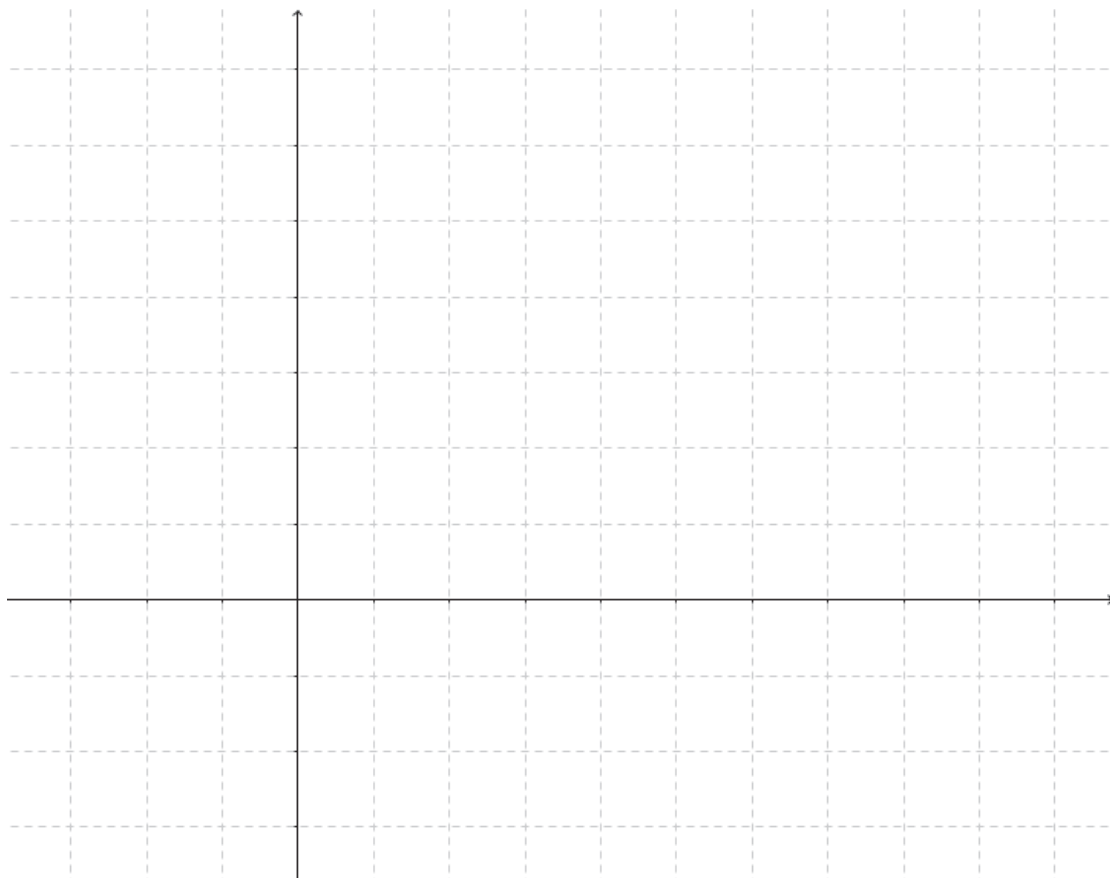
Tehtävä 2a:

Erään tehtävän ratkaisu on $y = 1,5x + 20$.

Kuvaa esimerkkitalanne ja kirjoita siitä kirjallinen tehtävänanto, jonka ratkaisuna saat mainitun yhtälön.

Suunnittelu:

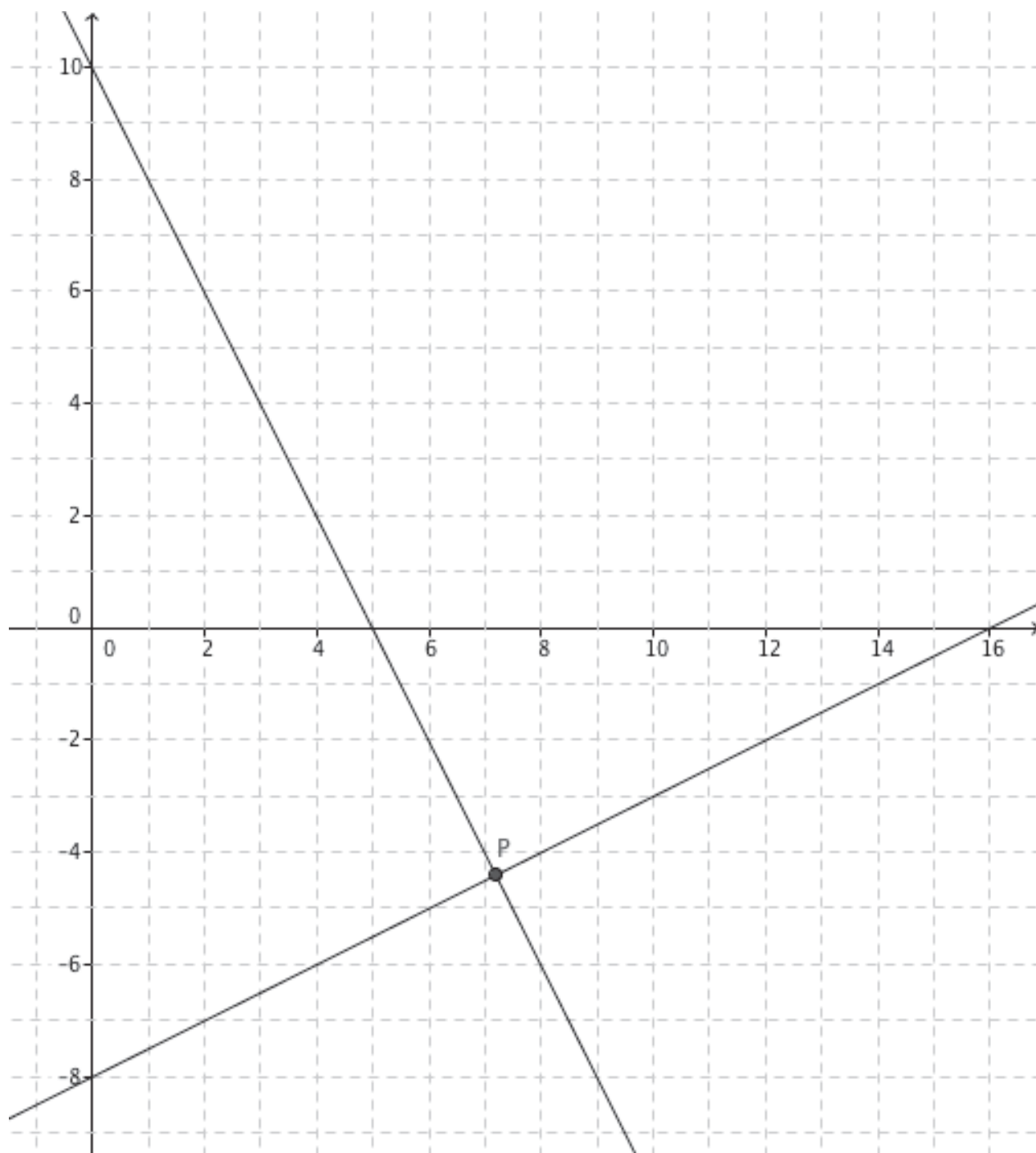
Voit käyttää suunnittelussa apunasi koordinaatistoa.



Kirjallinen tehtävänanto:

Tehtävä 2b:

Tehtävään liittyvä kuva.



LINEAARINEN MALLI, B-RYHMÄN TEHTÄVÄ, RATKAISUN ARGUMENTOINTI Liite 3(2)
Selitä ja perustele ratkaisun vaiheet.

$$y = -2x + 10$$

$$y = \frac{1}{2}x - 8$$

$$-2x + 10 = \frac{1}{2}x - 8$$

$$-2\frac{1}{2}x = -18 \quad \| \cdot (-2)$$

$$5x = 36 \quad \| : 5$$

$$x = \frac{36}{5} = 7\frac{1}{5}$$

$$y = -2 \cdot 7\frac{1}{5} + 10$$

$$y = -14\frac{2}{5} + 10$$

$$y = -4\frac{2}{5}$$

$$P = (x, y) = (7\frac{1}{5}, -4\frac{2}{5})$$

Mikä on voinut olla tehtävänanto?

Tehtävä:

Täytä tyhjät rivit ja laatikot loogisesti parhaalla mahdollisella tavalla.

Tutkitaan tapauksia, joissa eksponentti on kokonaisluku, ts. n kuuluu joukkoon $\{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$.

1. Kenties tutuin tapaus lausekkeesta k^n on, että sekä k eli _____ ja n eli _____ ovat positiivisia, ts. $(k, n > 0)$

Tällöin _____ -lasku voidaan palauttaa _____ -laskuun.

Eli $k^n =$ _____ .

2. Tilanne muuttuu, kun _____ on negatiivinen ($n < 0$).

Tällöin merkintä k^{-1} tarkoittaa itse asiassa kantaluvun k _____ :a

$$= \frac{1}{k^1} = \frac{1}{k}$$

eli $k^{-n} = \frac{1}{\square \square}$.

Herää kysymys: Mitä tapahtuisi, jos kantaluku onkin nolla, tai kun eksponentti on nolla?

3. Ensin oletetaan, että kantaluku on erisuuri kuin nolla, ts. $k \neq 0$.

Nyt jos eksponentti on nolla ($n=0$), niin tästä seuraa, että

(Selitä tyhjille riveille, miten päättely etenee.)

$$\begin{aligned}
 &k^0 && \underline{\hspace{10cm}} \\
 = &k^{1-1} && \underline{\hspace{10cm}} \\
 = &\frac{k^1}{k^1} && \underline{\hspace{10cm}} \\
 = &\frac{k}{k} && \underline{\hspace{10cm}} \\
 = &1 && \underline{\hspace{10cm}}
 \end{aligned}$$

Eli kun _____ on erisuuri kuin nolla ja eksponentti on _____, niin tulos on aina _____.

POTENSSILAUSEKE, 4a-4c

Liite 4(2)

Käytä edellisten kohtien 1-3 määritelmiä hyödyksi ja tutki mitä tapahtuu, jos kantalukuna on nolla ($k=0$). Käy läpi tapaukset **a) ($n>0$)**, **b) ($n=0$)** ja **c) ($n<0$)**.

a) *(vrt. kohta 1)*

b) *(vrt. kohta 3)*

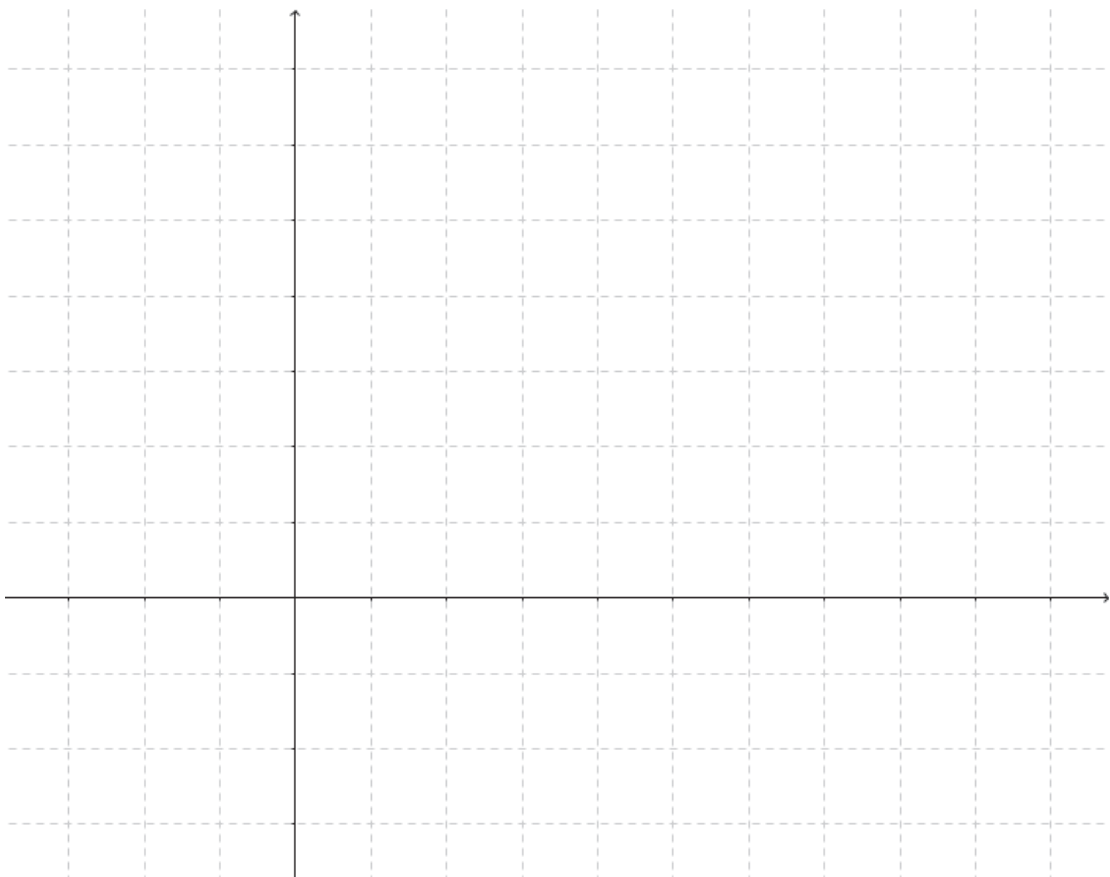
c) *(vrt. kohta 2)*

Tehtävä:

a. Selitä, mikä on muuttujan x rooli funktiossa $f(x) = 2^x$.

Ts. kerro mitä funktiossa oikein tapahtuu muuttujan x kasvaessa.

b. Piirrä kuvaaja, jossa on kuvattu kohdan-a funktio.

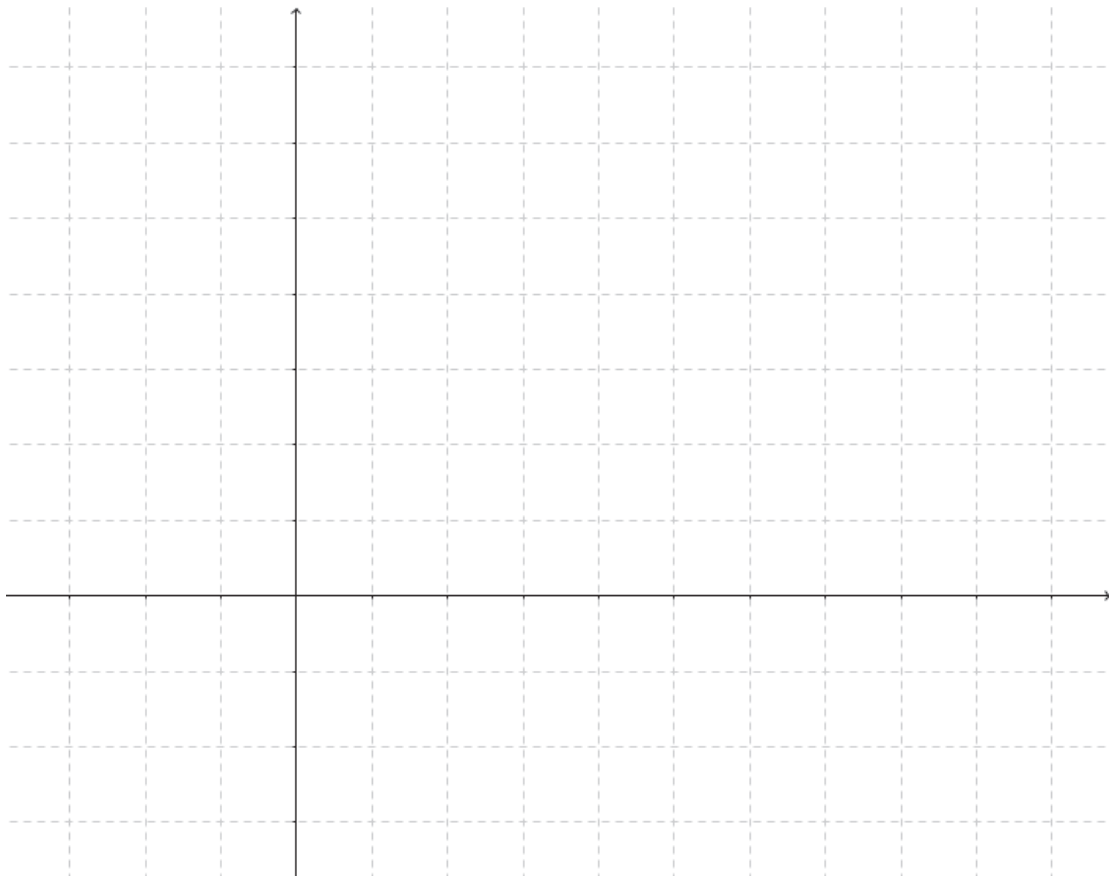


Katso kuvaajasta

b.1. Missä kohdassa funktion arvo on tullut 4-kertaiseksi alkutilanteeseen ($x=0$) nähden?

b.2. Kuinka suuri on funktion arvo kohdassa $x=3$?

- c. Esittele funktio, jossa seuraava arvo on aina $\frac{1}{2}$ pienempi, kuin edellinen arvo ja keksi joku esimerkkitalanne tästä. Piirrä siitä myös kuvaaja.



Milloin funktio saa arvon nolla? Perustele vastauksesi.

Piirrä samaan koordinaatistoon lineaarisen funktion kuvaaja.

Funktion lauseke: _____

Missä kohdassa funktiot saavat saman arvon?

EKSPONENTTIYHTÄLÖ JA LOGARITMIN MÄÄRITELMÄ, TARINALLISUUS **Liite 6(1)**
Tehtävä:

Paavo Pankkiiri puhua pulputti. Hän lupasi, että alkusijoituksesi ollessa a euroa ja ajan x ollessa vuosia, se tulee kasvamaan seuraavan yhtälön mukaisesti: $2^x \cdot a = 9600 \text{ euroa}$.

Hullaannuit Paavon karismaattisesta esityksestä ja kotiin palatessasi olit aivan varma, että hetken kuluttua tililläsi on lähes 10 000 euroa! Senhän voisi sijoittaa vaikka ensiasuntoon – oma tupa, oma lupa!

Mitä Paavo siis lupasi?

Kuinka nopeasti saavutat Paavon puheiden mukaan 9600 euroa, jos alkusijoituksesi on 1200 euroa?

Mitä jos sijoitatkin 300 euroa, niin milloin sijoituksesi arvo on 9600 euroa?

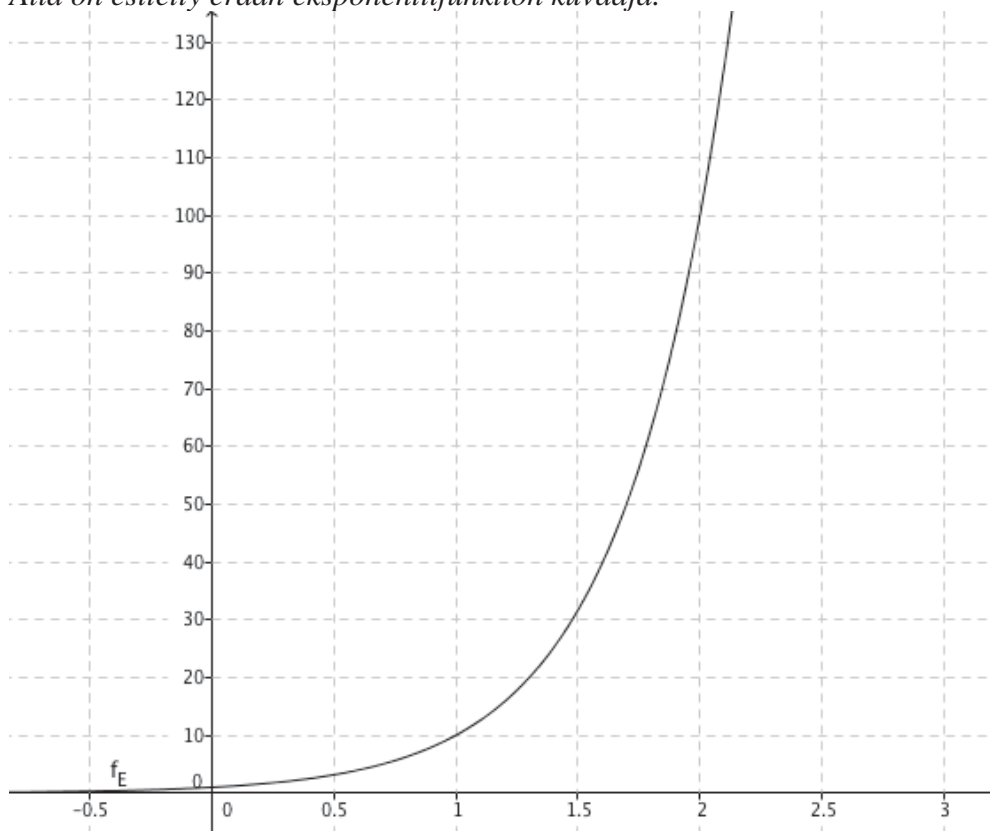
Olet malttamaton ja haluat saada 9600 euroa jo 2,5 vuoden kuluttua.

Kuinka paljon sinun tulee sijoittaa alussa?

Luottaisitko tosielämässä Paavon lupaukseen? Miksi?

EKSPONENTTIYHTÄLÖ JA LOGARITMIN MÄÄRITELMÄ, LOGARITMIN MÄÄRITELMÄ
A (a- ja b-kohta) JA B (c-kohta)

Alla on esitetty erään eksponenttifunktion kuvaaja.

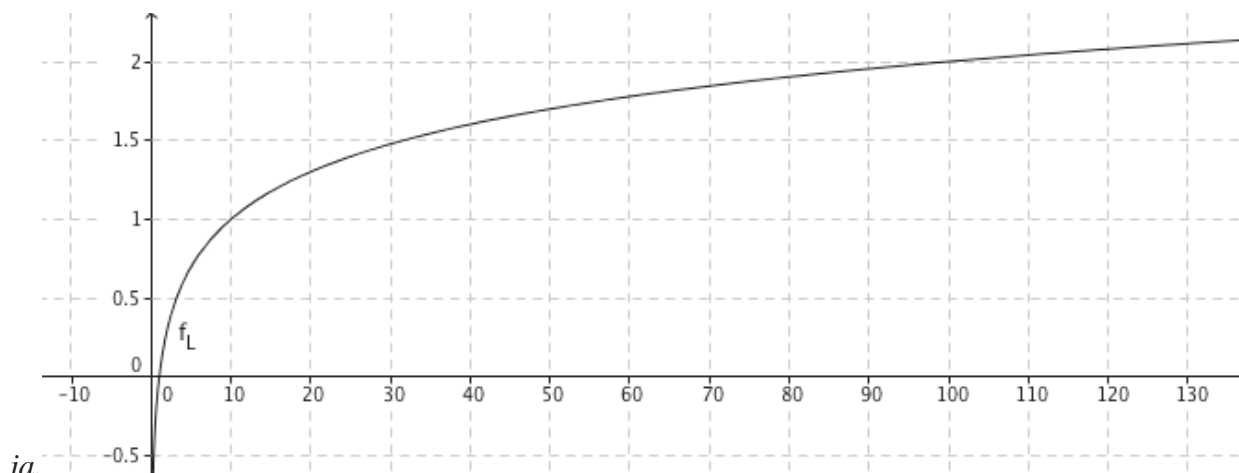


a. Täytä tyhjät kohdat sopivilla sanoilla.

Funktion arvo, $y = f(x)$, muodostuu, kun *kantaluvun* _____, *eksponenttina* on _____.

b. Muotoile eksponenttifunktio matemaattiseen muotoon: _____

Alla on esitetty logaritmifunktion, $\lg x = y$, kuvaaja-



ja.

c. Vertaile omin sanoin logaritmifunktiota ja em. eksponenttifunktiota.

LOGARITMI, A-RYHMÄN TEHTÄVÄT 1 JA 2

Tehtävä 1:

Perustele omin sanoin mitä alla on tehty ja miksi.

Formaaliesitys:

$$y = 10^x$$

$$\lg y = x$$

Esimerkki:

$$100 = 10^2$$

$$\lg 100 = 2$$

$$y = 10^x = 10^{\lg y} = y$$

$$100 = 10^2 = 10^{\lg 100} = 100$$

Tehtävä 2:

Perustele omin sanoin mitä alla on tehty ja miksi.

$$k^x = a$$

$$(10^{\lg k})^x = 10^{\lg a}$$

$$10^{x \cdot \lg k} = 10^{\lg a}$$

$$x \cdot \lg k = \lg a$$

$$x = \frac{\lg a}{\lg k}$$

Miten siis voi hyödyntää logaritmia eksponenttiyhtälöiden ratkaisussa?

Tehtävä:**Selitä omin sanoin mitä laskussa tapahtuu ja miksi.**

$11^{1309} \text{ ja } 12^{1209}$

$11 = 10^{\lg 11}$

$(10^{\lg 11})^{1309}$

$10^{1309 \cdot \lg 11}$

$1309 \cdot \lg 11 \approx 1363,2$

$10^{1363,2}$

$12 = 10^{\lg 12}$

$(10^{\lg 12})^{1209}$

$10^{1209 \cdot \lg 12}$

$1209 \cdot \lg 12 \approx 1304,7$

$10^{1304,7}$

$10^{1363,2} > 10^{1304,7}$

$11^{1309} > 12^{1209}$

Mikä on voinut olla tehtävänanto?

Nimi: _____

Vastaa seuraaviin väittämiin laittamalla rasti (x) ruutuun.

- + + TÄYSIN SAMAA MIELTÄ
 + JOKSEENKIN SAMAA MIELTÄ
 0 EN OSAA SANOA
 - JOKSEENKIN ERI MIELTÄ
 - - TÄYSIN ERI MIELTÄ

VÄITTÄMÄT	++	+	0	-	--
Minä en ole kovin hyvä matematiikassa.					
Vaikea matematiikan tehtävä tuntuu minusta mieluisalta haasteelta.					
En halua käyttää kovin paljon aikaani matematiikan opiskelemiseen.					
Matematiikka on minulle vaikeampaa kuin useimmille muille.					
Olen valmis työskentelemään pitkänkin aikaa ymmärtääkseni uuden asian matematiikassa.					
Olen kiinnostunut matemaattisista ongelmista.					
Muiden opiskelijoiden on helpompi seurata tehtävän ratkaisua, kun siihen on kirjoitettu väliotsikoita.					
Kielentäminen auttaa minua ymmärtämään paremmin tehtävien ratkaisut.					
Tytöt menestyvät matematiikassa heikommin kuin pojat.					
Kielentäminen sopi minulle opiskelumenetelmänä.					
Pojat menestyvät matematiikassa paremmin kuin tytöt.					
Minä olen hyvä äidinkielessä.					
Kirjoittaminen on minulle mieluisaa puuhaa.					
Äidinkielen käytön lisääminen matematiikan opiskelussa lisää tyttöjen mielenkiintoa matematiikkaa kohtaan.					
Matematiikan oppiminen on yksin oppimista.					

ASENNE- JA MIELIPIDEKYSELYLOMAKE, LIKERT-ASTEIKKO JA AVOIMET **Liite 9(2)**

Matematiikkaa on mukavampi tehdä parin kanssa tai ryhmässä kuin yksin.					
Ymmärrän matematiikkaa paremmin, kun saan opiskella sitä yhdessä parin kanssa.					
Mielestäni omin sanoin kirjoittaminen helpottaa matematiikan tehtävien ratkaisua. On kivaa tehdä matematiikan tehtäviä tietokoneella					

Avoimet kysymykset:

1. Mitä hyötyä koit kielentämisestä matematiikan opiskelussa?

2. Mitä huonoja puolia sinun mielestäsi kielentämisessä oli?

POTENSSILAUSEKETEHTÄVÄKOKONAISUUDEN VASTAUSKATEGORIAT**TAULUKKO 46.** Potenssilausekkeen 1. tehtävän vastauskategoriat

POTENSSILAUSEKE 1	SELITYS
Täysin oikein.	On annettu oikeat merkitykset.
Puutteellinen	Tyhjä kohta, tai osin puutteellinen vastaus.
Ei osattu ollenkaan.	Ratkaisijan osaamisesta ei ole mitään merkkejä. Tulos ja merkitykset ovat väärin.
Tehtävää ei ole palautettu.	Tehtävää ei ole palautettu, vaikka se on oppilaalle jaettu.

Potenssilauseke 2**TAULUKKO 47.** Potenssilausekkeen 2. tehtävän vastauskategoriat

POTENSSILAUSEKE 2	SELITYS
Täysin oikein.	On annettu oikeat merkitykset.
Puutteellinen	Tyhjä kohta, tai osin puutteellinen vastaus.
Ei osattu ollenkaan.	Ratkaisijan osaamisesta ei ole mitään merkkejä. Tulos ja merkitykset ovat väärin.
Tyhjä	Vastaus on jätetty tyhjäksi, tai siihen on kirjoitettu etten ymmärrä tms.
Tehtävää ei ole palautettu.	Tehtävää ei ole palautettu, vaikka se on oppilaalle jaettu.

Potenssilauseke 3**TAULUKKO 48.** Potenssilausekkeen 3. tehtävän vastauskategoriat

POTENSSILAUSEKE 3	SELITYS
Täysin oikein.	Tulos on oikein ja on annettu oikeat merkitykset.
Tulos oikein, ei merkityksiä	Viimeinen virke on oikein, mutta ei annettuja merkityksiä.
Ei osattu ollenkaan.	Ratkaisijan osaamisesta ei ole mitään merkkejä. Tulos ja merkitykset ovat väärin.
Tyhjä	Vastaus on jätetty tyhjäksi, tai siihen on kirjoitettu etten ymmärrä tms.
Tehtävää ei ole palautettu.	Tehtävää ei ole palautettu, vaikka se on oppilaalle jaettu.
<i>Ei osattu kommentoida</i>	Tulos oikein, merkitys oikein, mutta ei olla osattu kommentoida eli antaa merkityksiä vasemman palstan välivaiheille.

Potenssilauseke 4a**TAULUKKO 49.** Potenssilausekkeen 4. tehtävän a-kohdan vastauskategoriat

POTENSSILAUSEKE 4a	SELITYS
Täysin oikein.	Tulos on oikein ja on annettu oikeat merkitykset.
Puutteellinen	Tulos oikein, puutteelliset perustelut.
Tulos oikein, ei merkityksiä	Tulos oikein, ei perusteluja.
Ei osattu ollenkaan.	Ratkaisijan osaamisesta ei ole mitään merkkejä. Tulos ja merkitykset ovat väärin.
Tyhjä	Vastaus on jätetty tyhjäksi, tai siihen on kirjoitettu etten ymmärrä tms.
Tehtävää ei ole palautettu.	Tehtävää ei ole palautettu, vaikka se on oppilaalle jaettu.

Potenssilauseke 4b**TAULUKKO 50.** Potenssilausekkeen 4. tehtävän b-kohdan vastauskategoriat

POTENSSILAUSEKE 4b	SELITYS
Mestarillinen merkitys	Poikkeuksellisen selvät merkitykset sekä luon. että symb. kielellä.
Täysin oikein.	Tulos on oikein ja on annettu oikeat merkitykset.
Puutteellinen	Puutteelliset perustelut, virhe tuloksessa.
Tulos oikein, ei merkityksiä	Tulos oikein, ei perusteluja.
Ei osattu ollenkaan.	Ratkaisijan osaamisesta ei ole mitään merkkejä. Tulos ja merkitykset ovat väärin.
Tyhjä	Vastaus on jätetty tyhjäksi, tai siihen on kirjoitettu etten ymmärrä tms.
Tehtävää ei ole palautettu.	Tehtävää ei ole palautettu, vaikka se on oppilaalle jaettu.

Potenssilauseke 4c**TAULUKKO 51.** Potenssilausekkeen 4. tehtävän c-kohdan vastauskategoriat

POTENSSILAUSEKE 4c	SELITYS
Mestarillinen merkitys	Poikkeuksellisen selvät merkitykset sekä luon. että symb. kielellä.
Täysin oikein.	Tulos on oikein ja on annettu oikeat merkitykset.
Puutteellinen	Puutteelliset perustelut, tulos oikein tai väärin
Tulos oikein, ei merkityksiä	Tulos oikein, ei perusteluja
Ei osattu ollenkaan.	Ratkaisijan osaamisesta ei ole mitään merkkejä. Tulos ja merkitykset ovat väärin.
Tyhjä	Vastaus on jätetty tyhjäksi, tai siihen on kirjoitettu etten ymmärrä tms.
Tehtävää ei ole palautettu.	Tehtävää ei ole palautettu, vaikka se on oppilaalle jaettu.

EKSPONENTTIFUNKTIO TEHTÄVÄKOKONAISUUDEN VASTAUSKATEGORIAT**Eksponenttifunktio a****TAULUKKO 52.** Eksponenttifunktio a-kohdan vastauskategoriat

EKSPONENTTIFUNKTIO a	SELITYS
Mestarillinen merkitys	Täysin oikein, sekä luon. että symb. kielen merkitys.
Täysin oikein.	Tulos on oikein ja on annettu oikeat merkitykset.
Ei osattu ollenkaan.	Osaamisesta ei merkkejä. Tulos ja merkitykset ovat väärin. (Ei kuitenkaan keksittyä totuutta vrt. <i>Sepitystä</i>)
Tyhjä	Vastaus on jätetty tyhjäksi, tai siihen on kirjoitettu etten ymmärrä tms.
<i>Sepitystä</i>	Moni (n=7) oli kirjoittanut täyttä ”puutaheinää” merkityksiksi.
”Viisastelija”	Usea (n=21) oli kirjoittanut ”ympäripyöreitä” merkityksiä yleensä x:stä ja y:stä, mutta merkitykset ei liity tehtävään.

Eksponenttifunktio b**TAULUKKO 53.** Eksponenttifunktio b-kohdan vastauskategoriat

EKSPONENTTIFUNKTIO b	SELITYS
Täysin oikein.	Tulos (laskut) on oikein ja on annettu oikeat merkitykset (kuva).
Puutteellinen	Kuva tai merkintä puutteellinen
Tulos oikein, ei merkityksiä	Laskut on oikein, mutta kuvassa virhe.
Ei osattu ollenkaan.	Ratkaisijan osaamisesta ei ole mitään merkkejä. Tulos ja merkitykset ovat väärin.
Tyhjä	Vastaus on jätetty tyhjäksi, tai siihen on kirjoitettu etten ymmärrä tms.
<i>Kuva oikein, lasku osittain oikein.</i>	Monella (n=10) oli kuva oikein, mutta virhe laskuissa.
<i>Ei kuvaa, lasku osittain oikein.</i>	Usealla (n=7) ei ollut kuvaa tai se oli väärin, mutta laskuja oli osin osattu.

Eksponenttifunktio c**TAULUKKO 54.** Eksponenttifunktio c-kohdan vastauskategoriat

EKSPONENTTIFUNKTIO c	SELITYS
Mestarillinen merkitys	Poikkeuksellinen luon. kielen merkitys esimerkkitalanteessa.
Täysin oikein.	Tulos ja merkitys oikein, mutta niukka esimerkkitalanne.
Puutteellinen	Luon. kielen esim. puutteellinen tai lin. funktion kuvaaja väärin
Tulos oikein, ei merkityksiä	Tulos oikein, ei luon. kielen merkitystä.
Ei osattu ollenkaan.	Ratkaisijan osaamisesta ei ole mitään merkkejä. Tulos ja merkitykset ovat väärin.
Tyhjä	Vastaus on jätetty tyhjäksi, tai siihen on kirjoitettu etten ymmärrä tms.
Tehtävää ei ole palautettu.	Tehtävää ei ole palautettu, vaikka se on oppilaalle jaettu.

**EKSPONENTTIYHTÄLÖ JA LOGARITMIN MÄÄRITELMÄ -
TEHTÄVÄKOKONAISUUDEN VASTAUSKATEGORIAT****EkspONENTTIYHTÄLÖ, Tarinallisuus****TAULUKKO 55.** EkspONENTTIYHTÄLÖN tarinallisen tehtävän vastauskategoriat

EKSPONENTTIYHTÄLÖ, TARINALLISUUS	SELITYS
Mestarillinen merkitys	Poikkeuksellinen merkitys Paavon lupaukselle ja laskut oikein.
Täysin oikein.	Paavaa tulkittu oikein ja laskut on oikein.
Puutteellinen	Paavon tulkinnassa puute, mutta laskut on oikein.
Tulos oikein, ei merkityksiä	Paavon tulkinta väärin, mutta laskut on osattu.
Ei osattu ollenkaan.	Ratkaisijan osaamisesta ei ole mitään merkkejä. Tulos ja merkitykset ovat väärin.
Tehtävää ei ole palautettu.	Tehtävää ei ole palautettu, vaikka se on oppilaalle jaettu.
<i>”Viisastelija, jolla ei varaa”</i>	Moni (n=11) oli kopioinut Paavon puhetta ja laskuissa virheitä.
<i>”Viisastelija”</i>	Kopioitu Paavon puhetta, mutta laskut oli osattu.

Eksponenttiyhtälö ja logaritmin määritelmä a ja b**TAULUKKO 56.** Eksponenttiyhtälön ja logaritmin määritelmän a- ja b-kohdan vastauskategoriat

EKSPONENTTIYHTÄLÖ JA LOGARITMIN MÄÄR. a ja b	SELITYS
Täysin oikein.	Kuva ja tyhjien kohtien merkitykset ovat samat.
Puutteellinen	Merkityksissä puutteita, kuten kuvassa tai yleisessä muodossa.
Ei osattu ollenkaan.	Yritetty numero- tai kirjainsymboleilla, mutta tulos ja merkitys on väärin.
Tyhjä	Vastaus on jätetty tyhjäksi, tai siihen on kirjoitettu etten ymmärrä tms.
Tehtävää ei ole palautettu.	Tehtävää ei ole palautettu, vaikka se on oppilaalle jaettu.
<i>”Yleinen muoto, ei kuvasta”</i>	Moni (n=14) oli kirjoittanut eksponenttifunktion täysin oikein yleisessä muodossa, eikä tulkinnut sitä kuvasta.

Eksponenttiyhtälö ja logaritmin määritelmä c**TAULUKKO 57.** Eksponenttiyhtälön ja logaritmin määritelmän c-kohdan vastauskategoriat

EKSPONENTTIYHTÄLÖ JA LOGARITMIN MÄÄR. c	SELITYS
Täysin oikein.	Oikea merkitys annettu käänteisfunktion käsitteellä.
Puutteellinen	Oikea merkitys ilmaisulla: kääntynyt, peilikuva, akselit vaihtaneet paikkaa.
Tulos oikein, ei merkityksiä	Tehty oikea huomio, mutta ei funktioiden yhteyttä.
Ei osattu ollenkaan.	Ratkaisijan osaamisesta ei ole mitään merkkejä. Tulos ja merkitykset ovat väärin.
Tyhjä	Vastaus on jätetty tyhjäksi, tai siihen on kirjoitettu etten ymmärrä tms.
Tehtävää ei ole palautettu.	Tehtävää ei ole palautettu, vaikka se on oppilaalle jaettu.

EKSPONENTTIYHTÄLÖ JA LOGARITMI -TEHTÄVÄKOKONAISUUDEN VASTAUSKATEGORIAT**Logaritmi A1****TAULUKKO 58.** A-tehtäväpaperin 1. logaritmit tehtävän vastauskategoriat

LOGARITMI A1	SELITYS
Täysin oikein.	Yhteys on tulkittu oikein ja annettu merkitys löytyy.
Puutteellinen	Yhteys on huomattu, mutta ei ole merkitys puutteellinen.
Tulos oikein, ei merkityksiä	Tehty oikea huomio, mutta ei merkitystä.
Ei osattu ollenkaan.	Ratkaisijan osaamisesta ei ole mitään merkkejä. Tulos ja merkitykset ovat väärin.
Tyhjä	Vastaus on jätetty tyhjäksi, tai siihen on kirjoitettu etten ymmärrä tms.
Tehtävää ei ole palautettu.	Tehtävää ei ole palautettu, vaikka se on oppilaalle jaettu.

Logaritmi A2**TAULUKKO 59.** A-tehtäväpaperin 2. logaritmit tehtävän vastauskategoriat

LOGARITMI A2	SELITYS
Mestarillinen merkitys	Poikkeukselliset annetut luon. kielen merkitykset
Täysin oikein.	Logaritmin rooli oikein ja annetut merkitykset oikein
Puutteellinen	Annetut merkitykset puutteellisia
Ei osattu ollenkaan.	Ratkaisijan osaamisesta ei ole mitään merkkejä. Tulos ja merkitykset ovat väärin.
Tyhjä	Vastaus on jätetty tyhjäksi, tai siihen on kirjoitettu etten ymmärrä tms.
Tehtävää ei ole palautettu.	Tehtävää ei ole palautettu, vaikka se on oppilaalle jaettu.
<i>Logaritmin rooli oikein</i>	Logaritmin rooli on tiedetty, mutta annetut luon. kielen merkitykset väärin. (n=18)
<i>Sepitystä</i>	Moni (n=7) oli kirjoittanut täyttä ”puutaheinää” merkityksiksi.

Logaritmi B**TAULUKKO 60.** B-tehtäväpaperin logaritmit tehtävän vastauskategoriat

LOGARITMI B	SELITYS
Mestarillinen merkitys	Poikkeukselliset annetut luon. kielen merkitykset
Puutteellinen	Annetut merkitykset puutteellisia
Tulos oikein, ei merkityksiä	Tehtävänanto tulkittu oikein, mutta ei merkityksiä tai kommentointi kuvailevaa
Ei osattu ollenkaan.	Ratkaisijan osaamisesta ei ole mitään merkkejä. Tulos ja merkitykset ovat väärin.
Tehtävää ei ole palautettu.	Tehtävää ei ole palautettu, vaikka se on oppilaalle jaettu.

TAULUKKO 61. Ilmaisujen sukupuolijakaumat yläotsikoittain kielentämisen hyödyissä

Kaikki ilmaisut (n=61)	Tytöt	Pojat	Yhteensä
KIELENTÄMISEN HYÖDYT	n=53 (87%)	n=8 (13%)	n=61 (100%)
Ei mitään	10 (19%)	2 (25%)	12 (20%)
Ymmärrys	11 (21%)	0 (0%)	11 (18%)
Laskuprosessin hahmottaminen	11 (21%)	4 (50%)	15 (25%)
Vaikutukset toimintaan	9 (17%)	2 (25%)	11 (18%)
Käytännön hyödyt ja asenteet	12 (23%)	0 (0%)	12 (20%)
Yhteensä	53 (100%)	8 (100%)	61 (100%)

TAULUKKO 62. Yläotsikoiden ilmaisujen jakaumat arvosanaluokittain kielentämisen hyödyissä

Kaikki ilmaisut (n=61)	Arvosanaluokka			Yhteensä
	4-6	7-8	9-10	
KIELENTÄMISEN HYÖDYT	n=5 (8%)	n=23 (38%)	n=33 (54%)	n=61
Ei mitään	0 (0%)	3 (13%)	9 (27%)	12 (20%)
Ymmärrys	2 (40%)	4 (17%)	5 (15%)	11 (18%)
Laskuprosessin hahmottaminen	3 (60%)	6 (26%)	6 (18%)	15 (25%)
Vaikutukset toimintaan	0 (0%)	4 (17%)	7 (21%)	11 (18%)
Käytännön hyödyt ja asenteet	0	6 (26%)	6 (18%)	12 (20%)
Yhteensä	5 (100%)	23 (100%)	33 (100%)	61 (100%)

TAULUKKO 63. Kaikki kielentämisen hyötyjen yläotsikot ilmiöineen arvosanaluokittain

	Arvosanaluokka			Yhteensä (N=61)
	4-6 (n=5, 8%)	7-8 (n=23, 38%)	9-10 (n=33, 54%)	
Kaikki ilmaisut (N=61)				
<i>YMMÄRRYS</i>	2 (40%)	4 (17%)	5 (15%)	11 (18%)
Ymmärsi hieman paremmin	2 (40%)	1 (4%)	2 (6%)	5 (9%)
Ymmärsi paremmin	0 (0%)	3 (13%)	1 (3%)	4 (8%)
Viimeisteli opitun asian	0 (0%)	0 (0%)	2 (6%)	2 (4%)
<i>LASKUPROSESSIN HAHMOTTAMINEN</i>	3 (60%)	6 (26%)	6 (18%)	15 (25%)
Näkökulma laajeni hieman	1 (20%)	0 (0%)	0 (0%)	1 (2%)
Hahmotukseni parani	1 (20%)	3 (13%)	3 (9%)	7 (11%)
Näkökulma laajeni paljon	1 (20%)	3 (13%)	2 (6%)	6 (10%)
Laskuprosessin soveltaminen	0 (0%)	0 (0%)	1 (3%)	1 (2%)
<i>VAIKUTUKSET TOIMINTAAN</i>	0 (0%)	4 (17%)	7 (21%)	11 (18%)
Pakotti kertaamaan	0 (0%)	1 (4%)	1 (3%)	2 (3%)
Itselle selittäminen	0 (0%)	1 (4%)	1 (3%)	2 (3%)
Ajattelun syventyminen	0 (0%)	2 (9%)	5 (15%)	7 (11%)
<i>KÄYTÄNNÖN HYÖDYT JA ASENTEET</i>	0 (0%)	6 (26%)	6 (18%)	12 (20%)
Helpotti tehtävän ratkaisua	0 (0%)	4 (17%)	1 (3%)	5 (8%)
Helpottaa muistamista	0 (0%)	1 (4%)	2 (6%)	3 (5%)
Motivaation kasvu	0 (0%)	1 (4%)	3 (9%)	4 (7%)
YHTEENSÄ	5 (100%)	23 (100%)	33 (100%)	61 (100%)

TAULUKKO 64. Kaikki kielentämisen hyötyjen yläotsikot ilmiöineen sukupuolittain

Kaikki ilmaisut (n=61)	Tytöt (n=53, 87%)	Pojat (n=8, 13%)	Yhteensä (N=61)
<i>YMMÄRRYS</i>	11 (21%)	0 (0%)	11 (18%)
Ymmärsi hieman paremmin	5 (9%)	0 (0%)	5 (9%)
Ymmärsi paremmin	4 (8%)	0 (0%)	4 (8%)
Viimeisteli opitun asian	2 (4%)	0 (0%)	2 (4%)
<i>LASKUPROSESSIN HAHMOTTAMINEN</i>	11 (21%)	4 (50%)	15 (25%)
Näkökulma laajeni hieman	1 (2%)	0 (0%)	1 (2%)
Hahmotukseni parani	4 (8%)	3 (38%)	7 (11%)
Näkökulma laajeni paljon	6 (11%)	0 (0%)	6 (10%)
Laskuprosessin soveltaminen	0 (0%)	1 (13%)	1 (2%)
<i>VAIKUTUKSET TOIMINTAAN</i>	9 (17%)	2 (25%)	11 (18%)
Pakotti kertaamaan	2 (4%)	0 (0%)	2 (3%)
Itselle selittäminen	1 (2%)	1 (13%)	2 (3%)
Ajattelun syventyminen	6 (11%)	1 (13%)	7 (11%)
<i>KÄYTÄNNÖN HYÖDYT JA ASENTEET</i>	12 (23%)	0 (0%)	12 (20%)
Helpotti tehtävän ratkaisua	5 (9%)	0 (0%)	5 (8%)
Helpottaa muistamista	3 (6%)	0 (0%)	3 (5%)
Motivaation kasvu	4 (8%)	0 (0%)	4 (7%)
<i>YHTEENSÄ</i>	53 (100%)	8 (100%)	61 (100%)

TAULUKOT AVOIMIEN KYSYMYSTEN VASTAUKSISTA
KIELENTÄMISEN HUONOT PUOLET

Liite 11(4)

TAULUKKO 65. Ilmaisujen sukupuolijakaumat kielentämisen huonoissa puolissa

Kaikki ilmaisut (n=64)	Tytöt	Pojat	Yhteensä
KIELENTÄMISEN HUONOT PUOLET	n=54 (84%)	n=10 (16%)	n=64 (100%)
Ei mitään	0 (0%)	1 (10%)	1 (2%)
Totaalinen tyrmäys	2 (4%)	0 (0%)	2 (3%)
Kielentämisen tuntemattomuus	2 (4%)	2 (20%)	4 (6%)
Kielentämistehtävien haasteita	23 (43%)	3 (30%)	26 (41%)
Kielentämistehtävien ja kielentämisen ominaisuuksia	12 (22%)	1 (10%)	13 (20%)
Kielentämisen haasteita	15 (28%)	3 (30%)	18 (28%)
Yhteensä	54 (100%)	10 (100%)	64 (100%)

TAULUKKO 66. Ilmaisujen jakaumat arvosanaluokittain kielentämisen huonoissa puolissa

Kaikki ilmaisut (n=64)	Arvosanaluokka			Yhteensä
	4-6	7-8	9-10	
KIELENTÄMISEN HUONOT PUOLET	n=5 (8%)	n=20 (31%)	n=39 (61%)	n=64 (100%)
Ei mitään	0 (0%)	0 (0%)	1 (3%)	1 (2%)
Totaalinen tyrmäys	0 (0%)	1 (5%)	1 (3%)	2 (3%)
Kielentämisen tuntemattomuus	0 (0%)	1 (5%)	3 (8%)	4 (6%)
Kielentämistehtävien haasteita	3 (60%)	14 (70%)	9 (23%)	26 (41%)
Kielentämistehtävien ja kielentämisen ominaisuuksia	2 (40%)	0 (0%)	11 (28%)	13 (20%)
Kielentämisen haasteita	0 (0%)	4 (20%)	14 (36%)	18 (28%)
Yhteensä	5 (100%)	20 (100%)	39 (100%)	64 (100%)

TAULUKKO 67. Kaikki kielentämisen huonojen puolien yläotsikot ilmiöineen sukupuolittain

Kaikki ilmaisut (n=64)	Tytöt (n=54, 84%)	Pojat (n=10, 16%)	Yhteensä (N=64)
<i>KIELENTÄMISEN TUNTEMATTOMUUS</i>	2 (4%)	2 (20%)	4 (6%)
Ei harjoitella matematiikan tunneilla	0 (0%)	2 (20%)	2 (5%)
Kotona tekeminen ilman apua	1 (2%)	0 (0%)	1 (2%)
Stressi tehtävistä	1 (2%)	0 (0%)	1 (2%)
<i>KIELENTÄMISTEHTÄVIEN HAASTEITA</i>	23 (43%)	3 (30%)	26 (41%)
Tehtävien vaikeus	4 (7%)	1 (10%)	5 (8%)
Ymmärrettävyys	11 (21%)	1 (10%)	12 (19%)
Sekoitti ajatuksia	8 (15%)	1 (10%)	9 (14%)
<i>KIELENTÄMISTEHTÄVIEN JA KIELENTÄMISEN OMINAISUUKSIA</i>	12 (22%)	1 (10%)	13 (20%)
Monimutkaistaa asioita	3 (5%)	0 (0%)	3 (5%)
Työlästä	3 (5%)	1 (10%)	4 (6%)
Turhaa	6 (11%)	0 (0%)	6 (9%)
<i>KIELENTÄMISEN HAASTEITA</i>	15 (27%)	3 (30%)	18 (28%)
Vaikeaa kokonaisuudessaan	6 (11%)	0 (0%)	6 (9%)
Merkityksen tuottamista	7 (13%)	3 (30%)	10 (16%)
Merkitysten tulkinnan	2 (4%)	0 (0%)	2 (3%)

TAULUKKO 68. Kaikki kielentämisen huonojen puolien yläotsikot ilmiöineen arvosanaluokittain

	Arvosanaluokka			Yhteensä (N=64)
	4-6 (n=5, 8%)	7-8 (n=20, 31%)	9-10 (n=39, 61%)	
Kaikki ilmaisut (n=64)				
<i>KIELENTÄMISEN TUNTEMATTOMUUS</i>	0 (0%)	1 (5%)	3 (8%)	4 (6%)
Ei harjoitella matematiikan tunneilla	0 (0%)	0 (0%)	2 (5%)	2 (5%)
Kotona tekeminen ilman apua	0 (0%)	0 (0%)	1 (3%)	1 (2%)
Stressi tehtävistä	0 (0%)	1 (5%)	0 (0%)	1 (2%)
<i>KIELENTÄMISTEHTÄVIEN HAASTEITA</i>	3 (60%)	14 (70%)	9 (23%)	26 (41%)
Tehtävien vaikeus	1 (20%)	2 (10%)	2 (5%)	5 (8%)
Ymmärrettävyys	1 (20%)	6 (30%)	5 (13%)	12 (19%)
Sekoitti ajatuksia	1 (20%)	6 (30%)	2 (5%)	9 (14%)
<i>KIELENTÄMISTEHTÄVIEN JA KIELENTÄMISEN OMINAISUUKSIA</i>	2 (40%)	0 (0%)	11 (28%)	13 (20%)
Monimutkaistaa asioita	0 (0%)	0 (0%)	3 (8%)	3 (5%)
Työlästä	2 (40%)	0 (0%)	2 (5%)	4 (6%)
Turhaa	0 (0%)	0 (0%)	6 (15%)	6 (9%)
<i>KIELENTÄMISEN HAASTEITA</i>	0 (0%)	4 (20%)	14 (36%)	18 (28%)
Vaikeaa kokonaisuudessaan	0 (0%)	0 (0%)	6 (15%)	6 (9%)
Merkityksen tuottaminen	0 (0%)	3 (15%)	7 (18%)	10 (16%)
Merkitysten tulkinta	0 (0%)	1 (5%)	1 (3%)	2 (3%)

TAULUKKO 69. Yläotsikon ”Tyhjä tai en osaa sanoa” jakaumat arvosanaluokittain

Vastajat (n=63)	Arvosanaluokka			Yhteensä
	4-6	7-8	9-10	
KIELENTÄMISEN HUONOT PUOLET	n=5 (8%)	n=23 (37%)	n=35 (56%)	n=63 (100%)
Tyhjä	1 (20%)	6 (26%)	5 (14%)	12 (19%)
En osaa sanoa	0 (0%)	2 (9%)	1 (3%)	3 (5%)
Yhteensä	1 (20%)	8 (35%)	6 (17%)	15 (24%)

Tehtävä 1:

Kerro tai merkitse kuvaan miten saat selville suoran kulmakertoimen ja y- ja x-akselin leikkauspisteen a) kuvasta b) suoran yhtälöstä. Ilmoita myös niiden arvot.

a. kuvasta
kulmakertoimen:



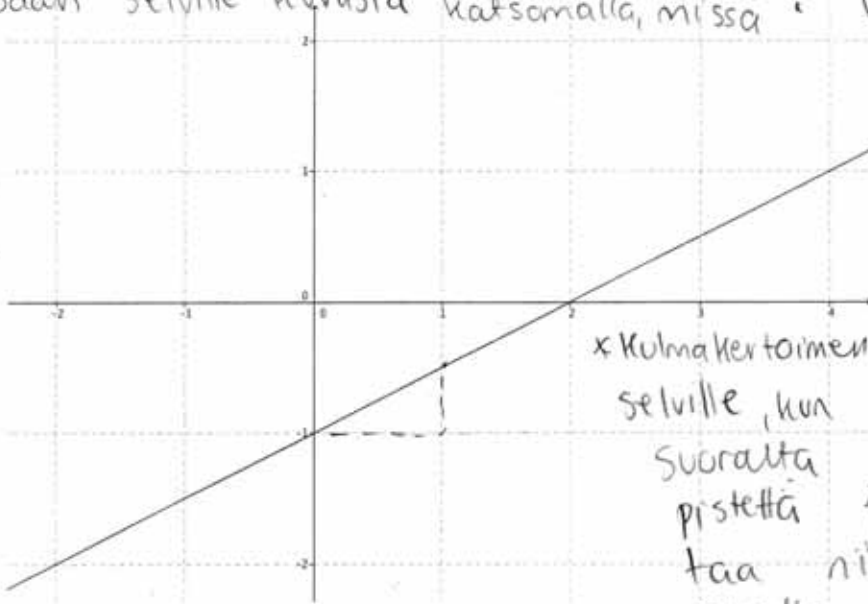
y-akselin leikkauspisteen:

Saan selville kuvasta katsomalla, missä kohta suora leikkaa y-akselin leikkauspiste on (0, -1)

x-akselin leikkauspisteen:

Saan selville kuvasta katsomalla, missä

ohjaa
vora
leikkaa
x-akselin
leikkauspiste
(2, 0)



x kulmakertoimen saa selville, kun valitsee suoralla kaksi pistettä ja muodostaa niiden avulla kolmion. Sen jälkeen siirtyä

akselilta yhden ruudun verran oikealle ja katsoo montako ruutua täytyy mennä ylös tai alas ennen kuin suora tulee vastaan.

b. suoran yhtälöstä

$$y = -2x + 3$$

kulmakertoimen:

Suoran yhtälön kaava on muotoa

$y = kx + b$. Kulmakertoimen on siis x:n

y-akselin leikkauspisteen: edessä oleva numero

eli -2.

y-akselin leikkauspiste on yhtälökaavassa viimeinen numero eli 3

x-akselin leikkauspisteen:

b, tällöin se on yhtälön viimeinen numero eli 3. leikkauspisteen saa selville laskemalla yhtälö ratkaistua niin, että y:n paikalle merkitään nolla.

$$0 = -2x + 3$$

$$2x = 3 \quad || : 2 \rightarrow x = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$$

suoran
yhtälön
kaava
on

$$y = kx + b$$

ESIMERKKIVASTAUKSIA MESTARILLISISTA MERKITYKSISTÄ
LINEAARINEN MALLI 1a ja 1b

Liite 12(2)

Tehtävä 1:

Kerro tai merkitse kuvaan miten saat selville suoran kulmakertoimen ja y- ja x-akselin leikkauspisteen a) kuvasta b) suoran yhtälöstä.
Ilmoita myös niiden arvot.

a. kuvasta

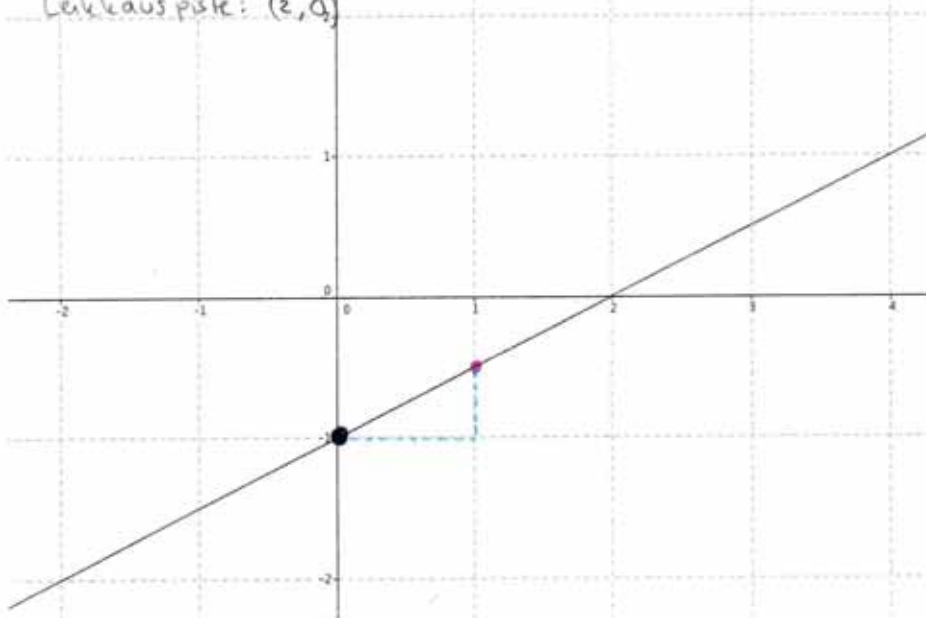
kulmakertoimen:

Siirrytään jostakin suoran pisteestä 1 ruutu oikealle ja siirrytään siihen kohtaan suoralla, joka on yllä x:n arvolla. Katsotaan paljonko suora nousee y-akselin leikkauspisteen:

Mennään siihen pisteeseen jossa suora leikkaa y-akselin
y-akselin leikkauspiste: $(0, -1)$

x-akselin leikkauspisteen:

Mennään x-akselin kohtaan jossa suora leikkaa sen
Leikkauspiste: $(\frac{3}{2}, 0)$



b. suoran yhtälöstä

$$y = -2x + 3$$

kulmakertoimen:

x:n kerroin on kulmakerroin

kulmakerroin: -2

y-akselin leikkauspisteen:

Vakiotermi kertoo kohdan missä suora leikkaa y-akselin

leikkauspiste: $(0, 3)$

x-akselin leikkauspisteen:

yhtälön y:n tilalle sijoitetaan nolla ja saatu x:n arvo kertoo x-akselin leikkauspisteen

$$0 = -2x + 3$$

$$2x = 3 \quad || :2$$

$$x = \frac{3}{2}$$

Leikkauspiste: $(\frac{3}{2}, 0)$

ESIMERKKIVASTAUKSIA MESTARILLISISTA MERKITYKSISTÄ
LINEAARINEN MALLI 1a ja 1b

Liite 12(3)

Tehtävä 1:

Kerro tai merkitse kuvaan miten saat selville suoran kulmakertoimen ja y- ja x-akselin leikkauspisteen a) kuvasta b) suoran yhtälöstä. Ilmoita myös niiden arvot.

a. kuvasta

kulmakertoimen:

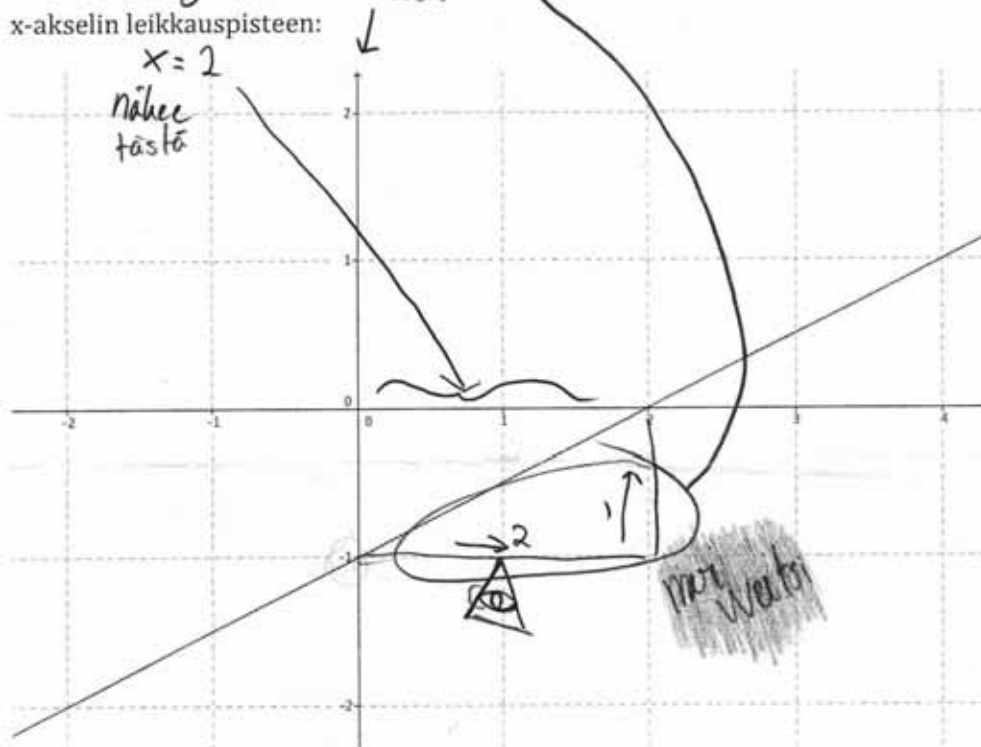
$$k = \frac{1}{2}$$

y-akselin leikkauspisteen:

$$y = -1$$

x-akselin leikkauspisteen:

$$x = 2$$



b. suoran yhtälöstä

kulmakertoimen:

$$k = -2$$

y-akselin leikkauspisteen:

$$y = 3 \text{ (viha numero aina y-akselin kohalla)}$$

x-akselin leikkauspisteen:

$$0 = -2x + 3$$

$$2x = 3 \quad | :2$$

$$x = \frac{3}{2}$$

$$y = -2x + 3$$

↑
k

ESIMERKKIVASTAUKSIA MESTARILLISISTA MERKITYKSISTÄ
LINEAARINEN MALLI 1a ja 1b

Liite 12(4)

Tehtävä 1:

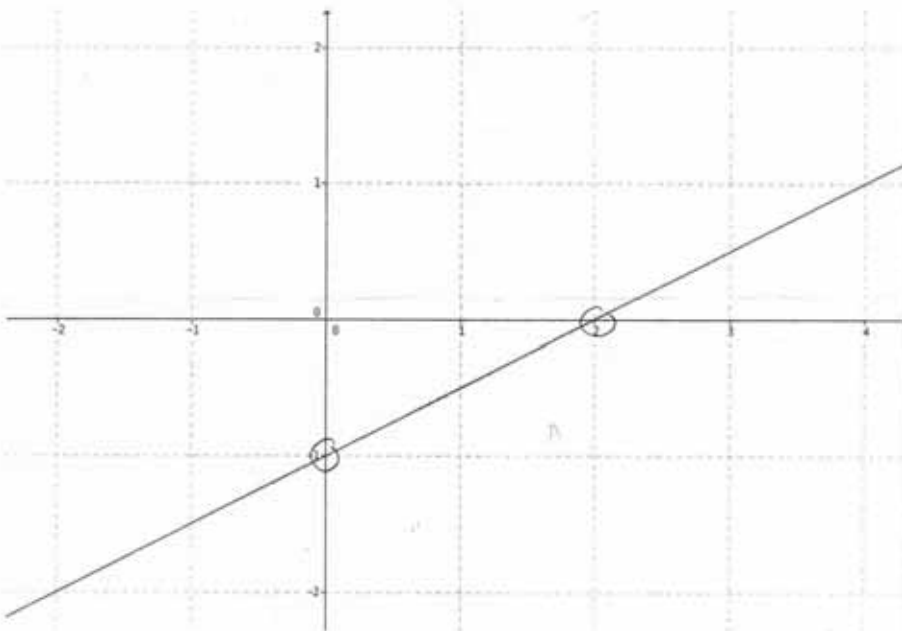
Kerro tai merkitse kuvaan miten saat selville suoran kulmakertoimen ja y- ja x-akselin leikkauspisteen a) kuvasta b) suoran yhtälöstä. Ilmoita myös niiden arvot.

a. kuvasta

kulmakertoimen: $\frac{1}{2}$ (osuuttaja kertoo kuinka monta "ruutua" liikutaan y- akselilla ja nimittäjä kertoo kuinka monta x- akselilla) tai $k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-1-0}{0-2}$

y-akselin leikkauspisteen:
(0, -1)

x-akselin leikkauspisteen:
(2, 0) Leikkauspiste kertoo sen pisteen koordinaatit, jossa suora leikkaa kyseisen akselin.



b. suoran yhtälöstä

$$y = -2x + 3$$

kulmakertoimen:

x:n kerroin on sama kuin suoran kulmakertoimen

y-akselin leikkauspisteen:

yhtälön perässä oleva vakio kertoo y- akselin leikkauspisteen

x-akselin leikkauspisteen:

$$-2x + 3 = 0$$

$$-2x = -3 \quad \parallel : -2$$

$$x = \frac{1}{2}$$

Suoran ja x-akselin leikkauspiste on piste, jonka y-koordinaatti on

ESIMERKKIVASTAUKSIA MESTARILLISISTA MERKITYKSISTÄ LINEAARINEN MALLI A2

Liite 12(5)

Tehtävä 2a:

Erään tehtävän ratkaisu on $y = 1,5x + 20$.

Kuvaa esimerkkitilanne ja kirjoita siitä kirjallinen tehtävänanto, jonka ratkaisuna saat mainitun yhtälön.

Suunnittelu:

$$y = 1,5x + 20$$

$$y - a = 1,5(x - b)$$

$$y - a = 1,5x - 1,5b$$

$$y = 1,5x - 1,5b + a$$

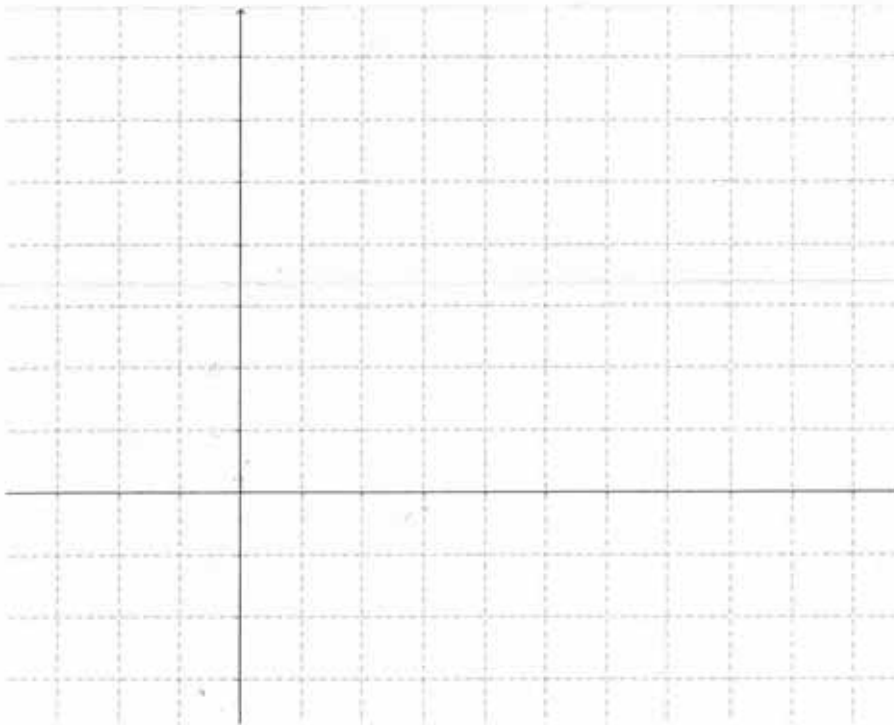
$$y = 1,5x - 1,5 \cdot 14 + 41$$

$$y = 1,5x + 20$$

Voit käyttää suunnittelussa apunasi koordinaatistoa.

Näin pyörittelemällä \Rightarrow saadaan arvot, joita \Rightarrow voidaan käyttää tehtävässä.

suora, jonka kulmakerrain on 1, ja piste, jonka kautta suora kulkee on (b, a) eli $(14, 41)$



Kirjallinen tehtävänanto:

Finnair liikennöi reitillä $y = 1,5x + 10$.

Halpalentoyhtiö Ryanair alkaa liikennöimään pudes halvemmalla samaa reittiä. Etsi Ryanairille reitti, joka on yhdensuuntainen Finnairin kanssa, mutta turvallisuus määräysten nojalla koneen on lennettävä koordinaattien $(14, 41)$ kautta.

a) Muodosta lentoreitin yhtälö.

b) Piirrä lentoreitit.

Tehtävä 2a:

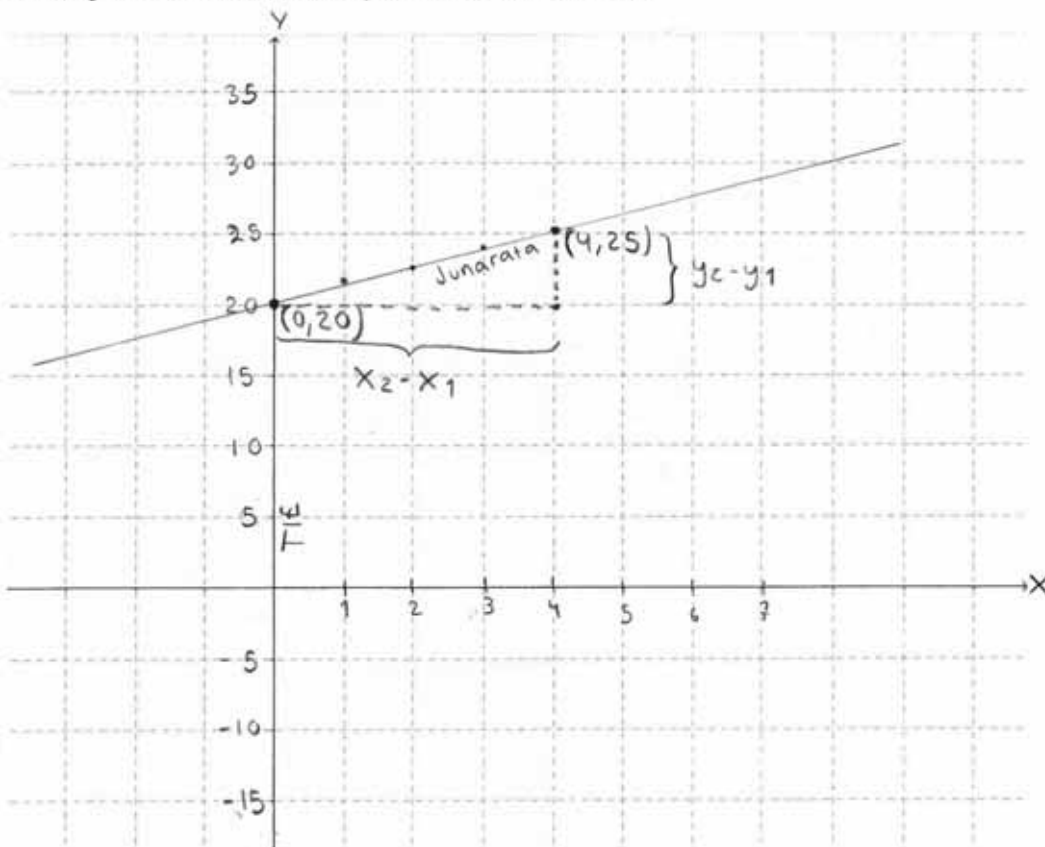
Erään tehtävän ratkaisu on $y = 1,5x + 20$.

Kuvaa esimerkkitilanne ja kirjoita siitä kirjallinen tehtävänanto, jonka ratkaisuna saat mainitun yhtälön.

Suunnittelu:

Pitää laskea suoran kulmakerroin kaavalla $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$
kun se on laskettu voidaan muodostaa
yhtälö sijoittamalla kulmakerroin x :n kertoimeksi
ja annetun pisteen $(0,20)$ y -koordinaatti vakio-
termiksi

Voit käyttää suunnittelussa apunasi koordinaatistoa.



Kirjallinen tehtävänanto:

Kaupunki kartoittaa uutta junarataa. Rata ylittää tien (= y -akseli)
Pisteessä $(0,20)$ ja jatkaa matkaa lineaarisesti pisteeseen $(4,25)$. Laske
suoran kulmakerroin (k) ja muodosta suoran yhtälö.

ESIMERKKIVASTAUKSIA MESTARILLISISTA MERKITYKSISTÄ
LINEAARINEN MALLI A2

Liite 12(7)

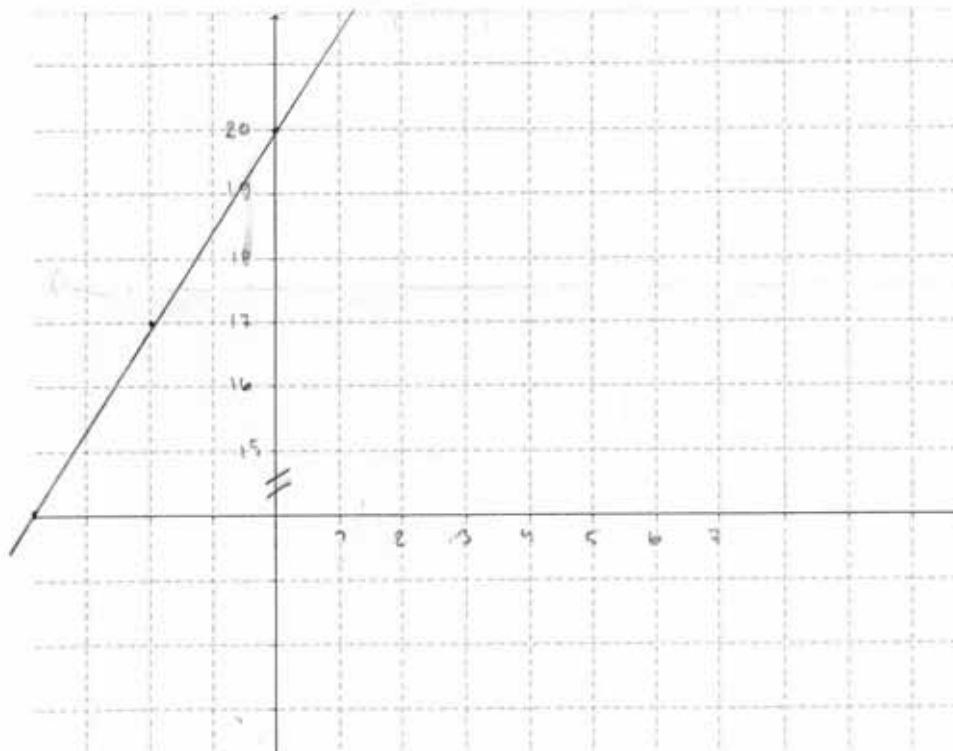
Tehtävä 2a:

Erään tehtävän ratkaisu on $y = 1,5x + 20$.

Kuvaa esimerkkitalanne ja kirjoita siitä kirjallinen tehtävänanto, jonka ratkaisuna saat mainitun yhtälön.

Suunnittelu:

Voit käyttää suunnittelussa apunasi koordinaatistoa.



Kirjallinen tehtävänanto:

Tehdasompelija saa 20€ päiväpalkan lisäksi jokaisesta valmistuneesta tuotteesta 1,5€. Muodosta yhtälö ja piirrä suora ompelijan päivässä tienäämmälle rahasummalle, kun ompelija valmistaa päivässä x määrän tuotetta.

~~Suora kulkee pisteiden $(-2, 17)$ ja $(2, 23)$ kautta. Lauske suoran kulmatorkein ja muodosta suoran yhtälö.~~

Selitä ja perustele ratkaisun vaiheet.

$y = -2x + 10$ Suoran B yhtälö, joka muodostuu keroimesta ja vakiotermitä ^(= kohta, jossa suora leikkaa y-akselin)

$y = \frac{1}{2}x - 8$ vastaavat asiat kuin edellisessä kohdassa, mutta suoralle A ^(molemmat on merkinnat edelliselle sivulle)

$-2x + 10 = \frac{1}{2}x - 8$ yhtälöistä muodostetaan yhtäöpari sijoittamalla edellävät yhtälöt ($y=y$)

$-2\frac{1}{2}x = -18 \parallel \cdot (-2)$ x:t ja niitä edellävät luvut sijoitetaan vasemmalle ja muut luvut oikealle ^{ja kerrotaan x:ää edeltävällä luvulla}

$5x = 36 \parallel : 5$ kun $-$ merkinen luku kerrotaan $(-2\frac{1}{2} \cdot (-2))$ niin saadaan $5x$, joka jaetaan 5 etä saa x:n ^{keronimen pois}

$x = \frac{36}{5} = 7\frac{1}{5}$ molemmat puolet jaetaan kyseisellä 5:llä ja saadaan tulokseksi $x = 7\frac{1}{5}$

$y = -2 \cdot 7\frac{1}{5} + 10$ yhtälöön $y = -2x + 10$ sijoitetaan edellisen kohdan vastaus $x = 7\frac{1}{5}$ x:n paikalle.

$y = -14\frac{2}{5} + 10$ kertomalla $2 \cdot 7\frac{1}{5}$ saadaan yhtälöä laskettua eteenpäin tuloksena $y = -14\frac{2}{5} + 10$

$y = -4\frac{2}{5}$ $-14\frac{2}{5} + 10$ lasketaan ja tulokseksi saadaan $y = -4\frac{2}{5}$, joka taas on nyt leikkauspisteen y -koordinaatti

$P = (x, y) = (7\frac{1}{5}, -4\frac{2}{5})$ Kahden suoran leikkauspisteen koordinaatit ovat $(7\frac{1}{5}, -4\frac{2}{5})$ sijoitetaan saatu $x = 7\frac{1}{5}$ ja $y = -4\frac{2}{5}$ tulokseen $P = (x, y)$

Mikä on voinut olla tehtävänanto?

Tehtävänanto on todennäköisesti ollut: "Mikä on kahden kuvassa näkyvän suoran leikkauspiste P ?"

ESIMERKKIVASTAUKSIA MESTARILLISISTA MERKITYKSISTÄ
POTENSILAUSEKE 3

Liite 12(9)

Herää kysymys: Mitä tapahtuisi, jos kantaluku onkin nolla, tai kun eksponentti on nolla?

3. Ensinnä oletetaan, että kantaluku on erisuuri kuin nolla, ts. $k \neq 0$.

Nyt jos eksponentti on nolla ($n=0$), niin tästä seuraa, että

(Selitä tyhjille riveille, miten päättely etenee.)

k^0
 $= k^{1-1}$
 $= \frac{k^1}{k^1}$
 $= \frac{k}{k}$
 $= 1$

Päättele toimii molempiin suuntiin
 k^0 on tullut eksponentissa 0:sta kahden saman
luvun vähennyslaskusta. Vähennyslasku tuli laskusääntöjen
mukaisesti samankaltaisten potenssien osamäärästä.
Kerroin ylässä on turha eikä sitä tarvitsisi merkitä jolloin
tulee $\frac{k}{k}$. k 't supistuvat pois ja jäljelle jää ykkönen.

Eli kun kantaluku on erisuuri kuin nolla ja eksponentti on 0
niin tulos on aina 1.

4. Käytä edellisten kohtien 1-3 määritelmiä hyödyksi ja tutki mitä tapahtuu, jos kantalukuna on nolla ($k=0$). Käy läpi tapaukset a) ($n>0$), b) ($n=0$) ja c) ($n<0$).

a) (vrt. kohta 1)

0^n ($n>0$) vastaus on aina 0

koska $\underbrace{0 \cdot 0 \cdot 0 \dots \cdot 0}_n = 0$

b) (vrt. kohta 3)

$$\begin{aligned} 0^0 &= \text{ei määritelty} \\ &= 0^{1-1} \\ &= \frac{0^1}{0^1} \\ &= \frac{0}{0} \Rightarrow \text{nollalla ei voi jakaa} \end{aligned}$$

c) (vrt. kohta 2)

0^n ($n<0$), eli 0:n eksponentti on negatiivinen
= ei määritelty

$$0^{-n} = \frac{1}{0^n} = \frac{1}{0} = \text{ei määritelty, nollalla ei voi jakaa.}$$

ESIMERKKIVASTAUKSIA MESTARILLISISTA MERKITYKSISTÄ
EKSPONENTTIFUNKTIO a ja b

Liite 12(11)

Tehtävä:

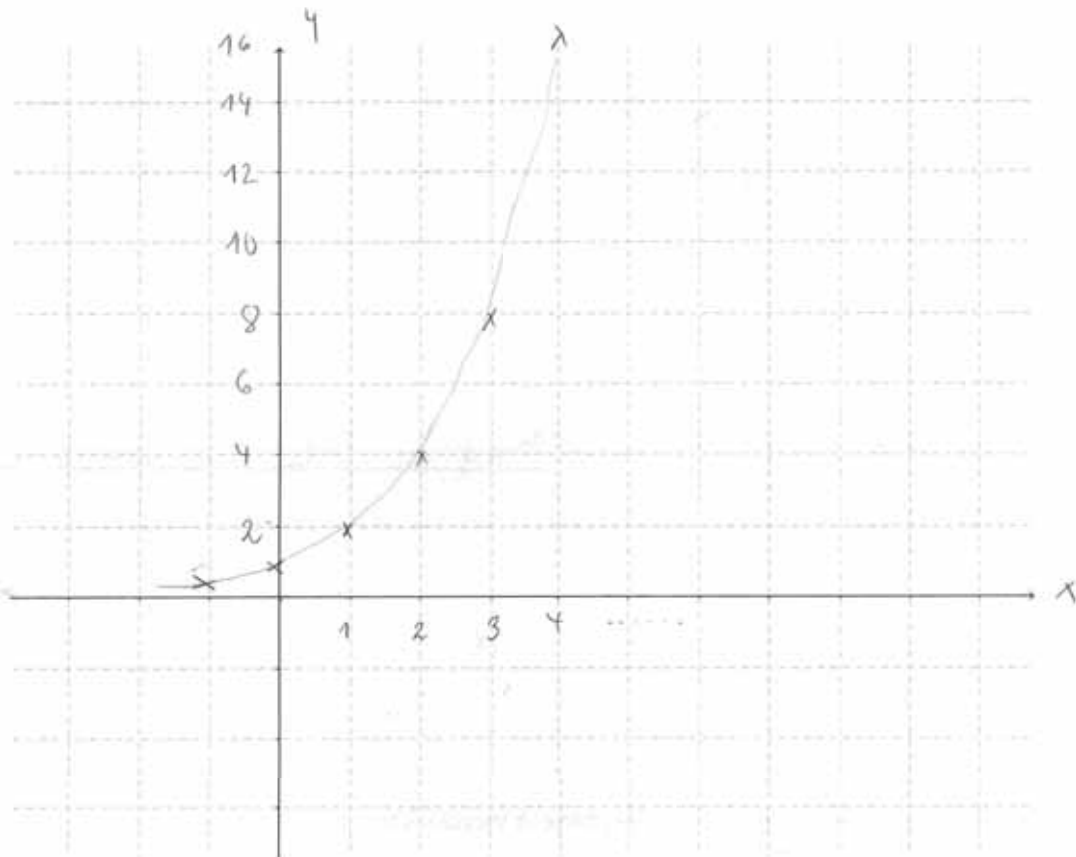
a. Selitä, mikä on muuttujan x rooli funktiossa $f(x) = 2^x$.

Ts. kerro mitä funktiossa oikein tapahtuu muuttujan x kasvaessa.

x	$f(x) = 2^x$
1	2
2	4
3	8
4	16
0	1

→ KASVAA EKSPONENTIAALISESTI

b. Piirrä kuvaaja, jossa on kuvattu kohdan-a funktio.



Katso kuvaajasta

b.1. Missä kohdassa funktion arvo on tullut 4-kertaiseksi alkutilanteeseen ($x=0$)
nähdessä?

$f(0) = 1$ $f(?) = 4$ $f(2) = 4$

b.2. Kuinka suuri on funktion arvo kohdassa $x=3$?

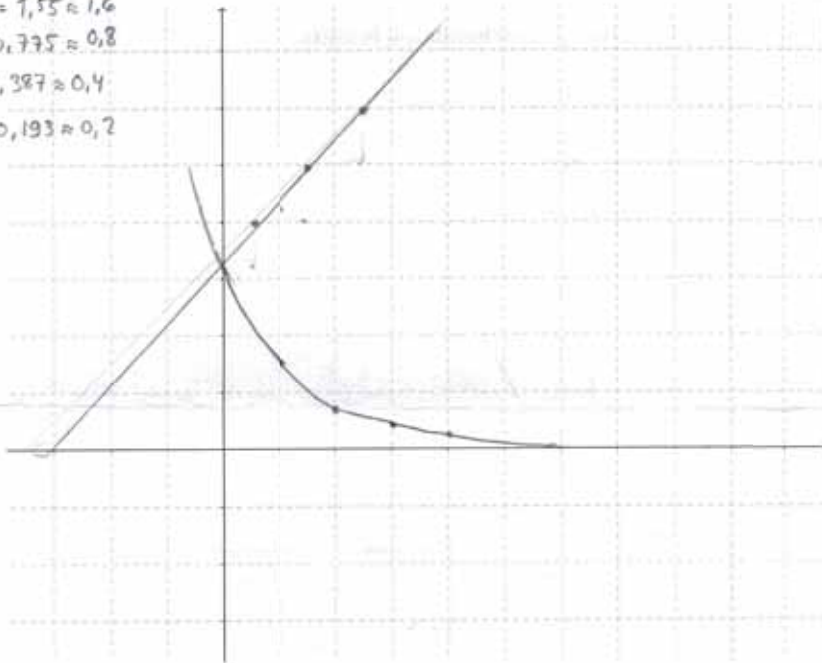
$f(3) = 8$

- c. Esittele funktio, jossa seuraava arvo on aina $\frac{1}{2}$ pienempi, kuin edellinen arvo ja keksi joku esimerkkitalanne tästä. Piirrä siitä myös kuvaaja.

Sivohaessa tehokkealla desinfiointiaineella baliteenin leikkauksen määrä ja massa pienenee joka kerta puolella. Tällä hetkellä massa on 3,1g

$$f(x) = 0,5^x \cdot 3,1$$

x	f(x) = 0,5^x \cdot 3,1
1	0,5^1 \cdot 3,1 = 1,55 \approx 1,6
2	0,5^2 \cdot 3,1 = 0,775 \approx 0,8
3	0,5^3 \cdot 3,1 = 0,3875 \approx 0,4
4	0,5^4 \cdot 3,1 = 0,19375 \approx 0,2
5	0,096875 \approx 0,1



Milloin funktio saa arvon nolla? Perustele vastauksesi.

Kun x on negatiivinen...

Piirrä samaan koordinaatistoon lineaarisen funktion kuvaaja.

Funktion lauseke: $f(x) = 0,5x + 3,1$

Missä kohdassa funktiot saavat saman arvon?

y-akselin leikkauspisteessä $(0, 3,1)$

Tehtävä:

Paavo Pankkiiri puhua pulputti. Hän lupasi, että alkusijoituksesi ollessa a euroa ja ajan x ollessa vuosia, se tulee kasvamaan seuraavan yhtälön mukaisesti: $2^x \cdot a = 9600$ euroa.

Hullaannut Paavon karismaattisesta esityksestä ja kotiin palatessasi olit aivan varma, että hetken kuluttua tililläsi on lähes 10 000 euroa! Senhän voisi sijoittaa vaikka ensiasuntoon - oma tupa, oma lupa!

Mitä Paavo siis lupasi?

Vuosien määrä olisi voinut kaksi potenssina, joka kerrotaisiin rahasummalla, summa siis tuplaantuisi joka vuosi eksponentiaalisesti euroon asti. Mitä enemmän rahaa sitä nopeammin saa summan ja mitä enemmän aikaa sitä pienemmästä summasta voi aloittaa.

Kuinka nopeasti saavutat Paavon puheiden mukaan 9600 euroa, jos alkusijoituksesi on 1200 euroa?

$$2^x \cdot 1200 = 9600 \quad || : 1200 \quad \text{voi myös päätellä}$$

$$2^x = 8 \quad || \lg$$

$$x \cdot \lg 2 = \lg 8 \quad || : \lg 2 \Leftrightarrow x = 3 \quad \text{V: kolmessa vuodessa}$$

Mitä jos sijoitatkin 300 euroa, niin milloin sijoituksesi arvo on 9600 euroa?

$$2^x \cdot 300 = 9600 \quad || : 300 \Leftrightarrow 2^x = 32$$

$$x = 5 \quad \text{pätellen} \quad \text{koska } 2^5 = 32 \quad \text{V: 5 vuotta}$$

Olet malttamaton ja haluat saada 9600 euroa jo 2,5 vuoden kuluttua.

Kuinka paljon sinun tulee sijoittaa alussa?

$$2^{2,5} \cdot a = 9600 \quad || : 2^{2,5}$$

$$a = 1697,06 \quad \text{V: 1700 €}$$

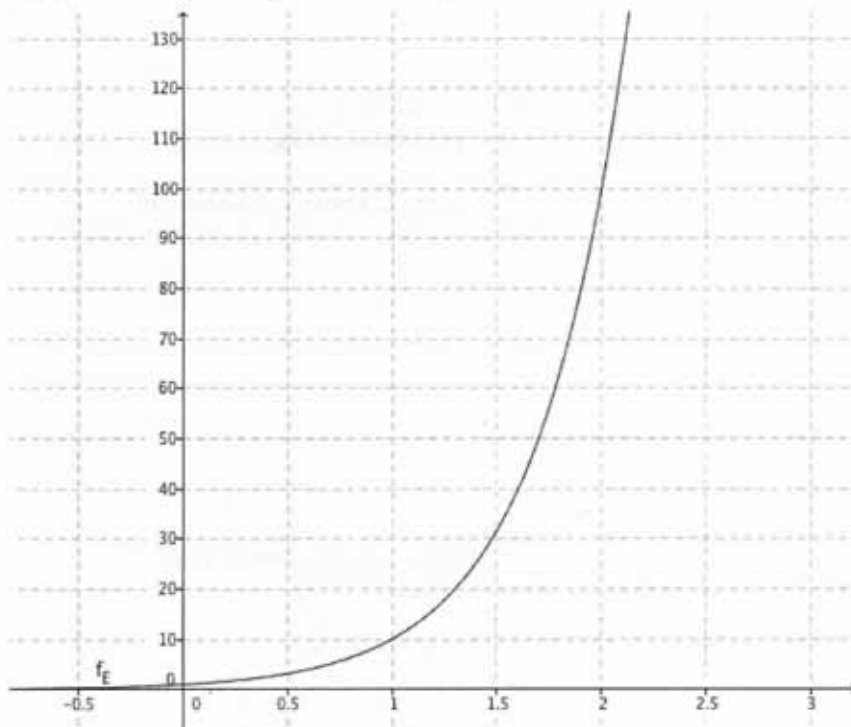
Luottaisitko tosielämässä Paavon lupaukseen? Miksi?

En suoraan sillä luottaisin ja taloustilanne voi muuttua jolloin Paavolla ei ehkä olisi varaa maksaa korkoa noin paljon.

ESIMERKKIVASTAUKSIA MESTARILLISISTA MERKITYKSISTÄ
 EKSPONENTTIYHTÄLÖ JA LOGARITMIN MÄÄRITELMÄ a ja b

Liite 12(14)

Alla on esitetty erään eksponenttifunktion kuvaaja.

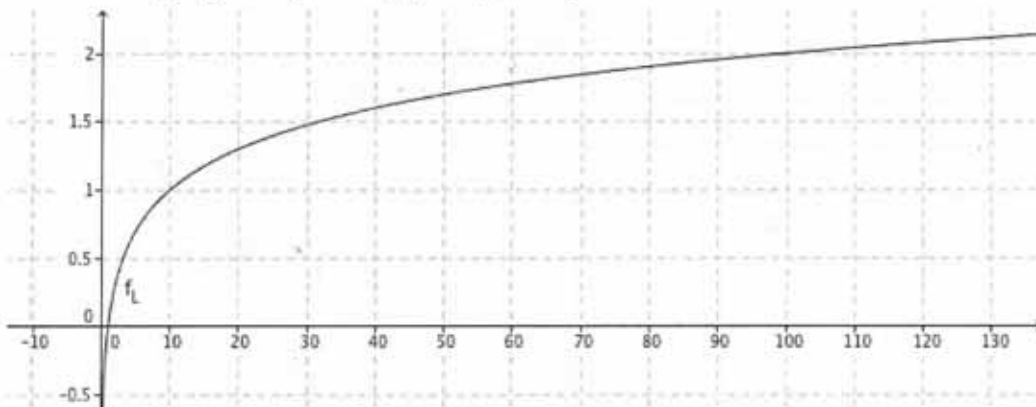


a. Täytä tyhjät kohdat sopivilla sanoilla.

Funktion arvo, $y = f(x)$, muodostuu, kun kantaluvun 10, eksponenttina on x.

b. Muotoile eksponenttifunktio matemaattiseen muotoon: $f(x) = 10^x$

Alla on esitetty logaritmifunktion, $\lg x = y$, kuvaaja.



c. Vertaile omin sanoin logaritmifunktiota ja em. eksponenttifunktiota.

No kun vertailee noita kyseessä olevien funktioiden kuvaajia -
 niin nähdään x ja y akselit on vaihtaneet paikkaa.

Ja esim. kun eksponentti funktio leikkaa pisteen (1,10) niin
 logaritmifunktio leikkaa pisteen (10,1)

Eli siis nämä funktiot samat mutta vään käänteiset

Tehtävä 2:

Perustele omin sanoin mitä alla on tehty ja miksi.

$$k^x = a$$

Lisätään yhtälön molemmille puolille
 10^{\lg} koska $k = 10^{\lg k}$, $a = 10^{\lg a}$.

$$(10^{\lg k})^x = 10^{\lg a}$$

Potenssin potenssin sääntöjen mu-
kaan muuttam kertolaskuksi.

$$10^{x \cdot \lg k} = 10^{\lg a}$$

Koska yhtälön mukaan potenssit on

$$x \cdot \lg k = \lg a$$

yhtäsuuret ja siten jotta x

saadaan yksin toiselle puolelle

$$x = \frac{\lg a}{\lg k}$$

jaetaan $\lg k$:lla

Miten siis voi hyödyntää logaritmia eksponenttiyhtälöiden ratkaisussa?

Exponentti yhtälön eksponentin saa
selville lukujen k ja a logaritmien osamäärästä.

Tehtävä:

Selitä omin sanoin mitä laskussa tapahtuu ja miksi.

11^{1309} ja 12^{1209}	<u>Kahden luvun verrata</u> luvut ovat kuitenkin liian suuria laskimella katsottaviksi. Avuksi tulee logaritmi!
$11 = 10^{\lg 11}$	<u>Muutetaan luku kymmenpotenssiksi</u>
$(10^{\lg 11})^{1309}$	<u>Tällöin se on helpompi laskea</u>
$10^{1309 \cdot \lg 11}$	<u>EkspONENTIT kerrotaan</u> <u>keskenään ja saadaan</u> <u>yksi eksponentti</u>
$1309 \cdot \lg 11 \approx 1363,2$	<u>lasketaan eksponentin</u> <u>kertolasku</u>
$10^{1363,2}$	<u>saadaan vertailukelpoinen luku</u>
$12 = 10^{\lg 12}$	<u>Sama toistetaan</u>
$(10^{\lg 12})^{1209}$	<u>toiselle luvulle, jotta</u>
$10^{1209 \cdot \lg 12}$	<u>saadaan kaksi kymmenpotenssi-</u>
$1209 \cdot \lg 12 \approx 1304,7$	<u>muotoa jota verrata</u>
$10^{1304,7}$	<u>_____</u>
$10^{1363,2} > 10^{1304,7}$	<u>Kahden kymmenkantaisella</u> <u>logaritmillä sievennettyä</u>
$11^{1309} > 12^{1209}$	<u>luku on helpompi verrata.</u> <u>Sis 11^{1309} on suurempi.</u>

Mikä on voinut olla tehtävänanto?

Selvitä kumpi on suurempi luku