TAMPEREEN YLIOPISTO
Pro gradu -tutkielma

Laura Mantere

Peliteoriaa sekä elektronisten rahapika-arpojen reunaehtojen tutkintaa

Informaatiotieteiden yksikkö
Matematiikka
Kesäkuu 2015

Tampereen yliopisto
Informaatiotieteiden yksikkö
MANTERE, LAURA:
Peliteoriaa sekä elektronisten rahapika-arpojen reunaehtojen tutkintaa
Pro gradu -tutkielma, 71 s.
Matematiikka
Kesäkuu 2015

Tiivistelmä

Tutkielma jakautuu kahteen osaan, joista ensimmäisessä esitellään peliteorian perusteita. Peliteoria tutkii vuorovaikutteisia tilanteita eli pelejä, joissa yksilöt eli pelaajat tekevät valintoja. Teoria pyrkiikin mallintamaan, millaisia päätöksiä pelaajat tulevat tekemään erilaisissa peleissä.

Tutkielmassa esitettäviin peliteorian perusteisiin kuuluu peliteorian keskeisiä käsitteitä ja merkintätapoja sekä aksioomat. Lisäksi käsitellään pelin ekstensiivinen määritelmä ja johdetaan siitä strategiamuotoinen määritelmä. Tutkielmassa esitellään myös keinoja, joilla voidaan helpottaa pelien ratkaisemista eli sen selvittämistä, millaisia päätöksiä pelaajat tulevat pelissä todennäköisesti tekemään.

Tutkielman toinen osa on pohdiskelevampi kuin ensimmäinen osa, sillä siinä haetaan reunaehtoja rahapeliyhtiö Veikkaus Oy:n elektronisille rahapika-arvoille eli eArvoille. Tämä on yhtiön kannalta relevanttia tietoa, sillä eArvat ovat Veikkauksen yksi eniten kasvavimmista tuotteista. Tällöin niiden tuotekehityksenkin tulisi olla ketterää, mikä taas edellyttää eArpojen reunaehtojen määrittelyä.

eArvat ovat sähköisiä versioita myyntipisteissä myytävistä raaputusarvoista, joista voi voittaa rahaa. Jotta tiedettäisiin täsmällisesti, mitä eArvat ovat, konstruoidaan ensiksi eArvan määritelmä. Sen jälkeen etsitään esimerkkien kautta sellaisia tekijöitä, jotka rajoittavat joko teoreettisesti tai käytännön tasolla jonkin tietyn pelin toteuttamista eArpana. Tarkoituksena on siis löytää eArpojen reunaehdot. Tutkielman lopuksi esitellään löydetyt ehdot ja jaetaan ne liiketoiminnallisiin, matemaattisiin ja lainopillisiin rajoitteisiin.

Tutkielman teoriaosuuden päälähdekirjallisuutena on käytetty Roger B. Myersonin teosta *Game Theory: Analysis of Conflict*. eArpoja koskeva osuus pohjautuu Veikkauksen Päivittäispelit-liiketoimintaryhmän tuotekehityspäällikkö Harri Järvisen työssään tekemiin havaintoihin. Järvinen vastaa erityisesti eArpojen tuotekehityksestä.

Sisältö

1 Johdanto

Tällä hetkellä digitalisoituminen on yksi maailmaa näkyvimmin muokkaavista megatrendeistä. Digitalisoituminen on aiheuttanut sen, että rahapeliyhtiö Veikkaus Oy on panostanut internet-pelipalveluunsa vuosi vuodelta yhä enemmän ollen Suomessa yksi verkkokauppojen edelläkävijöistä. Työ on tuottanut tulosta, mikä nähdään yhtiön jokavuotuisesta kasvusta. Palvelujen digitalisoimisen lisäksi yhtiö on keskittynyt rahapelialan voimakkaimmin kasvavaan osa-alueeseen: nopearytmisiin peleihin. Kun liiketoiminnan painopisteet on valittu yleisen markkinatilanteen ja asiakkaiden aidon kysynnän pohjalta, heikko taloudellinen tilanne ei ole päässyt kalvamaan yhtiön menestystä.

Nopearytmisyyden kysyntään yhtiö on vastannut kehittämällä pelejä, joita arvotaan vähintään kerran päivässä. Tällaisia Veikkauksen pelejä ovat esimerkiksi Naapurit ja Keno. Pelien kehittämisen lisäksi urheiluvedonlyöntikohteiden päivittäistä määrää on moninkertaistettu. Veikkaus tarjoaa myös internet-pelipalvelussaan jännitystä jokaiseen asiakkaan valitsemaan hetkeen ympäri vuorokauden, sillä tarjolla on muun muassa arvontapelejä, joiden arvonta suoritetaan vain muutaman minuutin välein.

Yksi suosituimmista tuotteista on kuitenkin elektroninen rahapika-arpa, eli tuttavallisemmin eArpa. eArvat ovat digitaalisia versioita Veikkauksen myyntipisteissä myytävistä perinteisistä raaputusarvoista, kuten Ässä-arvoista. Suosiosta kertoo tuoteryhmän huima kasvu: vuonna 2014 eArpojen liikevaihto kasvoi 71 prosenttia edellisvuoteen verrattuna (ks. [8]).

Jotta yhtiö voisi edelleen kasvattaa tätä asiakkaita selvästi kiinnostavaa tuoteryhmää mahdollisimman tehokkaalla ja tuottavalla tavalla, on ensiksi luotava pelisäännöt uuden eArvan kehittämiselle. Usein uuden eArpa-pelin idea lähtee teemasta eli muun muassa siitä, mitä hahmoja, miljöötä tai värejä tullaan käyttämään. Tämän lisäksi eArvalla on pelimekaniikka. Pelimekaniikka on ikään kuin pelin logiikka, jolla se etenee. Monet pelimekaniikoista pohjautuvat jonkin yleisesti tunnetun pelin, esimerkiksi jonkin korttipelin, pelilogiikkaan — yksi suosituimmista eArvoista pohjautuukin yksinkertaisesti pyramidipasianssiin. Jotta pelimekaniikkojen laaja kirjo ja kaikki niihin liittyvät mahdollisuudet eivät turhaan hidastaisi eArpojen kehitystyötä, on syytä määritellä eArvan käsite huolellisesti. Tämän määritelmän avulla voidaan rajata, mitkä tuotteet ovat eArpoja ja mitkä eivät. Lisäksi kehitystyön kannalta erityisen tärkeää on, että määritelmä antaa viitteen siihen, mikä peli voidaan edes yrittää toteuttaa eArpana ja mikä ei. Tämä määritelmä ja siihen pohjautuvia esimerkkejä käsitellään tutkielman luvussa 3. Luku pohjautuu Veikkauksen Päivittäispelit-liiketoimintaryhmän tuotekehityspäällikkö Harri Järvisen havaintoihin, joita hän on tehnyt eArpoja kehittäessään.

eArpojen määritelmän konstruointia ennen tutkielmassa perehdytään peliteorian perusteisiin tutkielman luvussa 2. Tämän teoriaosuuden lähdekirjallisuutena on käytetty Nobel-palkitun Roger B. Myersonin teosta *Game Theory:*

Analysis of Conflict (ks. [3]). Peliteoria tutkii niitä tilanteita, joissa yksi tai useampi yksilö tekee erinäisiä valintoja ja päätöksiä, joilla hän vaikuttaa jollakin tavalla muihin. Yksilöt voivat olla henkilöiden lisäksi myös esimerkiksi instituutioita, joten peliteoriassa pyritään luomaan geneerisiä malleja siitä, mitä päätöksiä ja valintoja yhteiskunnissa yleisesti tehdään sekä miten ja miksi juuri näin tapahtuu.

Tutkielmaa lukiessa tilastotieteen perustason käsitteiden tunteminen saattaa olla eduksi, mutta muutoin erityisiä pohjatietoja ei edellytetä. Erityisesti peliteorian pohjatietoja ei vaadita lainkaan, sillä heti tutkielman aluksi esitellään peliteoriassa yleisesti käytetyt käsitteet ja merkintätavat sekä aksioomat, joihin peliteoria perustuu. Lisäksi esitellään eräs keskeisimmistä peliteorian lauseista ja eräs keino edesauttaa päätöksentekotilanteen analysointia. Tämän jälkeen käsitellään kahta erimuotoista peliä: ekstensiivi- ja strategiamuotoista peliä. Näitä pelien eri lähestymiskulmia havainnollistetaan esimerkeillä. Tutkielman teoriaosuuden lopuksi esitellään Nashin tasapainon käsite.

2 Peliteoriaa

2.1 Alustavia tarkasteluja

Tarkastellaan aluksi yleisimpiä peliteoriassa käytettäviä käsitteitä sekä merkintätapoja. Lisäksi käsitellään aksioomat, joiden pohjalta peliteoriaa rakennetaan. Luvussa esitellään myös yksi peliteorian keskeisimpiä lauseita, odotetun hyödyn maksimoinnin lause, sekä tutkitaan, mitä dominointi tarkoittaa peliteoriassa.

2.1.1 Käsitteistöä ja merkintätapoja

Ensimmäiseksi käsitellään peliteorian yleisimpiä käsitteitä ja merkintätapoja. Nämä merkinnät ja käsitteet pohjautuvat päälähdeteoksen ensimmäisessä luvussa esitettyihin merkintöihin ja käsitteisiin (ks. [3] s. 1–9).

Peliteoria tutkii sellaisia tilanteita, joissa yksi tai useampi yksilö tekee päätöksiä ja vaikuttaa näin muiden yksilöiden olotilaan. Yksilö voi olla yksittäinen henkilö, jokin organisaatio tai mikä tahansa muu päätöksiä tekevä taho. Jatkossa näitä elimiä kutsutaan yksinkertaisesti *päätöksentekijöiksi*. Esimerkiksi myyntineuvottelija, hallitus tai liiketoimintayksikön ohjausryhmä voivat olla päätöksentekijöitä.

Peliteorian avulla voidaan luoda matemaattisia, yleisen tason malleja, jotka kertovat päätöksentekijöiden käyttäytymisestä päätöksentekotilanteissa. Päätöksentekotilanteita voivat olla esimerkiksi sopimuksen neuvottelu tai markkinointilinjausten tekeminen. Termi 'peliteoria' onkin hieman harhaanjohtava, sillä päätöksentekotilanteet ovat usein kaukana varsinaisista peleistä. Nimityksen tilalle onkin ehdotettu muun muassa konfliktianalyysia, mutta peliteorian vakiintunut käsite on pysynyt käytössä muista ehdotuksista huolimatta.

Koska jo itse peliteorian käsite on lavea ja kattaa mitä erilaisimmat päätöksentekotilanteet, myös peliteoriassa käytettävät alakäsitteet on ymmärrettävä laveasti. *Pelillä* tarkoitetaan mitä tahansa sosiaalista tilannetta, johon liittyy vähintään kaksi yksilöä. Esimerkiksi myyntitilanne voidaan nähdä pelinä. Pelissä mukana olevia yksilöitä kutsutaan *pelaajiksi*, jolloin esimerkiksi myyjä ja asiakas ovat pelaajia. Pelaajien oletetaan olevan *rationaalisia* ja *älykkäitä*. Myös nämä pelaajien ominaisuudet ovat peliteoreettisia käsitteitä ja ne eroavat jossakin määrin arkikielessä käytetyistä samoista käsitteista.

Peliteoriassa rationaalinen päätöksentekijä tekee päätökset sen mukaan, että ne edistävät aina hänen oman tavoitteensa saavuttamista. Tavoitteen oletetaan olevan voiton maksimointi: päätöksentekijä pyrkii maksimoimaan antamastaan panoksesta odotettavissa olevan hyödyn. Tätä tulosta kutsutaan *odotetun hyödyn maksimoinnin lauseeksi* (ks. lause 2.1). Odotetun hyödyn arvoa taas arvioidaan ja mitataan *hyötyasteikolla*, joka kertoo, minkä vaihtoehdon odotettu hyöty on suurin, eli toisin sanoen minkä vaihtoehdon päätöksentekijä valitsee maksimoidakseen odotetun hyödyn.

Päätöksentekijää kutsutaan älykkääksi, jos hän tietää pelistä kaiken, mitä on tiedettävissä, ja voi tehdä tilanteesta kaikki ne päätelmät, jotka ovat pääteltävissä. Peliteoriassa päätöksentekijöiden oletetaan siis olevan tällä tavoin älykkäitä, jolloin myös oletetaan, että he ymmärtävät peliteoriaa ja siinä mallinnettuja ennusteita yksilön käyttäytymisestä. Tällainen ennuste voisi olla esimerkiksi juuri odotetun hyödyn maksimoinnin periaate.

Todellisuudessa erityisesti ihmiset harvoin käyttäytyvät täysin rationaalisesti tai älykkäästi peliteorian näkökulmasta. Tämä on kuitenkin hyväksyttävä, sillä itse asiassa teoria, joka väittää yksilöiden käyttäytyvän täysin jonkin mallin mukaisesti, saattaa kääntyä itseään vastaan. Kuvitellaan esimerkiksi, että jokin teoria ennustaa, että joitakin yksilöitä tullaan systemaattisesti johdattamaan kohti kohtalokkaiden virheiden tekemistä. Jos ei hyväksytä, että tätä teoriaa ei voida täysin yleistää yksilötasolle, teoria voidaan kumota kokonaan. Nimittäin jossakin vaiheessa nämä yksilöt oppivat joistakin ulkopuolisista lähteistä, miten näissä tilanteissa voisi toimia itsensä kannalta suotuisammin, jolloin yksilöiden systemaattinen johdattaminen virheisiin ei enää onnistu jokaisen yksilön kohdalla. Teorian kumoamiseen johtava ulkopuolinen lähde voi olla vaikkapa teoria itse. Niinpä peliteoriassakin hyväksytään niin sanotusti yksilöiden satunnainen irrationaalisuus ja älykkyyden puute, sillä kuitenkin laajassa mittakaavassa teoria kuvaa käytäntöä.

Myös Tom Siegfried kuvaa peliteoriaa vastaavalla tavalla teoksessaan *John Nash, peliteoria ja luonnon koodi* (ks. [4], s. 14). Hän vertaa peliteoriaa fysiikan alatieteeseen statistiseen mekaniikkaan, jolla pyritään kuvaamaan kvantitatiivisesti fyysisen maailman aihioita, kuten kaasuja, kemiallisia reaktioita ja magneettisten materiaalien ominaisuuksia. Tällaisten ilmiöiden kvantitatiivisen ilmaisun tulee kuitenkin myös keskittyä kokonaisuuksiin, sillä kaikkia yksityiskohtia koskevia tietoja ei välttämättä ole saatavilla. Esimerkiksi jos huoneessa leijuu ja liikkuu lukemattomia molekyylejä, niin niiden kaikkien liikeratoja ei mitenkään voida seurata ja raportoida yksityiskohtaisesti. Sen sijaan statistisella mekaniikalla voidaan selvittää, millainen vaikutus ilmastointilaitteella on huoneen lämpötilaan. Siispä statistinen mekaniikka luo käsityksen siitä, miten ilmiö toimii kokonaisuudessaan eikä sen tarkoituskaan ole selittää jokaisen yksilön liikkeitä. Samoin voidaan ajatella peliteoriasta, joka luo mallin siitä, miten päätöksentekotilanteissa yksilöt yleisesti ottaen toimivat. Yksilötasolla peliteoria ei kuitenkaan kerro absoluuttista totuutta siitä, mitä yksilö tulee päättämään.

Jotta peliteorialla voitaisiin selittää päätöksentekotilanteita yleisellä tasolla, päätöksentekijöiden on siis oletettava olevan rationaalisia ja älykkäitä. Heidän käyttäytymistään kuvataan *hyötyfunktiolla*, joka määrittää mitattavissa olevan arvon kaikille päätöksentekijän *preferensseille*. Preferensseillä eli mieltymyksillä tarkoitetaan niitä asioita, joita päätöksentekijä suosii muita enemmän. Kun siis esimerkiksi vertaillaan pelistä saatavia palkintoja tai muita panosta vastaan saatavia asioita ja kerrotaan toisen tällaisen asian olevan toista parempi, niin puhutaan juuri preferensseistä. Preferenssit voivat riippua esimerkiksi päätöksentekijästä tai päätöksentekotilanteen olosuhteista.

Hyötyfunktion lisäksi jokaisen päätöksentekijän käyttäytymistä kuvataan subjektiivisella eli omakohtaisella todennäköisyysjakaumalla, joka määrittää päätöksentekijän omat uskomukset kaikista päätöksentekotilanteessa relevanteista tekijöistä ja niiden todennäköisyyksistä käydä toteen. Lisäksi kun päätöksentekijä saa lisää tietoa päätöksentekotilanteesta, hän voi parantaa omaa subjektiivista todennäköisyyksien näkymäänsä Bayesin kaavan mukaisesti. Bayesilaiseen tilastotieteeseen ja todennäköisyyslaskentaan ei erityisesti perehdytä tässä tutkielmassa, mutta siitä voi lukea esimerkiksi William Bolstadin teoksesta *Introduction to Bayesian Statistics* (ks. [1]).

Päätöksentekijä voi tehdä myös päätöksiä, jotka ovat jollakin tapaa epävarmoja, jolloin niiden seurauksista ei ole täyttä selvyyttä. Näitä päätöksiä kuvataan usein joko *todennäköisyysmallilla* tai *luonnontilamuuttujien mallilla*. Kummassakin tapauksessa päätöksentekijän sanotaan valitsevan eri *arvontojen* väliltä. Näissä kahdessa mallissa arvonta kuitenkin määritellään eri tavoin. Todennäköisyysmallissa arvonnat ovat todennäköisyysjakaumia, jotka määrittävät todennäköisyydet pelistä saatavilla oleville palkinnoille. Luonnontilamuuttujien mallissa arvonnat taas ovat funktioita erilaisten mahdollisten *luonnontilojen* joukosta pelistä saatavien palkintojen joukkoon. Luonnontilalla tarkoitetaan kyseisen päätöksentekotilanteen olosuhteita, jotka voivat muuttua ja joita voi olla rinnakkaisia. Näistä kuitenkin vain yksi luonnollisesti käy toteen, eli kuvaa nykytilaa. Esimerkiksi luonnontila voisi olla se tila, jossa asiakas on kaupassa ja tuote x on alennuksessa. Vaihtoehtoinen luonnontila voisi olla se, että asiakas on kaupassa ja puolestaan tuote y on alennuksessa. Näissä luonnontiloissa olosuhteet ovat erilaiset ja ne vaikuttavat päätöksentekijän toimintaan.

Kumpaakin näistä malleista sovelletaan usein omilla, erityisillä aloillaan. Todennäköisyysmalli kuvaa hyvin sellaisia jonkinlaisella riskillä pelattavia pelejä, joissa palkinnot riippuvat erilaisista tapahtumista, ja joissa näillä tapahtumilla on täysin objektiiviset (muista riippumattomat, laskettavissa olevat ja tosiasialliset) todennäköisyydet käydä toteen. Tällaisia tapahtumia kutsutaan *objektiivisiksi tuntemattomiksi*. Esimerkiksi kolikonheitolla tai nopalla ratkaistava, riskillä pelattava peli on todennäköisyysmallilla kuvattavissa oleva peli. Mallissa oletetaan, että kaksi objektiivista tuntematonta, joilla on sama todennäköisyys käydä toteen, ovat samanarvoisia tapahtumia päätöksenteon näkökulmasta. Havainnollistetaan tätä esimerkillä: arvonnassa voittaa 10 euroa todennäköisyydellä $\frac{1}{2}$ ja kaksi euroa todennäköisyydellä $\frac{1}{2}$. Nyt arvonta voidaan suorittaa esimerkiksi arpomalla kokonaisluku, jonka ollessa parillinen voittaa 10 euroa, ja jonka ollessa pariton voittaa kaksi euroa. Yhtä hyvin arvonta voidaan kuitenkin suorittaa kolikkoa heittämällä: kruunalla, jonka todennäköisyys on $\frac{1}{2}$, saa 10 euroa ja klaavalla, jonka todennäköisyys yhtäläisesti on $\frac{1}{2}$, saa kaksi euroa. Joka tapauksessa kummankin arvontatavan todennäköisyysjakauma vastaa arvonnasta saatavien palkintojen todennäköisyysjakaumaa.

Moniin tapahtumiin ei kuitenkaan voida liittää tällaisia itsestään selviä todennäköisyyksiä. Esimerkiksi jääkiekko-ottelun tulokseen liittyy epävarmuutta ja eri tulosten todennäköisyysjakauma on aina ottelukohtainen, sillä todennäköisyydet riippuvat muun muassa kokoonpanoista, loukkaantumisista ja siitä, onko kyseessä vieras- vai kotiottelu. Tällaisiin tapahtumiin viitataan käsitteellä *subjektiiviset tuntemattomat*. Niitä kuvataan usein luonnontilamuuttujien mallilla, sillä siinä on mahdollista kuvata, miten palkinto määräytyy ennalta arvaamattomien tapahtumien mukaan, vaikkei näille tapahtumille oltaisi määriteltykään minkäänlaisia todennäköisyyksiä etukäteen.

Vaikka näitä malleja käytetään usein niiden omilla erityissovellusaloilla, niin tässä tutkielmassa määritellään arvonnat siten, että ne sisältävät erikoistapauksina sekä todennäköisyys- että luonnontilamuuttujien mallit. Toisin sanoen tässä tutkielmassa tutkitaan arvontoja, joista saatava palkinto voi riippua sekä objektiivisista että subjektiivisista tuntemattomista. Seuraavaksi esitellään peliteoriassa yleisesti käytettyjä merkintätapoja.

Merkinnällä $\Delta(Z)$ tarkoitetaan joukon Z todennäköisyysjakaumien joukkoa kaikilla äärellisillä joukoilla Z. Toisin sanoen

$$\Delta(Z) = \{q : Z \to \mathbb{R} \mid \sum_{y \in Z} q(y) = 1 \ \ ja \ \ q(z) \geqslant 0, \ \ \forall z \in Z\}. \tag{2.1}$$

Olkoon X kaikkien niiden mahdollisten *palkintojen* joukko, jotka päätöksentekijä voisi saada, ja olkoon Ω kaikkien mahdollisten *luonnontilojen* joukko. Yksi näistä luonnontiloista on *vallitseva luonnontila*, joka kuvaa nykytilan todellisuutta. Tässä tutkielmassa ja usein peliteoriassa muutenkin oletetaan, että nämä joukot X ja Ω ovat äärellisiä.

Määritellään seuraavaksi arvonnan (engl. *lottery*) käsite. *Arvonta* on mikä tahansa funktio f, joka määrittelee ei-negatiivisen reaaliluvun $f(x|t)$ kaikilla palkinnoilla $x \in X$ ja kaikilla luonnontiloilla $t \in \Omega$ siten, että

$$\sum_{x \in X} f(x|t) = 1 \quad \forall t \in \Omega.$$

Jokainen luku $f(x|t)$ on siis objektiivinen ehdollinen todennäköisyys sille, että päätöksentekijä saa palkinnon x arvonnassa f, kun t on vallitseva luonnontila. Olkoon L kaikkien näiden arvontojen joukko:

$$L = \{f : \Omega \to \Delta(X)\}.$$

On huomattava, että joukkosulkeissa { } merkintä "|" tarkoittaa "sellainen, että", kun taas kaarisulkeissa ( ) funktion muuttujien yhteydessä oleva merkintä "|" tarkoittaa "olettaen". Yleisellä tasolla merkintä $\{\, a \mid b \,\}$ tarkoittaa siis joukkoa, joka koostuu sellaisista alkioista a, että ehto b pätee niillä. Merkintä $f(x|t)$ taas tarkoittaa funktion f arvoa muuttujan x arvolla, kun tiedetään, että muuttuja t on käynyt toteen.

Kaikilla luonnontiloilla $t \in \Omega$ ja kaikilla arvonnoilla $f \in L$ merkintä $f(\cdot|t)$ tarkoittaa funktion f määräämää todennäköisyysjakaumaa joukossa X ja luonnontilassa t. Formaalimmin tämä voidaan ilmaista seuraavasti:

$$f(\cdot|t) = \big(f(x|t)\big)_{x \in X} \in \Delta(X).$$

Luku $f(x|t)$ on siis sen todennäköisyys, että päätöksentekijä saa arvonnasta f palkinnon x, kun t on vallitseva luonnontila. Jotta tämä merkinnän $f(x|t)$ tulkinta olisi mielekäs, luonnontila t tulee määritellä tarpeeksi laajasti. Sen tulee pitää sisällään kaikki sellaiset subjektiiviset tuntemattomat, jotka saattavat vaikuttaa siihen, minkä palkinnon arvonnasta f saa. Kun luonnontila t on määritelty tällä tavoin, niin siinä vaikuttavien objektiivisten tuntemattomien todennäköisyydet voidaan laskea. Niiden jakauma voidaan laskea tarkasti minkä tahansa sellaisen hyvinmääritellyn pelin yhteydessä, jonka pelaamiseen liittyy riskejä. (Riskillä tarkoitetaan tässä sitä, että pelitilanteessa palkinnon saamiseen liittyy epävarmuutta ja todennäköisyyksiä, jotka ovat ennalta tiedettävissä. Esimerkiksi kolikon heitolla ratkaistava peli on riskillä pelattava peli.) Täten tässä tutkielmassa käytettävä arvonnan määritelmä mahdollistaa sen, että voidaan käsitellä mitä tahansa sellaista peliä, jossa palkinnon saaminen voi riippua sekä objektiivisista että subjektiivisista tuntemattomista.

Merkinnän $f(x|t)$ lisäksi erityishuomiota vaatii palkinnon käsite. Palkinto voi olla mikä tahansa hyödyke, etu tai resurssi. Joka tapauksessa oletetaan, että palkinnot joukossa X on määritelty siten, että ne ovat toisensa poissulkevia. Tämä tarkoittaa sitä, että päätöksentekijän saadessa jonkin palkinnon x hän ei voi enää saada sellaista palkintoa y, että $x \neq y$. Palkinnon on myös oltava sellainen, että päätöksentekijän valinnoista aiheutuva seurauksien ketju päättyy siihen. Tämä taas tarkoittaa sitä, että päätöksentekotilanne päättyy aina palkintoon. Tutkitaan esimerkiksi sellaista päätöksentekotilannetta, jossa päätöksentekijä päättää ostaa jäätelön, jos hän saa kolikolla kruunan, ja porkkanan, jos hän saa klaavan. Tällainen tilanne päättyy aina palkintoon: jäätelöön tai porkkanaan. Tämän jälkeiset tapahtumat eivät enää kuulu samaan päätöksentekotilanteeseen.

Lisäksi jokaista joukon X palkintoa tulee pystyä arvioimaan kaikilla niillä dimensioilla, joista päätöksentekijä välittää päätöksentekotilanteissa. Esimerkiksi jos päätöksentekijälle on tärkeää ainoastaan palkinnon rahallinen arvo, palkinto ei voi olla sellainen, jota ei voi mitata lainkaan rahassa. On huomattava, että palkinnon arvo näillä päätöksentekijälle relevanteilla dimensioilla voi olla myös nolla tai jopa negatiivinen, mutta tällöinkin palkinto saa jonkin arvon jokaisessa ulottuvuudessa. Niinpä jos palkinnon rahallinen arvo on ainoa päätöksentekijälle relevantti palkinnon suure, niin tällöin palkinto voi olla esimerkiksi auto, mutta myös vaikkapa tyhjä maitotölkki. Näiden molempien rahallinen arvo on mitattavisssa rahassa. Tällaisen päätöksentekijän palkinto ei kuitenkaan voisi olla esimerkiksi maine, sillä sen arvoa ei voida mitata rahassa. Maine voi kuitenkin olla palkinto päätöksentekijälle, jos päätöksentekijä välittää sellaisista suureista kuin ihailijoiden lukumäärä ja laatu.

Jatketaan sitten peliteorian keskeisillä merkintätavoilla. Sitä tietoa, jota päätöksentekijällä saattaa olla vallitsevasta luonnontilasta, kutsutaan *tapahtumaksi.* Tapahtuma on joukon Ω epätyhjä osajoukko S ja koostuu siis luonnontiloista. Olkoon Ξ kaikkien tällaisten tapahtumien joukko:

$$\Xi = \{S \mid S \subseteq \Omega \ ja \ S \neq \varnothing\}.$$

Seuraavaksi määritellään relaatio, joka kertoo, kumpaa arvontaa päätöksentekijä suosii, kun hänellä on jotakin tietoa vallitsevasta luonnontilasta. Relaatio määrittää siis päätöksentekijän preferenssin eri arvontojen välillä, kun tapahtuma S käy toteen.

Merkitään $f \gtrsim_S g$ kaikilla arvonnoilla $f \in L$ ja $g \in L$ ja kaikilla tapahtumilla $S \in \Xi$, jos ja vain jos päätöksentekijä haluaisi arvonnan f vähintään yhtä paljon kuin hän haluaisi arvonnan g tietäessään vallitsevan luonnontilan olevan joukossa S. Toisin sanoen $f \gtrsim_S g$, jos ja vain jos päätöksentekijä valitsisi arvonnan f, kun hänen pitäisi valita arvontojen f ja g väliltä ja hän tietää vain, että tapahtuma S on tapahtunut. Tätä relaatiota $\gtrsim_S$ kutsutaan preferenssirelaatioksi.

Preferenssielaatiosta $\gtrsim_S$ voidaan luontevasti johtaa myös relaatiot $\succ_S$ ja $\sim_S$ seuraavasti:

$$f \sim_S g \;\Leftrightarrow\; f \gtrsim_S g \;\; ja \;\; g \gtrsim_S f$$

$$f \succ_S g \;\Leftrightarrow\; f \gtrsim_S g \;\; ja \;\; g \nsim_S f,$$

missä $g \nsim_S f \;\Leftrightarrow\; \neg\,(g \sim_S f)$. Relaatio $f \sim_S g$ tarkoittaa, että päätöksentekijälle olisi täysin yhdentekevää, kumman arvonnan hän näistä valitsisi, jos hän tietäisi, että tapahtuma S on tapahtunut. Relaatiot f ja g ovat siis samanarvoisia päätöksentekijälle, kun hän tietää tapahtuman S tapahtuneen. Relaatio $f \succ_S g$ taas tarkoittaa, että päätöksentekijä valitsisi ehdottomasti arvonnan f eikä arvontaa g, kun hän tietäisi, että tapahtuma S on käynyt toteen.

Merkinnät $\gtrsim_\Omega$, $\succ_\Omega$ ja $\sim_\Omega$ voidaan erityistapauksina korvata yksinkertaisimmilla merkinnöillä $\gtrsim$, $\succ$ ja $\sim$. Nimittäin kun toteen käynyt tapahtuma on koko luonnontilojen joukko Ω, niin vallitseva luonnontila sisältyy aina joukkoon Ω. Niinpä esimerkiksi relaatiossa $\gtrsim_\Omega$ merkintä 'Ω' ei anna mitään lisätietoa vallitsevasta luonnontilasta, jolloin se voidaan jättää pois. Tällaisissa tapauksissa, joissa vallitsevasta luonnontilasta ei ole minkäänlaisia rajaavia tietoja, aiemmin havaitut päätöksentekijän preferenssit määrittävät arvontojen välisiä preferenssejä. Lisäksi oletetaan, että päätöksentekijän hyvinmääritellyt preferenssit voivat riippua mistä tahansa joukon Ξ mahdollisesta tapahtumasta S. (Tällaisia mahdollisia tapahtumia ovat sellaiset tapahtumat, joiden todennäköisyys käydä toteen on suurempi kuin 0.) Tämä tarkoittaa sitä, että preferenssit ovat ristiriidattomasti ja aukottomasti määritellyt kaikilla tapahtumilla $S \subseteq \Omega$, jotka voivat käydä toteen.

Määritellään sitten satunnainen arvonnanvalintaprosessi. Se tarkoittaa, että pelaajalle valikoituva arvonta määräytyy prosessissa määriteltyjen todennäköisyyksien mukaan.

Määritelmä 2.1. Kaikilla reaaliluvuilla α $(0 \leqslant \alpha \leqslant 1)$ sekä millä tahansa kahdella arvonnalla $f \in L$ ja $g \in L$, merkintä $\alpha f + (1-\alpha)g$ merkitsee sellaista arvontaa joukossa L, että

$$\big(\alpha f + (1-\alpha)g\big)(x|t) = \alpha f(x|t) + (1-\alpha)g(x|t), \quad \forall x \in X, \quad \forall t \in \Omega.$$

Arvontaa $\alpha f + (1-\alpha)g$ kutsutaan *satunnaiseksi arvonnanvalintaprosessiksi.*

Määritelmää voidaan havainnollistaa esimerkiksi kuvittelemalla, että pelikorttipinossa on vain pata- ja herttakortteja. Olkoon pinon patakorttien osuus α ja $1-\alpha$ herttakorttien osuus. Korttipinosta vedetään yksi kortti. Jos vedetty kortti on pata, päätöksentekijä saa arvonnan f, ja jos vedetty kortti on hertta, päätöksentekijä saa arvonnan g. Tällöin jos t on vallitseva luonnontila, niin palkinnon x saamisen todennäköisyys on $\alpha f(x|t) + (1-\alpha)g(x|t)$. Siispä $\alpha f + (1-\alpha)g$ on satunnainen arvonnanvalintaprosessi, jossa todennäköisyys saada arvonta f on α ja todennäköisyys saada arvonta g on $1-\alpha$.

Määritelmä 2.2. Kaikilla palkinnoilla $x \in X$ merkintä $[x]$ tarkoittaa arvontaa, josta päätöksentekijä saa varmasti palkinnon x. Tällöin jokaisessa luonnontilassa $t \in \Omega$ pätee

$$[x](y|t) = 1, \quad jos \;\; y = x$$

ja

$$[x](y|t) = 0, \quad jos \;\; y \neq x.$$

Tällöin $\alpha[x]+(1-\alpha)[y]$ merkitsee arvontaa, josta saa aina joko palkinnon x tai y. Palkinnon x saa todennäköisyydellä α ja palkinnon y todennäköisyydellä $1-\alpha$.

2.1.2 Aksioomat

Rationaalisen päätöksentekijän preferenssien voidaan olettaa noudattavan tiettyjä perusominaisuuksia, jotka voidaan asettaa aksioomiksi. Tässä luvussa käsitellyt aksioomat pohjautuvat päälähdeteoksen ensimmäisessä luvussa esitettyihin aksioomiin (ks. [3], s. 9–12).

Mikäli jatkossa ei toisin määritellä, nämä aksioomat pätevät kaikille joukon L arvonnoille e, f, g ja h, kaikille joukon Ξ tapahtumille S ja T sekä kaikille välin $[0,1]$ reaaliluvuille α ja β.

Ensiksi määritellään täydellisyyden ja transitiivisuuden aksioomat. Näiden aksioomien nojalla kaikki arvonnat voidaan aina asettaa täydelliseen transitiiviseen järjestykseen sen mukaan, mitä arvontaa päätöksentekijä suosii eniten ja mitä vähiten.

Aksiooma 1. Täydellisyys: $f \gtrsim_S g$ tai $g \gtrsim_S f$.

Aksiooma 2. Transitiivisuus: Jos $f \gtrsim_S g \; ja \; g \gtrsim_S h$, niin $f \gtrsim_S h$.

Transitiivisuuden aksioomasta voidaan suoraviivaisesti johtaa useita muita transitiivisia tuloksia, kuten:

$$f \sim_S g \quad ja \quad g \sim_S h \;\Rightarrow\; f \sim_S h$$

sekä

$$f \succ_S g \quad ja \quad g \gtrsim_S h \;\Rightarrow\; f \succ_S h.$$

Seuraava aksiooma määrittää vain mahdollisten luonnontilojen olevan relevantteja päätöksentekijälle. Toisin sanoen sellaiseen tapahtumaan, jonka todennäköisyys käydä toteen on 0, sisältyvillä luonnontiloilla ei ole merkitystä päätöksentekijälle. Oletetaan esimerkiksi päätöksentekijän tietävän, että tapahtuma S on käynyt toteen. Nyt mikäli on olemassa arvonnat f ja g, jotka eroavat toisistaan vain tapahtuman S ulkopuolisissa luonnontiloissa, arvonnat f ja g ovat samanarvoisia päätöksentekijälle. Hänelle olisi yhdentekevää, kumman arvonnoista f tai g hän valitsisi, jos nämä arvonnat f ja g eroaisivat toisistaan vain luonnontiloissa, jotka eivät voisi olla ja joista ei voisi edes tulla vallitsevia luonnontiloja. Jos siis kaikissa tapahtuman S luonnontiloissa arvontojen f ja g määrittämä palkintojen todennäköisyysjakauma olisi sama, niin arvonnat f ja g olisivat samanarvoisia päätöksentekijälle tapahtuman S käydessä toteen.

Aksiooma 3. Relevanssi: Jos $f(\cdot|t) = g(\cdot|t) \ \ \forall t \in S$, niin $f \sim_S g$.

Monotonisuuden aksiooma määrää, että jos päätöksentekijä suosii jotakin arvontaa enemmän kuin toista, niin hän myös suosii arvontaa, jossa on todennäköisempää saada tämä hänen mielestään parempi arvonta.

Aksiooma 4. Monotonisuus: Jos $f >_S h$ ja $0 \leqslant \beta < \alpha \leqslant 1$, niin $\alpha f + (1-\alpha)h \ >_S \ \beta f + (1-\beta)h$.

Perustuen monotonisuuden aksioomaan aksiooma 5 määrittää, että arvonta $\gamma f + (1-\gamma)h$ paranee päätöksentekijän näkökulmasta jatkuvasti luvun γ kasvaessa, kun hän suosii alkuperäisistä arvonnoista arvontaa f enemmän kuin arvontaa h. Niinpä seuraava aksiooma esittää, että mikä tahansa arvonta, joka on päätöksentekijän preferenssiketjussa arvontojen f ja h välillä, on hänelle yhtä hyvä kuin satunnainen arvonnanvalintaprosessi $\gamma f + (1-\gamma)h$.

Aksiooma 5. Jatkuvuus: Jos $f \gtrsim_S g$ ja $g \gtrsim_S h$, niin on olemassa sellainen luku $\gamma \in \mathbb{R}$, että $0 \leqslant \gamma \leqslant 1$ ja $g \sim_S \gamma f + (1-\gamma)h$.

Substituutioaksioomia voidaan pitää tärkeimpinä tämän peliteoriajärjestelmän aksioomina, sillä ne ohjaavat voimakkaasti sitä, miltä päätöksentekijän preferenssien tulisi näyttää jopa ilman muita aksioomia. Substituutioaksioomat ovat myös hyvin intuitiivisia. Ne kuvaavat seuraavanlaista tilannetta: oletetaan, että päätöksentekijän pitäisi valita kahden eri vaihtoehdon väliltä. Lisäksi päätöksentekotilanteeseen liittyy kaksi toisensa poissulkevaa tapahtumaa (tapahtumien leikkaus on siis tyhjä joukko), joista täsmälleen yksi käy toteen. Molemmissa tapahtumissa on kaksi eri vaihtoehtoa, joista päätöksentekijän tulee valita jompikumpi. Kummassakin näistä tapahtumista päätöksentekijä suosii ensimmäistä vaihtoehtoa. Tällöin päätöksentekijän on siis suosittava ensimmäistä vaihtoehtoa myös tietämättä, kumpi tapahtuma tulee käymään toteen. Muutenhan päätöksentekijä itse asiassa preferoisi sitä, että hän haluaisi muuttaa valintaansa eri vaihtoehtojen välillä, kun hän tietäisi, kumpi tapahtumista käy toteen.

Seuraavissa objektiivisen substituution aksioomissa (aksioomat 6 ja 7) nämä tapahtumat ovat satunnaisia arvonnanvalintaprosesseja, joihin liittyvät todennäköisyydet ovat objektiivisia. Subjektiivisen substituution aksioomissa (aksioomat 8 ja 9) nämä tapahtumat taas ovat subjektiivisia tuntemattomia ja ne ovat joukon Ω osajoukkoja.

Aksiooma 6. Objektiivinen substituutio: Jos $e \gtrsim_S f$ ja $g \gtrsim_S h$ sekä $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, niin $\alpha e + (1-\alpha)g \ \gtrsim_S \ \alpha f + (1-\alpha)h$.

Aksiooma 7. Aito objektiivinen substituutio: Jos $e \succ_S f$ ja $g \gtrsim_S h$ sekä $0 < \alpha \leqslant 1$, niin $\alpha e + (1-\alpha)g \ \succ_S \ \alpha f + (1-\alpha)h$.

Aksiooma 8. Subjektiivinen substituutio: Jos $f \gtrsim_S g$ ja $f \gtrsim_T g$ sekä $S \cap T = \varnothing$, niin $f \gtrsim_{S\cup T} g$.

Aksiooma 9. Aito subjektiivinen substituutio: Jos $f \succ_S g$ ja $f \succ_T g$ sekä $S \cap T = \varnothing$, niin $f \succ_{S\cup T} g$.

Havainnollistetaan vielä substituutioaksioomien merkitystä käsittelemällä esimerkki, jossa niiden ei oleteta pätevän. Oletetaan, että päätöksentekijän mielestä palkinto x on parempi kuin palkinto y, mutta silti hänen mielestään arvonta $\frac{1}{2}[y] + \frac{1}{2}[z]$ on parempi kuin arvonta $\frac{1}{2}[x] + \frac{1}{2}[z]$ — mikä siis olisi ristiriidassa substituutioaksioomien kanssa. Oletetaan, että w on jokin muu sellainen palkinto, että päätöksentekijä suosii enemmän arvontaa $[w]$ kuin arvontaa $\frac{1}{2}[x] + \frac{1}{2}[z]$, mutta vähemmän kuin arvontaa $\frac{1}{2}[y] + \frac{1}{2}[z]$. Toisin sanoen

$$x \succ y,$$

mutta

$$\frac{1}{2}[y] + \frac{1}{2}[z] \succ [w] \succ \frac{1}{2}[x] + \frac{1}{2}[z].$$

Ajatellaan sitten seuraavaa tilannetta. Päätöksentekijän täytyy ensin päättää, ottaako hän palkinnon w vai ei. Jos hän ei ota palkintoa w, niin heitetään kolikkoa. Jos saadaan kruuna, päätöksentekijä saa palkinnon z. Jos taas saadaan klaava, päätöksentekijä saa valita palkintojen x ja y väliltä.

Päätöksentekijällä on nyt kolme erilaista päätöksentekostrategiaa, joista hän voi valita. Ensinnäkin hän voi valita palkinnon w. Toiseksi hän voi kieltäytyä ottamasta palkintoa w ja ottaa palkinnon x, jos kolikkoa heitettäessa saadaan klaava. Kolmanneksi hän voi vastaavasti kieltäytyä ottamasta vastaan palkintoa w ja ottaa palkinnon y, jos kolikolla saadaan klaava. Jos päätöksentekijä noudattaa ensimmäistä strategiaa, hän saa arvonnan $[w]$. Jos hän taas noudattaa toista strategiaa, hän saa arvonnan $\frac{1}{2}[x] + \frac{1}{2}[z]$. Kolmatta strategiaa noudattaessaan hän saa arvonnan $\frac{1}{2}[y] + \frac{1}{2}[z]$. Koska päätöksentekijän mielestä $\frac{1}{2}[y] + \frac{1}{2}[z]$ on näistä arvonnoista paras, kolmas strategia olisi hänelle paras, joten näyttäisi siltä, että hänen kannattaa kieltäytyä palkinnosta w. Kuitenkin jos päätöksentekijä kieltäytyy palkinnosta w ja kolikolla saadaan klaava, niin hänen preferenssiensä mukaisesti hänen on valitttava palkinto x palkinnon

y sijaan. Joten jos päätöksentekijä kieltäytyy palkinnosta w, hän itse asiassa päätyy palkintoon z, jos kolikolla saadaan kruuna, tai palkintoon x, jos kolikolla saadaan klaava. Kuitenkin tämä arvonta $\frac{1}{2}[x] + \frac{1}{2}[z]$ on päätöksentekijälle huonompi kuin arvonta $[w]$. Niinpä ajatus siitä, että päätöksentekijän olisi pitänyt valita palkinto w aluksi, johtaa ristiriitaiseen lopputulokseen. Voidaan siis todeta, että substituutioaksioomat ovat osa rationaalisen päätöksenteon määritelmää.

Seuraava kiinnostuksen aksiooma määrittää, että päätöksentekijän mielestä palkintojen joukossa on aina vähintään yksi muita mieluisampi palkinto. Tämän aksiooman avulla voidaan varmistua, että jokaisessa luonnontilassa on jotakin päätöksentekijälle relevanttia ja kiinnostavaa.

Aksiooma 10. Kiinnostus: Kaikissa luonnontiloissa $t \in \Omega$ on olemassa sellaiset palkinnot $y \in X$ ja $z \in X$, että $[y] \succ_{\{t\}} [z]$.

Aksiooma 11 eli neutraalin luonnontilan aksiooma ei ole pakollinen aksiooma, sillä useimmat päätulokset voitaisiin esittää myös ilman tätä aksioomaa. Se määrittää, että päätöksentekijän preferenssit peleissä, joissa palkintojen todennäköisyydet ovat objektiivisesti määriteltävissä, ovat preferenssirelaation määräämässä samassa järjestyksessä kaikissa luonnontiloissa. Luonnontila ei siis vaikuta päätöksentekijän preferensseihin, kun palkintojen todennäköisyysjakaumat ovat samat eri luonnontiloissa. Jos tämä aksiooma ei päde, se johtuu siitä, että sama palkinto saattaa olla eri arvoinen eri luonnontiloissa.

Aksiooma 11. Luonnontilaneutraliteetti: Olkoon $r \in \Omega$ ja $t \in \Omega$ kaksi mielivaltaista luonnontilaa. Nyt jos $f(\cdot|r) = f(\cdot|t)$ ja $g(\cdot|r) = g(\cdot|t)$ sekä $f \gtrsim_{\{r\}} g$, niin $f \gtrsim_{\{t\}} g$.

2.1.3 Odotetun hyödyn maksimoinnin lause

Tässä luvussa käsiteltävä odotetun hyödyn maksimoinnin lause ja sen todistus on esitetty päälähdeteoksen ensimmäisessä pääluvussa (ks. [3] s. 12–17).

Ehdollinen todennäköisyysfunktio joukossa Ω on mikä tahansa funktio $p : \Xi \to \Delta(\Omega)$, joka määrittelee ei-negatiiviset ehdolliset todennäköisyydet $p(t|S)$ kaikilla joukon Ω luonnontiloilla t ja kaikilla tapahtumilla $S \in \Xi$ siten, että

$$p(t|S) = 0, \;\; jos \;\; t \notin S \quad ja \quad \sum_{r \in S} p(r|S) = 1.$$

Summamerkintä voidaan myös jättää pois, jolloin se voidaan korvata seuraavanlaisella merkinnällä:

$$p(R|S) = \sum_{r \in R} p(r|S), \;\; \forall R \subseteq \Omega, \;\; \forall S \in \Xi.$$

Hyötyfunktio on mikä tahansa funktio joukosta $X \times \Omega$ reaalilukujen joukkoon $\mathbb{R}$. Hyötyfunktio $u : X \times \Omega \to \mathbb{R}$ on *riippumaton luonnontilasta*, jos ja vain luonnontilan vaihtuminen ei vaikuta sen arvoihin. Toisin sanoen hyötyfunktio

$u : X \times \Omega \to \mathbb{R}$ on riippumaton luonnontilasta, jos ja vain jos on olemassa jokin funktio $U : X \to \mathbb{R}$, jolla pätee $u(x,t) = U(x)$ kaikilla palkinnoilla $x \in X$ ja kaikilla luonnontiloilla $t \in \Omega$.

Olkoon nyt p mielivaltainen ehdollinen todennäköisyysfunktio ja u mielivaltainen hyötyfunktio. Olkoon lisäksi f mielivaltainen arvonta joukosta L ja S mielivaltainen tapahtuma joukosta Ξ. Tällöin $E_p\big(u(f)|S\big)$ merkitsee arvonnan f määrittämän palkinnon odotettua hyödyn arvoa, kun $p(\cdot|S)$ on vallitsevan luonnontilan todennäköisyysjakauma. Toisin sanoen

$$E_p\big(u(f)|S\big) = \sum_{t \in S} p(t|S) \sum_{x \in X} u(x,t) f(x|t).$$

Lause 2.1. *Aksioomat 1-10 ovat kaikki yhtä aikaa voimassa, jos ja vain jos on olemassa sellainen hyötyfunktio $u : X \times \Omega \to \mathbb{R}$ ja sellainen ehdollinen todennäköisyysfunktio $p : \Xi \to \Delta(\Omega)$, että*

Ehto 1. $\max_{x \in X} u(x,t) = 1 \ \ ja \ \ \min_{x \in X} u(x,t) = 0, \quad \forall t \in \Omega$

Ehto 2. $p(R|T) = p(R|S)p(S|T), \quad \forall R, \forall S \ \ ja \ \ \forall T \ \ siten, että$
$R \subseteq S \subseteq T \subseteq \Omega \ \ ja \ \ S \neq \varnothing$.

Ehto 3. $f \gtrsim_S g, \ \ jos \ ja \ vain \ jos \ \ E_p\big(u(f)|S\big) \geqslant E_p\big(u(g)|S\big),$
$\forall f, g \in L, \ \ \forall S \in \Xi.$

Edelleen mikäli aksioomat 1-10 pätevät, myös aksiooma 11 pätee, jos ja vain jos ehdot 1-3 toteuttaa luonnontilasta riippumaton hyötyfunktio.

Lauseen 2.1 ensimmäinen ehto määrittää, että hyötyfunktioiden arvot voivat vaihdella välillä $[0,1]$ jokaisessa luonnontilassa. Toinen ehto on versio Bayesin kaavasta. Se osoittaa, millä tavalla tapahtuman ehdolliset todennäköisyydet vastaavat kyseisen tapahtuman eri osajoukkojen avulla laskettuja ehdollisia todennäköisyyksiä. Lauseen kolmas ehto määrittää, että päätöksentekijä preferoi aina arvontoja, joissa on korkeampi odotettu hyöty. Toisaalta kun tiedetään hyötyfunktio u ja ehdollinen todennäköisyysfunktio p, voidaan sanoa kolmannen ehdon nojalla, mitä arvontaa päätöksentekijä preferoi päätöksentekotilanteissa. Päätöksentekijä valitsee saatavilla olevista arvonnoista sen, jossa on suurin odotettu hyöty. Hän tekee valinnan käyttäen luonnontiloja koskevia subjektiivisia todennäköisyyksiä, joihin vaikuttavat päätöksentekijän havainnoimat joukon Ω tapahtumat.

Lisäksi voidaan todeta, että koska joukot X ja Ω ovat äärellisiä, laskettavaksi jää vain äärellisen monta odotetun hyödyn ja ehdollisen todennäköisyyden arvoa. Täten vaikka joukossa L olisi äärettömän monta arvontaa ja päätöksentekijä preferoisi näitä kaikkia arvontoja jossakin järjestyksessä, niin kaikki nämä preferenssit voidaan silti määritellä täydellisesti äärellisellä hyötyjen ja todennäköisyyksien arvojen määrällä. Jotta tätä tulosta voitaisiin soveltaa käytännössä, tarvitaan keino laskea odotettujen hyötyjen arvot $u(x,t)$ sekä todennäköisyydet $p(t|S)$ kaikilla palkinnoilla $x \in X$, kaikilla luonnontiloilla $t \in \Omega$ ja kaikilla tapahtumilla $S \in \Xi$. Jotta edelleen voidaan määrittää tällainen laskentakeino sekä todistaa lause 2.1, aloitetaan määrittelemällä muutamia erityisiä arvontoja. Oletetaan, että päätöksentekijän preferenssit noudattavat aksioomia 1–10.

Olkoon a_1 arvonta, joka antaa päätöksentekijälle yhden parhaista palkinnoista jokaisessa luonnontilassa. Olkoon edelleen a_0 arvonta, joka taas antaa päätöksentekijälle yhden huonoimmista palkinnoista jokaisessa luonnontilassa. Tällöin siis jokaisessa luonnontilassa t pätee $a_1(y|t) = 1 = a_0(z|t)$ joillakin palkinnoilla y ja z, joilla pätee $y \gtrsim_{\{t\}} x \gtrsim_{\{t\}} z$ kaikilla palkinnoilla $x \in X$. Tällaiset parhaat ja huonoimmat palkinnot voidaan tunnistaa jokaisesta luonnontilasta, sillä preferenssirelaatio muodostaa transitiivisen järjestyksen äärellisessä joukossa X.

Merkitköön nyt edelleen b_S sellaista arvontaa kaikilla tapahtumilla $S \in \Xi$, että

$$b_S(\cdot|t) = a_1(\cdot|t), \ \ jos \ \ t \in S$$

$$b_S(\cdot|t) = a_0(\cdot|t), \ \ jos \ \ t \notin S.$$

Päätöksentekijä siis saa parhaan mahdollisen palkinnon arvonnasta b_S, jos tapahtuma S käy toteen, ja jos se ei käy toteen, niin päätöksentekijä saa huonoimman mahdollisen palkinnon.

Olkoon sitten $c_{x,t}$ sellainen arvonta kaikilla palkinnoilla x ja luonnontiloilla t, että

$$c_{x,t}(\cdot|r) = [x](\cdot|r), \ \ jos \ \ r = t$$

$$c_{x,t}(\cdot|r) = a_0(\cdot|r), \ \ jos \ \ r \neq t.$$

Nyt $c_{x,t}$ on siis arvonta, joka antaa aina huonoimman mahdollisen palkinnon, paitsi luonnontilassa t, jolloin siitä saa aina palkinnon x.

Voimme nyt määrittää keinon laskea sellaiset odotettujen hyötyjen ja todennäköisyyksien arvot, jotka toteuttavat lauseen 2.1 ehdot — olettaen, että käytettävät preferenssirelaatiot toteuttavat aksioomat. Keinoa voidaan havainnollistaa päätöksentekijälle esitettävien kysymysten avulla seuraavasti: Jokaista palkintoa x ja luonnontilaa t kohden päätöksentekijältä kysytään: "Millä luvulla β sinulle ei olisi väliä, kumman arvonnan saat: $[x]$ vai $\beta a_1 + (1 - \beta)a_0$, jos tietäisit, että t on vallitseva luonnontila?" (Aiemmin määriteltiin päätöksentekijän preferoivan palkintoja järjestyksessä $y \gtrsim_{\{t\}} x \gtrsim_{\{t\}} z$.) Jatkuvuusaksiooman nojalla tällaisen luvun β on oltava olemassa. Olkoon sitten $u(x, t)$ yhtä suuri kuin tämä päätöksentekijän antama luku β, jolloin saadaan:

$$[x] \sim_{\{t\}} u(x,t)a_1 + \big(1 - u(x,t)\big)a_0.$$

Myös jokaista luonnontilaa t ja tapahtumaa S kohden kysytään päätöksentekijältä: "Millä luvulla γ sinulle ei olisi väliä, kumman arvonnan saat: $b_{\{t\}}$ vai $\gamma a_1 + (1 - \gamma)a_0$, jos tietäisit, että vallitseva luonnontila on joukossa S?" Edelleen jatkuvuusaksiooman nojalla tällaisen luvun γ on oltava olemassa. (Subjektiivinen substituutioaksiooma takaa, että $a_1 \gtrsim_S b_{\{t\}} \gtrsim_S a_0$.) Olkoon sitten $p(t|S)$

yhtä suuri kuin päätöksentekijän määrittämä luku γ, jolloin saadaan:

$$b_{\{t\}} \sim_S p(t|S)a_1 + \big(1 - p(t|S)\big)a_0.$$

Lauseen 2.1 todistuksessa näytetään, että hyötyfunktion u ja ehdollisen todennäköisyysfunktion p määrittely tällä tavalla toteuttaa lauseen 2.1 ehdot. Täten voidaan selvittää äärellisen monella edellä esitetyllä kysymyksellä ne tekijät, joiden pohjalta taas voidaan laskea päätöksentekijän preferenssit määrittävät todennäköisyydet ja odotettujen hyötyjen arvot.

Todistus. (Lause 2.1.) Olkoon ehdollinen todennäköisyysfunktio p ja hyötyfunktio u konstruoitu kuten yllä. Ensiksi johdetaan kolmas ehto aksioomista, jolloin pitää siis osoittaa, että $f \gtrsim_S g$, jos ja vain jos $E_p\big(u(f)|S\big) \geqslant E_p\big(u(g)|S\big)$ kaikilla joukon L arvonnoilla f ja g sekä kaikilla tapahtumilla $S \in \Xi$.

Osoitetaan aluksi, että relevanssiaksioomasta ja hyötyfunktion $u(x,t)$ määritelmästä seuraa, että jokaisella luonnontilalla r pätee

$$c_{x,t} \sim_{\{r\}} u(x,t)b_{\{t\}} + \big(1 - u(x,t)\big)a_0. \tag{2.2}$$

Arvonnan $c_{x,t}$ määritelmään pohjautuen oletetaan ensimmäiseksi, että $r = t$, jolloin kaikilla palkinnoilla x ja kaikilla luonnontiloilla t pätee:

$$c_{x,t}(\cdot|r) = [x](\cdot|r).$$

Tällöin relevanssiaksiooman nojalla $c_{x,t} \sim_{\{t\}} [x]$, ja koska $r = t$, niin $c_{x,t} \sim_{\{r\}} [x]$. Palautetaan sitten mieleen hyötyfunktion $u(x,t)$ määritelmä

$$[x] \sim_{\{t\}} u(x,t)a_1 + \big(1 - u(x,t)\big)a_0,$$

Koska $r = t$, niin edelleen

$$[x] \sim_{\{r\}} u(x,t)a_1 + \big(1 - u(x,t)\big)a_0.$$

Mutta koska $c_{x,t} \sim_{\{r\}} [x]$, niin

$$c_{x,t} \sim_{\{r\}} u(x,t)a_1 + \big(1 - u(x,t)\big)a_0.$$

Arvonta a_1 määriteltiin sellaiseksi arvonnaksi, että se antaa päätöksentekijälle aina yhden parhaista palkinnoista jokaisessa luonnontilassa. Edelleen arvonta $b_{\{t\}}$ tarkoittaa sellaista arvontaa, joka antaa parhaimman mahdollisen palkinnon luonnontilassa t. Niinpä $b_{\{t\}}$ on arvonnan a_1 erikoistapaus, jolloin voidaan kirjoittaa:

$$c_{x,t} \sim_{\{r\}} u(x,t)b_{\{t\}} + \big(1 - u(x,t)\big)a_0.$$

Oletetaan sitten toiseksi (edelleen arvonnan $c_{x,t}$ määritelmään pohjautuen), että $r \neq t$, jolloin kaikilla palkinnoilla x ja kaikilla luonnontiloilla t pätee:

$$c_{x,t}(\cdot|r) = a_0(\cdot|r).$$

Tällöin jälleen relevanssiaksiooman nojalla $c_{x,t} \sim_{\{r\}} a_0$.

Nyt koska a_0 antaa kaikissa luonnontiloissa yhden huonoimmista palkinnoista ja koska $b_{\{t\}}$ antaa aina huonoimman mahdollisen palkinnon kaikissa muissa luonnontiloissa paitsi luonnontilassa t (eli esimerkiksi luonnontilassa r), niin $a_0 \sim_{\{r\}} b_{\{t\}}$. Edelleen koska

$$b_{\{t\}} = u(x,t)b_{\{t\}} + \big(1 - u(x,t)\big)b_{\{t\}},$$

niin voidaan kirjoittaa

$$a_0 \sim_{\{r\}} u(x,t)b_{\{t\}} + \big(1 - u(x,t)\big)b_{\{t\}}.$$

Soveltamalla tulosta $a_0 \sim_{\{r\}} b_{\{t\}}$ uudelleen saadaan

$$a_0 \sim_{\{r\}} u(x,t)b_{\{t\}} + \big(1 - u(x,t)\big)a_0,$$

mistä seuraa aiemmin havaitun tuloksen $c_{x,t} \sim_{\{r\}} a_0$ nojalla, että

$$c_{x,t} \sim_{\{r\}} u(x,t)b_{\{t\}} + \big(1 - u(x,t)\big)a_0.$$

Näin molemmat tapaukset $r = t$ ja $r \neq t$ on käsitelty ja voidaan siirtyä lauseen 2.1 todistuksessa eteenpäin.

Nyt voidaan kirjoittaa $S = \{r_1, r_2, \ldots, r_n\}$, missä kaikki joukon S alkiot r_n ovat erillisiä ($n \in \mathbb{Z}_+$). Tällöin voidaan myös kirjoittaa

$$S = \{r_1\} \cup \{r_2\} \cup \cdots \cup \{r_n\},$$

missä kaikki joukon S osajoukot $\{r_n\}$ ovat erillisiä ($n \in \mathbb{Z}_+$). Täten subjektiivisesta substituutioaksioomasta ja tuloksesta 2.2 seuraa, että jokaisella tapahtumalla S pätee

$$c_{x,t} \sim_S u(x,t)b_{\{t\}} + \big(1 - u(x,t)\big)a_0.$$

Objektiivisesta substituutioaksioomasta ja aidosta objektiivisesta substituutioaksioomasta seuraa, että $f \gtrsim_S g$, jos ja vain jos

$$\left(\frac{1}{|\Omega|}\right) f + \left(1 - \frac{1}{|\Omega|}\right) a_0 \gtrsim_S \left(\frac{1}{|\Omega|}\right) g + \left(1 - \frac{1}{|\Omega|}\right) a_0,$$

missä $|\Omega|$ merkitsee luonnontilojen lukumäärää joukossa Ω. Huomataan, että

$$\left(\frac{1}{|\Omega|}\right) f + \left(1 - \frac{1}{|\Omega|}\right) a_0 = \left(\frac{1}{|\Omega|}\right) \sum_{t\in\Omega} \sum_{x\in X} f(x|t)c_{x,t}.$$

Nimittäin jos $s \in X$ on mielivaltainen palkinto ja $r \in \Omega$ on mielivaltainen luonnontila, niin voidaan kirjoittaa $c_{x,t} = c_{x,t}(s|r)$. Nyt

$$\left(\frac{1}{|\Omega|}\right) \sum_{t\in\Omega} \sum_{x\in X} f(x|t)c_{x,t}(s|r) = \left(\frac{1}{|\Omega|}\right) \sum_{x\in X} \sum_{t\in\Omega} f(x|t)c_{x,t}(s|r).$$

Seuraavaksi jaetaan summalauseke kahteen tapaukseen $t = r$ ja $t \neq r$, jolloin saadaan:

$$\left(\frac{1}{|\Omega|}\right) \sum_{x \in X} \sum_{t \in \Omega} f(x|t) c_{x,t}(s|r)$$
$$= \left(\frac{1}{|\Omega|}\right) \sum_{x \in X} \left(\sum_{t \in \Omega, t = r} f(x|t) c_{x,t}(s|r) \ + \sum_{t \in \Omega, t \neq r} f(x|t) c_{x,t}(s|r) \right).$$

Kun $t = r$, niin summassa on vain yksi tekijä, jolloin summamerkintä voidaan poistaa ja sijoittaa luonnontila r luonnontilan t paikalle. Lisäksi arvonnan $c_{x,t}$ määritelmän nojalla $c_{x,t}(s|r) = [x](s|r)$, kun $t = r$. Toisaalta kun $t \neq r$, niin arvonnan $c_{x,t}$ määritelmän mukaan $c_{x,t}(s|r) = a_0(s|r)$. Tällöin saadaan

$$\left(\frac{1}{|\Omega|}\right) \sum_{x \in X} \left(\sum_{t \in \Omega, t = r} f(x|t) c_{x,t}(s|r) \ + \sum_{t \in \Omega, t \neq r} f(x|t) c_{x,t}(s|r) \right)$$
$$= \left(\frac{1}{|\Omega|}\right) \sum_{x \in X} \left(f(x|r)[x](s|r) \ + \sum_{t \in \Omega, t \neq r} f(x|t) a_0(s|r) \right),$$

missä $[x](s|r) = 0$, kun $x \neq s$, ja $[x](s|r) = 1$ ainoastaan, kun $x = s$. Tällöin saadaan:

$$\left(\frac{1}{|\Omega|}\right) \sum_{x \in X} \left(f(x|r)[x](s|r) \ + \sum_{t \in \Omega, t \neq r} f(x|t) a_0(s|r) \right)$$
$$= \left(\frac{1}{|\Omega|}\right) f(s|r) \ + \left(\frac{1}{|\Omega|}\right) \sum_{t \in \Omega, t \neq r} \ \sum_{x \in X} f(x|t) a_0(s|r)$$
$$= \left(\frac{1}{|\Omega|}\right) f(s|r) \ + \left(\frac{1}{|\Omega|}\right) \left(\sum_{t \in \Omega, t \neq r} \ \sum_{x \in X} f(x|t) \right) a_0(s|r).$$

Kaikkien palkintojen todennäköisyyksien summa luonnontilassa t on 1. Tällöin näiden summien summa on yhtä suuri kuin niiden luonnontilojen lukumäärä, joiden palkintojen todennäköisyyksien summa halutaan laskea yhteen. Täten

$$\sum_{t \in \Omega, t \neq r} \ \sum_{x \in X} f(x|t) = |\Omega - 1|.$$

Tällöin summalauseke saadaan siis seuraavaan muotoon:

$$\left(\frac{1}{|\Omega|}\right) f(s|r) \ + \left(\frac{1}{|\Omega|}\right) \left(\sum_{t \in \Omega, t \neq r} \ \sum_{x \in X} f(x|t) \right) a_0(s|r)$$
$$= \left(\frac{1}{|\Omega|}\right) f + \left(\frac{|\Omega| - 1}{|\Omega|}\right) a_0$$

$$= \left(\frac{1}{|\Omega|}\right) f + \left(1 - \frac{1}{|\Omega|}\right) a_0,$$

eli yhtälö pätee. Nyt soveltamalla objektiivista substituutioaksioomaa toistuvasti saadaan:

$$\left(\frac{1}{|\Omega|}\right) \sum_{t \in \Omega} \sum_{x \in X} f(x|t) c_{x,t}$$

$$\sim_S \left(\frac{1}{|\Omega|}\right) \sum_{t \in \Omega} \sum_{x \in X} f(x|t)\Big(u(x,t) b_{\{t\}} + \big(1 - u(x,t)\big) a_0\Big).$$

Nyt koska $b_{\{t\}} \sim_S p(t|S) a_1 + \big(1 - p(t|S)\big) a_0$, niin

$$\left(\frac{1}{|\Omega|}\right) \sum_{t \in \Omega} \sum_{x \in X} f(x|t)\Big(u(x,t) b_{\{t\}} + \big(1 - u(x,t)\big) a_0\Big)$$

$$\sim_S \left(\frac{1}{|\Omega|}\right) \sum_{t\in\Omega} \sum_{x\in X} f(x|t)\Bigg(u(x,t)\Big(p(t|S) a_1 + \big(1 - p(t|S)\big) a_0\Big) + \big(1 - u(x,t)\big) a_0\Bigg).$$

Merkitään nyt laskennan helpottamiseksi, että $f(x|t) = f$, $u(x|t) = u$ ja $p(t|S) = p$. Tällöin saadaan:

$$\left(\frac{1}{|\Omega|}\right) \sum_{t\in\Omega} \sum_{x\in X} f\Bigg(u\Big(pa_1 + \big(1 - p\big)a_0\Big) + \big(1 - u\big)a_0\Bigg)$$

$$= \left(\frac{1}{|\Omega|}\right) \sum_{t\in\Omega} \sum_{x\in X} f(upa_1 + ua_0 - upa_0 + a_0 - ua_0)$$

$$= \left(\frac{1}{|\Omega|}\right) \sum_{t\in\Omega} \sum_{x\in X} (fupa_1 - fupa_0 + fa_0).$$

Jaetaan sitten summalauseke kahteen osaan ja otetaan toisesta osasta tekijä a_0 yhteiseksi tekijäksi. Koska a_0 ei sisällä summamuuttujaa t tai x, se voidaan ottaa koko summalausekkeen ulkopuolelle, jolloin saadaan:

$$\left(\frac{1}{|\Omega|}\right) \sum_{t\in\Omega} \sum_{x\in X} (fupa_1 - fupa_0 + fa_0)$$

$$= \left(\frac{1}{|\Omega|}\right) \sum_{t\in\Omega} \sum_{x\in X} fupa_1 + \left(\left(\frac{1}{|\Omega|}\right) \sum_{t\in\Omega} \sum_{x\in X} (f - fup)\right) a_0$$

$$= \left(\frac{1}{|\Omega|}\right) \sum_{t\in\Omega} \sum_{x\in X} fupa_1$$

$$+\left(\left(\frac{1}{|\Omega|}\right)\sum_{t\in\Omega}\sum_{x\in X} f-\left(\frac{1}{|\Omega|}\right)\sum_{t\in\Omega}\sum_{x\in X} fup\right)a_0,$$

missä siis $f=f(x|t)$, jolloin

$$\left(\frac{1}{|\Omega|}\right)\sum_{t\in\Omega}\sum_{x\in X} f(x|t)=\left(\frac{1}{|\Omega|}\right)\Big(|\Omega|*1\Big)=1.$$

Tällöin saadaan alkuperäinen summalauseke seuraavaan muotoon:

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{1}{|\Omega|}\right)\sum_{t\in\Omega}\sum_{x\in X} f(x|t)\Big(u(x,t)\big(p(t|S)a_1\\
&\quad+\big(1-p(t|S)\big)a_0\big)+\big(1-u(x,t)\big)a_0\Big)\\
&\qquad=\left(\frac{1}{|\Omega|}\right)\sum_{t\in\Omega}\sum_{x\in X} f(x|t)u(x,t)p(t|S)a_1\\
&\qquad\quad+\left(1-\sum_{t\in\Omega}\sum_{x\in X}\frac{f(x|t)u(x,t)p(t|S)}{|\Omega|}\right)a_0\\
&\qquad=\left(\frac{E_p\big(u(f)|S\big)}{|\Omega|}\right)a_1+\left(1-\left(\frac{E_p\big(u(f)|S\big)}{|\Omega|}\right)\right)a_0.
\end{aligned}$$

Vastaavasti

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{1}{|\Omega|}\right)g+\left(1-\frac{1}{|\Omega|}\right)a_0\\
&\qquad\sim_S\left(\frac{E_p\big(u(g)|S\big)}{|\Omega|}\right)a_1+\left(1-\left(\frac{E_p\big(u(g)|S\big)}{|\Omega|}\right)\right)a_0.
\end{aligned}$$

Täten relaation $\sim_S$ transitiivisuuden nojalla $f\gtrsim_S g$, jos ja vain jos

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{E_p\big(u(f)|S\big)}{|\Omega|}\right)a_1+\left(1-\left(\frac{E_p\big(u(f)|S\big)}{|\Omega|}\right)\right)a_0\\
&\qquad\gtrsim_S\left(\frac{E_p\big(u(g)|S\big)}{|\Omega|}\right)a_1+\left(1-\left(\frac{E_p\big(u(g)|S\big)}{|\Omega|}\right)\right)a_0.
\end{aligned}$$

Mutta nyt monotonisuuden perusteella edellinen relaatio pätee, jos ja vain jos

$$E_p\big(u(f)|S\big)\geqslant E_p\big(u(g)|S\big),$$

koska kiinnostusaksiooma ja aito subjektiivinen substituutioaksiooma takaavat, että $a_1\succ_S a_0$. Täten lauseen 2.1 kolmas ehto pätee.

Seuraavaksi johdetaan lauseen toinen ehto käyttämällä aksioomia, jolloin on osoitettava, että $p(R|T)=p(R|S)p(S|T)$ kaikilla sellaisilla tapahtumilla R, S ja T, että $R\subseteq S\subseteq T\subseteq\Omega$ ja $S\neq\varnothing$.

Olkoon nyt t mielivaltainen joukon Ω luonnontila, x mielivaltainen joukon X palkinto ja $R \subseteq \Omega$ mielivaltainen tapahtuma. Nyt

$$\left(\frac{1}{|R|}\right) b_R(x|t) + \left(1 - \frac{1}{|R|}\right) a_0(x|t) = \left(\frac{1}{|R|}\right) \big(b_R(x|t) + (|R| - 1)\, a_0(x|t)\big).$$

Oletetaan ensin, että $t \in R$. Tällöin arvonnan b_R määritelmän nojalla saadaan:

$$\left(\frac{1}{|R|}\right) \big(b_R(x|t) + (|R| - 1)\, a_0(x|t)\big) = \left(\frac{1}{|R|}\right) \big(a_1(x|t) + (|R| - 1)\, a_0(x|t)\big).$$

Nyt koska $b_{\{r\}}$ on arvonta, josta saa aina huonoimman mahdollisen palkinnon paitsi luonnontilassa r, niin pätee:

$$\left(\frac{1}{|R|}\right) \big(a_1(x|t) + (|R| - 1)\, a_0(x|t)\big) = \left(\frac{1}{|R|}\right) \sum_{r \in R} b_{\{r\}}(x|t).$$

Oletetaan sitten, että $t \notin R$. Tällöin vastaavasti arvonnan b_R määritelmästä saadaan:

$$\left(\frac{1}{|R|}\right) \big(b_R(x|t) + (|R| - 1)\, a_0(x|t)\big) = \left(\frac{1}{|R|}\right) \big(a_0(x|t) + (|R| - 1)\, a_0(x|t)\big).$$

Nyt koska $t \notin R$, niin saadaan seuraava yhtälö:

$$\left(\frac{1}{|R|}\right) \big(a_0(x|t) + (|R| - 1)\, a_0(x|t)\big) = \left(\frac{1}{|R|}\right) \sum_{r \in R} b_{\{r\}}(x|t).$$

Nyt siis seuraava yhtälö pätee:

$$\left(\frac{1}{|R|}\right) b_R + \left(1 - \frac{1}{|R|}\right) a_0 = \left(\frac{1}{|R|}\right) \sum_{r \in R} b_{\{r\}}.$$

Olkoot R ja S mielivaltaisia tapahtumia. Nyt objektiivisen substituution nojalla saadaan:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{|R|}\right) \sum_{r \in R} b_{\{r\}} \quad &\sim_S \quad \left(\frac{1}{|R|}\right) \sum_{r \in R} \Big(p(r|S)a_1 + \big(1 - p(r|S)\big)a_0\Big) \\
&= \quad \left(\frac{1}{|R|}\right) \Big(p(R|S)a_1 + \big(1 - p(R|S)\big)a_0\Big) + \left(1 - \frac{1}{|R|}\right) a_0.
\end{aligned}$$

Nyt edelleen objektiivisen substituutioaksiooman ja aidon objektiivisen substituutioaksiooman perusteella saadaan

$$b_R \sim_S p(R|S)a_1 + \big(1 - p(R|S)\big)a_0.$$

Relevanssiaksiooman nojalla pätee $b_S \sim_S a_1$. Lisäksi kaikilla luonnontiloilla r, jotka eivät sisälly joukkoon S, pätee $b_{\{r\}} \sim_S a_0$. Joten monotonisuutta ja kiinnostusaksioomaa hyödyntäen ylläolevasta kaavasta voidaan johtaa, että $p(r|S) = 0$, jos $r \notin S$, ja $p(S|S) = 1$. Täten p on ehdollinen todennäköisyysfunktio.

Oletetaan nyt, että $R \subseteq S \subseteq T \subseteq \Omega$. Kaavan $b_S \sim_S a_1$ avulla saadaan, että

$$b_R \sim_S p(R|S)b_S + \big(1 - p(R|S)\big)a_0.$$

Lisäksi koska arvonnoista b_R, b_S ja a_0 saa kaikista huonoimman mahdollisimman palkinnon kaikissa luonnontiloissa, jotka eivät sisälly joukkoon S, niin relevanssiaksioomasta seuraa myös, että

$$b_R \sim_{T \setminus S} p(R|S)b_S + \big(1 - p(R|S)\big)a_0.$$

Niinpä subjektiivisen substituutioaksiooman ja objektiivisen substituutioaksiooman nojalla

$$\begin{aligned} b_R &\sim_T p(R|S)b_S + \big(1 - p(R|S)\big)a_0 \\ &\sim_T p(R|S)\Big(p(S|T)a_1 + \big(1 - p(S|T)\big)a_0\Big) + \big(1 - p(R|S)\big)a_0 \\ &= p(R|S)p(S|T)a_1 + \big(1 - p(R|S)p(S|T)\big)a_0. \end{aligned}$$

Mutta nythän pätee

$$b_R \sim_T p(R|T)a_1 + \big(1 - p(R|T)\big)a_0.$$

Myös $a_1 \succ_T a_0$ pätee, joten monotonisuudesta seuraa, että

$$p(R|T) = p(R|S)p(S|T).$$

Täten Bayesin kaava eli lauseen 2.1 toinen ehto seuraa aksioomista.

Todistetaan vielä lauseen ensimmäinen ehto, eli on osoitettava, että $\max_{x \in X} u(x,t) = 1$ ja $\min_{x \in X} u(x,t) = 0$ kaikilla luonnontiloilla $t \in \Omega$. Nyt jos y on paras ja z huonoin mahdollinen palkinto luonnontilassa t, niin $[y] \sim_{\{t\}} a_1$ ja $[z] \sim_{\{t\}} a_0$. Tällöin $u(y,t) = 1$ ja $u(z,t) = 0$ monotonisuuden nojalla. Täten aiemmin konstruoitu hyötyfunktio u toteuttaa lauseen 2.1 ensimmäisen ehdon.

Jos luonnontilaneutraliteetin aksiooman oletetaan myös pätevän, niin päätöksentekijä saa samat reaaliluvut tuloksiksi, kun hän laskee odotetun hyödyn arvon $u(x,t)$ ja kun hän laskee odotetun hyödyn arvon $u(x,r)$ millä tahansa muulla luonnontilalla r. Tämä pätee, sillä

$$[x] \sim_{\{t\}} \beta a_1 + (1-\beta)a_0 \Rightarrow [x] \sim_{\{r\}} \beta a_1 + (1-\beta)a_0,$$

sekä koska monotonisuus ja kiinnostusaksiooma takaavat päätöksentekijän laskeman odotetun hyödyn arvon olevan yksiselitteinen. Niinpä luonnontilaneutraliteetin aksioomasta seuraa, että hyötyfunktio u on luonnontilasta riippumaton.

On vielä osoitettava, että lauseen 2.1 ehdot 1-3 toteuttavien funktioiden u ja p olemassaolo riittää siihen, että aksioomat 1-11 seuraavat. Luonnontilasta riippumattomuutta käytetään ainoastaan aksioomaa 11 todistettaessa.

Käyttämällä odotetun hyödyn kaavaan liittyviä matemaattisia perusominaisuuksia aksioomat voidaan johtaa suoraviivaisesti. Tämän vuoksi tässä tutkielmassa esitetään esimerkinomaisesti vain muutaman aksiooman todistuksia. Todistetaan ensiksi transitiivisuuden aksiooma. Oletetaan, että $f \gtrsim_S g$ ja $g \gtrsim_S h$ pätevät. On osoitettava, että $f \gtrsim_S h$. Nyt lauseen 2.1 kolmannesta ehdosta saadaan:

$$\begin{aligned} E_p\big(u(f)|S\big) &\geqslant E_p\big(u(g)|S\big) \\ E_p\big(u(g)|S\big) &\geqslant E_p\big(u(h)|S\big). \end{aligned}$$

Mutta nythän voidaan kirjoittaa

$$E_p\big(u(f)|S\big) \geqslant E_p\big(u(g)|S\big) \geqslant E_p\big(u(h)|S\big),$$

jolloin siis $E_p\big(u(f)|S\big) \geqslant E_p\big(u(h)|S\big)$. Mutta tällöinhän kolmannen ehdon nojalla edelleen voidaan kirjoittaa $f \gtrsim_S h$.

Todistetaan sitten relevanssin aksiooma. Oletetaan, että $f(\cdot|t) = g(\cdot|t)$ pätee kaikissa joukon S luonnontiloissa t. On osoitettava, että $f \sim_S g$. Nyt oletuksen ja odotetun hyödyn kaavan määritelmän nojalla pätee

$$\begin{aligned} &E_p(u(f)|S) \\ &\quad = \sum_{t\in S} p(t|S) \sum_{x\in X} u(x,t) f(x|t) \\ &\quad = \sum_{t\in S} p(t|S) \sum_{x\in X} u(x,t) g(x|t) \\ &\quad = E_p(u(g)|S), \end{aligned}$$

jolloin siis $E_p(u(f)|S) \geqslant E_p(u(g)|S)$ ja $E_p(u(g)|S) \geqslant E_p(u(f)|S)$. Tällöin lauseen 2.1 kolmannen ehdon perusteella $f \gtrsim_S g$ ja $g \gtrsim_S f$ pätevät, mistä seuraa relaation $\sim_S$ määritelmän nojalla, että $f \sim_S g$.

Todistetaan sitten subjektiivisen substituution aksiooma. Oletetaan, että $f \gtrsim_S g$, $f \gtrsim_T g$ ja $S \cap T = \varnothing$. On osoitettava, että $f \gtrsim_{S\cup T} g$. Lauseen 2.1 kolmannen ehdon nojalla $E_p\big(u(f)|S\big) \geqslant E_p\big(u(g)|S\big)$ ja $E_p\big(u(f)|T\big) \geqslant E_p\big(u(g)|T\big)$. Nyt odotetun hyödyn arvon määritelmästä sekä Bayesin kaavasta (eli lauseen toisesta ehdosta) seuraa, että

$$\begin{aligned} &E_p\big(u(f)|S \cup T\big) \\ &\quad = \sum_{t\in S\cup T} \sum_{x\in X} p(t|S \cup T) f(x|t) u(x,t) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{t \in S} \sum_{x \in X} p(t|S)p(S|S \cup T)f(x|t)u(x,t) \\
&\quad + \sum_{t \in T} \sum_{x \in X} p(t|T)p(T|S \cup T)f(x|t)u(x,t) \\
&= p(S|S \cup T)E_p\big(u(f)|S\big) + p(T|S \cup T)E_p\big(u(f)|S\big)
\end{aligned}
$$

ja vastaavasti

$$E_p\big(u(g)|S \cup T\big) = p(S|S \cup T)E_p\big(u(g)|S\big) + p(T|S \cup T)E_p\big(u(g)|S\big).$$

Nyt epäyhtälöstä $E_p\big(u(f)|S\big) \geqslant E_p\big(u(g)|S\big)$ seuraa, että

$$E_p\big(u(f)|S \cup T\big) \geqslant E_p\big(u(g)|S \cup T\big),$$

jolloin lauseen 2.1 kolmannen ehdon nojalla $f \gtrsim_{S \cup T} g$ pätee, ja subjektiivisen substituution aksiooma on todistettu.

Kolmanneksi todistetaan luonnontilaneutraliteetin aksiooma. Olkoot r ja t mielivaltaisia joukon Ω luonnontiloja. Oletetaan, että $f(\cdot|r) = f(\cdot|t)$ ja $g(\cdot|r) = g(\cdot|t)$. Oletetaan lisäksi, että $f \gtrsim_{\{r\}} g$ ja että lauseen 2.1 ehdot 1-3 toteuttaa hyötyfunktio, joka on luonnontilasta riippumaton. Nyt on osoitettava, että myös $f \gtrsim_{\{t\}} g$. Huomataan ensinnä, että

$$
\begin{aligned}
&E_p(u(f)|\{r\}) \\
&\quad = \sum_{s \in \{r\}} p(s|\{r\}) \sum_{x \in X} u(x,s)f(x|s) \\
&\quad = \sum_{x \in X} u(x,r)f(x|r).
\end{aligned}
$$

Edelleen oletuksen $f(\cdot|r) = f(\cdot|t)$ perusteella saadaan:

$$\sum_{x \in X} u(x,r)f(x|r) = \sum_{x \in X} u(x,r)f(x|t).$$

Koska hyötyfunktio u on oletuksen nojalla luonnontilasta riippumaton, voidaan kirjoittaa $u(x,t) = U(x)$ kaikilla palkinnoilla $x \in X$ ja luonnontiloilla $t \in \Omega$. Niinpä voidaan edelleen kirjoittaa:

$$\sum_{x \in X} u(x,r)f(x|t) = \sum_{x \in X} U(x)f(x|t).$$

Vastaavilla perusteluilla, mutta päinvastaiseen suuntaan, voidaan kirjoittaa:

$$
\begin{aligned}
&\sum_{x \in X} U(x)f(x|t) \\
&\quad = \sum_{x \in X} u(x,t)f(x|t)
\end{aligned}
$$

$$= \sum_{s\in\{r\}} p(s|\{r\}) \sum_{x\in X} u(x,s) f(x|s)$$
$$= E_p(u(f)|\{t\}),$$

eli saadaan, että $E_p(u(f)|\{r\}) = E_p(u(f)|\{t\})$. Vastaavasti voidaan johtaa, että $E_p(u(g)|\{r\}) = E_p(u(g)|\{t\})$.

Nyt oletuksesta $f \gtrsim_{\{r\}} g$ seuraa lauseen 2.1 kolmannen ehdon nojalla, että $E_p(u(f)|\{r\}) \geqslant E_p(u(g)|\{r\})$. Edellä esitetyistä yhtälöistä seuraa, että $E_p(u(f)|\{t\}) \geqslant E_p(u(g)|\{t\})$, jolloin edelleen kolmannen ehdon perusteella $f \gtrsim_{\{t\}} g$. □

2.1.4 Dominointi

Tämän luvun tulokset pohjautuvat päälähdeteoksen ensimmäiseen lukuun (ks. [3] s. 26–29). Luvussa tarkastellaan dominointia, joka liittyy pelin ratkaisemiseen. Pohditaan kuitenkin aluksi, millaista problematiikkaa päätöksentekoon sekä muihin pelaajiin ja heidän päätöksentekoprosesseihinsa liittyy.

Toisinaan päätöksentekijän mielestä subjektiivisten tuntemattomien todennäköisyyksiä on ymmärrettävästi hankalaa arvioida. Vaikka näille vaikeuksille on monesti inhimillisiä perusteita, niitä voidaan selittää myös teoreettisemmasta näkökulmasta. Esimerkiksi jokin luonnontila, jonka päätöksentekijä kohtaa pelitilanteessa, voi sisältää muiden päätöksentekijöiden tulevien päätösten aiheuttamat mahdolliset seuraukset. Niinpä laskeakseen subjektiivisten tuntemattomien todennäköisyysjakauman tässä kyseisessä luonnontilassa päätöksentekijän tulee tietää ja ottaa huomioon kaikki ne tiedot, jotka hän tietää muiden pelitilanteessa vaikuttavien päätöksentekijöiden päätöksentekoprosesseista. Päätöksentekijään vaikuttaa siis hänen uskomuksensa siitä, mitä hän ajattelee muiden päätöksentekijöiden ajattelevan hänestä itsestään. Nämä uskomukset päätöksentekijä taas perustaa tietoihin, joita hän tietää muista päätöksentekijöistä. Niinpä siis toisten päätöksentekijöiden käyttäytymisestä riippuvien subjektiivisten tuntemattomien todennäköisyyksien arvioiminen voi vaatia ymmärrystä siitä, mikä päätöksentekijän oman päätöksentekoprosessin lopputulos saattaisi olla. Kuitenkin tämän päätöksentekijän oman päätöksentekoprosessin yksi osa on juuri subjektiivisten tuntemattomien todennäköisyyksien arvioiminen. Tämän paradoksaaliselta kehältä vaikuttavan ongelman ratkaisuun pyrkiminen onkin yksi peliteorian aihealueista.

Joskus on kuitenkin mahdollista sanoa, että jotkut päätösvaihtoehdot eivät ainakaan ole optimaalisia päätöksentekijälle — riippumatta hänen uskomuksistaan, jotka liittyvät esimerkiksi muihin päätöksentekijöihin tai heidän ajatuksiinsa päätöksentekijästä itsestään. (Päätöksentekijän uskomuksilla tarkoitetaan siis niitä todennäköisyyksiä, jotka hän liittää näkemiinsä tuleviin tapahtumiin.) Seuraavaksi esitellään joitakin tutkielmassa myöhemminkin tarvittavia käsitteitä ja tuloksia, joiden avulla voidaan näyttää, milloin tällaisia todennäköisyyksistä riippumattomia päätösvaihtoehtoja on olemassa ja mitä ne ovat.

Olkoon nyt päätöksentekijän hyötyfunktio on $u : X \times \Omega \to \mathbb{R}$, joka ei ole riippumaton luonnontilasta. Hän voi valita minkä tahansa palkinnon x joukosta X. Voidaan siis tulkita joukon X olevan joukko sellaisia päätösvaihtoehtoja, jotka ovat päätöksentekijälle mahdollisia. Jos päätöksentekijän arvioima luonnontilan $t \in \Omega$ subjektiivinen todennäköisyys olisi $p(t)$ (eli $p(t) = p(t|\Omega), \forall t \in \Omega$), niin päätöksentekijä valitsisi jonkin tietyn palkinnon y joukosta X ainoastaan, mikäli

$$\sum_{t\in\Omega} p(t)u(y,t) \geqslant \sum_{t\in\Omega} p(t)u(x,t), \quad \forall x \in X. \tag{2.3}$$

Seuraavaa lausetta varten esitellään eräs taloustieteessä usein esiintyvä käsite. Vektorien joukko Ψ on *konveksi*, jos ja vain jos millä tahansa kahdella vektorilla p ja q sekä mielivaltaisella reaaliluvulla $\lambda \in [0,1]$ pätee seuraava ehto:

$$p \in \Psi, \quad q \in \Psi \quad \Rightarrow \quad \lambda p + (1-\lambda)q \ \in \ \Psi.$$

Lause 2.2. *Olkoon $u : X \times \Omega \to \mathbb{R}$ mielivaltainen hyötyfunktio ja $y \in X$ mielivaltainen palkinto. Tällöin kaikista sellaisista todennäköisyysjakaumista $p \in \Delta(\Omega)$, joilla y on optimaalinen palkinto päätöksentekijälle, muodostuva joukko on konveksi.*

Todistus. Oletetaan, että y olisi optimaalinen palkinto sellaiselle päätöksentekijälle, jonka uskomukset (eli subjektiivisten tuntemattomien todennäköisyysjakaumat) ovat p ja q. Olkoon λ mikä tahansa reaaliluku väliltä $[0,1]$ ja olkoon $r = \lambda p + (1-\lambda)q$. Tällöin kaikilla palkinnoilla x joukossa X pätee:

$$\begin{aligned}
\sum_{t\in\Omega} r(t)u(y,t) &= \sum_{t\in\Omega} \big(\lambda p + (1-\lambda)q\big)(t)u(y,t) \\
&= \lambda \sum_{t\in\Omega} p(t)u(y,t) + (1-\lambda)\sum_{t\in\Omega} q(t)u(y,t) \\
&\geqslant \lambda \sum_{t\in\Omega} p(t)u(x,t) + (1-\lambda)\sum_{t\in\Omega} q(t)u(x,t) \\
&= \sum_{t\in\Omega} \big(\lambda p + (1-\lambda)q\big)(t)u(x,t) \\
&= \sum_{t\in\Omega} r(t)u(x,t).
\end{aligned}$$

Täten palkinto y on siis optimaalinen myös uskomuksille (eli todennäköisyysjakaumille) r, jolloin konveksin joukon määritelmän nojalla on osoitettu, että sellaisista todennäköisyysjakaumista, joilla y on optimaalinen palkinto, muodostuva joukko on konveksi. □

Havainnollistetaan lausetta 2.2 vielä esimerkillä. Oletetaan, että päätösvaihtoehtojen joukko $X = \{\alpha, \beta, \gamma\}$, luonnontilojen joukko $\Omega = \{\theta_1, \theta_2\}$ ja hyötyfunktio u ovat kuten taulukossa 2.1. Koska mahdollisia luonnontiloja on vain kaksi ja niiden todennäköisyyksien summa on 1, niin $p(\theta_1) = 1 - p(\theta_2)$

Taulukko 2.1: Odotettujen hyötyjen arvot luonnontiloissa θ_1 ja θ_2.

Päätös	θ_1	θ_2
α	8	1
β	5	3
γ	4	7

pätee. Päätös α on optimaalinen päätöksentekijälle, jos ja vain jos kumpikin seuraavista epäyhtälöistä toteutuu:

$$8p(\theta_1) + 1\big(1 - p(\theta_1)\big) \geqslant 5p(\theta_1) + 3\big(1 - p(\theta_1)\big),$$

$$8p(\theta_1) + 1\big(1 - p(\theta_1)\big) \geqslant 4p(\theta_1) + 7\big(1 - p(\theta_1)\big).$$

Ensimmäinen epäyhtälöistä määrittää, että päätöksestä α seuraava odotettu hyöty on vähintään yhtä paljon kuin päätöksestä β seuraava odotettu hyöty. Toinen epäyhtälöistä taas määrittää vastaavasti sen, että päätöksestä α seuraava odotettu hyöty on vähintään yhtä paljon kuin päätöksestä γ seuraava odotettu hyöty. Noudattamalla algebran perussääntöjä nämä epäyhtälöt voidaan ratkaista (suoraviivainen epäyhtälöjen ratkaisu sivuutetaan tässä tutkielmassa), jolloin saadaan, että α on optimaalinen päätösvaihtoehto, kun $p(\theta_1) \geqslant \frac{3}{5}$. Vastaavasti päätös γ olisi optimaalinen päätöksentekijälle, jos ja vain jos

$$4p(\theta_1) + 7\big(1 - p(\theta_1)\big) \geqslant 8p(\theta_1) + 1\big(1 - p(\theta_1)\big),$$

$$4p(\theta_1) + 7\big(1 - p(\theta_1)\big) \geqslant 5p(\theta_1) + 3\big(1 - p(\theta_1)\big).$$

Nämä kaksi epäyhtälöä pätevät, kun $p(\theta_1) \leqslant \frac{3}{5}$, eli päätös γ olisi optimaalinen päätöksentekijälle, jos luonnontilan θ_1 todennäköisyys olla vallitseva luonnontila olisi enintään $\frac{3}{5}$. Vastaavasti päätös β olisi optimaalinen päätöksentekijälle, jos ja vain jos

$$5p(\theta_1) + 3\big(1 - p(\theta_1)\big) \geqslant 8p(\theta_1) + 1\big(1 - p(\theta_1)\big),$$

$$5p(\theta_1) + 3\big(1 - p(\theta_1)\big) \geqslant 4p(\theta_1) + 7\big(1 - p(\theta_1)\big).$$

Ei kuitenkaan ole olemassa mitään arvoa $p(\theta_1)$, joka toteuttaisi kummankin näistä epäyhtälöistä. Täten kaikki päätökset α, β ja γ ovat optimaalisia jollakin konveksilla todennäköisyysarvojen välillä. Voidaan kuitenkin huomauttaa, että väli, jolla päätös β on optimaalinen, on tyhjä joukko, eli β ei ole koskaan päätöksentekijälle optimaalinen vaihtoehto.

Nyt ollaan siis todettu, että vaikka ei edes tiedettäisi luonnontilojen todennäköisyysjakaumaa p, voidaan päätellä, että päätös β ei mitenkään voi olla optimaalinen päätöksentekijälle. Kun jokin päätösvaihtoehto ei tällä tavoin ole koskaan optimaalinen, kyseisen päätösvaihtoehdon sanotaan olevan *vahvasti dominoitu.*

Tällaisten dominoitujen päätösvaihtoehtojen tunnistaminen usein helpottaa päätöksentekotilanteen analysointia, sillä se rajaa optimaalisten päätösvaihtoehtojen lukumäärää. Dominoitujen päätösvaihtoehtojen tunnistaminen voidaan aloittaa tutkimalla eri luonnontilojen vaikutusta päätösten optimaalisuuteen. Edellä esitetyssä esimerkissä huomataan, että α olisi paras päätös päätöksentekijälle, jos hän tietäisi luonnontilan olevan θ_1. Edelleen huomataan, että γ olisi paras päätöksentekijälle, mikäli hän tietäisi luonnontilan olevan θ_2. Kun huomataan päätösten optimaalisuuden riippuvan luonnontilasta, voidaan todeta, että α ja γ eivät voi olla dominoituja päätöksiä. Päätösvaihtoehto β on optimaalisuudessa mitattuna keskitasoinen päätösvaihtoehto, sillä se ei ole paras, mutta ei myöskään huonoin vaihtoehto kummassakaan luonnontilassa (eli taulukon 2.1 sarakkeessa). Kuitenkaan tällaiset keskitasoiset päätösvaihtoehdot eivät välttämättä ole dominoituja. Esimerkiksi jos päätöksestä β seuraavien odotettujen hyötyjen arvot vaihdettaisiin arvoksi 6 kummassakin luonnontilassa θ_1 ja θ_2, niin β olisi optimaalinen päätös aina, kun $\frac{5}{7} \geqslant p(\theta_1) \geqslant \frac{1}{3}$. Toisaalta jos päätöksestä β seuraavien odotettujen hyötyjen arvot vaihdettaisiin kummatkin arvoon 3 molemmissa luonnontiloissa θ_1 ja θ_2, niin olisi selvää, ettei β voisi koskaan olla optimaalinen päätösvaihtoehto, koska päätöksen γ valitseminen olisi päätöksentekijälle aina parempi vaihtoehto kuin päätöksen β valitseminen.

On myös toinen keino todeta, että päätösvaihtoehto β on dominoitu. Oletetaan, että päätöksentekijä harkitsisi seuraavaa satunnaista arvonnanvalintaprosessia määrittämään, minkä päätöksen hän tekee: päätöksentekijä heittäisi kolikkoa, ja hän valitsisi päätöksen α, jos hän saisi kruunan, ja päätöksen γ, mikäli hän saisi klaavan. Merkintää $\frac{1}{2}[\alpha] + \frac{1}{2}[\gamma]$ voidaan käyttää tarkoittamaan tätä satunnaista arvonnanvalintaprosessia, sillä se määrittää todennäköisyyden $\frac{1}{2}$ kummallekin arvonnalle $[\alpha]$ ja $[\gamma]$ (eli kummallekin päätökselle α ja γ, sillä arvonnat $[\alpha]$ ja $[\gamma]$ antavat aina päätökset α ja γ). Jos vallitseva luonnontila olisi θ_1, niin tämä satunnaistettu strategia määrittäisi, että päätöksentekijän odotetun hyödyn arvo olisi

$$\frac{1}{2} \cdot 8 + \frac{1}{2} \cdot 4 = 6,$$

joka olisi suurempi kuin päätöksestä β seuraavan odotetun hyödyn arvo 5. Suurempi arvo olisi parempi, sillä oletetaan, että suurempi hyöty on päätöksentekijälle aina parempi.

Jos taas θ_2 olisi vallitseva luonnontila, niin tämä satunnaistettu strategia antaisi odotetun hyödyn arvoksi

$$\frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 7 = 4,$$

joka on parempi kuin päätöksestä β seuraavan odotetun hyödyn arvo 3. Niinpä olipa luonnontila kumpi tahansa, strategiasta $\frac{1}{2}[\alpha] + \frac{1}{2}[\gamma]$ odotettavissa oleva hyöty on aidosti suurempi kuin päätöksestä β odotettavissa oleva hyöty. Täten päätöksentekijä ei toimisi rationaalisesti, jos hän valitsisi päätöksen β, koska hän saisi aina suuremman odotetun hyödyn satunnaisella arvonnanvalintaprosessilla $\frac{1}{2}[\alpha] + \frac{1}{2}[\gamma]$, vaikkei hän edes tietäisi, kumpi luonnontiloista θ_1 ja θ_2 on vallitseva. Voidaan siis sanoa, että satunnaistettu strategia $\frac{1}{2}[\alpha] + \frac{1}{2}[\gamma]$ dominoi vahvasti päätösvaihtoehtoa β.

Kun puhutaan päätösvaihtoehdoista eikä niinkään palkinnoista, satunnaista arvonnanvalintaprosessia kutsutaan *satunnaistetuksi strategiaksi*. Satunnaistettu strategia on päätösvaihtoehtojen joukon X todennäköisyysjakauma. Tällaiselle satunnaistetulle strategialle voidaan käyttää merkintää $\sigma = \big(\sigma(x)\big)_{x \in X}$, missä $\sigma(x)$ merkitsee päätöksen x valitsemisen todennäköisyyttä. Olkoon nyt $u : X \times \Omega \to \mathbb{R}$ hyötyfunktio. Voidaan sanoa, että satunnaistettu strategia $\sigma \in \Delta(X)$ *dominoi vahvasti* päätösvaihtoehtoa $y \in X$ silloin, kun

$$\sum_{x \in X} \sigma(x) u(x,t) > u(y,t), \quad \forall t \in \Omega. \tag{2.4}$$

Tällöin siis satunnaistettu strategia σ dominoi vahvasti päätöstä y, jos kaikissa luonnontiloissa satunnaistettu strategia σ on odotetun hyödyn suhteen aina parempi kuin päätös y.

Nyt vahvan dominoinnin käsitettä on käytetty kahdessa eri yhteydessä. Seuraava lause 2.3 osoittaa, että nämä kaksi eri tapaa käyttää kyseistä käsitettä ovat ekvivalentteja.

Lause 2.3. *Olkoon $u : X \times \Omega \to \mathbb{R}$ hyötyfunktio, missä X ja Ω ovat epätyhjiä äärellisiä joukkoja. Olkoon edelleen y joukon X mielivaltainen päätösvaihtoehto. Nyt on olemassa satunnaistettu strategia $\sigma \in \Delta(\Omega)$ siten, että satunnaistettu strategia σ dominoi vahvasti päätöstä y ehdon 2.4 mukaisesti, jos ja vain jos ei ole olemassa sellaista todennäköisyysjakaumaa $p \in \Delta(\Omega)$, että y on optimaalinen ehdon 2.3 mukaisesti.*

Todistus. Lauseen 2.3 todistus sivuutetaan, sillä se edellyttää muun muassa lineaarisen optimoinnin dualismilauseen tuntemista, eikä kyseistä lausetta käsitellä tässä tutkielmassa. Lauseen todistus löytyy tutkielman päälähdeteoksesta (ks. [3] s. 31). □

2.2 Ekstensiivimuotoiset pelit

Nyt kun yleisimpiä termejä ja merkintätapoja on esitelty, voidaan käsitellä itse pelin käsitettä. Onkin aloitettava siitä, että määritellään geneerinen malli, joka kuvaa peliä. Mallin rakenne tai muoto ei saa olla liian yksinkertainen, jotta voidaan tutkia mielenkiintoisimpia ja toisinaan mutkikkaimpia näkökulmia eri peleissä. Toisaalta mallin rakenne tai muoto ei voi olla liian monimutkainenkaan, sillä tällöin voidaan joutua rajoittautumaan vain perustason tilanteisiin, jolloin syvällisemmät ongelmat jäävät ratkaisematta.

Jotta nämä kaksi ääripäätä voitaisiin välttää, pelin määritelmälle on kehitetty useita eri rakenteita ja muotoja. Näistä tärkeimpiä ovat *ekstensiivimuotoinen* määritelmä ja *strategiamuotoinen* määritelmä, ja tässä tutkielmassa rajoitutaankin esittelemään vain nämä kaksi eri tapaa määritellä peli. Ekstensiivimuoto on kaikista rakenteellisin tapa kuvata pelitilanteita ja sitä käytetäänkin laajasti peliteorian kirjallisuudessa. Strategiamuotoinen määritelmä on ekstensiivimuotoista määritelmää paljon yksinkertaisempi ja sopii siten hyvin yleisen tason pelianalyysiin. Strategiamuotoisen määritelmän nähdään juontuvan ekstensiivimuotoisesta määritelmästä, joten käsitellään ensiksi ekstensiivimuotoiset pelit. (Ks. [3] s. 37.)

2.2.1 Esimerkki ekstensiivimuotoisesta pelistä

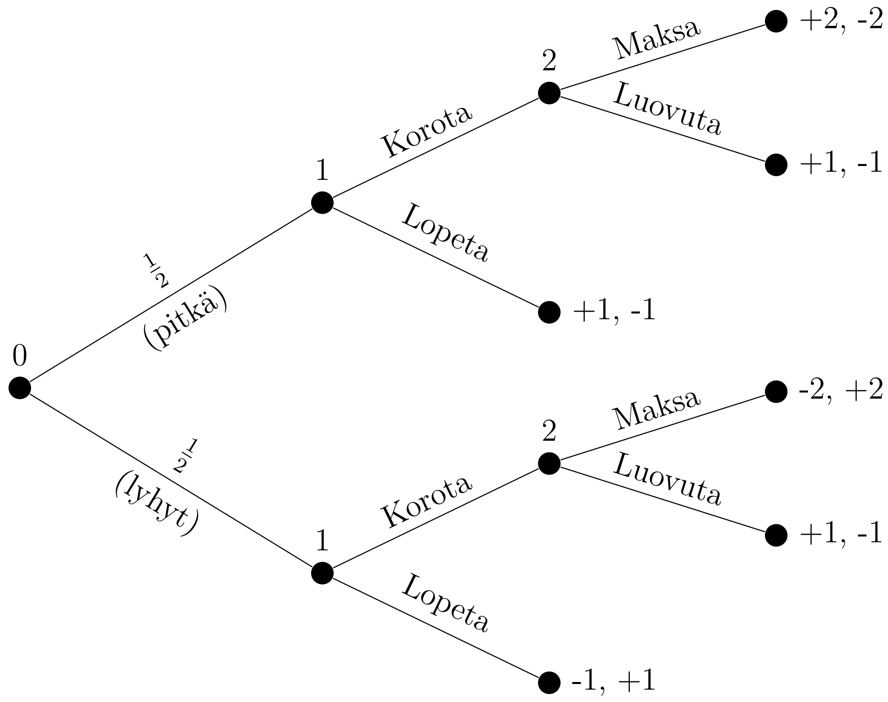
Jotta pelin määritelmän ekstensiivinen muoto olisi helpompi ymmärtää, niin esitellään se ensin yksinkertaisen esimerkin avulla. Tämä esimerkki pohjautuu päälähdeteoksen toisessa pääluvussa esitettyyn esimerkkiin (ks. [3] s. 37–42).

Kuvitellaan, että kaksi pelaajaa (pelaaja 1 ja pelaaja 2) sijoittavat aluksi kumpikin yhden euron voittosummapottiin. Sitten he pelaavat pitkää tikkua siitä, kumpi tämän rahasumman voittaa. Pitkää tikkua pelataan siten, että kaksi tikkua on aseteltu ulkopuolisen peliä valvovan henkilön nyrkkiin siten, että vain pieni osa kummastakin tikusta näkyy. Näkyvät osat ovat yhtä pitkät, mutta toinen tikuista on pidempi. Nyrkin ulkopuolella näkyvästä osasta ei kuitenkaan voi päätellä, kumpi tikuista on pitempi.

Pelaaja 1 vetää kahdesta tikusta jommankumman, mutta ei näytä pelaajalle 2, kumman tikun on saanut. Pelaaja 1 saa kuitenkin itse katsoa, onko hän vetänyt lyhyen vai pitkän tikun. Pelaajan 1 pitää nyt päättää, korottaako hän pelipanosta eurolla vai luovuttaako hän ja näyttää pelaajalle 2, kumman tikun hän on vetänyt nyrkistä. Jos hänellä on pitkä tikku, hän saa pitää rahasumman, ja jos hänellä on lyhyt tikku, niin pelaaja 2 voittaa rahasumman. Kummassakin tapauksessa peli päättyy siihen. Mikäli pelaaja 1 ei kuitenkaan näytä tikkua pelaajalle 2 heti, vaan päättääkin ensin korottaa pelipanosta, niin tällöin pelaajan 2 on puolestaan päätettävä, korottaako hän myös panoksensa, jolloin hän on edelleen mukana pelissä. Tällöin pelaaja 1 näyttää tikun ja jälleen sen ollessa pitkä hän voittaa rahasumman, ja lyhyellä tikulla pelaaja 2 voittaa rahasumman. Jos pelaaja 2 kuitenkin päättää, ettei hän maksa pelaajan 1 vaatimaa korotettua panosta eli hän luovuttaa, niin peli päättyy ja pelaaja 1 voittaa koko rahasumman.

Kuvassa 2.1 on puugraafi (jatkossa vain *puu*), joka näyttää pelin kaikki mahdolliset tapahtumat. Puu koostuu *oksien* joukosta. Oksat yhdistävät kaksi pistettä, joita kutsutaan *solmuiksi*. Puussa vasemmanpuoleisin solmu on nimeltään *juuri* (tässä tutkielmassa puita luetaan aina vasemmalta oikealle) ja sillä kuvataan pelin alkua. Kuvan 2.1 puussa on myös kuusi sellaista solmua, joista ei lähde enää yhtäkään uutta oksaa oikealle. Näitä solmuja kutsutaan *päätepisteiksi* ja ne kuvaavat kaikkia niitä tilanteita, joihin peli voi päättyä. Jokainen pelissä mahdollisesti toteenkäyvä tapahtumasarja on esitetty puussa oksien polkuna juuresta päätepisteeseen asti. Se oksien polku, joka vastaa pelin edetessä toteen käyvää tapahtumasarjaa, on nimeltään *pelin polku*. Peliteoreettisen analyysin tarkoitus on pyrkiä ennustamaan juuri pelin polku.

Kuva 2.1: Tikkupeliä esittävän puugraafin ensimmäinen versio.



Kuvan 2.1 puussa jokaisessa päätepisteessä on esitetty lukupari, joka näyttää pelaajien 1 ja 2 pelistä saaman tuoton, jos peli loppuu kyseiseen päätepisteeseen. Esimerkiksi jos pelaaja 1 saa pitkän tikun ja hän korottaa panosta, ja pelaaja 2 vastaa tähän maksamalla myös korotetun panoksen, niin pelaajan 1 tuotto on $+2$ ja pelaajan 2 tuotto on -2. Tämä tapahtumasarja on puun ylimmäisten oksien ketju aina juuresta oikean laidan ylimmäiseen päätepisteeseen saakka. Toinen mahdollinen tapahtumasarja on esimerkiksi alimmaisten oksien muodostama ketju juuresta päätepisteeseen, joka sijaitsee alimpana keskellä puuta. Tämä tapahtumasarja kuvaa sellaista pelitilannetta, että pelaaja 1 vetää nyrkistä lyhyen tikun ja päättää luovuttaa välittömästi. Tällöin pelaajan 1 tuotto on -1 ja pelaajan 2 tuotto on $+1$, sillä pelaaja 2 voittaa koko rahasumman pelaajan 1 menettäessä yhden euron alkupanoksensa.

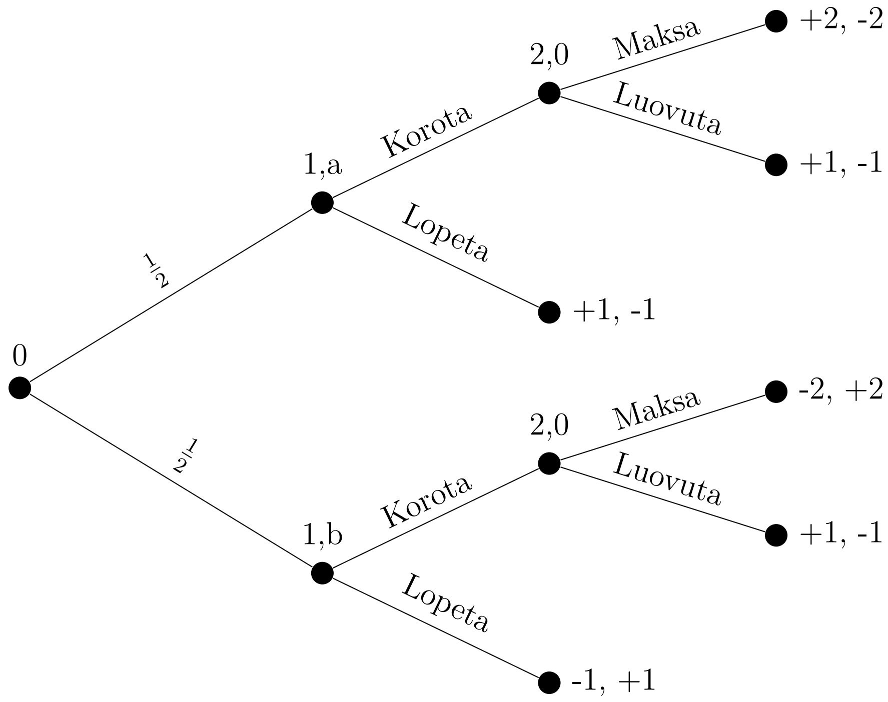
Joistakin solmuista saattaa lähteä useampia oksia. Ne esittävät vaihtoehtoisia tapahtumia, joista korkeintaan yksi voi käydä toteen. Sen, mikä näistä vaihtoehdoista käy toteen, päättää joko joku pelaajista tai sitten sattuma. Jos sattuma määrää seuraavan tapahtuman, niin solmulle annetaan merkintä ”0” (nolla). Nollalla merkittyä solmua kutsutaan *sattuman solmuksi* ja sitä seuraava tapahtuma pelin polulla määräytyy jollakin satunnaisella menetelmällä, jonka jokaiseen vaihtoehtoon liittyy tietty todennäköisyys käydä toteen. Nämä todennäköisyydet esitetään oksissa, jotka lähtevät sattuman solmusta. Kuvan 2.1 puussa juuri on sattuman solmu, sillä sitä seuraavan tapahtuman määrittää sattuma: pelaajan 1 vetämän tikun pituus riippuu vain ja ainoastaan sattumasta. Sekä pitkän että lyhyen tikun nyrkistä vetämisen todennäköisyys on $\frac{1}{2}$, sillä tikkuja on vain kaksi ja toinen niistä on lyhyt ja toinen on pitkä. Nämä todennäköisyydet on esitetty kuvan 2.1 puussa juuresta lähtevien oksien yhteydessä.

Jos solmua ei ole merkitty nollalla (eli se ei ole sattuman solmu) eikä se ole päätepiste, niin solmu on *päätöksen solmu*. Tällöin pelin polun seuraavan oksan määrittää pelaaja, jonka numero on merkitty solmuun samaan tapaan kuin nolla on merkitty sattuman solmuun. Esimerkiksi kuvan 2.1 puussa solmu, joka merkitsee tilannetta tikun vetämisen jälkeen, on päätöksen solmu. Siinä pelaaja 1 päättää tikun vedettyään, luovuttaako hän vai korottaako hän pelin panosta. Tällöin vasemmalta oikealle katsottuna kummassakin juuresta seuraavassa solmussa päätösvalta on yksinomaan pelaajalla 1, jolloin ”1” merkitään näihin kahteen solmuun.

Kuvan 2.1 puu ei kuitenkaan ole vielä täydellinen kuva tikkupelistä, sillä siinä ei missään esitetä sitä pelille olennaista faktaa, että pelaaja 1 tietää vetämänsä tikun pituuden, mutta pelaaja 2 ei tiedä. Pelkästään katsomalla kuvan 2.1 puuta voisi olettaa, että pelaaja 2 luovuttaisi heti pelaajan 1 vedettyä pitkän tikun, sillä tällöin hänen tuottonsa olisi vain -1 sen sijaan, että hän maksaisi vielä korotetun panoksen, jolloin hänen tuottonsa olisi -2. Puun perusteella voisi myös olettaa pelaajan 2 maksavan korotetun panoksen, jos pelaaja 1 vetäisi lyhyen tikun, koska tällöin hänen tuottonsa olisi $+2$ sen sijaan, että hän luovuttaisi ja tuotto olisi -1. Kuitenkin pelaajan 2 on käyttäydyttävä samoin näissä kahdessa solmussa, koska hän ei tiedä vedetyn tikun pituutta valitessaan maksamisen ja luovuttamisen välillä. Pelaaja 1 taas voi suunnitella korottavansa panosta vetäessään pitkän tikun ja luovuttavansa pelin vetäessään lyhyen tikun, koska hän pystyy erottamaan nämä kaksi solmua, joissa hänellä on päätäntävalta. Tämä johtuu siitä, että pelaaja 1 tietää, kumman tikun hän on vetänyt nyrkistä. Jotta se, että pelaajilla on eri määrä tietoa pelistä ja sen tapahtumista, voidaan esittää kuvan 2.1 kaltaisessa puussa, kuvaan pitää tehdä muutama lisäys.

Nyt kuvassa 2.2 jokaisessa päätöksen solmussa on kaksi merkintää pilkulla erotettuna. Ensimmäisenä pilkun vasemmalla puolella on *pelaajamerkintä*, joka kertoo sen pelaajan, jolla on päätösvalta tässä solmussa. Toisena pilkun oikealla puolella oleva merkintä on *tietomerkintä*, joka taas kertoo tässä solmussa päätösvallassa olevan pelaajan *tietotilan*. Tällöin merkintä ”$1, a$” tarkoittaa solmua, jossa pelaaja 1 tekee päätöksen ja on tietotilassa a. Merkintä ”$2, 0$” taas tarkoittaa solmua, jossa pelaaja 2 tekee päätöksen tietotilassa 0. Kuvassa 2.2 tietotila a tarkoittaa sitä, että pelaaja tietää vetäneensä pitkän tikun ja tietotila b tarkoittaa, että pelaaja tietää vetäneensä lyhyen tikun. Tietotila 0 merkitsee sitä, että pelaaja tietää toisen pelaajan vetäneen tikun, mutta hän ei tiedä sen pituutta. Tietotilojen tarkoitus on näyttää ne solmut, joita kyseisissä solmuissa päätäntävallassa oleva pelaaja ei voi erottaa toisistaan. Täten kuvan 2.2 puusta voi päätellä, että pelaaja 1 tietää kummassa päätöksen solmussa hän on, koska näissä solmuissa on erilaiset tietotilat. Puusta voi myös päätellä, että pelaaja 2 ei voi tietää, kummassa solmussa hän on, sillä kummassakin

Kuva 2.2: Tikkupeliä esittävä puu.



solmussa, jossa hän on päätäntävallassa, tietotilat ovat samat.

Kuva 2.2 on nyt täydellinen esitys yksinkertaisesta tikkupelistä. Merkintälisäysten lisäksi alkuperäiseen puuhun (kuva 2.1) tehtiin myös seuraavanlainen muutos: tekstit ”pitkä” ja ”lyhyt” on poistettu juuresta lähtevistä oksista, vaikka muissa oksissa tekstit ovat ennallaan. Tämä johtuu siitä, että pelaajalle 1 suotuisammalla tikun pituudella ei varsinaisesti ole merkitystä pelin analyysin kannalta — yhtä hyvin voitaisiin määritellä, että lyhyellä tikulla pelaaja 1 voittaa kerätyn rahasumman. Kuitenkaan pelaajien päätöksiä kuvaavia *siirtomerkintöjä* (”Korota”, ”Lopeta”, ”Maksa”, ”Luovuta”) ei ole poistettu oksien yhteydestä, sillä ne ovat olennainen osa pelin kuvausta. Pelaajat eivät voi valita mielekästä siirtoa, jos he eivät edes tiedä, mitä kaikkia vaihtoehtoja on olemassa. Tällöin kun pelaaja 2 tekee päätöksen siirrostaan tietämättä, kummassa solmussa hän on, hän ei voi valita mitään tiettyä oksaa. Se, mitä hänen oikeastaan pitää valita, on *siirto* (”Maksa” tai ”Luovuta”). Tällöin pelin polun seuraava oksa on se kyseisestä solmusta lähtevä oksa, jossa on siirron mukainen siirtomerkintä. Siirtomerkintojen merkintä oksiin korostuu peleissä, joissa eri siirroista seuraavat tapahtumat eroavat toisistaan.

Jotta voitaisiin varmistua siitä, että pelaaja tietää aina kaikki mahdolliset siirtovaihtoehtonsa, kahdesta eri solmusta lähtevien siirtomerkintöjen joukkojen on oltava samat, mikäli näissä kahdessa solmussa on sama päätösvallassa oleva pelaaja ja niiden tietotilat ovat samat. Esimerkiksi ylemmässä solmussa, jossa pelaaja 2 on päätösvallassa, solmua seuraavien siirtomerkintöjen joukon on oltava sama kuin alemmassa solmussa, jossa pelaaja 2 on päätösvallassa. Nimittäin esimerkiksi jos alempaan solmuun lisättäisiin oksa ”Nokita” (nokittamisella tarkoitetaan tässä sitä, että pelaaja maksaa vaaditun korotetun panoksen ja korottaa itse panosta vielä lisää), mutta kyseistä oksaa ei lisättäisi lainkaan lähtemään ylemmästä solmusta, niin pelaaja 2 voisi valita nokituksen vain siinä tapauksessa, että pelaaja 1 olisi saanut lyhyen tikun. Tämä ei kuitenkaan olisi mahdollista, sillä pelaaja 2 ei tiedä, kumman tikun pelaaja 1 on vetänyt eikä hän täten tiedä, kummassa solmussa hän on. Tästä edelleen seuraisi, ettei pelaaja 2 edes tietäisi, mitä vaihtoehtoja hänellä on. Jotta pelistä saataisiin jälleen mielekäs, niin myös ylempään solmuun pitäisi lisätä oksa ”Nokita”.

Kuitenkaan solmusta ”$1, a$” lähtevien oksien siirtomerkintöjen joukon ei tarvitse olla sama kuin solmusta ”$1, b$” lähtevien oksien siirtomerkintöjen joukko, sillä pelaaja 1 pystyy erottamaan nämä solmut toisistaan. Jos siirtomerkintöjen joukot eroaisivat toisistaan, pelaaja 1 tietäisi silti kaikki vaihtoehtonsa, sillä hän tietäisi, kummassa solmussa hän on vedettyään joko pitkän tai lyhyen tikun.

Koska pelaaja, jonka päätäntävallassa on vähintään kaksi saman tietotilan solmua, valitsee nimenomaan siirron oksan sijaan, on tärkeää, miten siirtomerkinnät asetellaan oksille. Tarkastellaan tätäkin huomiota tikkupeli-esimerkin kautta. Siirto ”Luovuta” on parempi pelaajalle 2 ylemmässä solmussa (tilanteessa, jossa pelaaja 1 on vetänyt pitkän tikun), mutta alemmassa solmussa ”Maksa” on hänelle parempi vaihtoehto. Pelaaja 2 ei kuitenkaan tiedä päätöstä tehdessään, kumpi hänen päätäntävallassaan olevista solmuista on pelin polulla. Jos ylemmässä solmussa vaihdettaisiin siirtomerkintöjen paikkaa keskenään ja kaikki muu kuvassa 2.2 jätettäisiin ennalleen, niin muutosten myötä pelistä tulisi täysin erilainen alkuperäiseen versioon verrattuna. Muunneltu puu kuvaisi peliä, jossa pelaaja 2 tietenkin valitsisi vaihtoehdon ”Maksa”, sillä pelaajan 1 vedettyä pitkän tikun hänen tuottonsa olisi -1 ja pelaajan 1 vedettyä lyhyen tikun hänen tuottonsa olisi $+2$, kun taas valitsemalla ”Luovuta” hänen tuottonsa olisi -2 pitkällä tikulla ja lyhyellä -1.

2.2.2 Ekstensiivimuotoisen pelin määritelmän konstruointi

Nyt kun pelin määritelmän ekstensiivinen rakenne on esitelty esimerkin avulla, on helpompi käsittää varsinainen pelin yleinen määritelmä, joka ei rajoitu mihinkään tiettyyn peliin. Määritelmää varten käsitteistöä on kuitenkin hieman tarkennettava. Nämä käsitteet sekä pelin ekstensiivinen määritelmä on esitetty päälähdeteoksen toisessa pääluvussa (ks. [3] s. 42–44).

Graafiteoriaan pohjaten *graafi* on äärellinen joukko solmuja sekä oksia, joista kukin yhdistää kaksi solmua toisiinsa. Joukko-opin näkökulmasta oksa voidaan määritellä joukkona, jonka alkioita ovat kyseisen oksan yhdistämät solmut. Tällöin *polku* on oksien joukko, joka voidaan esittää muodossa:

$$\big\{\{x_1, x_2\}, \{x_2, x_3\}, \ldots, \{x_{m-1}, x_m\}\big\} = \big\{\{x_k, x_{k+1}\} \mid k = 1, \ldots, m-1\big\},$$

missä $m \geqslant 2$ ja kaikki graafin solmut x_k ovat eri solmuja. Sanotaan, että tällainen polku *yhdistää* solmuja x_1 ja x_m. *Puu* on graafi, jonka jokainen solmupari on yhdistetty täsmälleen yhdellä polulla. *Juurellinen puu* on puu, jonka yksi erityinen solmu on nimitetty puun *juureksi*. Tässä tutkielmassa puun juuri on aina graafin vasemmanpuoleisin solmu. *Solmun poluksi* kutsutaan sitä yksiselitteistä polkua, joka yhdistää kyseisen solmun ja juuren. Juurellisen puun solmuun liittyvä *vaihtoehto* on oksa, joka yhdistää kyseessä olevan solmun johonkin toiseen solmuun, mutta ei kuulu kyseisen solmun polkuun. Solmu tai oksa x *seuraa* toista solmua tai oksaa y, jos ja vain jos y on polulla, joka johtaa solmuun tai oksaan x. Solmu x *seuraa välittömästi* solmua y, jos ja vain jos solmu x seuraa solmua y ja solmussa y on vaihtoehto, joka yhdistää solmut x ja y. Juurellisen puun *päätepiste* on solmu, jota yksikään vaihtoehto ei seuraa.

Nyt kun kaikki tarvittavat käsitteet on määritelty, niin voidaan määritellä pelin käsite ekstensiivimuodossa. Koostukoon *n henkilön ekstensiivimuotoinen peli* Γ^e juurellisesta puusta sekä sellaisista funktioista, jotka asettavat tarvittavat merkinnät jokaiseen solmuun ja oksaan niin, että seuraavat viisi ehtoa täyttyvät:

1. Jokaisessa solmussa, joka ei ole päätepiste, on *pelaajamerkintä* joukosta $\{0, 1, 2, \ldots, n\}$. Solmuja, joissa on pelaajamerkintä 0, kutsutaan *sattuman solmuiksi*. Joukko $\{1, 2, \ldots, n\}$ esittää pelin *pelaajien* joukkoa. Kaikki solmut, joissa on pelaajamerkintä $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, ovat *päätöksen solmuja* ja niissä päätöksen seuraavasta pelin siirrosta tekee pelaaja i.

2. Jokaiseen sattuman solmussa olevaan vaihtoehtoon on merkitty kyseisen vaihtoehdon todennäköisyys käydä toteen. Jokaisen sattuman solmun vaihtoehtojen todennäköisyydet ovat ei-negatiivisia lukuja, joiden summa on 1. Todennäköisyyksiä kutsutaan *sattuman todennäköisyyksiksi*.

3. Kaikissa päätöksen solmuissa on pelaajamerkinnän lisäksi *tietotilamerkintä*. Se määrittää pelaajan *tietotilan*, jossa hän olisi, jos pelin polku etenisi tähän solmuun. Kun pelin polku etenee päätöksen solmuun, kyseisessä solmussa päätösvallassa oleva pelaaja tietää ainoastaan kyseiseen solmuun merkityn tietotilan sisältämän tiedon. Toisin sanoen kahdessa eri solmussa, joissa sama pelaaja tekee päätöksen, tulee olla sama tietotila, jos ja vain jos pelaaja ei pysty erottamaan näiden solmujen kuvaamaa pelitilannetta toisistaan pelin edetessä jompaankumpaan näistä solmuista. Pelaaja- ja tietotilamerkinnät erotetaan toisistaan pilkulla siten, että pelaajamerkintä kirjoitetaan ennen pilkkua ja tietotila kirjoitetaan pilkun jälkeen. Tällöin merkintä $''i, k''$ tarkoittaa solmua, jossa pelaaja i tekee päätöksen tietotilassa k (eli tietäen asiat, jotka sisältyvät tietotilaan k).

4. Jokaiseen päätöksen solmussa olevaan vaihtoehtoon on merkitty *siirtomerkintä*. Lisäksi kaikilla solmuilla x ja y, joissa on samat pelaaja- ja tietotilamerkinnät, jokaista solmussa x olevaa vaihtoehtoa kohden solmussa y on oltava täsmälleen yksi vaihtoehto, jossa on sama siirtomerkintä kuin solmussa x olevassa vaihtoehdossa.

5. Jokaisessa päätepisteessä on merkintä, joka määrittää n:n luvun vektorin $(u_1, \ldots, u_n) = (u_i)_{i\in\{1,\ldots,n\}}$. Jokaista pelaajaa i kohden u_i merkitsee pelaajan i saamaa tuottoa pelistä, kun peli päättyy tähän solmuun. Tuottoa voidaan mitata erilaisilla hyötyasteikoilla.

Oletetaan lisäksi, että ekstensiivimuotoiset pelit toteuttavat myös niin kutsutun *täydellinen muistin* ehdon. Tämä ehto määrää, että tehdessään päätöksiä pelaaja muistaa kaiken tiedon, mitä hän on aiemmin tiennyt pelissä. Tieto sisältää myös pelaajan tekemät aiemmat valinnat. Esitetään ehto vielä formaalilla tavalla:

6. Olkoot pelaaja $i \in \{1, \ldots, n\}$ sekä solmut x, y ja z, joissa on pelaajamerkintä i, mielivaltaisia. Olkoon lisäksi b solmun x mielivaltainen vaihtoehto. Nyt jos solmuissa y ja z on sama tietotila ja jos solmu y seuraa solmua x ja vaihtoehtoa b, niin on olemassa solmu w ja tämän solmun sellainen vaihtoehto c, että

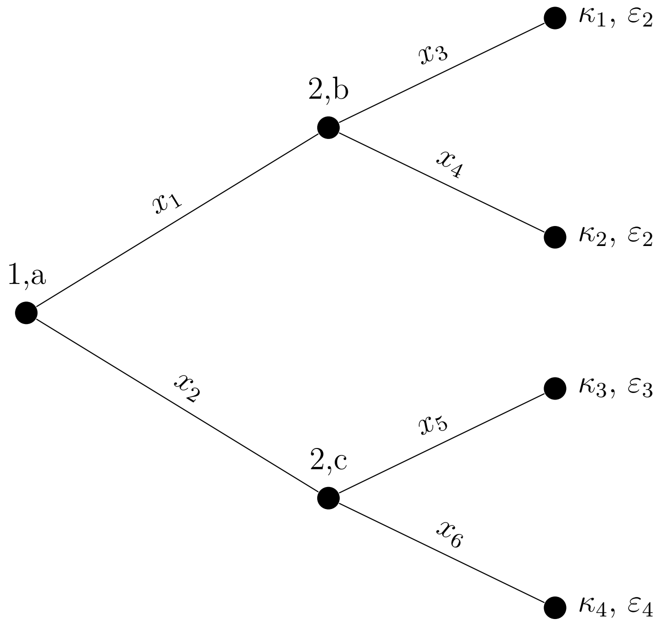
   - solmu z seuraa solmua w ja vaihtoehtoa c,
   - solmussa w on pelaajamerkintä i,
   - solmussa w on sama tietotila kuin solmussa x ja
   - vaihtoehdolla c on sama siirtomerkintä kuin vaihtoehdolla b.

(Solmut w ja x sekä vaihtoehdot c ja b voivat tietysti olla samat, eli on mahdollista, että $w = x$ ja $c = b$.) Toisin sanoen jos pelaaja i ei pysty erottamaan toisistaan kahta päätösvallassaan olevaa solmua y ja z (kummassakin solmussa on siis pelaajamerkintä i), niin tällöin solmussa y jokaista pelaajan i muistamaa aiempaa päätöksen solmua ja siirtoa kohden on oltava päätöksen solmu ja siirto, jotka hän muistaa solmussa z ja joita pelaaja i ei kuitenkaan voi erottaa solmussa y muistamistaan aiemmista päätöksen solmusta ja siirrosta.

Havainnollistetaan sitten kuudetta eli täydellisen muistin ehtoa esimerkillä, jossa sen ei oleteta pätevän. Palautetaan mieleen aiempi esimerkki tikkupelistä. Oletetaan, että kuvan 2.2 solmumerkinnät ”$2, 0$” korvattaisiin merkinnällä ”$1, 0$”. Tämän muutoksen myötä kuva esittäisi peliä, jossa pelaaja 1 tekee päätökset kaikissa päätöksen solmuissa. Kun pelaaja 1 päättäisi, maksaako pelaaja 2 korotetun panoksen vai pitääkö pelaajan 2 luovuttaa, pelaaja 1 ei muistaisi kaikkea sitä tietoa, mitä hän tiesi aiemmin, kun päätti korottaa panosta pelin lopettamisen sijaan. Toisin sanoen pelaaja 1 ei muistaisi, onko hän nostanut pitkän vai lyhyen tikun.

Jos kaikkiin solmuihin on merkitty eri tietotila, niin sanotaan, että pelissä on *täydellinen tieto*. Tällöin tällaisessa täydellisen tiedon pelissä pelaajan tehdessä päätöstä hän tietää kaikki aiemmin tehdyt päätökset eli siirrot — olipa siirto sitten määräytynyt sattuman perusteella tai kenen tahansa pelaajan, myös pelaajan itsensä, päättämänä. Kuvan 2.2 esittämässä tikkupelissä ei ole täydellistä tietoa, sillä kahteen solmuun on merkitty sama tietotila. Kuvan 2.3 esittämässä pelissä taas on täydellinen tieto, sillä kaikissa päätöksen solmuissa on eri tietotilat a, b ja c.

Kuva 2.3: Esimerkki pelistä, jossa on täydellinen tieto.



Ekstensiivimuotoisessa pelissä pelaajan *strategia* on mikä tahansa sääntö, joka määrittää pelaajan siirron jokaisessa mahdollisessa pelin tietotilassa. Toisin sanoen strategia on funktio, joka liittää tietotilat siirtoihin. Merkitköön nyt S_i pelaajan i kaikkien mahdollisten tietotilojen joukkoa kaikilla pelaajilla $i \in \mathbb{N}$. Kaikilla tietotiloilla $s \in S_i$ voidaan nyt kirjoittaa D_s tarkoittamaan niiden siirtojen joukkoa, jotka olisivat mahdollisia pelaajalle i, jos hän olisi tietotilalla s merkityssä solmussa. Tällöin ekstensiivimuotoisessa pelissä pelaajan i strategioiden joukko on $\times_{s \in S_i} D_s$.

Tikkupeliesimerkissä pelaajalla 1 on neljä erilaista mahdollista strategiaa. Merkitään pelaajan 1 strategioiden joukkoa seuraavasti:

$$\{Kk, Kl, Ll, Lk\},$$

missä kirjainyhdistelmän ensimmäinen, isolla kirjoitettu kirjain merkitsee pelaajan 1 siirtoa solmussa ”$1, a$” (nyrkistä on vedetty pitkä tikku) ja toiseksi, pienellä kirjoitettu kirjain siirtoa solmussa ”$1, b$” (nyrkistä on vedetty lyhyt tikku). Nyt esimerkiksi ”Kl” tarkoittaa sitä, että kun nyrkistä on vedetty pitkä tikku, niin pelaaja 1 korottaa panosta ja kun nyrkistä on saatu lyhyt tikku, niin pelaaja lopettaa pelaamisen siihen. ”Kk” taas tarkoittaa sitä, että olipa nyrkistä sitten vedetty kumpi tahansa tikuista, niin pelaaja 1 korottaa panosta.

Pelaajalla 2 on vain kaksi strategiaa, sillä hänellä on vain yksi mahdollinen tietotila ja kaksi eri siirtovaihtoehtoa. Tällöin pelaajan 2 strategioiden joukkoa merkitään vastaavasti:

$$\{M, L\},$$

missä M tarkoittaa ”Maksa” ja L tarkoittaa ”Luovuta”.

2.3 Strategiamuotoiset pelit

Seuraavaksi esitellään strategiamuotoinen pelin määritelmä, joka on usein yksinkertaisempi kuin ekstensiivimuotoinen versio. Luvussa näytetään myös, kuinka ekstensiivimuotoisesta pelistä voidaan johtaa strategiamuodossa määritelty peli. Lisäksi osoitetaan, kuinka dominoituja strategioita voidaan eliminoida, jotta voidaan helpottaa päätöksenteko-ongelmien ratkaisua. Dominoitujen strategioiden eliminointi pohjautuu dominoitujen päätösten tutkintaan, jota on käsitelty aiemmin luvussa 2.1.4. Lopuksi käsitellään yksi peliteorian keskeisimmistä ja ehkä myös tunnetuimmista käsitteistä: Nashin tasapaino.

2.3.1 Pelin strategiamuoto sekä normaaliesitys

Tämän luvun tulokset perustuvat päälähdeteoksen toiseen päälukuun (ks. [3] s. 46–49).

Jotta peli voidaan määritellä strategiamuodossa, tulee määritellä pelin pelaajien joukko, jokaisen pelaajan kaikkien eri siirtovaihtoehtojen joukko sekä se tapa, jolla pelaajien tuotot riippuvat heidän valitsemistaan siirroista. Nyt *strategiamuotoinen peli* on mikä tahansa peli Γ, joka on muotoa

$$\Gamma = \big(N, (C_i)_{i\in N}, (u_i)_{i\in N}\big),$$

missä N on epätyhjä joukko, kaikilla $i \in N$ joukko C_i on epätyhjä joukko ja u_i on funktio joukosta $\times_{j\in N} C_j$ reaalilukujen joukkoon $\mathbb{R}$. Tässä N on pelin Γ pelaajien joukko. Jokaisella pelaajalla $i \in N$ on hänelle mahdollisten *strategioiden* (tai *puhtaiden strategioiden*) joukko C_i. Kun strategiamuotoista peliä Γ pelataan, jokaisen pelaajan i on valittava yksi strategioista joukosta C_i. *Strategiaprofiili* on sellaisten strategioiden kombinaatio, jotka joukon N pelaajat voisivat valita pelissä. Strategiaprofiili koostuu siis kunkin pelaajan valitsemasta strategiasta. Merkitköön nyt C kaikkia sellaisia strategiaprofiileja niin, että

$$C = \bigtimes_{j\in N} C_j.$$

Kaikilla joukon C strategiaprofiileilla $c = (c_j)_{j\in N}$ luku $u_i(c)$ merkitsee odotettua hyötyä, jonka pelaaja i saisi pelissä, jos c olisi pelin pelaajien valitsema strategiaprofiili.

Strategiamuotoinen peli on *äärellinen*, jos sekä pelaajien joukko N että strategioiden joukot C_i kaikilla $i \in N$ ovat äärellisiä. Tässä tutkielmassa pelien oletetaan olevan äärellisiä.

Ekstensiivimuotoinen pelin määritelmä on *dynaaminen*, sillä se sisältää täyden kuvauksen mahdollisten siirtojen ja tapahtumien ketjusta pelin edetessä. Strategiamuotoinen peli taas on *staattinen*, koska se ei huomioi lainkaan erilaisten tapahtumien ajoitusta ja siinä oletetaan pelaajien valitsevan strategiansa samanaikaisesti. Aikaulottuvuuden huomiotta jättäminen yksinkertaistaa pelin tulkintaa huomattavasti — kunhan aikaulottuvuus ei ole relevantti pelin analysoinnin kannalta. Jotta tämä aikaulottuvuuden huomiotta jättäminen voitaisiin hyödyntää mahdollisimman hyvin erilaisten pelien analysoinnissa, on esiteltävä keino, jolla ekstensiivimuotoisista peleistä voidaan tehdä aikadimension sivuuttavia ja siten vaivattomammin käsiteltäviä strategiamuotoisia pelejä.

Palautetaan mieleen tikkupeliesimerkki, joka on esitetty kuvassa 2.2. Oletetaan nyt, että pelaajat 1 ja 2 tietävät pelaavansa tikkupeliä huomenna, mutta heidän on suunniteltava siirtonsa etukäteen jo tänään. Pelaaja 1 ei tiedä, tuleeko hän vetämään lyhyen vai pitkän tikun, mutta hän voi jo nyt suunnitella, mitä hän tekisi, jos saisi pitkän tikun ja vastaavasti, mitä hän tekisi saadessaan lyhyen tikun. Kaikki nämä strategiat voidaan esittää ekstensiivimuotoisessa pelissä strategioiden joukkona $C_1 = \{Kk, Kl, Ll, Lk\}$, missä ensimmäinen, isolla kirjoitettu kirjain merkitsi siis pelaajan 1 siirtoa solmussa ”$1, a$” (eli kun hän on vetänyt pitkän tikun) ja toinen, pienellä kirjoitettu kirjain merkitsi siirtoa solmussa ”$1, b$” (eli kun pelaaja 1 on vetänyt lyhyen tikun). Pelaaja 2 ei tiedä vielä tänään, aikooko pelaaja 1 korottaa pelin panosta vai lopettaa koko pelin vedettyään tikun. Pelaaja 2 voi kuitenkin suunnitella jo tänään, maksaako hän korotetun panoksen vai luovuttaako hän, jos pelaaja 1 sattuisi korottamaan pelin panosta vedettyään tikun nyrkistä. Tällöin siis $C_2 = \{M, L\}$ on niiden strategioiden joukko, jotka pelaaja 2 voi tänään valita. Merkintä M tarkoittaa, että pelaaja 2 maksaa pelaajan 1 korottaman panoksen. Merkintä L taasen tarkoittaa, että pelaaja 2 luovuttaa eikä maksa korotettua panosta, ja näin ollen pelaaja 1 saa voittosumman.

Vaikka kummankin pelaajan valitsema strategia tiedettäisiinkin, pelin lopputulosta ei silti voitaisi ennustaa, sillä ei voida varmuudella tietää, onko nyrkistä vedetty tikku lyhyt vai pitkä. Oletetaan esimerkiksi, että pelaaja 1 valitsee strategian Kl (eli vetäessään pitkän tikun hän korottaa panosta ja vetäessään lyhyen tikun hän lopettaa pelin pelaamisen) ja pelaaja 2 valitsee strategian M (eli hän maksaa, jos pelaaja 1 korottaa panosta tikun vetämisen jälkeen). Nyt pelaajan 1 tuotto pelistä on $+2$, jos hän vetää pitkän tikun. Nimittäin tällöin pelaaja 1 korottaa ensin strategiansa mukaisesti panosta ja pelaaja 2 taas maksaa oman strategiansa mukaan tämän korotetun panoksen, minkä jälkeen pelaaja 1 voittaa pitkällä tikulla koko voittosumman. Pelaajan 1 tuotto voi kuitenkin olla myös -1, jos hän vetää lyhyen tikun: tällöin hän lopettaa pelin heti vedettyään tikun, jolloin hän häviää lyhyellä tikulla pelin alussa sijoittamansa yhden euron pelaajalle 2.

Jokaisen pelaajan odotettu hyöty voidaan laskea, kun käytetään edellä esitettyjä strategioita, sillä sekä lyhyen että pitkän tikun vetämisen todennäköisyys tiedetään ($\frac{1}{2}$). Niinpä kun pelaaja 1 suunnittelee käyttävänsä strategiaa Kl ja pelaaja 2 strategiaa M, pelaajan 1 odotettu hyöty on

$$u_1(Kl, M) = (2 * \frac{1}{2}) + (-1 * \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}.$$

Vastaavasti pelaajan 2 odotettu hyöty strategiaprofiililla (Kl, M) on

$$u_2(Kl, M) = (-2 * \frac{1}{2}) + (1 * \frac{1}{2}) = -\frac{1}{2}.$$

Edelleen voidaan laskea kummankin pelaajan odotetut hyödyt edellä esitetyllä tavalla jokaista strategiaparia kohden. Odotettujen hyötyjen arvot $\big(u_1(c), u_2(c)\big)$ riippuvat strategioiden kombinaatiosta $c = (c_1, c_2) \in C_1 \times C_2$. Nämä lasketut odotettujen hyötyjen arvot nähdään taulukosta 2.2.

Strategiamuotoinen peli voi olla *normaaliesitys* ekstensiivimuotoisesta pelistä. Esimerkiksi aiemmin esitellyn ekstensiivimuotoisen tikkupelin normaaliesitys nähdään taulukossa 2.2. Se kuvaa, kuinka pelin alussa jokaisen pelaajan odotettu hyöty riippuu pelaajien strategisista suunnitelmista. Odotetun hyödyn maksimoinnin lauseen (lause 2.1) nojalla rationaalinen pelaaja pyrkii valitsemaan sellaisen strategian, jolla hän maksimoi odotetun hyötynsä. Täten taulukko 2.2 ja muut normaaliesitykset kuvaavat pelin tilannetta nimenomaan odotetun hyödyn näkökulmasta ennen peliä tai juuri sen alkaessa, kun pelaajien pitää valita strategiansa.

Taulukko 2.2: Tikkupelin normaaliesitys.

	C_2	
C_1	M	L
Kk	0,0	1,-1
Kl	$\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$	0,0
Lk	$-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$	1,-1
Ll	0,0	0,0

Esitetään seuraavaksi yleisellä tasolla keino muuntaa ekstensiivimuotoinen peli strategiamuotoiseksi peliksi. Olkoon nyt Γ^e mielivaltainen ekstensiivimuotoinen peli, joka on määritelty kuten luvussa 2.2. Olkoon nyt strategiamuotoisen pelin Γ pelaajien joukko N sama kuin ekstensiivimuotoisen pelin Γ^e pelaajien joukko $\{1, 2, \ldots, n\}$. Olkoon edelleen strategiamuotoisen pelin Γ pelaajan i strategioiden joukko C_i sama kuin ekstensiivimuotoisen pelin Γ^e pelaajan i strategioiden joukko C_i kaikilla pelaajilla $i \in N$. Tällöin jokainen strategia $c_i \in C_i$ on siis funktio määrittäen siirron $c_i(r)$ jokaista sellaista tietotilaa r kohden, jossa pelaaja i voi olla pelin aikana.

Olkoon $c \in C$ mielivaltainen strategiaprofiili ja x mielivaltainen solmu ekstensiivimuotoisen pelin Γ^e puussa. Määritellään nyt todennäköisyys $P(x|c)$ sille, että pelin polku kulkee solmun x kautta, kun pelin polku alkaa puun Γ^e juuresta ja missä tahansa polulla olevassa päätöksen solmussa seuraava pelin polkuun sisältyvä vaihtoehto määrittyy päätösvallassa olevan pelaajan strategiaprofiiliin c kuuluvan strategian mukaan sekä missä tahansa polulla olevassa sattuman solmussa seuraava pelin polkuun sisältyvä vaihtoehto määrittyy pelissä Γ^e annetun todennäköisyysjakauman mukaisesti. Tämä voidaan ilmaista formaalimmalla tavalla seuraavasti.

- Jos x on puun Γ^e juuri, niin $P(x|c) = 1$.
- Jos solmu x seuraa välittömästi sattuman solmua y ja $q \in \mathbb{R}$ on solmusta y solmuun x kulkevan oksan todennäköisyys, niin $P(x|c) = qP(y|c)$.
- Jos solmu x seuraa välittömästi päätöksen solmua y, jossa pelaaja i on päätösvallassa ja tietotilassa r, niin
  - $P(x|c) = P(y|c)$, kun $c_i(r)$ on solmusta y solmuun x kirjatun vaihtoehdon siirtomerkintä
  - $P(x|c) = 0$, kun $c_i(r)$ ei ole solmusta y solmuun x kirjatun vaihtoehdon siirtomerkintä.

Olkoon nyt x mielivaltainen päätepiste puussa Γ^e. Olkoon edelleen $w_i(x)$ pelaajan i saama tuotto pelin Γ^e päätepisteessä x. Merkitköön Ω^* kaikkien pelin Γ^e päätepisteiden joukkoa. Olkoon sitten $c \in C$ mielivaltainen strategiaprofiili ja $i \in N$ mielivaltainen pelaaja, jolloin $u_i(c)$ on:

$$u_i(c) = \sum_{x \in \Omega^*} P(x|c) w_i(x).$$

Nyt siis $u_i(c)$ on pelaajan i odotettu hyöty pelissä Γ^e, kun kaikki pelaajat noudattavat strategiaprofiilin c heille osoittamia strategioita. Kun strategiamuotoinen peli $\Gamma = \big(N, (C_i)_{i\in N}, (u_i)_{i\in N}\big)$ johdetaan tällä tavoin ekstensiivimuotoisesta pelistä Γ^e, niin peliä Γ kutsutaan pelin Γ^e *normaaliesitykseksi*.

2.3.2 Dominoitujen strategioiden eliminointi

Dominoinnin idea on esitetty tutkielman aiemmassa luvussa 2.1.4. Tällöin dominointi määriteltiin vain tilanteisiin, joissa yhdellä päätöksentekijällä on päätöksenteko-ongelma. Tätä samaa idea voidaan kuitenkin soveltaa myös strategiamuotoisissa peleissä, joissa on useampia pelaajia. Esitellään aluksi muutama merkintätapa, joita käytetään myöhemmissä määritelmissä. Nämä merkintätavat ja muut luvun tulokset perustuvat päälähdeteoksen toiseen päälukuun (ks. [3], s. 53, s. 57–59).

Olkoon pelaaja $i \in N$ mielivaltainen. Nyt $N - i$ merkitsee pelaajien joukkoa, josta pelaaja i puuttuu. Toisin sanoen,

$$N - i = N \setminus \{i\}.$$

Edelleen C_{-i} merkitsee joukkoa, joka koostuu kaikkien strategioiden kombinaatioista niin, että näistä strategioista kuitenkin puuttuu pelaajalle i mahdolliset strategiat, eli:

$$C_{-i} = \bigtimes_{j \in N-i} C_j.$$

Olkoon $e_{-i} = (e_j)_{j\in N-i} \in C_{-i}$ sellainen strategioiden kombinaatio, josta puuttuu pelaajan i strategiat. Nyt (e_{-i}, d_i) merkitsee sellaista joukon C strategiaprofiilia, jonka i-komponentti on strategia $d_i \in D_i$ ja kaikki muut komponentit ovat kuin strategiaprofiilissa e_{-i}.

Kaikilla joukoilla Z ja kaikilla funktioilla $f : Z \to \mathbb{R}$ merkinnällä $\operatorname{argmax}_{y \in Z} f(y)$ tarkoitetaan sellaisten joukon Z pisteiden joukkoa, joissa funktio f saa suurimman arvonsa, eli:

$$\operatorname{argmax}_{y \in Z} f(y) = \{\, y \in Z \mid f(y) = \max_{z \in Z} f(z) \,\}.$$

Nyt jos pelaaja i uskoisi, että jokin todennäköisyysjakauma $\eta \in \Delta(C_{-i})$ ennustaisi muiden pelaajien käyttäytymistä pelissä, eli että jokaisen strategioiden kombinaation $e_{-i} \in C_{-i}$ todennäköisyys tulla muiden pelaajien valitsemaksi olisi $\eta(e_{-i})$, niin pelaaja i haluaisi valita oman strategiansa joukosta C_i maksimoidakseen odotetun hyötynsä. Niinpä pelissä Γ pelaajan i todennäköisyysjakaumalle η *parhaiden vasteiden* joukko on

$$\operatorname{argmax}_{d_i \in C_i} \sum_{e_{-i} \in C_{-i}} \eta(e_{-i}) u_i(e_{-i}, d_i).$$

Määritellään sitten vahvasti dominoitujen strategioiden käsite myös niissä tilanteissa, kun pelaajia on useita. Aiemmin esitetty vastaava käsite päti tilanteisiin, joissa oli yksi päätöksentekijä.

Määritelmä 2.3. Olkoon $\Gamma = \big(N, (C_i)_{i \in N}, (u_i)_{i \in N}\big)$ mielivaltainen strategiamuotoinen peli ja i mielivaltainen pelaaja joukosta N. Olkoon edelleen d_i mielivaltainen strategia joukosta C_i. Sanotaan, että pelaajan i strategia d_i on *vahvasti dominoitu*, jos ja vain jos on olemassa sellainen satunnaistettu strategia $\sigma_i \in \Delta(C_i)$, että

$$u_i(c_{-i}, d_i) < \sum_{e_i \in C_i} \sigma_i(e_i) u_i(c_{-i}, e_i), \quad \forall c_{-i} \in C_{-i}.$$

Havainnollistetaan vahvasti dominoidun strategian käsitettä tikkupeliesimerkin avulla. Strategiamuotoisessa tikkupelissä (taulukko 2.2) pelaajan 1 strategiaa Ll dominoi vahvasti satunnaistettu strategiaa $\frac{1}{2}[Kk] + \frac{1}{2}[Kl]$.

Lauseen 2.3 nojalla pelaajan i strategia d_i on vahvasti dominoitu, jos ja vain jos d_i ei voi koskaan olla paras vaste pelaajalle i — uskoipa hän muiden pelaajien strategioiden olevan mitä tahansa. Tämä osoittaa sen, että kenen tahansa pelaajan i vahvasti dominoidun strategian eliminointi ei vaikuta pelin analyysiin, koska pelaaja i ei ikinä käyttäisi tätä strategiaa. Tämän tulisi olla myös kaikkien pelaajien tiedossa, sillä heidän on määritelty olevan peliteoreettisesti älykkäitä.

Kun yksi tai useampi vahvasti dominoitu strategia on eliminoitu alkuperäisestä pelistä, niin muista strategioista saattaa tulla uusia vahvasti dominoituja strategioita eliminoinnin jälkeiseen peliin. Tutkitaan esimerkiksi peliä, joka on esitetty taulukossa 2.3. Siinä z_2 on pelaajan 2 vahvasti dominoitu strategia strategian $\frac{1}{2}[x_2] + \frac{1}{2}[y_2]$ toimesta. Mikään muu strategioista ei ole kummankaan pelaajan vahvasti dominoitu strategia, koska jokainen näistä strategioista on paras vaste vähintään yhdelle olettamukselle siitä, miten pelaaja uskoo muiden pelaajien toimivan. (Strategia a_1 on paras vaste pelaajalle 1 strategiaa x_2

Taulukko 2.3: Eräs strategiamuotoinen peli.

		C_2	
C_1	x_2	y_2	z_2
a_1	2,3	3,0	0,1
b_1	0,0	1,6	4,2

vastaan, b_1 on paras vaste pelaajalle 1 strategiaa z_2 vastaan, x_2 on paras vaste pelaajalle 2 strategiaa a_1 vastaan ja y_2 on paras vaste pelaajalle 2 strategiaa b_1 vastaan.) Joka tapauksessa siinä pelissä, joka jää jäljelle strategian z_2 eliminoinnin jälkeen, strategia a_1 dominoi vahvasti pelaajan 1 strategiaa b_1 (koska $0 < 2$ ja $1 < 3$). Lisäksi kun strategiat z_2 ja b_1 on molemmat eliminoitu, jäljelle jääneessä pelissä strategia x_2 dominoi vahvasti pelaajan 2 strategiaa y_2 (koska $0 < 3$). Tällöin strategian y_2 eliminoinnin jälkeen kummallekin pelaajalle jää vain yksi strategia: a_1 pelaajalle 1 ja x_2 pelaajalle 2. Niinpä vahvasti dominoitujen strategioiden iteratiivinen eliminointi johtaa täsmälleen yhteen ennusteeseen siitä, mitä pelaajien tulisi tehdä tässä pelissä.

Formalisoidaan sitten tämä edellä esimerkin avulla esitetty vahvasti dominoitujen strategioiden iteratiivinen eliminointiprosessi. Olkoon nyt

$$\Gamma = \big(N, (C_i)_{i\in N}, (u_i)_{i\in N}\big)$$

mielivaltainen strategiamuotoinen peli ja $i \in N$ mielivaltainen pelaaja. Merkitköön $C_i^{(1)}$ kaikkien sellaisten joukon C_i strategioiden joukkoa, jotka eivät ole pelaajan i vahvasti dominoituja strategioita. Olkoon sitten $\Gamma^{(1)}$ seuraavanlainen strategiamuotoinen peli:

$$\Gamma^{(1)} = \Big(N, \big(C_i^{(1)}\big)_{i\in N}, (u_i)_{i\in N}\Big).$$

Huomataan, että pelissä $\Gamma^{(1)}$ jokainen hyötyfunktio u_i on itse asiassa alkuperäisen hyötyfunktion rajoittuma pienempään määrittelyjoukkoon $\times_{j\in N} C_j^{(1)}$.

Nyt voidaan induktiivisesti määritellä kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla k strategiamuotoisen pelin $\Gamma^{(k)}$ olevan

$$\Gamma^{(k)} = \Big(N, \big(C_i^{(k)}\big)_{i\in N}, (u_i)_{i\in N}\Big).$$

Joukko $C_i^{(k)}$ koostuu kaikilla pelaajilla $i \in N$ kaikista sellaisista joukon $C_i^{(k-1)}$ strategioista, jotka eivät ole pelaajan i vahvasti dominoituja strategioita pelissä $\Gamma^{(k-1)}$. Lisäksi u_i on pelaajan i alkuperäisen hyötyfunktion rajoittuma pienempään määrittelyjoukkoon $\times_{j\in N} C_j^{(k)}$. Nyt kaikilla pelaajilla $i \in N$ pätee

$$C_i \supseteq C_i^{(1)} \supseteq C_i^{(2)} \supseteq \dots$$

Kaikkien näiden joukkojen voidaan osoittaa olevan epätyhjiä. Täten koska aloitettiin äärellisestä pelistä Γ, on oltava kokonaisluku K, jolla pätee:

$$C_i^{(K)} = C_i^{(K+1)} = C_i^{(K+2)} = \ldots, \quad \forall i \in N.$$

Olkoon lisäksi $\Gamma^{(\infty)} = \Gamma^{(K)}$ ja $C_i^{(\infty)} = C_i^{(K)}$ tällä luvulla K ja kaikilla pelaajilla $i \in N$. Strategiat joukossa $C_i^{(\infty)}$ ovat pelaajan i *iteratiivisesti ei-dominoituja strategioita.*

2.3.3 Strategiamuotoisen pelin ratkaisemisesta

Koska strategiamuotoisten pelien määritelmät ovat usein yksinkertaisimpia käsitellä, on hyvä pyrkiä muuntamaan ekstensiivimuotoiset pelit strategiamuotoisiksi. Siksi tässä tutkielmassakin käsitellään erityisesti strategiamuotoisten pelien ratkaisumenetelmiä. Tämän luvun pelien ratkaisemiseen liittyvä pohdinta pohjautuu päälähdeteoksen kolmanteen päälukuun (ks. [3], s. 88–89).

Merkitään nyt strategiamuotoista peliä Γ seuraavasti:

$$\Gamma = \big(N, (C_i)_{i \in N}, (u_i)_{i \in N}\big),$$

missä N on pelin pelaajien joukko, C_i on pelaajan i strategioiden joukko ja $u_i : C \to \mathbb{R}$ on pelaajan i hyötyfunktio. Joukko C merkitsee siis eri pelaajien valittavissa olevien strategioiden kaikkien mahdollisten kombinaatioiden eli *strategiaprofiilien* joukkoa, kun jokainen pelaaja i valitsee yhden strategian joukosta C_i, eli:

$$C = \bigtimes_{i \in N} C_i.$$

Peli voidaan yksinkertaisimmillaan ratkaista seuraavasti. Tulee määrittää niiden strategioiden joukko, joita jokaisen pelaajan voitaisiin olettaa käyttävän laskematta edes eri strategioiden todennäköisyyksiä. Tällainen ratkaisu määrittäisi jokaiselle pelaajalle $i \in N$ epätyhjän joukon $D_i \subseteq C_i$, joka tulkitaan sellaisten strategioiden joukkona, jotka pelaaja i voisi valita toteutettavaksi pelissä.

Jos nyt oletetaan jokaisen pelaajan j valitsevan strategian joukosta D_j, niin tällöin jokaisen pelaajan i tulisi ymmärtää tämä ja käyttää itse jotakin toista strategiaa, joka on paras vaste joukon D_{-i} todennäköisyysjakaumalle, missä siis

$$D_{-i} = \bigtimes_{j \in N - i} D_j.$$

Tämä perustuu siihen perusoletukseen, että pelaaja on aina rationaalinen (hän pyrkii aina maksimoimaan odotetun hyödyn) ja älykäs (hän tietää pelistä kaiken, mitä on tiedettävissä).

Merkitköön nyt $G_i(D_{-i})$ kaikkien niiden strategioiden joukkoa, jotka ovat tällaisia parhaita vasteita. Tällöin $d_i \in G_i(D_{-i})$, jos ja vain jos on olemassa sellainen todennäköisyysjakauma $\eta \in \Delta(D_{-i})$, että

$$d_i \in \operatorname{argmax}_{c_i \in C_i} \sum_{d_{-i} \in D_{-i}} \eta(d_{-i}) u_i(d_{-i}, c_i).$$

Merkinnällä $\Delta(D_{-i})$ tarkoitettiin siis joukon D_{-i} todennäköisyysjakaumien joukkoa ja merkinnällä (d_{-i}, c_i) sitä strategiaprofiilia, jossa i-komponentti on c_i ja kaikki muut komponentit ovat kuten strategiassa $d_{-i} = (d_j)_{j \in N-i}$. Niinpä jos pelaaja i tietää, ettei kukaan pelaaja j käyttäisi ikinä strategiaa joukon D_j ulkopuolelta, niin pelaaja i ei ikinä itse käyttäisi strategiaa joukon $G_i(D_{-i})$ ulkopuolelta. Niinpä pelin ratkaisun tulisi täyttää ehto

$$D_i \subseteq G_i(D_{-i}), \quad \forall i \in N. \tag{2.5}$$

Määritellään nyt merkintä $C_i^{(\infty)}$ samoin kuin luvussa 2.3.2: joukko $C_i^{(\infty)}$ on pelaajan i sellaisten strategioiden joukko, jotka jäävät jäljelle vahvasti dominoitujen strategioiden iteratiivisen eliminoinnin jälkeen. Lauseesta 2.3 seuraa, että

$$C_i^{(\infty)} = G_i\Big(\bigtimes_{j \in N-i} C_j^{(\infty)}\Big),$$

koska jokainen iteratiivisesti ei-dominoitu strategia on paras vaste jollekin iteratiivisesti ei-dominoitujen strategioiden joukon todennäköisyysjakaumalle. Tämä pätee, koska muutoin olisi enemmän vahvasti dominoituja strategioita, joita pitäisi eliminoida. Lisäksi ehdosta 2.4 seuraa, että kaikilla $i \in N$ joukon D_i on oltava joukon $C_i^{(\infty)}$ osajoukko. Tässä tutkielmassa todistus sivuutetaan, mutta se voitaisiin tehdä osoittamalla induktiolla kokonaisluvun k suhteen, että $D_i \subseteq C_i^{(k)}$ kaikilla pelaajilla $i \in N$ ja kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla k.

Nyt koska kaikki pelaajat ovat rationaalisia ja älykkäitä, yhdenkään pelaajan ei voida olettaa käyttävän strategiaa, joka on vahvasti dominoitu ja siksi iteratiivisesti eliminoitu. Niinpä esitetty pelin ratkaisutapa osoittaa, että pelin lopputuloksen tulee olla jokin strategiaprofiili, joka muodostuu joukon $\bigtimes_{i \in N} C_i^{(\infty)}$ iteratiivisesti ei-dominoiduista strategioista.

2.3.4 Nashin tasapaino

Nashin tasapaino on kenties yksi keskeisimmistä ja tunnetuimmista peliteorian käsitteistä — onhan sen keksijä yksi peliteorian merkkihenkilöistä. Mainittakoon, että juuri tätä tutkielmaa kirjoitettaessa kyseinen matemaatikko John Forbes Nash valitettavasti menehtyi auto-onnettomuudessa. Hänen tutkimuksensa tulokset peliteorian parissa ovat kuitenkin jo vakiinnuttaneet asemansa alalla, jolloin yhtäkään peliteorian perusteista kertovaa julkaisua ei oikeastaan voi tehdä viittaamatta Nashiin. Niinpä seuraavaksi tarkastellaan Nashin tasapainon käsitettä. Aihetta on käsitelty päälähdeteoksen kolmannessa pääluvussa (ks. [3] s. 91–95).

Olkoon $\Gamma = \big(N, (C_i)_{i \in N}, (u_i)_{i \in N}\big)$ mielivaltainen strategiamuotoinen peli. Tällöin pelaajan i *satunnaistettu strategia* on siis joukon C_i todennäköisyysjakauma. Merkintä $\Delta(C_i)$ tarkoittaa tällöin pelaajan i kaikkien mahdollisten satunnaistettujen strategioiden joukkoa. Strategioita joukossa C_i kutsutaan *puhtaiksi strategioiksi*, jotta ne voidaan erottaa helposti satunnaistetuista strategioista.

Satunnaistetun strategian profiili on mikä tahansa vektori, joka määrittää yhden satunnaistetun strategian kullekin pelaajalle. Niinpä kaikkien satunnaistettujen strategioiden profiilit muodostavat joukon $\times_{i\in N} \Delta(C_i)$. Nyt σ on satunnaistetun strategian profiili joukossa $\times_{i\in N} \Delta(C_i)$, jos ja vain jos kaikilla pelaajilla $i \in N$ ja kaikilla puhtailla strategioilla $c_i \in C_i$ profiili σ määrittää sellaisen ei-negatiivisen reaaliluvun $\sigma_i(c_i)$, joka kertoo, kuinka todennäköisesti pelaaja i valitsee strategian c_i ja niin, että

$$\sum_{d_i \in C_i} \sigma_i(d_i) = 1, \quad \forall i \in N.$$

Merkitään nyt satunnaistetun strategian profiilia merkinnällä $\sigma = (\sigma_i)_{i\in N}$, missä $\sigma_i = \big(\sigma_i(c_i)\big)_{c_i \in C_i}$ kaikilla $i \in N$. Jos pelaajat valitsevat puhtaat strategiansa itsenäisesti, riippumatta muiden pelaajien valinnoista sekä satunnaistetun strategian profiilin σ mukaisesti, niin sen todennäköisyys, että he valitsevat puhtaan strategian profiilin $c = (c_i)_{i\in N}$ on $\prod_{i\in N} \sigma_i(c_i)$.

Vaikka ei voidakaan olla varmoja siitä, minkä puhtaiden strategioiden profiilin pelaajat valitsevat pelissä Γ, niin silti valintoihin liittyy olettamuksia ja uskomuksia — toisin sanoen toisiin valintoihin liittyy suuremmat todennäköisyydet kuin toisiin. Puhtaiden strategioiden profiilien joukon $C = \times_{i\in N} C_i$ todennäköisyysjakauma ilmaisee nämä olettamukset ja uskomukset täsmällisesti. Koska pelaajien oletetaan lisäksi valitsevan strategiansa itsenäisesti ja samanaikaisesti, niin näiden pelin strategiavalintoihin liittyvien uskomusten ja olettamusten tulisi vastata jotakin satunnaistetun strategian profiilia σ joukossa $\times_{i\in N} \Delta(C_i)$.

Olkoon nyt $\sigma \in \times_{i\in N} \Delta(C_i)$ mielivaltainen satunnaistetun strategian profiili. Tällöin $u_i(\sigma)$ merkitsee pelaajan i odotetun hyödyn arvoa, kun pelaajat itsenäisesti valitsevat puhtaat strategiansa satunnaistetun strategian profiilin σ mukaisesti. Toisin sanoen

$$u_i(\sigma) = \sum_{c \in C} \Big(\prod_{j \in N} \sigma_j(c_j)\Big) u_i(c), \quad \forall i \in N.$$

Olkoon $\tau_i \in \Delta(C_i)$ pelaajalle i mahdollinen, mutta mielivaltainen satunnaistettu strategia. Merkitköön nyt (σ_{-i}, τ_i) aiempaan esitettyyn tapaan satunnaistetun strategian profiilia, jossa i-komponentti on τ_i ja kaikki muut komponentit ovat kuin satunnaistetun strategian profiilissa σ. Tällöin

$$u_i(\sigma_{-i}, \tau_i) = \sum_{c \in C} \Big(\prod_{j \in N - i} \sigma_j(c_j)\Big) \tau_i(c_i) u_i(c).$$

Määritelmän 2.2 mukaisesti $[c_i]$ tarkoittaa sellaista joukon $\Delta(C_i)$ satunnaistettua strategiaa, joka asettaa puhtaalle strategialle c_i todennäköisyyden 1. Satunnaistettu strategia tuottaa siis aina niin sanotusti satunnaisen valinnan lopputuloksena puhtaan strategian c_i. Tällöin lineaarialgebrallisin merkinnöin voidaan kirjoittaa

$$\sigma_i = \sum_{c_i \in C_i} \sigma_i(c_i)[c_i].$$

Jos pelaaja i käyttäisi puhdasta strategiaa d_i kaikkien muiden pelaajien toimiessa muista riippumattomasti satunnaistetun strategian profiilin σ mukaisesti, niin pelaajan i odotettu hyöty olisi

$$u_i(\sigma_{-i}, [d_i]) = \sum_{c_{-i} \in C_{-i}} \Big(\prod_{j \in N-i} \sigma_j(c_j) \Big) u_i(c_{-i}, d_i),$$

missä $C_{-i} = \times_{j \in N-i} C_j$.

Oletetaan nyt, että peliin liittyvät olettamukset ja uskomukset ovat hyvin perusteltuja ja että kaikilla pelaajilla on nämä samat olettamukset ja uskomukset. Tällöin jokainen pelaaja i haluaisi luonnollisesti valita vain ne puhtaat strategiat, joilla odotettu hyöty olisi suurimmillaan. Lisäksi sen todennäköisyys, että pelaaja valitsisikin jonkin strategian, jolla hän ei maksimoisi odotettua hyötyään, tulisi olla nolla. Tämä voidaan täsmällisesti ilmaista seuraavasti:

(2.6) $\quad$ *Jos* $\sigma_i(c_i) > 0$, *niin* $c_i \in \operatorname{argmax}_{d_i \in C_i} u_i(\sigma_{-i}, [d_i])$.

Satunnaistetun strategian profiili σ on pelin Γ *Nashin tasapaino*, jos ja vain jos se toteuttaa ehdon 2.6 kaikilla pelaajilla $i \in N$ ja kaikilla puhtailla strategioilla $c_i \in C_i$. Täten satunnaistetun strategian profiili on Nashin tasapaino, jos ja vain jos kukaan pelaajista ei pysty kasvattamaan odotettua hyötyään poikkeamalla satunnaistetun strategian profiilin todennäköisyyksiin perustuvasta strategian ennusteesta. Toisin sanoen σ on pelin Γ Nashin tasapaino, jos ja vain jos

(2.7) $$u_i(\sigma) \geqslant u_i(\sigma_{-i}, \tau_i), \quad \forall i \in N, \quad \forall \tau_i \in \Delta(C_i).$$

Ehto 2.6 on ekvivalentti ehdon 2.7 kanssa. Tämä on seurausta lauseesta 2.4, joka esitetään seuraavaksi.

Lause 2.4. *Olkoon $\sigma \in \times_{j \in N} \Delta(C_j)$ mielivaltainen satunnaistetun strategian profiili ja $i \in N$ mielivaltainen pelaaja. Tällöin*

$$\max_{d_i \in C_i} u_i(\sigma_{-i}, [d_i]) = \max_{\tau_i \in \Delta(C_i)} u_i(\sigma_{-i}, \tau_i).$$

Lisäksi

$$\rho_i \in \operatorname{argmax}_{\tau_i \in \Delta(C_i)} u_i(\sigma_{-i}, \tau_i),$$

jos ja vain jos $\rho_i(c_i) = 0$ kaikilla sellaisilla strategioilla $c_i \in C_i$, joilla pätee $c_i \notin \operatorname{argmax}_{d_i \in C_i} u_i(\sigma_{-i}, [d_i])$.

Todistus. Nyt kaikilla satunnaistetuilla strategioilla $\tau_i \in \Delta(C_i)$ pätee:

$$u_i(\sigma_{-i}, \tau_i) = \sum_{d_i \in C_i} \tau_i(d_i) u_i(\sigma_{-i}, [d_i]).$$

Täten $u_i(\sigma_{-i}, \tau_i)$ on termien $u_i(\sigma_{-i}, [d_i])$ painotettu keskiarvo, jossa painotukset $\tau_i(d_i)$ ovat ei-negatiivisia reaalilukuja ja niiden summa on 1. Tällainen painotettu keskiarvo ei voi olla suurempi kuin suurin niistä luvuista, joista keskiarvo on laskettu. Painotettu keskiarvo on myös aina aidosti pienempi kuin suurin niistä luvuista, joista keskiarvo on laskettu, kunhan jotakin muuta kuin tätä suurinta lukua on painotettu positiivisella luvulla. □

Taulukko 2.4: Strategiamuotoinen peli.

C_1	C_2 x_2	y_2	z_2
x_1	3,0	0,2	0,3
y_1	2,0	1,1	2,0
z_1	0,3	0,2	3,0

Nyt siis suurin odotettu hyöty, jonka pelaaja i voi saada toisten pelaajien satunnaistettujen strategioiden kombinaatioita vastaan, ei riipu siitä, käyttääkö pelaaja i itse satunnaistettuja vai vain puhtaita strategioita. Lisäksi pelaajalle i optimaaliset satunnaistetut strategiat ovat ne, jotka liittävät positiiviset todennäköisyydet vain hänen optimaalisiin puhtaisiin strategioihinsa.

Puhtaan strategian profiilia $c \in C$ sanotaan *tasapainoksi*, jos ja vain jos

$$u_i(c) \geqslant u_i(c_{-i}, d_i), \quad \forall i \in N, \quad \forall d_i \in C_i. \tag{2.8}$$

Tällaista tasapainoa voidaan tarkemmin ottaen myös kutsua *tasapainoksi puhtaissa strategioissa*. (Ehdossa 2.8 merkinnällä (c_{-i}, d_i) tarkoitetaan sellaista joukon C puhtaan strategian profiilia, jossa i-komponentti on d_i ja kaikki muut komponentit ovat kuin puhtaan strategian profiilissa $c = (c_j)_{j \in N}$.) Nyt lauseesta 2.4 seuraa, että c on Nashin tasapaino puhtaissa strategioissa, jos ja vain jos satunnaistetun strategian profiili $([c_i])_{i \in N}$ on Nashin tasapaino joukossa $\times_{i \in N} \Delta(C_i)$.

Jotta Nashin tasapainon käsite olisi helpompaa ymmärtää, verrataan sitä strategioiden eliminointikeinoihin, joita on käsitelty luvussa 2.3.3. Luvussa käsiteltiin oikeastaan vain sitä, minkä strategioiden oletetaan olevan pelaajalle optimaalisia strategioita, kun taas Nashin tasapaino määrittää numeerisen todennäköisyyden kullekin strategialle. Lisäksi monissa peleissä Nashin tasapainojen joukko voi olla merkittävästi pienempi kuin iteratiivisesti ei-dominoitujen strategiaprofiilien joukko, mikä edelleen helpottaa pelien ratkaisemista. Esimerkkinä voidaan pitää taulukossa 2.4 esitettyä peliä.

Taulukon 2.4 esittämässä pelissä mikään strategia ei ole dominoitu. Lisäksi jokainen strategia on paras vaste yhdelle vastapelaajan strategioista. Niinpä ymmärrettävästi voitaisiin päätellä, että rationaalinen pelaaja voisi käyttää mitä tahansa näistä strategioista. Esimerkiksi pelaaja 1 voisi valita strategian x_1, koska hän olettaa pelaajan 2 valitsevan strategian x_2. Selittääkseen itselleen, miksi pelaajan 2 tulisi valita strategia x_2, pelaaja 1 voisi olettaa pelaajan 2 uskovan, että pelaaja 1 aikoo käyttää strategiaa z_1. Niinpä se, että pelaaja 1 valitsee strategian x_1, voidaan selittää teorialla, jossa pelaaja pohtii muiden pelaajien valitsemia strategioita sen kautta, mitä hän uskoo niiden olevan, sekä sen kautta, mitä hän uskoo heidän uskovan hänen valitsevan, sekä sen kautta, mitä hän uskoo heidän uskovan hänen valitsevan heihin liittyvien olettamusten pohjalta, sekä sen kautta, että... Ajatusta voisi jatkaa loputtomiin, ja tuntuu intuitiivisesti ilmiselvältä, että tällainen päättelyketju ei voi toimia pelin ratkaisun kannalta. Mikäli tämä teoria kuitenkin olisi oikea, niin ainakin jonkin pelaajien uskomuksista olisi oltava väärä. Esimerkiksi jos pelaaja 1 aikoisi valita strategian x_1, koska hän uskoisi pelaajan 2 uskovan, että hän valitsee arvonnan z_1, niin joko pelaajan 1 tai pelaajan 2 on oltava väärässä. Peliteoriassa ei siksi voida vedota tällaisiin teorioihin, koska ne ovat ristiriidassa sen kanssa, että pelaajien oletetaan olevan älykkäitä, jolloin he eivät voi olla väärässä.

Jos kuitenkin pelaaja 1 uskoo pelaajan 2 valitsevan strategian y_2, niin pelaajan 1 tulisi valita strategia y_1. Pelaaja 1 voi perustella itselleen, miksi pelaaja 2 valitsisi strategian y_2 olettamalla, että pelaaja 2 ymmärtää hänen valitsevan arvonnan y_1. Niinpä voidaan sanoa, että pelaajan 1 tulisi valita strategia y_1 ja pelaajan 2 tulisi valita strategia y_2, sillä tämä lopputulema ei ole sitä oletusta vastaan, että pelaajat toimivat älykkäästi. Itse asiassa $([y_1], [y_2])$ onkin tämän pelin ainoa tasapaino. Niinpä se, että pelaajan 1 tulisi valita strategia y_1 ja pelaajan 2 strategia y_2, on tämän pelin ainoa ratkaisu. Sitä ei oltaisi löydetty esimerkiksi dominoitujen strategioiden iteratiivisella elimininoinnilla tai jollakin teorialla, joka olisi pelaajien älykkään käyttäytymisen vastaista. Niinpä Nashin tasapainon löytäminen oli ainoa ratkaisutapa tässä pelissä.

Lopuksi esitelläänkin Nashin tasapainon olemassaololause, joka määrittää, että kaikissa äärellisissä peleissä on ainakin yksi tasapaino.

Lause 2.5. *Olkoon Γ mielivaltainen äärellinen strategiamuotoinen peli. Nyt joukossa $\bigtimes_{i\in N}$ on ainakin yksi tasapaino.*

Todistus. Lauseen 2.5 todistus sivuutetaan, koska se vaatisi muun muassa Kakutanin kiintopistelauseen esittämisen ja todistuksen, eikä niitä käsitellä tässä tutkielmassa. Todistus löytyy tutkielman päälähdeteoksesta (ks. [3], s.136–140). $\square$

3 Elektronisten rahapika-arpojen reunaehdoista

3.1 Elektroniset rahapika-arvat

Luvussa esitellään ensiksi elektronisten rahapika-arpojen toimintalogiikka ja verrataan niitä myyntipisteistä ostettaviin raaputusarpoihin. Tämän jälkeen konstruoidaan eArvan määritelmä.

3.1.1 Raaputusarvoista ja eArvoista

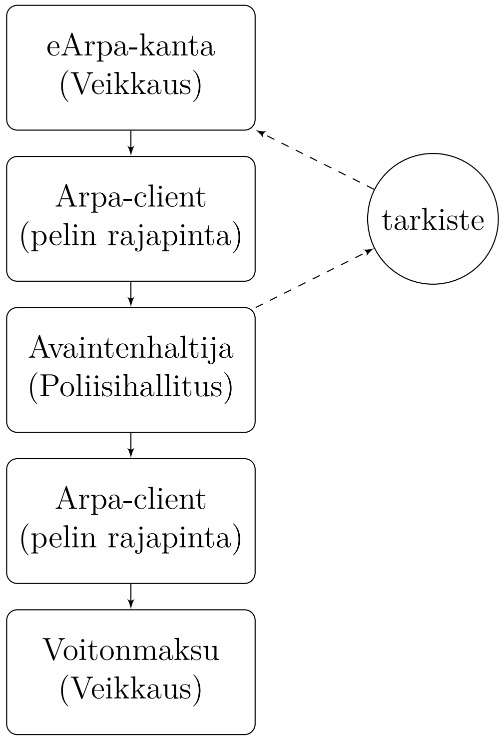
Elektroniset rahapika-arvat eli eArvat (tai sähköiset arvat) ovat nimensä mukaisesti sähköisiä, internetissä pelattavia versioita perinteisistä raaputusarvoista, jolloin niihin pätee sama pelimekaniikka kuin raaputusarpoihinkin. Niinpä ensimmäistä kertaa eArpoihin tutustuttaessa kannattaa palauttaa mieleen, mitä raaputusarvat oikeastaan ovat. Helpoiten tämä onnistuu esimerkin avulla. Käytetään esimerkkinä Ässä-arpaa, joka on Veikkauksen vanhin raaputusarpa ollen edelleen yksi suosituimmista arvoista. Se on myös tuttu valtaosalle suomalaisista: 92 prosenttia kertoi tuntevansa Ässä-brändin TNS Gallupin tutkimuksessa vuonna 2014 (ks. [7]).

Ässä- ja muita raaputusarpoja painetaan arvasta riippuen muutaman miljoonan kappaleen erissä erityisissä turvapainoissa. Jokaiseen erään liittyy voitonjako, joka kertoo, kuinka monta ja minkä suuruista voittoa arpaerä sisältää. Erään painetaan siis voitonjaon mukaisesti oikea määrä voittavia arpoja, mutta voittoruutujen päälle laitetaan raaputuspinta, joten arvasta ei näe päällepäin, voittaako sillä. Arvan ostamalla ja raaputtamalla pelaajalle selviää, onko hän voittanut. Raaputtaminen ei kuitenkaan luonnollisesti vaikuta voittamiseen millään tavalla, sillä voittotieto on painettu arpaan jo etukäteen. Jos arpaan sisältyy voitto, sen voi lunastaa ainoastaan arpaa vastaan Veikkauksen valtuuttamista paikoista (Veikkauksen myyntipisteet, Danske Bankin konttorit ja Veikkauksen pääkonttori).

Koska eArvat tosiaan ovat sähköisiä versioita raaputusarvoista, ne myös toimivat pohjimmiltaan samalla periaatteella. eArvat valmistetaan erissä, joiden koko vaihtelee tuotteittain, mutta useimmiten ne ovat muutaman miljoonan kappaleen luokkaa, kuten raaputusarvoissakin. eArpa-erät niin sanotusti painetaan erityisellä digitaalisella järjestelmällä, joka on Poliisihallituksen hyväksymä. Järjestelmän lisäksi viralliset valvojat hallitsevat sitä arvontaprosessia, jolla kuhunkin eArpaan liitetään digitaalinen voittotieto. Kun eArpa-erä on valmis, se voidaan asettaa myyntiin Veikkauksen verkkokauppaan. Samaan tapaan kuin raaputusarvoissa, myös jokainen eArpa-erä sisältää voitonjaon mukaisen määrän voittavia arpoja. Lisäksi koska raaputusarpojen erien tapaan myöskään eArpa-eriin ei voida lisätä arpoja kesken myynnin, eArpa voidaan myydä loppuun verkkokaupasta.

Seuraava vaihe arpojen pelaamisessa eroaa hieman eArpojen ja raaputusarpojen välillä. Raaputusarpaa ostaessa pelaaja saa itse valita haluamansa arvan, mutta kun pelaaja ostaa eArvan, järjestelmä arpoo pelaajalle satunnaisesti yhden eArpa-erässä jäljellä olevista arvoista. Arpaerä taas on talletettu Veikkauksen eArpa-kantaan. Seuraavaksi järjestelmä pyytää Poliisihallituksen Avaintenhaltija-nimisestä kannasta kyseistä salattua arpaa vastaavaa avainta, jolla selviää, paljonko arvasta voittaa. Ennen avaimen palauttamista peliä varten Avaintenhaltija varmistaa suoraan arpakannasta, että avain todella vastaa kyseistä arpaa. Tarkistuksen jälkeen avain palautetaan peliin, jolloin arpakannasta haetusta arvasta ja avaimesta muodostuu niin sanottu arpa-client eli itse peli. Pelin loppuun pelaamisen jälkeen mahdollinen voitto maksetaan asiakkaalle. eArvan arvontaprosessi on kuvattu kuvassa 3.1 ja se perustuu Veikkauksen eArpojen tuotepäällikkö Mikko Heilalan prosessikuvaukseen.

Kuva 3.1: eArvan arvontaprosessi.



Kun eArpa on siis valikoitunut pelaajalle, niin voittotieto yhdistetään siihen Poliisihallituksen avaimen avulla eikä arvan raaputtaminen siten myöskään eArvoissa vaikuta lopputulokseen — aivan kuin raaputusarvoissakaan ei ole merkitystä sillä, miten arvan raaputtaa. eArpojen digitaalisuus kuitenkin mahdollistaa sen, että itse arpapelin aikaiset tapahtumat voivat vaihdella, kunhan lopputulos on eArpaan painetun voittotiedon mukainen. Peli päättyy siis aina arvotun voittotiedon mukaisesti johonkin voittosummaan (voittosumma voi olla myös 0 euroa), eikä pelaaja voi valinnoillaan vaikuttaa tähän, vaikka tällainen illuusio saattaakin muodostua joissakin eArpa-peleissä.

eArpa-pelaajan pelissä tekemien valintojen lisäksi vaihtelua pelitapahtumissa voi aiheutua arvan sisään rakennetusta arvonnasta, joka arpoo, mitä pelissä seuraavaksi tapahtuu. Tämä pelitapahtumien vaihtelu pelin edetessä poikkeaa raaputusarpojen pelaamisesta: raaputusarvoissa raaputuspinnan alla oleva peli on luonnollisesti täysin staattinen, sillä se on painettu arpapahviin. Niinpä esimerkiksi pelin raaputtamisjärjestys ei vaikuta raaputuspinnan alta paljastuviin tietoihin, kun taas eArvoissa raaputusjärjestyksellä saattaa olla vaikutusta pelin aikaisiin tapahtumiin. eArpojen toimintalogiikka voidaankin kiteyttää siihen, että pelin ostamisen jälkeen kaikki on vain voittotiedon paljastamisen pitkittämistä.

3.1.2 eArvan määritelmä

Muutamaa poikkeusta lukuun ottamatta eArpojen pelaamisperiaatteet noudattavat siis raaputusarpojen pelaamisperiaatteita. Näihin periaatteisiin perustuen voidaan aloittaa eArpojen täsmällinen määrittely. Määritelmä on monivaiheinen ja näiden vaiheiden suhdetta toisiinsa on havainnollistettu kaaviossa 3.2. Kaaviosta nähdään myös ne arpajais- ja rahapelimaailman käsitteet, joita tarvitaan eArpojen määrittelyssä. Määritellään ensiksi nämä apukäsitteet:

- *Arpajaiset* ovat toimintaa, johon voi osallistua vastiketta vastaan. Osallistuja voi saada kokonaan tai osittain sattumaan perustuvan rahanarvoisen voiton.
- *Raha-arpajainen* on arpajainen, jossa mahdollinen voitto on rahapalkinto.

Näin arpajaiset määritellään Suomen arpajaislain toisessa pykälässä. Raha-arpajaisen määritelmä taas pohjautuu arpajaislain kolmanteen pykälään. (Ks. [5].)

Kuva 3.2: eArvan määritelmän rakenne.

Arpajaiset
|
Raha-arpajainen
|
Rahapika-arpa
|
Elektroninen rahapika-arpa

Ennen seuraavaa määritelmää on hyvä tarkentaa, mitä arvalla tarkoitetaan: arpa on yksinkertaisesti lipuke, josta ilmenee oikeus osallistua arpajaisiin. Lipuke voi olla myös sähköisessä tai jossakin muussa muodossa lipukkeisiin verrattavissa oleva tosite. Tällöin

- *Rahapika-arpa* on raha-arpajainen, jossa arvonta on suoritettu etukäteen ennen arpojen myymisen aloittamista. Voitto on valmiiksi merkitty arpaan.

Määritelmä perustuu sisäasianministeriön asetukseen Veikkauksen rahapelien pelisäännöistä (ks. [6]).

Selvitetään vielä muutama arpoihin liittyvä käsite, jotta seuraava elektronisten rahapika-arpojen määritelmä olisi yksioikoinen ja ymmärrettävissä myös rahapelialaan perehtymättömille. Ensinnäkin arpaerällä tarkoitetaan sitä äärellistä joukkoa arpoja, joille on muodostettu yksiselitteinen voitonjako. Voitonjaolla halutaan kertoa pelaajalle, montako kunkin kokoista voittoa arpaerässä on. Koska arpaerä on äärellinen, eri voittojen voittamisen todennäköisyydet voidaan laskea eivätkä ne muutu.

Olkoon nyt kaikkien arpojen joukko A, jolloin yksittäinen arpaerä on osa tätä koko joukkoa A. Merkitään erää kirjaimella E, jolloin siis $E \subseteq A$. Tällöin on olemassa funktio $f_V : E \to \mathbb{R}$, joka kertoo kyseisellä arvalla saatavan voittosumman. f_V on määritelty joukossa E, eli jokainen arpaerään kuuluva arpa voidaan liittää johonkin voittosummaan. $f_V(E)$ on tällöin voittosummien joukko. Yksittäisen voittosumman todennäköisyys arpaerässä voidaan laskea seuraavasti:

$$P(\text{"}arvan\ voittosumma\ on\ x\text{"}) = \frac{|\{e \in E \mid f_V(e) = x\}|}{|E|}$$

Taulukossa 3.1 on esitetty Ässä-arvan voitonjako. Voitonjako-taulukosta nähdään esimerkiksi, että kolmen miljoonan kappaleen arpaerän joukosta löytyy viisi arpaa, joissa on 100 000 euron päävoitto.

Taulukko 3.1: Ässä-arvan voitonjako.

Voitto €	kpl
100 000	5
2 000	40
1 000	100
500	1 000
30	16 000
20	80 000
10	120 000
5	240 000
4	300 000
Yhteensä 6 860 000 €	757 145 kpl
Arpoja painettu 3 000 000 kpl.	

Nyt kun tarvittavat apukäsitteet on esitelty ja määritelty, voidaan määritellä elektronisen rahapika-arvan käsite täsmällisesti.

- *Elektroninen rahapika-arpa* on rahapika-arpa, jota myydään Veikkaus Oy:n internet-pelipalvelussa. Elektroniseen rahapika-arpaan on merkitty sen yksilöivä tunnistetieto, hinta, arpaerän suuruus sekä voitonjako.

Myös tämä määritelmä pohjautuu sisäasiainministeriön asetukseen Veikkauksen rahapelien säännöistä (ks. [6]). Jatkossa elektronisesta rahapika-arvasta tullaan käyttämään vain nimitystä eArpa. eArpa on myös Veikkauksen käyttämä virallinen tuotteen nimi, vaikka useimmiten puhekielessä puhutaan nettiarvoista. Lisäksi eArpoja kutsutaan toisinaan sähköisiksi arvoiksi.

3.2 Esimerkit

Tässä luvussa käsitellään muutama esimerkki sellaisista peleistä, jotka voitaisiin mahdollisesti toteuttaa eArpa-peleinä. Aluksi tutkitaan, millainen eArpa Lotosta tulisi ja mitä siinä pitäisi ottaa huomioon. Lopuksi tutkitaan Raha-automaattiyhdistyksen Jokeripokeri-peliä sekä maailmanlaajuisesti pelattua Blackjack-korttipeliä. Esimerkkien pohdinnassa apuna on ollut Veikkauksen Päivittäispelit-liiketoimintaryhmän tuotekehityspäällikkö Harri Järvinen.

3.2.1 Lotto eArpana

Lotto on lähes kaikkien suomalaisten tuntema peli. Se on yhä Veikkauksen suosituin peli, vaikka uudemmat onnenpelit, kuten Eurojackpot ja eArvat, ovatkin löytäneet lottokansasta oman kannattajansa. Lotto on kuitenkin se perinteisin rahapeli, jolla on pisin historia kulttuurissamme. Siihen liittyvät käsitteet ovat uineet jopa arkikieleen: 'lottovoitto' saadaan, kun tapahtuu mitä tahansa todella onnekasta ja silloin taas 'lototaan', kun veikataan jotakin usean eri vaihtoehdon välillä.

Kun Lotto on kerran näin suosittu peli, eikö sitä voisi toteuttaa myös eArpaversiona? Veikkauksen asiakastutkimuksissa on todettu, että osa asiakkaista ei pidä eArpoja luotettavana rahapelinä. Pelaaminen koetaan toisinaan myös vaikeaksi. Jos eArvassa esiintyisi tutun brändin logo ja pelaaminen tapahtuisikin samalla tavalla kuin Lotto-kupongin täyttö, Veikkaus voisi saada täysin uusia eArpojen pelaajia tällaisen pelin myötä. On siis selvitettävä, voiko Lotto-pelin toteuttaa myös eArpana.

Jotta esimerkki pysyisi riittävän yksinkertaisena ja siten havainnollisena, tutkielmassa jätetään Tuplaus, kesto ja muut ylimääräiset Lotossa tehtävät valinnat pois. (Tuplaus tarkoittaa sitä, että jos niin sanotusti tuplaa Lottonsa ylimääräistä maksua vastaan, voiton saa tuplana, kun erikseen arvottava Tuplausnumero osuu omaan riviin. Kesto tarkoittaa sitä, että oman pelinsä voi pelata kerralla useampaan arvontaan, kuten esimerkiksi kaikkiin viiden viikon arvontoihin.)

Merkitään nyt Lotto-eArvan erää kirjaimella E. Erä koostuu siis arvoista, joihin jokaiseen voidaan liittää jokin voittosumma. Jos pelaaja voisi valita vain yhden rivin arpaansa, erilaisia arpoja olisi yhteensä 15 380 937, sillä erilaisia

Lotto-rivejä on juuri tämän verran. Nimittäin Lotto-numeroita on 39 ja niistä riviin valitaan seitsemän, jolloin erilaisten rivien määrä on 7-kombinaatioiden määrä joukosta $\{1, 2, \ldots, 39\}$:

$$\binom{39}{7} = 15380937$$

Loton tämän hetkiset voittoluokat on esitetty taulukossa 3.2. Voittosummat ovat laskennallisia arvioita. Tämän pohjalta voidaan muodostaa esimerkki Lotto-eArvan voitonjaosta, joka taas on esitetty taulukossa 3.3. Loton voittavien tulosten kappalemäärien laskenta on käsitelty Harri Järvisen diplomityössä *Rahapelien toiminnallinen ja matemaattinen rakenne - pelinjärjestäjän näkökulma* (ks. [2] s. 66–68).

Taulukko 3.2: Loton voittoluokat.

Numeroita + lisänumeroita oikein	Loton voittosumma keskimäärin
7	Päävoitto
6+1	noin 50 000 €
6	noin 2 000 €
5	noin 50 €
4	kiinteä 10 €

Taulukko 3.3: Esimerkki yhden rivin Lotto-eArvan voittoluokista.

Voitto €	kpl
1 300 000	1
50 000	14
2 000	210
50	10 416
10	173 600
0	15 196 696
Yhteensä 4 676 800 €	15 380 937 kpl

Nyt siis jokaiseen arpaerään E kuuluvaan arpaan e on liitetty jokin voittosumma, eli toisin sanoen:

$$\forall e \in E \;\; \exists x \in \mathbb{R} : f_V(e) = x.$$

Käytännössä Lotto-eArpapeli toimisi seuraavasti. Pelaaja ostaa arvan, jolloin järjestelmä arpoo arpaerässä E jäljellä olevien arpojen joukosta pelaajalle yhden arvan e_0. Voittosumma olisi tällöin $f_V(e_0)$. Sitten arpa avautuisi pelaajalle nähtäväksi ja tarjoaisi pelaajalle mahdollisuuden valita seitsemän numeroa rivilleen. Vaihtoehtoisesti pelaaja voisi valita myös pikapelin, jolloin järjestelmä arpoisi pelaajalle pikapelinä yhden seitsemän numeron rivin. Kummassakin tapauksessa pelaajan rivissä olisi siis seitsemän numeroa. Seuraavaksi käynnistettäisiin Lotto-arvonta. Nyt arvan voittosumman $f_V(e_0)$ mukaisesti arvan käyttöliittymä näyttäisi oikean määrän Lotto-numeroita, eli järjestelmä ikään kuin arpoisi niin monta oikeaa Lotto-numeroa, kuin voittosumma $f_V(e_0)$ edellyttää. Visuaalisesti tämä voitaisiin tehdä vaikkapa perinteisten lottopallojen avulla — kunhan ne tietenkin olisivat digitaalisessa muodossa. Esimerkiksi siis jos arvan voittosumma $f_V(e_0)$ olisi vaikkapa 10 euroa, arpa näyttäisi Lotto-numeroita, joista tasan neljä olisi samoja kuin pelaajan rivissä. Koska arpa vastaisi oikeaa Lotto-arvontaa, neljä oikein -tulos voisi tulla yhteensä 173 600 eri tavalla.

Yhden rivin Lotto-eArpa voitaisiin siis halutessa toteuttaa. Se tuskin kuitenkaan menestyisi kovin hyvin, sillä eArpojen menestys perustuu usein niiden nopearytmisyyteen: peleistä voittaa usein melko pieniä voittoja, joilla taas ostetaan uusia arpoja. Lotto-eArvassa vain noin joka sadas arpa voittaisi, jolloin voittamisen kokemuksia syntyisi aivan liian harvalle pelaajalle eikä arpaa palattaisi tämän vuoksi pelaamaan. Teoriassa siis yhden rivin Lotto-eArvan toteutus olisi mahdollista, mutta käytännössä se ei olisi kannattavaa. Akateemisesti kiinnostavaa kuitenkin on, voisiko pelaaja tehdä pelissä myös muita valintoja oman rivinsä numeroiden valitsemisen lisäksi. Seuraavassa luvussa käsitelläänkin esimerkki siitä, jos pelaaja päättäisikin valita peliinsä kaksi Lotto-riviä.

3.2.2 Kahden rivin Lotto-eArpa

Kuvitellaan nyt, että edellisessä luvussa esitettyyn tapaan olisi Lotto-eArpa, johon pelaaja itse voisi valita numerot omiin Lotto-riveihinsä. Tässä esimerkissä rajoitutaan siihen, että rivejä voisi valita vain kaksi, jolloin arpaa voidaan kutsua *kahden rivin Lotto-eArvaksi.* Myöhemmin tässä luvussa kyseisessä arvassa nousee esiin ongelmia, joiden vaikutus moninkertaistuisi n:n rivin Lotto-eArvassa ($n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2$). Kun kahden rivin Lotto-eArvan toteuttamiseen liittyvien haasteiden voidaan olettaa pätevän myös n:n rivin Lotto-eArvassa, niin kahden rivin tapauksen tutkiskelu riittää.

Todetaan aluksi, että kun pelaaja tekee Lotto-peliinsä kaksi riviä, niin voittoluokkien määrä kasvaa verrattuna yhden rivin Lotto-peliin. Pelaajan on tällöin nimittäin mahdollista voittaa kummallakin rivillä, jolloin pelistä saatavien eri kokonaisvoittosummien määrä kasvaa näiden kahden rivin voittosummien kombinaatioiden myötä. Kahden rivin Lotto-pelin voittoluokat on esitetty seuraavassa taulukossa 3.2.2, jonka ensimmäisessä sarakkeessa on esitetty kaikki mahdolliset voittosummakombinaatiot, jotka voidaan saada kahden rivin Lotto-pelillä. Tulee huomata, että 7 oikein -tulokseen liitettyä päävoittoa ei makseta kaksinkertaisena, vaikka pelaajalle olisi tämä tulos kahdella rivillä. Näissä tapauksissa päävoitto jaetaan oikeiden rivien kesken, eli pelaaja saa päävoiton yksinkertaisena. Toki sama pätee myös muille voitoille, mutta näitä alavoittoja on yleensä useampia, jolloin oikeiden tulosten määrän kasvattaminen yhdellä ei vähennä voittosummaa merkittävästi. Niinpä taulukkoon on merkitty voittosummat olettaen, että alavoittosummat eivät pienene, vaikka pelaaja saisi kahdella rivillä saman tuloksen. Lisäksi huomautettakoon, että 4 oikein -tuloksen voittosumma (10 euroa) on kiinteä voittosumma, eikä se riipu arvonnassa osuneiden 4 oikein -tulosten lukumäärästä.

Taulukko 3.4: Kahden rivin Lotto-pelin voitot.

Tulosjoukko	Voittosumma €
7 oikein, 6 + 1 oikein	Päävoitto + noin 50 000 €
7 oikein, 6 oikein	Päävoitto + noin 2 000 €
7 oikein, 5 oikein	Päävoitto + noin 50 €
7 oikein, 4 oikein	Päävoitto + noin 10 €
7 oikein	Päävoitto
6 + 1 oikein, 6 + 1 oikein	noin 100 000 €
6 + 1 oikein, 6 oikein	noin 52 000 €
6 + 1 oikein, 5 oikein	noin 50 050 €
6 + 1 oikein, 4 oikein	noin 50 010 €
6 + 1 oikein	noin 50 000 €
6 oikein, 6 oikein	noin 4 000 €
6 oikein, 5 oikein	noin 2 050 €
6 oikein, 4 oikein	noin 2 010 €
6 oikein	noin 2 000 €
5 oikein, 5 oikein	noin 100 €
5 oikein, 4 oikein	noin 60 €
5 oikein	noin 50 €
4 oikein, 4 oikein	noin 20 €
4 oikein	10 €

Tutkitaan sitten, kuinka kahden rivin Lotto-eArpa käytännössä toimisi. Kuten muissakin eArvoissa, pelitapahtuma käynnistyisi, kun pelaaja ostaisi arvan. Tällöin arvontajärjestelmä arpoisi pelaajalle yhden arpaerässä jäljellä olevista arvoista. Kyseiseen arpaan olisi liitetty jokin voittosumma $x \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}$. Seuraavaksi pelaajalle aukeaisi näkymä, jossa olisi kaksi riviä ja kummallekin tulisi valita seitsemän numeroa. Tähän vaiheeseen asti peli siis sujuisi kuten yhden rivin Lotto-eArvassa. Seuraava vaihe eli numeroiden valintaprosessi kuitenkin eroaisi yhden ja kahden rivin Lotto-eArvoissa. Luvussa 3.2.1 määriteltiin, että pelaaja voi joko itse valita rivin numerot tai sitten antaa järjestelmän arpoa hänelle numerot pikapelinä. Seuraavaksi osoitetaan, miksei kahden rivin Lotto-eArvassa voida antaa pelaajan itse valita numeroita.

Oletetaan ensiksi, että pelaajalle arvottuun arpaan olisi osunut voittosumma, joka vastaisi sellaista lopputulosta, että täsmälleen yhdellä rivillä olisi voittava tulos. Toisin sanoen toisella rivillä olisi voitto ja toisella ei olisi voittoa. Tällöin pelaajan pitäisi valita riittävästi erilaisia numeroita, jotta ei-voittavalla rivillä ei olisi liikaa oikeita numeroita, jotka oikeuttaisivat voittoon. Esimerkiksi jos pelaajalle arvottuun arpaan olisi liitetty voittosumma 2 000 euroa, niin hänen pitäisi saada kuusi numeroa oikein täsmälleen yhdellä rivillä. Toisella rivillä saisi olla korkeintaan kolme oikeaa numeroa, jotta se ei vaikuttaisi arvan kokonaisvoittosummaan. Mikäli pelaaja kuitenkin olisi valinnut riveihinsä esimerkiksi viisi samaa numeroa, niin tällöin hänellä olisi vähintään neljä numeroa oikein kummallakin rivillä ja 6 oikein -tulosta vastaavaan voittosummaan pitäisi lisätä myös vähintään 4 oikein -tulosta vastaava summa — mutta tämähän ei vastaisi alunperin arpaan arvottua voittosummaa. Niinpä tilanteessa, jossa arpaan liitetty voitto vastaisi täsmälleen yhdeltä riviltä saatavaa voittoa, pitäisi rajoittaa samojen numeroiden valitsemista.

Toiseksi oletetaan, että pelaajalle arvottuun arpaan olisi osunut sellainen kokonaisvoitto, joka muodostuu kahdesta rivivoitosta. Molemmista riveistä pitää siis löytyä voittava tulos. Nyt pelaajan taas pitäisi valita riittävästi samoja numeroita kummallekin riville, jotta tämä olisi mahdollista. Esimerkiksi jos pelaajan arpaan olisi osunut 2050 euron voittosumma, niin pelaajan pitäisi saada toisella rivillään 6 oikein -tulos ja toisella rivillään 5 oikein -tulos. Käytännössä tämä tarkoittaisi sitä, että pelaajan pitäisi valita vähintään viisi samaa numeroa ja vähintään yksi eri numero. Nimittäin jotta pelaajalla voisi olla 5 oikein -tulos, hänellä pitää olla vähintään viisi samaa numeroa kuin kuusi oikeaa numeroa sisältävässä rivissä. Rivit eivät kuitenkaan saa koostua kokonaan samoista numeroista, sillä tällöin pelaajalla olisi kummassakin rivissään 6 oikein -tulos. Siispä sellaisissa arvoissa, joiden voittosumma koostuu kahden rivin voitosta, pelaajan tulisi osata valita riittävästi samoja numeroita riveilleen.

Kahden rivin Lotto-eArvassa pitäisi siis käytännössä estää se, että pelaaja voisi itse valita numerot riveillensä. Niinpä kaikki kahden rivin Lotto-eArvat olisivat pikapelejä, joissa rivit arvottaisiin pelaajalle.

Kahden rivin Lotto-eArvassa olisi 15380937^2 erilaista arpaa, sillä sekä ensimmäinen että toinen rivi voidaan valita 15380937 eri tavalla. Täten kahden rivin Lotto-eArvan arpaerän koko olisi:

$$\binom{39}{7}^2 = 15380937^2 = 236573222997969$$

Niinpä kahden rivin Lotto-eArvan arpaerä olisi huomattavasti suurempi kuin yhden rivin Lotto-eArvan arpaerän (15380937 arpaa). Jo näin suuren arpaerän valmistaminen olisi yksi kynnys arvan tuotannolle. Edelleen yhä useamman rivin Lotto-eArpa vaatisi yhä suurempia arpaeriä, joita ei kannattaisi valmistaa yksinkertaisesti niiden suuren koon vuoksi. Erityisesti suurissa arpaerissä riskinä nimittäin on, että päävoitto ja muut voitot jaetaan arpaerän myynnin alkuvaiheessa. Tällöin arpoja, jotkä eivät sisällä voittoa, on enää vaikeaa myydä.

Entä voisivatko arpaerät olla samat sekä yhden että kahden rivin Lotto-eArvoissa tai jopa kaikissa n:n rivin Lotto-eArvoissa, kun $n \in \mathbb{N}$? Tällöinhän voitaisin minimoida ne riskit, jotka liittyvät usean arpaerän valmistuksen. Tutkitaan tätä seuraavaksi. Nyt jos E_1 merkitsisi yhden rivin Lotto-eArvan arpaerää ja E_2 kahden rivin Lotto-eArvan arpaerää, niin

$$|E_1| < |E_2|.$$

Tällöin joukko-opin perusperiaatteiden nojalla voidaan sanoa, että

$$E_1 \neq E_2,$$

eli että arpaerät eivät voisi olla samat sekä yhden rivin että kahden rivin Lotto-eArvoissa. Tällöin ei siis olisi mahdollista, että asiakas saisi itse valita pelaamiensa Lotto-rivien määrän vasta arvan ostamisen jälkeen. Nimittäin jos tämä olisi mahdollista, niin asiakkaan maksettua eArpansa järjestelmä ei vielä tietäisi kummasta arpaerästä se arpoisi voittosumman asiakkaalle: yhden rivin vai kahden rivin Lotto-eArvan arpaerästä. Arpaerä määrittyisi vasta, kun pelaaja päättäisi riviensä määrän. Tämä taas olisi niiden eArpojen perusperiaatteiden vastaista, jotka määrittelevät, että eArpojen voitot ovat etukäteen arvottuja eivätkä pelaajan valinnat vaikuta voittoihin. Myös se, että numeroiden valitseminen olisi mahdollista vain yhden rivin eArvassa, aiheuttaisi ihmetystä ja sen myötä ongelmia pelitilanteissa. Lisäksi ongelmia aiheuttaisi se, kun pelaaja haluaisikin poistaa toisen valitsemistaan riveistä. Tällöin arvasta tulisikin yhden rivin Lotto-eArpa, vaikkei se edes olisi digitaalisesti poimittu kyseisen arvan arpaerästä eikä siten noudattaisi edes oikeaa voitonjakoa. Vastaavat ongelmat nousisivat esiin, jos pelaaja päättäisikin lisätä yhden rivin Lotto-eArpaansa toisen rivin.

Tottakai olisi mahdollista, että arvassa rajoitettaisiin toisen rivin poistaminen tai lisääminen sen jälkeen, kun pelaaja on kerran päättänyt ostaa joko yhden tai kahden rivin version Lotto-eArvasta. Pelaajan tulisi siis sitoutua ostotapahtumassa valintaansa siitä, montako riviä hän haluaa peliinsä sisällyttää. Tällöin rivien maksimimäärä tulisi myös määritellä, koska jokaista rivimäärää kohden pitäisi valmistaa oma arpaeränsä ja luonnollisesti arpaeriä voidaan etukäteen valmistaa vain äärellinen määrä.

Liiketoiminnan näkökulmasta kuitenkin kaikki pelaamista hankaloittavat rajoitukset ja asiakasta tarpeettomasti sitouttavat päätökset mitä ilmeisimmin ovat haitallisia, sillä ne aiheuttavat erinäisiä esteitä pelaamiseen. Tällaisia esteitä joudutaan purkamaan yksitellen, mikä käytännössä tarkoittaa yrityksen asiakaspalvelun vastaanottamia yhteydenottoja. Vaikka asiakaspalvelu pystyisikin tehokkaasti auttamaan asiakkaita pelaamisessa ja siten purkaisi pelaamisen esteitä manuaalisesti, niin silti todennäköisesti osa jäisi ilman apua ja jättäisi pelaamatta. Asiakaspalvelun ylläpidon kustannusten lisäksi tuote ei siis yltäisi sen koko potentiaaliseen liikevaihtoon, jolloin kaikki nämä pelaamisen esteet aiheuttaisivat alisuoriutumisen tuotteelta odotetussa tuloksessa. Niinpä Veikkauksenkin tulisi asiakaslähtöisenä yrityksenä pyrkiä toiminnassaan asiakkaiden mielestä vaivattomaan ja selkeään pelitapaan, mikä tarkoittaisi muun muassa joustavuutta peliin valittavien rivien määrässä. Koska käytännössä tällainen joustavuus on kuitenkin mahdotonta, niin Lotto-eArpa näissä esimerkeissä esitellyillä tavoilla toteutettuna ei menestyisi sen heikon pelattavuuden vuoksi.

3.2.3 Jokeripokeri eArpana

Tätä tutkielmaa kirjoitettaessa (kevät 2014) yksi ajankohtaisista poliittisista aiheista on ollut selvitys Suomen rahapelitoiminnan yhdistämisestä. On esitetty, että Suomessa monopoleina toimineet rahapeliyhtiöt Veikkaus, Raha-automaattiyhdistys sekä Fintoto yhdistettäisiin yhdeksi rahapeliyhtiömonopoliksi. Myös muita yhdistämismalleja on esitetty. Esityksen taustalla on monenlaisia perusteita, mutta yksi niistä liittyy rahapelien rajojen hälvenemiseen kuluttajan silmissä — erityisesti verkossa pelattavat pelit saattavat näyttäytyä samankaltaisina kuluttajalle. Tällöin jotkin rahapeliyhtiöiden tarjoamat tuotteet ovat kilpailuasemassa suhteessa toisiinsa. Kuitenkin monopolien oikeutuksena on nimenomaan ollut se, että kukin peliyhtiö on vastuussa eri tyyppisten rahapelien järjestämisestä, jolloin yhtiöt ja niiden tuotteet eivät varsinaisesti kilpaile keskenään.

Verkossa tarjottavien sähköisten pelien rajat ovat siis hälventyneet kuluttajan näkökulmasta katsottuna. Erityisesti Veikkauksen ja Raha-automaattiyhdistyksen verkkopelipalveluissa tarjottavat sähköiset pelit saattavat vaikuttaa hyvin samankaltaisilta. Pelien perimmäiset toimintalogiikat toki eroavat toisistaan, mutta olennaista onkin, ovatko pelit ulkoisesti liian samanlaisia, jolloin ne käytännössä kilpailevat toisiaan vastaan. Mikäli Veikkaus ja Raha-automaattiyhdistys päätettäisiin yhdistää, niin tällöin nämä ongelmat eivät enää rajoittaisi pelien kehittämistä, vaan pelejä voitaisiin kehittää vapaasti välittämättä pelien ulkoisten tekijöiden samankaltaisuuksista. Tuotekehitys on siis tällä hetkellä hieman sidottu pelien ulkoasujen rajoitteisiin.

Ulkoisten ominaisuuksien samankaltaisuuteen liittyvien ongelmien lisäksi rahapeliyhtiöiden yhdistäminen ratkaisisi luonnollisesti myös sen ongelman, että tällä hetkellä rahapelitoimijat eivät voi hyötyä toistensa menestystuotteista ja -brändeistä. Esimerkiksi Raha-automaattiyhdistyksen klassikkohedelmä- ja kasinopelit tuotteina ja brändeinä voisivat olla hyödynnettävissä myös Veikkauksen eArpoina. Tässä tutkielmassa selvitetäänkin, voisiko erään Raha-automaattiyhdistyksen pelin toteuttaa eArpana.

Jokeripokeri on Raha-automaattiyhdistyksen videopokeripeli, jossa pelaaja yrittää saada mahdollisimman hyvän pokerikäden. Voittoon oikeuttavat korttiyhdistelmät eli voittavat kädet on esitetty taulukossa 3.2.3. Taulukossa on esitetty myös voittokertoimet, joista voidaan laskea pelin voittosumma. Voittosumma lasketaan kertomalla voittokerroin ja pelin panos. Formaalimmin tämä voidaan ilmaista seuraavasti. Olkoon $y_a \in \mathbb{R}$ voittokerroin, joka liittyy korttiyhdistelmään a. Olkoon edelleen z pelaajan asettama panos. Tällöin voittosumma $x \in \mathbb{R}$ saadaan kertomalla voittokerroin y_a ja panos z, eli:

$$x = y_a \cdot z.$$

Taulukko 3.5: Jokeripokerissa voittoon oikeuttavat korttiyhdistelmät.

Korttiyhdistelmä	Voittokerroin
Viitoset	50
Värisuora	30
Neloset	15
Täyskäsi	8
Väri	4
Suora	3
Kolmoset	2
Kaksi paria	2

Jokeripokeri-pelissä käytetään tavallista 53 kortin korttipakkaa, jossa on yksi jokeri. Pelaajalle jaetaan viisi korttia ja hänen on tarkoitus pyrkiä saamaan jokin taulukossa 3.2.3 esitetyistä voittavista käsistä. Peliteorian odotetun hyödyn maksimoinnin periaatteen nojalla viitoset (neljä samansuuruista korttia ja jokeri) on kaikista tavoitelluin käsi, sillä siinä on suurin voittokerroin. Tosielämässä pelaajat eivät kuitenkaan aina toimi peliteorian oppien mukaan, joten myös muut menettelytavat ovat mahdollisia.

Kun pelaajalle on jaettu viisi korttia, hän voi lukita niistä haluamansa määrän kortteja. Kortteja voi myös jättää lukitsematta tai pelaaja voi lukita kaikki kortit. Kortit, joita ei ole lukittu, kerätään ja sekoitetaan takaisin korttipakkaan. Lukitut kortit jäävät pelaajalle. Sekoitetusta korttipakasta jaetaan sitten takaisin pelaajalle niin monta korttia, että pelaajalla on jälleen yhteensä viisi korttia lukitut kortit mukaan laskettuna. Mikäli pelaaja ei ole aiemmin lukinnut yhtäkään korttia, niin kaikki kortit kerätään ja tilalle jaetaan uudet viisi korttia. Mikäli pelaaja taas aiemmin on lukinnut kaikki kortit, pelaajalta ei voida kerätä yhtään korttia eikä siten hänelle jaeta enää uusia kortteja pakan sekoituksen jälkeen. Toisin sanoen lukitsemalla kaikki kortit pelaaja päättää pelin.

Kun lukitus- ja uudelleenjakovaiheet on suoritettu, niin pelaajalla on valmis korttiyhdistelmä kädessään. Tämän korttiyhdistelmän perusteella määräytyy pelaajan voittokerroin. Voittokertoimesta taas saadaan panoksesta riippuva voittosumma, joka maksetaan pelaajalle, ja peli päättyy. Oikeassa Jokeripokeripelissä on myös lisäominaisuuksia, kuten Tuplaus ja Jackpot, mutta tässä tutkielmassa Lotto-esimerkin tapaan myös Jokeripokeri-pelin sääntöjä on yksinkertaistettu, jolloin tällaiset lisäominaisuudet ja -säännöt sivuutetaan.

Jokeripokeri on siis sattumaan perustuva peli, sillä kortit jaetaan pakasta täysin sattumaan perustuen. Kuitenkin pelaajalla on osittain mahdollisuus vaikuttaa pelin lopputulokseen, sillä hän voi lukita kortteja ja siten parantaa todennäköisyyksiään voittaa. Jokeripokeri on siis sattumaan perustuva peli, jossa pelaajan tiedot ja taidot voivat kuitenkin osittain vaikuttaa pelin lopputulokseen. Tämä on merkittävä ero eArpoihin, sillä niiden yksi perusperiaatteista on, että pelin voitot ovat etukäteen arvottuja eivätkä pelaajan toimenpiteet siten voi vaikuttaa pelin lopputulokseen. Jos Jokeripokeri-pelistä tehtäisiin eArpa-versio, niin pelaajan lukitsemilla korteilla ei voisi olla vaikutusta pelin lopputulokseen eikä voittosummaan, sillä tämä lopputulos ja pelistä voitettava summa olisivat jo ennalta arvottuja. eArvoissa pelin tulevat tapahtumat muokkautuvat sen mukaan, mitä pelaaja päättää pelin aikana tehdä. Lopputulos on silti aina ennalta arvotun mukainen. Tätä käytäntöä ei kuitenkaan voitaisi sellaisenaan soveltaa Jokeripokeri-eArpaan, sillä voitaisiin kohdata erilaisia ongelmatilanteita. Esimerkiksi jos pelaajalle arvottaisiin voittokertoimeksi 30, hänen pitäisi saada pelin lopuksi korttiyhdistelmä, joka sisältäisi värisuoran (värisuoralla tarkoitetaan viittä suuruusjärjestyksen suhteen toisiaan välittömästi seuraavaa korttiarvoa, jotka ovat kaikki samaa maata). Kuvitellaan, että pelaajalle jaettaisiin ensiksi korttien joukko

$$\{ristikolmonen, herttakakkonen, patakahdeksikko,$$

$$herttakahdeksikko, ruutukymppi\}.$$

Mikäli pelaaja toimisi peliteorian oletuksia vastaan eikä tavoittelisi maksimaalista odotettua hyötyä, hän saattaisi lukita kaikki viisi korttia, jolloin hänen ei enää olisi mahdollista voittaa. Pelaajan lukitessa kaikki kortit uusia kortteja ei voitaisikaan jakaa eikä pelaajalla olevat kortit muodostaisi värisuoraa. Niinpä käyttöliittymässä esitetty visuaalinen näkymä pelin lopputuloksesta ei vastaisi lainkaan pelaajalle arvottua voittokerrointa, mikä on luonnollisesti este pelin toteuttamiselle tällä tavoin.

Jotta pelaajan lukitsemien korttien aiheuttamat ongelmat voitaisiin välttää, pelaajan valinnoille pitäisi asettaa rajoituksia. Edellä esitetyn esimerkin tapauksessa rajoitus koskisi lukittujen korttien määrää: pelissä estettäisiin kaikkien viiden kortin lukitseminen. Toisaalta myöskään neljän kortin lukitseminen ei tulisi olla mahdollista. Jos nimittäin pelaaja voisi lukita neljä korttia, kohdattaisiin vastaava ongelma kuin viiden kortin lukituksen ollessa mahdollista. Nimittäin jos pelaajalle jaetut kortit olisivat edellä mainitut, ja hän lukitsisi niistä joukon

$$\{ristikolmonen, herttakakkonen, patakahdeksikko, herttakahdeksikko\},$$

niin ei olisi mahdollista saavuttaa värisuoraa enää vain yhdellä jaettavalla kortilla. Edelleen vastaava ongelma voitaisiin kohdata tilanteissa, joissa kaksi tai kolme korttia olisi mahdollista lukita. Ainoastaan yhden kortin lukitseminen ei estä minkään voittavan tuloksen esittämistä ennalta arvotun voittokertoimen mukaisesti.

Mikäli lukittujen korttien määrä rajoitettaisiin vain yhteen, Jokeripokeri-pelin perusluonne osittain taidolla pelattavana pelinä hajoaisi. Edes illuusiota siitä, että taidolla voisi vaikuttaa pelin lopputulokseen, ei pystyttäisi ylläpitämään. Onkin pohdittava, voisiko lukittavien korttien määrän pitää edelleen pelaajan vapaasti valittavissa olevana ominaisuutena ja jollakin muulla tapaa kiertää tämän pelin taitoon perustuva elementti siten, että peli perustuisikin silkkaan sattumaan.

Yksi keino pyrkiä välttämään taitoon perustuvaa pelin luonnetta on muokata voitonjakoa. Jos saman voittokertoimen voisi saavuttaa useammalla eri voittavalla kädellä, olisi yksinkertaisempaa antaa pelaajalle valinnanvapaus liittyen lukittavien korttien määrään. Esimerkiksi jos voittokertoimen 30 voisi saavuttaa vaikkapa jollakin tietynlaisella korttiparilla, neljän kortin lukitseminen ei tuottaisi ongelmia pelin lopputuloksen visualisoinnin suhteen. Edelleen jos viisi korttia olisi mahdollista lukita, tulisi olla esimerkiksi jokin erityiskortti, joka oikeuttaisi ennalta arvotun voittokertoimen määräämään voittosummaan. Tämän kortin ollessa pelaajan kädessä pelaaja voittaisi voittokertoimen määrittämän summan. Nämä voitonjakoon liittyvät muutokset tulisivat kuitenkin olemaan niin monimutkaisia ja vaikeaselkoisia, ettei niistä käytännössä voisi nähdä, millaisella korttiyhdistelmällä tai kortilla saa minkäkin voittokertoimen. Toki positiivisiin voittokertoimiin oikeuttavat korttiyhdistelmät voitaisiin esittää pelaajalle vasta arvan ostamisen ja sen myötä kyseiseen arpaan liitetyn voittokertoimen arvonnan, ensimmäisen viiden kortin jakamisen ja pelaajan korttien mahdollisen lukitsemisen jälkeen, mutta myös tämä saattaisi hämmentää pelaajaa. Tällöinhän pelaaja ei koskaan etukäteen tietäisi, minkälaista korttia tai korttiyhdistelmää hänen tulee tavoitella, jotta hän voittaisi. Lisäksi luultavasti ainakin osa pelaajista myös kokisi jaettujen korttien mukaisesti muokkautuvien voittoehtojen (eli voittavien korttien tai korttiyhdistelmien) epärehelliseksi tai epäluotettavaksi rahapelitoiminnaksi.

Havainnollistetaan edellä kuvattua tilannetta vielä esimerkillä. Kuvitellaan, että pelaajan ostamaan Jokeripokeri-arpaan olisi liitetty voittokerroin 30. Korttien joukko

$$\{ristikolmonen, herttakakkonen, patakahdeksikko,$$

$$herttakahdeksikko, ruutukymppi\}$$

jaettaisiin pelaajalle, mutta hän ei vieläkään tietäisi, millä kortilla tai korttiyhdistelmällä hän voisi voittaa kunkin voittokertoimen määrittämän voiton. Pelaaja toisin sanoen lukitsisi korttinsa tietämättä, mitkä valinnat edesauttavat mahdollisimman suuren voittokertoimen saavuttamista. Kun pelaaja olisi mahdollisesti lukinnut joitakin kortteja ja mahdolliset lukitsemattomat kortit kerättäisiin pois, hänelle esitettäisiin voittokertoimia vastaavat kortit tai korttiyhdistelmät. Nämä olisivat muovautuneet sen mukaan, mitä kortteja pelaaja olisi lukinnut ja mikä hänelle etukäteen arvottu voittokerroin olisi. Mikäli pelaaja olisi siis esimerkiksi lukinnut korttien joukon

$$\{ristikolmonen, herttakakkonen, patakahdeksikko\},$$

voitaisiin esimerkiksi määrittää, että korttijoukolla

$$\{ristikolmonen, herttakakkonen, patakahdeksikko, ruutukuningas\}$$

hän voittaa voittokertoimen 30 ja panoksensa määrittämän summan. Koska tämä voittokerroin on siis etukäteen arvottu tähän kyseiseen arpaan, pelijärjestelmä tietenkin arpoisi pelaajalle uudet kortit, joista toinen olisi *ruutukuningas*.

Toinen kortti olisi jokin muu, jotta päädyttäisiin tasan siihen lopputulokseen, joka on liitetty voittokertoimeen 30.

Jotta voitonjako voitaisiin esittää mielekkäällä määrällä taulukkorivejä ja jokaiselle kuluttajalle ymmärrettävällä tavalla ilman erityisehtoja, vaadittaisiin siis, että tiettyyn voittokertoimiin oikeuttavat kortit ja korttiyhdistelmät esitettäisiin vasta siinä vaiheessa, kun pelaaja on jo lukinnut kortit. Tämä luonnollisesti taas poistaisi Jokeripokeri-peliin liitetyn taidollisen elementin. Itse asiassa kun pelistä poistaa sitä määrittelevän ominaisuuden, herää kysymys, onko enää oikeastaan kyse Jokeripokeri-pelistä tai edes sen eArpa-versiosta.

Jokeripokeri-esimerkin myötä voidaan todeta, että jos pelaajalle annetaan mahdollisuus tavoitella toistensa suhteen poissulkevia tuloksia, kohdataan ongelmia, kun yritetään tehdä pelistä eArpa-versio. Tällä tarkoitetaan sitä, että mikäli pelaaja päättää tavoitella sellaista tulosta, joka ei ole samanaikaisesti mahdollinen pelaajalle arvotun voiton edellyttämän tuloksen kanssa, pelin lopputulos ja arvottu voitto ovat ristiriidassa. Esimerkiksi jos pelaajalle arvottu voittosumma edellyttäisi värisuoraa ja pelaaja päättääkin pyrkiä saamaan mahdollisimman monta samanarvoista korttia (esimerkiksi ässiä), lopputulos ja arvottua voittoa vastaava tulos ovat ristiriidassa. Tämä johtuu siitä, että näihin lopputuloksiin pyritään täysin erilaisilla strategioilla: värisuoraan pyritään saamalla peräkkäisiä ja erisuuria, mutta samaa maata olevia kortteja, kun taas mahdollisimman monta samanarvoista korttia saadaan samansuuruisilla korteilla, jotka ovat eri maata. Niinpä toisensa poissulkevat tavoitteet ja niihin liitetyt strategiat ovat este pelin toteuttamiselle eArpana.

3.2.4 Nokkapokka-eArpa

On siis erittäin hankalaa eliminoida taitoon perustuva pelin ominaisuus. Onkin todettava, että eArpojen sattumanvaraisuus on yksi eArpoja todella määrittävistä ominaisuuksista. Tuotekehityksessä tulee siis ottaa huomioon, että peli ja sen tapahtumat perustuvat mahdollisimman pitkälle sattumaan. Näin tulee tehdä, vaikka pelaajalle luotaisiinkin illuusio siitä, että pelaajan valinnoilla voisi olla merkitystä lopputuloksen kannalta. Nimittäin sattumaan perustuvat pelitapahtumat rikkovat kaavoja ja malleja pelien etenemisessä, mikä edesauttaa pelaamisen mielenkiinnon ylläpitämistä pelikerrasta toiseen.

Veikkauksen yksi menestyneimmistä eArvoista toimii mahdollisimman pitkälle sattumanvaraisesti, vaikka pelaaja voikin tehdä siinä valintoja. Tässä eArvassa, Nokkapokassa, on aluksi anonyymeja lintuja pyramidin muotoisessa asetelmassa. Pyramidin alimman rivin linnut ovat harmaita ja muut pyramidissa ylempänä olevat linnut ovat ruskeita. Pelaaja voi valita vain harmaita lintuja painamalla niitä hiirellä. Kun pelaaja valitsee linnun, se paljastaa todellisen värinsä. Pelaaja valitsee ja tällä tavoin niin sanotusti avaa muitakin jäljellä olevia harmaita lintuja. Mikäli pelaaja avaa kaksi samanväristä lintua, ne lentävät pois ja niiden takaa pyramidin ylemmiltä riveiltä ruskeista linnuista muuttuu valittavissa olevia harmaita lintuja. Mikäli lintuun on kiinnitetty voittosumma ja se lentää pois, pelaaja voittaa kyseisen voittosumman. Pyramidin huipulla olevaan lintuun on kiinnitetty arvan päävoittosumma.

Harmaista linnuista avautuu eri värisiä lintuja täysin sattumanvaraisesti. Pelaajan pelikokemus siis vaihtelee satunnaisesti pelikerrasta toiseen, vaikka hän aloittaisi joka kerralla avaamalla ensimmäiseksi vasemmanpuoleisimman linnun. Vasta jos linnun on oltava jonkin tietyn värinen, jotta arvassa voidaan päätyä ennalta arvottua voittosummaa vastaavaan visuaaliseen lopputulokseen, pelistä avautuu siihen kirjoitettujen algoritmien mukaisesti tarvittavan värinen lintu. Satunnaisuus ja sen tuoma vaihtelu on kuitenkin riittävää, jotta mielenkiinto säilyy pelikertojen välillä ja peli säilyttää hyvin onneen perustuvan luonteensa.

3.2.5 Blackjack eArpana

Blackjack on maailmanlaajuisesti yksi tunnetuimmista korttipeleistä, jota pelataan usein kasinoissa ja ravintoloissa rahapanosta vastaan. Blackjackia on usein tutkittu myös peliteoreettisesti, sillä siinä pystyy vaikuttamaan voiton todennäköisyyteen. Kuitenkin sattumalla on iso rooli pelissä, sillä kyse on korttipelistä, jossa jaetaan kortteja satunnaisessa järjestyksessä.

Seuraavaksi selitetään, kuinka peliä pelataan. Tässä esimerkissä pelin lisäominaisuudet ja -mahdollisuudet (esimerkiksi tuplaus, jakaminen, antautuminen, vakuutus) on jätetty kokonaan käsittelemättä ja muitakin sääntöjä on yksinkertaistettu, jotta esimerkki olisi mahdollisimman havainnollinen. Lisäksi oletetaan, että käytetään vain yhtä 52 kortin korttipakkaa ja että pelaajia on vain kaksi: jakaja ja pelaaja.

Blackjackissa ässä-kortti merkitsee joko lukua yksi tai lukua yhtätoista sen mukaan, kumpi tapa on sen pelanneelle edullisempi. Kuvakortit (jätkä, kuningatar, kuningas) vastaavat lukua kymmenen. Numerokortit (numerot 2-10) vastaavat niissä esitettyä lukua, eli esimerkiksi patavitonen vastaa lukua viisi.

Käsitellään sitten pelin kulku. Ensiksi jakaja jakaa kaksi korttia pelaajalle sekä itselleen niin, että pelaajan kortit ovat kummatkin kuvapuoli ylöspäin. Omat korttinsa jakaja asettelee siten, että ensimmäisessä kuvapuoli on alaspäin ja toisessa ylöspäin. Jakaja saa itse katsoa oman kuvapuoli alaspäin käännetyn korttinsa, mutta pelaaja ei saa tietää, mikä kortti on. Seuraavaksi pelaaja nostaa kortteja pakasta yksitellen niin, että kaikkien hänen korttiensa numeroiden muodostama summa olisi mahdollisimman lähellä lukua 21. Mikäli korttien summa ylittää luvun 21, pelaaja häviää. Jos taas pelaajalle heti ensimmäisenä jaetut kaksi korttia ovat yhteenlaskettuna luku 21, pelaaja voittaa heti. (Myöhemmin kerrotaan tarkemmin, miten voittosummat määriytyvät.) Pelaajan ei kuitenkaan ole pakko nostaa kortteja.

Kun pelaaja on tyytyväinen kortteihinsa, on jakajan vuoro pelata. Ensiksi hän paljastaa aiemmin kuvapuoli alaspäin käännetyn korttinsa. Seuraavaksi hän nostaa samoin kortteja pakasta pyrkien tasan korttien summaan 21. Jakajan korttien nostaminen on määritelty siten, että hänen on nostettava kortteja, kunnes niiden summa on vähintään 17. Kun summa on vähintään 17, jakaja ei enää saa nostaa kortteja ja peli loppuu. Tällöin katsotaan, onko pelaaja vai jakaja lähempänä lukua 21. Lähempänä lukua ollut voittaa.

Mikäli pelaajan kaksi ensimmäistä korttia muodostavat summan 21, hän voittaa heti ja tulos on niin kutsutusti Blackjack. Tällöin pelaaja saa panoksensa 2,5-kertaisena takaisin. Esimerkiksi jos pelaaja on pelannut viiden euron panoksella ja hän saa Blackjackin, hän voittaa 12,50 euroa. Jos pelaaja taas voittaa jakajan myöhemmässä vaiheessa, hän saa panoksensa kaksinkertaisena takaisin. Esimerkiksi jos pelaajan korttien summa on 20, jakajan korttien summa on 19 ja pelaajan panos on viisi euroa, niin pelaaja voittaa pelistä 10 euroa.

Käsitellään sitten se pelitilanne, jos Blackjackista tehtäisiin eArpa. Ensiksi pelaaja ostaisi arvan. Koska arvan hinta vastaisi pelaajan panosta, eArvan tekijöiden tulisi pohtia, montako hintapistettä eli panosmahdollisuutta pelaajalle haluttaisiin tarjota. Kukin hintapiste vaatisi oman arpaeränsä, joten hintapisteiden lukumäärä ratkaisisi myös painettavien ja kerralla myynnissä olevien arpaerien lukumäärän. Usein eArvoissa on kolme hintapistettä, mutta tässä tapauksessa kun arvan hinta vastaisi pelin panosta, tulisi miettiä, voisiko hintapisteitä olla enemmän, jotta pelaaja voisi valita mahdollisimman mieluisan pelin panoksen. Olisi myös pohdittava, mikä voisi olla suurin pelin hinta, sillä se määrittäisi arvan päävoiton. Yleisesti ottaen kuluttajia kiinnostaa suuret tai melko suuret päävoitot, mutta nopearytmisissä eArvoissa pelin hinta ei kuitenkaan voi olla kovin suuri. Niinpä hintapisteiden valinta tulisi tehdä tarkoin ja kaikki eri näkökulmat huomioon ottaen.

Joka tapauksessa eArvan ostamisen jälkeen pelaajalle arvottaisiin yksi arpaerässä jäljellä olevista arvoista. Tähän arpaan olisi liitetty jokin voittosumma, joka olisi siis joko arvan hinta 2- tai 2,5-kertaisena tai 0 euroa. Käsitellään ensiksi se tilanne, jossa pelaajalle arvotun arvan voittosumma on arvan hinta 2,5-kertaisena eli tulos edellyttää Blackjack-voittoa. Tällöin pelaajalle jaetaan ensimmäisenä sellaiset kortit, että ne muodostavat summan 21. Pelaajalle voitaisiin jakaa esimerkiksi ässä- ja jätkäkortti. Voittosumma täsmää siis pelistä odotettavaan lopputulokseen.

Toiseksi jos voittosumma on arvan hinta kaksinkertaisena, niin pelaajan on voitettava jakaja muilla kuin kahdella ensimmäisellä kortilla. Tällaisessa tilanteessa voisi tulla ongelmia, jos pelaaja nostaisi kortteja niin monta, että hänen korttiensa summa ylittäisi luvun 21. Tällöin peli loppuisi, vaikka peliin liitetyn voittosumman mukaan pelaajan tulisi voittaa. Kuitenkin pelaajalle annettavia kortteja voidaan säätää siten, että pelaajan nostamat kortit muodostavat aina korkeintaan summan 20. Mikäli summa on 20 ja pelaaja päättää nostaa vielä yhden kortin, kortti voidaan asettaa ässäksi, jolloin summasta tulee tasan 21 ja pelaaja voittaa. Tulos ei kuitenkaan ole Blackjack, sillä voittoa ei saavutettu kahdella ensimmäisellä kortilla.

Kolmantena ja viimeisenä tapauksena käsitellään tilanne, kun pelaaja ei voita mitään hänelle arvotusta arvasta, eli kun jakajan on voitettava peli. Tällöin pelaajalle ei jaeta ensimmäisenä korttiparia, joka vastaisi Blackjack-tulosta. Pelaajalle jaettavat kortit eivät muulloinkaan johtaisi tasan lukuun 21, mutta ne saattaisivat ylittää luvun 21. Lisäksi jakaja saisi aina sellaiset kortit, että niiden summa olisi lähempänä lukua 21 kuin pelaajan korttien summa. Pystyttäisiin siis aina varmistumaan siitä, että jakaja voittaisi.

Blackjackista voitaisiin siis tehdä eArpa-versio. Tämä vaatisi pohdintaa hintapisteistä ja mahdollisesta sääntöjen muokkaamisesta, mutta teknisesti ottaen se olisi mahdollista.

3.3 Yhteenveto

eArpojen tuotekehityksessä on otettava huomioon niitä rajoittavat lainopilliset, matemaattiset ja liiketoiminnalliset tekijät. Lainopillisilla tekijöillä tarkoitetaan Suomen arpajaislaissa säädettyjä yleisiä velvoitteita rahapelitoimintaa kohtaan, kuten esimerkiksi sitä, että rahapelituotteessa on ilmoitettava voiton todennäköisyys. Niinpä myös eArvoissa voitonjako on esitettävä, mikä tarkoittaa sitä, että arpaerän koko ja siinä esiintyvät voitot tulee tietää ja kiinnittää etukäteen ennen arpaerän myynnin aloittamista. Arpajaislain nojalla eArpojen tulee myös pohjautua täysin sattumaan. Tämä olennaisesti rajoittaa eArpojen moninaisuutta ja asettaa reunaehdot tuotekehitysprosessille. Toisinaan eArvoissa voidaan kuitenkin pyrkiä luomaan illuusio siitä, että pelaajan tiedoilla ja taidoilla olisi merkitystä pelin lopputuloksen kannalta. Tämä on usein haasteellista, kun tarkoituksena on imitoida mahdollisimman hyvin jotakin edes vain osittainkin taitoon perustuvaa peliä.

Tällaisten laissa säädettyjen tekijöiden lisäksi eArpojen tuotekehitykseen vaikuttaa niiden matemaattisesti kaksijakoinen luonne. Tällä tarkoitetaan sitä, että jokin eArpa voisi teoriassa olla täysin validi tuote, mutta käytännössä sen toteutus ei onnistuisi. Esimerkiksi teoreettisesti katsoen jokin arpaerä voi olla voitonjaon suhteen täysin määriteltävissä: kunhan arpaerään sisältyy äärellinen määrä arpoja, se on määriteltävissä. Kuitenkin tämä arpaerä saattaisi olla aivan liian suuri siihen nähden, mitä pelijärjestelmät pystyisivät ongelmitta toimittamaan asiakkaiden pelattavaksi mielekkäiden kapasiteettivarausten rajoissa.

Näihin käytännön haasteisiin liittyvät myös liiketoiminnalliset tekijät, jotka rajoittavat eArpa-tuotteiden ominaisuuksia. Jo kehitysvaiheessa on otettava huomioon, miltä peli tulee näyttämään asiakkaan näkökulmasta ja miten sitä tullaan pelaamaan. On esimerkiksi pohdittava, voiko pelaaja tehdä pelissä erinäisiä valintoja vai tulisiko näiden valintojen tekemistä nimenomaan rajoittaa. Lisäksi on mietittävä, miten näiden valintojen teko vaikuttaa pelattavuuteen. On myös huomioitava, miten peli ylläpitää ja luo luotettavaa mielikuvaa kyseisestä tuoteryhmästä. Kaikki nämä aspektit pohjautuvat lopulta yrityksen liiketoimintastrategiaan ja sen painopisteisiin. Esimerkiksi Veikkauksen yksi strategisista tavoitteista on tehdä pelaamisesta helppoa ja nopeaa, mikä luonnollisesti ohjaa tuotteiden kehittämistä sellaisiksi, että asiakkaan on ymmärrettävä pelin idea ja kulku vaivattomasti. Mikäli strateginen valinta on toimia tällä tavoin asiakaslähtöisesti, eArpojen tuotekehityksessä on siis huomioitava asiakkaiden tarpeet ja mieltymykset.

Lisäksi eArpojen tuotekehityksessä on huomattava, että pelin tavoitteet ja niihin johtavat strategiat eivät saa olla ristiriidassa keskenään. Peliin on siis valittava vain tavoitteita, jotka eivät ole toisensa poissulkevia. Muutoin arpaan arvottua voittoa vastaava lopputulos ja pelaajan pelikäyttäytymisestä ja valinnoista seuraava lopputulos eivät välttämättä täsmää, ja pelin toteutus on hankalaa.

Vaikka siis eArpoja ja niiden kehitystä rajoittavat erityyppiset tekijät, niin niiden teemoissa ja pelimekaniikoissa on tilaa luovuudelle. Rahapeliyhtiön tarjoamien eArpojen kilpailuetuja ovatkin siis monipuoliset, mielenkiintoiset ja kekseliäät ratkaisut teemoissa ja pelimekaniikoissa. Mikäli yritys, kuten Veikkaus, onnistuu kehittämään tällaisia eArpoja, se tulee menestymään tässä nopeasti kasvavassa tuoteryhmässä.

Lähteet

[1] Bolstad, W. *Introduction to Bayesian Statistics*. Toinen painos, Wiley, 2007.

[2] Järvinen, H. *Rahapelien toiminnallinen ja matemaattinen rakenne - pelinjärjestäjän näkökulma*. Diplomityö, Teknillisen fysiikan ja matematiikan osasto, Teknillinen korkeakoulu, Espoo, 2007.

[3] Myerson, R. *Game Theory: Analysis of Conflict*. Ensimmäinen painos, Harvard University Press, 1997.

[4] Siegfried, T. *John Nash, peliteoria ja luonnon koodi* (suom. Pietiläinen, K.). Terra Cognita, Helsinki, 2008.

[5] *Arpajaislaki*. 23.11.2001/1047.

[6] *Sisäasiainministeriön asetus Veikkaus Oy:n rahapelien pelisäännöistä*. SMDno/2012/308. Helsinki, 14.3.2012.

[7] TNS Gallup: *TNS Atlas 2014 -kuluttajatutkimus*. Espoo, 2014.

[8] Veikkaus: *Veikkauksen yhteiskuntavastuuraportti ja vuosikertomus 2014*. Tilinpäätöksen liitetiedot: erittely liikevaihdosta peleittäin ja peliryhmittäin. Vantaa, 2015. Viitattu 10.6.2015. `http://www.veikkausvuosi2014.fi/fi/tilinpaatos/liitetiedot/Erittely-liikevaihdosta-peleitt%25C3%25A4in-ja-peliryhmitt%25C3%25A4in/`