TAMPEREEN YLIOPISTO
Pro gradu -tutkielma

Jussi Syrjäkoski

Lukujonot lukiossa ja yliopistossa

Informaatiotieteiden yksikkö
Matematiikka
Toukokuu 2015

Tampereen yliopisto
Informaatiotieteiden yksikkö
Syrjäkoski, Jussi: Lukujonot lukiossa ja yliopistossa
Pro gradu -tutkielma, 69 s.
Matematiikka
Toukokuu 2015

Tiivistelmä

Tässä tutkielmassa tarkastellaan lukujonojen käsittelyä lukion pitkän matematiikan kurssien 9 ja 13 kurssikirjoissa Matematiikan taito, Pyramidi ja Pitkä matematiikka. Tampereen yliopiston matematiikan kursseista tarkastelu kohdistuu erityisesti kurssiin Analyysi 1 sekä tietyin osin kurssien Matematiikan peruskäsitteitä, Johdatus analyysiin ja Johdatus matemaattiseen päättelyyn lukujonojen materiaalina toimivaan kirjaan Johdatus diskreettiin matematiikkaan. Tarkastelun lähtökohtana on tutkia, kuinka kyseisten lukion pitkän matematiikan kirjojen sisältö soveltuu yliopiston matematiikan lukujonojen opintojen pohjaksi. Lisäksi tarkastellaan kyseisten matematiikan oppikirjojen lukujonojen käsittelyn välisiä eroavaisuuksia ja yhtäläisyyksiä.

Tutkielman alussa tarkastellaan lukion pitkän matematiikan ja yliopiston kurssin Analyysi 1 lukujonojen opetuksen keskeisiä tavoitteita ja sisältöjä. Matemaattisessa osiossa tarkastellaan analyysin kohteena olevien oppikirjojen matemaattista sisältöä ja niiden eroavaisuuksia ja yhtäläisyyksiä sekä pohditaan niiden tarjoamaa pohjaa yliopistomatematiikkaa varten. Tutkielman lopussa tarkastellaan ehdotusta ε-tekniikan opetukseen lukiossa.

Tutkielman perusteella voidaan havaita eroja kirjojen tarjoamassa lukujonojen aihesisällössä, etenkin sisällön erilaisessa painotuksessa kursseissa 9 ja 13. Voidaan myös päätellä lukion ε-tekniikan opetuksen olevan vielä hakemassa lukiolaiselle sopivaa esitysmuotoa ja sisältöä.

Sisältö

1 Johdanto

Ehkä tunnetuin lukujono on Fibonaccin lukujono eli jono

$$(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \ldots).$$

Sen jäsenet noudattavat yksinkertaista sääntöä. Ensimmäiset kaksi lukua ovat ykkösiä ja muut aina kahden edeltävän luvun summa. Lukujono on myös esimerkki rekursiivisesti eli palautuskaavan mukaan määräytyvästä lukujonosta. Tämä lukujono voidaan määritellä seuraavasti:

$$F(n) = \begin{cases} 0, & \text{kun } n = 0, \\ 1, & \text{kun } n = 1, \\ F(n-1) + F(n-2), & \text{kun } n > 1. \end{cases}$$

Jono on nimetty kauppias Bonaccion pojan Leonardo Pisanon (n. 1170-1250) mukaan [4, s. 96]. Fibonacci esitti lukujononsa vuonna 1202 kirjassaan Liber arabi. Fibonaccin kirja lienee ollut merkittävin yksittäinen arabialaisen numerojärjestelmän vakiinnuttamista edistävä teos. Lukujonon kaltaiset ongelmat havainnollistivat, kuinka helppoa arabialaista järjestelmää oli käyttää.

Matematiikan asema meidän ajassamme ja kulttuurissamme edellyttää valmiutta ymmärtää, hyödyntää ja tuottaa matemaattisesti esitettyä tietoa. Lukion matematiikan opetuksen tehtävä on tutustuttaa opiskelija matemaattisen ajattelun malleihin sekä matematiikan perusideoihin ja rakenteisiin, opettaa käyttämään puhuttua ja kirjoitettua matematiikan kieltä sekä kehittää laskemisen ja ongelmien ratkaisemisen taitoja. Lukion matematiikan opetuksen tulisi olla innostavaa ja laadukasta, sillä yhä useammalla alalla sovelletaan matematiikkaa. Lukion matematiikan pitkän oppimäärän opetuksen lakisääteinen tehtävänä on antaa opiskelijalle matemaattiset valmiudet, joita tarvitaan ammatillisissa opinnoissa ja korkeakouluopinnoissa. Pitkän matematiikan opinnoissa opiskelijalla on tilaisuus omaksua matemaattisia käsitteitä ja menetelmiä sekä oppia ymmärtämään matemaattisen tiedon luonnetta. Opetus pyrkii myös antamaan opiskelijalle selkeän käsityksen matematiikan merkityksestä yhteiskunnan kehityksessä sekä sen soveltamismahdollisuuksista arkielämässä, tieteessä ja tekniikassa.

Lukujonon raja-arvo on matemaattisen analyysin tärkeimpiä käsitteitä, sillä sen avulla voidaan määritellä suurin osa analyysin muista käsitteistä, kiteyttää Markku Halmetoja Solmu-lehdessä [1]. Raja-arvon määritelmän avulla on myös helpointa oppia analyysin keskeisimmän työvälineen, ε-tekniikan, käyttö. Vaikka raja-arvon tarkka määritelmä ja siihen liittyvä ε-tekniikka eivät ole koskaan kuuluneet lukion oppimäärään, Halmetojalle on kokemus osoittanut, että matematiikasta todella kiinnostuneella lukiolaisella ei ole mitään ikään liittyvää kehityspsykologista estettä niiden omaksumiseen. Kuitenkin lukiossa tulokset annetaan valmiina laskusääntöinä ilman täsmällistä perustelua. Mihin siis tarvitaan tarkkoja määritelmiä? Erityisesti mihin tarvitaan raja-arvon ε-määritelmää? Lukiossa raja-arvo ja sitä kautta funktion jatkuvuus määritellään usein graafisen tulkinnan kautta. Monissa yksinkertaisissa tilanteissa tämä on riittävä. Jatkuvuuden määrittely graafisen tulkinnan kautta saattaa kuitenkin aiheuttaa väärinkäsityksiä, jos funktio ei ole määritelty kaikilla reaaliluvuilla.

Tämän tutkimuksen tarkastelun lähteinä ovat lukion kurssien 9 ja 13 oppikirjat Matematiikan taito, Pyramidi ja Pitkä matematiikka. Yliopistosta tarkastelun kohteena ovat Tampereen yliopiston matematiikan kurssin Analyysi 1 kurssimateriaali sekä kurssien Matematiikan peruskäsitteitä, Johdatus matemaattiseen päättelyyn ja Johdatus analyysiin lukujonojen materiaalina toimiva kirja Johdatus diskreettiin matematiikkaan. Lukiokirjat ovat tarkoitettu samalle kohderyhmälle, samoille lukion kursseille 9 ja 13. Niille kaikille pätevät samat opetussuunnitelman mukaiset vaatimukset ja niiden tulisi ohjata opiskelijaa yhdenvertaisesti etenemään matematiikassa. Kurssit Analyysi 1 ja Johdatus matemaattiseen päättelyyn ovat yliopistomatematiikan peruskursseja, jotka sisältyvät niin matematiikan kandidaatin tutkintoon kuin matematiikan sivuaineopintoihin. Kurssit Matematiikan peruskäsitteet ja Johdatus analyysiin ovat yliopistomatematiikan opintoihin orientoivia kursseja. Yliopistokursseista pääpaino lukujonojen tarkastelussa on kurssin Analyysi 1 materiaalissa. Muista yliopistokursseista tarkastellaan ainoastaan aritmeettista, geometrista ja rekursiivista lukujonoa. Tarkastelun lähtökohtana on tutkia, kuinka kyseisten lukion pitkän matematiikan kirjojen sisältö soveltuu yliopiston matematiikan lukujonojen opintojen pohjaksi.

Tutkielman alussa tarkastellaan lukion pitkän matematiikan ja yliopiston kurssien lukujonon opetuksen keskeisiä tavoitteita ja sisältöjä. Matemaattisessa osiossa tarkastellaan analyysin kohteena olevien oppikirjojen matemaattista sisältöä ja niiden eroja ja yhtäläisyyksiä ja pohditaan niiden tarjoamaa pohjaa yliopistomatematiikkaa varten. Raja-arvon ε-tekniikkaa lukiolaisille -kappaleessa tarkastellaan, kuinka ε-tekniikkaa voitaisiin opettaa lukiossa.

2 Lukion opetussuunnitelma

Tässä luvussa käsitellään voimassa olevaa lukion opetussuunnitelmaa vuodelta 2003 ja 13.11.2014 hyväksyttyä uutta lukion tuntijakoa, mikä tulee voimaan vuonna 2016.

2.1 Voimassa oleva opetussuunnitelma

Nykyiset lukiokoulutuksen opetussuunnitelman perusteet ovat vuodelta 2003. Lukion opetus ja muu toiminta tulee järjestää valtioneuvoston asetuksessa (955/2002) määriteltyjen yleisten valtakunnallisten tavoitteiden mukaan siten, että opiskelijalla on mahdollisuus laaja-alaisen yleissivistyksen hankkimiseen ja jäsentyneen maailmankuvan muodostamiseen. Opiskelijan tulee saada olennaista luontoa, ihmistä, yhteiskuntaa ja kulttuureja koskevaa eri tieteen- ja taiteenalojen tuottamaa tietoa [10].

Lukio-opinnot muodostuvat valtioneuvoston antaman asetuksen mukaisesti pakollisista, syventävistä ja soveltavista kursseista. Syventävät kurssit ovat opiskelijalle valinnaisia, oppiaineen pakollisiin kursseihin liittyviä kursseja, joita opiskelijan on valittava opinto-ohjelmaansa vähintään kymmenen. Lisäksi lukiossa voi olla koulukohtaisia, lukion opetussuunnitelmassa määriteltäviä syventäviä kursseja. Soveltavat kurssit ovat eheyttäviä kursseja, jotka sisältävät aineksia eri oppiaineista, menetelmäkursseja taikka saman tai muun koulutuksen järjestäjän järjestämiä ammatillisia opintoja tai lukion tehtävään soveltuvia muita opintoja.

Opetussuunnitelman pohjalta lukio laatii lukuvuosittaisen suunnitelman opetuksen käytännön järjestämisestä. Opiskelija laatii henkilökohtaisen opiskelusuunnitelmansa lukion opetussuunnitelman sekä lukuvuosittaisen suunnitelman pohjalta.

2.2 Matematiikan opetussuunnitelma

Matematiikan opetuksen tehtävänä on tutustuttaa opiskelija matemaattisen ajattelun malleihin sekä matematiikan perusideoihin ja rakenteisiin, opettaa käyttämään puhuttua ja kirjoitettua matematiikan kieltä sekä kehittää laskemisen ja ongelmien ratkaisemisen taitoja. Erityisesti opiskelijaa ohjataan hahmottamaan matemaattisten käsitteiden merkityksiä ja tunnistamaan, kuinka ne liittyvät laajempiin kokonaisuuksiin [10, s. 177].

Matematiikan pitkän oppimäärän opetuksen tehtävänä on antaa opiskelijalle matemaattiset valmiudet, joita tarvitaan ammatillisissa opinnoissa ja korkeakouluopinnoissa. Pitkän matematiikan opinnoissa opiskelijalla on tilaisuus omaksua matemaattisia käsitteitä ja menetelmiä sekä oppia ymmärtämään matemaattisen tiedon luonnetta. Opetus pyrkii myös antamaan opiskelijalle selkeän käsityksen matematiikan merkityksestä yhteiskunnan kehityksessä sekä sen soveltamismahdollisuuksista arkielämässä, tieteessä ja tekniikassa.

Matematiikan pitkän oppimäärän opetuksen tavoitteena on, että opiskelija

- tottuu pitkäjänteiseen työskentelyyn ja oppii sitä kautta luottamaan omiin matemaattisiin kykyihinsä, taitoihinsa ja ajatteluunsa,

- rohkaistuu kokeilevaan ja tutkivaan toimintaan, ratkaisujen keksimiseen sekä niiden kriittiseen arviointiin,
- ymmärtää ja osaa käyttää matematiikan kieltä, kuten seuraamaan matemaattisen tiedon esittämistä, lukemaan matemaattista tekstiä, keskustelemaan matematiikasta, ja oppii arvostamaan esityksen täsmällisyyttä ja perustelujen selkeyttä,
- oppii näkemään matemaattisen tiedon loogisena rakenteena,
- kehittää lausekkeiden käsittely-, päättely- ja ongelmanratkaisutaitojaan,
- harjaantuu käsittelemään tietoa matematiikalle ominaisella tavalla, tottuu tekemään otaksumia, tutkimaan niiden oikeellisuutta ja laatimaan perusteluja sekä arvioimaan perustelujen pätevyyttä ja tulosten yleistettävyyttä,
- harjaantuu mallintamaan käytännön ongelmatilanteita ja hyödyntämään erilaisia ratkaisustrategioita,
- osaa käyttää tarkoituksenmukaisia matemaattisia menetelmiä, teknisiä apuvälineitä ja tietolähteitä.

Pitkän matematiikan pakolliset kurssit ovat:

1. Funktiot ja yhtälöt (MAA1)
2. Polynomifunktiot (MAA2)
3. Geometria (MAA3)
4. Analyyttinen geometria (MAA4)
5. Vektorit (MAA5)
6. Todennäköisyys ja tilastot (MAA6)
7. Derivaatta (MAA7)
8. Juuri- ja logaritmifunktiot (MAA8)
9. Trigonometriset funktiot ja lukujonot (MAA9)
10. Integraalilaskenta (MAA10).

Syventävät, vapaaehtoiset pitkän matematiikan kurssit ovat:

11. Lukuteoria ja logiikka (MAA11)
12. Numeerisia ja algebrallisia menetelmiä (MAA12)
13. Differentiaali- ja integraalilaskennan jatkokurssi (MAA13).

Huomattavaa on, että lukioilla on mahdollisuus järjestää myös muita matematiikan syventäviä opintoja niiden omien opetussuunnitelmien mukaisesti.

2.3 Lukion matematiikan opetussuunnitelman tulevaisuus

Opetus- ja kulttuuriministeriö asetti 21.12.2012 työryhmän, jonka tehtävänä oli valmistella esitys valtioneuvoston asetukseksi lukiokoulutuksen yleisiksi valtakunnallisiksi tavoitteiksi ja lukion tuntijaoksi sekä arvioida taloudelliset, yhteiskunnalliset ja muut vaikutukset. Valtakunnallisia tavoitteita ja tuntijakoa sekä lukion opetussuunnitelman perusteita koskevat uudistukset tuli valmistella siten, että niiden mukaisesti laaditut opetussuunnitelmat voidaan ottaa käyttöön lukiokoulutuksessa 1.8.2016 lukien. Tavoitteena oli, että nuorille annettavan lukiokoulutuksen opetussuunnitelman perusteet olisivat valmiit syyskuun 2015 lopussa [11].

Työryhmä on laatinut ehdotukset lukiolaissa tarkoitetun koulutuksen yleisten valtakunnallisten tavoitteiden sekä tuntijaon uudistamiseksi. Tavoitteena on yleissivistyksen vahvistaminen. Opiskelijoilla tulisi olla jatko-opintojen ja työelämän kannalta tarvittavat tiedot ja taidot. Tulevan yhteiskunnan kehityksen seurauksena on ennakoitu työelämässä tapahtuvan merkittäviä muutoksia, jotka asettavat uusia haasteita koulutukselle. Etenkin tietotekninen kehitys tulee muuttamaan yhteiskunnan ammattirakenteita ja osaamistarpeita seuraavien kahdenkymmen vuoden kuluessa merkittävästi [12, s. 5].

Päätöksen mukaan lukiossa korostuvat tiedot, jotka jäsentyvät ja integroituvat osiksi laajempia kokonaisuuksia. Tietoon yhdistyvät erilaiset taidot kuten kriittinen ja luova ajattelu, koskien myös matemaattisia taitoja. Halu elinikäiseen itsensä kehittämiseen korostuu. Yleissivistys on entistä syvempää ja jäsentyneempää tietojen ja taitojen keskinäistä symbioosia, jonka kehittymisessä opiskelijan innostuneisuudella oppimiseen on aikaisempaa suurempi merkitys. Jatkossa on entistä paremmin mahdollista joustavien opintopolkujen rakentaminen osaamisen laajentamisessa ja syventämisessä myös muiden koulutuksen järjestäjien, koulutusmuotojen ja -asteiden opetustarjontaa hyödyntäen. Uudistukset vahvistavat opiskelijoiden tietoja ja ennen kaikkea taitoja sekä niihin liittyvää kypsyyttä soveltaa lukiossa hankkimaansa osaamista ja siten parantavat heidän jatko- ja työelämävalmiuksiaan.

Ehdotetun lukiolain pykälän 9 mukaan matematiikka on jatkossakin pakollinen oppiaine. Matematiikkaa on pidettävä lukion ydinoppiaineena, jonka osaaminen luo pohjaa menestyä muissa lukion oppiaineissa. Menestys matematiikassa on keskeisin indikaattori selitettäessä opiskelijoiden jatko-opintomenestystä. Matematiikan antamat tiedot ja taidot ovat myös oleellinen osa tulevaisuudessa tarvittavaa yleissivistystä [12, s. 36].

Matematiikan kurssimäärät eivät muutu voimasta olevasta säädöksestä. Matematiikan opintojen nykyisiin tuntimääriin ei ehdoteta muutoksia. Matematiikan opintoja muutetaan siten, että opinnot alkavat yhteisellä opintokokonaisuudella, jonka jälkeen opiskelijan opinnot eriytyisivät joko pitkään tai lyhyeen matematiikkaan. Muutoksen on arvioitu rohkaisevan nykyistä enemmän pitkän matematiikan opiskeluun, etenkin tyttöjä. Uusi lukion tuntijako hyväksyttiin 13.11.2014.

3 Lukujonojen opetuksen tavoitteet lukiossa ja yliopistossa

Tässä luvussa tarkastellaan opiskelijalle asetettuja lukujonojen opetuksen tavoitteita lukion opetussuunnitelmassa, tutkimukseen valituissa lukion matematiikan kurssien 9 ja 13 kurssikirjoissa Matematiikan taito, Pyramidi ja Pitkä matematiikka sekä Tampereen yliopiston kursseilla Matematiikan peruskäsitteitä, Johdatus matemaattiseen päättelyyn, Johdatus analyysiin ja Analyysi 1.

3.1 Lukujonot lukion opetussuunnitelmassa

Tämä tutkielma painottuu erityisesti pakolliseen kurssiin 9, Trigonometriset funktiot ja lukujonot, ja syventävään kurssiin 13, Differentiaali- ja integraalilaskennan jatkokurssi, joiden sisältönä lukujonot lukion pitkässä matematiikassa ovat.

Kurssin 9 tavoitteet lukujonojen osalta ovat, että opiskelija [10, s. 122]

- ymmärtää lukujonon käsitteen,
- oppii määrittelemään lukujonoja palautuskaavojen avulla,
- osaa ratkaista käytännön ongelmia aritmeettisen ja geometrisen jonon ja niistä muodostettujen summien avulla.

Kurssin 9 keskeinen sisältö lukujonojen osalta on

- lukujono,
- rekursiivinen lukujono,
- aritmeettinen jono ja summa,
- geometrinen jono ja summa.

Kurssin 13 tavoitteet lukujonojen osalta ovat, että opiskelija [10, s. 124]

- tutkii lukujonon raja-arvoa,
- tutkii sarjoja,
- tutkii sarjojen summia.

Keskeistä sisältöä lukujonojen osalta kurssilla 13 ovat funktioiden ja lukujonojen raja-arvot äärettömyydessä.

3.2 Matematiikan taito

Kirjan Matematiikan taito 9 tavoitteena lukujonoille on, että oppilas tutustuu lukujonoihin, joiden luvut määräytyvät matemaattisen säännön perusteella. Oppilaalle opetetaan myös keinoja, joilla lukujonojen luvuista muodostuvia äärellisen pitkiä summia voidaan tutkia ja laskea. Osan 9 lukujonoja varten ei vaadita tai suositella aiempien kurssien suorituksia [3, s. 3].

Kirja Matematiikan taito 13 määrittelee sisältävänsä paitsi lukiotason myös yliopistotason asiaa ja sitä suositellaan erityisesti niille, jotka suunnittelevat korkeakouluopintoja matemaattisissa tieteissä ja tekniikassa. Keskeisenä tavoitteena pidetään, että opiskelija syventää teoreettisten perusteiden tuntemustaan. Ehtona tälle syventämiselle pidetään aiemman teorian osaamista. Tätä syventämistä varten tarjotaan lukujonon raja-arvojen täsmällisiä määritelmiä ja niihin perustuvia todistuksia.

Erityisesti korostettavaa kirjassa Matematiikan taito 13 on maininta, että paitsi lukion oppikirjaksi, se sopii myös analyysin yliopisto-opintoihin valmentavaksi materiaaliksi ja yliopistollisen analyysin alkeiskurssin tukimateriaaliksi [2, s. 4].

Kirja Matematiikan taito 9 ehdottaa lukujonojen käsittelylle seuraavaa jakoa, suluissa ehdotettu oppituntimäärä [3, s. 5]:

- lukujonon käsite, määritelmä ja rekursiivinen lukujono (2),
- monotoniset ja rajoitetut jonot (1),
- aritmeettinen jono ja summa (2),
- geometrinen jono ja summa (3),
- lukujonon raja-arvo, raja-arvon laskusääntöjä, monotonisen ja geometrisen jonon suppeneminen (3),
- ensimmäisen kertaluvun rekursiot (1).

Sisällöllisesti lukujonojen käsittely muodostaa kirjasta Matematiikan taito 9 noin puolet. Ehdotettu 12 oppituntia ei täysin vastaa puolta koko kurssin käsittelyyn ajatellusta 30 oppitunnista.

Kirjassa Matematiikan taito 13 käsitellään lukujonon raja-arvoa. Raja-arvon käsittely jaetaan seuraavasti tärkeimpiin sisältöihin [2, s. 80]:

- raja-arvo ääretön,
- raja-arvo äärettömässä,
- epäolennaisten raja-arvojen laskusääntöjä,
- lukujonon suppeneminen,
- rajoitetut ja monotoniset lukujonot,
- lukujonon hajaantuminen.

Kaikkiaan lukujonon raja-arvon käsittelyyn kirja Matematiikan taito 13 ehdottaa kahta oppituntia. Yhteensä lukujonojen opetukseen käytettäisiin siis 14 oppituntia, yhden oppitunnin ollessa 45 minuuttia.

3.3 Pyramidi

Kirjassa Pyramidi 9 ei anneta erillistä tavoitetta oppilaalle kurssin sisällön suhteen tai määritellä keskeistä sisältöä. Kirja Pyramidi 13 määrittelee oppilaalle yleistavoitteeksi syventää opiskelijan differentiaali- ja integraalilaskennan teoreettisten perusteiden tuntemusta. Opetussuunnitelman mukaisina tavoitteina ja keskeisenä sisältönä lukujonoille ovat niiden raja-arvot [8, s. 5].

Kirjan Pyramidi 9 käsittely lukujonolle jakaantuu seuraavasti [4, s. 3]:

- johdanto,
- peruskäsitteitä; rekursiivisesti määritelty jono,
- lukujonon ominaisuuksia; rajoitettu lukujono, monotoninen lukujono,
- aritmeettinen lukujono,
- geometrinen lukujono.

Lukujonojen käsittely muodostaa kirjan Pyramidi 9 sisällöstä noin neljänneksen.

Kirjassa Pyramidi 13 käsitellään lukujonon raja-arvoa. Raja-arvon käsittelyyn on sisällytetty seuraavat asiat [8, s. 3]:

- raja-arvon määritelmä,
- lukujonon raja-arvon määrittäminen; raja-arvon laskusääntöjä,
- geometrinen lukujono ja sen suppeneminen,
- rekursiivinen lukujono.

Ajankäyttöehdotusta opetukseen ei ole annettu Pyramidi -kirjoissa.

3.4 Pitkä matematiikka

Kirjojen Pitkä matematiikka 9 ja 13 tavoitteena on, että opiskelija matematiikan tietojen ja taitojen lisäksi oppii ymmärtämään matematiikan erityisluonteen tiedonalana, jossa teoreettinen kohtaa käytännöllisen ja jossa luova oivaltaminen kohtaa täsmällisen loogisuuden [5, s. 3].

Kirjassa Pitkä matematiikka 9 todetaan lukujonoista seuraavasti [5, s. 4]: "Lukujono on tärkeä ja hyödyllinen käsite sekä teoreettisessa että sovelluksiin suuntautuvassa matematiikassa. Kurssilla opitaan tutkimaan ja käyttämään lukujonoja ja lukujonoista muodostettuja summia." Näiden lisäksi tavoitteiksi ja keskeiseksi sisällöksi annetaan lukion opetussuunnitelman mukaiset tavoitteet ja keskeinen sisältö [5, s. 6].

Kirjassa Pitkä matematiikka 9 ehdotetaan lukujonon käsittelylle seuraavaa jakoa, suluissa ehdotettu oppituntimäärä [3, s. 5]:

- lukujono; määritelmä, aidosti kasvava ja vähenevä lukujono (2),
- aritmeettinen jono (1),
- geometrinen jono (2),
- rekursiivinen jono (1).

Lukujonon käsittely muodostaa kirjan Pitkä matematiikka 9 sisällöstä noin viidenneksen. Ehdotettu ajankäyttö, 6 oppituntia, on samassa suhteessa ehdotettuun koko kurssin pituuteen, 28 oppituntiin.

Kirjassa Pitkä matematiikka 13 käsitellään lukujonon raja-arvoa. Raja-arvon käsittely jakaantuu seuraavasti [8, s. 3]:

- lukujonon raja-arvon määritelmä,
- lukujonon hajaantuminen,
- lukujonon suppeneminen,
- geometrisen jonon raja-arvo,
- rekursiivinen lukujono,
- rekursiivisen jonon raja-arvo.

Kirjassa Pitkä matematiikka 13 ehdotetaan käytettäväksi 3 oppituntia lukujonojen opetukseen. Yhteensä lukujonojen opetukseen käytettäisiin siis 9 oppituntia, yhden oppitunnin ollessa 45 minuuttia.

3.5 Matematiikan peruskäsitteitä

Kurssin Matematiikan peruskäsitteitä tavoitteita ovat, että opiskelija ymmärtää matematiikan peruskäsitteitä ja osaa soveltaa niitä yksinkertaisten matemaattisten ongelmien ratkaisemiseen. Hän tuntee joukko-opin alkeet sekä relaatioiden ja funktioiden perusominaisuudet. Opiskelija ymmärtää matemaattisen todistamisen pääperiaatteet ja osaa analysoida kirjallisuudessa esitettyjä alkeellisia matematiikan todistuksia. Opiskelija osaa tehdä itse yksinkertaisia todistuksia. Lukujonoille ei aseteta erillisiä tavoitteita [16].

3.6 Johdatus analyysiin

Kurssin Johdatus analyysiin tavoitteita ovat, että opiskelijan laskurutiinit vahvistuvat sille tasolle, jota varsinaisten analyysin opintojaksojen suorittaminen edellyttää. Opiskelija osaa laskea raja-arvoja, derivaattoja ja yksinkertaisia integraaleja. Hän ymmärtää derivaatan muutosvoimakkuutena ja integraalin pinta-alana. Hän pystyy käsittelemään sekä vektoriarvoisia että usean muuttujan funktioita. Hän osaa myös laskea kompleksiluvuilla. Lukujonoille ei aseteta erillisiä tavoitteita [14].

3.7 Johdatus matemaattiseen päättelyyn

Kurssin Johdatus matemaattiseen päättelyyn tavoitteita ovat, että opiskelija ymmärtää ja osaa soveltaa ekvivalenssirelaatioihin ja funktioihin liittyviä käsitteitä ja osaa johtaa ja todistaa niitä koskevia tuloksia. Opiskelija osaa ratkaista myös sellaisia diskreetin matematiikan ongelmia, jotka eivät suoraan muistuta annettuja esimerkkejä. Opiskelija osaa analysoida ja vertailla kirjallisuudessa esitettyjä relaatioita ja funktioita koskevia vaativahkojakin perustason todistuksia. Opiskelija ymmärtää mahtavuuden käsitteen ja mahtavuuksiin liittyviä todistuksia. Lukujonoille ei anneta erillisiä tavoitteita [15].

3.8 Analyysi 1

Kurssin Analyysin 1 tavoitteita ovat, että opiskelija osaa määritellä ja käyttää reaalianalyysin peruskäsitteitä täsmällisessä muodossa ja hän ymmärtää, miksi jo osin koulusta tutut laskurutiinit toimivat kuten toimivat. Hän osaa muotoilla matemaattisia lausekkeita täsmällisesti sekä todistaa yksinkertaisia perustuloksia. Hän osaa määrittää lukujoukon pienimmän ylärajan ja suurimman alarajan yksinkertaisissa tilanteissa, osaa tutkia lukujonojen suppenemista ja perusominaisuuksia, osaa määrittää raja-arvoja ja derivaattoja sekä suoraan määritelmien avulla että eri tekniikoita käyttäen, osaa tutkia funktion jatkuvuutta, osaa johtaa ja todistaa jatkuvien funktioiden perusominaisuuksia sekä osaa hyödyntää derivaattaa funktion käyttäytymisen tutkimisessa [13].

Lukujonojen käsittely jakaantuu seuraaviin aiheisiin [7]:

- määritelmä ja perusominaisuuksia; raja-arvo, suppeneminen, hajaantuminen, raja-arvon yksikäsitteisyys, rajoitetut lukujonot,
- lukujonojen laskusääntöjä,
- monotoniset lukujonot; Bolzano-Weierstrassin lause lukujonoille,
- Cauchyn jonot,
- raja-arvokäsitteen laajentaminen.

Lukujonojen opetukseen käytetään 15 luentoa, yhden luennon ollessa 45 minuuttia, ja kolme harjoituskertaa, yhden harjoituskerran ollessa kahden luennon mittainen [13].

4 Lukujonojen matemaattisen esittämisen tarkastelua

Tässä tutkielmassa tavoitteena on tarkastella lukion kurssien 9 ja 13 oppikirjojen Matematiikan taito [3], [2], Pyramidi [4], [8] ja Pitkä matematiikka [5], [6] tarjoamaa matemaattista pohjaa erityisesti Tampereen yliopiston kurssin Analyysi 1 [7] lukujonon käsittelyyn.

Yliopiston matematiikan kursseilla Matematiikan peruskäsitteitä, Johdatus analyysiin ja Johdatus matemaattiseen päättelyyn käsitellään aiheita aritmeettinen lukujono, geometrinen lukujono ja rekursiivinen lukujono siinä laajuudessa kuin kirjassa Johdatus diskreettiin matematiikkaan [9]. Vastaavasti kyseisten aiheiden tarkempi käsittely on päällekkäisyyden välttämiseksi jätetty kurssilta Analyysi 1 pois. Tämän takia kyseisten aiheiden tarkastelu tehdään vasten kirjaa Johdatus diskreettiin matematiikkaan.

Oleelliset osa-alueet lukujonon käsittelyssä, joihin tarkastelu kohdistuu, ja niiden käsittelyjärjestys on seuraava:

- lukujonon määritelmä ja esitystapa,
- lukujonon raja-arvo, suppeneminen ja hajaantuminen,
- rajoitetut ja monotoniset lukujonot,
- lukujonon raja-arvon laskusääntöjä,
- aritmeettinen lukujono,
- geometrinen lukujono,
- rekursiiviset lukujonot.

Aihealueet määräytyvät lukion kurssikirjojen sisällöstä. Kurssi Analyysi 1 vie lukujonojen käsittelyn lukiotasoa huomattavasti pidemmälle, eikä siksi kaikkea kurssin Analyysi 1 lukujonojen aiheita ole otettu tarkasteluun mukaan. Aiheiden järjestys on kompromissi lukiokirjojen ja kurssin Analyysi 1 aiheiden esitysjärjestyksen väliltä. Aiheiden esityksessä on pyritty käyttämään lähteiden muotoilua ja termejä.

Kaikki oleelliset lukiokurssien saatavilla olevat lauseiden todistukset ja joitakin yliopiston matematiikan kurssien lauseiden todistuksia on tuotu tarkasteluun mukaan, jotta matemaattinen eroavaisuus yliopistomatematiikan ja lukiomatematiikan välillä korostuisi. Samalla voidaan havaita lukion matematiikan lauseiden todistusten lukumääräinen vähäisyys. Tässä tutkimuksessa ei kaikkia kurssin Analyysi 1 lauseiden todistuksia ole lähdetty esittämään, koska se ei ole tarkoituksenmukaista tätä tutkimusta varten.

Valitut esimerkit ovat oppikirjoista tai kurssin Analyysi 1 materiaalista. Esimerkkien tehtävänä on korostaa lukion ja yliopiston matematiikan rajapintaa, joko tuoden esille sitä, miten liki ne ovat ajoittain toisiaan tai sitä, miten kaukana ne usein ovat toisistaan. Joistakin lukion oppikirjojen esimerkeistä on triviaaleja välivaiheita jätetty pois siten, että laskun etenemisen seuraaminen ei ole tästä häiriintynyt.

4.1 Lukujonon määritelmä ja esitystapa

Tässä kappaleessa tarkastellaan lukujonon määritelmää ja lukujonon esittämistä tarkasteltavissa materiaaleissa. Lukion oppikirjoissa lukujonon määritelmä on esitetty kurssin 9 kirjoissa.

4.1.1 Matematiikan taito

Kirja Matematiikan taito 9 käsittelee alkupalana lukujonoa tuoden peruskäsitteitä tutuksi [3, s. 78].

Lukujono voi olla *päättyvä* eli *äärellinen* tai *päättymätön* eli *ääretön*. Päättymätön lukujono voidaan antaa luettelona

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots.$$

Tällöin a_1 on lukujonon *ensimmäinen termi*, a_2 *toinen termi*, jne. Jonon n. eli *yleinen termi* on a_n.

Lukujono voidaan esittää graafisesti merkitsemällä koordinaatistoon pisteet

$$(1, a_1), (2, a_2), (3, a_3), \ldots.$$

Saatu pistejoukko on lukujonon kuvaaja.

Lukujonon *yleinen termi* ilmaistaan usein muuttujan $n = 1, 2, 3, \ldots$ funktiona muodossa $a_n = f(n)$.

Varsinaisesti Matematiikan taito määrittelee lukujonon seuraavasti [3, s. 80].

Määritelmä 4.1. Positiivisten kokonaislukujen joukossa $\mathbb{Z}_+ = \{1, 2, 3, \ldots\}$ määriteltyä reaaliarvoista funktiota f sanotaan *päättymättömäksi lukujonoksi*. Lukujono on *päättyvä*, jos määrittelyjoukko on $\mathbb{Z}_+$:n äärellinen osajoukko. Lukujonon n. termi $a_n = f(n)$. Lukujonon kuvaajan muodostavat tällöin koordinaatiston pisteet $(n, f(n)) = (n, a_n)$.

Lisäksi Matematiikan taito antaa lisäselvennyksiä. Päättymättömälle lukujonolle $(a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$ käytetään merkintöjä

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots), \quad (a_n) \quad \text{tai} \quad (a_n)_{n=1}^{\infty}.$$

Indeksijoukkona voi myös olla joukon $\mathbb{Z}_+$ sijasta joukko $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ eli luonnollisten lukujen joukko, jolloin jonoa merkitään

$$(a_0, a_1, a_2, \ldots) \quad \text{tai} \quad (a_n)_{n=0}^{\infty}.$$

Jonon ensimmäinen termi on tällöin a_0 ja n. termi on a_{n-1}.

Lisäksi kirjassa sovitaan, että indeksijoukko on $\mathbb{Z}_+$, ellei toisin ilmoiteta. Merkinnän $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ sijaan voidaan käyttään silloin, kun sekaannuksen vaaraa ei ole, merkintää (a_n) [3, s. 80].

4.1.2 Pyramidi

Kirjoissa Pyramidi 9 ja 13 ei ole lukujonolle määritelmää. Kirjassa Pyramidi 9 käsitellään kuitenkin lukujonon peruskäsitteitä määritelmän omaisesti [4, s. 98].

Jonoa, jonka jäsenet ovat reaalilukuja, kutsutaan *lukujonoksi*. Jäseniä sanotaan myös *termeiksi* tai *alkioiksi*. Lukujonossa sama luku voi toistua. Lukujonot ovat samat, kun niissä on samat alkiot samassa järjestyksessä. Lukujono merkitään yleensä sulkuihin ja jäsenet erotetaan toisistaan pilkulla, esimerkiksi $(0,7,0,5,2,0,0,0)$.

Lukujonoa kutsutaan pituutensa mukaan joko *äärelliseksi* eli *päättyväksi*, koska siinä on viimeinen jäsen, tai *äärettömäksi* eli *päättymättömäksi*, koska siinä ei ole viimeistä jäsentä.

Joskus on mahdollista ilmoittaa lukujonon n. termi a_n analyyttisessä muodossa eli indeksin n lausekkeena. Tällöin a_n on lukujonon *yleinen termi*. Lukujono voidaan merkitä tällöin

$$(a_n),\ n = 1,2,3,\dots, \quad (a_n)_{n\in\mathbb{Z}_+} \quad \text{tai} \quad (a_n)_{n=1}^{\infty}.$$

4.1.3 Pitkä matematiikka

Kirja Pitkä matematiikka 9 käsittelee lukujonon peruskäsitteet ensin. Lukujonon lukuja kutsutaan jonon *jäseniksi*. Lukujono kuvaillaan antamalla sääntö, joka määrää yksikäsitteisesti jonon jokaisen jäsenen. Lukujonon jäseniä merkitään alaindeksillä varustetulla kirjaimella. Yleensä indeksit ovat positiivisia kokonaislukuja. Tällöin lukujono on muotoa $a_1,a_2,a_3,\dots$. Indeksi ilmaisee jäsenen järjestysnumeron jonossa. Jonon n. jäsen on a_n. Jonoa $a_1,a_2,a_3,\dots$ voidaan merkitä lyhyesti (a_n) [5, s. 84].

Lukujonossa jokaiseen positiiviseen kokonaislukuun $1,2,3,\dots$ liittyy vastaava lukujonon jäsen $a_1,a_2,a_3,\dots$. Lukujono voidaan siis tulkita funktioksi f, jonka muuttujan arvot ovat positiivisia kokonaislukuja, siis

$$a_1 = f(1),\ a_2 = f(2),\ a_3 = f(3),\dots$$

eli yleisesti

$$a_n = f(n).$$

Tästä päästään kirjan Pitkä matematiikka 9 lukujonon määritelmiin ja huomautukseen [5, s. 85].

Määritelmä 4.2. Lukujono on funktio, jonka muuttujan arvot ovat positiivisia kokonaislukuja.

Määritelmä 4.3. Jos funktiolla f on lauseke, niin jonon (a_n), missä $a_n = f(n)$, jäsenet voidaan laskea lausekkeeseen sijoittamalla. Lauseketta sanotaan *jonon lausekkeeksi*.

Huomautus. Jonon jäsenet voidaan kuvailla myös jollain muulla yksikäsitteisellä tavalla.

4.1.4 Analyysi 1

Kurssin Analyysi 1 lukujonoja käsittelevässä kappaleessa 2 lähdetään liikkeelle lukujonon määritelmällä sekä tarvittavilla lisähuomautuksilla [7, s. 23].

Määritelmä 4.4. *Lukujono* (x_n) on lukujen

$$x_1, x_2, x_3, \ldots$$

muodostama jono, missä $x_n \in \mathbb{R}$ kaikilla $n \in \mathbb{Z}_+$.

Lukujonon määrittelyssä ei ole oleellista, että lukujonon indeksointi alkaa ykkösestä tai, että jono on määritelty kaikilla indekseillä $n \in \mathbb{Z}_+$.

Lukujonoa

$$x_{n_1}, x_{n_2}, x_{n_3} \ldots,$$

missä

$$n_1, n_2, n_3, \ldots \in \mathbb{Z}_+, \quad n_1 < n_2 < n_3 < \ldots,$$

sanotaan lukujonon $x_1, x_2, x_3, \ldots$ *osajonoksi.*

Huomautus. Osajonot ovat lukujonoja.

Huomautus. Lukujono (x_n) on eri asia kuin joukko $\{x_n \mid n \in \mathbb{Z}_+\}$.

Esimerkki 4.1. Olkoon $x_n = (-1)^n$. Nyt lukujono $(x_n) = -1, 1, -1, 1, -1, \ldots$ ja joukko $\{x_n \mid n \in \mathbb{Z}_+\} = \{-1, 1\}$.

4.1.5 Lukujonon määritelmän vertailua

Matematiikan taito keskittyy lukujonon määritelmässä voimakkaasti päättymättömien ja päättyvien lukujonojen esitykseen. Merkinnöissä saatetaan lukijaa hämätä indeksijoukoilla, mihin kuluu indeksi $n = 0$. Ensin kirjassa määritellään, että $\mathbb{Z}_+ = \{1, 2, \ldots\}$, jolloin $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ ja, että $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$, jolloin $(a_n)_{n=0}^{\infty}$. Seuraavaksi sovitaan, että indeksijoukko on $\mathbb{Z}_+$, ellei toisin ilmoiteta. Merkinnän $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ sijasta, kun sekaannuksen vaaraa ei ole, voidaan käyttää merkintää (a_n). Kirjan tekstistä jää epäselväksi onko lukujoukko (a_n) sama kuin $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ vai $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ [3, s. 80]. Toinen erityinen vain kirjoissa Matematiikan taito esiin tuotu seikka on lukujonojen graafinen esitys, mikä korostuu myös määritelmän muodossa.

Huolimatta siitä, että kirjasarjassa Pyramidi ei ole lukujonolle erillistä määritelmää, tavoittaa se peruskäsitteiden selventämisellä määritelmän hengen varsin mallikkaasti. Myös Pyramidi tuo peruskäsitteissään heti esiin päättymättömät ja päättyvät lukujonot.

Kirjasarja Pitkä matematiikka jättää lukujonon määrittelyssä päättymättömät ja päättyvät lukujonot pois. Kirjat etenevät melko sujuvasti peruskäsitteistä määritelmiin. Häiritseväksi nousee määritelmien esittäminen siten, että määritelmän alku ja loppu on erotettu toisistaan selventävällä esimerkillä keskellä määritelmää [5, s. 85].

Lukujonon merkinnöissä on eroja kirjosarjojen välillä. Kirjoissa Matematiikan taito ja Pitkä matematiikka merkintätavat vaihtelevat myös yksittäisen kirjan sisällä. Tämä korostuu etenkin kirjojen esimerkeissä ja harjoitustehtävissä. Kirjassa Pyramidi käytetään samaa sovittua merkintää lukujonoille koko aihealueella. Pääsääntöisesti lukujonosta käytetään lyhyttä merkintää (a_n) kaikissa kirjoissa. Vaihtelevia merkintöjä ei ole korjattu tähän tutkimukseen, vaan on tarkoituksella käytetty kirjojen muotoilua.

Yksikään lukion kirjoista ei huomioi lukujonojen ja joukkojen eroa, vaikka kyseessä on merkittävä eroavaisuus. Kurssin Analyysi 1 materiaalissa tämä on tuotu huomautuksena selkeästi esille. Lukiokirjoissa käytetään termiä indeksijoukko. Tämä voi aiheuttaa lukujonojen sekoittumisen joukkoihin. Oppikirjoissa tulisi korostaa lukujonojen ja joukkojen eroa selkeästi.

4.2 Lukujonon raja-arvo, suppeneminen ja hajaantuminen

Tässä kappaleessa tarkastellaan lukujonon raja-arvon esittämistä, ε-tekniikan hyödyntämistä sekä lukujonon suppenemista ja hajaantumista. Matemaattisesti tarkastellaan kysymystä, miten lukujono (x_n) käyttäytyy, kun n saa yhä suurempia arvoja. Lukion oppikirjoissa lukujonon raja-arvo kuuluu opetussuunnitelman mukaisesti kurssin 13 sisältöön. Poikkeuksen tähän tekee Matematiikan taito.

4.2.1 Matematiikan taito

Kirjassa Matematiikan taito 9 määritellään muista kirjoista poiketen lukujonon raja-arvo [3, s. 115].

Määritelmä 4.5. Lukujono (a_n) *suppenee* kohti *raja-arvoa* a, jos sen termit a_n saadaan mielivaltaisen lähelle lukua a, kun n valitaan riittävän suureksi. Tällöin merkitään

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad \text{tai} \quad a_n \to a, \text{ kun } n \to \infty.$$

Jos lukujono ei suppene, niin se *hajaantuu*.

Matematiikan taito korostaa, että mikäli raja-arvo on olemassa, se on *yksikäsitteinen*. Siis lukujonolla voi olla vain yksi raja-arvo.

Kirjan Matematiikan taito 9 alkupaloina käsitellään funktiota f, joka on määritelty joukossa $\mathbb{R}_+$. Jos funktion raja-arvo $\lim_{x\to\infty} f(x) = a$, niin $f(x)$ saadaan mielivaltaisen lähelle a:ta, kun valitaan x mielivaltaisen suureksi positiiviseksi kokonaisluvuksi eli kun mennään äärettömään. Merkitsemällä $a_n = f(n)$ saadaan siis lukujonon raja-arvon määritelmä palautetuksi funktion f epäolennaisen raja-arvon määritelmään äärettömässä. Tämä on esitetty määritelmänä kirjassa Matematiikan taito 13 seuraavasti [2, s. 81].

Määritelmä 4.6. Lukujono $(a_n) = (a_1, a_2, a_3, \ldots)$ *suppenee* kohti *raja-arvoa* a, jos seuraavat toimenpiteet voidaan aina tehdä.

1. Valitaan mielivaltainen positiiviluku ε.

2. Valitaan sellainen positiivinen kokonaisluku n_0, että kaikki ne termit a_n, joiden indeksi toteuttaa epäyhtälön $n \geq n_0$, toteuttavat myös epäyhtälön $|a_n - a| < \varepsilon$. Toisin sanoen
$$n \geq n_0 \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon.$$

Esimerkki 4.2. Osoita, että lukujonolle $a_n = \frac{n}{n+1}$ on $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$.

Todistus. Olkoon $\varepsilon > 0$. Meidän on nyt näytettävä, että löytyy sellainen positiivinen kokonaisluku n_0, jolle
$$n \geq n_0 \Rightarrow \left|\frac{n}{n+1} - 1\right| < \varepsilon.$$
Tästä saadaan
$$\left|\frac{n}{n+1} - \frac{n+1}{n+1}\right| < \varepsilon,$$
mikä sievenee muotoon
$$\left|\frac{-1}{n+1}\right| < \varepsilon.$$
Koska riittää, että tarkastellaan suuria n:n arvoja ja n on positiivinen, saadaan epäyhtälö muotoon
$$\frac{1}{n+1} < \varepsilon,$$
eli
$$n > \frac{1}{\varepsilon} - 1,$$
mutta nyt ei voida valita $n_0 = \frac{1}{\varepsilon} - 1$, sillä n_0:n täytyy olla kokonaisluku. Käyttämällä kattofunktiota $\lceil z \rceil$ = pienin kokonaisluku, joka on suurempi tai yhtäsuuri kuin z, voidaan valita esimerkiksi
$$n_0 = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil.$$
□

Kirjassa Matematiikan taito 13 käsitellään seuraavaksi rajoitettuja ja monotonisia lukujonoja. Tässä tutkielmassa tarkastellaan kuitenkin seuraavaksi lukujonon hajaantumista [2, s. 87].

Määritelmä 4.7. Lukujonolla (a_n) on *epäolennainen raja-arvo ääretön*, jos seuraavat toimenpiteet voidaan aina tehdä.

1. Valitaan mielivaltainen positiiviluku m.

2. Valitaan sellainen positiivinen kokonaisluku n_0, että kaikki ne termit a_n, joiden indeksi toteuttaa epäyhtälön $n \geq n_0$, toteuttavat myös epäyhtälön $a_n > m$. Toisin sanoen
$$n \geq n_0 \Rightarrow a_n > m.$$

   Tällöin merkitään, että
$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty.$$

Määritelmä 4.8. Lukujonolla (a_n) on *epäolennainen raja-arvo miinus ääretön*, jos seuraavat toimenpiteet voidaan aina tehdä.

1. Valitaan mielivaltainen negatiiviluku m.

2. Valitaan sellainen positiivinen kokonaisluku n_0, että kaikki ne termit a_n, joiden indeksi toteuttaa epäyhtälön $n \geq n_0$, toteuttavat myös epäyhtälön $a_n < m$. Toisin sanoen
$$n \geq n_0 \Rightarrow a_n < m.$$
Tällöin merkitään, että
$$\lim_{n \to \infty} a_n = -\infty.$$

Esimerkki 4.3. Osoita määritelmän 4.6 perusteella, että lukujono
$$(a_n) = (1, -1, 1, -1, \ldots)$$
hajaantuu.

Todistus. Kuten kirjassa sanotaan, on hajaantuminen niin selvä, ettei sitä perusteltaisi, ellei määritelmän mukaista perustelua nimenomaan vaadittaisi. Tehdään vastaoletus, että kyseinen lukujono suppenee. Olkoon sen raja-arvo a. Valitaan $\varepsilon = \frac{1}{2}$. On olemassa sellainen n_0, että
$$n \geq n_0 \Rightarrow |a_n - a| < \frac{1}{2}.$$
Jos n on tällainen pariton luku, niin $(a_n) = 1$. Jos n on parillinen, niin $(a_n) = -1$. Näin ollen toisaalta
$$|1 - a| < \frac{1}{2} \quad \text{eli} \quad \frac{1}{2} < a < \frac{3}{2},$$
mutta toisaalta
$$|-1 - a| < \frac{1}{2} \quad \text{eli} \quad -\frac{3}{2} < a < -\frac{1}{2},$$
mikä sisältää ristiriidan. □

4.2.2 Pyramidi

Kirjassa Pyramidi 13 lähdetään liikkeelle päättymättömistä lukujonoista, joiden termit (a_n) lähestyvät jotain reaalilukua a, kun indeksi n kasvaa rajatta. Tämä esitetään määritelmänä seuraavassa [8, s. 56].

Määritelmä 4.9. Päättymättömän lukujonon $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$ termit lähestyvät lukua $a \in \mathbb{R}$, kun jokaista mielivaltaista positiivista lukua ε kohti löytyy sellainen indeksin arvo N, että kaikilla $n \geq N$ lukujonon termin a_n poikkeama luvusta a on pienempi kuin tämä mielivaltainen positiivinen luku ε eli
$$|a_n - a| < \varepsilon, \text{ kun } n \geq N.$$

Tällöin lukua a sanotaan *lukujonon* (a_n) *raja-arvoksi* ja merkitään

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a.$$

Kun lukujonolla on raja-arvo, sanotaan, että lukujono *suppenee*. Jos lukujono ei suppene, se *hajaantuu*.

Pyramidi määrittelee lukujonon raja-arvon myös seuraavasti, ilman ε-tekniikkaa [8, s. 57].

Määritelmä 4.10. Päättymättömän lukujonon $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$ termit lähestyvät lukua $a \in \mathbb{R}$, kun luvun a sisältämän avoimen välin, a:n *ympäristön*, ulkopuolelle jää vain äärellisen monta lukujonon jäsentä valittiinpa väli miten tahansa. Tällöin tätä lukua a sanotaan lukujonon (a_n) raja-arvoksi ja merkitään $\lim_{n\to\infty} a_n = a$.

Kasvaville ja hajaantuville lukujonoille kirjassa Pyramidi 13 määritellään seuraavasti [8, s. 62].

Määritelmä 4.11. Olkoon lukujono (a_n) kasvava. Jos se saa mielivaltaisen suuria arvoja, niin sanotaan, että lukujono *hajaantuu kohti ääretöntä*. Tätä merkitään $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$.

Tarkastellaan vielä kirjan esimerkkejä.

Esimerkki 4.4. Osoita, että lukujono $(0, 1, 0, 1, 0, 1, \ldots)$ hajaantuu.

Todistus. Olkoon $a \in \mathbb{R}$ mielivaltainen. Tutkitaan, voiko a olla kyseisen lukujonon $(0, 1, 0, 1, \ldots)$ raja-arvo. Avoimen välin $U =]a - 0{,}1\,,\, a + 0{,}1[$ pituus on $0{,}2$. Jos sekä $0 \in U$ että $1 \in U$, niin avoimen välin U pituuden täytyisi olla suurempi kuin $|0 - 1| = 1$. Kuitenkin U:n pituus on vain $0{,}2$, joten joko nollat tai ykköset jäävät lukujonosta U:n ulkopuolelle. Siis äärettömän monta lukujonon termiä jää U:n ulkopuolelle. Siis mikään reaaliluku a ei voi olla lukujonon raja-arvo, joten lukujono hajaantuu. □

Esimerkki 4.5. Olkoon $a_n = \frac{n}{n+3}$, $n \in \mathbb{N}$. Tiedetään, että $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$, joten lukujono (a_n) suppenee. Kuinka monennesta termistä alkaen lukujonon a_n termit poikkeavat lukujonon raja-arvosta vähemmän kuin $0{,}01$?

Termin a_n ja raja-arvon 1 poikkeama on

$$\left|\frac{n}{n+3} - 1\right|.$$

Saadaan epäyhtälö

$$\left|\frac{n}{n+3} - 1\right| < 0{,}01,$$

mikä sievenee muotoon

$$\left|\frac{-3}{n+3}\right| < 0{,}01.$$

Poistamalla itseisarvot saadaan

$$\frac{3}{n+3} < 0{,}01,$$

jolloin

$$3 < 0{,}01 \cdot (n+3).$$

Nyt voidaan ratkaista n eli

$$n > 297.$$

Eli tehtävän vastaus on termistä 299 alkaen (huomaa, että $n \in \mathbb{N}$).

4.2.3 Pitkä matematiikka

Kirjassa Pitkä matematiikka 13 lukujonon raja-arvon määritelmään johdatellaan lyhyiden esimerkkien kautta, kuten kysymyksellä mitä lukua lukujonon $a_n = \frac{1}{n}$ jäsenet lähenevät, kun n kasvaa. Tarkemmin raja-arvo määritellään seuraavasti [6, s. 137].

Määritelmä 4.12. Lukujonolla (a_n) on *raja-arvo* a, jos arvon n kasvaessa lukujonon jäsenet lähestyvät lukua a. Lähestymisen tulee olla sellaista, että kun n on tarpeeksi suuri, lukujonon jäsenet ovat niin lähellä lukua a kuin suinkin halutaan. Jos lukujonolla (a_n) on raja-arvo a, merkitään

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a$$

tai

$$a_n \to a, \text{ kun } n \to \infty.$$

Määritelmä 4.13. Jos lukujonolla on raja-arvo, sanotaan, että lukujono *suppenee*. Jos lukujonolla ei ole raja-arvoa, jono *hajaantuu* [6, s. 138].

Kirjan Pitkä matematiikka 13 esimerkeissä hyödynnetään erityisesti seuraavaa aputulosta [6, s. 138]. Olkoon lukujono

$$(a_n) = \frac{1}{n^p}.$$

Jos p on positiivinen kokonaisluku, niin $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^p} = 0$.

Esimerkki 4.6. Osoita, että $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n} = 0$.

Todistus. Lukujono suppenee kohti nollaa, jos ja vain jos jäsenten itseisarvojen jono suppenee kohti nollaa. Kaikilla muuttujan arvoilla on $|\sin x| \leq 1$. Siis kaikilla arvoilla n on

$$0 \leq \left|\frac{\sin n}{n}\right| = \frac{|\sin n|}{n} \leq \frac{1}{n}.$$

Koska $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, niin myös $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{\sin n}{n}\right| = 0$. Siis $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n} = 0$. □

4.2.4 Analyysi 1

Analyysi 1 etenee heti lukujonon määritelmän jälkeen lukujonon raja-arvoon. Seuraavassa oleellisimmat lauseet, määritelmät ja huomautukset [7, s. 24].

Määritelmä 4.14. Lukujonolla (x_n) on *raja-arvo* $x \in \mathbb{R}$, jos jokaista lukua $\varepsilon > 0$ kohti on olemassa sellainen luku $n_\varepsilon \in \mathbb{Z}_+$, että

$$|x_n - x| < \varepsilon$$

aina, kun $n > n_\varepsilon$. Tällöin sanotaan, että lukujono (x_n) *suppenee* kohti reaalilukua x, ja merkitään

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x.$$

Jos lukujono (x_n) ei suppene kohti mitään reaalilukua x, sanotaan, että jono (x_n) *hajaantuu*.

Huomautus. Vaihtoehtoinen merkintätapa lukujonon suppenemiselle on esimerkiksi

$$x_n \to x, \text{ kun } n \to \infty$$

ja

$$\lim x_n = x, \text{ kun on selvää, että } n \to \infty.$$

Huomautus. Lukujonon raja-arvon määritelmä voidaan ilmoittaa myös muodossa

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0 : \exists n_\varepsilon \in \mathbb{Z}_+ : |x_n - x| < \varepsilon \text{ aina, kun } n > n_\varepsilon.$$

Huomautus. Lukujonolla (x_n) on raja-arvo x täsmälleen silloin, kun jostakin indeksin n arvosta n_ε lähtien kaikki jonon termit x_n kuuluvat raja-arvon x ympäristöön $\mathrm{U}_\varepsilon(x)$ eli siis välille $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[$. Tällöin lukujonon raja-arvo voidaan ilmoittaa muodossa

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0 : \exists n_\varepsilon \in \mathbb{Z}_+ : x_n \in \mathrm{U}_\varepsilon(x) \text{ aina, kun } n > n_\varepsilon.$$

Esimerkki 4.7. Olkoon $x_n = a$ $(a \in \mathbb{R})$ kaikilla $n \in \mathbb{Z}_+$. Osoita, että

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a.$$

Todistus. Valitaan ensin mielivaltainen $\varepsilon > 0$. Tällöin

$$|x_n - a| = |a - a| = 0 < \varepsilon \quad \text{kaikilla } n \in \mathbb{Z}_+.$$

Siis lukujonon raja-arvon määritelmän 4.14 nojalla $\lim_{n\to\infty} x_n = a$. □

Lause 4.1. *Suppenevan lukujonon* (x_n) *raja-arvo on yksikäsitteinen* [7, s. 28].

Todistus. Tehdään vastaoletus, että lukujonolla (x_n) on raja-arvot x ja y siten, että $x \neq y$. Tällöin lukujonon raja-arvon määritelmän nojalla

$$\begin{aligned} \exists n_1 \in \mathbb{Z}_+ :\ |x_n - x| < \frac{1}{2}|x-y| \ \ \forall n > n_1, \\ \exists n_2 \in \mathbb{Z}_+ :\ |x_n - y| < \frac{1}{2}|x-y| \ \ \forall n > n_2. \end{aligned}$$

Olkoon nyt $n > \max\{n_1, n_2\}$. Tällöin kolmioepäyhtälöstä saadaan

$$\begin{aligned} |x-y| &= |(x-x_n) + (x_n - y)| \\ &\leq |x - x_n| + |x_n - y| \\ &< \frac{1}{2}|x-y| + \frac{1}{2}|x-y| \\ &= |x-y|, \end{aligned}$$

missä on ristiriita. □

Kurssin Analyysi 1 materiaalissa todetaan, että suppenevan lukujonon jokainen osajono suppenee kohti samaa raja-arvoa kuin alkuperäinen lukujono, mikä esitetään seuraavassa lauseessa [7, s. 28].

Lause 4.2. *Jos* $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ *ja* (x_{n_k}) *on lukujonon* (x_n) *osajono, niin*

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x.$$

Todistus. Todistus sivuutetaan, ks. [7, s. 28]. □

Lauseen 4.2 seurauksena saadaan tulos, jota voidaan käyttää lukujonon hajaantumisen osoittamiseen.

Seuraus 4.3. *Jos lukujonolla* (x_n) *on kaksi osajonoa, jotka suppenevat kohti eri raja-arvoa (tai osajono, joka hajaantuu), niin* (x_n) *hajaantuu.*

Esimerkki 4.8. Olkoon lukujono (x_n)

$$x_n = (-1)^n \frac{n}{n+1} \quad (n \in \mathbb{Z}_+).$$

Osoita lukujonon suppeneminen tai hajaantuminen.

Todistus. Tarkastellaan tämän lukujonon (x_n) kahta osajonoa. Olkoon $k \in \mathbb{Z}_+$. Tällöin

$$x_{2k} = \frac{2k}{2k+1} \to 1, \qquad \text{kun } k \to \infty, \text{ ja}$$

$$x_{2k-1} = -\frac{2k-1}{2k} \to -1, \ \text{kun } k \to \infty.$$

Raja-arvojen täsmällinen perustelu on jätetty harjoitustehtäväksi. □

4.2.5 Raja-arvon käsittelyn vertailua

Käsiteltäessä lukujonon raja-arvoa siirrytään lukion kirjasarjoissa syventävien, vapaaehtoisten kurssien puolelle, kurssiin 13. Poikkeuksen tässä tekee Matematiikan taito, missä lukujonon raja-arvo määritellään ensimmäisen kerran jo kirjassa 9. On havaittavissa matemaattisen esittämisen tarkentuminen määritelmissä verrattaessa syventävien kurssien sisältöä peruskursseihin. Valituista esimerkeistä voidaan nähdä selkeää yhteneväisyyttä lukion haastavampien tehtävien ja kurssin Analyysi 1 tehtävien välillä. Raja-arvon käsite on esitetty kaikissa kurssien 13 kirjoissa. Kirjasarjojen välisiksi eroiksi nouseekin erityisesti raja-arvon tarkka määrittely ε-tekniikalla ja sen käyttö. Tämä ε-tekniikka aiheuttaa monelle haasteita vielä yliopistomatematiikassa.

Tutkittavana olevista kirjasarjoista Matematiikan taito määrittää raja-arvon erityisesti ε-tekniikkaa käyttäen. Lukijalle ε-tekniikkaa on koetettu avata hyödyntäen kuvaajia, eikä askel yliopistomatematiikkaan pitäisi olla siltä osin kovin suuri. Myös ε-tekniikan käytöstä on esitetty esimerkkejä. Valitettavasti kirjassa Matematiikan taito 13 lukujonon hajaantumista käsittelevässä kappaleessa ei itse termi hajaantuminen ole päässyt mukaan määritelmään, vaan on jäänyt muun tekstin joukkoon määritelmän ulkopuolelle [2, s. 87].

Kirjassa Pyramidi 13 raja-arvon määritelmä ε-tekniikkaa hyödyntäen jää lyhyemmäksi kuin Matematiikan taidossa, kuten määritelmästä 4.9 voidaan havaita. Kirjan esimerkeissä ε-tekniikan käyttöön ei kuitenkaan tarjota yhtään esimerkkiä, vaan kuten esimerkissä 4.4 hyödynnetään kirjan antamaa toista, ilman ε-tekniikkaa olevaa, lukujonojen raja-arvon määritelmää 4.10. Tämä heikentää kirjan käyttöä itsenäiseen opiskeluun. Myös kirjan harjoitustehtävät on suunniteltu laskettaviksi ilman ε-tekniikan käyttöä.

Pitkä matematiikka ei määrittele raja-arvoa ε-tekniikkaa käyttäen ollenkaan. On muistettava, että lukion opetussuunnitelma ei sitä vaadi. Kirjassa Pitkä matematiikka pyritään lyhyeen ja ehkä turhankin ytimekkääseen esitykseen erityisesti määritelmissä. Yllättävän monessa esimerkissä ja harjoitustehtävässä hyödynnetään yksinomaan esitettyä aputulosta $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^p} = 0$.

Kirjassa Matematiikan taito 9 tuodaan esille suppenevan lukujonon raja-arvon yksikäsitteisyys. Muissa lukiokirjoissa tätä ei ole lukujonojen yhteydessä lähdetty käsittelemään. Yksikäsitteisyys on kuitenkin lukiossa käytetty ja tiedossa oleva asia. Lukujonojen osajonot ja niiden raja-arvot, suppeneminen ja hajaantuminen on myös jätetty lukiokurssien ulkopuolelle, vaikka kyseessä olisi melko pieni lisäys sisältöön. Seurauksen 4.3, lukujonon kahden osajonon suppeneminen eri raja-arvoihin, soveltamiseen sopivia harjoitustehtäviä on lukion kurssikirjoissa. Osajonojen ja seurauksen 4.3 lisääminen lukion matematiikan sisältöön olisi luontevaa ja suhteellisen yksinkertaista.

Kurssin Analyysi 1 todistuksissa tulee esille kolmioepäyhtälön käyttö. Kyseinen tekniikka on yliopistomatematiikassa paljolti käytetty. Lukiossa kolmioepäyhtälö esitetään liian suppeasti ja pintapuolisesti pohjustamaan yliopisto-opiskelua.

4.3 Rajoitetut ja monotoniset lukujonot

Tässä kappaleessa tarkastellaan rajoitettuja ja monotonisia lukujonoja.

4.3.1 Matematiikan taito

Matematiikan taito määrittelee rajoitetut ja monotoniset jonot kurssin 9 kirjassa ja tarjoaa niille kertauksen kirjassa 13. Kuten aiemmin, alkuun tarjotaan alkupala, jolla tulevaa määritelmää pyritään avaamaan lukijalle [3, s. 86].

Esimerkki 4.9. Lukujonolle

$$a_n = \frac{n+1}{n}$$

on voimassa kaikilla arvoilla n

$$a_n = \frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n}.$$

Koska termi $\frac{1}{n}$ on aina positiivinen, niin jokainen termi toteuttaa ehdon $a_n > 1$. Siksi sanotaan, että lukujono (a_n) on *alhaalta rajoitettu*. Jonon eräs *alaraja* on $m = 1$. Alarajaksi voidaan valita mikä tahansa luku, joka on ≤ 1.

Koska termin $\frac{1}{n}$ suurin arvo on 1 (kun $n = 1$), niin $a_n \leq 1+1 = 2$. Siksi sanotaan, että lukujono (a_n) on *ylhäältä rajoitettu*. Jonon eräs *yläraja* on $M = 2$. Ylärajaksi voidaan valita mikä tahansa luku, joka on ≥ 2.

Koska (a_n) on alhaalta ja ylhäältä rajoitettu, $1 < a_n \leq 2$, sanotaan, että (a_n) on *rajoitettu*.

Rajoitetun lukujonon määritelmä Matematiikan taidossa on seuraava [3, s. 86].

Määritelmä 4.15. Lukujono (a_n) on

- *ylhäältä rajoitettu*, jos on olemassa sellainen luku M, että kaikilla arvoilla n on $a_n \leq M$,

- *alhaalta rajoitettu*, jos on olemassa sellainen luku m, että kaikilla arvoilla n on $a_n \geq m$,

- *rajoitettu*, jos se on sekä ylhäältä että alhaalta rajoitettu.

Jonon *yläraja* on M ja sen *alaraja* on m.

Matematiikan taito 13 on sisällyttänyt seuraavan määritelmän harjoitustehtävään 142b [2, s. 90].

Esimerkki 4.10. Todista, että lukujono (a_n) on rajoitettu, jos ja vain jos $(|a_n|)$ on rajoitettu.

Todistus. Kirjassa annetaan todistus vain toiseen suuntaan. Jos jono $(|a_n|)$ on rajoitettu, niin on olemassa sellainen M, että kaikilla arvoilla n on $|a_n| \leq M$. Tällöin $-M \leq a_n \leq M$, joten jono (a_n) on rajoitettu. Todistetaan toinenkin suunta. Jos jono (a_n) on rajoitettu, niin on olemassa sellainen yläraja M', että kaikilla arvoilla n on $a_n \leq M'$, ja sellainen alaraja m', että kaikilla arvoilla n on $a_n \geq m'$. Tällöin $|a_n| \leq M$, kun $M = \max\{|M'|, |m'|\}$, joten jono $(|a_n|)$ on rajoitettu. □

Huomautus. Suppeneva lukujono on rajoitettu, mutta rajoitettu lukujono ei ole aina suppeneva.

Tämän huomautuksen todistuksen Matematiikan taito esittää kahdessa osassa. Rajoitettu, mutta hajaantuva lukujono on tarkasteltu jo esimerkissä 4.3. Kirjan harjoitustehtävässä 145 todistetaan suppenevan lukujonon rajoittuneisuus [2, s. 90].

Esimerkki 4.11. Todista, että suppeneva lukujono (a_n) on rajoitettu.

Todistus. Todistus on annettu kirjan harjoitustehtävien ratkaisuissa [2, s. 176]. Olkoon $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. Valitaan raja-arvon määritelmässä $\varepsilon = 1$. Eräästä indeksin n arvosta n_0 alkaen on

$$|a_n - a| < 1.$$

Kolmioepäyhtälön perusteella

$$\begin{aligned} |a_n| &= |a + (a_n - a)| \\ &\leq |a| + |a_n - a| \\ &< |a| + 1 \qquad\qquad \forall n > n_0. \end{aligned}$$

Näin ollen kaikilla indeksin n arvoilla

$$|a_n| \leq \max\{|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_{n_0-1}|, |a| + 1\}.$$

□

Lukujonojen monotonisuus määritellään kirjassa Matematiikan taito 9 seuraavasti [3, s. 87].

Määritelmä 4.16. Lukujono (a_n) on

- *aidosti kasvava*, jos kaikilla arvoilla n on $a_n < a_{n+1}$,
- *aidosti vähenevä*, jos kaikilla arvoilla n on $a_n > a_{n+1}$,
- *kasvava*, jos kaikilla arvoilla n on $a_n \leq a_{n+1}$,
- *vähenevä*, jos kaikilla arvoilla n on $a_n \geq a_{n+1}$.

Lukujono on *monotoninen*, jos se on joko kasvava tai vähenevä, ja *aidosti monotoninen*, jos se on joko aidosti kasvava tai aidosti vähenevä.

Kirja Matematiikan taito 9 esittää monotonisille jonoille seuraavan tärkeän ominaisuuden suppenevaisuudesta [3, s. 120].

Lause 4.4. *Jos lukujono on kasvava ja ylhäältä rajoitettu, niin se suppenee. Jos lukujono on vähenevä ja alhaalta rajoitettu, niin se suppenee.*

Todistus. Lauseelle ei esitetä todistusta, joten se sivuutetaan. □

4.3.2 Pyramidi

Pyramidi käsittelee rajoitetut ja monotoniset lukujonot kirjassa 9. Kirjassa 13 niihin ei enää palata. Aluksi lukijalle esitetään päättyvästä lukujonosta $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)$ seuraavia ominaisuuksia [4, s. 104].

- Päättyvän lukujonon ensimmäinen termi on a_1 ja viimeinen termi a_n. Termejä on n kappaletta.
- Päättyvällä lukujonolla on aina pienin arvo m ja suurin arvo M.
- Päättyvä lukujono on *rajoitettu* eli sen jäsenet sisältyvät johonkin suljettuun väliin $[a, b]$. Väliksi voidaan valita $[m, M]$.
- Päättyvän lukujonon termit voidaan laskea yhteen, jolloin saadaan summa

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n.$$

Vastaavasti esitetään päättymättömästä lukujonosta $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$ ominaisuuksia [4, s. 105].

- Päättymättömän lukujonon ensimmäinen termi on a_1 ja viimeistä termiä ei ole.
- Päättymätön lukujono voi olla rajoitettu tai *rajoittamaton*.
- Vaikka päättymätön lukujono olisi rajoitettu, sillä ei välttämättä ole pienintä tai suurinta arvoa.
- Päättymättömän lukujonon termien summaa ei voida laskea, koska yhteenlasku ei koskaan päättyisi.

Nämä lukujonon ominaisuudet esitetään seuraavassa määritelmässä [4, s. 105].

Määritelmä 4.17. Lukujono on *ylhäältä rajoitettu*, kun on olemassa sellainen luku $T \in \mathbb{R}$, että jokainen lukujonon jäsen on korkeintaan T. Lukujono on *alhaalta rajoitettu*, kun on olemassa sellainen luku $t \in \mathbb{R}$, että jokainen lukujonon jäsen on vähintään t. Lukujono on *rajoitettu*, kun se on alhaalta ja ylhäältä rajoitettu. Tällöin lukujonon jäsenet sisältyvät esimerkiksi suljettuun väliin $[t, T]$.

Kirjassa Pyramidi 9 tarkennetaan lukujonon määritelmää kahdella huomautuksella.

Huomautus. Päättymätön lukujono $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$ voidaan ymmärtää funktioksi f, jonka muuttuja on lukujonon indeksi n ja arvo

$$f(n) = a_n.$$

Yleensä $n \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ tai $n \in \mathbb{Z}_+ = \{1, 2, 3, \ldots\}$.

Huomautus. Myös päättyvä lukujono $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k)$ voidaan ymmärtää funktioksi $f(n) = a_n$, $n = 1, 2, 3, \ldots, k$.

Kirjassa Pyramidi 9 määritellään monotoninen lukujono seuraavasti [4, s. 107].

Määritelmä 4.18. Päättymätön lukujono (a_n), $n = 1, 2, 3, \ldots$, on

- *aidosti kasvava*, kun $a_n < a_{n+1}$ kaikilla $n = 1, 2, 3, \ldots$,
- *kasvava*, kun $a_n \leq a_{n+1}$ kaikilla $n = 1, 2, 3, \ldots$,
- *aidosti vähenevä*, kun $a_n > a_{n+1}$ kaikilla $n = 1, 2, 3, \ldots$,
- *vähenevä*, kun $a_n \geq a_{n+1}$ kaikilla $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Lukujono on *(aidosti) monotoninen*, kun se on (aidosti) kasvava tai (aidosti) vähenevä.

Tarkastellaan Pyramidin esimerkkiä monotonisista funktioista [4, s. 110].

Esimerkki 4.12. Osoita, että lukujono (a_n), kun

$$a_n = \frac{3^n}{n!}, \quad n = 3, 4, 5, \ldots,$$

on aidosti vähenevä.

Todistus. Lukujono on positiiviterminen, joten riittää osoittaa, että

$$a_n > a_{n+1} \text{ eli } \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \text{ kaikilla } n = 3, 4, 5, \ldots.$$

Sijoittamalla saadaan

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3^{n+1}}{(n+1)!} : \frac{3^n}{n!} = \frac{3}{n+1}.$$

Nyt

$$\frac{3}{n+1} < 1 \quad \text{kaikilla } n = 3, 4, 5, \ldots.$$

□

4.3.3 Pitkä matematiikka

Kirjasarjan Pitkä matematiikka rajoitettujen ja monotonisten lukujonojen käsittely on hajautettu kirjoihin 9 ja 13. Lukujonojen rajoittuneisuus käsitellään kirjan Pitkä matematiikka 13 laskuharjoitustehtävässä 262 [6, s. 149].

Esimerkki 4.13. Lukujono on *rajoitettu*, jos se on sekä yläpuolelta että alapuolelta rajoitettu eli jos on olemassa sellaiset luvut M ja m, että $a_n < M$ kaikilla n (yläpuolelta rajoitettu) ja $a_n > m$ kaikilla n (alapuolelta rajoitettu). Pitävätkö seuraavat väitteet paikkaansa? Perustele todeksi tai osoita vastaesimerkillä vääräksi.

(a) Jos jono (a_n) on rajoitettu, se suppenee.

(b) Jos jono (a_n) suppenee, se on rajoitettu.

(c) Jos jono (a_n) ei ole rajoitettu, se hajaantuu.

Tarkastellaan esimerkin ratkaisua [6, s. 235].

(a) Ei pidä paikkaansa. Esimerkiksi jono $a_n = (-1)^n$ on rajoitettu jono, joka ei suppene.

(b) Pitää paikkaansa. Jos $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, niin on olemassa sellainen positiivinen kokonaisluku n_1, että $|a_n - a| < 1$, kun $n \geq n_1$ eli $a - 1 < a_n < a + 1$, kun $n \geq n_1$. Ylärajaksi M kelpaa mikä tahansa luku, joka on suurempi kuin äärellisen lukujoukon $a+1, a_1, a_2, \ldots, a_{n_1-1}$ suurin luku. Alarajaksi m kelpaa mikä tahansa luku, joka on pienempi kuin äärellisen lukujoukon $a-1, a_1, a_2, \ldots, a_{n_1-1}$ pienin luku.

(c) Pitää paikkaansa. Jos jono suppenisi, niin b-kohdan nojalla se olisi rajoitettu.

Lukujonojen aidolle monotonisuudelle on kirjassa Pitkä matematiikka 9 seuraava määritelmä [5, s. 89].

Määritelmä 4.19. Lukujono (a_n) on *aidosti kasvava*, jos jonon seuraava jäsen on aina edellistä suurempi eli

$$a_1 < a_2 < a_3 < \ldots.$$

Lukujono (a_n) on *aidosti vähenevä*, jos jonon seuraava jäsen on aina edellistä pienempi eli

$$a_1 > a_2 > a_3 > \ldots.$$

Jos jono on aidosti kasvava tai aidosti vähenevä, se on *aidosti monotoninen*.

Määritelmästä on löydettävissä viittaus sivun alareunaan, jossa on seuraava lisähuomautus [5, s. 89].

Huomautus. Lukujono (a_n) on *kasvava*, jos $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \ldots$, ja lukujono on *vähenevä*, jos $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \ldots$. Jos jono on kasvava tai vähenevä, se on *monotoninen*.

4.3.4 Analyysi 1

Kurssin Analyysi 1 materiaalissa käsitellään rajoitettua lukujonoa seuraavin lausein, määritelmin ja huomautuksin [7, s. 29-31].

Määritelmä 4.20. Jos joukko $\{x_n\}$ on rajoitettu, sanotaan, että myös vastaava lukujono (x_n) on *rajoitettu*. Edelleen, jos $\{x_n\}$ on ylhäältä rajoitettu, niin jono (x_n) on *ylhäältä rajoitettu*, ja jos $\{x_n\}$ on alhaalta rajoitettu, niin jono (x_n) on *alhaalta rajoitettu*.

Huomautus. Lukujono (x_n) on

- ylhäältä rajoitettu, jos $\exists M \in \mathbb{R}$: $\forall n \in \mathbb{Z}_+$: $x_n \leq M$,
- alhaalta rajoitettu, jos $\exists m \in \mathbb{R}$: $\forall n \in \mathbb{Z}_+$: $x_n \geq m$,
- rajoitettu, jos $\exists M \in \mathbb{R}$: $\forall n \in \mathbb{Z}_+$: $|x_n| \leq M$.

Lause 4.5. *Jos* $\lim\limits_{x\to\infty} x_n = x$*, niin lukujono* (x_n) *on rajoitettu.*

Todistus. Jos $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, niin lukujonon raja-arvon määritelmän nojalla on olemassa sellainen $n_1 \in \mathbb{Z}_+$, että $|x_n - x| < 1$ kaikilla $n > n_1$. Tällöin

$$\begin{aligned} |x_n| &= |x + (x_n - x)| \\ &\leq |x| + |x_n - x| \\ &< |x| + 1 \qquad\qquad \forall n > n_1. \end{aligned}$$

Merkitään

$$M = \max\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_{n_1}|, |x| + 1\}.$$

Tällöin $|x_n| \leq M$ kaikilla $n \in \mathbb{Z}_+$, joten lukujono (x_n) on rajoitettu. □

Huomautus. Lause 4.5 ei ole kääntäen voimassa. Tämä voidaan nähdä esimerkistä 4.8.

Lause 4.6. *Olkoon* $\lim\limits_{x\to\infty} x_n = x$.

- *Jos* $\exists n_0 \in \mathbb{Z}_+$: $\forall n > n_0$: $x_n \leq M$*, niin* $x \leq M$.
- *Jos* $\exists n_0 \in \mathbb{Z}_+$: $\forall n > n_0$: $x_n \geq m$*, niin* $x \geq m$.

Todistus. Todistus sivuutetaan, ks. [7, s. 30]. □

Huomautus. Vaikka $\lim_{x\to\infty} x_n = x$ ja $x_n < M$ kaikilla $n \in \mathbb{Z}_+$, niin silti saattaa olla $x = M$. Vastaavasti, vaikka $\lim_{x\to\infty} x_n = x$ ja $x_n > m$ kaikilla $n \in \mathbb{Z}_+$, niin silti saattaa olla $x = m$.

Lause 4.7. *Jos* $\lim\limits_{x\to\infty} x_n = x \neq 0$*, niin on olemassa sellainen* $n_0 \in \mathbb{Z}_+$*, että*

$$|x_n| > \frac{|x|}{2}$$

kaikilla $n > n_0$.

Todistus. Jos $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ ja $x \neq 0$, niin lukujonon raja-arvon määritelmän nojalla on olemassa sellainen $n_0 \in \mathbb{Z}_+$, että

$$|x_n - x| < \frac{|x|}{2} \quad \forall n > n_0.$$

Tällöin

$$\begin{aligned} |x| &= |x_n - (x_n - x)| \\ &\leq |x_n| + |x_n - x| \\ &< |x_n| + \frac{|x|}{2} \qquad \forall n > n_0, \end{aligned}$$

joten

$$|x_n| > |x| - \frac{|x|}{2} = \frac{|x|}{2} \quad \forall n > n_0.$$

□

Lause 4.8. *Jos* $\lim_{x\to\infty} x_n = x > 0$*, niin on olemassa sellainen* $n_0 \in \mathbb{Z}_+$*, että* $x_n > 0$ *kaikilla* $n > n_0$*.*

Todistus. Lauseen todistus on jätetty harjoitustehtäväksi ja sivuutetaan. □

Kurssin Analyysi 1 materiaalissa käsitellään seuraavaksi lukujonojen laskusääntöjä, joiden jälkeen käsitellään monotoniset lukujonot [7, s. 41]. Materiaalissa todetaan, että seuraavan tyyppisiä lukujonoja $x_1, x_2, x_3, \ldots$ sanotaan *monotonisiksi*:

– *kasvava* lukujono, jolle $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \ldots$,

– *vähenevä* lukujono, jolle $x_1 \geq x_2 \geq x_3 \geq \ldots$,

– *aidosti kasvava* lukujono, jolle $x_1 < x_2 < x_3 < \ldots$,

– *aidosti vähenevä* lukujono, jolle $x_1 > x_2 > x_3 > \ldots$.

Huomautus. Koska $x_n \leq x_{n+1} \Leftrightarrow x_{n+1} - x_n \geq 0$, niin lukujonon kasvavuus voidaan usein osoittaa tutkimalla kahden peräkkäisen termin erotusta. Myös osamäärää voidaan tutkia. Jos esimerkiksi termit ovat positiivisia, niin

$$x_n \leq x_{n+1} \Leftrightarrow \frac{x_{n+1}}{x_n} \geq 1.$$

Seuraavaa lausetta voidaan pitää kurssin Analyysi 1 monotonisten jonojen peruslauseena [7, s. 41].

Lause 4.9. *Jos lukujono* (x_n) *on kasvava ja ylhäältä rajoitettu, niin jono* (x_n) *suppenee.*

Todistus. Todistus sivuutetaan, ks. [7, s. 41]. □

Lause 4.10. *Jos lukujono* (x_n) *on vähenevä ja alhaalta rajoitettu, niin jono* (x_n) *suppenee.*

Todistus. Todistus jätetty harjoitustehtäväksi ja sivuutetaan. □

Esimerkki 4.14. Olkoon

$$x_n = 1 - \frac{1}{n} \quad (n \in \mathbb{Z}_+).$$

Osoita, että lukujono (x_n) suppenee.

Todistus. Osoitetaan tämä kahdessa vaiheessa

1. Lukujono (x_n) on kasvava, sillä

$$\begin{aligned} x_{n+1} - x_n &= \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) - \left(1 - \frac{1}{n}\right) \\ &= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \\ &= \frac{1}{n(n+1)} > 0 \end{aligned}$$

   kaikilla $n \in \mathbb{Z}_+$.

2. Lukujono (x_n) on ylhäältä rajoitettu, sillä $1 - \frac{1}{n} < 1$ kaikilla $n \in \mathbb{Z}_+$.

Kohdista 1 ja 2 seuraa monotonisten jonojen peruslauseen 4.9 nojalla, että lukujono (x_n) suppenee. □

Kurssilla Analyysi 1 esitetään myös seuraava Bolzano-Weierstassin lause lukujonoille [7, s. 52].

Lause 4.11. *Rajoitetulla lukujonolla on suppeneva osajono.*

Todistus. Todistus sivuutetaan, ks. [7, s. 52]. □

Kurssin Analyysi 1 rajoitettujen ja monotonisten lukujonojen sisältöön kuuluu myös eksponenttifunktion e^x raja-arvon lause, ks. [7, s. 45] ja useampia aiheeseen kuuluvia huomautuksia. Näitä ei kuitenkaan ole otettu mukaan tähän tutkielmaan, koska ne menevät selvästi yli lukiotason ja siten tämän tutkielman aihealueen ulkopuolelle.

4.3.5 Rajoitettujen ja monotonisten lukujonojen vertailua

Matematiikan taito ja Pyramidi käsittelevät rajoitetut ja monotoniset lukujonot kirjassa 9. Ei ehkä ole enää yllättävää havaita, että teoreettisimman ja kattavimman kokoonpanon muodostaa Matematiikan taito 9. Samalla sen sisältö on kuitenkin kaikkein hajanaisin ja kaipaisi selkeämpää järjestystä. Pyramidi etenee aiheen läpi selkeästi ja johdonmukaisesti. Matematiikan taito 13 sisältää eniten kertausta ja viittauksia kirjaan 9 rajoitetuista ja monotonisista lukujonoista.

Kirjasarjan Matematiikan taito matematiikan laajuus korostuu suppenevan lukujonon rajoittuneisuuden todistuksessa esimerkissä 4.11. Todistuksessa on käytetty sekä ε-tekniikkaa että kolmioepäyhtälöä, joita kumpaakaan ei lukiossa yleensä käsitellä. Todistus on vastaava kuin kurssin Analyysi 1 lauseen 4.5 todistus, mutta kirjassa Matematiikan taito on tilanpuutteen takia vastausta lyhennetty, mikä tekee vastauksesta vaikeaselkoisen. Tähän tutkielmaan on kirjan Matematiikan taito todistuksesta puuttuvat kohdat lisätty.

Pitkä matematiikka ei juuri käsittele rajoitettuja ja monotonisia lukujonoja. Rajoittuneisuuden käsittely on jätetty yksinomaan kirjan 13 harjoitustehtävän varaan. Ainoastaan aito monotonisuus on haluttu tuoda selkeästi esiin, monotonisuuden jäädessä pelkäksi sivun alareunan lisätiedoksi.

Analyysi 1 vie selvästi rajoittuneisuuden käsittelyn pidemmälle kuten yliopistokurssilta kuuluu odottaakin. Tämän mahdollistaa jo aiemmin kurssilla Analyysi 1 esitetty täydellisyysaksiooma. Monotonisten ja rajoitettujen lukujonojen välille on löydetty useampikin yhteys. Tässä kohtaa ero etenkin kirjasarjan Pitkän matematiikka hyvin suppeaan aiheen käsittelyyn kasvaa, eikä kirjasarjan Pitkä matematiikka tarjoama pohja ole enää lähelläkään samaa tasoa kuin kirjojen Matematiikan taito tai Pyramidi.

Kirja Matematiikan taito 9 on hyvä esimerkki lukujonon käsittelyjärjestyksen vaikutuksesta. Matematiikan taito jättää raja-arvon käsittelyn melko loppupuolelle lukujonojen esityksessä, vasta monotonisten ja rajoitettujen lukujonojen jälkeen. Tästä aiheutuu selvästi kirjan esityksen etenemiselle epäloogisuutta. Esimerkki tästä on monotonisten jonojen suppeneminen, mikä esitetään vasta raja-arvon käsittelyn jälkeen, eikä samalla kertaa monotonisten lukujonojen yhteydessä, mikä olisi selkeämpää. Toisaalta kirjan kertausosiossa on aiheiden järjestys aivan toinen. Lukujonon raja-arvo esitetään ennen rajoitettuja ja monotonisia lukujonoja ja kokonaisuus on selvästi loogisempi [3, s. 135].

4.4 Lukujonon raja-arvon laskusääntöjä

Seuraavassa tarkastellaan raja-arvon laskemiseen liittyviä laskusääntöjä. On oleellista huomioida, että lukujonon raja-arvo noudattaa samoja laskusääntöjä kuin funktion raja-arvo.

4.4.1 Matematiikan taito

Kirjassa Matematiikan taito 9 on esitetty seuraava lause raja-arvon laskusäännöille [3, s. 117].

Lause 4.12. *Jos* $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ *ja* $\lim_{n\to\infty} b_n = b$*, niin*

$$\lim_{n\to\infty} ca_n = c\lim_{n\to\infty} a_n = ca \quad \textit{(vakiotekijän siirto)},$$

$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n = a + b \quad \textit{(summan raja-arvo)},$$

$$\lim_{n\to\infty} (a_n b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n = ab \quad \textit{(tulon raja-arvo)}.$$

Jos lisäksi $b \neq 0$ *ja* $b_n \neq 0$ *kaikilla* $n \in \mathbb{N}$*, niin*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n} = \frac{a}{b} \quad \textit{(osamäärän raja-arvo)}.$$

Todistus. Matematiikan taito ei esitä lauseelle todistusta, joten se sivuutetaan. □

4.4.2 Pyramidi

Kirjassa Pyramidi 13 esitetään seuraava lause raja-arvon laskusäännöille [8, s. 62].

Lause 4.13. *Olkoot* (a_n) *ja* (b_n) *lukujonoja. Jos* $\lim_{n\to\infty} a_n$ *ja* $\lim_{n\to\infty} b_n$ *ovat olemassa, niin seuraavat laskusäännöt ovat voimassa:*

1. $\lim_{n\to\infty} ka_n = k \cdot \lim_{n\to\infty} a_n$ *vakion siirto,*
2. $\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n$ *summan raja-arvo,*
3. $\lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} b_n$ *erotuksen raja-arvo,*
4. $\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n$ *tulon raja-arvo,*
5. $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}$ *osamäärän raja-arvo,*
6. $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f\left(\lim_{n\to\infty} a_n\right)$*, kun f on jatkuva funktio.*

Kirjassa Pyramidi 13 mainitaan, että säännöt 2, 4 ja 6 todistetaan kuten funktion tapauksessa ja siis oletetaan todistetuiksi. Kirjassa todistetaan säännöt 1, 3 ja 5 niiden avulla. Tarkastellaan näistä osamäärän raja-arvon laskusääntötodistusta, muut sivuutetaan [8, s. 63].

Todistus. Todistetaan osamäärän raja-arvon laskusääntö eli

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) &= \lim_{n\to\infty} \left(a_n \cdot b_n^{-1}\right) && \mid \text{sääntö 4} \\
&= \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n^{-1} && \mid \text{sääntö 6 ja funktio } f(x) = x^{-1} \text{ jatkuva} \\
&= \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \left(\lim_{n\to\infty} b_n\right)^{-1} \\
&= \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \frac{1}{\lim_{n\to\infty} b_n} \\
&= \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}.
\end{aligned}$$

□

Erityisesti on mainittavaa, että kirjassa Pyramidi 13 ei määritellä osamäärän raja-arvon laskusäännön yhteydessä, että on oltava $b_n \neq 0$ ja $\lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$, vaan ne jätetään lukijan huomioitaviksi.

4.4.3 Pitkä matematiikka

Pitkä matematiikka ei esitä lukujonojen raja-arvoille laskusääntöjä.

4.4.4 Analyysi 1

Kurssin Analyysi 1 materiaalissa esitetään ennen raja-arvojen laskusääntöjä niiden todistamista helpottava apulause [7, s. 32].

Lause 4.14. *Olkoon* $a > 0$ $(a \in \mathbb{R})$. *Oletetaan, että jokaista lukua* $\varepsilon > 0$ *kohti on olemassa sellainen luku* $n_\varepsilon \in \mathbb{Z}_+$, *että*

$$|x_n - x| < a \cdot \varepsilon$$

aina, kun $n > n_\varepsilon$. *Tällöin*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x.$$

Todistus. Valitaan mielivaltainen $\varepsilon > 0$. Merkitään $\varepsilon' = \varepsilon/a$. Koska $a > 0$, niin $\varepsilon' > 0$. Jos lauseen oletukset ovat voimassa, niin tällöin on olemassa sellainen luku $n_\varepsilon \in \mathbb{Z}_+$, että

$$|x_n - x| < a \cdot \varepsilon' = a \cdot (\varepsilon/a) = \varepsilon$$

aina, kun $n > n_\varepsilon$. Väite seuraa nyt lukujonon raja-arvon määritelmästä. □

Analyysi 1 esittää seuraavat lukujonon raja-arvon laskusäännöt [7, s. 32].

Lause 4.15. *Olkoon* $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ *ja* $\lim_{n\to\infty} y_n = y$. *Tällöin*

(i) $\lim_{n\to\infty} (x_n + y_n) = x + y,$

(ii) $\lim_{n\to\infty} (x_n - y_n) = x - y,$

(iii) $\lim_{n\to\infty} (x_n y_n) = xy,$

(iv) $\lim_{n\to\infty} (kx_n) = kx, \quad (k \in \mathbb{R}).$

Todistus. Todistetaan kohta (i). Valitaan mielivaltainen $\varepsilon > 0$. Koska $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ ja $\lim_{n\to\infty} y_n = y$, niin lukujonon raja-arvon määritelmän 4.14 nojalla

$$\exists n_1 \in \mathbb{Z}_+ : |x_n - x| < \varepsilon \quad \forall n > n_1,$$
$$\exists n_2 \in \mathbb{Z}_+ : |y_n - y| < \varepsilon \quad \forall n > n_2.$$

Olkoon nyt $n > \max\{n_1, n_2\}$. Tällöin

$$\begin{aligned} |(x_n + y_n) - (x + y)| &= |(x_n - x) + (y_n - y)| \\ &\le |x_n - x| + |y_n - y| \\ &< \varepsilon + \varepsilon \\ &= 2\varepsilon, \end{aligned}$$

joten väite (i) seuraa lauseesta 4.14.

Muiden kohtien todistukset sivuutetaan, ks. [7, s. 32]. □

Kurssin Analyysi 1 materiaalissa jatketaan huomautuksella, että jos lukujonon (y_n) termit ovat nollasta eroavia, voidaan tarkastella myös lukujonojen (x_n) ja (y_n) osamäärää.

Lause 4.16. *Olkoon* $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ *ja* $\lim_{n\to\infty} y_n = y$. *Jos tällöin* $y \neq 0$ *ja* $y_n \neq 0$ *kaikilla* $n \in \mathbb{Z}_+$, *niin*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{x}{y}.$$

Todistus. Osoitetaan, että

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{y_n} = \frac{1}{y}.$$

Tällöin väite seuraa lauseen 4.15 kohdasta (iii). Hyödynnetään taas lausetta 4.14. Valitaan mielivaltainen $\varepsilon > 0$. Koska $\lim_{n\to\infty} y_n = y$, niin lukujonon raja-arvon määritelmän nojalla on olemassa $n_1 \in \mathbb{Z}_+$ siten, että

$$|y_n - y| < \varepsilon \quad \forall n > n_1.$$

Koska $y \neq 0$, niin lauseen 4.7 perusteella on lisäksi olemassa sellainen $n_2 \in \mathbb{Z}_+$, että

$$|y_n| > \frac{|y|}{2} > 0 \quad \forall n > n_2.$$

Olkoon nyt $n > \max\{n_1, n_2\}$. Tällöin

$$\left|\frac{1}{y_n} - \frac{1}{y}\right| = \frac{|y - y_n|}{|y_n| \cdot |y|} < \frac{|y - y_n|}{\frac{|y|}{2} \cdot |y|} = \frac{2}{|y|^2} \cdot |y_n - y| < \frac{2}{y^2} \cdot \varepsilon.$$

Koska $\frac{2}{y^2} > 0$ on vakio, väite seuraa lauseesta 4.14. □

Kurssin Analyysi 1 materiaalissa esitetään myös, että jos mikään lukujonon (x_n) termi ei ole negatiivinen, voidaan tarkastella myös lukujonon (x_n) neliöjuurta.

Lause 4.17. *Olkoon* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ *ja* $x_n \geq 0$ *kaikilla* $n \in \mathbb{Z}_+$. *Tällöin*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{x_n} = \sqrt{x}.$$

Todistus. Todistus sivuutetaan, ks. [7, s. 35]. □

Lukion kurssikirjoissa ei esitetä vastaavaa sääntöä lukujonon neliöjuurelle. Kirjan Pyramidi 13 lauseen 4.13 sääntö 6 antaa mahdollisuuden käyttää neliöjuurelle vastaavaa sääntöä, mutta asia on jätetty lukiolaisen itsensä huomioitavaksi. Kurssin Analyysi 1 materiaalissa korostetaan vielä edellisten lauseiden vaatimuksia.

Huomautus. Lauseissa 4.16 ja 4.17 ei ole oleellista, että lukujono on määritelty kaikilla $n \in \mathbb{Z}_+$. Oleellista on, että ehdot $y_n \neq 0$ ja $x_n \geq 0$ pätevät kaikille lukujonon alkioille.

Analyysi 1 tuo raja-arvon laskusääntöihin vielä yhden lisäyksen, jossa oletetaan, että kahdella lukujonolla on sama raja-arvo. Lausetta kutsutaan *suppiloperiaatteeksi*.

Lause 4.18. *Olkoon* $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = x$. *Jos on olemassa sellainen* $n_0 \in \mathbb{Z}_+$, *että*

$$x_n \leq z_n \leq y_n \quad \forall n > n_0,$$

niin

$$\lim_{n\to\infty} z_n = x.$$

Todistus. Todistus sivuutetaan, ks. [7, s. 39]. □

Huomautus. Jos jostakin indeksin n arvosta n_0 lähtien $x_n \leq z_n \leq y_n$, mutta lukujonoilla (x_n) ja (y_n) on eri raja-arvot, niin lukujonon (z_n) raja-arvon olemassaolosta ei voida sanoa lauseen 4.18 perusteella mitään.

4.4.5 Lukujonon raja-arvon laskusääntöjen vertailua

Matematiikan taito esittää lukujonon raja-arvon jo kirjassa 9, joten myös raja-arvon laskusäännöt löytyvät samasta kirjasta. Vastaavasti Pyramidi esittää lukujonon raja-arvon kirjassa 13 ja raja-arvon laskusäännöt löytyvät samasta kirjasta. Erot Matematiikan taidon ja Pyramidin lauseiden välillä ovat erittäin pienet. Pitkä matematiikka ei esitä lukujonojen raja-arvojen laskusäännöistä mitään.

Pyramidi 13 on jättänyt lauseen 4.13 säännön 5 eli osamäärän raja-arvon laskusäännöstä pois nimittäjän määrittelyn. On siis oltava $b_n \neq 0$. Tämä jätetään lukijan huomioitavaksi, mutta lukiokirjasta kyseisen määrittelyn olettaisi löytyvän. Kurssin Analyysi 1 materiaalissa nimittäjän määrittely on selkeästi huomioitu.

Lukujonon raja-arvon osamäärän laskusäännölle esitetään kirjan Pyramidi 13 todistus ja kurssin Analyysi 1 todistus. Ero on merkittävä, kurssin Analyysi 1 todistuksen hyödyntäessä ε-tekniikkaa ja kirjan Pyramidi 13 todistuksen ollessa lähinnä laskentaa. Esitetty kurssin Analyysi 1 lauseen 4.15 todistus summan raja-arvon laskusäännölle kävisi hyvin lukiotasolle esimerkiksi todistamisesta ε-tekniikalla selkeytensä ja johdonmukaisuutensa puolesta.

Kurssin Analyysi 1 materiaalissa esitetään laskusääntö myös lukujonojen neliöjuurelle. Vastaavaa ei ole lukiokirjoissa, vaikka tälle tuskin olisi mitään estettä. Pyramidi ilmaisee asian laajemmin lauseessa 4.13 säännön 6 avulla jatkuville funktioille, mutta asia ei ole lukiolaiselle selkeä yhdistää neliöjuuren käsittelyyn. Lukiokirjoihin on kuitenkin sisällytetty lukujonon neliöjuuritehtäviä. Suppiloperiaate on selvä lisäys lukion lukujonojen raja-arvon laskusääntöihin. Vaikka asia on intuitiivisesti ehkä hyvinkin selkeä, on asian syvempi tarkastelu ja lauseen todistaminen syytä jättää yliopiston analyysikurssille. Toisaalta se, että lukion matematiikan kirjojen lauseita ei aina todisteta, ei sinänsä lukion matematiikan opiskelua haittaa tai ole este lauseiden esittämiseen kurssikirjoissa.

4.5 Aritmeettinen lukujono

Aritmeettinen lukujono käsitellään lukiossa lukujonojen yhteydessä kurssissa 9 ja on siksi tässä tutkielmassa. Koska aritmeettisia jonoja käsitellään Tampereen yliopistossa kursseilla Matematiikan peruskäsitteitä, Johdatus matemaattiseen päättelyyn ja Johdatus analyysiin siinä laajuudessa kuin se on esitetty kirjassa Johdatus diskreettiin matematiikkaan, on tarkastelu suoritettu kyseistä kirjaa vasten.

4.5.1 Matematiikan taito

Matematiikan taito 9 tarjoaa alkupalana pohdittavaksi kysymyksen, mitkä ovat jonon $1, 5, 9, 13, \ldots$ kaksi seuraavaa termiä?

Kirjassa Matematiikan taito 9 määritellään aritmeettinen jono [3, s. 91].

Määritelmä 4.21. Lukujonoa (a_n), jossa jonon seuraava termi saadaan edellisestä lisäämällä vakio d eli

$$a_{n+1} = a_n + d,$$

sanotaan *aritmeettiseksi*. Jos jonon ensimmäinen termi on a, niin jono on

$$a, a + d, a + 2d, a + 3d, \ldots.$$

Jonon yleinen termi on

$$a_n = a + (n - 1)d.$$

Vakio d on aritmeettisen jonon *erotusluku*.

Lisäksi kirjassa todetaan, että aritmeettisessa jonossa kahden peräkkäisen termin erotus on aina sama vakio eli

$$a_{n+1} - a_n = d.$$

Esimerkki 4.15. Tutki, onko lukujono $a_n = 1 - \frac{n}{2}$ aritmeettinen.

On, sillä erotus

$$a_{n+1} - a_n = (1 - \frac{n+1}{2}) - (1 - \frac{n}{2}) = -\frac{1}{2}$$

on arvosta n riippumaton vakio.

Matematiikan taito sisällyttää lukujonon käsittelyyn myös aritmeettisen summan. Aritmeettiselle jonolle määritellään aritmeettinen summa seuraavasti [3, s. 94].

Määritelmä 4.22. Jos päättyvä lukujono $(a_k) = (a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)$ on aritmeettinen, niin

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

on *aritmeettinen summa*.

Lause 4.19. *Aritmeettisen summan S_n arvo on ensimmäisen ja viimeisen termin keskiarvo kerrottuna termien lukumäärällä eli*

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = n\frac{a_1 + a_n}{2},$$

missä a_1 on ensimmäinen termi, a_n on viimeinen termi ja n on termien lukumäärä.

Todistus. Ryhmitellään summa kahdella tavalla eli

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n,$$

$$S_n = a_n + a_{n-1} + \ldots + a_2 + a_1$$

ja lasketaan summat yhteen eli

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + \ldots + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1).$$

Peräkkäiset suluissa olevat summat ovat keskenään yhtä suuret, sillä

$$\begin{aligned} a_2 + a_{n-1} &= (a_1 + d) + (a_n - d) = a_1 + a_n, \\ a_3 + a_{n-2} &= (a_1 + 2d) + (a_n - 2d) = a_1 + a_n, \\ &\text{jne.} \end{aligned}$$

Saadaan siis

$$2S_n = n(a_1 + a_n),$$

mistä väite seuraa. □

Esimerkki 4.16. Laske kaikkien 7:llä jaollisten kolminumeroisten lukujen summa.

Kyseiset luvut ovat

$$105, 112, 119, \ldots, 987, 994.$$

Luvut muodostavat aritmeettisen jonon, jonka ensimmäinen termi on 105 ja viimeinen termi on 994. Jonon vakioerotus on 7, joten

$$a_n = 105 + (n-1)7 = 7n + 98.$$

Yhtälöstä

$$7n + 98 = 994$$

saadaan termien lukumääräksi $n = 128$. Summakaavaan sijoittamalla saadaan

$$S_{128} = 128 \cdot \frac{105 + 994}{2} = 70336.$$

4.5.2 Pyramidi

Kirjassa Pyramidi 9 määritellään aritmeettinen lukujono seuraavasti [4, s. 113].

Määritelmä 4.23. Lukujono on *aritmeettinen*, jos lukujonon termit (ensimmäistä termiä lukuun ottamatta) saadaan lisäämällä edelliseen termiin vakio.

Tämän määritelmän jälkeen kirjassa todetaan, että päättymätön lukujono

$$(a_n) = (a_1, a_2, a_3, \ldots)$$

on aritmeettinen, jos on olemassa sellainen vakio d, että

$$a_n = a_{n-1} + d$$

kaikilla $n = 2, 3, 4, \ldots$. Aritmeettisen jonon seuraava termi saadaan siis lisäämällä edelliseen termiin vakio d.

Ehdosta $a_n = a_{n-1} + d$ saadaan

$$a_n - a_{n-1} = d,$$

eli aritmeettisen lukujonon kahden peräkkäisen termin erotus on aina vakio d. Vakiota d sanotaan *erotusluvuksi*.

Aritmeettisen jonon yleiselle termille on annettu seuraava lause [4, s. 115].

Lause 4.20. *Aritmeettisen lukujonon n. termi on*

$$a_n = a_1 + (n - 1)d,$$

jossa a_1 on lukujonon ensimmäinen termi ja d erotusluku.

Todistus. Lauseelle ei esitetä kirjassa todistusta, joten se sivuutetaan. □

Lause johtaa seuraavaan huomautukseen [4, s. 115].

Huomautus. Aritmeettisen lukujonon mikä tahansa termi a_m saadaan minkä tahansa termin a_k ja erotusluvun d avulla seuraavasti:

$$a_m = a_k + (m - k)d.$$

Esimerkki 4.17. Määritä x ja lukujonon 4. termi, kun lukujono $(2, x, 6x, \ldots)$ on aritmeettinen.

Lukujono $(2, x, 6x, \ldots)$ on aritmeettinen, joten kahden peräkkäisen termin erotus on aina vakio. Tällöin

$$x - 2 = 6x - x.$$

Tästä saadaan ratkaistua x eli

$$x = -\frac{1}{2}.$$

Sijoittamalla saatu x saadaan erotusluvuksi

$$d = x - 2 = -2\frac{1}{2}.$$

Lukujonon 4. termi on siten

$$a_4 = a_3 + d = 6x + d = -5\frac{1}{2}.$$

Päättyvässä lukujonossa voi olla vain äärellisen monta jäsentä, joten ne voidaan laskea yhteen. Tällöin puhutaan lukujonon summasta. On huomattava, että kirjassa Pyramidi 9 ei sisällytetä aritmeettista summaa lukujonon käsittelyn yhteyteen, vaan omaksi aiheekseen. Kirjassa Pyramidi 9 määritellään aritmeettinen summa seuraavasti [4, s. 127].

Lause 4.21. *Päättyvän aritmeettisen lukujonon* $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ *termien summa on*

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = n\frac{a_1 + a_n}{2}$$

eli termien lukumäärä kertaa ensimmäisen ja viimeisen termin (aritmeettinen) keskiarvo.

Todistus. Todistus on identtinen kirjan Matematiikan taito 9 lauseen 4.19 todistuksen kanssa ja sivuutetaan. □

4.5.3 Pitkä matematiikka

Kirjassa Pitkä matematiikka 9 lähdetään määrittelemään aritmeettinen lukujono seuraavasti [5, s. 95].

Määritelmä 4.24. Lukujono, jonka jäsenen ja edellisen jäsenen erotus on aina sama, on *aritmeettinen jono*. Jos jonon peräkkäisten jäsenten erotus on d, niin jokainen jonon jäsen saadaan lisäämällä edelliseen jäseneen luku d. Jonon kahden peräkkäisen jäsenen erotus on yleisimmin merkittynä $a_{n+1} - a_n$.

Jonolle annetaan aritmeettisuusehto seuraavan määritelmän mukaisesti [5, s. 95].

Määritelmä 4.25. Jono $a_1, a_2, a_3, \ldots$ on aritmeettinen jono, jos ja vain jos on olemassa luku d niin, että

$$a_{n+1} - a_n = d$$

kaikilla n.

Esimerkki 4.18. Osoita, että lukujono $a_n = 7n - 3$ on aritmeettinen jono.

Todistus. Jonon $a_n = 7n - 3$ jäsenelle a_{n+1} saadaan lauseke sijoittamalla lausekkeeseen $7n - 3$ luvun n paikalle $n + 1$ eli

$$a_{n+1} = 7(n + 1) - 3.$$

Saadaan

$$a_{n+1} - a_n = 7(n + 1) - 3 - (7n - 3) = 7$$

kaikilla n. Siis jono (a_n) on aritmeettinen. □

Aritmeettisen jonon n. jäsen määritetään seuraavasti [5, s. 97].

Määritelmä 4.26. Aritmeettiselle jonolle

$$\begin{aligned}
&a_1, \\
&a_2 = a_1 + d, \\
&a_3 = a_2 + d = a_1 + d + d, \\
&\text{jne.}
\end{aligned}$$

saadaan n. jäsen a_n ensimmäisestä jäsenestä a_1 lisäämällä siihen $n - 1$ kappaletta lukuja d eli

$$a_n = a_1 + (n - 1)d.$$

Aritmeettista summaa ei kirjassa Pitkä matematiikka 9 käydä lukujonojen yhteydessä läpi vaan omana aiheenaan, kuten kirjassa Pyramidi 9. Aritmeettisen jonon peräkkäisten jäsenten summaa kutsutaan *aritmeettiseksi summaksi*. Aritmeettisen summan laskukaavaksi kirjassa Pitkä matematiikka 9 esitetään seuraava lause [5, s. 119].

Lause 4.22. *Aritmeettisen summan $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ arvo voidaan laskea kaavalla*

$$S_n = n\frac{a_1 + a_n}{2},$$

missä a_1 on ensimmäinen yhteenlaskettava, a_n on viimeinen yhteenlaskettava, n on yhteenlaskettavien lukumäärä.

Todistus. Todistus on identtinen kirjan Matematiikan taito 9 lauseen 4.19 todistuksen kanssa ja sivuutetaan. □

Kaavan mukaan aritmeettisen summan arvo on ensimmäisen ja viimeisen yhteenlaskettavan keskiarvo kerrottuna yhteenlaskettavien lukumäärällä.

4.5.4 Johdatus diskreettiin matematiikkaan

Kirjassa Johdatus diskreettiin matematiikkaan tarkastellaan *aritmeettista jonoa* eli jonoa $(a_1, a_2, \ldots)$, missä kahden peräkkäisen *termin* erotus on vakio d [9, s. 35]. Siis

$$a_{n+1} - a_n = d$$

kaikilla $n \in \mathbb{Z}_+$. Merkitsemällä $a_1 = a$ saadaan tämän joukon *yleiseksi termiksi*

$$a_n = a + (n-1)d.$$

Todistus. Todistetaan tämä väite induktiolla. Arvolla $n = 1$ saadaan $a_1 = a$ ja väite on tosi. Tehdään induktio-oletus, että väite on tosi arvolle n. Nyt induktioväite on, että väite on tosi arvolle $n+1$. Induktio-oletuksen perusteella $a_n = a + (n-1)d$, joten

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= a_n + d \\ &= a + (n-1)d + d \\ &= a + nd \\ &= a + ((n+1) - 1)\,d. \end{aligned}$$

□

Kirjassa Johdatus diskreettiin matematiikkaan esitetään vastaavan *aritmeettisen sarjan osasumma* eli

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n = n\frac{a_1 + a_n}{2}.$$

Todistus. Todistetaan tämä induktiolla. Kun $n = 1$, saadaan $a_1 = a_1$ eli väite on tosi. Tehdään induktio-oletus, että väite on tosi arvolle n. Käyttämällä tätä ja yleisen termin lauseketta saadaan

$$\begin{aligned}
a_1 + a_2 + \ldots + a_n + a_{n+1} &= (a_1 + a_2 + \ldots + a_n) + a_{n+1} \\
&= n\frac{a_1 + a_n}{2} + a_{n+1} \\
&= n\frac{a + a + (n-1)d}{2} + a + nd \\
&= \frac{2an + n^2d - nd + 2a + 2nd}{2} \\
&= \frac{2a(n+1) + nd(n+1)}{2} \\
&= (n+1)\frac{a + (a + nd)}{2} \\
&= (n+1)\frac{a_1 + a_{n+1}}{2}.
\end{aligned}$$

□

4.5.5 Aritmeettisen lukujonon vertailua

Kaikki tarjoavat saman sisällön aritmeettiselle jonolle. Matematiikan taito 9 esittää aritmeettisen jonon määritelmät tiiviisti ja sujuvasti. Pyramidi 9 jää pyörittelemään ja tarkentelemaan samoja määritteitä eikä tunnu etenevän asiaan. Pitkä matematiikka 9 sijoittuu näiden kahden esitystavan väliin. Sovitusta lukujonon merkintätavasta poikkeaminen korostuu jälleen etenkin kirjassa Matematiikan taito, mikä näkyy määritelmässä 4.21. Ensimmäistä kertaa kahdesta kirjasta löytyy sama esimerkki, Matematiikan taito 9 yhteydessä esitetty esimerkki 4.16 on annettu esimerkkinä myös kirjassa Pitkä matematiikka 9.

Matematiikan taito sisällyttää aritmeettisen summan käsittelyn lukujonojen yhteyteen, kun taas Pyramidi ja Pitkä matematiikka eivät. Kirjojen Pyramidi ja Pitkä matematiikka lukujonojen sisältöä voi pitää paremmin rajattuna ja aritmeettisen summan käsittelyä omana osuutena selkeämpänä, koska aritmeettisen summan käsittely on lähempänä sarjoja kuin lukujonoja. Tässä tutkielmassa aritmeettinen summa päätettiin kuitenkin sisällyttää tarkasteluun, koska aihe oli kirjassa Matematiikan taito lukujonojen yhteydessä. Näin saatiin yhtenäisempi käsittely kaikille kolmelle kirjasarjalle.

Lukion kurssikirjojen ja kirjan Johdatus diskreettiin matematiikkaan teoriaosuuden välinen näkyvä ero aritmeettisen jonon käsittelyssä on, että kirjassa Johdatus diskreettiin matematiikkaan suoritetaan todistukset induktiolla. Induktio kuuluu lukion matematiikan sisältöön, mutta sen käytön vähäisyys lukiomatematiikassa siirtää sen käytön sisäistämisen yliopistoon. Lukiokirjoissa ei viitata millään muotoa jonon yleisen termin todistuksen olemassaoloon. Kuitenkin oleellisin ero on harjoitustehtävissä, jotka kirjassa Johdatus diskreettiin matematiikkaan ovat vaativampia kuin lukion kurssikirjoissa, kuten odottaa sopiikin.

4.6 Geometrinen lukujono

Geometrinen lukujono käsitellään lukiossa lukujonojen yhteydessä kurssissa 9. Geometrisen jonon raja-arvon ja suppenemisen tai hajaantumisen käsittely vaihtelee kirjan 9 ja 13 välillä. Koska geometrisia jonoja käsitellään Tampereen yliopistossa kursseilla Matematiikan peruskäsitteitä, Johdatus matemaattiseen päättelyyn ja Johdatus analyysiin siinä laajuudessa kuin se on esitetty kirjassa Johdatus diskreettiin matematiikkaan, on tarkastelu suoritettu kyseistä kirjaa vasten.

4.6.1 Matematiikan taito

Kirjassa Matematiikan taito 9 määritellään geometrinen lukujono [3, s. 103].

Määritelmä 4.27. Lukujonoa (a_n), jossa jonon seuraava termi saadaan kertomalla edellinen termi vakiolla q eli

$$a_{n+1} = a_n q,$$

sanotaan *geometriseksi*. Vakio q on geometrisen jonon *suhdeluku*. Jos jonon ensimmäinen termi on a, niin jono on

$$a, aq, aq^2, aq^3, \ldots.$$

Jonon yleinen termi on

$$a_n = aq^{n-1},\ n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Matematiikan taito 9 tarkentaa määritelmää toteamalla, että tällaisessa geometrisessa lukujonossa kahden peräkkäisen termin suhde

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}$$

on siis aina sama vakio q.

Esimerkki 4.19. Tutki, onko lukujono $a_n = \frac{4^n}{3n}$ geometrinen.
Ei ole, sillä

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{4^{n+1}}{3(n+1)}}{\frac{4^n}{3n}} = \frac{4n}{n+1}$$

ei ole vakio.

Kirja Matematiikan taito 9 sisällyttää geometrisen summan käsittelyn lukujonojen käsittelyn yhteyteen. Päättyvälle geometriselle lukujonolle määritetään summa seuraavasti [3, s. 106].

Määritelmä 4.28. Jos päättyvä lukujono $(a_k) = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ on geometrinen eli

$$a_k = a_1 q^{k-1},$$

niin summa

$$S_n = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \ldots + a_1 q^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} a_1 q^{k-1}$$

on *geometrinen summa.*

Lause 4.23 (Geometrisen summan kaava)**.** *Kun $q \neq 1$, on*

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} aq^{k-1} = a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} = a\frac{1-q^n}{1-q}.$$

Kun $q = 1$, on

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a = a + a + a + \ldots + a = na.$$

Kaavoissa a on ensimmäinen termi, q on suhdeluku ja n on termien lukumäärä.

Todistus. Tapaus $q \neq 1$. Kerrotaan summa

$$S_n = a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1}$$

suhdeluvulla q,

$$qS_n = aq + aq^2 + aq^3 + \ldots + aq^{n-1} + aq^n.$$

Vähennetään saadut yhtälöt S_n ja qS_n toisistaan eli

$$S_n - qS_n = a - aq^n,$$

josta saadaan

$$S_n = a\frac{1-q^n}{1-q}.$$

Tapaus $q = 1$. Summa $S_n = a + a + a + a + \ldots + a = na$. □

Kirjassa Matematiikan taito 9 esitetään Geometrisen jonon suppenemiselle seuraava lause [3, s. 120].

Lause 4.24. *Geometrinen jono*

$$a_n = aq^{n-1} \quad (a \neq 0)$$

suppenee, kun $-1 < q \leq 1$. Muutoin geometrinen jono hajaantuu. Jos $-1 < q < 1$, niin $\lim_{n\to\infty} aq^{n-1} = 0$. Jos $q = 1$, niin $a_n = a \cdot 1^{n-1} = a$ on vakiojono ja $\lim_{n\to\infty} a_n = a$.

Todistus. Jaetaan todistus osiin suhdeluvun q arvon mukaan.

$q = 1$: Tällöin $a_n = a \cdot 1^{n-1} = a$ on vakiojono, joka suppenee. Raja-arvo on a.

$q = -1$: Nyt on $(a_n) = (a \cdot (-1)^{n-1}) = (a, -a, a, -a, \ldots)$. Jono hajaantuu. Jono (a_n) *heilahtelee rajoitetusti*.

$q > 1$: Merkitään $q = 1 + h$, missä $h > 0$. Binomikaavan mukaan on

$$q^{n-1} = (1 + h)^{n-1} \geq 1 + (n - 1)h$$

Koska $1 + (n - 1)h \to \infty$, kun $n \to \infty$, niin myös $q^{n-1} \to \infty$. Jono hajaantuu.

$q < -1$: Jonon termien itseisarvot kasvavat rajatta. Jono *heilahtelee rajattomasti* ja siis hajaantuu.

$|q| < 1$: Jos $q = 0$, niin raja-arvo on 0. Jos taas $q \neq 0$, niin $q = \frac{1}{p}$, missä $|p| > 1$. Tällöin $\left|q^{n-1}\right| = \frac{1}{|p|^{n-1}} \to 0$, sillä $|p|^{n-1} \to \infty$ (ks. kohta $q > 1$). Siis myös $aq^{n-1} \to 0$, kun $n \to \infty$.

□

4.6.2 Pyramidi

Kirjassa Pyramidi 9 määritellään geometrinen lukujono seuraavasti [4, s. 119].

Määritelmä 4.29. Lukujono on *geometrinen*, jos lukujonon termit (ensimmäistä lukuun ottamatta) saadaan kertomalla edellinen termi vakiolla.

Määritelmän ulkopuolella todetaan, että päättymätön lukujono

$$(a_n) = (a_1, a_2, a_3, \ldots)$$

on geometrinen, jos on olemassa sellainen vakio q, että

$$a_n = a_{n-1}q$$

kaikilla $n = 2, 3, 4, \ldots$.

Vastaavasti päättyvä lukujono

$$(a_n) = (a_1, a_2, \ldots, a_k)$$

on geometrinen, jos on olemassa sellainen vakio q, että

$$a_n = a_{n-1}q$$

kaikilla $n = 2, 3, 4, \ldots, k$.

Jos $a_n \neq 0$ kaikilla n, ehdosta $a_n = a_{n-1}q$ saadaan

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = q.$$

Geometrisen lukujonon kahden peräkkäisen termin suhde on vakio q, jos lukujonon kaikki termit ovat nollasta poikkeavia. Vakiota q sanotaan *suhdeluvuksi* [4, s. 119].

Esimerkki 4.20. Osoita, että lukujono (a_n), jossa

$$a_n = -\frac{2^n}{3^{n-1}}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

on geometrinen.

Todistus. Jokainen termi $a_n \neq 0$, koska $2^n \neq 0$ kaikilla n. Lasketaan kahden peräkkäisen termin suhde eli

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{-\frac{2^n}{3^{n-1}}}{-\frac{2^{n-1}}{3^{(n-1)-1}}} = \frac{2}{3}.$$

Siis kahden peräkkäisen termin suhde on aina vakio eli riippumaton indeksin n arvosta, joten lukujono (a_n) on geometrinen. □

Geometrisen lukujonon yleiselle termille annetaan seuraava lause [4, s. 121].

Lause 4.25. *Geometrisen lukujonon n. termi on*

$$a_n = a_1 q^{n-1},$$

jossa a_1 on lukujonon ensimmäinen termi ja q suhdeluku.

Todistus. Olkoon geometrisen lukujonon ensimmäinen termi a_1 ja suhdeluku q. Nyt saadaan

$$\begin{aligned}
a_2 &= a_1 q, \\
a_3 &= a_2 q = a_1 q \cdot q = a_1 q^2, \\
a_4 &= a_3 q = a_1 q^2 \cdot q = a_1 q^3, \\
&\vdots \\
a_n &= a_{n-1} q = a_1 q^{n-1}.
\end{aligned}$$

Siis havaitaan, että $a_n = a_1 q^{n-1}$. □

Huomautus. Geometrisen lukujonon mikä tahansa termi a_m saadaan minkä tahansa termin a_k ja suhdeluvun q avulla seuraavasti:

$$a_m = a_k q^{m-k}.$$

Kirjassa Pyramidi 9 ei sisällytetä geometrista summaa lukujonojen yhteyteen, vaan omaksi aiheeksi. Geometriselle summalle annetaan seuraava lause [4, s. 132].

Lause 4.26. *Päättyvän geometrisen lukujonon $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, jonka suhdeluku on q ja jossa on n termiä, termien summa, kun $q \neq 1$, on*

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q},$$

ja, kun $q = 1$, on

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_1 + \ldots + a_1 = na_1.$$

Todistus. Lauseelle ei esitetä kirjassa todistusta, joten se sivuutetaan. □

Geometrisen lukujonon suppeneminen käsitellään kirjassa Pyramidi 13. Geometrisen lukujonon suppenemiselle Pyramidi 13 antaa seuraavan lauseen [8, s. 73].

Lause 4.27. *Päättymätön geometrinen lukujono*

$$(a_n) = (a_1, a_1q, a_1q^2, a_1q^3, \ldots)$$

suppenee täsmälleen silloin, kun $-1 < q \leq 1$ *tai* $a_1 = 0$.

- *Jos* $-1 < q < 1$*, niin lukujono suppenee kohti nollaa.*
- *Jos* $q = 1$*, niin lukujono suppenee kohti lukua* a_1.
- *Jos* $a_1 = 0$*, niin lukujono suppenee kohti nollaa.*

Todistus. Todistus on kirjan Matematiikan taito 9 lauseelle 4.24 esitetyn todistuksen kaltainen ja sivuutetaan. □

4.6.3 Pitkä matematiikka

Kirjassa Pitkä matematiikka 9 määritellään geometrinen jono seuraavasti [5, s. 102].

Määritelmä 4.30. Lukujono, jonka jokaisen jäsenen suhde edelliseen jonon jäseneen on yhtä suuri, on *geometrinen jono*. Jos suhde on q, niin jonon jäsen saadaan aina kertomalla edellinen jäsen luvulla q.

Lisäksi annetaan seuraava huomautus.

Huomautus. Myös jono $a_1, 0, 0, \ldots$ luetaan geometristen jonojen joukkoon, vaikka jonon peräkkäisten jäsenten suhde ei ole määritelty.

Seuraavaksi määritellään jonon geometrisuusehto [5, s. 102].

Määritelmä 4.31. Jono $a_1, a_2, a_3, \ldots$ on geometrinen jono, jos ja vain jos on olemassa luku q niin, että

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q$$

kaikilla n.

Geometrinen jonon nimen taustaan on lukijalle annettu perehdytys kirjan tehtävässä 268 [5, s. 109].

Esimerkki 4.21. Kahden positiivisen luvun geometrinen keskiarvo on lukujen tulon neliöjuuri. (Yleisemmin positiivisten lukujen geometrinen keskiarvo on lukujen tulon n juuri, kun lukuja on n kappaletta.) Osoita, että jos geometrisen jonon jäsenet ovat positiivisia, niin toisesta jäsenestä alkaen jokainen jonon jäsen on edellisen ja seuraavan jäsenen geometrinen keskiarvo. Nimitys geometrinen jono juontaa tästä jonon ominaisuudesta.

Todistus. Todistus on annettu kirjan harjoitustehtävien ratkaisuissa [5, s. 199]. Olkoon q geometrisen jonon $a_1, a_2, a_3, \ldots$ peräkkäisten jäsenten suhde. Jonon jäsentä a_n, missä $n \geq 2$, edeltävä jäsen on $\frac{a_n}{q}$, ja jäsentä a_n seuraava jäsen on qa_n. Edeltävän ja seuraavan jäsenen geometrinen keskiarvo on

$$\sqrt{\frac{a_n}{q} q a_n} = \sqrt{a_n^2} = a_n.$$

□

Geometrisen jonon n:lle jäsenelle annetaan seuraava kaava [5, s. 104].

Määritelmä 4.32. Geometrisen jonon n. jäsen a_n saadaan ensimmäisestä jäsenestä a_1 kertomalla se $n-1$ kertaa luvulla q eli

$$a_n = q^{n-1} a_1.$$

Esimerkki 4.22. Kuinka moni geometrisen jonon $100, \frac{2}{3} \cdot 100, \ldots$ jäsenistä on suurempi kuin $0{,}01$?

Ratkaistaan epäyhtälö

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \cdot 100 > 0{,}01\,,$$

josta saadaan

$$n < \frac{\lg 0{,}0001}{\lg \frac{2}{3}} + 1 \approx 23{,}7.$$

Jonon viimeinen jäsen, joka on suurempi kuin 0,01, on jonon 23. jäsen.

Kirjassa Pitkä matematiikka 9 ei sisällytetä geometrista summaa lukujonon käsittelyn yhteyteen, vaan omaksi aiheekseen kuten kirjassa Pyramidi 9. Geometriselle summalle annetaan seuraava määritelmä [5, s. 127].

Määritelmä 4.33. Geometrisen jonon peräkkäisten jäsenten summaa kutsutaan *geometriseksi summaksi*. Kun lasketaan yhteen geometrisen jonon n ensimmäistä jäsentä $a, aq, aq^2, \ldots$, niin summan arvo on

$$S_n = \frac{a(1-q^n)}{1-q}.$$

Kaavassa a on summan ensimmäinen jäsen, q on jonon peräkkäisten jäsenten suhdeluku ja n on yhteenlaskettujen jäsenten lukumäärä. Kaava pätee, kun $q \neq 1$. Jos $q = 1$, niin jonon n:n ensimmäisen jäsenen summa on na.

Todistus. Todistus on kirjan Matematiikan taito 9 lauseelle 4.24 esitetyn todistuksen kaltainen ja sivuutetaan. □

Geometriselle jonolle esitetään raja-arvo kirjassa Pitkä matematiikka 13 lukujonojen raja-arvon yhteydessä [6, s. 138].

Määritelmä 4.34. Geometrisen jonon $a_n = q^n$ raja-arvolle pätee, että jos $-1 < q < 1$, niin $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$. Ehto $-1 < q < 1$ voidaan ilmaista itseisarvon avulla: $|q| < 1$. Jos $q = 1$, jono $a_n = q^n$ on vakiojono $1, 1, 1, \ldots$, jonka raja-arvo on 1. Jos $q \leq -1$ tai $q > 1$, jono $a_n = q^n$ hajaantuu.

4.6.4 Johdatus diskreettiin matematiikkaan

Yliopiston oppikirjassa Johdatus diskreettiin matematiikkaan tarkastellaan *geometrista jonoa* $(a_1, a_2, \ldots)$. Tässä jonossa $a_1 = a$ ja jonon kahden peräkkäisen termin suhde on vakio q [9, s. 36]. Siis

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q$$

kaikilla $n \in \mathbb{Z}_+$. Tämän jonon yleinen termi on

$$a_n = aq^{n-1}.$$

Todistus. Todistetaan edellinen väite induktiolla. Arvolla $n = 1$ saadaan $a_1 = a$ ja väite on tosi. Tehdään induktio-oletus, että väite on tosi arvolle n. Nyt induktioväite on, että väite on tosi arvolle $n + 1$. Koska $q = \frac{a_{n+1}}{a_n}$, niin saadaan

$$a_{n+1} = a_n q = aq^{n-1} \cdot q = aq^n = aq^{(n+1)-1}.$$

□

Lisäksi kirjassa sovitaan, että jos $a = 0$, niin kyseessä on jono $(0, 0, \ldots)$, ja jos $q = 0$, niin kyseessä on jono $(a, 0, 0, \ldots)$.

Vastaavan *geometrisen sarjan osasumma*, kun $q \neq 1$, on

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n = a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} = a\frac{1 - q^n}{1 - q}.$$

Todistus. Todistetaan edellinen väite induktiolla. Arvolla $n = 1$ saadaan $a_1 = a$ ja väite on tosi. Tehdään induktio-oletus, että väite on tosi arvolle n. Nyt induktioväite on, että väite on tosi arvolle $n + 1$. Koska $a_{n+1} = aq^n$, niin saadaan

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + \ldots + a_n + a_{n+1} &= a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} + aq^n \\ &= a\frac{1 - q^n}{1 - q} + aq^n \\ &= a\left(\frac{1 - q^n}{1 - q} + q^n\right) \\ &= a\frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}. \end{aligned}$$

□

Jos $q = 1$, niin jono $(a_n) = (a_1, a_2, a_3, \ldots) = (a, a, a, \ldots)$. Tällöin jonoa (a_n) vastaavan geometrisen sarjan osasumma on

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n = a + a + \ldots + a = na.$$

Jos ja vain jos $|q| < 1$, niin geometrisen sarjan summalla on (äärellinen) raja-arvo, kun $n \to \infty$. Tällöin geometrinen sarja suppenee ja sen summa on

$$a + aq + aq^2 + \ldots = \frac{a}{1 - q}.$$

Muutoin sarja hajaantuu.

4.6.5 Geometrisen lukujonon vertailua

Geometrisen jonon käsittelyssä ei kirjasarjoissa ole oleellisia eroja. On kuitenkin löydettävissä selvät erot geometrisen summan ja geometrisen jonon raja-arvon käsittelystä eri kirjasarjoissa.

Matematiikan taito sisällyttää geometrisen summan käsittelyn lukujonojen yhteyteen vastaavasti kuin aritmeettisen summan. Pyramidi ja Pitkä matematiikka käsittelevät geometrisen summan omana aihealueena, mitä voi pitää parempana tapana. Tässä tutkielmassa geometrinen summa päätettiin sisällyttää tarkasteluun, koska aihe oli kirjassa Matematiikan taito lukujonojen yhteydessä. Näin saatiin yhtenäisempi käsittely kaikille kolmelle kirjasarjalle.

Geometrisen jonon raja-arvo sekä suppeneminen ja hajaantuminen on esitetty kirjassa Matematiikan taito 9, kun taas Pyramidi ja Pitkä matematiikka esittävät sen kurssin 13 kirjassa. Ero on merkittävä, koska kirja 9 kuuluu pakollisiin kursseihin, kurssin 13 ollessa vapaaehtoinen.

Koska geometrinen jono on käsitelty muilla yliopiston matematiikan kursseilla, sen teoriaa ei käsitellä enää kurssilla Analyysi 1. Kurssin Analyysi 1 materiaalissa on kuitenkin mukana useampikin esimerkki, joissa hyödynnetään geometrisen jonon ominaisuuksia, ks. [7, s. 27], [7, s. 43] ja [7, s. 57]. Kyseisistä esimerkeistä löytyy yhtäläisyyksiä kirjan Matematiikan taito lauseeseen 4.24 ja sen todistukseen. Kurssin Analyysi 1 esimerkkejä ei ole kuitenkaan otettu tähän tutkimukseen mukaan ja voidaankin todeta niiden käsittelyn olevan yli lukiotason. Kirjassa Johdatus diskreettiin matematiikkaan aihe käsitellään selkeästi. Lauseiden todistamiset on jätetty harjoitustehtäviksi ja ne noudattavat samaa induktiotodistuksen periaatetta kuin aritmeettisen jonon lauseen todistukset.

4.7 Rekursiiviset lukujonot

Lukion opetussuunnitelman mukaisesti oppikirjoissa esitetään rekursiivinen lukujono. Tunnetuimpia rekursiivisia jonoja on Fibonaccin lukujono. Koska rekursiota käsitellään Tampereen yliopistossa kursseilla Matematiikan peruskäsitteitä, Johdatus matemaattiseen päättelyyn ja Johdatus analyysiin siinä laajuudessa kuin se on esitetty kirjassa Johdatus diskreettiin matematiikkaan, on tarkastelu suoritettu kyseistä kirjaa vasten.

4.7.1 Matematiikan taito

Matematiikan taito tuo rekursiiviset lukujonot erittäin lyhyesti kurssin 9 kirjassa esille [3, s. 82].

Määritelmä 4.35. *Rekursiivinen* lukujono voidaan määritellä antamalla jonon ensimmäinen termi a_1 sekä *palautuskaava* eli *rekursioyhtälö*, jonka mukaan a_{n+1} saadaan, kun sitä edeltävä termi a_n tunnetaan.

Kirjassa huomautetaan, että induktioperiaatteesta seuraa, että a_n tulee näin yksikäsitteisesti määritellyksi kaikilla arvoilla n. Tässä kohtaa induktiota ei kuitenkaan lähdetä kirjassa käsittelemään.

Matematiikan taito jatkaa rekursiivisten lukujonojen käsittelyä seuraavalla määritelmällä [3, s. 124].

Määritelmä 4.36. Lukujono $(y_n)_{n=0}^{\infty}$ on saatu *ensimmäisen kertaluvun rekursiolla*, jos se toteuttaa muotoa

$$y_{n+1} = cy_n + d$$

olevan yhtälön, missä c ja d ovat vakioita. Tämä yhtälö on *ensimmäisen kertaluvun rekursioyhtälö*.

Rekursioyhtälön $y_{n+1} = cy_n + d$ ratkaisu on sellainen lukujono (y_n), joka toteuttaa rekursioyhtälön kaikilla arvoilla n. Ratkaisu on yksikäsitteinen, jos lisäksi on annettu alkuehto, joka kiinnittää jonon ensimmäisen termin y_0.

Lause 4.28. *Kun y_0 on annettu, niin rekursioyhtälön $y_{n+1} = cy_n + d$ ratkaisukaava on, kun $c \neq 1$,*

$$y_n = y_0 c^n + d\frac{1-c^n}{1-c}$$

ja, kun $c = 1$,

$$y_n = y_0 + nd$$

kaikilla $n = 1, 2, 3, \dots$.

Todistus. Todistus sivuutetaan, ks. [3, s. 125]. □

Kirjassa Matematiikan taito 13 rajoitetun ja monotonisen lukujonon suppenemista käsiteltäessä nousee esille seuraava esimerkki rekursiivisesta lukujonosta ja induktion hyödyntämisestä.

Esimerkki 4.23. Osoita, että lukujono (a_n), jolle $a_0 = 1$ ja $a_{n+1} = \frac{2a_n+3}{4}$, suppenee ja määritä sen raja-arvo [2, s. 86].

Todistus. Alkuun näytetään, että lukujono (a_n) on aidosti kasvava. Käytetään induktiota. Nyt

$$a_1 = \frac{2+3}{4} = \frac{5}{4} > a_0.$$

Tehdään induktio-oletus, että $a_n < a_{n+1}$. Nyt kertomalla tämä induktio-oletuksen epäyhtälö luvulla 2, lisäämällä 3 ja jakamalla sitten luvulla 4 saadaan

$$\frac{2a_n+3}{4} < \frac{2a_{n+1}+3}{4}$$

eli

$$a_{n+1} < a_{n+2},$$

joten induktioaskel on suoritettu.

Toiseksi näytetään, että lukujono (a_n) on ylhäältä rajoitettu. Etsitään aluksi jonon yläraja kokeellisesti laskimella. Nyt $a_0 = 1, a_1 = 1{,}25, \dots, a_{10} = 1{,}49951$. Havaitaan, että lukujonolla näyttäisi oleva yläraja ja raja-arvo $\frac{3}{2}$. Todistetaan tämä induktiolla. Koska $a_0 = 1 < \frac{3}{2}$, väite on tosi arvolla $n = 0$. Tehdään induktio-oletus, että $a_n < \frac{3}{2}$. Vastaavasti kuin edellä saadaan tälle epäyhtälölle

$$\frac{2a_n + 3}{4} < \frac{2 \cdot 1{,}5 + 3}{4}$$

eli

$$a_{n+1} < \frac{3}{2},$$

joten induktioaskel on suoritettu. Siis lukujono suppenee ja raja-arvo on olemassa.

□

4.7.2 Pyramidi

Kirjassa Pyramidi 9 esitellään rekursiivinen lukujono Fibonaccin lukujonon kautta. *Rekursiivisesti määritellyssä jonossa* tiedetään yksi tai useampi jäsen jonon alusta (*alkuehdot*). Lisäksi tiedetään, miten jonon seuraavat jäsenet voidaan laskea jonon aikaisempien jäsenten avulla (*rekursiokaava*). Joissain tapauksissa voidaan päätellä rekursiivisesti määritellyn jonon analyyttinen muoto eli yleisen termin lauseke ja todistaa päättelyn tulos oikeaksi. Todistuksessa tarkastetaan, että päätelty (tai arvattu) yleisen termin lauseke noudattaa rekursioyhtälöitä eli rekursiivisen lukujonon määritteleviä sääntöjä. Kun näin käy, tiedetään, että lauseke on rekursiivisen lukujonon *yleisen termin* lauseke [4, s. 100].

Rekursiivisen lukujonon raja-arvon laskentaan esitetään seuraava apulause kirjassa Pyramidi 13 [8, s. 76].

Lause 4.29. *Jos jonolla $(a_n) = (a_1, a_2, a_3, \ldots)$ on raja-arvo, niin tällöin lukujonolle $(a_{n+1}) = (a_2, a_3, a_4, \ldots)$ on voimassa*

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} a_n,$$

eli jonon raja-arvo ei muutu, vaikka jonosta jätetään ensimmäinen termi pois.

Todistus. Olkoon $a = \lim_{n\to\infty} a_n$ ja U luvun a ympäristö. Ympäristön U ulkopuolelle jää vain äärellisen monta lukujonon (a_n) termiä, joten myös lukujonon (a_{n+1}) jäseniä jää ympäristön U ulkopuolelle vain äärellinen määrä. Siis myös

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = a.$$

□

Esimerkki 4.24. Rekursiivisesti määritellylle lukujonolle (a_n) on voimassa

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right), \quad n = 1, 2, 3, \ldots. \end{cases}$$

Lukujonolla on raja-arvo. Määritä se.

Olkoon lukujonon

$$(a_n) = \left(1, \frac{3}{2}, \frac{17}{12}, \frac{577}{408}, \ldots\right)$$

raja-arvo $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. Alkuehdosta

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right)$$

saadaan

$$2a_n a_{n+1} = a_n^2 + 2.$$

Tälle

$$\lim_{n\to\infty} (2a_n a_{n+1}) = \lim_{n\to\infty} \left(a_n^2 + 2\right).$$

Koska lukujono (a_n) on suppeneva, niin $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+1}$. Lisäksi $f(x) = x^2$ on jatkuva. Tällöin saadaan

$$2 \cdot a \cdot a = a^2 + 2.$$

Tästä voidaan ratkaista a eli

$$a = \pm\sqrt{2}.$$

Lukujonon (a_n) rekursiivisesta määrittelystä voidaan havaita, että lukujonon termi $a_n > 0$ kaikilla n. Tällöin lukujonon raja-arvo $\lim_{n\to\infty} a_n = a \geq 0$. Siis $a = \sqrt{2}$.

4.7.3 Pitkä matematiikka

Pitkä matematiikka esittää rekursiiviset lukujonot kirjassa 13, mutta kirjassa 9 annetaan kuitenkin lyhyt määritelmä rekursiiviselle lukujonolle [5, s. 112].

Määritelmä 4.37. *Rekursiivinen* lukujono kuvaillaan ilmoittamalla jonon ensimmäinen jäsen (ensimmäiset jäsenet) ja antamalla *rekursiokaava*, joka ilmaisee, kuinka muut jäsenet lasketaan edellisten jäsenten avulla.

Kirjassa Pitkä matematiikka 13 esitellään rekursiokaavan määritelmä [6, s. 144].

Määritelmä 4.38. Olkoon $a_1, a_2, a_3, \ldots$ rekursiivinen lukujono, jonka jäsenet toisesta jäsenestä alkaen lasketaan rekursiokaavalla

$$a_n = g(a_{n-1}), \text{ kun } n \geq 2.$$

Oleellisempi määritelmä kirjassa Pitkä matematiikka 13 on rekursiivisen jonon raja-arvon määritelmä [6, s. 144].

Määritelmä 4.39. Jos jonolla (a_n) on raja-arvo a ja jos funktio g on jatkuva kohdassa a, niin

$$a = g(a).$$

Todistus. Jos $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, niin myös $\lim_{n\to\infty} a_{n-1} = a$, sillä jonon (a_{n-1}) jäsenet ovat jonon (a_n) jäsenet eri tavalla indeksoituna.
Siis

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} g(a_{n-1}) = g(\lim_{n\to\infty} a_{n-1}) = g(a).$$

□

Raja-arvo a on siis funktion g niin sanottu kiintopiste.

4.7.4 Johdatus diskreettiin matematiikkaan

Kirjassa Johdatus diskreettiin matematiikkaan lähdetään kuvauksesta $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, mikä esitetään tavallisesti ilmoittamalla, miten $f(n)$ riippuu arvosta n. Joskus se kuitenkin kannattaa määritellä *rekursiivisesti* seuraavasti [9, s. 41].

Määritelmä 4.40. Kuvauksen $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ rekursiivinen määritelmä.

1. (Alkuarvot). Ilmoitetaan $f(0), f(1), \ldots, f(k)$.
2. (Rekursiokaava). Kun $n \geq k$, niin esitetään, miten $f(n+1)$ riippuu luvuista $f(n), f(n-1), \ldots, f(n-k)$.

Kirjassa huomautetaan, että merkinnän $f(n)$ sijasta käytetään usein merkintää f_n tai y_n ja, että nimityksen rekursio lisäksi käytetään nimityksiä *rekursiivinen jono*, *rekursioyhtälö* ja *differenssiyhtälö*.

Esimerkki 4.25. Osoita, että rekursioyhtälön $f_{n+1} = 2f_n + 3$ ratkaisu alkuehdolla $f_0 = 1$ on $f_n = 4 \cdot 2^n - 3$.

Todistus. Sijoittamalla f_n rekursioyhtälöön saadaan

$$\begin{aligned} 2f_n + 3 &= 2\,(4 \cdot 2^n - 3) + 3 \\ &= 2\,(2 \cdot 2 \cdot 2^n - 3) + 3 \\ &= 2\left(2 \cdot 2^{n+1} - 3\right) + 3 \\ &= 4 \cdot 2^{n+1} - 3 \\ &= f_{n+1}. \end{aligned}$$

Lisäksi $f_0 = 4 \cdot 2^0 - 3 = 1$. Siis väite pätee. □

4.7.5 Rekursiivisten lukujonojen vertailua

Matematiikan taito käsittelee rekursiiviset lukujonot jo kirjassa 9, kun taas ilmeisin laskuesimerkki rekursiosta ja induktion hyödyntämisestä löytyy kirjasta 13. Matematiikan taidon rekursioyhtälöt ovat selkeästi muita kirjoja vaativampia lukijalle.

Kirjat Pyramidi 9 ja Pitkä matematiikka 9 pohjustavat rekursiivisen lukujonon käsittelyä, mutta jättävät sen varsinaisesti kurssin 13 kirjoihin. Kirjassa Pyramidi 13 käsitellään melko vaativia rekursiotehtäviä. Pitkä matematiikka tuo jatkuvan funktion raja-arvon rekursion käsittelyyn määritelmässä 4.39.

Käsittelytavat eroavat kirjoissa oleellisesti. Matematiikan taito korostaa rekursioyhtälöä ja etenkin sen ratkaisukaavaa. Pyramidi käsittelee rekursiivisen jonon raja-arvoa. Pitkä matematiikka esittää rekursioyhtälön ja rekursiivisen jonon raja-arvon, mutta ei rekursioyhtälön ratkaisukaavaa.

Vaikka yliopiston kurssilla Analyysi 1 ei rekursiivisen lukujonon teoriaa enää käsitellä, on kurssimateriaalissa esimerkki rekursiivisesta lukujonosta, ks. [7, s. 44]. Kyseisestä esimerkistä on löydettävissä yhtäläisyyksiä kirjan Pyramidi esimerkkiin 4.24. Kurssin Analyysi 1 esimerkkiä ei kuitenkaan ole tähän tutkimukseen otettu mukaan, mutta voidaan todeta sen olevan vaativampi ja perustellummin esitetty kuin kirjan Pyramidi esimerkki. Kirjassa Johdatus diskreettiin matematiikkaan käsitellään rekursiota myös muissa yhteyksissä, tässä vertailuun on otettu vain lukujonoja koskeva osuus. Vaikka kirjan rekursiomääritelmä ja esimerkki antaa ymmärtää sen olevan melkein lukiotasolla, varsinaiset erot löytyvät harjoitustehtävistä ja niiden vaatimuksista.

5 Raja-arvon ε-tekniikkaa lukiolaisille

Lukujonon määritelmä kuuluu lukion opetussuunnitelman mukaisesti matematiikan peruskursseihin. Peruskurssien puolella on oppikirjasta riippuen otettu lukujonojen käsittelyyn kasvavat ja vähenevät lukujonot, rajoitetut ja monotoniset lukujonot, rekursiiviset lukujonot ja jopa lukujonon raja-arvo, mikä opetussuunnitelman mukaan kuuluu syventäviin kursseihin [10, s. 124]. Lukujonon raja-arvon tarkka määritelmä ε-tekniikalla ei kuulu nykyisellään lukion oppimäärään ja tuleva opetussuunnitelman muutos ei tule tähän tuomaan muutosta.

Lukion syventävässä kurssissa 13 käsitellään raja-arvon laskeminen, mutta ε-tekniikkaa pyritään välttelemään esittämällä se lyhyesti tai jopa jättämällä se kokonaan pois. Hyvänä esimerkkinä ε-tekniikan esittämisestä toimii kirja Matematiikan taito 13. Kuitenkin vaikuttaisi, että esitykset ovat paljolti kopioita yliopistomatematiikasta ja kaikkia yksityiskohtia ei ole täysin selvennetty. Hyvällä kielentämisellä oppimista ja asioiden selventämistä voidaan tukea. Lukiossa tämä korostuu erityisesti. Kyse on nuorista, joille asioiden selkeä esitystapa on keino päästä sisään matemaattiseen ajatteluun. Seuraavassa tarkastellaan Solmu-lehdessä ollutta Markku Halmetojan ehdotusta ε-tekniikan opetukseen lukiossa [1].

Lukiossa olisi hyvä aloittaa kertomalla lukujonon ε-tekniikan tarkoitus. Sillä ei voida laskea annetun jonon raja-arvoa, vaan sen avulla voidaan todistaa, että annettu luku joko on tai ei ole annetun jonon raja-arvo.

Olkoon nyt lukujono (a_n), minkä raja-arvoa lähdetään tarkastelemaan. Voidaan määritellä, että lukujono (a_n) suppenee kohti raja-arvoa a, jos jonon termit a_n lähestyvät rajattomasti lukua a eli tulevat mielivaltaisen lähelle lukua a, kun n kasvaa rajattomasti. Tätä ei kuitenkaan käytetä matemaattisena määritelmänä, koska termit rajaton lähestyminen ja rajaton kasvaminen sekä mielivaltaisen lähellä ovat kuvailevia käsitteitä. Myös lukiota varten tarvitaan raja-arvolle määritelmä yksinomaan reaalilukujen ominaisuuksia käyttäen.

Termien a_n rajattomalla lähestymisellä eli mielivaltaisen lähelle lukua a tulemisella ja luvun n rajattomalla kasvamisella ovat käytössä merkinnät

$$a_n \to a, \quad \text{kun } n \to \infty.$$

Koska lukujen a_n ja a välinen etäisyys on niiden erotuksen itseisarvo eli $|a_n - a|$, saadaan

$$a_n \to a, \text{ jos ja vain jos } |a_n - a| \to 0, \text{ kun } n \to \infty.$$

Tarkastellaan seuraavaksi sitä, kuinka suureksi arvon n pitää tulla, jotta raja-arvo saavutettaisiin? Vastauksena tähän tarkastellaan jonoa

$$a_n = \frac{1}{n}.$$

Termit lähestyvät nollaa, kun n kasvaa, mutta raja-arvoa 0 ei saavuteta millään arvolla n, vaikka otettaisiin kuinka suuri arvo n_ε tahansa. Arvo n on siis valittava suuremmaksi kuin mikään ennalta asetettu äärellinen rajakohta $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$. Tätä merkitään siis lyhyesti $n \to \infty$ ja sanotaan, että n lähestyy ääretöntä.

Erotus $|a_n - a|$ on arvosta n riippuva ei-negatiivinen reaaliluku. Jos tämä erotus voidaan arvoa n kasvattamalla tehdä pienemmäksi kuin mikään mielivaltaisesti etukäteen valittu pieni positiivinen reaaliluku ε, niin erotus tulee mielivaltaisen lähelle nollaa. Näin ollen saadaan lukujonon raja-arvolle tarkka määritelmä.

Määritelmä 5.1. Lukujonolla (a_n) on raja-arvo a, $a \in \mathbb{R}$, jos jokaista mielivaltaisen pientä positiivista lukua ε kohden voidaan määrätä sellainen kokonaisluku n_ε, $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, että

$$|a - a_n| < \varepsilon \text{ heti, kun } n > n_\varepsilon.$$

Vaikka määritelmässä 5.1 on tietoisesti haettu selventävää sanamuotoa tukemaan ε-tekniikkaa, jää vielä paljon tehtävää opettajalle ja opiskelijalle asian sisäistämiseksi. Vaihtoehtoisesti voi raja-arvon tilalla puhua suppenemisesta kohti raja-arvoa a. Voidaan vielä verrata määritelmää 5.1 seuraavaan yliopistomatematiikan lukujonon raja-arvon määritelmään.

Määritelmä 5.2. Lukujonon (a_n) raja-arvo on a, jos

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+ : \exists n_\varepsilon \in \mathbb{Z}_+ : n > n_\varepsilon \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon.$$

On selvää, ettei tätä määritelmää 5.2 tule käyttää lukiossa ε-tekniikan opetukseen sen liiallisen tiiviyden ja lukiolaisille vieraan merkintätavan takia. Lopuksi on hyvä selventää asiaa esimerkeillä.

Esimerkki 5.1. Olkoon lukujono (a_n), jolle

$$a_n = \frac{2n+1}{n-1}.$$

Todista, että lukujonon (a_n) raja-arvo on 2.

Todistus. Todistetaan raja-arvon määritelmää 5.1 käyttämällä, että $\lim_{n\to\infty} a_n = 2$. Olkoon $\varepsilon > 0$ mielivaltaisen pieni. Tällöin

$$\begin{aligned}
|a_n - 2| &= \left|\frac{2n+1}{n-1} - 2\right| \\
&= \left|\frac{2n+1}{n-1} - \frac{2n-2}{n-1}\right| \\
&= \left|\frac{2n+1-2n+2}{n-1}\right| \\
&= \frac{3}{n-1} < \varepsilon,
\end{aligned}$$

jos

$$n > 1 + \frac{3}{\varepsilon}.$$

Jos siis kokonaisluku n_ε on vähintään yhtäsuuri kuin reaaliluku $1+3/\varepsilon$ ja n suurempi kuin n_ε, niin $|a_n - 2| < \varepsilon$ olipa positiivinen ε kuinka pieni tahansa. Siis $a_n \to 2$, kun $n \to \infty$. □

Esimerkki 5.2. Olkoon lukujono (a_n), jolle

$$a_n = \frac{3n-1}{n-1}.$$

Osoita, että $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 2$.

Todistus. Helposti nähdään, että $\lim_{n\to\infty} a_n = 3$. Todistetaan väite käyttämällä määritelmää 5.1. Tarkastellaan erotusta $|a_n - 2|$. Havaitaan, että

$$\begin{aligned}
|a_n - 2| &= \left|\frac{3n-1}{n-1} - 2\right| \\
&= \left|\frac{3n-1}{n-1} - \frac{2n-2}{n-1}\right| \\
&= \left|\frac{3n-1-2n+2}{n-1}\right| \\
&= \frac{n+1}{n-1} > 1, \text{ kun } n \geq 2.
\end{aligned}$$

Voidaan olettaa, että $0 < \varepsilon < 1$, joten epäyhtälö $|a_n - 2| < \varepsilon$ ei voi toteutua. Siis $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 2$. □

Muita hyviä ε-tekniikan harjoitustehtäviä lukioon ovat esimerkiksi lukujonon laskusääntöjen, kuten summan, vakiotekijän siirron ja tulon raja-arvon, todistaminen ε-tekniikalla.

6 Lopuksi

Uusi vuonna 2016 käyttöön tuleva lukion opintosuunnitelma ei tuo suoranaista muutosta matematiikan opintojen nykyisiin tuntimääriin. Matematiikan opintoihin on tulossa muutos siten, että matematiikan opinnot alkavat kaikille yhteisellä kurssilla, jonka jälkeen opiskelijan opinnot eriytyvät joko pitkään tai lyhyeen matematiikkaan. Tämän ensimmäisen kurssin sisältö tulee siis soveltumaan sekä tuleville pitkän että lyhyen matematiikan opiskelijoille. Koska toistaiseksi mitään aihealuetta ei olla poistamassa lukion matematiikasta, on mahdollista, että tämä muutos tulee vaikuttamaan muidenkin kurssien aihesisältöihin.

Ideaalisena tavoitteena on, että yliopiston matematiikan opiskelu jatkuu siitä, mihin lukio lopettaa. Tällöin lukion matematiikan opetuksen yhtenä oleellisena tehtävä on tuoda peruskäsitteet riittävän selkeästi esille ja tarjota niiden kautta riittävä käsitteistö matematiikan jatko-opiskeluun yliopistossa. Etenkin matematiikan syventävien opintojen pitäisi pystyä tarjoamaan jo selvä rajapinta tulevaan yliopisto-opiskeluun. On hyvä muistaa, että yliopistossa kaikilla matematiikkaa opiskelevilla ei välttämättä ole suoritettuna näitä lukion vapaaehtoisia matematiikan syventäviä kursseja.

Tarkastelemalla lukujonojen käsittelyä kolmessa eri matematiikan opetuksen kirjasarjassa, voidaan havaita miten tämä lukion tarjoama pohja rakentuu ja nivoutuu kohti vertailukohtana toimivaa yliopiston opetusta. On selvää, että tarkastelemalla pelkästään matematiikan oppikirjoja ei voida sanoa kaikkea itse opetuksesta lukiossa. Voidaan kuitenkin olettaa, että opetuksen sisältö vaihtelee sen mukaan, mitä oppikirjaa opetukseen on käytetty. Vaikka kirjoissa on asioiden esittämisessä eroja, kaikki ovat lukujonon peruskäsitteiden osalta onnistuneet kattamaan opetussuunnitelman mukaiset tavoitteet ja keskeisen sisällön. Toisaalta on helppo havaita, että Matematiikan taito kattaa lukujonojen aihealuetta huomattavasti laajemmin kuin Pyramidi tai Pitkä matematiikka. Erityisesti tämä korostuu kurssin 9 kirjassa, mutta myös kurssin 13 kirjassa.

Ajankäyttöehdotuksesta lukujonojen opetukseen voidaan havaita selkeä ero eri kirjoissa. Matematiikan taito suosittaa 12 oppitunnin mittaista kokonaisuutta ja Pitkä matematiikka vain 6 oppitunnin pohjustusta kurssille 9. Vastaavasti kurssille 13 Matematiikan taito ehdottaa neljää oppituntia, kun taas Pitkä matematiikka kolmea oppituntia. Pyramidi ei anna aikatauluehdotusta, mutta materiaalin määrän perusteella se olisi jotain näiden kahden välistä. Ajankäytöllisesti Matematiikan taito haluaa selvästi panostaa aiheeseen. On selvä, että Pitkä matematiikka ei painota erityisesti lukujonoja. Toisaalta voidaan kysyä, painottaako Matematiikan taito ajankäytön ehdotuksessa liikaa lukujonoja muiden aiheiden kustannuksella ja onko kirjan Pitkä matematiikka 9 lukujonojen sisältö jo liian laaja verrattuna opetussuunnitelman tavoitteisiin. Kirjassa Matematiikan taito 9 on lukujonojen sisällössä kurssille 13 kuuluvia aiheita. Liika sisältö voi aiheuttaa tuntisuunnitelman kariutumisen. Toisaalta liian sisällön takia aiheiden käsittely saattaa jäädä helposti oppitunneilla pintapuoleiseksi ja uusien asioiden läpikäyminen ja omaksuminen jäädä opiskelijan omalle vastuulle. Tätä tuskin voidaan pitää hyvänä tavoitteena lukiossa.

Lukujonojen käsittely lähtee kaikissa kirjoissa liikkeelle lukujonon määritelmästä ja siitä kuinka lukujonoa merkitään. Lukujonon merkinnöissä on eroja kirjasarjojen välillä, riippuen siitä kuinka merkintä on kirjassa sovittu. Kuitenkin kirjoissa Matematiikan taito ja Pitkä matematiikka merkintätavat vaihtelevat myös yksittäisen kirjan sisällä. Kirjassa Pyramidi käytetään samaa sovittua merkintää lukujonoille koko aihealueella. Vaihtelevia merkintöjä ei ole korjattu tähän tutkimukseen, vaan on tarkoituksella käytetty kirjojen muotoilua korostamaan niiden tyyliä käsitellä aihetta.

Kirjoissa Matematiikan taito on ennen asian varsinaista määritelmää annettuna ns. alkupala pohjustamaan tulevaa määritelmää. Huomautettakoon, että tämä alkupala on kirjan käyttämä termi. Monesti tämä alkupala on hyvin laaja, asian esimerkein avaava selvitys peruskäsitteistä. Ja itse määritelmä on suppeampi, matemaattiseen esitykseen pyrkivä tapa ilmaista jo alkupaloissa esitetyt asiat. Kirjoissa Matematiikan taito esitetään asiat selvästi omalla rytmityksellään verrattuna kahteen muuhun oppikirjaan. Tämä ei välttämättä ole aina eduksi ja korostuu etenkin rajoitettujen ja monotonisten lukujonojen käsittelyn yhteydessä hajanaisuutena kirjassa 9. Kuitenkin kirjan Matematiikan taito 9 kertausosiossa asiat ovat selvässä ja loogisemmassa järjestyksessä. Kirjasarja Matematiikan taito on matemaattisesti huomattavasti laajempi kuin kirjasarjat Pyramidi tai Pitkä matematiikkaa.

Kirjoissa Pyramidi aloitetaan johdannolla, jossa käsittelyyn tulevalle aiheelle esitetään historiallinen tausta. Vaikka tällaisella tarinalla ei matemaattisesti ole merkitystä eikä se edesauta määritelmien ymmärtämistä tai lukiolaisen kotitehtävien tekoa, sen pedagogista puolta ei pidä väheksyä. Mielenkiinnon herättäminen ja sen ylläpitäminen ovat opettajalle haasteellisia tehtäviä. Historiallisten tarinoiden tuoma keveys voi olla tarvittava tekijä mielenkiinnon herättäjänä, etenkin niille opiskelijoille, jotka eivät koe matematiikkaa lukiossa pääaineekseen. Kirjoissa Pyramidi ei aina käytetä määritelmiä, vaikka näin olisi voitu tehdä. Tämä ei kuitenkaan välttämättä aiheuta ongelmaa, koska ydinasiat ovat esillä riittävän selkeästi. Pyramidi noudattaa opetussuunnitelman mukaista jakoa tarkemmin kuin Matematiikan taito. Matematiikan laajuus on suppeampi kuin kirjoissa Matematiikan taito, mutta on joissain aiheissa laajempi kuin kirjoissa Pitkä matematiikka. Pyramidi sortuu kuitenkin välillä pyörittämään asioita ilman selkeää etenemistä.

Pitkä matematiikka etenee suoraviivaisesti esittämällä aiheeseen alkuun avoimen ongelman ja esimerkin. Näiden avulla aihetta pyritään avaamaan lukijalle. Yleensä selvennetään vielä tarvittavat peruskäsitteet, joista edetään sujuvasti itse määritelmään. Aina määritelmää aiheelle ei ole tarjottu, vaan on tyydytty peruskäsitteiden selvennykseen. Sujuvuus ei harmittavasti jatku määritelmien esityksessä. Häiritseväksi tekijäksi nousee määritelmien jakaminen osiin. Osien väliin on sijoitettu asiaa selventäväksi tarkoitettu laskuesimerkki. Määritelmän kokonaisuutta on tällöin vaikea hahmottaa. Kirjoissa Pitkä matematiikka on siirretty joitain teoriaosuuksia harjoitustehtäviin, mikä vaikeuttaa asioiden löytämistä kirjasta ja vähentää kirjan arvoa itseopiskelussa.

Lukujonon raja-arvon käsittelyn jättäminen syventävään kurssiin 13 aiheuttaa hajannaisuutta järjestyksessä, miten lukujonojen käsittely lukiossa etenee ja miten määritelmät ja lauseet perustellaan. Useat matematiikan analyysin kirjat esittävät lukujonon raja-arvon heti seuraavana lukujonon määrittelyn jälkeen, jolloin raja-arvoa voidaan hyödyntää muiden lukujonon määritelmien todistuksissa. Tästä voidaan antaa esimerkkinä Trenchin Introduction to Real Analysis [17]. Myös kurssi Analyysi 1 etenee lukujonon määritelmästä raja-arvon kautta muihin lukujonon määritelmiin.

Lauseiden todistuksissa on havaittavissa selkeä ero lukion kurssikirjojen ja kurssin Analyysi 1 välillä. Lukiokirjojen todistukset muistuttavat enemmän laskentaa, kun taas kurssin Analyysi 1 lukujonon todistukset nojaavat ε-tekniikan käyttöön. Todistusten heppoisuus ei ole pelkästään lukujonoja koskeva seikka lukiomatematiikassa. Mahdollisuudet asiallisiin todistuksiin ovat kuitenkin rajalliset lukiomatematiikan antamissa puitteissa. Todistuksiin tarvitaan monesti yliopistomatematiikkaa. Termit määritelmä, lause ja todistus esiintyvät harvoin lukion matematiikan kirjoissa, vaikka niiden käytölle ei ole mitään estettä. Voitaisiin helposti verrata matematiikan termistöä äidinkielen kieliopin termistöön ja kysyä, miksi äidinkielessä opetellaan huomattavan paljon laajempi käsitteistö? Oikeiden termien käyttö jo lukiossa olisi oleellista jatko-opiskelua ajatellen. Tämä on ehkä tärkeämpää kuin kaikkien keveiden laskennallisten todistusten esittäminen.

Lukion oppikirjoista on jouduttu karsimaan paljon lukujonojen sisältöä. Tälläisiä aiheita ovat esimerkiksi lukujonojen osajonot ja niiden suppeneminen sekä lukujonojen laskusäännöistä lukujonon neliöjuuri. Nämä voitaisiin ilman ajankäytön tuomaa estettä esittää jo lukiossa. Toisaalta lukiokirjoissa on lukujonojen yhteydessä sivuttu pikaisesti menetelmiä, kuten kolmioepäyhtälö ja induktio, jotka eivät ole suorassa liitoksessa lukujonoihin. Molemmat menetelmät vaatisivat syvällisemmän tarkastelun, jotta ne voitaisiin omaksua ja niitä voitaisiin hyödyntää lukiomatematiikassa. Nyt ne on esitetty liian suppeasti ja oikaisten oleellisissa välivaiheissa.

Lukujonon raja-arvon yhteydessä esiin nousee ε-tekniikka. Tämä vielä monelle yliopistossakin haasteellinen tekniikka on tuttu vain osalle lukion pitkän matematiikan opiskelijoista. Kolmesta tarkastellusta kirjasarjasta Matematiikan taito osoittautui parhaimmaksi ε-tekniikan opetukseen sisältäen esimerkkejä ja harjoituksia. Pyramidi esittää raja-arvon määritelmän ε-tekniikalla lyhyesti, mutta jättää täysin sitä hyödyntävät esimerkit ja harjoitukset pois. Toisaalta Pitkä matematiikka ei määrittele lukujonon raja-arvoa ε-tekniikalla ollenkaan. Voikin todeta, että kirja Matematiikan taito olisi hyödyllinen kurssilla Analyysi 1 ε-tekniikan opiskeluun valmentavana materiaalina, aivan kuten kirjan Matematiikan taito esipuheessa sanotaan. Yhdessäkään lukion kirjassa ε-tekniikan perehdyttämiseen ei ole kuitenkaan panostettu riittävästi. Asian esittäminen vaatii oikeanlaista kielentämistä ja selventäviä esimerkkejä ja harjoituksia. Olisi selventävää kertoa mihin ε-tekniikkaa käytetään. Tähän tutkielmaan on sisällytetty kappale ε-tekniikan opettamisesta lukiolaisille.

On syytä nostaa esille myös huoli matematiikan jatkokurssien ja koulukohtaisten lisäkurssien tulevaisuudesta. Lukiot kuten muutkin yhteiskunnan tahot ovat joutuneet tiukan taloudellisen puristuksen kouriin ja niiltä vaaditaan jatkuvia säästöjä. Tällaisessa tilanteessa yksittäiset lukiot saattavat joutua karsimaan syventäviä kursseja tai omia lisäkurssejaan. Tämä tuskin tulee kuitenkaan koskemaan matemaattisesti ja teknisesti painottuneita lukioita.

Opetussuunnitelman mukainen lukio-opetus lukujonoille voisi olla sisällöltään laajempi. Sisällön jakoa perus- ja syventäviin kursseihin voisi harkita niin, että lukujonon raja-arvo tulisi jo peruskurssien puolella. Lukujonoista jää paljon aiheita yliopiston matematiikan kursseille, vaikka osan pystyisi lukiossa lukujonojen yhteydessä esittämään. Ongelmaksi nousee lukion matematiikan opetuksen rajallinen aika. Kirjat käsittelevät lukujonon opetussuunnitelman antamissa rajoissa tai sen yli. Peruskäsitteet esitetään selkeästi. Kirjojen välillä on eroja, mutta myös paljon samankaltaisuutta. Riittävä pohja lukujonojen yliopisto-opintoja varten muodostuu, jos opiskelija suorittaa vapaaehtoisen syventävän kurssin 13. Suurimmaksi haasteeksi lukujonojen opetuksessa jää jo monesti esiin tuotu puutteellinen ε-tekniikan käsittely. Opetussuunnitelma ei sitä vaadi ja siksi lukion matematiikan kirjat eivät anna riittävää tukea opiskelijalle, vaan aiheen syventävä opetus jää opettajan toiminnan varaan ja lopulta yliopiston tehtäväksi.

Lähteet

[1] Halmetoja, M.: *Lukujonoista*, Solmu, 2006. [viitattu 6.11.2014]. Saatavissa Internetistä: http://solmu.math.helsinki.fi/2006/1/halmetoja.pdf

[2] Halmetoja, M., Häkkinen, K., Merikoski, J., Pippola, L., Silfverberg, H., Tossavainen,: *Matematiikan taito 13 - Differentiaali- ja integraalilaskennan jatkokurssi.* Helsinki: WSOY Oppimateriaalit Oy, 2008.

[3] Halmetoja, M., Häkkinen, K., Merikoski, J., Pippola, L., Silfverberg, H., Tossavainen, T., Laurinolli, T., Sankilampi, T., Viilo, M., Väänänen, K.: *Matematiikan taito 9 - Trigonometriset funktiot ja lukujonot.* Helsinki: WSOY Oppimateriaalit Oy, 2007.

[4] Härkönen, R., Kontkanen, P., Lehtonen, J., Luosto, K., Ronkainen, A., Savolainen, S.: *Pyramidi 9 - Trigonometriset funktiot ja lukujonot.* Helsinki: Kustannusosakeyhtiö Tammi, 2011.

[5] Kangasaho, J., Mäkinen, J., Oikkonen, J., Paasonen, J., Salmela, M., Tahvanainen, J.: *Pitkä matematiikka 9 - Trigonometriset funktiot ja lukujonot.* Helsinki: WSOY Oppimateriaalit Oy, 2007.

[6] Kangasaho, J., Mäkinen, J., Oikkonen, J., Paasonen, J., Salmela, M., Tahvanainen, J.: *Pitkä matematiikka 13 - Differentiaali- ja integraalilaskennan jatkokurssi.* Helsinki: WSOY Oppimateriaalit Oy, 2008.

[7] Koivisto, P.: *Analyysi 1 kurssimoniste*. Tampereen yliopisto, 2014. [viitattu 6.11.2014]. Saatavissa Internetistä: http://www.sis.uta.fi/matematiikka/analyysi-1/moniste2014/Analyysi1.pdf.

[8] Kontkanen, P., Lehtonen, J., Luosto, K.: *Pyramidi 13 - Differentiaali- ja integraalilaskennan jatkokurssi.* Helsinki: Sanoma Pro Oy, 2012.

[9] Merikoski, J., Virtanen, A., Koivisto, P.: *Johdatus diskreettiin matematiikkaan.* Helsinki: WSOY / Oppimateriaalit, 2004.

[10] Opetushallitus, *Lukion Opetussuunnitelman perusteet 2003*. [viitattu 4.3.2015]. Saatavissa Internetistä: http://www.oph.fi/download/47345_lukion_opetussuunnitelman_perusteet_2003.pdf.

[11] Opetushallitus, *Tiedote lukion opetussuunnitelman perusteiden laatimisesta 20.11.2014*. [viitattu 4.3.2015]. Saatavissa Internetistä: http://www.oph.fi/download/163106_opetushallitus_tiedote_66_2014.pdf.

[12] Opetus- ja kulttuuriministeriö, *Tulevaisuuden lukio, tuntijako ja tavoitteet*. [viitattu 4.3.2015]. Saatavissa Internetistä: http://www.minedu.fi/export/sites/default/OPM/Julkaisut/2013/liitteet/tr14.pdf?lang=fi.

[13] Tampereen yliopisto, *Analyysi 1 -kurssin tavoitteet*, 2014. [viitattu 6.11.2014]. Saatavissa Internetistä: https://www10.uta.fi/opas/opintojakso.htm?rid=6909&idx=0&uiLang=fi&lang=fi&lvv=2014.

[14] Tampereen yliopisto, *Johdatus analyysiin -kurssin tavoitteet*, 2014. [viitattu 9.4.2015]. Saatavissa Internetistä: https://www10.uta.fi/opas/opintojakso.htm?rid=6989&idx=1&uiLang=fi&lang=fi&lvv=2014.

[15] Tampereen yliopisto, *Johdatus matemaattiseen päättelyyn -kurssin tavoitteet*, 2014. [viitattu 9.4.2015]. Saatavissa Internetistä: https://www10.uta.fi/opas/opintojakso.htm?rid=6909&idx=1&uiLang=fi&lang=fi&lvv=2014.

[16] Tampereen yliopisto, *Matematiikan peruskäsitteitä -kurssin tavoitteet*, 2014. [viitattu 9.4.2015]. Saatavissa Internetistä: https://www10.uta.fi/opas/opintojakso.htm?rid=6989&idx=0&uiLang=fi&lang=fi&lvv=2014.

[17] Trench, William F.: *Introduction to Real Analysis*. Books and Monographs. Book 7. 2013. [viitattu 14.11.2014]. Saatavissa Internetistä: http://digitalcommons.trinity.edu/mono/7.