PRO GRADU -TUTKIELMA

Samuli Koskinen

Differentiaaliyhtälöryhmät ja matriisieksponenttifunktiot

TAMPEREEN YLIOPISTO
Informaatiotieteiden yksikkö
Matematiikka

Joulukuu 2014

Tampereen yliopisto
Informaatiotieteiden yksikkö
Koskinen, Samuli: Differentiaaliyhtälöryhmät ja matriisieksponenttifunktiot
Pro gradu -tutkielma, 64 s.
Matematiikka
Joulukuu 2014

Tiivistelmä

Tutkielman aiheena on differentiaaliyhtälöryhmät ja matriisieksponenttifunktiot. Tutkielmassa tarkastellaan ensimmäisen kertaluvun differentiaaliyhtälöryhmiä, niin lineaarisia kuin epälineaarisiakin. Myös matriisieksponenttien teoriaa esitellään ja käytetään yhtälöryhmien tarkastelemiseksi. Teoriaa ja tuloksia pyritään havainnollistamaan monipuolisten esimerkkien avulla.

Alussa perehdytään muutamaan tarkasteluiden kannalta oleelliseen matriisiteorian tulokseen. Tämän jälkeen käsitellään lineaariset differentiaaliyhtälöryhmät ja matriiseksponenttifunktiot. Lopuksi esitellään epälineaarisia differentiaaliyhtälöryhmiä ja erilaisia sovelluksia.

Lineaaristen differentiaaliyhtälöryhmien ratkaisemiseen on olemassa monenlaisia menetelmiä. Menetelmien valinta rippuu, onko kyseessä homogeeninen vai epähomogeeninen yhtälöryhmä. Homogeenisten differentiaaliyhtälöryhmien tapauksessa ryhmän kerroinmatriisin ominaisarvot tarjoavat keinon ratkaisuiden etsimiseen yhdessä eksponenttifunktioiden kanssa. Epähomogeenisten differentiaaliyhtälöryhmien tapauksessa ratkaisuiden löytäminen on hankalampaa.

Ratkaisuiden löytämisen apuna differentiaaliyhtälöryhmille on usein eksponenttifunktio ja tässä tapauksessa matriisieksponenttifunktio. Matriisieksponenttifunktio tarjoaa kaavan differentiaaliyhtälöryhmien yksikäsitteiselle ratkaisulle nimenomaan lineaarisissa tapauksissa. Ratkaisu on olemassa riippumatta siitä, onko kyseessä homogeeninen tai epähomogeeninen ryhmä. Matriisieksponenttiratkaisuiden ongelmana on matriisieksponenttifunktion arvojen laskeminen, joka tietyissä tilanteissa on varsin hankalaa. Ratkaisuiden etsimiseen tulee käyttää niin sanottua Putzerin menetelmää.

Epälineaaristen differentiaaliyhtälöryhmien ratkaisemisessa on tapana käyttää numeerisia menetelmiä. Kuitenkin ratkaisuita ja tasapainoja voidaan analysoida ilman varsinaisten ratkaisuiden etsimistä. Tämä tapahtuu tarkastelemalla differentiaaliyhtälöryhmän kriittisiä pisteitä ja linearisointeja niiden läheisyydessä. Sovelluksissa kriittiset pisteet ja ratkaisuiden käyttäytyminen niiden läheisyydessä on suuressa roolissa. Linearisointi tarjoaa mahdollisuuden tutkia ratkaisuiden käyttäytymistä, sillä lineaaristen ryhmien ratkaisuun on helpompia keinoja.

Asiasanat Lineaariset differentiaaliyhtälöryhmät, matriisieksponentti,

Sisältö

1 Johdanto **7**

2 Matriisiteoriaa **8**

2.1 Matriisi- ja vektoriarvoiset funktiot 8
2.2 Matriisinormit 9
2.3 Matriisisarjan suppeneminen 10
2.4 Vektorikentät 11

3 Ensimmäisen kertaluvun lineaariset differentiaaliyhtälöryhmät **14**

3.1 Homogeeniset ryhmät 16
3.1.1 Ominaisarvomenetelmä 18
3.2 Epähomogeeniset ryhmät 22

4 Matriisieksponenttifunktio ja differentiaaliyhtälöryhmät **25**

4.1 Matriisieksponenttifunktio 25
4.2 Matriisieksponenttifunktio differentiaaliyhtälöryhmän ratkaisuna . . 27
4.3 Matriisieksponenttifunktion laskeminen 36
4.3.1 Putzerin menetelmä 38
4.3.2 Muita menetelmiä 40

5 Epälineaariset differentiaaliyhtälöryhmät **45**

5.1 Kriittiset pisteet ja stabiilisuus 45
5.2 Linearisointi 50
5.3 Lineaaristen ja melkein lineaaristen differentiaaliyhtälöryhmien stabiilius 55
5.4 Kvalitatiivinen analyysi 60
Viitteet 64

1 Johdanto

Tässä tutkielmassa käsittelemme differentiaaliyhtälöryhmiä ja matriisieksponenttifunktioita. Monissa sovelluksissa etenkin fysiikan puolella on komponentteja, jotka vaihtelevat ajan mukana ja sisältävät differentiaaliyhtälöitä. Sovelluksissa nimenomaisesti tulee ratkaistavaksi useita differentiaaliyhtälöitä samanaikaisesti, mikä johtaa yhtälöryhmien käyttöön. Tutkielmassa keskitymme ensimmäisen kertaluvun differentiaaliyhtälöryhmiin, sillä suurin osa sovelluksista hyödyntää niitä ja korkemman kertaluvun ryhmät on mahdollista muuntaa ekvivalenteiksi ensimmäisen kertaluvun ryhmiksi.

Luvussa 2 esitämme tarvittavia esitietoja matriisiteoriasta. Matriisiteorian tulokset ovat varsin suuressa roolissa etenkin, kun tarkastelemme matriisieksponenttifunktioita. Luvussa 3 tarkastelemme ensimmäisen kertaluvun lineaarisia differentiaaliyhtälöryhmiä. Esittelemme ensin homogeeniset ryhmät ja yleistämme siitä vähitellen kohti yleistä differentiaaliyhtälöryhmää.

Luvussa 4 käsittelemme matriisieksponenttifunktioita. Esitämme kyseisten funktioiden määritelmän ja muutamia perusominaisuuksia. Pääasiassa tarkastelumme kuitenkin tapahtuu tässäkin luvussa differentiaaliyhtälöryhmien kautta. Luvun lopussa esitämme keinoja matriisieksponenttien laskemiseen.

Luvussa 5 siirrymme epälineaarisiin differentiaaliyhtälöryhmiin. Esittelemme keskeisiä analyysikeinoja näille ryhmille ja esimerkkien kautta näytämme, kuinka epälineaaristen yhtälöryhmien ratkaisuja voidaan tulkita.

Tutkielma perustuu pitkälti Tom M. Apostolin teokseen "Calculus: Volume II" ja Edwards & Penneyn teokseen "Differential equations & Linear algebra". Tutkielmassa esiintyvät kuviot on laadittu HPG System Solver- ohjelmalla. Ohjelma tulee Blanchard & Devaney & Hallin kirjan "Differential Equations" mukana. Kyseinen ohjelma ratkoo kahden yhtälön differentiaaliyhtälöryhmiä numeerisesti ja piirtää tarvittavat kuviot. Tutkielmassa oletamme lukijan tuntevan differentiaaliyhtälöiden perusteet, sekä perusteet lineaarialgebrasta.

2 Matriisiteoriaa

Tässä luvussa esittelemme matriisiteoriaa, jota tarvitsemme matriisieksponenttien käsittelyssä. Käsittelemme matriisiarvoisten funktioiden, matriisinormien ja matriisisarjojen suppenemisen määritelmät ja ominaisuuksia. Luvussa oletamme lukijan tuntevan perusteet matriiseista ja niiden ominaisuuksista.

2.1 Matriisi- ja vektoriarvoiset funktiot

Tietyt matriisi- ja vektoriarvoisten funktioiden ominaisuudet tulevat varsin hyödyllisiksi ratkaistaessa differentiaaliyhtälöryhmiä. Etenkin näiden käsitteiden avulla saamme differentiaaliyhtälöryhmät esitettyä helpommassa muodossa. Tässä alaluvussa esitämme kyseisten funktioiden määritelmät ja joitakin hyödyllisiä ominaisuuksia.

Merkintä. Merkitsemme kaikkien reaalielementtisten $n \times n$ -matriisien joukkoa notaatiolla $\mathbb{R}^{n\times n}$.

Määritelmä 2.1. Funktio $\mathbf{A} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n\times n}$, missä

$$\mathbf{A}(t) = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{bmatrix},$$

on *matriisiarvoinen funktio* tai lyhyesti *matriisifunktio*. Funktio $\mathbf{x} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n\times 1}$, missä

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix},$$

on vastaavasti *vektoriarvoinen funktio* tai *vektorifunktio*. Molemmissa tapauksissa jokainen alkio on muuttujan t funktio. [4, s. 403]

Määritelmä 2.2. Matriisiarvoinen funktio $\mathbf{A}(t)$ on *jatkuva (derivoituva)* välillä I, jos jokainen sen alkio on jatkuva (derivoituva) kyseisellä välillä. Matriisifunktion *derivaatta* määritellään alkioittain derivoimalla eli

$$\mathbf{A}'(t) = \frac{d\mathbf{A}}{dt} = \left[\frac{da_{ij}}{dt}\right].$$

Samoin matriisifunktion *integraali* määritellään alkioittain, mikäli jokainen funktio $a_{ij}(t)$ on integroituva välillä $[a, b]$. Vektoriarvoisten funktioiden jatkuvuus, derivaatta ja integraali määritellään samoin alkioittain. [4, s. 404], [1, s. 193]

Huomautus. Funktiot $\mathbf{A}'(t)$ ja $\int_a^b \mathbf{A}(t)$ ovat matriisifunktioita $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n\times n}$.

Matriisiarvoisten funktioiden derivaatoille voimme todistaa seuraavanlaiset ominaisuudet.

Lause 2.1. *Olkoot* $\mathbf{A}$ *ja* $\mathbf{B}$ *derivoituvia matriisiarvoisia funktioita ja niiden maalijoukot samaa kokoa. Tällöin pätee derivaatan yhteenlaskusääntö*

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})'(t) = \mathbf{A}'(t) + \mathbf{B}'(t).$$

Lisäksi, mikäli tulo $\mathbf{AB}$ *on määritelty, pätee derivaatan tulosääntö*

$$(\mathbf{AB})'(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{B}'(t) + \mathbf{A}'(t)\mathbf{B}(t).$$

Jos vielä c *on vakio ja* $\mathbf{C}$ *vakiomatriisi ja tulot* $\mathbf{AC}, \mathbf{CA}$ *on määritellyt, niin pätee*

$$(c\mathbf{A})' = c\mathbf{A}', \quad (\mathbf{CA})' = \mathbf{CA}', \quad (\mathbf{AC})' = \mathbf{A}'\mathbf{C}.$$

Todistus. Lauseen tulokset seuraavat suoraan analyysin derivointikaavoista, kun matriisiarvoisten funktioiden differentioituvuus on määritelty alkioittain. [4, s. 404], [1, s. 193-194] □

Huomautus. Koska matriisien kertolasku ei ole kommutatiivinen, niin tekijöiden järjestystä ei kertolaskuissa saa vaihtaa.

Vektoriarvoisten funktioiden lineaarinen riippumattomuus on isossa roolissa differentiaaliyhtälöryhmien ratkaisuiden ja etenkin yleisen ratkaisun etsimisessä. Kyseisten funktioiden riippumattomuus on yleisen vektoriavaruuden vektorien lineaarisen riippumattomuuden erikoistapaus.

Määritelmä 2.3. Vektoriarvoiset funktiot $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, ..., \mathbf{x}_n$ ovat *lineaarisesti riippuvat*, mikäli on olemassa skalaarit $c_1, c_2, ..., c_n$, joista ainakin yksi eroaa nollasta, siten että

$$c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2 + \cdots + c_n\mathbf{x}_n = \mathbf{0}.$$

Kyseiset vektoriarvoiset funktiot ovat *lineaarisesti riippumattomat*, mikäli ne eivät ole lineaarisesti riippuvia, toisin sanoen, mikäli

$$c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2 + \cdots + c_n\mathbf{x}_n = \mathbf{0}$$

vain triviaalitapauksessa $c_1 = c_2 \cdots = c_n = 0$. [4, s.407]

2.2 Matriisinormit

Matriisinormeja tarvitsemme matriisieksponenttien määritelmän ja todistusten yhteydessä. Tässä alaluvussa esitämme matriisinormin määritelmän ja muutaman perusominaisuuden.

Määritelmä 2.4. Jos $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ on reaalinen tai kompleksinen $m \times n$ -matriisi, niin sen *normin* sanotaan olevan epänegatiivinen luku

$$||\mathbf{A}|| = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|.$$

Toisin sanoen matriisin $\mathbf{A}$ normi on sen alkioiden itseisarvojen summa. [1, s.195]

Huomautus. On olemassa myös muita tapoja määritellä matriisinormit. Käytämme edellä esitettyä määritelmää, sillä se soveltuu parhaiten käyttötarkoituksiimme.

Lause 2.2. *Kaikille $m \times n$ -matriiseille $\mathbf{A},\mathbf{B}$ ja reaalisille tai kompleksisille skalaareille c pätee*

$$
\begin{aligned}
a) &\quad ||\mathbf{A}+\mathbf{B}|| \leq ||\mathbf{A}|| + ||\mathbf{B}||,\\
b) &\quad ||\mathbf{AB}|| \leq ||\mathbf{A}||\,||\mathbf{B}||,\\
c) &\quad ||c\mathbf{A}|| = |c|\,||\mathbf{A}||.
\end{aligned}
$$

Todistus. (Vrt. [1, s.195]) Todistamme ensin kohdan a). Olkoon $\mathbf{A}$ ja $\mathbf{B}$ $m \times n$ -matriiseja. Tällöin kolmioepäyhtälön nojalla

$$||\mathbf{A}+\mathbf{B}|| = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}+b_{ij}| \leq \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}| + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}|b_{ij}| = ||\mathbf{A}|| + ||\mathbf{B}||.$$

Kohdan b) todistusta varten oletamme, että $\mathbf{A}$ on $m \times n$ -matriisi ja $\mathbf{B}$ on $n \times p$ -matriisi. Kirjoittamalla $\mathbf{A} = [a_{ik}]$ ja $\mathbf{B} = [b_{kj}]$ saamme $\mathbf{AB} = [\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}]$, joten normin määritelmästä seuraa

$$||\mathbf{AB}|| = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{p}|\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}| \leq \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}|a_{ik}|\sum_{j=1}^{p}|b_{kj}| \leq \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}|a_{ik}|\,||\mathbf{B}|| = ||\mathbf{A}||\,||\mathbf{B}||.$$

Kohdassa c) oletamme, että $c \in \mathbb{R}$ on mielivaltainen skalaari ja $\mathbf{A}$ on $m \times n$ -matriisi. Tällöin

$$||c\mathbf{A}|| = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}|ca_{ij}| = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}|c||a_{ij}| = |c|\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}| = |c|||\mathbf{A}||.$$

□

Huomautus. Erikoistapauksessa $\mathbf{A} = \mathbf{B}$ lauseen kohdasta b) seuraa $||\mathbf{A}^2|| \leq ||\mathbf{A}||^2$. Induktiolla voimme todistaa, että myös $||\mathbf{A}^k|| \leq ||\mathbf{A}||^k$ pätee kaikilla $k = 1,2,3,\ldots$. Nämä epäyhtälöt tulevat hyödyllisiksi matriisieksponenttien käsittelyssä. [1, s. 195]

2.3 Matriisisarjan suppeneminen

Matriisisarjojen suppeneminen on myös suuressa roolissa matriisieksponenttien käsittelyssä, sillä myöhemmin matriisieksponenttifunktio määritellään suppenevana matriisisarjana. Tässä alaluvussa määrittelemme matriisisarjan suppenemisen käsitteen ja esitämme testin matriisisarjojen suppenemiselle.

Määritelmä 2.5. Olkoon $\{\mathbf{C}_k\}$ ääretön jono reaalisia tai kompleksisia $m \times n$ -matriiseja. Merkitään matriisin $\mathbf{C}_k$ alkiota ij notaatiolla $c_{ij}^{(k)}$. Mikäli kaikki mn sarjat

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_{ij}^{(k)} \qquad (i = 1,\ldots,m, \quad j = 1,\ldots,n) \tag{2.1}$$

suppenevat, niin sanotaan, että matriisisarja $\sum_{k=1}^{\infty}\mathbf{C}_k$ *suppenee*. Sarjan summa määritellään olevan $m \times n$ -matriisi, jonka alkio ij on sarja (2.1). [1, s. 194]

Lause 2.3. *Jos* $\{\mathbf{C}_k\}$ *on jono* $m \times n$ *-matriiseja ja summa*

$$\sum_{k=1}^{\infty} ||\mathbf{C}_k||$$

suppenee, niin myös matriisisarja

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{C}_k$$

suppenee.

Todistus. (Vrt. [1, s. 195]) Koska $|c_{ij}^{(k)}| \leq ||\mathbf{C}_k||$, niin summan

$$\sum_{k=1}^{\infty} ||\mathbf{C}_k||$$

suppenemisesta seuraa jokaisen sarjan

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_{ij}^{(k)} \tag{2.2}$$

itseinen suppeneminen. Koska jokainen sarja (2.2) on suppenee, niin myös matriisisarja

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{C}_k$$

suppenee. □

2.4 Vektorikentät

Tässä alaluvussa käsittelemme vektorikenttiä ja joitakin niiden ominaisuuksia. Vektorikenttien käsitteitä tarvitsemme epälineaaristen differentiaaliyhtälöryhmien käsittelyn yhteydessä. Tarvitsemme tarkasteluissamme vain tason ($\mathbb{R}^2$) vektorikenttiä, joten rajoitamme tarkastelut myös tässä alaluvussa tasoon. Esitämme ensin vektorikentän määritelmän.

Määritelmä 2.6. Olkoon $D \subseteq \mathbb{R}^2$. Sanomme, että *vektorikenttä* on funktio $\mathbf{F}$, joka liittää jokaiseen pisteeseen $(x_1, x_2) \in D$ 2-ulotteisen vektorin $\mathbf{F}(x_1, x_2)$, toisin sanoen vektorikenttä on vektorifunktio

$$\mathbf{F} : D \to \mathbb{R}^2, \quad \mathbf{F}(\mathbf{x}) = (F_1(\mathbf{x}), F_2(\mathbf{x}))),$$

missä $\mathbf{x} \in D$ ja F_1, F_2 ovat funktion $\mathbf{F}$ komponentteja. Vastaavasti *skalaarikenttä* on funktio $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Funktio f siis liittää jokaisen tason pisteen reaalilukuun. [5, s. 1]

Huomautus. Vektorikenttä voidaan esittää myös muodossa

$$\mathbf{F}(x, y) = F_1(x, y)\mathbf{i} + F_2(x, y)\mathbf{j},$$

missä $F_1(x, y)$ on vektorikentän x-komponentti ja $F_2(x, y)$ on vektorikentän y-komponentti.

Vektorikentät voidaan esittää graafisesti piirtämällä koordinaatistoon vektoreita $\mathbf{v}(x, y)$ eri pisteissä (x, y). Nämä vektorikentät muistuttavat luvun 5 kuvioissa esiintyviä suuntakenttiä, jotka on merkitty keltaisin nuolin. Vektorikentät ja suuntakentät eroavat toisistaan siinä, että vektorikentässä eri pisteissä piirretyt vektorit ovat eri mittaisia, kun suuntakenttien tapauksessa piirrämme kaikki saman mittaisina. [3, s. 102]

Määritelmä 2.7. Skalaarikentän $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *gradientti* on

$$\operatorname{grad} f = \nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}\right).$$

[6, s. 1]

Huomautus. Skalaarikentän gradientti on vektorikenttä $\nabla f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Kun vektorikenttä $\mathbf{F}$ on skalaarikentän f gradientti, niin kutsumme kyseistä vektorikenttää *gradienttikentäksi*. Lisäksi sanomme, että f on vektorikentän $\mathbf{F}$ *potentiaalifunktio*. [5, s. 2]

Esitämme seuraavaksi integraalikäyrän määritelmän.

Määritelmä 2.8. Vektorikentän $\mathbf{F} : D \to \mathbb{R}^2$ *integraalikäyrä* välillä $I \in \mathbb{R}$ on kuvaus $z : I \to \mathbb{R}^2$ siten, että

$$z(t) \in D \text{ ja } z'(t) = F(z(t)) \text{ kaikille } t \in I, \text{ ts.} \begin{cases} x_1'(t) = F_1(x_1(t), x_2(t)) \\ x_2'(t) = F_2(x_1(t), x_2(t)), \end{cases}$$

missä $z(t) = (x_1(t), x_2(t)) \in D$. [3, s. 103], [5, s. 2]

Tulevissa luvuissa tulemme huomaamaan, että differentiaaliyhtälöryhmien polut eli ratkaisukäyrät ovat integraalikäyriä vektorikenttien käsitteistössä. Määrittelemme vielä divergenssin ja roottorin käsitteet ja esitämme niille muutamia ominaisuuksia.

Määritelmä 2.9. Vektorikentän $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *divergenssi* on

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2}.$$

[6, s. 1], [9, s. 7]

Määritelmä 2.10. Vektorikentän $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *roottori* on

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} &= \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}\right) \times (F_1, F_2, F_3) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} \\ &= \left(\frac{\partial F_3}{\partial x_2} - \frac{\partial F_2}{\partial x_3}, \frac{\partial F_1}{\partial x_3} - \frac{\partial F_3}{\partial x_1}, \frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2}\right). \end{aligned}$$

[9, s. 7], [6, s. 1]

Huomautus. Roottori voidaan ottaa myös tason vektorikentistä $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Oletamme, että komponentit F_1 ja F_2 eivät riipu muuttujasta x_3 ja kolmas komponentti $F_3 = 0$. Tällöin roottorin kaksi ensimmäistä komponettia ovat nollia ja jäljelle jää vain kolmas komponentti

$$\frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2},$$

mikä on siis tässä tapauksessa tason vektorikentän roottori. [6, s. 1]

Divergenssin voidaan ajatella olevan virtausnopeus eri pisteissä. Roottorille on vaikeampaa saada intuitiivista selitystä, mutta sen voidaan ajatella kuvaavan, kuinka paljon ja mihin suuntaan vektorikenttä kiertyy. Divergenssi voidaan tulkita skalaarikentäksi ja roottori vektorikentäksi. Listaamme seuraavaan lauseeseen vielä joitakin divergenssin ja roottorin ominaisuuksia.

Lause 2.4. *Olkoon $k \in \mathbb{R}$ skalaari ja olkoot $\mathbf{F}$ ja $\mathbf{G}$ vektorikenttiä. Tällöin pätee seuraavat kaavat*

a) $\operatorname{div}(k\mathbf{F}) = k \operatorname{div} \mathbf{F}$

b) $\operatorname{div}(\mathbf{F} \pm \mathbf{G}) = \operatorname{div} \mathbf{F} \pm \operatorname{div} \mathbf{G}$

c) $\operatorname{rot}(k\mathbf{F}) = k \operatorname{rot} \mathbf{F}$

d) $\operatorname{rot}(\mathbf{F} \pm \mathbf{G}) = \operatorname{rot} \mathbf{F} \pm \operatorname{rot} \mathbf{G}$.

Lisäksi, jos f on skalaarikenttä, niin pätee myös

e) $\operatorname{div}(f\mathbf{G}) = f \operatorname{div} \mathbf{G} + \nabla f \cdot \mathbf{G}$

f) $\operatorname{rot}(f\mathbf{G}) = f \operatorname{rot} \mathbf{G} + \nabla f \cdot \mathbf{G}$

g) $\operatorname{div}(\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = \mathbf{G} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{F} - \mathbf{F} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{G}$.

Todistus. Todistamme vain kohdan a). Muut kohdat todistuvat vastaavasti.
a) Oletamme, että $k \in \mathbb{R}$ on skalaari ja $\mathbf{F}$ on vektorikenttä. Nyt

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(k\mathbf{F}) &= \nabla \cdot (k\mathbf{F}) = \frac{\partial kF_1}{\partial x_1} + \frac{\partial kF_2}{\partial x_2} + \cdots + \frac{\partial kF_n}{\partial x_n} = k\frac{\partial F_1}{\partial x_1} + k\frac{\partial F_2}{\partial x_2} + \cdots + k\frac{\partial F_n}{\partial x_n} \\
&= k\left(\frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} + \cdots + \frac{\partial F_n}{\partial x_n}\right) = k\ \nabla \cdot \mathbf{F} = k \operatorname{div} \mathbf{F}.
\end{aligned}$$

□

3 Ensimmäisen kertaluvun lineaariset differentiaaliyhtälöryhmät

Tavalliset differentiaaliyhtälöt sisältävät vain yhden riippuvan muuttujan. Kuitenkin monet sovellukset vaativat useamman riippuvan muuttujan käyttöä ongelmia ratkaistaksemme. Näissä tapauksissa tulevat hyödyllisiksi tässä luvussa esittelemämme differentiaaliyhtälöryhmät. Tässä tutkielmassa riippumatonta muuttujaa merkitsemme yleisesti kirjaimella t ja riippuvia muuttujia symboleilla $x_1, x_2, ..., x_n$. Tässä luvussa oletamme lukijan tuntevan tavallisten differentiaaliyhtälöiden perusteet.

On osoitettavissa, että jokainen korkeamman asteen lineaarinen differentiaaliyhtälö ja differentiaaliyhtälöryhmä on sopivin sijoituksin mahdollista muuntaa ensimmäisen kertaluvun differentiaaliyhtälöryhmäksi, joiden teoria ja ratkaiseminen on ratkaisevasti helpompaa kuin kertaluvun n differentiaaliyhtälöryhmille. Tämän havainnon vuoksi keskitymme ensimmäisen kertaluvun differentiaaliyhtälöryhmiin. Näyttääksemme ensin, miten kertaluvun n differentiaaliyhtälö muunnetaan ekvivalentiksi ensimmäisen kertaluvun yhtälöryhmäksi, otamme esimerkiksi kertaluvun n differentiaaliyhtälön

$$x^{(n)} + p_1 x^{(n-1)} + \cdots + p_n x = f(t),$$

missä funktiot $p_i(t)$ ja $f(t)$ ovat muuttujan t funktioita. Muuntaaksemme tämän ensimmäisen kertaluvun differentiaaliyhtälöryhmäksi kirjoitamme $x_1 = x$ ja asetamme

$$x = x_1, \quad x_2 = x_1', \quad x_3 = x_2', \quad \ldots, \quad x_n = x_{n-1}'.$$

Näin saamme ensimmäisen kertaluvun differentiaaliyhtälöryhmän

$$\begin{aligned} x_1' &= x_2 \\ x_2' &= x_3 \\ &\vdots \\ x_n' &= -p_n x_1 - p_{n-1} x_2 - \cdots - p_1 x_n + f(t). \end{aligned}$$

Tämä differentiaaliyhtälöryhmä on ekvivalentti alkuperäisen kertaluvun n differentiaaliyhtälön kanssa siinä mielessä, että $x(t)$ on sen ratkaisu, jos ja vain jos muunnoksen yhteydessä määritellyt funktiot $x_1, x_2, ..., x_n$ toteuttavat saadun differentiaaliyhtälöryhmän. [4, s. 394]

Käsittelemme ensin homogeenisten ja sen jälkeen epähomogeenisten ryhmien tapaukset, sillä epähomogeenisten yhtälöryhmien yleisessä ratkaisussa tarvitaan homogeenisia differentiaaliyhtälöryhmiä. Kaikki tässä kappaleessa esitetyt tulokset ja määritelmät koskevat *lineaarisia* differentiaaliyhtälöryhmiä. Tarkastelemme ensimmäisen kertaluvun lineaarisia differentiaaliyhtälöryhmiä, jotka ovat muotoa:

$$\begin{aligned} x_1' &= p_{11}(t)x_1 + p_{12}(t)x_2 + \cdots + p_{1n}(t)x_n + f_1(t) \\ x_2' &= p_{21}(t)x_1 + p_{22}(t)x_2 + \cdots + p_{2n}(t)x_n + f_2(t) \\ &\vdots \\ x_n' &= p_{n1}(t)x_1 + p_{n2}(t)x_2 + \cdots + p_{nn}(t)x_n + f_n(t). \end{aligned} \tag{3.1}$$

Tässä yhtälöryhmässä on siis n kappaletta tavallisia ensimmäisen kertaluvun differentiaaliyhtälöitä. Elementit $p_{ik}(t)$ ja $f_i(t)$ ovat muuttujan t funktioita. Tarkasteluissamme keskitymme vain differentiaaliyhtälöryhmiin, joissa tuntemattomia on yhtä paljon kuin yhtälöitä.

Differentiaaliyhtälöryhmän (3.1) tarkastelua ja laskutoimituksia helpottaaksemme esitämme sen matriisimuodossa, sisältäen matriisiarvoisen funktion. Näiden matriisiarvoisten funktioiden peruskäsitteitä ja tuloksia on esitetty esitiedoissamme. Tätä varten merkitsemme, että yhtälöryhmän (3.1) kerroinmatriisi on

$$\mathbf{P}(t) = \left[p_{ij}(t)\right]$$

ja sarakevektorit ovat

$$\mathbf{x}(t) = [x_i(t)] \quad \text{ja} \quad \mathbf{f}(t) = [f_i(t)] .$$

Tällöin differentiaaliyhtälöryhmä (3.1) voidaan esittää matriisiyhtälönä

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{P}(t)\mathbf{x} + \mathbf{f}(t). \tag{3.2}$$

Esimerkki 3.1. Differentiaaliyhtälöryhmä

$$\begin{aligned} x_1' &= 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 \\ x_2' &= 2x_1 + 6x_2 + 4x_3 \\ x_3' &= -2x_1 - 3x_2 + 7x_3 \end{aligned}$$

voidaan esittää edellämainittuna matriisiyhtälönä muodossa

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & -2 \\ 2 & 6 & 4 \\ -2 & -3 & 7 \end{bmatrix} \mathbf{x}.$$

Näillä merkinnöillä määrittelemme ensimmäisen kertaluvun differentiaaliyhtälöryhmän ratkaisun seuraavalla tavalla.

Määritelmä 3.1. Sarakevektorin $\mathbf{x}(t)$ sanotaan olevan differentiaaliyhtälöryhmän

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{P}(t)\mathbf{x} + \mathbf{f}(t)$$

ratkaisu avoimella välillä I, mikäli jokainen sen komponentti $x_i(t)$ toteuttaa samanaikaisesti ryhmän (3.1) yhtälöt. [4, s. 405]

Seuraava lause kertoo, milloin differentiaaliyhtälöryhmällä on yksikäsitteinen ratkaisu.

Lause 3.1. *Olkoot kerroinmatriisi* $\mathbf{P}(t)$ *ja sarakevektori* $\mathbf{f}(t)$ *jatkuvia avoimella välillä I, joka sisältää pisteen a. Tällöin ensimmäisen kertaluvun differentiaaliyhtälöryhmällä (3.2) on yksikäsitteinen ratkaisu koko välillä I, joka toteuttaa alkuehdot*

$$x_1(a) = b_1, \quad x_2(a) = b_2, \quad \ldots, \quad x_n(a) = b_n.$$

Lauseen todistus on analoginen differentiaaliyhtälöiden vastaavan kanssa. Todistus on kuitenkin pitkä ja monivaiheinen, joten emme sitä tästä syystä tässä tutkielmassa esitä. Todistukseen ja sen metodeihin voi tutustua Edwardsin ja Penneyn teoksen liitteessä A.[4, s. 673-685]

Huomaamme, että lauseen 3.1 nojalla yksikäsitteisen ratkaisun löytyminen vaati n kappaletta alkuarvoja, näin ollen voimme olettaa yleisen ratkaisun sisältävän n kappaletta satunnaisia vakioita. Monesti korkeampien kertalukujen differentiaaliyhtälöryhmien tapauksissa tulee ryhmä ensin muuntaa ensimmäisen kertaluvun ryhmäksi selvittääksemme, kuinka monta alkuarvoa tarvitaan yksikäsitteisen ratkaisun löytymiseen. Edellinen lause kertoo, että alkuarvoja tarvitaan täsmälleen yhtälöiden lukumäärän verran. [4, s. 399]

3.1 Homogeeniset ryhmät

Tässä alaluvussa tarkastelemme ensin homogeenisten differentiaaliyhtälöryhmien yleistä teoriaa, jonka jälkeen esitämme keinon yksittäisten ratkaisuiden selvittämiseksi ominaisarvojen avulla. Määrittelemme homogeenisen differentiaaliyhtälöryhmän seuraavalla tavalla.

Määritelmä 3.2. Differentiaaliyhtälöryhmän (3.2) sanotaan olevan *homogeeninen*, mikäli $\mathbf{f}(t) = \mathbf{0}$ ts. f_i on nollafunktio kaikilla $i \in \{1,\ldots,n\}$. Differentiaaliyhtälöryhmä on *epähomogeeninen*, mikäli se ei ole homogeeninen.

Homogeenisilla differentiaaliyhtälöryhmillä on seuraavassa lauseessa esitettävä ominaisuus. Ominaisuus on tuttu myös differentiaaliyhtälöiden teoriasta. Lause kertoo, että ratkaisuiden mikä tahansa lineaarikombinaatio on myös ratkaisu.

Lause 3.2. *Olkoot* $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ *n kappaletta ratkaisuja ensimmäisen kertaluvun homogeeniselle differentiaaliyhtälöryhmälle avoimella välillä I. Jos* $c_1, c_2, \ldots, c_n$ *ovat skalaareja, niin lineaarikombinaatio*

$$\mathbf{x} = c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2 + \cdots + c_n\mathbf{x}_n$$

on myös ratkaisu avoimella välillä I.

Todistus. (Vrt. [4, s. 406]) Koska $\mathbf{x}_i$ on ratkaisu kaikilla $i \in \{1,\ldots,n\}$, niin tiedämme, että $\mathbf{x}_i' = \mathbf{P}(t)\mathbf{x}_i$ kaikilla $i \in \{1,\ldots,n\}$. Täten

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}' &= c_1\mathbf{x}_1' + c_2\mathbf{x}_2' + \cdots + c_n\mathbf{x}_n' \\
&= c_1\mathbf{P}(t)\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{P}(t)\mathbf{x}_2 + \cdots + c_n\mathbf{P}(t)\mathbf{x}_n \\
&= \mathbf{P}(t)(c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2 + \cdots + c_n\mathbf{x}_n).
\end{aligned}$$

Nyt siis $\mathbf{x}' = \mathbf{P}(t)\mathbf{x}$, kuten toivottiin. $\square$

Kiinnostavia tarkasteluidemme kannalta ovat lineaarisesti riippumattomat ratkaisut. Ratkaisuiden lineaarisen riippumattomuuden tarkistaminen käy kuten differentiaaliyhtälöidenkin tapauksessa eli Wronskin determinantin avulla. Differentiaaliyhtälöiden tapauksesta tiedämme, että jos ratkaisut ovat lineaarisesti riippumattomat, niin Wronskin determinantti

$$W = W(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, ..., \mathbf{x}_n),$$

missä $\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_n$ ovat ratkaisut differentiaaliyhtälöryhmälle, on eri suuri kuin nolla kaikissa pisteissä välillä I. Todistus tälle on identtinen differentiaaliyhtälöiden vastaavan tuloksen kanssa, kun Wronskin determinantti on määritelty kuten edellä eli determinantin sarakkeina on yhtälöryhmän eri ratkaisut. Lineaarisesti riippumattomien ratkaisuiden kautta voimme määrittää yleisen ratkaisun homogeenisille differentiaaliyhtälöryhmille seuraavalla tavalla. [4, s. 407]

Lause 3.3. *Olkoot* $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, ..., \mathbf{x}_n$ *n kappaletta lineaarisesti riippumattomia ratkaisuja homogeeniselle yhtälölle* $\mathbf{x}' = \mathbf{P}(t)\mathbf{x}$ *avoimella välillä I, missä* $\mathbf{P}(t)$ *on jatkuva. Jos* $\mathbf{x}(t)$ *on mielivaltainen ratkaisu yhtälölle* $\mathbf{x}' = \mathbf{P}(t)\mathbf{x}$ *välillä I, niin tällöin on olemassa luvut* $c_1, ..., c_n \in \mathbb{R}$ *siten, että*

$$\mathbf{x}(t) = c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2 + \cdots + c_n\mathbf{x}_n$$

kaikilla $t \in I$

Todistus. (Vrt. [4, s. 408]) Olkoon a kiinnitetty piste välillä I. Osoitetaan ensin, että on olemassa luvut $c_1, ..., c_n$ siten, että ratkaisulla

$$\mathbf{y} = c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2 + \cdots + c_n\mathbf{x}_n$$

on samat alkuarvot kuin annetulla ratkaisulla $\mathbf{x}$, kun $t = a$, eli

$$\mathbf{y}(a) = c_1\mathbf{x}_1(a) + c_2\mathbf{x}_2(a) + \cdots + c_n\mathbf{x}_n(a) = \mathbf{x}(a). \tag{3.3}$$

Olkoon $\mathbf{X}(t)$ $n \times n$ -matriisi, jolla on sarakkeinaan ratkaisut $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, ..., \mathbf{x}_n$, ja olkoon $\mathbf{c}$ sarakevektori, jolla on komponentteina luvut $c_1, ..., c_n$. Nyt yhtälö (3.3) voidaan kirjoittaa muotoon

$$\mathbf{X}(a)\mathbf{c} = \mathbf{x}(a). \tag{3.4}$$

Wronskin determinantti $W(a) = |\mathbf{X}(a)| \neq 0$, sillä ratkaisut $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, ..., \mathbf{x}_n$ ovat lineaarisesti riippumattomat. Täten matriisiteoriasta tiedämme, että matriisilla $\mathbf{X}(a)$ on käänteismatriisi $\mathbf{X}(a)^{-1}$. Täten $\mathbf{c} = \mathbf{X}(a)^{-1}\mathbf{x}(a)$. On siis osoitettu tällaisten lukujen $c_1, ..., c_n$ olemassaolo. Huomataan vielä, että annetulla ratkaisulla $\mathbf{x}$ on samat alkuarvot kuin ratkaisulla $\mathbf{y}$, kun $t = a$, missä lukujen c_i arvot määräytyvät yhtälöstä $\mathbf{c} = \mathbf{X}(a)^{-1}\mathbf{x}(a)$. Nyt lauseesta 3.1 seuraa, että $\mathbf{x} = \mathbf{y}$. Tämä muodostaa lauseessa vaaditun yhtälön. $\square$

Huomautus. Jokaisella n x n -yhtälöryhmällä $\mathbf{x}' = \mathbf{P}(t)\mathbf{x}$, missä kerroinmatriisin alkiot ovat jatkuvia, on olemassa n kappaletta lineaarisesti riippumattomia ratkaisuja, kuten lause 3.3 vaatii. Keinoja näiden ratkaisuiden löytämiseen esitetään seuraavassa luvussa.

3.1.1 Ominaisarvomenetelmä

Olemme siis johtaneet yleisen ratkaisun homogeenisille lineaarisille differentiaaliyhtälöryhmille yksittäisten ratkaisuiden lineaarikombinaationa. Näytämme seuraavaksi, miten yksittäisen ratkaisun voi etsiä *vakiokertoimiselle* homogeeniselle lineaariselle differentiaaliyhtälöryhmälle ominaisarvojen avulla. Oletamme siis, että kerroinmatriisi $\mathbf{P}(t)$ sisältää vain vakioita alkioinaan ja merkitsemme sitä notaatiolla $\mathbf{A} = [a_{ij}]$. Edellisten tarkasteluiden nojalla yleiseen ratkaisuun meidän tulee löytää n kappaletta lineaarisesti riippumattomia ratkaisuja. Idea tälle on hyvin samankaltainen kuin yksittäisten homogeenisten differentiaaliyhtälöiden karakterististen juurien metodissa. Seuraava lause esittää yksittäisen ratkaisun ominaisarvojen ja ominaisvektoreiden avulla.

Lause 3.4. *Olkoon λ kerroinmatriisin* $\mathbf{A}$ *ominaisarvo. Jos* $\mathbf{v}$ *on ominaisarvoon λ liittyvä ominaisvektori, niin*

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{v}e^{\lambda t}$$

on differentiaaliyhtälöryhmän

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$$

epätriviaali ratkaisu.

Todistus. (Vrt. [4, s. 414-415]) Olkoon $\mathbf{x}(t) = \mathbf{v}e^{\lambda t}$. Nyt siis $\mathbf{x}'(t) = \lambda\mathbf{v}e^{\lambda t}$. Sijoittamalla tämän yhtälöön $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ saamme

$$\lambda\mathbf{v}e^{\lambda t} = \mathbf{A}\mathbf{v}e^{\lambda t},$$

josta saamme

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v}e^{\lambda t} = 0.$$

Jakamalla puolittain termillä $e^{\lambda t} \neq 0$ saamme

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v} = 0.$$

Koska $\mathbf{v}$ on kerroinmatriisin $\mathbf{A}$ ominaisarvoon λ liittyvä ominaisvektori, niin yllä-oleva yhtälö toteutuu ja $\mathbf{x}(t)$ todella on ratkaisu. □

Ratkaistaksemme homogeenisen lineaarisen yhtälöryhmän tulee siis etsiä kerroinmatriisin $\mathbf{A}$ ominaisarvot $\lambda_1, ..., \lambda_n$ ja niitä vastaavat ominaisvektorit $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n$. Mikäli kyseiset n kappaletta ominaisarvoja ovat erisuuria, niin lineaarialgebran tulokset takaavat niihin liittyvien ominaisvektoreiden lineaarisen riippumattomuuden. Koska kaikki erisuuriin ominaisarvoihin liittyvät ominaisvektorit ovat lineaarisesti riippumattomia, niin tällöin myös n kappaletta ratkaisuja, jotka ovat muotoa

$$\mathbf{x}_i(t) = \mathbf{v}_i e^{\lambda_i t}, \quad i \in \{1, ..., n\}.$$

ovat lineaarisesti riippumattomia. Tämä voidaan käytännön esimerkeissä todeta aina laskemalla Wronskianin matriisi. Teemme näin alla olevassa esimerkissä. Näin ollen yleinen ratkaisu on lauseen 3.3 nojalla

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i \mathbf{x}_i(t),$$

missä kertoimet c_i ovat mielivaltaisia skalaareja.

Esimerkki 3.2. Etsitään yleinen ratkaisu differentiaaliyhtälöryhmälle

$$\begin{aligned} x_1' &= 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 \\ x_2' &= -5x_1 - 4x_2 - 2x_3 \\ x_3' &= 5x_1 + 5x_2 + 3x_3 \end{aligned}$$

ominaisarvomenetelmän avulla. Ratkaisemalla karakteristinen yhtälö $|\mathbf{A} - \lambda I| = 0$, missä $\mathbf{A}$ on yhtälöryhmän kerroinmatriisi saadaan ominaisarvoiksi $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = -2$ ja
$\lambda_3 = 1$. Täten kerroinmatriisilla on kolme erisuurta reaalista ominaisarvoa, jolloin edellä esitetty lause takaa kolmen lineaarisesti riippumattoman ratkaisun olemassaolon. Yhtälailla peruskurssien metodein saamme ratkaistua ominaisarvoihin liittyvät ominaisvektorit

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Nyt lauseen 3.4 nojalla ratkaisut ovat

$$x_1 = \mathbf{v}_1 e^{3t}, \quad x_2 = \mathbf{v}_2 e^{-2t}, \quad x_3 = \mathbf{v}_3 e^{t}$$

ja yleinen ratkaisu

$$\mathbf{x}(t) = c_1 \mathbf{v}_1 e^{3t} + c_2 \mathbf{v}_2 e^{-2t} + c_3 \mathbf{v}_3 e^{t}.$$

Osoittaaksemme, että nämä ratkaisut todella ovat lineaarisesti riippumattomia laskemme niiden Wronskianin determinantin

$$|\mathbf{W}(t)| = \begin{vmatrix} e^{3t} & 0 & -e^{t} \\ -e^{3t} & -e{-}2t & e^{t} \\ e^{3t} & e^{-2t} & 0 \end{vmatrix} = -e^{2t},$$

mikä ei ole nolla millään muuttujan t arvolla, joten ratkaisut ovat lineaarisesti riippumattomia.

Lineaarisesti riippumattomien ominaisvektorien löytyminen riippuu ominaisarvojen laadusta ts. onko erillisiä ominaisarvoja n kappaletta ja ovatko ne reaalisia vai kompleksisia.

Mikäli kerroinmatriisilla ei ole n kappaletta erisuuria ominaisarvoja, vaan sama ominaisarvo esiintyy useamman kerran, niin on mahdollista, ettei ole suoraan löydettävissä n kappaletta lineaarisesti riippumattomia ominaisvektoreita. Tällöin edellä esitettyjä tuloksia ei voida käyttää yleisen ratkaisun etsimiseen. Mikäli kertalukua k olevalla ominaisarvolla on olemassa k kappaletta lineaarisesti riippumattomia ominaisvektoreita, sanotaan sen olevan *täydellinen*. Mikäli jokainen matriisin $\mathbf{A}$ ominaisarvo on täydellinen, niin on olemassa n kappaletta lineaarisesti riippumattomia ominaisvektoreita ja yleinen ratkaisu löytyy lauseen 3.3 mukaisesti. Jos taas ominaisarvo ei ole täydellinen, niin sanotaan sen olevan *defektiivinen*. Mikäli ominaisarvo on defektiivinen, niin sillä ei ole kertalukunsa mukaista määrää lineaarisesti riippumattomia ominaisvektoreita ja puuttuvat lineaarisesti riippumattomat ratkaisut joudutaan etsimään toisilla keinoin. Keinona tähän on yleistettyjen ominaisvektoreiden teoria, joihin voi perehtyä teoksen [4] luvussa 7.5 (s. 441-457).

Mikäli ominaisarvot ovat kompleksisia, niin edellä kuvattu metodi toimii, kunhan ominaisarvot ovat erisuuria. Ongelmatilanteita tulee vain, kun kompleksisiin ominaisarvoihin liittyvät ominaisvektorit ovat kompleksisia, jolloin ratkaisut ovat kompleksisia. Tarkastelemme vielä tätä tilannetta tarkemmin. Koska kerroinmatriisin $\mathbf{A}$ sisältää vain reaalisia alkioita, niin kaikki karakterisen yhtälön kertoimet ovat reaalisia. Kompleksiset ominaisarvot esiintyät aina konjugaattipareina. Nimittäin, jos λ on kerroinmatriisin kompleksinen ominaisarvo ja $\mathbf{v}$ siihen liittyvä ominaisvektori, niin myös $\bar{\lambda}$ on kerroinmatriisin ominaisarvo ja $\bar{\mathbf{v}}$ siihen liittyvä ominaisvektori, sillä

$$\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} \Rightarrow \mathbf{A}\bar{\mathbf{v}} = \overline{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{v}} = (\overline{\mathbf{A}\mathbf{v}}) = (\overline{\lambda\mathbf{v}}) = \overline{\lambda}\bar{\mathbf{v}}.$$

Oletetaan sitten, että kerroinmatriisin ominaisarvot ovat $\lambda = p + qi$ ja $\overline{\lambda} = p - qi$. Vektorin konjugaatti määritellään komponenteittain, eli jos

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} a_1 + b_1 i \\ a_2 + b_2 i \\ \vdots \\ a_n + b_n i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} i = \mathbf{a} + \mathbf{b}i,$$

niin $\bar{\mathbf{v}} = \mathbf{a} - \mathbf{b}i$. Nyt lauseen 3.4 kompleksinen ratkaisu differentiaaliyhtälöryhmälle $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ on

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{v}e^{\lambda t} = \mathbf{v}e^{(p+qi)t} = (\mathbf{a} + \mathbf{b}i)e^{pt}(\cos qt + i \sin qt),$$

joka kerrottuna auki ja sopivat termit yhdisteltynä on

$$\mathbf{x}(t) = e^{pt}(\mathbf{a}\cos qt - \mathbf{b}\sin qt) + ie^{pt}(\mathbf{b}\cos qt + \mathbf{a}i \sin qt).$$

Todistamme tässä kohdassa lauseen, joka osoittaa, että lineaarisen differentiaaliyhtälöryhmän kompleksisen ratkaisun $\mathbf{x}(t)$ reaali- ja imaginääriosat ovat myös ratkaisuja.

Lause 3.5. *Oletamme, että* $\mathbf{x}(t)$ *on lineaarisen differentiaaliyhtälöryhmän*

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}, \tag{3.5}$$

missä kerroinmatriisin $\mathbf{A}$ *kaikki alkiot ovat reaalisia, kompleksinen ratkaisu. Kirjoitamme, että*

$$\mathbf{x}(t) = \mathrm{Re}(\mathbf{x}(t)) + i\,\mathrm{Im}(\mathbf{x}(t)),$$

missä $\mathrm{Re}(\mathbf{x}(t))$ *ja* $\mathrm{Im}(\mathbf{x}(t))$ *ovat reaalisia funktioita. Tällöin* $\mathrm{Re}(\mathbf{x}(t))$ *ja* $\mathrm{Im}(\mathbf{x}(t))$ *ovat myös differentiaaliyhtälöryhmän (3.5) ratkaisuja.*

Todistus. (Vrt. [2, s. 287]) Oletamme siis, että $\mathbf{x}(t)$ on differentiaaliyhtälöryhmän (3.5) ratkaisu, toisin sanoen

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}. \tag{3.6}$$

Nyt kun korvaamme ratkaisun $\mathbf{x}(t)$ lausekkeella $\mathrm{Re}(\mathbf{x}(t))+ \mathrm{Im}(\mathbf{x}(t))$ molemmilla puolilla yhtälöä (3.6), niin saamme vasemmalle puolelle

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{d(\mathrm{Re}(\mathbf{x}) + i\,\mathrm{Im}(\mathbf{x}))}{dt} = \frac{d\mathrm{Re}(\mathbf{x})}{dt} + i\frac{d\mathrm{Im}(\mathbf{x})}{dt},$$

ja kun käytämme tietoa, että kyseessä on lineaarinen ryhmä, niin oikealle puolelle saamme

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{A}(\mathrm{Re}(\mathbf{x}) + i\,\mathrm{Im}(\mathbf{x})) = \mathbf{A}\,\mathrm{Re}(\mathbf{x}) + i\mathbf{A}\,\mathrm{Im}(\mathbf{x}).$$

Nyt kun yhdistämme molemmat puolet saamme

$$\frac{d\mathrm{Re}(\mathbf{x})}{dt} + i\frac{d\mathrm{Im}(\mathbf{x})}{dt} = \mathbf{A}\,\mathrm{Re}(\mathbf{x}) + i\mathbf{A}\,\mathrm{Im}(\mathbf{x}).$$

Kompleksilukujen teorian mukaisesti kompleksiluvut ovat samat, jos niiden reaali- ja imaginääriosat ovat samat. Näin ollen saamme, että

$$\frac{d\mathrm{Re}(\mathbf{x})}{dt} = \mathbf{A}\,\mathrm{Re}(\mathbf{x}) \quad \text{ja} \quad \frac{d\mathrm{Im}(\mathbf{x})}{dt} = \mathbf{A}\,\mathrm{Im}(\mathbf{x}),$$

mikä tarkoittaa siis, että $\mathrm{Re}(\mathbf{x}(t))$ ja $\mathrm{Im}(\mathbf{x}(t))$ ovat differentiaaliyhtälöryhmän (3.5) ratkaisuja. □

Koska edellisen lauseen nojalla ratkaisun reaali- ja imaginääriosat ovat myös ratkaisuja, niin saamme kaksi ominaisarvoihin $p \pm qi$ liittyvää reaaliarvoista ratkaisua

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_1(t) &= \mathrm{Re}(\mathbf{x}(t)) = e^{pt}(\mathbf{a}\cos qt - \mathbf{b}\sin qt),\\ \mathbf{x}_2(t) &= \mathrm{Im}(\mathbf{x}(t)) = e^{pt}(\mathbf{b}\cos qt + \mathbf{a}\sin qt).\end{aligned}$$

Laskemalla kuten yllä voi tarkistaa, että samat kaksi reaaliarvoista ratkaisua saadaan myös ominaisarvosta $p - qi$.

Esimerkki 3.3. Tarkastelemme differentiaaliyhtälöryhmää

$$\mathbf{x}'(t) = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t). \tag{3.7}$$

Tietokoneella laskemalla saamme kerroimatriisille ominaisarvot

$$\lambda_1 = \frac{3}{2} + i\frac{1}{2}\sqrt{47}, \qquad \lambda_2 = \frac{3}{2} - i\frac{1}{2}\sqrt{47}$$

ja niihin liittyvät ominaisvektorit

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} - i\frac{1}{6}\sqrt{47} \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} + i\frac{1}{6}\sqrt{47} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Täten siis edellä kuvatun perusteella kompleksinen ratkaisu differentiaaliyhtälöryhmälle (3.7) on

$$
\begin{aligned}
\mathbf{x}(t) &= \begin{bmatrix} \frac{1}{6} - i\frac{1}{6}\sqrt{47} \\ 1 \end{bmatrix} e^{(\frac{3}{2}+i\frac{1}{2}\sqrt{47})t} = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} - i\frac{1}{6}\sqrt{47} \\ 1 \end{bmatrix} e^{\frac{3}{2}t} \left(\cos(\frac{1}{2}\sqrt{47}t) + i\sin(\frac{1}{2}\sqrt{47}t)\right) \\
&= e^{\frac{3}{2}t} \begin{bmatrix} \frac{1}{6}\left(\cos(\frac{1}{2}\sqrt{47}t) + \sqrt{47}\sin(\frac{1}{2}\sqrt{47}t)\right) + i\frac{1}{6}\left(\sin(\frac{1}{2}\sqrt{47}t) - \sqrt{47}\cos(\frac{1}{2}\sqrt{47}t)\right) \\ \cos(\frac{1}{2}\sqrt{47}t) + i\sin(\frac{1}{2}\sqrt{47}t) \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Täten kaksi reaalista yksittäisratkaisua ovat

$$
\begin{aligned}
\mathbf{x}_1(t) &= e^{\frac{3}{2}t} \begin{bmatrix} \frac{1}{6}\left(\cos(\frac{1}{2}\sqrt{47}t) + \sqrt{47}\sin(\frac{1}{2}\sqrt{47}t)\right) \\ \cos(\frac{1}{2}\sqrt{47}t) \end{bmatrix} \\
\mathbf{x}_2(t) &= e^{\frac{3}{2}t} \begin{bmatrix} \frac{1}{6}\left(\sin(\frac{1}{2}\sqrt{47}t) - \sqrt{47}\cos(\frac{1}{2}\sqrt{47}t)\right) \\ \sin(\frac{1}{2}\sqrt{47}t) \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

3.2 Epähomogeeniset ryhmät

Tarkasteltuamme homogeenisten differentiaaliyhtälöryhmien teoriaa on helppoa yleistää teoria myös epähomogeenisille yhtälöryhmille. Määrittelemme ensin epähomogeeniseen yhtälöryhmään liittyvän homogeenisen ryhmän seuraavalla tavalla.

Määritelmä 3.3. *Differentiaaliyhtälöryhmään (3.2) liittyvä homogeeninen yhtälöryhmä* on

$$\mathbf{x}' = \mathbf{P}(t)\mathbf{x},$$

missä funktiot $f_i = 0$ kaikilla $i \in \{1, ..., n\}$

Seuraava lause määrittää ratkaisun epähomogeenisille ryhmille niihin liittyvien homogeenisten ryhmien avulla.

Lause 3.6. *Olkoon $\mathbf{x}_p$ epähomogeenisen lineaarisen differentiaaliyhtälöryhmän*

$$\mathbf{x}' = \mathbf{P}(t)\mathbf{x} + \mathbf{f}(t) \tag{3.8}$$

jokin yksittäisratkaisu avoimella välillä I, ja olkoot funktiot $\mathbf{P}(t)$ ja $\mathbf{f}(t)$ jatkuvia kyseisellä välillä. Olkoot $\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_n$ lineaarisesti riippumattomat epähomogeeniseen yhtälöryhmään (3.8) liittyvän homogeenisen ryhmän ratkaisut. Jos $\mathbf{x}(t)$ on mikä tahansa yhtälön (3.8) ratkaisu, niin on olemassa skalaarit $c_1, \ldots, c_n$ siten, että

$$\mathbf{x}(t) = c_1\mathbf{x}_1(t) + \cdots + c_n\mathbf{x}_n(t) + \mathbf{x}_p(t)$$

kaikilla $t \in I$.

Todistus. (Vrt. [4, s. 305-306]) Olkoon epähomogeeninen differentiaaliyhtälöryhmä

$$L(\mathbf{x}) = \mathbf{x}'(t) - \mathbf{P}(t)\mathbf{x}(t) = \mathbf{f}(t)$$

ja siihen liittyvä homogeeninen ryhmä

$$L(\mathbf{x}) = \mathbf{x}'(t) - \mathbf{P}(t)\mathbf{x}(t) = \mathbf{0}.$$

Tässä esittelemme operaattorin L, joka operoi vektorilla $\mathbf{x}$ antaen ensimmäisen kertaluvun differentiaaliyhtälöryhmän, eli $L(\mathbf{x}) = \mathbf{x}'(t) - \mathbf{P}(t)\mathbf{x}(t) = \mathbf{0}$. Nyt lause 3.2 sanoo, että operaattori L on lineaarinen ts.

$$L(c_1\mathbf{x_1} + c_2\mathbf{x}_2) = c_1L\mathbf{x}_1 + c_2L\mathbf{x}_2,$$

jos c_1, c_2 ovat vakioita.

Olkoot nyt $\mathbf{x}_p$ tietty ratkaisu epähomogeeniselle differentiaaliyhtälöryhmälle ja $\mathbf{x}$ mikä tahansa toinen ratkaisu. Tästä seuraa, että

$$L(\mathbf{x} - \mathbf{x}_p) = L\mathbf{x} - L\mathbf{x}_p = \mathbf{f} - \mathbf{f} = \mathbf{0}.$$

Täten $\mathbf{x}_c = \mathbf{x} - \mathbf{x}_p$ on ratkaisu homogeeniselle yhtälöryhmälle. Tästä saadaan, että mielivaltainen ratkaisu epähomogeeniselle differentiaaliyhtälöryhmälle on

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_c + \mathbf{x}_p,$$

missä lauseen 3.3 nojalla $\mathbf{x}_c = c_1\mathbf{x}_1 + \cdots + c_n\mathbf{x}_n$, sillä $\mathbf{x}_c$ on homogeenisen differentiaaliyhtälöryhmän yleinen ratkaisu. Väite seuraa tästä. □

Edellisen lauseen nojalla yleinen ratkaisu epähomogeenisille lineaarisille yhtälöryhmille löydetään etsimällä ensin yleinen ratkaisu siihen liittyvään homogeeniseen yhtälöryhmään ja sen jälkeen etsimällä yksittäinen ratkaisu epähomogeeniselle ryhmälle. Tällöin nämä summattuna saadaan yleinen ratkaisu. Ratkaisun kaavan esittelemme myöhemmin tässä tutkielmassa matriisieksponenttien yhteydessä. Luvun lopuksi esitämme edellisen lauseen käytöstä esimerkin.

Esimerkki 3.4. Oletamme alkuarvo-ongelman

$$\mathbf{x}'(t) = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}\mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} t \\ -2t \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{3.9}$$

Tähän liittyvä homogeeninen differentiaaliyhtälöryhmä on

$$\mathbf{x}'(t) = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}\mathbf{x}(t).$$

Ominaisarvo menetelmällä saamme homogeeniselle ryhmälle yleisen ratkaisun

$$\mathbf{x}_c(t) = c_1\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}e^{3t} + c_2\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}e^{2t}.$$

Kokeilemalla saamme alkuperäiselle differentiaaliyhtälöryhmälle (3.9) yksittäisratkaisun

$$\mathbf{x}_p(t) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}t + \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Yhdistämällä nämä lauseen 3.6 mukaisesti saamme yhtälöryhmälle (3.9) yleiseksi ratkaisuksi

$$\mathbf{x}(t) = c_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{3t} + c_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} e^{2t} + \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Kun otamme vielä huomioon alkuehdot, niin voimme ratkaista kertoimet c_1 ja c_2 yhtälöistä

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1(0) &= -c_1 - c_2 - \tfrac{1}{4} = 1 \\ \mathbf{x}_2(0) &= c_1 + 2c_2 + \tfrac{1}{2} = 0 \end{aligned}$$

Ratkaisemalla kyseisen yhtälöryhmän saamme kertoimiksi $c_1 = -2$ ja $c_2 = \frac{3}{4}$. Nyt saamme kahdeksi lineaarisesti riippumattomaksi ratkaisuksi alkuperäiselle alkuehto-ongelmallemme

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1(t) &= 2e^{3t} - \frac{3}{4}e^{2t} - \frac{1}{2}t - \frac{1}{4} \\ \mathbf{x}_2(t) &= -2e^{3t} + \frac{6}{4}e^{2t} + t + \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

4 Matriisieksponenttifunktio ja differentiaaliyhtälöryhmät

Matriisieksponenttien käsite tulee hyödylliseksi ratkaistaessa differentiaaliyhtälöryhmiä. Kuten differentiaaliyhtälöiden ja lineaaristen differentiaaliyhtälöryhmien tapauksissa on jo huomattu, niin eksponenttifunktiot näyttelevät suurta roolia ratkaisuita etsittäessä. Tämän luvun tavoitteena on määritellä matriisieksponenttifunktio, esittää sen ominaisuuksia ja näyttää, kuinka matriisieksponentteja voidaan käyttää differentiaaliyhtälöryhmien ratkaisemiseen. Ensiksi määrittelemme matriisieksponenttifunktion käsitteen ja sen ominaisuuksia, jonka jälkeen tarkastelemme differentiaaliyhtälöryhmiä, jonka kyseinen matriisieksponentti toteuttaa. Luvun lopuksi esitämme metodeja matriisieksponenttifunktion arvojen laskemiseen.

4.1 Matriisieksponenttifunktio

Matriisieksponenttifunktio halutaan määritellä siten, että sillä on reaalista eksponenttifunktiota muistuttavat ominaisuudet. Erityisesti sen halutaan toteuttavan ominaisuudet

$$e^{t\mathbf{A}}e^{s\mathbf{A}} = e^{(t+s)\mathbf{A}}$$

ja

$$e^{\mathbf{0}} = \mathbf{I},$$

missä $\mathbf{0}$ on nollamatriisi ja $\mathbf{I}$ on identiteettimatriisi. Luontevin tapa määritellä matriisieksponentti olisi alkioittain eli $e^{\mathbf{A}} = [e^{a_{ij}}]$, mutta tarkempi tarkastelu osoittaa, ettei se tällöin toteuta yllä olevia ominaisuuksia. Nimeomaisesti tälla tavoin määritelty matriisieksponenttifunktio ei toteuta ehtoa $e^{\mathbf{0}} = \mathbf{I}$, sillä $e^0 = 1$, jolloin matriisin $e^{\mathbf{0}}$ jokainen alkio olisi 1.

Kompleksilukujen tapauksessa eksponentti määritellään potenssisarjana eli kun $z \in \mathbb{C}$, niin

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots .$$

Samoin voimme määritellä matriisieksponentin eli kun $\mathbf{A}$ on $n \times n$ -matriisi, niin

$$e^{\mathbf{A}} = \mathbf{I} + \mathbf{A} + \frac{\mathbf{A}^2}{2!} + \frac{\mathbf{A}^3}{3!} + \cdots . \tag{4.1}$$

Yhtälön (4.1) oikea puoli saadaan muotoon

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^k}{k!} = \lim_{k\to\infty} \left(\sum_{n=0}^{k} \frac{\mathbf{A}^n}{n!} \right).$$

Kuitenkin ennen kuin esitämme tämän matriisieksponentin määritelmänä tulee todistaa seuraava lause, joka osoittaa, että kyseinen raja-arvo on olemassa kaikilla neliömatriiseilla $\mathbf{A}$.

Lause 4.1. *Olkoon* **A** $n \times n$ *-matriisi. Tällöin potenssisarja*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^k}{k!}$$

suppenee.

Todistus. (Vrt. [1, s.197]) Oletetaan, että **A** on reaalinen tai kompleksinen $n \times n$ -matriisi. Nyt jokaisen termin normille pätee epäyhtälö

$$\left\| \frac{\mathbf{A}^k}{k!} \right\| \leq \frac{||\mathbf{A}||^k}{k!}.$$

Koska sarja

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!}$$

suppenee kaikilla $a \in \mathbb{R}$, niin lauseen 2.2 nojalla myös sarja

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^k}{k!}$$

suppenee. □

Tämän tuloksen nojalla voimme määritellä matriisieksponentin seuraavasti.

Määritelmä 4.1. Olkoon **A** $n \times n$ -matriisi. Nyt *matriisieksponentti* $e^{\mathbf{A}}$ on

$$e^{\mathbf{A}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^k}{k!}.$$

[1, s.197]

Huomautus. Määritelmä implikoi, että $e^{\mathbf{0}} = \mathbf{I}$, missä siis **0** on nollamatriisi, sillä sarjan ensimmäinen termi on identiteettimatriisi, koska mikä tahansa matriisi korotettuna nollanteen potenssiin on identiteettimatriisi. Sarjan muut termit ovat nollamatriiseja, sillä nollamatriisi potenssiin mikä tahansa nollasta eroava luku on nollamatriisi.

Määritelmä 4.2. Matriisifunktion

$$\mathbf{E}(t) = e^{t\mathbf{A}},$$

missä $t \in \mathbb{R}$ ja **A** on $n \times n$ -matriisi, sanotaan olevan *matriisieksponenttifunktio*.

4.2 Matriisieksponenttifunktio differentiaaliyhtälöryhmän ratkaisuna

Tässä alaluvussa näytämme, miten matriisieksponenttifunktiota voidaan käyttää homogeenisten lineaaristen differentiaaliyhtälöryhmien ratkaisemisessa. Ensin käsittelemme matriisieksponenttifunktion toteuttamia matriisidifferentiaaliyhtälöitä ja sen jälkeen näytämme miten teoria toimii myös lineaarisille homogeenisille differentiaaliyhtälöryhmille. Alaluvun tulokset auttavat myös matriisieksponenttifunktion ominaisuuksien käsittelyssä, joita käsittelemme tässä alaluvussa sopivissa kohdissa. Ennen kuin aloitamme varsinaisen aiheen käsittelyn määrittelemme perusmatriisin käsitteen.

Määritelmä 4.3. Olkoot $\mathbf{x}_1(t), \mathbf{x}_2(t), ..., \mathbf{x}_n(t)$ lineaarisesti riippumattomat ratkaisut differentiaaliyhtälöryhmälle

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t). \tag{4.2}$$

Tällöin sanotaan, että $n \times n$ -matriisi

$$\mathbf{X} = [\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n]$$

on differentiaaliyhtälöryhmän (4.2) *perusmatriisi*. [4, s. 476]

Käsittelemme seuraavaksi lyhyesti perusmatriisin ominaisuuksia. Perusmatriisin jokainen sarakevektori on differentiaaliyhtälöryhmän $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)$ ratkaisu, joten perusmatriisi itsessään toteuttaa *matriisidifferentiaaliyhtälön* $\mathbf{X}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{X}(t)$. Lisäksi perusmatriisin sarakkeet ovat lineaarisesti riippumattomia, joten se on eisingulaarinen ja sillä on täten käänteismatriisi. Perusmatriisin käsittein homogeenisen differentiaaliyhtälöryhmän $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ yleinen ratkaisu

$$\mathbf{x}(t) = c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2 + \cdots + c_n\mathbf{x}_n$$

voidaan esittää muodossa

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{X}(t)\mathbf{c},$$

missä vektori $\mathbf{c}$ on kaikki skalaarit $c_1, ..., c_n$ sisältävä vakioinen sarakevektori. Mikäli yleinen ratkaisu toteuttaa annetut alkuehdot

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0,$$

niin tästä seuraa, että

$$\mathbf{X}(0)\mathbf{c} = \mathbf{x}_0.$$

Tällöin kerroinvektori $\mathbf{c}$ saadaan muotoon

$$\mathbf{c} = \mathbf{X}(0)^{-1}\mathbf{x}_0$$

ja yleinen ratkaisu täten muotoon

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{X}(t)\mathbf{X}(0)^{-1}\mathbf{x}_0.$$

Edwards & Penneyn teoksessa tämä on esitetty vielä lauseena. [4, s.476-478]

Seuraavaksi pyrimme etsimään lineaarisen differentiaaliyhtälöryhmän $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ ratkaisun suoraan kerroinmatriisista $\mathbf{A}(t)$. Tässä käytämme edellisessä alaluvussa esiteltyä matriisieksponenttifunktiota. Matriisieksponenttifunktio on määritelty siten, että se on matriisiratkaisu matriisidifferentiaaliyhtälölle

$$\mathbf{E}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{E}(t).$$

Pidetään kerroinmatriisi $\mathbf{A}(t)$ vakiona ja keskitytään muuttujaan t. Nyt seuraava lause todistaa yllätodetun havainnon eli että matriisieksponenttifunktio toteuttaa ym. matriisidifferentiaaliyhtälön.

Lause 4.2. *Matriisifunktio* $\mathbf{E}(t)$ *toteuttaa matriisidifferentiaaliyhtälön*

$$\mathbf{E}'(t) = \mathbf{E}(t)\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{E}(t),\ t \in \mathbb{R}.$$

Todistus. (Vrt. [1, s.198]) Matriisieksponentin määritelmästä saamme

$$\mathbf{E}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t\mathbf{A})^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k \mathbf{A}^k}{k!}.$$

Merkitään, että $c_{ij}^{(k)}$ on matriisin $\mathbf{A}^k$ alkio ij. Tällöin matriisin

$$\frac{t^k \mathbf{A}^k}{k!}$$

alkio ij on

$$\frac{t^k c_{ij}^{(k)}}{k!}.$$

Nyt matriisisarjan määritelmästä seuraa suoraan, että

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k \mathbf{A}^k}{k!} = \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} c_{ij}^{(k)} \right].$$

Jokainen ylläolevan yhtälön oikealla puolella oleva alkio on muuttujan t suppeneva potenssisarja. Tällöin sen derivaatta on olemassa kaikilla $t \in \mathbb{R}$ ja se saadaan derivoidusta sarjasta

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k t^{k-1}}{k!} c_{ij}^{(k)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} c_{ij}^{(k)}.$$

Tästä seuraa, että matriisieksponenttifunktion derivaatta on olemassa ja se saadaan matriisisarjasta

$$\mathbf{E}'(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k \mathbf{A}^{k+1}}{k!} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k \mathbf{A}^k}{k!} \right) \mathbf{A} = \mathbf{E}(t)\mathbf{A}.$$

Edellisessä yhtälöketjussa käytimme ominaisuutta $\mathbf{A}^{k+1} = \mathbf{A}^k\mathbf{A}$. Koska tiedämme, että $\mathbf{A}$ kommutoi matriisin $\mathbf{A}^k$ kanssa, niin olisimme voineet kirjoitttaa myös, että $\mathbf{A}^{k+1} = \mathbf{A}\mathbf{A}^k$ ja olisimme saaneet yhtälön $\mathbf{E}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{E}(t)$. □

Huomautus. Edellinen lause todistaa myös sen, että matriisi $\mathbf{A}$ kommutoi matriisieksponenttifunktion $e^{t\mathbf{A}}$ kanssa.

Seuraavaksi käsittelemme matriisidifferentiaaliyhtälön yksikäsitteistä ratkaisua. Sitä ennen kuitenkin meidän tulee esittää avuksi seuraava lause. Lause määrittää matriisieksponenttifunktioille tärkeän ominaisuuden.

Lause 4.3. *Jokaiselle $n \times n$ -matriisille ja skalaarille t pätee*

$$e^{t\mathbf{A}}e^{-t\mathbf{A}} = \mathbf{I}.$$

Täten siis matriisieksponenttifunktio $e^{t\mathbf{A}}$ on ei-singulaarinen ja $e^{-t\mathbf{A}}$ on sen käänteisfunktio.

Todistus. (Vrt. [1, s. 198]) Olkoon $\mathbf{F}$ matriisifunktio siten, että

$$\mathbf{F}(t) = e^{t\mathbf{A}}e^{-t\mathbf{A}}$$

kaikilla $t \in \mathbb{R}$. Meidän tulee siis todistaa, että $\mathbf{F}(t)$ on identiteettimatriisi. Todistamme tämän näyttämällä, että matriisifunktion $\mathbf{F}(t)$ derivaatta on nolla kaikilla $t \in \mathbb{R}$. Derivoimalla matriisifunktion $\mathbf{F}(t)$ tulon derivointisäännön mukaisesti, ja käyttämällä lausetta 4.2, saamme

$$\begin{aligned}\mathbf{F}'(t) &= e^{t\mathbf{A}}(e^{-t\mathbf{A}})' + (e^{t\mathbf{A}})'e^{-t\mathbf{A}} = e^{t\mathbf{A}}(-\mathbf{A}e^{-t\mathbf{A}}) + \mathbf{A}e^{t\mathbf{A}}e^{-t\mathbf{A}} \\ &= -\mathbf{A}e^{t\mathbf{A}}e^{-t\mathbf{A}} + \mathbf{A}e^{t\mathbf{A}}e^{-t\mathbf{A}} = \mathbf{0},\end{aligned}$$

sillä $\mathbf{A}$ kommutoi matriisieksponenttifunktion $e^{t\mathbf{A}}$ kanssa. Koska matriisifunktion $\mathbf{F}(t)$ derivaatta on identtisesti nollamatriisi, niin $\mathbf{F}$ on vakiomatriisi. Mutta koska

$$\mathbf{F}(0) = e^{0\mathbf{A}}e^{0\mathbf{A}} = \mathbf{I},$$

niin $\mathbf{F}(t) = \mathbf{I}$ kaikilla $t \in \mathbb{R}$. Tämä on juuri mitä piti todistaa. □

Huomautus. Matriisieksponenttifunktion $e^{\mathbf{A}t}$ ei-singulaarisuudesta seuraa, että sen sarakevektorit ovat lineaarisesti riippumattomat. Täten matriisieksponenttifunktio on lineaarisen differentiaaliyhtälöryhmän $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ perusmatriisi. Erityisesti se on perusmatriisi $\mathbf{E}(t)$, siten että $\mathbf{E}(0) = \mathbf{I}$. [4, 482]

Nyt voimme todistaa yksikäsitteisyyslauseen matriisidifferentiaaliyhtälöille.

Lause 4.4. *Olkoot $\mathbf{A}$ ja $\mathbf{B}$ annettuja $n \times n$ vakiomatriiseja. Tällöin ainoa $n \times n$ -matriisifunktio $\mathbf{F}(t)$, joka toteuttaa alkuehto-ongelman*

$$\mathbf{F}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{F}(t), \quad \mathbf{F}(0) = \mathbf{B}$$

kaikilla $-\infty < t < +\infty$, on

$$\mathbf{F}(t) = e^{t\mathbf{A}}\mathbf{B}.$$

Todistus. (Vrt. [1, s. 199]) Lauseesta 4.2 huomaamme, että $e^{t\mathbf{A}}\mathbf{B}$ on ratkaisu. Olkoon nyt $\mathbf{F}(t)$ mikä tahansa ratkaisu ja tarkastellaan matriisifunktiota

$$\mathbf{G}(t) = e^{-t\mathbf{A}}\mathbf{F}(t).$$

Derivoimalla tämän tulon saamme

$$\mathbf{G}'(t) = e^{-t\mathbf{A}}\mathbf{F}'(t) - \mathbf{A}e^{-t\mathbf{A}}\mathbf{F}(t) = e^{-t\mathbf{A}}\mathbf{A}\mathbf{F}(t) - e^{-t\mathbf{A}}\mathbf{A}\mathbf{F}(t) = \mathbf{0}.$$

Täten $\mathbf{G}(t)$ on vakiomatriisi

$$\mathbf{G}(t) = \mathbf{G}(0) = \mathbf{F}(0) = \mathbf{B}.$$

Toisin sanoen $e^{-t\mathbf{A}}\mathbf{F}(t) = \mathbf{B}$. Kertomalla termillä $e^{t\mathbf{A}}$ ja käyttämällä edellisen lauseen tulosta saamme että

$$\mathbf{F}(t) = e^{t\mathbf{A}}\mathbf{B}.$$

□

Seuraavaksi todistamme lauseen, joka kertoo kaavan matriisieksponentin derivaatalle. Derivaattaa tarvitsemme tulevien lauseiden todistamiseen.

Lause 4.5. *Olkoon* $\mathbf{A}$ *neliömatriisi ja* $t \in \mathbb{R}$. *Tällöin*

$$(e^{t\mathbf{A}})' = \mathbf{A}e^{t\mathbf{A}}.$$

Todistus. (Vrt. [7, s.2-3]) Todistamme ensin, että kaikille $s, t \in \mathbb{R}$ pätee $e^{\mathbf{A}(s+t)} = e^{\mathbf{A}s}e^{\mathbf{A}t}$. Matriisieksponentin määritelmästä saamme

$$\begin{aligned} e^{\mathbf{A}s}e^{\mathbf{A}t} &= \left(\mathbf{I} + \mathbf{A}s + \frac{\mathbf{A}^2 s^2}{2!} + \cdots\right)\left(\mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{\mathbf{A}^2 t^2}{2!} + \cdots\right) \\ &= \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^j s^j}{j!}\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^k t^k}{k!}\right) = \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^{j+k} s^j t^k}{j!k!}. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Olkoon nyt $n = j + k$ ja täten $j = n - k$. Näin olettamalla yhtälöstä (4.3) ja binomiteoriasta seuraa, että

$$\begin{aligned} e^{\mathbf{A}s}e^{\mathbf{A}t} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^n s^{n-k} t^k}{(n-k)!k!} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^n}{n!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!k!} s^{n-k} t^k \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^n (s+t)^n}{n!} = e^{\mathbf{A}(s+t)}. \end{aligned}$$

Käyttämällä edellä esitettyä tulosta ja derivaatan raja-arvo määritelmää saamme

$$(e^{\mathbf{A}t})' = \lim_{h\to 0} \frac{e^{\mathbf{A}(t+h)} - e^{\mathbf{A}t}}{h} = e^{\mathbf{A}t}\left(\lim_{h\to 0} \frac{e^{\mathbf{A}h} - \mathbf{I}}{h}\right).$$

Käyttämällä matriisieksponentin määritelmää yhtälöön $e^{\mathbf{A}t} - \mathbf{I}$ saamme

$$\begin{aligned}(e^{\mathbf{A}t})' = e^{\mathbf{A}t}\left(\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\mathbf{A}h + \frac{\mathbf{A}^2h^2}{2!} + \cdots\right]\right) &= e^{\mathbf{A}t}\lim_{h\to 0}\left[\mathbf{A} + \frac{\mathbf{A}^2h}{2!} + \frac{\mathbf{A}^3h^2}{3!} + \cdots\right] \\ &= e^{\mathbf{A}t}\mathbf{A} = \mathbf{A}e^{\mathbf{A}t}.\end{aligned}$$

□

Yksikäsitteisyyslauseen ja edellisen lauseen avulla voimme myös todistaa matriisieksponentille halutun ominaisuuden $e^{\mathbf{A}}e^{\mathbf{B}} = e^{\mathbf{A}+\mathbf{B}}$, mikäli matriisit $\mathbf{A}$ ja $\mathbf{B}$ kommutoivat.

Lause 4.6. *Olkoot* $\mathbf{A}$ *ja* $\mathbf{B}$ $n \times n$ *-matriisit, jotka kommutoivat. Tällöin pätee*

$$e^{\mathbf{A}}e^{\mathbf{B}} = e^{\mathbf{A}+\mathbf{B}}.$$

Todistus. (Vrt. [1, s. 199-200]) Yhtälöstä $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$ seuraa

$$\mathbf{A}^2\mathbf{B} = \mathbf{A}(\mathbf{AB}) = \mathbf{A}(\mathbf{BA}) = (\mathbf{AB})\mathbf{A} = (\mathbf{BA})\mathbf{A} = \mathbf{BA}^2,$$

joten $\mathbf{B}$ kommutoi matriisin $\mathbf{A}^2$ kanssa. Induktiolla voimme osoittaa, että matriisi $\mathbf{B}$ kommutoi minkä tahansa matriisin $\mathbf{A}$ potenssin kanssa. Kirjoittamalla matriisieksponenttifunktion $e^{t\mathbf{A}}$ potenssisarjana huomaamme, että $\mathbf{B}$ kommutoi myös matriisieksponenttifunktion kanssa kaikilla $t \in \mathbb{R}$. Määrittelemme matriisifunktion $\mathbf{F}(t)$ siten, että

$$\mathbf{F}(t) = e^{t(\mathbf{A}+\mathbf{B})} - e^{t\mathbf{A}}e^{t\mathbf{B}}.$$

Derivoimalla matriisifunktion $\mathbf{F}(t)$ ja käyttämällä aiemmin todettua faktaa, että $\mathbf{B}$ kommutoi matriisieksponentin $e^{t\mathbf{A}}$ kanssa, saamme

$$\begin{aligned}\mathbf{F}'(t) &= (\mathbf{A}+\mathbf{B})e^{t(\mathbf{A}+\mathbf{B})} - \mathbf{A}e^{t\mathbf{A}}e^{t\mathbf{B}} - e^{t\mathbf{A}}\mathbf{B}e^{t\mathbf{B}} \\ &= (\mathbf{A}+\mathbf{B})e^{t(\mathbf{A}+\mathbf{B})} - (\mathbf{A}+\mathbf{B})e^{t\mathbf{A}}e^{t\mathbf{B}} \\ &= (\mathbf{A}+\mathbf{B})\mathbf{F}(t).\end{aligned}$$

Lauseesta 4.4 seuraa, että

$$\mathbf{F}(t) = e^{t(\mathbf{A}+\mathbf{B})}\mathbf{F}(0).$$

Mutta $\mathbf{F}(0) = \mathbf{0}$, joten $\mathbf{F}(t) = \mathbf{0}$ kaikilla t. Täten

$$e^{t(\mathbf{A}+\mathbf{B})} = e^{t\mathbf{A}}e^{t\mathbf{B}}.$$

Kun $t = 1$, niin saamme vaaditun tuloksen. □

Edelliset tulokset matriisidifferentiaaliyhtälöille toimivat analogisesti myös vektoridifferentiaaliyhtälöille, jotka luonnollisesti ovat matriisidifferentiaaliyhtälöiden erikoistapauksia. Mielenkiintoisia tarkasteluidemme kannalta ovat kuitenkin nimenomaan vektoridifferentiaaliyhtälöt $\mathbf{Y}'(t) = \mathbf{AY}(t)$, missä siis $\mathbf{A}$ on $n\times n$ -vakiomatriisi ja $\mathbf{Y}(t)$ on n -ulotteinen vektorifunktio. Nämä ovat nimittäin vektori- ja matriisifunktio muotoon kirjoitettuja lineaarisia homogeenisia differentiaaliyhtälöryhmiä. Seuraava lause todistaa yksikäsitteisen ratkaisun olemassaolon homogeenisten differentiaaliyhtälöryhmien alkuehto-ongelmille ja tarjoaa eksplisiittisen kaavan ratkaisulle myös yleisessä muodossa matriisieksponenttifunktion avulla.

Lause 4.7. *Olkoot* $\mathbf{A}$ *annettu* $n \times n$ *-vakiomatriisi ja* $\mathbf{B}$ n *-ulotteinen vektori. Tällöin alkuehto-ongelmalla*

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{B} \tag{4.4}$$

on yksikäsitteinen ratkaisu välillä $-\infty < t < \infty$. *Tämä ratkaisu saadaan yhtälöstä*

$$\mathbf{x}(t) = e^{t\mathbf{A}}\mathbf{B}. \tag{4.5}$$

Yleisemmin alkuehto-ongelman

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t), \quad \mathbf{x}(a) = \mathbf{B}$$

yksikäsitteinen ratkaisu on

$$\mathbf{x}(t) = e^{(t-a)\mathbf{A}}\mathbf{B}.$$

Todistus. (Vrt. [1, s.199]) Derivoimalla yhtälön (4.5) saamme

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}e^{t\mathbf{A}}\mathbf{B} = \mathbf{A}\mathbf{x}(t).$$

Koska $\mathbf{x}(0) = \mathbf{B}$, niin tämä on todella ratkaisu differentiaaliyhtälöryhmälle (4.4). Todistaaksemme, että tämä on ainut ratkaisu, toimimme vastaavalla tavalla kuin lauseessa 4.4. □

Edellisen lauseen nojalla homogeenisten lineaaristen differentiaaliyhtälöryhmien ratkaisemiseksi tulee siis laskea matriisieksponentteja. Kääntäen, jos tiedämme lineaarisen differentiaaliyhtälöryhmän perusmatriisin $\Phi(t)$, niin tuloksista

$$e^{\mathbf{A}t} = \Phi(t)\mathbf{C}$$

ja $e^{\mathbf{A}\cdot 0} = e^{\mathbf{0}} = \mathbf{I}$ seuraa, että

$$e^{\mathbf{A}t} = \Phi(t)\Phi(0)^{-1}.$$

Näin ollen matriisieksponenttifunktion löytämiseksi tulee ratkaista lineaarisen differentiaaliyhtälöryhmän $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ perusmatriisi. Matriisieksponenttifunktion arvojen laskemista käsittelemme lisää seuraavassa alaluvussa.

Matriisieksponenttifunktio tarjoaa myös vakiokertoimisille epähomogeenisille lineaarisille differentiaaliyhtälöryhmille kätevän ratkaisun. Esitämme sen seuraavassa lauseessa.

Lause 4.8. *Olkoot* $\mathbf{A}$ $n \times n$ *-matriisi ja* $\mathbf{Q}$ n*-ulotteinen välillä* J *jatkuva vektorifunktio. Tällöin alkuehto-ongelmalla*

$$\mathbf{Y}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{Y}(t) + \mathbf{Q}(t), \quad \mathbf{Y}(a) = \mathbf{B}$$

on yksikäsitteinen ratkaisu välillä J. *Kyseinen ratkaisu saadaan yhtälöstä*

$$\mathbf{Y}(x) = e^{(x-a)\mathbf{A}}\mathbf{B} + e^{x\mathbf{A}} \int_a^x e^{-t\mathbf{A}}\mathbf{Q}(t)\, dt.$$

Huomautus. Lauseen kaavassa ratkaisun ensimmäinen osio on ratkaisu homogeeniselle alkuehto-ongelmalle $\mathbf{Y}'(t) = \mathbf{AY}(t), \mathbf{Y}(a) = \mathbf{B}$ ja jälkimmäinen osio on ratkaisu epähomogeeniselle alkuehto-ongelmalle

$$\mathbf{Y}'(t) = \mathbf{AY}(t) + \mathbf{Q}(t), \quad \mathbf{Y}(a) = \mathbf{0}.$$

Todistus. (Vrt. [1, s.213]) Aloitamme kertomalla epähomogeenisen differentiaaliyhtälöryhmän $\mathbf{Y}'(t) = \mathbf{AY}(t) + \mathbf{Q}(t)$ termillä $e^{-t\mathbf{A}}$ ja kirjoitamme sen muotoon

$$e^{-t\mathbf{A}}(\mathbf{Y}'(t) - \mathbf{AY}(t)) = e^{-t\mathbf{A}}\mathbf{Q}(t).$$

Tässä yhtälön vasen puoli on tulon $e^{-t\mathbf{A}}\mathbf{Y}(t)$ derivaatta. Jos integroimme yhtälön molemmat puolet arvosta a arvoon x, niin saamme yhtälön

$$e^{-x\mathbf{A}}\mathbf{Y}(x) - e^{-a\mathbf{A}}\mathbf{Y}(a) = \int_a^x e^{-t\mathbf{A}}\mathbf{Q}(t)\ \mathrm{dt}.$$

Kertomalla tämän puolittain termillä $e^{x\mathbf{A}}$ saamme yhtälön

$$\mathbf{Y}(x) = e^{(x-a)\mathbf{A}}\mathbf{B} + e^{x\mathbf{A}}\int_a^x e^{-t\mathbf{A}}\mathbf{Q}(t)\ \mathrm{dt}.$$

Siis tämä todella on differentiaaliyhtälöryhmän ratkaisu. □

Kaavan käyttämisen vaikeus on tässä ja muissakin edellä mainituissa tapauksissa matriisieksponenttifunktion laskemisessa. Matriisieksponenttifunktion arvon laskemista käsittelemmekin seuraavassa alaluvussa.

Käsittelemme vielä yleisen lineaarisen differentiaaliyhtälöryhmän tapauksen. Käsittelemme siis lineaarista differentiaaliyhtälöryhmää

$$\mathbf{Y}'(t) = \mathbf{P}(t)\mathbf{Y}(t) + \mathbf{Q}(t), \tag{4.6}$$

missä $n \times n$ -kerroinmatriisi $\mathbf{P}(t)$ ei välttämättä ole vakiomatriisi.

Lause 3.1 kertoo, että alkuehto-ongelmalla

$$\mathbf{Y}'(t) = \mathbf{P}(t)\mathbf{Y}(t) + \mathbf{Q}(t), \quad \mathbf{Y}(a) = \mathbf{B}$$

on yksikäsitteinen ratkaisu, mikäli matriisifunktiot $\mathbf{P}$ ja $\mathbf{Q}$ ovat jatkuvia koko välillä I. Käytämme tätä tulosta muodostaaksemme yhtälön kyseiselle ratkaisulle. Skalaaritapauksessa, jossa siis $n = 1$, peliin tulevat tässä luvussa esittelemämme matriisieksponenttifunktiot.

Tämän alaluvun lopuksi esitämme kaavan yleisen lineaarisen differentiaaliyhtälön ratkaisulle. Tätä todistusta varten tarvitsemme kuitenkin kaksi seuraavaa lausetta, joista ensimmäinen toteaa vain, että homogeenisella alkuehto-ongelmalla on ratkaisu välillä I.

Lause 4.9. *Olkoon* $\mathbf{A}(t)$ *välillä* I *jatkuva* $n \times n$ *-matriisifunktio. Jos* $a \in I$ *ja* $\mathbf{B}$ *on annettu* n *-ulotteinen vektorifunktio, niin homogeenisella differentiaaliyhtälöryhmällä*

$$\mathbf{Y}'(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{Y}(t), \quad \mathbf{Y}(a) = \mathbf{B}$$

on n *-ulotteinen vektoriratkaisu* $\mathbf{Y}$ *välillä* I*. [1, s. 219]*

Kuten yleisenkin olemassaololauseen tapauksessa todistus on pitkä ja monivaiheinen, joten jätämme sen esittämättä tässä yhteydessä. Seuraava lause on tärkeä tulevaa tulostamme silmällä pitäen.

Lause 4.10. *Olkoot* $\mathbf{P}$ *välillä* I *jatkuva* $n \times n$ *-matriisifunktio ja* a *mikä tahansa piste välillä* I*. Tällöin on olemassa* $n \times n$ *-matriisifunktio, joka toteuttaa matriisidifferentiaaliyhtälön*

$$\mathbf{F}'(x) = -\mathbf{F}(x)\mathbf{P}(x) \tag{4.7}$$

välillä I *ja alkuehdolla* $\mathbf{F}(a) = \mathbf{I}$*. Lisäksi* $\mathbf{F}(x)$ *on ei-singulaarinen kaikilla* $x \in I$*.*

Todistus. (Vrt. [1, s. 219-220]) Olkoon $\mathbf{Y}_k(x)$ vektoriratkaisu differentiaaliyhtälölle

$$\mathbf{Y}_k'(x) = -\mathbf{P}(x)^t\mathbf{Y}_k(x)$$

välillä I ja alkuehdolla $\mathbf{Y}_k(a) = \mathbf{I}_k$. Tässä $\mathbf{Y}_k$ on matriisin $\mathbf{Y}$ sarake k ja vastaavasti $\mathbf{I}_k$ on identiteettimatriisin sarake k. Lisäksi $\mathbf{P}(x)^t$ tarkoittaa matriisin $\mathbf{P}$ transpoosia. Olkoon nyt $\mathbf{G}(x)$ $n \times n$ -matriisi, jonka sarake k on $\mathbf{Y}_k(x)$. Tällöin $\mathbf{G}(x)$ toteuttaa matriisidifferentiaaliyhtälön

$$\mathbf{G}'(x) = -\mathbf{P}(x)^t\mathbf{G}(x)$$

välillä I ja alkuehdolla $\mathbf{G}(a) = \mathbf{I}$. Otetaan sitten edellisen yhtälön kaikista termeistä transpoosi, jolloin saamme

$$(\mathbf{G}'(x))^t = -\mathbf{G}(x)^t\mathbf{P}(x).$$

Tiedämme lisäksi, että derivaatan transpoosi on transpoosin derivaatta, joten matriisifunktio $\mathbf{F}(x) = \mathbf{G}(x)^t$ toteuttaa yhtälön (4.7) alkuehdolla $\mathbf{F}(a) = \mathbf{I}$, mikä oli juuri mitä piti todistaa.

Todistetaan vielä, että $\mathbf{F}(x)$ on ei-singulaarinen esittämällä sen käänteismatriisi. Olkoon $\mathbf{H}$ $n \times n$ -matriisifunktio, jonka sarake k toteuttaa matriisidifferentiaaliyhtälön

$$\mathbf{Y}'(x) = \mathbf{P}(x)\mathbf{Y}(x)$$

alkuehdolla $\mathbf{Y}(a) = \mathbf{I}$. Tällöin $\mathbf{H}$ toteuttaa alkuehto-ongelman

$$\mathbf{H}'(x) = \mathbf{P}(x)\mathbf{H}(x), \quad \mathbf{H}(a) = \mathbf{I}$$

välillä I. Tulon $\mathbf{F}(x)\mathbf{H}(x)$ derivaatta on

$$\mathbf{F}(x)\mathbf{H}'(x) + \mathbf{F}'(x)\mathbf{H}(x) = \mathbf{F}(x)\mathbf{P}(x)\mathbf{H}(x) - \mathbf{F}(x)\mathbf{P}(x)\mathbf{H}(x) = \mathbf{0}$$

kaikilla $x \in I$. Täten siis tulo $\mathbf{F}(x)\mathbf{H}(x)$ on vakio, $\mathbf{F}(x)\mathbf{H}(x) = \mathbf{F}(a)\mathbf{H}(a) = \mathbf{I}$, joten $\mathbf{H}(x)$ on matriisifunktion $\mathbf{F}(x)$ käänteismatriisi, joten $\mathbf{F}$ on ei-singulaarinen. □

Nyt voimme esittää kaavan yleisen lineaarisen differentiaaliyhtälöryhmän ratkaisulle. Esitämme sen seuraavassa lauseessa.

Lause 4.11. *Olkoot $n \times n$ -matriisifunktio $\mathbf{P}$ ja n -ulotteinen vektorifunktio $\mathbf{Q}$ jatkuvia välillä I. Tällöin alkuehto-ongelman*

$$\mathbf{Y}'(x) = \mathbf{P}(x)\mathbf{Y}(x) + \mathbf{Q}(x), \quad \mathbf{Y}(a) = \mathbf{B}$$

ratkaisu välillä I on

$$\mathbf{Y}(x) = \mathbf{F}(x)^{-1}\mathbf{Y}(a) + \mathbf{F}(x)^{-1} \int_a^x \mathbf{F}(t)\mathbf{Q}(t)\, dt.$$

Tässä $n \times n$ -matriisifunktio $\mathbf{F}$ on transpoosi matriisista, jonka sarake k on ratkaisu alkuehto-ongelmalle

$$\mathbf{Y}'(x) = -\mathbf{P}(x)^t\mathbf{Y}(x), \quad \mathbf{Y}(a) = \mathbf{I}_k,$$

missä $\mathbf{I}_k$ on identiteettimatriisin sarake k.

Todistus. (Vrt. [1, s. 218]) Jos kerromme yhtälön (4.6) puolittain mielivaltaisella $n \times n$ -matriisifunktiolla $\mathbf{F}(t)$, niin saamme

$$\mathbf{F}(t)\mathbf{Y}'(t) = \mathbf{F}(t)\mathbf{P}(t)\mathbf{Y}(t) + \mathbf{F}(t)\mathbf{Q}(t).$$

Lisäämällä vielä molemmille puolille termin $\mathbf{F}'(t)\mathbf{Y}(t)$ saamme yhtälön vasemmaksi puoleksi tulon $\mathbf{F}(t)\mathbf{Y}(t)$ derivaataksi. Tekemällä tämän saamme

$$(\mathbf{F}(t)\mathbf{Y}(t))' = (\mathbf{F}'(t) + \mathbf{F}(t)\mathbf{P}(t))\mathbf{Y}(t) + \mathbf{F}(t)\mathbf{Q}(t).$$

Valitsemme matriisifunktion $\mathbf{F}(t)$ siten, että summa $\mathbf{F}'(t) + \mathbf{F}(t)\mathbf{P}(t)$ on nolla, mikä on mahdollista lauseen 4.10 nojalla. Tällöin yhtälö sieventyy muotoon

$$(\mathbf{F}(t)\mathbf{Y}(t))' = \mathbf{F}(t)\mathbf{Q}(t).$$

Integroimalla tämän yhtälön puolittain arvosta a arvoon x saamme

$$\mathbf{F}(x)\mathbf{Y}(x) - \mathbf{F}(a)\mathbf{Y}(a) = \int_a^x \mathbf{F}(t)\mathbf{Q}(t)\,\mathrm{dt}.$$

Koska lauseen 4.10 nojalla matriisifunktio $\mathbf{F}(x)$ on ei-singulaarinen, niin saamme yhtälön

$$\mathbf{Y}(x) = \mathbf{F}(x)^{-1}\mathbf{F}(a)\mathbf{Y}(a) + \mathbf{F}(x)^{-1} \int_a^x \mathbf{F}(t)\mathbf{Q}(t)\,\mathrm{dt},$$

mikä on juuri mitä piti todistaa, sillä $\mathbf{F}(a) = \mathbf{I}$. □

Vaikka edellinen lause antaakin kaavan yleisen lineaarisen differentiaaliyhtälöryhmän ratkaisemiselle, niin vaikeus on matriisifunktion $\mathbf{F}(t)$ valitsemisessa. Matriisifunktion $\mathbf{F}$ valitseminen oikein nimittäin vaatii n kappaleen lineaarisen differentiaaliyhtälöryhmän ratkaisemista. Niiden ratkaisemisessa käyttökelponen keino on tässä luvussa esittelemämme matriisieksponenttifunktiot.

4.3 Matriisieksponenttifunktion laskeminen

Kuten edellisessä alaluvussa huomasimme matriisieksponenttifunktio $e^{t\mathbf{A}}$ helpottaa monissa tapauksissa homogeenisten differentiaaliyhtälöiden ratkaisemista. Kuitenkin useasti ongelmaksi muodostuu kyseisen matriisieksponenttifunktion arvojen laskeminen. Tässä alaluvussa keskitymme keinoihin, joilla matriisieksponentifunktion arvon voi laskea. Matriisieksponenttifunktion laskeminen suoraan potenssisarjamuotoisesta määritelmästään osoittautuu monessa tapauksessa hyvin hankalaksi, sillä tällöin tulee laskea suuria matriisien potensseja ja suuria määriä sarjojen arvoja erikseen. Kuitenkin muutamassa erityistapauksessa tämä on mahdollista. Esitämme nämä erityistapaukset ensin esimerkkeinä ja siirrymme sen jälkeen käsittelemään yleisempää teoriaa.

Esimerkki 4.1. Mikäli $\mathbf{A}^n = \mathbf{0}$ jollain $n \in \mathbb{Z}_+$, niin sanotaan että matriisi $\mathbf{A}$ on *nilpotentti*. Tällöin eksponenttimatriisin sarjakehitelmä sisältää äärellisen määrän termejä, jolloin matriisieksponentin arvo on helppoa laskea. Olkoon esimerkiksi

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Tällöin

$$\mathbf{A}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Nyt siis $\mathbf{A}^n = \mathbf{0}$ kaikilla $n \geq 3$. Täten

$$\begin{aligned} e^{t\mathbf{A}} = \mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{1}{2}\mathbf{A}^2t^2 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} t + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} t^2 \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 2t & t + 3t^2 \\ 0 & 1 & 3t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Tämä keino helpottaa arvojen laskemista huomattavasti, mikäli potenssi $n \in \mathbb{Z}$, jolla $\mathbf{A}^n$ menee nollaksi, on suhteellisen pieni.

Esimerkki 4.2. Matriisin potenssien laskeminen helpottuu huomattavasti, mikäli matriisi $\mathbf{A}$ on diagonaalimatriisi eli $\mathbf{A} = \mathrm{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$. Tällöin myös jokainen sen potenssi on diagonaalimatriisi ja

$$\mathbf{A}^k = \mathrm{diag}(\lambda_1^k, ..., \lambda_n^k).$$

Tässä tapauksessa matriisieksponenttifunktion arvo on diagonaalimatriisi ja saamme sen kaavasta

$$e^{t\mathbf{A}} = \mathrm{diag}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}\lambda_1^k, ..., \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}\lambda_n^k \right) = \mathrm{diag}(e^{t\lambda_1}, ..., e^{t\lambda_n}).$$

Olkoon esimerkiksi

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix},$$

jolloin

$$e^{t\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{3t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{5t} \end{bmatrix}.$$

Esimerkki 4.3. Suhteellisen helppoa matriisieksponenttifunktion laskemisesta tulee myös, mikäli matriisi $\mathbf{A}$ on diagonalisoituva. Jos on olemassa ei-singulaarinen matriisi $\mathbf{C}$ siten, että $\mathbf{C}^{-1}\mathbf{AC} = \mathbf{D}$, missä matriisi $\mathbf{D}$ on diagonaalimatriisi, niin tällöin $\mathbf{A} = \mathbf{CDC}^{-1}$. Nyt

$$\mathbf{A}^2 = (\mathbf{CDC}^{-1})(\mathbf{CDC}^{-1}) = \mathbf{CD}^2\mathbf{C}^{-1},$$

mikä yleistyy muotoon

$$\mathbf{A}^k = \mathbf{CD}^k\mathbf{C}^{-1}.$$

Tällöin matriisieksponenttifunktion arvo saadaan lausekkeesta

$$e^{t\mathbf{A}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k\mathbf{A}^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}\mathbf{CD}^k\mathbf{C}^{-1} = \mathbf{C}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k\mathbf{D}^k}{k!}\mathbf{C}^{-1} = \mathbf{C}e^{t\mathbf{D}}\mathbf{C}^{-1}$$

Otetaan esimerkiksi matriisi

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Tällä on ominaisarvot $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 1$ ja niihin liittyvät ominaisvektorit ovat

$$v_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Nyt saamme matriisit

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

ja

$$\mathbf{D} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{AC} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Näin saamme diagonalisoinnin

$$\mathbf{A} = \mathbf{CDC}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Tällöin

$$e^{\mathbf{A}t} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{1t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -e^t & 0 \\ e^{2t} + e^t & -e^{2t} \end{bmatrix}.$$

4.3.1 Putzerin menetelmä

Mikäli matriisi $\mathbf{A}$ ei ole diagonalisoituva, niin matriisieksponentin laskeminen ei ole näin yksinkertaista. Matriisieksponenttien laskemiseen on kuitenkin kehitetty monia keinoja, joista esittelemme yhden seuraavaksi. Kyseessä on Putzerin menetelmä, joka toimii niin diagonalisoituville kuin ei-diagonalistoituville matriiseille ja on täten varsin voimakas metodi. Tarvitsemme aputulokseksi Cayley-Hamiltonin lauseen. Sivuutamme lauseen todistuksen, sillä todistus ei ole oleellinen tarkasteluidemme kannalta. Lause kertoo, että jokainen neliömatriisi toteuttaa karakterisen yhtälönsä.

Lause 4.12. *Olkoon* $\mathbf{A}$ $n \times n$ *-matriisi ja*

$$f(\lambda) = \det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \lambda^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + c_1\lambda + c_0$$

sen karakteristinen polynomi. Tällöin $f(\mathbf{A}) = \mathbf{0}$. *Matriisi* $\mathbf{A}$ *toteuttaa siis yhtälön*

$$\mathbf{A}^n + c_{n-1}\mathbf{A}^{n-1} + \cdots + c_1\mathbf{A} + c_0\mathbf{I} = \mathbf{0}.$$

[1, s. 203]

Cayley-Hamiltonin lauseen nojalla jokaisen $n \times n$ -matriisin $\mathbf{A}$ n:s potenssi voidaan esittää identiteettimatriisin ja sen alempien potenssien $\mathbf{A}, \mathbf{A}^2, \ldots, \mathbf{A}^{n-1}$ lineaarikombinaationa. Tästä seuraa suoraan, että myös potenssit $\mathbf{A}^{n+1}, \mathbf{A}^{n+2}, \ldots$ voidaan esittää lineaarikombinaationa $n-1$ ensimmäisestä potenssista. Täten eksponenttifunktion $e^{\mathbf{A}t}$ äärettömässä sarjakehitelmässä jokainen termi

$$\frac{t^k\mathbf{A}^k}{k!}$$

on lineaarikombinaatio termeistä $t^k\mathbf{I}, t^k\mathbf{A}, \ldots, t^k\mathbf{A}^{n-1}$. Voidaan siis olettaa matriisieksponenttifunktion olevan muotoa

$$e^{t\mathbf{A}} = \sum_{k=0}^{n-1} q_k(t)\mathbf{A}^k.$$

Putzer kehitti matriisieksponenttifunktion laskemiseksi kaksi metodia. Seuraavassa lauseessa esitämme niistä yksinkertaisemman.

Lause 4.13. *Olkoot* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ $n \times n$ *-matriisin* $\mathbf{A}$ *ominaisarvot ja määritellään jono matriisin* $\mathbf{A}$ *polynomeja seuraavalla tavalla*

$$P_0(\mathbf{A}) = \mathbf{I}, \quad P_k(\mathbf{A}) = \prod_{m=1}^{k}(\mathbf{A} - \lambda_m\mathbf{I}), \quad k = 1, \ldots, n. \tag{4.8}$$

Tällöin

$$e^{t\mathbf{A}} = \sum_{k=0}^{n-1} r_{k+1}(t)P_k(\mathbf{A}), \tag{4.9}$$

missä kertoimet $r_1(t), \ldots, r_n(t)$ on määritelty rekursiivisesti lineaarisesta differentiaaliyhtälöryhmästä

$$
\begin{aligned}
r_1'(t) &= \lambda_1 r_1(t), & r_1(0) &= 1 \\
r_{k+1}'(t) &= \lambda_{k+1} r_{k+1} + r_k(t), & r_{k+1}(0) &= 0, \quad (k = 1, 2, \ldots, n-1).
\end{aligned} \tag{4.10}
$$

Todistus. (Vrt. [1, s. 206-207]) Olkoot $r_1(t), \ldots, r_n(t)$ funktiot, jotka määräytyvät yhtälöryhmästä (4.10), ja määrittelemme matriisifunktion $\mathbf{F}$ asettamalla

$$
\mathbf{F}(t) = \sum_{k=0}^{n-1} r_{k+1}(t) P_k(\mathbf{A}). \tag{4.11}
$$

Huomaamme, että $\mathbf{F}(0) = r_1(0)P_0(\mathbf{A}) = \mathbf{I}$. Osoitamme, että $\mathbf{F}(t) = e^{t\mathbf{A}}$ näyttämällä, että $\mathbf{F}$ toteuttaa saman matriisidifferentiaaliyhtälön kuin $e^{t\mathbf{A}}$ eli yhtälön $\mathbf{F}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{F}(t)$. Derivoimalla $\mathbf{F}(t)$ ja käyttämällä lauseessa esiintyneitä rekursioyhtälöitä saamme

$$
\mathbf{F}'(t) = \sum_{k=0}^{n-1} r_{k+1}'(t) P_k(\mathbf{A}) = \sum_{k=0}^{n-1} \{r_k(t) + \lambda_{k+1} r_{k+1}(t)\} P_k(\mathbf{A}),
$$

missä $r_0(t)$ on määritelty nollaksi. Uudelleenmuotoilemalla ylläolevan yhtälön saamme

$$
\mathbf{F}'(t) = \sum_{k=0}^{n-2} r_{k+1}(t) P_{k+1}(\mathbf{A}) + \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_{k+1} r_{k+1}(t) P_k(\mathbf{A}).
$$

Vähentämällä tästä puolittain termi

$$
\lambda_n \mathbf{F}(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_n r_{k+1}(t) P_k(\mathbf{A})
$$

saamme relaation

$$
\mathbf{F}'(t) - \lambda_n \mathbf{F}(t) = \sum_{k=0}^{n-2} r_{k+1}(t) \{P_{k+1}(\mathbf{A}) + (\lambda_{k+1} - \lambda_n) P_k(\mathbf{A})\}. \tag{4.12}
$$

Mutta yhtälöistä (4.8) näemme, että $P_{k+1}(\mathbf{A}) = (\mathbf{A} - \lambda_{k+1}\mathbf{I}) P_k(\mathbf{A})$, joten

$$
\begin{aligned}
P_{k+1}(\mathbf{A}) + (\lambda_{k+1} - \lambda_n) P_k(\mathbf{A}) &= (\mathbf{A} - \lambda_{k+1}\mathbf{I}) P_k(\mathbf{A}) + (\lambda_{k+1} - \lambda_n) P_k(\mathbf{A}) \\
&= (\mathbf{A} - \lambda_n \mathbf{I}) P_k(\mathbf{A}).
\end{aligned}
$$

Nyt yhtälöstä (4.12) tulee

$$
\begin{aligned}
\mathbf{F}'(t) - \lambda_n \mathbf{F}(t) = (\mathbf{A} - \lambda_n \mathbf{I}) \sum_{k=0}^{n-2} r_{k+1}(t) P_k(\mathbf{A}) &= (\mathbf{A} - \lambda_n \mathbf{I}) \{\mathbf{F}(t) - r_n(t) P_{n-1}(\mathbf{A})\} \\
&= (\mathbf{A} - \lambda_n \mathbf{I}) \mathbf{F}(t) - r_n(t) P_n(\mathbf{A}).
\end{aligned}
$$

Cayley-Hamiltonin lauseen nojalla $P_n(\mathbf{A}) = \mathbf{0}$, joten viimeisestä yhtälöstä tulee

$$\mathbf{F}'(t) - \lambda_n \mathbf{F}(t) = (\mathbf{A} - \lambda_n \mathbf{I})\mathbf{F}(t) = \mathbf{A}\mathbf{F}(t) - \lambda_n \mathbf{F}(t),$$

mistä seuraa, että $\mathbf{F}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{F}(t)$. Koska $\mathbf{F}(0) = \mathbf{I}$, niin yksikäsitteisyyslauseesta seuraa, että $\mathbf{F}(t) = e^{t\mathbf{A}}$. □

Seuraavaksi esitämme esimerkin lauseen käytöstä.

Esimerkki 4.4. Olkoon

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}.$$

Tällä on ominaisarvot $\lambda_1 = 3$ ja $\lambda_2 = 1$. Nyt voimme ratkaista kertoimet $r_1(t)$ ja $r_2(t)$ differentiaaliyhtälöryhmästä

$$\begin{aligned} r_1'(t) &= 3r_1(t), \quad r_1(0) = 1 \\ r_2'(t) &= r_2(t) + r_1(t), \quad r_2(0) = 0. \end{aligned}$$

Ratkaisemalla tämä saamme, että $r_1(t) = e^{3t}$ ja $r_2(t) = \frac{e^{3t}-e^t}{3-1} = \frac{e^{3t}-e^t}{2}$. Lisäksi $P_0(\mathbf{A}) = \mathbf{I}$ ja $P_1(\mathbf{A}) = \mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I}$. Nyt edellisen lauseen nojalla

$$\begin{aligned} e^{\mathbf{A}t} = e^{3t}\mathbf{I} + \frac{e^{3t} - e^t}{2}(\mathbf{A} - 3\mathbf{I}) &= (e^{3t} + \frac{3e^{3t} - 3e^t}{2})\mathbf{I} + \frac{e^{3t} - e^t}{2}\mathbf{A} \\ &= (\frac{5e^{3t} - 3e^t}{2})\mathbf{I} + \frac{e^{3t} - e^t}{2}\mathbf{A}. \end{aligned}$$

Tähän vielä sijoittamalla alkuperäisen matriisin $\mathbf{A}$ ja käyttämällä matriisien laskutoimituksia saamme

$$e^{t\mathbf{A}} = (\frac{5e^{3t} - 3e^t}{2})\mathbf{I} + \frac{e^{3t} - e^t}{2}\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5e^{3t} - 4e^t & -e^{3t} + e^t \\ 2e^{3t} - 2e^t & 2e^{3t} - e^t \end{bmatrix}.$$

Esimerkki 4.5. Jos edellisen esimerkin matriisi $\mathbf{A}$ on kerroinmatriisi differentiaaliyhtälöryhmälle $\mathbf{Y}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{Y}(t)$, niin saamme, että alkuehto-ongelman

$$\mathbf{Y}'(t) = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}\mathbf{Y}(t), \quad \mathbf{Y}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

ratkaisu on

$$\mathbf{Y}(t) = e^{\mathbf{A}t}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5e^{3t} - 4e^t & -e^{3t} + e^t \\ 2e^{3t} - 2e^t & 2e^{3t} - e^t \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3e^{3t} - 2e^t \\ 6e^{3t} - 4e^t \end{bmatrix}.$$

4.3.2 Muita menetelmiä

Esitämme tässä alaluvussa muutaman keinon matriisieksponenttifunktion arvon laskemiselle erinäisissä erikoistapauksissa. Jokaisessa erikoistapauksessa saamme matriisieksponenttifunktion laskemista helpottavan kaavan. Aloitamme tapauksesta, jossa $n \times n$ -matriisin kaikki ominaisarvot ovat samoja.

Lause 4.14. *Mikäli* $\mathbf{A}$ *on* $n \times n$ *-matriisi, jonka kaikki ominaisarvot ovat yhtä kuin* λ*, niin tällöin*

$$e^{t\mathbf{A}} = e^{\lambda t} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k}{k!} (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})^k.$$

Todistus. (Vrt. [1, s.209]) Koska matriisit $\lambda t \mathbf{I}$ ja $t(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})$ kommutoivat saamme

$$e^{t\mathbf{A}} = e^{\lambda t \mathbf{I}} e^{t(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})} = (e^{\lambda t} \mathbf{I}) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})^k.$$

Cayley-Hamiltonin lauseen nojalla $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})^k = \mathbf{0}$ kaikilla $k \geq n$, joten lause seuraa tästä. □

Näytämme lauseen käyttöä käytännössä seuraavan esimerkin voimin.

Esimerkki 4.6. Olkoon

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Tällä on kerroinlukua kolme oleva ominaisarvo $\lambda = 1$. Nyt lauseen 4.14 nojalla

$$e^{t\mathbf{A}} = e^t \sum_{k=0}^{2} \frac{t^k}{k!} (\mathbf{A} - \mathbf{I})^k = e^t (\mathbf{I} + t(\mathbf{A} - \mathbf{I}) + \frac{t^2}{2} (\mathbf{A} - \mathbf{I})^2. \tag{4.13}$$

Todetaan ensin, että

$$\mathbf{A} - \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad (\mathbf{A} - \mathbf{I})^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Sijoitetaan nämä yhtälöön (4.13), jolloin saamme matriisieksponenttifunktion arvoksi

$$\begin{aligned} e^{t\mathbf{A}} &= e^t \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{t^2}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) = e^t \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2t \\ 0 & 1 & 3t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} e^t & 0 & 2te^t \\ 0 & e^t & 3te^t \\ 0 & 0 & e^t \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Mikäli matriisin kaikki ominaisarvot ovat erisuuria, niin seuraava tulos kertoo tällöin kaavan matriisieksponenttifunktion arvon laskemiselle.

Lause 4.15. *Jos* $\mathbf{A}$ *on* $n \times n$ *-matriisi ja sillä on* n *erisuurta ominaisarvoa* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$*, niin tällöin*

$$e^{t\mathbf{A}} = \sum_{k=1}^{n} e^{t\lambda_k} L_k(\mathbf{A}),$$

missä $L_k(\mathbf{A})$ on $(n-1)$ - asteinen polynomi, joka saadaan yhtälöstä

$$L_k(\mathbf{A}) = \prod_{j=1, j\neq k}^{n} \frac{\mathbf{A} - \lambda_j \mathbf{I}}{\lambda_k - \lambda_j}, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Todistus. (Vrt. [1, s. 209]) Määrittelemme matriisifunktion $\mathbf{F}(t)$ seuraavalla tavalla

$$\mathbf{F}(t) = \sum_{k=1}^{n} e^{t\lambda_k} L_k(\mathbf{A}).$$

Meidän tulee varmistaa, että $\mathbf{F}$ toteuttaa differentiaaliyhtälöryhmän $\mathbf{F}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{F}(t)$ alkuehdoilla $\mathbf{F}(0) = \mathbf{I}$. Ylläolevasta matriisifunktion $\mathbf{F}(t)$ yhtälöstä näemme, että

$$\mathbf{A}\mathbf{F}(t) - \mathbf{F}'(t) = \sum_{k=1}^{n} e^{t\lambda_k} (\mathbf{A} - \lambda_k \mathbf{I}) L_k(\mathbf{A}).$$

Cayley-Hamiltonin lauseesta saamme $(\mathbf{A} - \lambda_k \mathbf{I}) L_k(\mathbf{A}) = \mathbf{0}$ kaikilla indeksin k arvoilla, joten $\mathbf{F}$ toteuttaa halutun differentiaaliyhtälöryhmän.

Seuraavaksi meidän tulee vielä näyttää, että $\mathbf{F}$ toteuttaa alkuehdon $\mathbf{F}(0) = \mathbf{I}$, joka on siis

$$\sum_{k=1}^{n} L_k(\mathbf{A}) = \mathbf{I}.$$

Tutkimme ensin yhtälöä

$$L_k(\lambda) = \prod_{j=1, j\neq k}^{n} \frac{\lambda - \lambda_j}{\lambda_k - \lambda_j},$$

missä $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ ovat erisuuria skalaareja. Tarkastellaan arvoa $L_k(\lambda_i)$. Tulo hyppää yli kohdan, jossa $j = k$, joten jos $i = k$, niin tulon kaikki termit ovat yhtä kuin 1 ja tulo itsessään on yhtä kuin 1. Toisaalta taas, jos $i \neq k$ ja koska ehto $j \neq k$ ei kiellä sitä, niin tällöin yksi tulon termeistä on 0 ja koko tulo nollautuu täten. Toisin sanoen pätee

$$L_k(\lambda_i) = \begin{cases} 0, \text{ jos } \lambda_i \neq \lambda_k \\ 1, \text{ jos } \lambda_i = \lambda_k. \end{cases}$$

Määrittelemme seuraavaksi polynomin $p(\lambda) = \sum_{k=1}^{n} y_k L_k(\lambda)$. Käyttämällä edellistä tulosta saamme

$$p(\lambda_k) = \sum_{k=1}^{n} y_k L_k(\lambda_k) = y_k \quad \text{kaikilla } k = 1, \ldots, n,$$

missä $y_1, \ldots, y_n$ ovat n vakiota. Todistamme vielä, että se on itse asiassa ainoa astetta $\leq n-1$ oleva kyseisen ominaisuuden omaava polynomi. Olkoon $q(\lambda)$ vastaavanlainen polynomi. Olkoon nyt $r(\lambda) = p(\lambda) - q(\lambda)$. Myös r on polynomi astetta $\leq n-1$. Nyt kuitenkin

$$r(\lambda_k) = p(\lambda_k) - q(\lambda_k) = y_k - y_k = 0,$$

joten polynomilla r on n juurta, mikä on mahdotonta, sillä r on astetta $\leq n-1$. Näin ollen täytyy olla $r(\lambda) = 0$ ja siis $p(\lambda) = q(\lambda)$ ja $p(\lambda)$ on yksikäsitteinen. Nyt jos $y_1 = y_2 = \cdots = y_n = 1$, niin

$$\sum_{k=1}^{n} L_k(\lambda) = p(\lambda) = 1 \quad \text{kaikilla } \lambda = \lambda_1, \ldots, \lambda_n.$$

Koska $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ ovat matriisin $\mathbf{A}$ ominaisarvot, niin

$$\sum_{k=1}^{n} L_k(\mathbf{A}) - \sum_{k=1}^{n} L_k(\lambda)\mathbf{I} = \mathbf{0}.$$

Täten siis kun jälkimmäinen summa on aina 1, niin saamme

$$\sum_{k=1}^{n} L_k(\mathbf{A}) = \mathbf{I},$$

mikä on juuri mitä piti todistaa. □

Viimeisenä käsittelemme tapauksen, jossa matriisilla on kaksi erisuurta ominaisarvoa, joista toinen on kertalukua $n-1$ ja toinen kertalukua 1. Esitämme tästä myös esimerkin lauseen jälkeen.

Lause 4.16. *Olkoon* $\mathbf{A}$ $n \times n$ *-matriisi* ($n \geq 3$), *jolla on kaksi erisuurta ominaisarvoa* λ *ja* μ. *Olkoon ominaisarvo* λ *kertalukua* $n-1$ *ja ominaisarvo* μ *kertalukua 1. Tällöin*

$$e^{t\mathbf{A}} = e^{\lambda t} \sum_{k=0}^{n-2} \frac{t^k}{k!} (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^k + \left\{ \frac{e^{\mu t}}{(\mu-\lambda)^{n-1}} - \frac{e^{\lambda t}}{(\mu-\lambda)^{n-1}} \sum_{k=0}^{n-2} \frac{t^k}{k!} (\mu-\lambda)^k \right\} (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^{n-1}.$$

Todistus. (Vrt. [1, s.210]) Kirjoitamme matriisieksponenttifunktion ensin muotoon

$$\begin{aligned} e^{t\mathbf{A}} &= e^{\lambda t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^k = e^{\lambda t} \sum_{k=0}^{n-2} \frac{t^k}{k!} (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^k + e^{\lambda t} \sum_{k=n-1}^{\infty} \frac{t^k}{k!} (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^k \\ &= e^{\lambda t} \sum_{k=0}^{n-2} \frac{t^k}{k!} (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^k + e^{\lambda t} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{t^{n-1+r}}{(n-1+r)!} (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^{n-1+r}. \end{aligned}$$

Laskemme sarjan nyt r:n suhteen suljetussa muodossa käyttämällä Cayley-Hamiltonin lausetta. Koska

$$\mathbf{A} - \mu\mathbf{I} = \mathbf{A} - \lambda\mathbf{I} - (\mu - \lambda\mathbf{I})$$

saamme, että

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^{n-1}(\mathbf{A} - \mu\mathbf{I}) = (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^n - (\mu - \lambda)(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^{n-1}.$$

Vasen puoli on nollamatriisi Cayley-Hamiltonin lauseen nojalla, joten

$$(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})^n=(\mu-\lambda)(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})^{n-1}.$$

Käyttämällä tätä yhtälöä toistuvasti saamme

$$(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})^{n-1+r}=(\mu-\lambda)^r(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})^{n-1}.$$

Tällöin sarjasta r:n suhteen tulee

$$\begin{aligned}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{t^{n-1+r}}{(n-1+r)!}(\mu-\lambda)^r(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})^{n-1}&=\frac{1}{(\mu-\lambda)^{n-1}}\sum_{k=n-1}^{\infty}\frac{t^k}{k!}(\mu-\lambda)^k(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})^{n-1}\\&=\frac{1}{(\mu-\lambda)^{n-1}}\left(e^{t(\mu-\lambda)}-\sum_{k=0}^{n-2}\frac{t^k}{k!}(\mu-\lambda)^k\right)(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})^{n-1}.\end{aligned}$$

Tämä todistaa lauseen. □

Edelliset kolme lausetta käsittelevät kaikki matriisit, joiden aste on ≤ 3. Esitämme lopuksi vielä esimerkin viimeisen lauseen käytöstä.

Esimerkki 4.7. Olkoon

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}3&-1&1\\2&0&1\\1&-1&2\end{bmatrix}.$$

Tällä matriisilla on ominaisarvot $2,2,1$, joten merkitään $\lambda=2$ ja $\mu=1$ ja käytetään matriisieksponenttifunktion ratkaisemiseen edellistä lausetta. Nyt siis

$$\begin{aligned}e^{t\mathbf{A}}&=e^{2t}\sum_{k=0}^{1}\frac{t^k}{k!}(\mathbf{A}-2\mathbf{I})^k+\left\{\frac{e^t}{(-1)^2}-\frac{e^{2t}}{(-1)^2}\sum_{k=0}^{1}\frac{t^k}{k!}(1-2)^k\right\}(\mathbf{A}-2\mathbf{I})^2\\&=e^{2t}(\mathbf{I}+t(\mathbf{A}-2\mathbf{I}))+\{e^t-e^{2t}(1-t)\}(\mathbf{A}-2\mathbf{I})^2\\&=e^{2t}\mathbf{I}+te^{2t}\mathbf{A}-2te^{2t}\mathbf{I}+(e^t-e^{2t}+te^{2t})(\mathbf{A}^2-4\mathbf{A}+4\mathbf{I})\\&=(4e^t+2te^{2t}-3e^{2t})\mathbf{I}+(-4e^t-3te^{2t}+4e^{2t})\mathbf{A}+(e^t-e^{2t}+te^{2t})\mathbf{A}^2.\end{aligned}$$

Sijoittamalla tähän identiteettimatriisin ja matriisin $\mathbf{A}$ saamme matriisieksponenttifunktiolle ratkaisun

$$e^{\mathbf{A}t}=\begin{bmatrix}-7e^{2t}+te^{2t}&-te^{2t}&te^{2t}\\-e^t+e^{2t}+te^{2t}&e^t-te^{2t}&te^{2t}\\-e^t+e^{2t}&e^t-e^{2t}&e^{2t}\end{bmatrix}.$$

5 Epälineaariset differentiaaliyhtälöryhmät

Monissa sovelluksissa, etenkin fysikaalisissa malleissa, ei rajoituta pelkästään lineaarisiin differentiaaliyhtälöryhmiin. Ongelmien ratkaiseminen vaatii usein käytettäväksi epälineaarisia menetelmiä. Kuitenkin epälineaarisilla differentiaaliyhtälöryhmillä on monia yhtymäkohtia lineaaristen ryhmien ominaisuuksien kanssa. Keskitymme tässä luvussa melkein lineaarisiin ja epälineaarisiin differentiaaliyhtälöryhmiin. Oleellisia käsitteitä ovat kriittiset pisteet ja stabiilisuus. Näitä käsitteitä tarkastelemme määritelmien ja lauseiden, sekä esimerkkien keinoin. Yksinkertaisuuden vuoksi käsittelemme vain tapauksia, joissa differentiaaliyhtälöryhmät koostuvat kahdesta yhtälöstä. Tämä on perusteltua, sillä moni sovelluksista on tämän kaltaisia ja yleistäminen tästä erikoistapauksesta on varsin suoraviivaista.

5.1 Kriittiset pisteet ja stabiilisuus

Tässä alaluvussa määrittelemme kriittisten pisteiden ja stabiilisuuden käsitteet sekä käsittelemme niitä esimerkkien avulla. Tarkastelemme differentiaaliyhtälöryhmää, joka on muotoa

$$\begin{aligned} x'(t) &= f(x,y,t) \\ y'(t) &= g(x,y,t). \end{aligned} \tag{5.1}$$

Määrittelemme ensiksi tarkasteluiden kannalta oleellisia käsitteitä.

Määritelmä 5.1. Differentiaaliyhtälöryhmää (5.1) sanotaan *autonomiseksi*, mikäli funktiot f ja g eivät riipu riippumattomasta muuttujasta t, eli ovat muotoa

$$\begin{aligned} x'(t) &= f(x,y) \\ y'(t) &= g(x,y). \end{aligned} \tag{5.2}$$

[4, s. 510]

Suurin osa tämän luvun käsittelyistä rajoittuu autonomisiin differentiaaliyhtälöryhmiin.

Määritelmä 5.2. Oletetaan, että differentiaaliyhtälöryhmässä (5.1) funktiot f ja g ovat differentioituvia jollain alueella $R \subseteq \mathbb{R}^2$. Aluetta R kutsutaan differentiaaliyhtälöryhmän (5.1) *faasitasoksi* tai *vaihetasoksi*. [4, s. 510]

Olemassaolo- ja yksikäsitteisyyslauseesta seuraa, että annetulla muuttujan t arvolla t_0 ja millä tahansa pisteellä $(x_0, y_0) \in R$ differentiaaliyhtälöryhmällä (5.1) on olemassa yksikäsitteinen ratkaisu $x = x(t), y = y(t)$, joka toteuttaa alkuehdot

$$x(t_0) = x_0, \quad y(t_0) = y_0.$$

Ratkaisut $x(t), y(t)$ kuvaavat tällöin parametrisoitua ratkaisukäyrää faasitasossa eli ratkaisut ovat pareja $(x(t), y(t))$, missä $x(t)$ ja $y(t)$ ovat muuttuja t funktioita. Näitä ratkaisukäyriä kutsutaan differentiaaliyhtälöryhmän (5.1) *poluiksi*. Yksikäsitteisyyslauseesta seuraa, että jokaisen pisteen $(x, y) \in R$ kautta kulkee täsmälleen yksi polku, sillä mikäli olisi kaksi toisensa leikkaavaa ratkaisukäyrää, niin leikkauspiste voitaisiin ottaa alkuarvoiksi, minkä jälkeen muuttujan t arvon kasvaessa yhtälöryhmä kehittyisi kahteen suuntaan, mikä on ristiriita yksikäsitteisyyden kanssa. [4, s. 510]

Määrittelemme seuraavaksi kriittisen pisteen ja eristäytyneen kriittisen pisteen käsitteet.

Määritelmä 5.3. Pisteen (x_*, y_*) sanotaan olevan autonomisen differentiaaliyhtälöryhmän (5.2) *kriittinen piste*, mikäli pätee

$$f(x_*, y_*) = g(x_*, y_*) = 0.$$

Olkoon (x_*, y_*) autonomisen differentiaaliyhtälöryhmän kriittinen piste. Mikäli on olemassa luku $r > 0$ siten, että kaikille saman yhtälöryhmän kriittiselle pisteille (x_0, y_0) pätee

$$|(x_*, y_*) - (x_0, y_0)| > r,$$

niin sanomme, että (x_*, y_*) on *eristäytynyt* kriittinen piste.
Jos (x_*, y_*) on differentiaaliyhtälöryhmän kriittinen piste, niin tällöin vakiofunktioratkaisuiden $x(t) \equiv x_*$, $y(t) \equiv y_*$ sanotaan olevan differentiaaliyhtälöryhmän *tasapainoratkaisut*. [4, s. 510-511], [3, s. 394]

Huomautus. Tasapainoratkaisun polku koostuu ainoastaan kriittisestä pisteestä (x_*, y_*).

Mikäli piste (x, y) ei ole kriittinen, niin tällöin sen kautta kulkeva polku on käyrä xy-tasolla, mitä pitkin piste $(x(t), y(t))$ liikkuu muuttujan t arvon muuttuessa. Tällainen käyrä on epädegeneroitunut ja se ei leikkaa itseään. Piirtämällä nämä polut ja kriittiset pisteet faasitasolla saamme yhtälöryhmän *faasikuvan*. Voimme myös piirtää differentiaaliyhtälöryhmän *suuntakentän* piirtämällä jokaisessa pisteessä vektorin, joka osoittaa samaan suuntaan kuin vektori $(f(x, y), g(x, y))$. Tämä suuntakenttä osoittaa mihin suuntaan polkua pitkin tulee kulkea kussakin pisteessä. Tulevissa esimerkeissä esitämme differentiaaliyhtälöryhmien faasikuvan polkuineen ja suuntakenttineen. On mielenkiintoista tarkastella polkujen käyttäytymistä kriittisen pisteen läheisyydessä. Määrittelemme seuraavaksi kriittisen pisteen eri muotoja. [4, s. 512]

Määritelmä 5.4. Kriittisen pisteen (x_*, y_*) sanotaan olevan *solmu*, mikäli seuraavat ehdot toteutuvat.
1) Joko kaikki polut lähestyvät kriittistä pistettä (x_*, y_*) kun $t \to \infty$ tai jokainen polku loittonee kriittisestä pisteestä, kun $t \to \infty$, ja
2) mikäli jokaisella polulla on tangenttina jokin kriittisen pisteen (x_*, y_*) kautta kulkeva suora.
Kriittinen piste on *satulapiste*, mikäli kaksi polkua lähestyy kriittistä pistettä ja loput erkanevat siitä, kun $t \to \infty$. [4, s. 513-514],

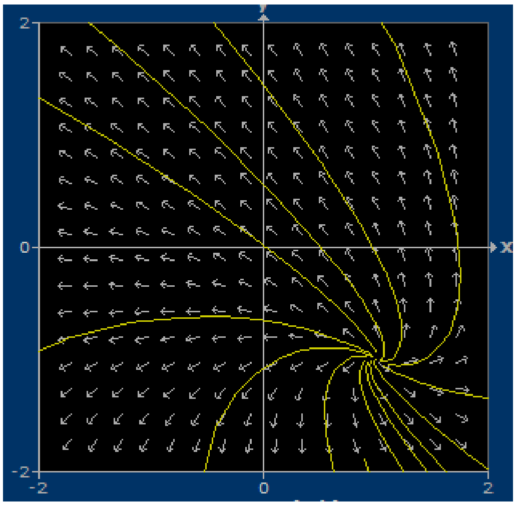
Huomautus. Myös solmut voidaan jakaa useisiin eri muotoihin. Mikäli sama kriittisen pisteen (x_*, y_*) läpi kulkeva suora ei ole tangentti kahdelle erilliselle "vastakkaiselle"polulle, niin sanotaan kriittisen pisteen (x_*, y_*) olevan *oleellinen solmu* (proper node). Mikäli näin ei ole, niin solmun sanotaan olevan *epäoleellinen solmu* (improper node). Solmu voi olla myös *nielu*, mikäli kaikki polut lähestyvät kriittistä pistettä tai *lähde*, mikäli kaikki erkanevat siitä. [4, s. 514]

Havainnollistamme kriittisten pisteiden muotoja vielä esimerkin avulla.

Esimerkki 5.1. Tarkastelemme epälineaarista autonomista differentiaaliyhtälöryhmää

$$\begin{aligned} x'(t) &= 2x - 2y - 4 \\ y'(t) &= x + 4y + 3. \end{aligned} \tag{5.3}$$

Tällä on kriittisenä pisteenä $(1, -1)$. Yhtälöryhmän ratkaiseminen olisi hankalaa, joten teemme havainnot kriittisisitä pisteistä faasikuvan avulla. Alla olevasta kuvasta huomaamme, että polut lähtevät kriittisen pisteen läheisyydestä ja erkanevat siitä spiraalimaisesti. Määritelmän mukaisesti siis kyseessä on solmu ja tarkemmin sanottuna spiraalinen lähde, sillä kaikki polut erkanevat kriittisestä pisteestä spiraalina. Suuntakenttä osoittaa, että polut nimenomaan erkanevat kriittisestä pisteestä $(1, -1)$.



Kuvio 5.1. Faasikuva differentiaaliyhtälöryhmälle (5.3)

Määrittelemme seuraavaksi kriittisen pisteen stabiilisuuden. Nimenomaisesti polkujen käyttäytymisen kriittisen pisteen läheisyydessä ohella stabiilisuus on tärkeä ominaisuus sovellusten tarkastelussa.

Määritelmä 5.5. Olkoon (x_0, y_0) mikä tahansa piste faasitasolla. Kriittisen pisteen (x_*, y_*) sanotaan olevan *stabiili*, mikäli jokaiselle $\epsilon > 0$ on olemassa $\delta > 0$ siten, että

$$|(x_0, y_0) - (x_*, y_*)| < \delta \Rightarrow |(x(t), y(t)) - (x_*, y_*)| < \epsilon$$

kaikilla $t > 0$. Toisin sanoen, mikäli alkupiste on riittävän lähellä kriittistä pistettä, niin polku $(x(t), y(t))$ pysyy myös lähellä kriittistä pistettä muuttujan t arvon kasvaessa.
Kriittisen pisteen sanotaan olevan *epästabiili*, mikäli se ei ole stabiili. [4, s. 514]

Tasapainoratkaisun $x(t) \equiv x_*, y(t) \equiv y_*$ stabiilisuus riippuu sen luonteesta. Monissa sovelluksissa nimenomaan tasapainoratkaisun stabiilisuus on tärkeässä osassa, kuten seuraavassa luvussa esiteltävissä käytännön sovelluksissa tullaan huomaamaan.

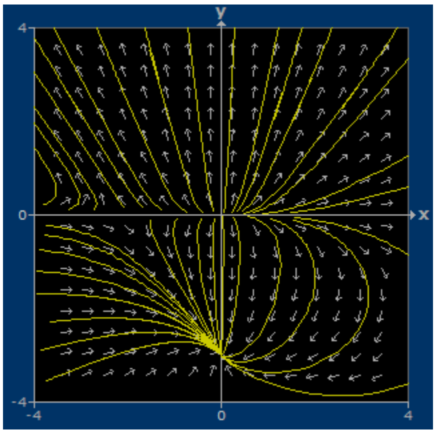
Esimerkki 5.2. Tarkastelemme epälineaarista differentiaaliyhtälöryhmää

$$\begin{aligned} x'(t) &= x^2 + 2x + 3xy \\ y'(t) &= 3y^2 + 9y + yx. \end{aligned} \tag{5.4}$$

Tämän kriittiset pisteet saamme ratkaisemalla yhtälöt

$$\begin{aligned} x^2 + 2x + 3xy &= x(x + 2 + y) = 0 \\ 3y^2 + 9y + yx &= y(3y + 9 + x) = 0. \end{aligned}$$

Yhtälöparin ratkaisukeinoin saamme kriittisiksi pisteiksi $(0,0), (0,-3), (-2,0)$, $(1\frac{1}{2}, -3\frac{1}{2})$. Kuvio 5.2 näyttää faasikuvan esimerkkimme differentiaaliyhtälöryhmästä. Siitä huomaamme, että polut, jotka lähtevät läheltä kriittistä pistettä $(0,-3)$, lähestyvät myös sitä kun t kasvaa. Kyseessä kuvan perusteella on siis solmu ja tarkemmin sanottuna nielu. Kuvion valkoiset nuolet esittävät suuntakentän nuolia ja kuten jo todettua polut kulkevat niiden mukaisesti. Huomamme myös, että kriittisen pisteen $(0,0)$ läheisyydestä lähtevät polut erkanevat siitä, tällöin on myös kyseessä solmu ja tarkemmin lähde. Piste $(0,-3)$ on stabiili kriittinen piste ja piste $(0,0)$ on epästabiili.



Kuvio 5.2. Faasikuva differentiaaliyhtälöryhmälle (5.4)

On mahdollista olla olemassa myös stabiileja kriittisiä pisteitä, joiden lähellä polut pysyvät kuitenkaan koskaan tavoittamatta sitä. Esimerkkinä tällaisesta on keskus, jossa polut kiertävät kriittistä pistettä. Tällöin polut ovat esimerkiksi ellipsejä tai ympyröitä. Stabiileille kriittisille pisteille, joiden lähistöllä jokainen polku lähestyy kriittistä pistettä, on olemassa oma käsitteensä, jonka määrittelemme seuraavaksi.

Määritelmä 5.6. Kriittistä pistettä (x_*, y_*) kutsutaan *asymptoottisesti stabiiliksi*, mikäli se on stabiili ja jokainen sitä riittävän läheltä alkava polku lisäksi lähestyy sitä, kun $t \to \infty$, toisin sanoen on olemassa $\delta > 0$ siten, että

$$|(x_0, y_0) - (x_*, y_*)| < \delta \Rightarrow \lim_{t\to\infty}(x(t), y(t)) = (x_*, y_*),$$

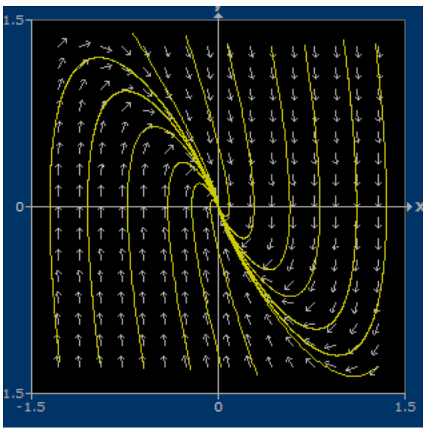
missä $(x(t), y(t))$ on ratkaisu, jolle $(x(0), y(0)) = (x_0, y_0)$. [4, s. 516]

Esimerkin 5.1 kriittinen piste $(0, -3)$ on faasikuvan perusteella asymptoottisesti stabiili. Tarkastelemme vielä seuraavassa esimerkeissä lineaarisen differentiaaliyhtälöryhmän stabiilisuutta faasikuvien avulla.

Esimerkki 5.3. Tarkastelemme autonomista differentiaaliyhtälöryhmää

$$\begin{aligned} x'(t) &= y \\ y'(t) &= -5x - 4y. \end{aligned} \tag{5.5}$$

Tästä saamme helposti yhtälöryhmien laskuilla kriittiseksi pisteeksi $(0,0)$. Kuvio 5.3 esittää kyseisen ryhmän faasikuvaa kriittisen pisteen $(0,0)$ läheisyydessä. Kuvaajasta käy selvästi ilmi, että polut, jotka lähtevät kriittisen pisteen $(0,0)$ lähei-

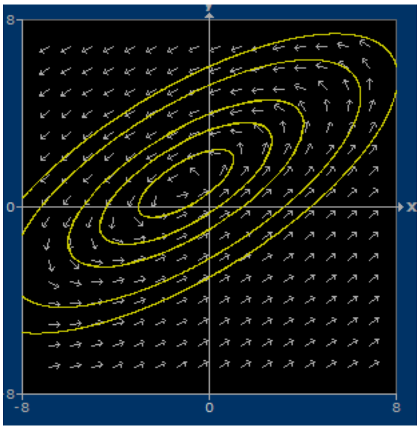


Kuvio 5.3. Faasikuva differentiaaliyhtälöryhmälle (5.5)

syydestä, lähestyvät samaista kriittistä pistettä. Kyseessä on siis stabiili nielu, ja koska kaikki polut lähestyvät kriittistä pistettä, niin kyseessä on asymptoottisesti stabiili kriittinen piste.

Esimerkki 5.4. Tarkasrelemme differentiaaliyhtälöryhmää

$$\begin{aligned} x'(t) &= x - 2y + 3 \\ y'(t) &= x - y + 2. \end{aligned} \tag{5.6}$$



Kuvio 5.4. Faasikuva differentiaaliyhtälöryhmälle (5.6)

Kriittinen piste tälle yhtälöryhmälle on $(-1,1)$. Kuten kuviosta 5.4 huomaamme, niin polut kiertävät kriittistä pistettä ellipsin muotoisella radalla. Läheltä kriittistä pistettä lähtevät polut siis pysyvät lähellä samaista pistettä, mutta eivät koskaan saavuta sitä. Kyseessä on siis stabiili, muttei asymptoottisesti stabiili, keskus.

On hyvä huomata, että on polkujen on mahdollista lähestyä kriittistä pistettä niin hitaasti ja spiraalisesti, että polut näyttävät ellipseiltä vaikkeivat sitä tosiasiassa ole. Tällöin kriittinen piste voi näyttää keskukselta vaikka se todellisuudessa olisi nielu. Tällöin on hyvä tarkastella polkujen käytöstä kriittisten pisteiden läheisyydessä, mihin seuraava alaluku antaa keinot.

5.2 Linearisointi

Tarkastelemme autonomista kahden differentiaaliyhtälön yhtälöryhmää

$$\begin{aligned} x'(t) &= f(x,y) \\ y'(t) &= g(x,y), \end{aligned}$$

jolla on eristäytynyt kriittinen piste (x_0, y_0). Oletamme myös tässä alaluvussa, että funktiot $f(x,y), g(x,y)$ ovat jatkuvasti derivoituvia tämän pisteen läheisyydessä. Nyt voimme olettaa, että $x_0 = y_0 = 0$, sillä jos näin ei olisi, niin voisimme tehdä sijoitukset $u = x - x_0, v = y - y_0$. Tällöin pätisi

$$\frac{dx}{dt} = \frac{du}{dt} \qquad \text{ja} \qquad \frac{dy}{dt} = \frac{dv}{dt}$$

ja saisimme alkuperäisen differentiaaliyhtälöryhmän kanssa ekvivalentin ryhmän

$$\begin{aligned} u'(t) &= f(u + x_0, v + y_0) = f_1(u,v) \\ v'(t) &= g(u + x_0, v + y_0) = g_1(u,v), \end{aligned} \tag{5.7}$$

jolla olisi $(0,0)$ eristäytyneenä kriittisenä pisteenä. [4, s. 522]

Esimerkki 5.5. Tarkastelemme epälineaarista differentiaaliyhtälöryhmää

$$\begin{aligned} x'(t) &= -8x^2 + 6x + 2xy = x(-8x + 6 + 2y) \\ y'(t) &= y^2 + y - 2yx = y(y + 1 - 2x). \end{aligned} \tag{5.8}$$

Tällä on kriittinen piste (1,1). Teemme seuraavaksi sijoituksen $u = x - 1, y = y - 1$ eli $x = u + 1, y = v + 1$. Nyt siis

$$x(-8x + 6 + 2y) = (u + 1)(-8(u + 1) + 6 + 2(v + 1)) = -8u + 2v - 8u^2 + 2v$$

ja

$$y(y + 1 - 2x) = (v + 1)((v + 1) + 1 - 2(u + 1) = v - 2u + v^2 - 2uv.$$

Tällöin differentiaaliyhtälöryhmä (5.8) saadaan muotoon

$$\begin{aligned} u'(t) &= -8u + 2v - 8u^2 + 2v \\ v'(t) &= v - 2u + v^2 - 2uv. \end{aligned} \tag{5.9}$$

Nyt tällä differentiaaliyhtälöryhmällä on eristäytynyt kriittinen piste $(0, 0)$ ja differentiaaliyhtälöryhmien (5.8) ja (5.9) faasikuvat näyttävät täsmälleen samalta. Yhtälöryhmän (5.8) ratkaisukäyrät ovat kuvia siirrossa $(u, v) \to (u + x_0, v + y_0)$, missä pisteet (u, v) ovat yhtälöryhmän (5.9) ratkaisukäyrän pisteitä.

Taylorin yhtälöstä kahden muuttujan yhtälöille seuraa, että mikäli funktio $f(x, y)$ on jatkuvasti derivoituva lähellä kiinnitettyä pistettä (x_0, y_0), niin

$$f(x_0 + u, y_0 + v) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)u + f_y(x_0, y_0)v + r(u, v).$$

Tässä jäännöstermi $r(u, v)$ noudattaa sääntöä

$$\lim_{(u,v)\to(0,0)} \frac{r(u, v)}{\sqrt{u^2 + v^2}} = 0.$$

Huomautus. Jäännöstermiä koskeva sääntö ei päde, mikäli $r(u, v)$ on summa joko vakioista tai muuttujien u tai v lineaarisista termeistä. Termiä $r(u, v)$ voidaan ajatella funktion $f(x_0 + u, y_0 + v)$ epälineaarisena osana. [4, s. 523]

Mikäli käytämme Taylorin yhtälöä molempiin yhtälöihin differentiaaliyhtälöryhmässä (5.7) ja oletamme, että (x_0, y_0) on sen kriittinen piste, niin saamme differentiaaliyhtälöryhmän

$$\begin{aligned} u'(t) &= f_x(x_0, y_0)u + f_y(x_0, y_0)v + r(u, v) \\ v'(t) &= g_x(x_0, y_0)u + g_y(x_0, y_0)v + s(u, v), \end{aligned}$$

missä termit $r(u, v)$ ja $s(u, v)$ noudattavat edellä esitettyä sääntöä. Tällöin kun u ja v ovat pieniä, niin termit $r(u, v)$ ja $s(u, v)$ ovat erittäin pieniä. Näillä alkuvalmisteluilla voimme määritellä linearisoidun differentiaaliyhtälöryhmän. [4, s. 523-524]

Määritelmä 5.7. Kun piste (u,v) on lähellä kriittistä pistettä $(0,0)$, niin epälineaarista yhtälöryhmää (5.7) voidaan arvioida lineaarisella differentiaaliyhtälöryhmällä

$$
\begin{aligned}
u'(t) &= f_x(x_0,y_0)u + f_y(x_0,y_0)v \\
v'(t) &= g_x(x_0,y_0)u + g_y(x_0,y_0)v,
\end{aligned}
\tag{5.10}
$$

missä vakiokertoimet ovat funktioiden f,g osittaisderivaatat kriittisessä pisteessä (x_0,y_0). Tätä yhtälöryhmää sanotaan *linearisoiduksi differentiaaliyhtälöryhmäksi*. Mikäli $(0,0)$ on myös linearisoidun differentiaaliyhtälöryhmän (5.10) eristäynyt kriittinen piste ja jäännöstermit $r(u,v), s(u,v)$ noudattavat niille asetettua sääntöä, niin alkuperäisen differentiaaliyhtälöryhmän (5.7) sanotaan olevan *melkein lineaarinen* eristäytyneessä kriittisessä pisteesssä (x_0,y_0) ja lineaarinen ryhmä (5.10) on sen *linearisointi* pisteessä (x_0,y_0). [4, s. 524]

Huomautus. Edellisessä määritelmässä linearisointi on lineaarinen differentiaaliyhtälöryhmä

$$\mathbf{u}'(t) = \mathbf{J}\mathbf{u},$$

missä $\mathbf{u} = [u,t]^T$ ja kerroinmatriisi on funktioiden f ja g ns. *Jacobin matriisi*

$$\mathbf{J}(x_0,y_0) = \begin{bmatrix} f_x(x_0,y_0) & f_y(x_0,y_0) \\ g_x(x_0,y_0) & g_y(x_0,y_0) \end{bmatrix}$$

laskettuna kriittisessä pisteessä (x_0,y_0).

Myö Jacobin matriisin avulla on mahdollista tutkia epälineaarisen differentiaaliyhtälöryhmän tasapainopisteiden muotoa. Nimittäin, mikäli Jacobin matriisin ominaisarvot ovat negatiivisia reaalilukuja tai kompleksisia negatiivisella reaaliosalla, niin kriittinen piste $(u,v) = (0,0)$ on lineaarisen ryhmän nielu. Tällöin kaikki ratkaisut lähestyvät kyseistä pistettä eli kaikki epälineaarisen differentiaaliyhtälöryhmän kriittisen pisteen (x_0,y_0) läheltä lähtevät polut lähestyvät kriittistä pistettä kun muuttujan t arvo kasvaa. Mikäli molemmat ominaisarvot ovat kompleksisia niin kyseessä on spiraali nielu.

Jos taas molemmat ominaisarvot ovat positiivisia tai kompleksisia positiivisilla reaaliosilla, niin kaikki ratkaisut liikkuvat pois päin kriittisestä pisteestä. Tällöin sanotaan olevan kyseessä lähde tai spiraalinen lähde, mikäli molemmat ominaisarvot ovat kompleksisia.

Kriittinen piste on satulapiste, mikäli toinen ominaisarvoista on positiivinen ja toinen negatiivinen. Esitämme perusteluja osittain näille päättelyille seuraavassa alaluvussa [2, s.448-449]

Huomautus. Yllämainittu tasapainopisteiden luokittelu ei kerro mitään epälineaarisen differentiaaliyhtälöryhmän ratkaisuiden käyttäytymisestä, kun alkupiste on kaukana tasapainopisteestä. [2, s.449]

Esimerkki 5.6. Tarkastelemme esimerkin 5.5 differentiaaliyhtälöryhmää

$$
\begin{aligned}
x'(t) &= -8x^2 + 6x + 2xy = x(-8x + 6 + 2y) \\
y'(t) &= y^2 + y - 2yx = y(y + 1 - 2x),
\end{aligned}
$$

jolla on siis kriitinen piste $(1,1)$. Tämän Jacobin matriisi on

$$\mathbf{J}(x,y) = \begin{bmatrix} -16x+6+2y & 2y \\ 2y+1-2x & -2x \end{bmatrix}$$

ja se laskettuna pisteessä $(1,1)$ on

$$\mathbf{J}(1,1) = \begin{bmatrix} -8 & 2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Nyt siis saamme alkuperäiselle differentiaaliyhtälöryhmälle linearisoinnin

$$\begin{aligned} u'(t) &= -8u + 2v \\ v'(t) &= u - 2v. \end{aligned}$$

Jacobin matriisin ominaisarvot ovat

$$\lambda_1 = -5 - \sqrt{11}, \quad \lambda_2 = 5 - \sqrt{11}.$$

Kummatkin ominaisarvot ovat siis negatiivisia reaalilukuja, joten kyseessä on nielu.

Käsittelemme vielä tämän alaluvun loppuun tilanteen, jolloin linearisointi ei onnistu. Joissain tilanteissa linearisoinnin tarjoama informaatio ei riitä kuvaamaan täydellisesti alkuperäisen differentiaaliyhtälöryhmän ratkaisuiden käyttäytymistä lähellä tasapainopistettä. Tutkimme esimerkiksi differentiaaliyhtälöryhmää

$$\begin{aligned} x'(t) &= y - (x^2+y^2)x \\ y'(t) &= -x - (x^2+y^2)y. \end{aligned} \tag{5.11}$$

Tällä on kriittisenä pisteenä $(0,0)$. Laskemalla Jacobianin matriisin pisteessä $(0,0)$ saamme linearisoinnin

$$\begin{aligned} u'(t) &= v \\ v'(t) &= -u. \end{aligned} \tag{5.12}$$

Huomaamme, että tämän linearisoinnin kerroinmatriisin ominaisarvot ovat $\pm i$ ja täten kriittinen piste $(0,0)$ on *keskus* eli kaikki polut kiertävät kriittistä pistettä ja ovat siten esimerkiksi ympyröitä tai ellipsejä. Ominaisarvoon i liittyvä ominaisvektori on

$$\mathbf{w}_1 = \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Nyt ominaisarvomenetelmällä saamme linearisoidun differentiaaliyhtälöryhmän kompleksiseksi ratkaisuksi

$$\mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix} e^{it} = \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix} (\cos t + i\ \sin t) = \begin{bmatrix} -i\cos t + \sin t \\ \cos t + i \sin t \end{bmatrix}$$

ja täten kahdeksi reaaliseksi ratkaisuksi

$$\mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} \sin t \\ \cos t \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{v}(t) = \begin{bmatrix} -\cos t \\ \sin t \end{bmatrix}.$$

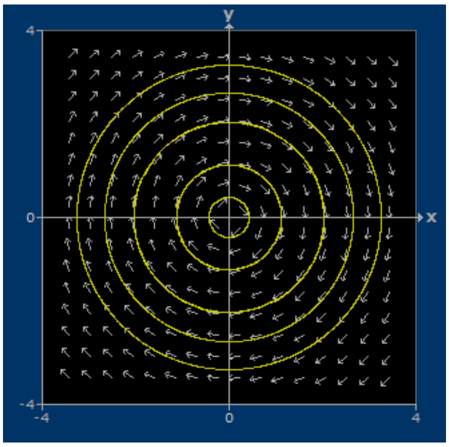
Yleinen ratkaisu differentiaaliyhtälöryhmälle (5.12) on siis

$$c_1\mathbf{u}(t) + c_2\mathbf{v}(t) = \begin{bmatrix} c_1 \sin t - c_2 \cos t \\ c_1 \cos t + c_2 \sin t \end{bmatrix}$$

ja komponenteittain

$$u(t) = c_1 \sin t - c_2 \cos t$$
$$v(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t.$$

Täten kaikki ratkaisut ovat periodisia ja ratkaisukäyrät $(u(t), v(t))$ ovat ympyröitä origon ympärillä, minkä osoittaa myös kuvio 5.5. Kuitenkaan alkuperäisellä diffe-

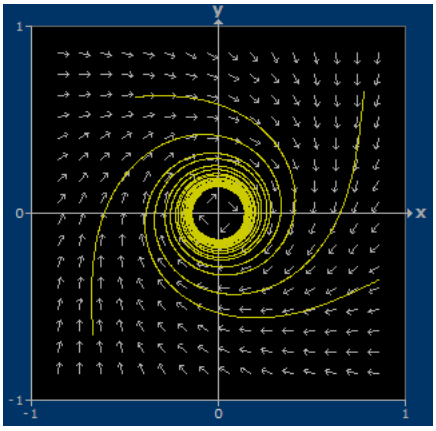


Kuvio 5.5. Faasikuva differentiaaliyhtälöryhmälle (5.12)

rentiaaliyhtälöryhmällä ei ole periodisia ratkaisuita. Tarkastelemme lineaarista vektorikenttää $\mathbf{V}_1(x,y) = (y,-x)$ ja epälineaarista vektorikenttää $\mathbf{V}_2(x,y) = (-(x^2 + y^2)x, -(x^2+y^2)y)$. Vektorikenttä $\mathbf{V}_1$ vastaa lineaarista differentiaaliyhtälöryhmää ja se on aina tangentti origokeskisille ympyröille. Toisaalta $\mathbf{V}_2$ osoittaa aina suoraan kohti pistettä $(0,0)$, sillä se on vektorikentän $\mathbf{V}_1$ skalaarimoninkerta skalaarina positiivinen luku $x^2 + y^2$. Kun nämä vektorikentät yhdistetään, niin tuloksena on vektorikenttä, jonka mukaisesti epälineaarisen differentiaaliyhtälöryhmän ratkaisukäyrät lähestyvät spiraalina pistettä kriittistä pistettä$(0,0)$. Polut ja suuntakenttä, jotka ovat esitettynä kuviossa 5.6 vahvistavat tämän havainnon.

Huomaamme, että kun muutamme alkuperäisen differentiaaliyhtälöryhmän epälineaaristen termien merkin positiiviseksi, niin saamme differentiaaliyhtälöryhmän

$$x'(t) = y + (x^2 + y^2)x$$
$$y'(t) = -x + (x^2 + y^2)y,$$



Kuvio 5.6. Faasikuva differentiaaliyhtälöryhmälle (5.11)

jolla on myös linearisointina ryhmä (5.12) lähellä pistettä $(0, 0)$. Kuitenkin kyseisen differentiaaliyhtälöryhmän ratkaisukäyrät loittonevat spiraalisesti origosta. Epälineaarisen yhtälöryhmän ratkaisut lähellä origoa ja lineaarisen ryhmän ratkaisut ovat lähestulkoon samat ainakin lyhyellä aikavälillä. Huomaamme kuitenkin, että koska linearisoitu differentiaaliyhtälöryhmä on keskus, niin pienetkin muutokset voivat muuttaa ratkaisuiden pitkän aikavälin käyttäytymistä. Pienikin muutos, joka aiheutuu epälineaarisen termin lisäämisestä voi muuttaa keskuksen spiraaliseksi nieluksi tai spiraaliseksi lähteeksi. On kuitenkin vain kaksi tilannetta, jolloin epälineaarisen differentiaaliyhtälöryhmän ratkaisuiden pitkän aikavälin käyttäytyminen voi erota sen linearisoinnin ratkaisuista. Toinen on edellä esitelty tilanne, jolloin linearisoidun differentiaaliyhtälöryhmän kriittinen piste on keskus. Toinen on tilanne, jossa linearisoidulla ryhmällä on ominaisarvona nolla. Muissa tapauksissa linearisointi tarjoaa riittävän tiedon ratkaisuiden käyttäytymisestä lähellä kriittistä pistettä pitkälläkin aikavälillä. [2, s. 450-451]

5.3 Lineaaristen ja melkein lineaaristen differentiaaliyhtälöryhmien stabiilius

Koska melkein lineaarisen differentiaaliyhtälöryhmän faasikuva lähellä eristäytynyttä kriittistä pistettä muistuttaa läheisesti sen linearisoinnin faasikuvaa linearisoinnin origon läheisyydessä, niin yleisen autonomisen differentiaaliyhtälöryhmän tarkastelussa hyödylliseksi tulee ensin tarkastella lineaarisen ryhmän kriittisiä pisteitä. Näihin tarkasteluihin voimme käyttää lineaaristen differentiaaliyhtälöryhmien yhteydessä käsiteltyä ominaisarvomenetelmää. Tarkastelemme differentiaaliyhtälöryhmää

$$
\begin{aligned}
x'(t) &= ax + by \\
y'(t) &= cx + dy.
\end{aligned}
$$

Tässä siis kerroinmatriisi **A** on vakiomatriisi ja sen ominaisarvot saadaan siis yhtälöstä

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = (a - \lambda)(d - \lambda) - bc = 0.$$

Oletamme, että piste $(0, 0)$ on eristäytynyt kriittinen piste, jolloin yhtälöryhmällä

$$\begin{aligned} ax + by &= 0 \\ cx + dy &= 0 \end{aligned}$$

on origon läheisyydessä yksikäsitteinen ratkaisu $x = 0, y = 0$. Näin ollen kerroinmatriisi on kääntyvä ja determinantti $ad - bc \neq 0$. Tästä seuraa, että $\lambda = 0$ ei voi olla ominaisarvo kerroinmatriisille, eli ominaisarvojen tulee olla nollasta eroavia. Nyt eristäytyneen kriittisen pisteen luonne riippuu ominaisarvoista. Seuraava lause summaa tämän.

Lause 5.1. *Olkoot λ_1 ja λ_2 lineaarisen differentiaaliyhtälöryhmän*

$$\begin{aligned} x'(t) &= ax + by \\ y'(t) &= cx + dy \end{aligned} \tag{5.13}$$

kerroinmatriisin **A**, *jolle $ad - bc \neq 0$, ominaisarvot. Tällöin kriittinen piste $(0, 0)$ on*
a) asymptoottisesti stabiili, jos ominaisarvojen reaaliosat ovat molemmissa negatiiviset,
b) stabiili, muttei asymptoottisesti stabiili, jos ominaisarvojen reaaliosat ovat molemmat nollia eli $\lambda_1, \lambda_2 = \pm qi$,
c) epästabiili, jos toisen ominaisarvon reaaliosa on positiivinen.

Todistus. (Vrt. [4, s. 525-528]) Oletetamme siis, että piste $(0, 0)$ on eristäytynyt kriittinen piste.
a) Oletetamme ensin, että ominaisarvot ovat erisuuria, reaalisia ja negatiivisia. Tällöin kerroinmatriisilla **A** on kaksi lineaarisesti riippumatonta ominaisvektoria $\mathbf{v}_1$ ja $\mathbf{v}_2$. Nyt tiedämme ominaisarvomenetelmän nojalla, että yhtälöryhmällä on yleinen ratkaisu

$$\mathbf{x}(t) = c_1 \mathbf{v}_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 \mathbf{v}_2 e^{\lambda_2 t}.$$

Ratkaisu voidaan helpoiten kuvata uv -koordinaatistossa, missä u- ja v -akselit ovat ominaisvektorit $\mathbf{v}_1$ ja $\mathbf{v}_2$. Tällöin funktion $\mathbf{x}(t)$ uv -koordinaatit ovat etäisyyksiä origosta mitattuna ominaisvektorien suuntaisesti. Tällöin differentiaaliyhtälöryhmän polku määritellään

$$u(t) = u_0 e^{\lambda_1 t}, \quad v(t) = v_0 e^{\lambda_2 t},$$

missä $u_0 = u(0)$ ja $v_0 = v(0)$. Jos $u_0 = 0$, niin polku on kokonaisuudessaan v -akselilla ja päinvastoin. Mikäli molemmat $u_0, v_0 \neq 0$, niin parametrisoitu käyrä saa muodon $v = Cu^k$, missä $k = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} > 0$. Nämä ratkaisukäyrät ovat tangentteja kriittisessä pisteessä $(0, 0)$ u -akselille, mikäli $k > 1$, ja v -akselille, jos $0 < k < 1$. Nyt siis kriittinen piste on määritelmän nojalla solmu. Nyt koska molemmat ominaisarvot ovat negatiivisia, niin ratkaisukäyrät lähestyvät origoa kun muuttujan t arvot kasvavat, joten kriittinen piste $(0, 0)$ on asymptoottisesti stabiili.

Oletamme seuraavaksi, että ominaisarvot ovat kompleksisia ja toistensa konjugaatteja eli $\lambda_1 = p + qi, \lambda_2 = p - qi$ ja ominaisvektorit $\mathbf{v}_1 = \mathbf{a} + \mathbf{b}i, \mathbf{v}_2 = \mathbf{a} - \mathbf{b}i$. Ominaisarvomenetelmän yhteydessä käsitellyn teorian nojalla lineaarisella differentiaaliyhtälöryhmällä on kaksi lineaarisesti riippumatonta reaalista ratkaisua

$$\mathbf{x}_1(t) = e^{pt}(\mathbf{a} \ \cos qt - \mathbf{b} \ \sin qt) \text{ ja } \mathbf{x}_2(t) = e^{pt}(\mathbf{b} \ \cos qt + \mathbf{a} \ \sin qt).$$

Yleinen ratkaisu $\mathbf{x}(t) = c_1\mathbf{x}_1(t) + c_2\mathbf{x}_2(t)$ siis saa negatiivisia ja positiivisia arvoja, kun $t \to \infty$. Kun $p < 0$, niin selvästi $\mathbf{x}(t) \to 0$, kun $t \to \infty$. Siis myös tällöin kriittinen piste on asymptoottisesti stabiili. Muut tapaukset voidaan käydä läpi vastaavasti. Näin a)- kohta on todistettu.

b) Oletetamme, että ominaisarvot ovat puhtaasti kompleksisia ja toistensa konjugantteja eli $\lambda_1 = qi, \lambda_2 = -qi$ ja ominaisvektorit ovat $\mathbf{v}_1 = \mathbf{a} + \mathbf{b}i, \mathbf{v}_2 = \mathbf{a} - \mathbf{b}i$. Nyt siis ominaisarvomenetelmän perusteella lineaarisesti riippumattomat ratkaisut ovat

$$\mathbf{x}_1(t) = \mathbf{a} \ \cos qt - \mathbf{b} \ \sin qt \text{ ja } \mathbf{x}_2(t) = \mathbf{b} \ \cos qt + \mathbf{a} \ \sin qt.$$

Tällöin yleinen ratkaisu $\mathbf{x}(t) = c_1\mathbf{x}_1(t) + c_2\mathbf{x}_2(t)$ kuvaa origokeskeisen ellipsin xy -tasolla. Siis kriittinen piste $(0,0)$ on stabiili, muttei asymptoottisesti stabiili.

c) Mikäli reaaliosat ovat erimerkkiset, niin analyysi menee samantyylisesti kuin a)-kohdassa. Jos $u_0 = 0$, niin rata on v -akselilla ja kulkee kriittisen pisteen läpi. Jos molemmat $u_0, v_0 \neq 0$, niin radat ovat hyperbelejä ja kriittinen piste on tällöin satulapiste. Radat karkaavat muuttujan arvon t kasvaessa poispäin origosta, joten kriittinen piste on epästabiili. □

Edellinen lause osoitti lineaarisen differentiaaliyhtälöryhmän stabiilisuuden ehdot. Tutkimme seuraavaksi, miten pienet muutokset lineaarisen differentiaaliyhtälöryhmän kertoimissa a, b, c, d vaikuttaa stabiilisuuteen. Muutokset kertoimissa aiheuttaa pienen muutoksen kerroinmatriisin ominaisarvoissa λ_1, λ_2. Jos muutokset ovat hyvin pieniä, niin ominaisarvojen positiiviset reaaliosat pysyvät positiivisina ja negatiiviset reaaliosat negatiivisina. Täten edellisen lauseen 5.1 nojalla asymptoottisesti stabiilit kriittiset pisteet pysyvät asymptoottisesti stabiileina ja epästabiilit pisteet epästabiileina. Pienet muutokset voivat kuitenkin muuttaa tapausta, jossa molemmat ominaisarvot ovat puhtaasti imaginäärisiä. Tässä tapauksessa puhtaasti imaginääriset juuret voivat muuttua läheisiksi kompleksijuuriksi $\mu_1, \mu_2 = r \pm si$, missä r on positiivinen tai negatiivinen. Esimerkiksi pieni muutos linearisoidun differentiaaliyhtälöryhmän (5.10) kertoimissa voi muuttaa stabiilin keskuksen spiraalipisteeksi, joka on joko asymptoottisesti stabiili tai epästabiili. [4, s. s.529]

Esimerkki 5.7. Tarkastelemme lineaarista differentiaaliyhtälöryhmää

$$\begin{aligned} x'(t) &= -y \\ y'(t) &= x. \end{aligned}$$

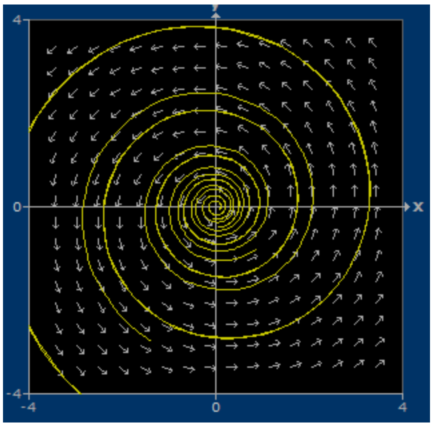
Tällä yhtälöryhmällä on kriittinen piste $(0,0)$. Ominaisarvot kerroinmatriisille ovat $\lambda_1 = i, \lambda_2 = -i$. Ominaisarvomenetelmän nojalla ratkaisut tälle differentiaaliyhtälöryhmälle ovat

$$\begin{aligned} x(t) &= -c_1 \sin t + c_2 \cos t \\ y(t) &= c_1 \cos t + c_2 \sin t. \end{aligned}$$

Polut $(x(t), y(t))$ ovat siis origokeskisiä ympyröitä. Kriittinen piste on siis stabiili keskus. Nyt jos teemme 0.1 suuruisen muutoksen kertoimiin saamme differentiaaliyhtälöryhmän

$$
\begin{aligned}
x'(t) &= 0.1x - y \\
y'(t) &= x + 0.1y.
\end{aligned} \tag{5.14}
$$

Tällä on edelleen kriittisenä pisteenä (0,0). Nyt ominaisarvot ovat $\mu_1 = 0.1 + 1.i, \mu_2 = 0.1 - 1.i$. Kuten kuvio 5.7 osoittaa, niin polut erkanevat kriittisestä pisteestä (0,0) spiraalisesti, joten kriittinen piste on epästabiili spiraalipiste. Näin on siis osoitettu, että pieni muutos kertoimissa voi muuttaa stabiilin keskuksen epästabiiliksi spiraalipisteeksi.



Kuvio 5.7. Faasikuva differentiaaliyhtälöryhmälle (5.14)

Toinen erikoistapaus, jossa pienet muutokset kertoimissa voi muuttaa kriittisen pisteen luonnetta, on tapaus, jossa ominaisarvot $\lambda_1 = \lambda_2$ ovat yhtäsuuret ja voivat muuttua kahdeksi erisuureksi ominaisarvoksi μ_1, μ_2 kertoimien muutoksen vuoksi. Nämä uudet ominaisarvot μ_1, μ_2 voivat olla joko kompleksiset konjugaatit tai erisuuret ja reaaliset. Kummassakaan tapauksessa ominaisarvojen reaaliosien merkit eivät muutu, joten stabiilisuus pysyy ennallaan. Kuitenkin kriittisen pisteen luonne voi muuttua eli solmu voi muuttua spiraalipisteeksi tai pysyä solmuna. [4, s. 529]

Siirretään käsittely seuraavaksi melkein lineaarisiin differentiaaliyhtälöryhmiin, jotka ovat siis muotoa

$$
\begin{aligned}
x'(t) &= ax + by + r(x, y) \\
y'(t) &= cx + dy + s(x, y),
\end{aligned} \tag{5.15}
$$

jolla on piste (0,0) eristäytyneenä kriittisenä pisteenä ja $ad - bc \neq 0$. Seuraava lause osoittaa, että kriittisen pisteen stabiiliudesta tai muodosta huolimatta hyvin pienien epälineaaristen termien $r(x, y), s(x, y)$ vaikutus on yhtälainen epälineaariseen yhtälöryhmään liittyvän lineaarisen ryhmän kertoimien pienen muutoksen kanssa.

Lause 5.2. *Olkoot* λ_1, λ_2 *epälineaariseen differentiaaliyhtälöryhmään (5.15) liittyvän lineaarisen differentiaaliyhtälöryhmän (5.13) kerroinmatriisin ominaisarvot. Tällöin*
a) jos $\lambda_1 = \lambda_2$ *ovat reaalisia, niin kriittinen piste* $(0,0)$ *on joko solmu tai spiraalipiste ja se on asymptoottisesti stabiili, jos molemmat ominaisarvot ovat negatiivisia, ja epästabiili, jos molemmat ovat positiivisia.*
b) Jos molemmat ominaisarvot ovat täysin imaginäärisiä, niin tällöin kriittinen piste on joko spiraalipiste tai keskus ja se voi olla asymptoottisesti stabiili, stabiili tai epästabiili.
c) Muulloin kriittisen pisteen luonne ja stabiilisuus on sama kuin siihen liittyvän lineaarisen differentiaaliyhtälöryhmän tapauksessa. [4, s. 529-530]

Todistus ja tulokset ovat varsin samankaltaisia kuin edellisessä lauseessa, joten jätämme todistuksen tällä perusteella pois.

Edellisellä lauseella on varsin käytännöllinen seuraus. Esitämme sen seuraavaksi ilman todistuksia.

Seuraus 5.3. *Melkein lineaarisen differentiaaliyhtälöryhmän kriittinen piste on asymptoottisesti stabiili, jos se on asymptoottisesti stabiili kriittinen piste sen linearisoinnille. [4, s. 530]*

Edellinen seuraus toimii myös epästabiliuteen eli melkein lineaarisen differentiaaliyhtälöryhmän kriitinen piste on epästabiili, jos se on epästabiili kriittinen piste sen linearisoinnille. Tarkastelemme asiaa seuraavaksi esimerkkien avulla.

Esimerkki 5.8. Tarkastelemme differentiaaliyhtälöryhmää

$$\begin{aligned} x'(t) &= x - 2y \\ y'(t) &= 3x - 4y - 2. \end{aligned}$$

Tällä on kriittinen piste $(2,1)$. Kun teemme sijoitukset $x = u + 2, y = v + 1$, niin saamme linearisoidun differentiaaliyhtälöryhmän

$$\begin{aligned} u'(t) &= u - 2v \\ v'(t) &= 3u - 4v, \end{aligned}$$

jonka kerroinmatriisin ominaisarvot ovat $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = -1$. Nyt siis lauseen 5.1 nojalla tämän kriittinen piste $(0,0)$ on asymptoottisesti stabiili. Ja lauseen 5.2 kohdan c) nojalla myös alkuperäisen differentiaaliyhtälöryhmän kriittinen piste $(2,1)$ on asymptoottisesti stabiili.

Esimerkki 5.9. Tarkastelemme seuraavaksi differentiaaliyhtälöryhmää

$$\begin{aligned} x'(t) &= x + 2y + x^2 + y^2 \\ y'(t) &= 2x - 2y - 3xy \end{aligned}$$

ja sen kriittistä pistettä $(0,0)$. Nyt poistamalla tästä suoraan epälineaariset termit saamme lineaarisen ryhmän

$$\begin{aligned} x'(t) &= x + 2y \\ y'(t) &= 2x - 2y, \end{aligned}$$

jonka kerroinmatriisin ominaisarvot ovat $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = 2$. Nyt siis lauseen 5.1 nojalla kriittinen piste $(0,0)$ lineaariselle differentiaaliyhtälöryhmälle on epästabiili ja lauseen 5.2 nojalla myös siis alkuperäisen epälineaarisen differentiaaliyhtälöryhmän kriittinen piste $(0,0)$ on epästabiili.

Olemme nyt tässä kappaleessa käsitelleet epälineaaristen differentiaaliyhtälöryhmien teoriaa. Luvun lopuksi käsittelemme vielä kvalitatiivistä analyysiä.

5.4 Kvalitatiivinen analyysi

Linearisointi tarjoaa mahdollisuuden käsitellä ratkaisuiden käyttäytymistä tasapainopisteen läheisyydessä, mikä on tärkeää erilaisten sovellusten kannalta. Kuitenkin mikäli näitä linearisoinnin tarjoamia tuloksia käytetään oletusten tekemiseen kaukana kriittisestä pisteestä voi seuraukset olla kohtalokkaita. Tässä alaluvussa käsittelemme kvalitatiivisia menetelmiä, joita käytämme yhdessä linearisoinnin ja numeeristen menetelmien kanssa. Tätä tavoitettamme varten määrittelemme ensin nollakäyrän käsitteen.

Määritelmä 5.8. Tarkastelemme differentiaaliyhtälöryhmää

$$\begin{aligned} x'(t) &= f(x,y) \\ y'(t) &= g(x,y). \end{aligned}$$

Sanomme, että *x-nollakäyrä* on kaikkien niiden pisteiden (x,y) joukko, joille $f(x,y) = 0$. Vastaavasti *y-nollakäyrä* on kaikkien niiden pisteiden (x,y) joukko, joille $g(x,y) = 0$.

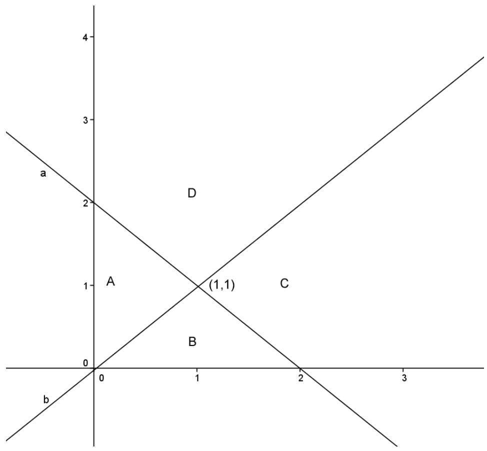
Kuljettaessa pitkin x-nollakäyrää vektorikentän x komponentti on nolla ja täten vektorikenttä on vertikaalinen. Se osoittaa joko suoraan ylös tai suoraan alas. Vastaavasti y-nollakäyrällä y komponentti on nolla ja vektorikenttä on horisontaalinen ja se osoittaa joko vasemmalle tai oikealle. Kriittiset pisteet löytyvät luonnollisesti näiden nollakäyrien leikkauspisteestä. Tarkastelemme differentiaaliyhtälöryhmää

$$\begin{aligned} x'(t) &= x(2 - x - y) \\ y'(t) &= y(y - x). \end{aligned} \tag{5.16}$$

Tarkastelemme yksinkertaistuksena vain ensimmäistä neljännestä. Nollakäyrät tälle differentiaaliyhtälöryhmälle saamme yhtälöistä

$$x(-2 - x - y) = 0, \quad y(y - x) = 0.$$

Tästä saamme x- nollakäyriksi $x = 0$ ja $y = -x + 2$. Näillä nollakäyrillä vektorikentän x-komponentti on nolla. Kuitenkin x-nollakäyrien ulkopuolella se on joko positiivinen tai negatiivinen. Jos $dx/dt < 0$, niin ratkaisut kulkevat vasemmalle ,ja jos $dx/dt > 0$, niin ratkaisut kulkevat oikealle. Saamme y-nollakäyriksi $y = 0$ ja $y = x$. Sama päättely pätee y-nollakäyrille kuin x-nollakäyrille sillä erotuksella, että kun $dy/dt < 0$, niin ratkaisut kulkevat alaspäin, ja kun $dy/dt > 0$, niin ratkaisut kulkevat ylöspäin. Nämä x- ja y- nollakäyrät on esitettynä kuviossa 5.8. Nyt olem-



Kuvio 5.8. x- ja y- nollakäyrät differentiaaliyhtälöryhmälle (5.16)

me jakaneet ensimmäisen neljänneksen neljään osioon A,B,C ja D. Kun laskemme arvoja x-komponentille, niin saamme positiivisia x-nollakäyrän a alapuolella ja taas negatiivisia sen yläpuolella. Näin ollen x- nollakäyrän alapuolella ratkaisut menevät oikealle ja sen yläpuolella vasemmalle. Samankaltaisten analyysien nojalle y-nollakäyrän yläpuolella ratkaisut siirtyvät ylös ja sen alapuolella alas. Nyt voimme analysoida ensin aluetta B. Tässä alueessa ratkaisut siirtyvät siis oikealle alas. Näin ollen kun lähdemme alueesta B ratkaisut kulkevat kohti kriittistä pistettä $(2, 0)$. Ja koska x -akselin väli $0 < x < 2$ on ratkaisukäyrä, niin ratkaisut eivät voi kulkea alueen B ulkopuolelle x -akselin alapuolelle. Tämä siis siksi, että ratkaisuiden yksikäsitteisyyslauseen nojalla ratkaisukäyrät eivät voi leikata.

Alueessa A ratkaisut kulkevat oikealle ylös. Nyt ne voivat siis poistua alueesta A ja siirtyä alueeseen D, siirtyä alueesta A alueeseen B tai ne voivat kulkea kohti kriittistä pistettä $(1, 1)$. On kuitenkin osoitettavissa linearisoinnin avulla, että kriittinen piste $(1, 1)$ on lähde, joten kaikki polut erkanevat siitä ja näin ollen mikään ratkaisu ei lähesty sitä. Eli ratkaisut voivat poistua alueesta A ja siirtyä joko alueeseen B tai D.

Alueessa D ratkaisut kulkevat vasemmalle ylös. Näin ollen ne lähestyvät y- akselia koskaan sitä kuitenkaan tavoittamatta. Alueessa C ratkaisut kulkevat taas alas ja vasemmalle. Nyt ne siis joko poistuvat alueeseen B tai lähestyvät kriittistä pistettä $(2, 0)$. Koska kaikki ratkaisut myös alueessa B lähestyvät samaa kriittistä pistettä, niin alueesta C lähdettäessä ratkaisut joka tapauksessa lähestyvät kriittistä pistettä $(2, 0)$.

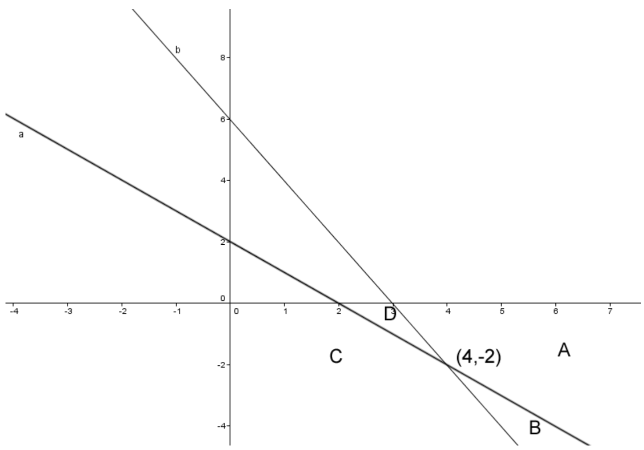
Yllä olemme havainnollistaneet, miten nollakäyriä voidaan käyttää ratkaisuiden käyttäytymisen tarkasteluun yleisemmässä tapauksessa. Kuten huomasimme, niin täydellistä analyysiä sekään ei kaikissa tapauksissa tarjoa. Esimerkiksi alueessa A ei voida olla varmoja kumpaan alueeseen ratkaisut milloinkin siirtyvät. Mutta nollakäyrien avulla analyysi tarjoaa yleisemmän ratkaisun kuin linearisointi. Kuitenkin voimme ylläolevasta esimerkistä sanoa, että iso osa ratkaisuista lähestyy kriittistä pistettä $(2,0)$. Edellisissä tarkasteluissamme nollakäyrät olivat suoria, kuitenkin nollakäyrä voi olla minkälainen käyrä tahansa ja analyysi on hieman erilainen. Perusperiaatteet pysyvät kuitenkin samana. Nollakäyrien, jotka eivät ole suoria, analyysistä voi lukea lisää Blanchardin & al teoksesta. [2, s.457-465]

Näytämme yksinkertaisen esimerkin miten eri metodeja voidaan käyttää epälineaaristen differentiaaliyhtälöryhmien analysoimiseen.

Esimerkki 5.10. Tarkastelemme epälineaarista autonomista differentiaaliyhtälöryhmää

$$\begin{aligned} x'(t) &= x(2 - x - y) \\ y'(t) &= y(6 - 2x - y). \end{aligned} \tag{5.17}$$

Toteamme ensin, että x-nollakäyrät ovat kuten edellisessä tarkastelussa $x = 0$ ja $y = -x + 2$. Vastaavasti y- nollakäyrät ovat $y = 0$ ja $y = -2x + 6$. Olemme piirtäneet nämä kuvioon 5.9. Kriittiset pisteet tälle differentiaaliyhtälöryhmälle ovat $(0,0), (4,-2), (2,0), (0,6)$. Tutkitaan jälleen nollakäyrien tarjoamaa informaatiota,



Kuvio 5.9. x- ja y- nollakäyrät differentiaaliyhtälöryhmälle (5.17)

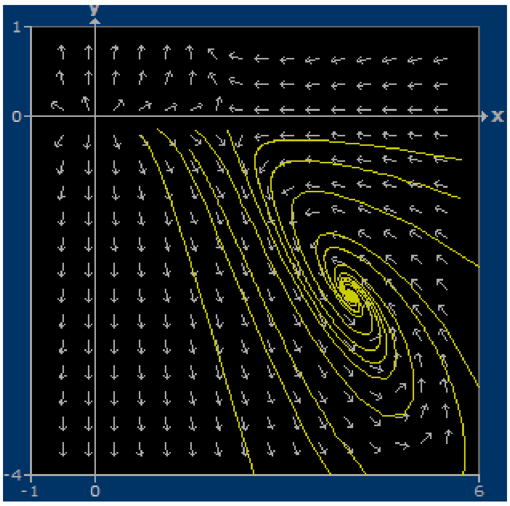
mutta tarkastellaan tällä kertaa neljättä neljännestä, missä sijaitsee nollakäyrien leikkauspiste eli kriittinen piste $(4,-2)$. Laskemalla vektorikenttiä jälleen eri alueissa kuten yllä, saamme että alueessa C polut kulkevat alas oikealle ja täten joko siirtyvät alueeseen B tai lähestyvät kriittistä pistettä $(4,-2)$. Alueessa B polut kulkevat ylös oikealle ja täten siirtyvät alueeseen A tai lähestyvät kriittistä pistettä $(4,-2)$. Jälleen alueessa A polut menevät ylös ja vasemmalle ja täten siirtyvät alueeseen D tai lähestyvät kriittistä pistettä $(4,-2)$. Viimein alueessa D polut kulkevat alas vasemmalle ja siirtyvät näin joko alueeseen C tai lähestyvät kriittistä pistettä $(4, -2)$. Näyttäisi siis, että polut joko lähestyvät nollakäyrien leikkauspistettä tai pyörivät sen ympärillä spiraalina. Tutkimme seuraavaksi epälineaarisen differentiaaliyhtälöryhmän (5.17) linearisointia pisteessä $(4, -2)$. Differentiaaliyhtälöryhmän (5.17) Jacobin matriisi laskettuna pisteessä $(4, -2)$ on

$$\mathbf{J}(4, -2) = \begin{bmatrix} -4 & -4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}.$$

Nyt siis yhtälöryhmän (5.17) linearisointi on

$$\begin{aligned} u'(t) &= -4u - 4v \\ v'(t) &= 4u + 2v. \end{aligned}$$

Linearisoinnin kerroinmatriisilla on ominaisarvot $\lambda_1 = i(\sqrt{7}+i), \lambda_2 = i(\sqrt{7}-i)$. Molempien ominaisarvojen reaaliosat ovat negatiiviset, joten lauseiden 5.1 ja 5.2 nojalla linearisointi on origossa asymptoottisesti stabiili. Tarkempi graafinen analyysi osoittaa, että linearisoinnilla on origossa spiraali nielu eli lähellä origoa polut lähestyvät spiraalina origoa. Kun tarkastellaan alkuperäistä differentiaaliyhtälöryhmää graafisesti, niin huomataan, että kun otetaan pisteitä kauempaa kriittisestä pisteestä, niin polut lähestyvät spiraalisesti kriittistä pistettä $(4, -2)$. Tämä on esitettynä kuviossa 5.10. Näin ollen myös kun polut alkavat kauempaa kriittisestä pisteestä, niin myös tällöin ne lähestyvät kriittistä pistettä $(4, -2)$. Nyt siis nollakäyrien ja linearisoinnin antama informaatio on linjassa koko differentiaaliyhtälöryhmän graafisen analyysin kanssa. Näin ei kuitenkaan välttämättä ole aina.



Kuvio 5.10. Faasikuva differentiaaliyhtälöryhmälle (5.17)

Olemme siis tutkineet, kuinka epälineaarisia differentiaaliyhtälöryhmiä voidaan analysoida eri metodein. Edellisessä esimerkissä käytimme kaikkia tässä luvussa esiintyneitä menetelmiä.

Lähteet

[1] Apostol, Tom M. *Calculus: Volume II*. John Wiley & Sons, Inc, 2nd Edition, 1969.

[2] Blanchard, P. & Devaney, R. L. & Hall, G. R, *Differential equations*. Brooks/-Cole, 2nd Edition, 2002.

[3] Conrad, Bruce P. *Differential equations: a systems approach*. Pearson Education, Inc, 1st Edition, 2003.

[4] Edwards, C. H. & Penney, E. D, *Differential Equations and Linear Algebra*. Pearson Education, Inc, 2nd Edition, 2005.

[5] Joyce, D. (2014) *Intro to vector fields*. Lecture notes, Clark University Available from Internet: http://aleph0.clarku.edu/ djoyce/ma131/vectorfields.pdf. Viitattu 22.10.2014.

[6] Joyce, D. (2014) *Gradient,divergence and curl*. Lecture notes, Clark University Available from Internet: http://aleph0.clarku.edu/ djoyce/ma131/del.pdf. Viitattu 22.10.2014

[7] Klain, D. (2006) *The Matrix Exponential (with exercises)*, Lecture notes, University of Massachusetts Lowell, Available from Internet: http://faculty.uml.edu/dklain/exponential.pdf. Viitattu 15.9.2014.

[8] Lomen, D. & Mark J, *Differential Equations*. Prentice-Hall International, Inc, 1988.

[9] Ruohonen, Keijo. (2011) *Vektorikentät*. Luentomoniste, Tampereen Teknillinen Yliopisto Saatavilla Internetissä: http://math.tut.fi/ ruohonen/VK.pdf. Viitattu 22.10.2014.