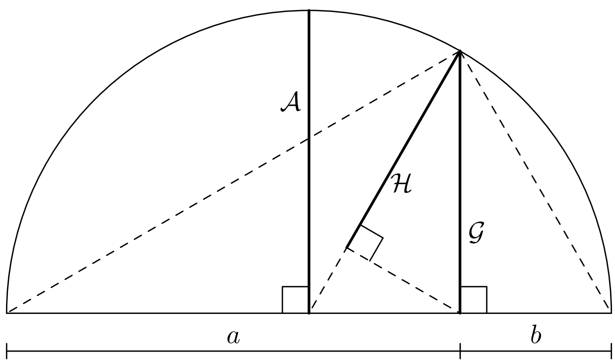
Keskiarvoja ja epäyhtälöitä

Markku Halmetoja



$$\mathcal{H} \le \mathcal{G} \le \mathcal{A}$$

Lisensiaatintutkimus

Tampereen yliopisto

Informaatiotieteiden yksikkö

Matematiikka

Kesäkuu 2014

Tämän julkaisun alkuperäisyys on tarkastettu Turnitin OriginalityCheck -ohjelmalla Tampereen yliopiston laatujärjestelmän mukaisesti.

Tiivistelmä

Tässä kirjoituksessa tutkimme epäyhtälöitä, erityisesti eräiden keskiarvojen välillä. Monet niistä voidaan todistaa tai konstruoida muutamien yleisten epäyhtälöiden avulla. Tällaisia ovat mm. Jensenin, Karamatan, Muirheadin, Cauchyn-Bunjakovskin-Schwarzin ja Hölderin epäyhtälöt. Tehokas mutta ei kovin laajalti tunnettu menetelmä on Schur-konveksisuus. Se perustuu majoroinniksi kutsuttuun $\mathbb{R}^n$:n alkioiden väliseen relaatioon. Karamatan ja Muirheadin epäyhtälöt perustuvat samaan relaatioon. Esitämme välttämättömän ja riittävän ehdon sille, että derivoituva, symmetrinen usean muuttujan funktio on Schur-konveksi sekä riittävän ehdon sille, että tällainen funktio on aidosti Schur-konveksi. Todistamme mainitut yleiset epäyhtälöt yhtäsuuruusehtoineen ja sovellamme niitä sekä Schur-konveksisuutta lähteistä löytyneisiin tehtäviin. Konstruoimme myös muutamia mahdollisesti uusia epäyhtälöitä. Käsittelemme eräitä teoriakokonaisuuksia lähteistä poikkeavalla tavalla. Esimerkiksi johdamme Nesbittin epäyhtälön usealle muuttujalle Tšebyševin epäyhtälön seurauksena. Käsittelemme myös eräitä Youngin epäyhtälöön liittyviä ajankohtaisia tutkimustuloksia.

Avainsanoja: Aritmeettinen keskiarvo, geometrinen keskiarvo, harmoninen keskiarvo, kontraharmoninen keskiarvo, konveksisuus, majorointi, Schur-konveksisuus, Jensenin epäyhtälö, Karamatan epäyhtälö, Muirheadin epäyhtälö, Cauchyn-Bunjakovskin-Schwarzin epäyhtälö, Tšebyševin epäyhtälö, Youngin epäyhtälö, Hölderin epäyhtälö, Minkowskin epäyhtälö.

Abstract

In this paper we study inequalities and especially those between certain means. Many inequalities can be proved or constructed by applying general inequalities such as the inequalities of Jensen, Karamata, Muirhead, Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz and Hölder. An effective but not widely known method is Schur convexity. It is based on a relation in $\mathbb{R}^n$ called majorization. Inequalities of Karamata and Muirhead are based on the same relation.
A necessary and sufficient condition for a symmetric function of several variables to be Schur convex are given and also sufficient condition for such a function to be strictly Schur convex are given. We prove the general inequalities named above and we apply them and Schur convexity in solutions of problems found in sources. We also present some possibly new inequalities. Some parts of the theory are written independently of the sources. We prove Nesbitt's inequality for several variables as a consequence of Chebyshev's inequality. We also discuss some current results concerning Young's inequality.

Key words: Arithmetical mean, geometric mean, harmonic mean, contraharmonic mean, convexity, majorization, Schur convexity, Jensen's inequality, Karamata's inequality, Muirhead's inequality, Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz inequality, Chebyshev's inequality, Young's inequality, Hölder's inequality, Minkowski's inequality.

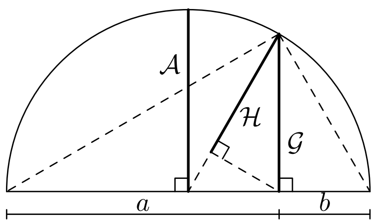
Sisältö

1 Johdanto

Toimittajien kysyessä Michelsonilta vuonna 1882 miksi hän mittaa valon nopeutta, Michelson vastasi: ”Because it is such great fun.” Kun viisikymmentä vuotta myöhemmin Einstein kysyi miksi hän edelleen mittaa valon nopeutta, Michelson vastasi: ”Because it is such great fun.” Voisin milloin tahansa vastata samalla tavalla matematiikan harrastamista koskeviin kysymyksiin. Matematiikka on todella mielenkiintoista. Itsekukin voi harrastaa sitä omalla tasollaan ja saada elämyksiä onnistumisista. V. I. Arnold, jota alakoulun opettaja oli pitänyt kertotaulua oppimaan kykenemättömänä idioottina, on kertonut [15] ratkaisseensa kaksitoistavuotiaana myöhemmältä opettajaltaan saamansa vaikean tehtävän [12, teht. 22] mietittyään sitä kokonaisen päivän ja kokeneensa sen johdosta samanlaista mielihyvää kuin myöhemmin onnistuessaan selvittämään syvällisiä matemaattisia ongelmia. Matematiikassa onnistumisen tuottama ilo on absoluuttista.

Oma kiinnostukseni matematiikkaan heräsi keskikoulussa saatuani käsiini Väisälän kuuluisat oppikirjat. Innostavalla opettajallakin oli osuutensa asiaan. Kouluaikana oli tapana pohtia ylimääräisiäkin tehtäviä harjoituskirjoista ja keskustella niistä samanhenkisten kavereiden kanssa. Matematiikasta tuli harrastus. Opiskeluaikana aloitin kotimaisen (ja osin ulkomaisenkin) matemaattisen kirjallisuuden keräilyn. Vanhojen tekstien lukeminen ja perehtyminen matematiikan historiaan antoi perspektiiviä tulevaan opettajan työhön.

Opettajan toimessa on ollut luonnollista pyrkiä tutkimaan hieman laajemmin opettamiaan asioita. Eräs tällainen on Pythagoraan koulukunnan määrittelemät erilaiset keskiarvot. Useimmissa lukion oppikirjoissa lienee harjoitustehtävänä kahden positiivisen luvun aritmeettisen, geometrisen ja harmonisen keskiarvon suuruusjärjestyksen todistaminen. Kysymys on algeb-



rallisesti melko triviaali, mutta se voidaan ratkaista myös geometrisesti, mikä tekee siitä opetuksen kannalta mielenkiintoisen. Se, että sama ongelma ratkeaa näin perusteellisesti toisistaan poikkeavilla tavoilla, antaa oppilaille käsityksen matematiikan todellisesta luonteesta. Tällaiset tehtävät saattavat herättää kiinnostuksen matematiikkaa kohtaan.

Jos lukuja on enemmän kuin kaksi, keskiarvo-ongelma muuttuu vaikeammaksi. Cauchy lienee ensimmäisenä todistanut aritmeettisen ja geometrisen keskiarvon suuruusjärjestyksen yleisessä tapauksessa. Hänen ovela alaspäin kulkeva induktiotodistuksensa on liian hankala lukiossa läpikäytäväksi varsinkin, kun induktiokaan ei kuulu lukion opetussuunnitelmaan. Cauchyn todistus löytyy mm. Aignerin ja Zieglerin kirjasta [2]. Siinä on myös hieno, lukiolaisellekin ymmärrettävä tapa todistaa tämä epäyhtälö. Se innoitti minua laatimaan kirjoitukset [10] ja [11], joissa käsitellään epäyhtälöitä lukiolaiselle sopivassa muodossa.

Näiden kirjoitusten myötä osoittautui, että keskiarvojen välisistä epäyhtälöistä ja epäyhtälöistä yleisemminkin olisi mahdollista tehdä laajempikin tutkielma. Muutamia melko yleispäteviä menetelmiä tunnetaan niiden konstruoimiseksi. Funktion pienimmän ja suurimman arvon määrittämisen ohella ehkä tunnetuin niistä on kolmosluvussa esiteltävä konvekseille funktioille voimassa oleva Jensenin epäyhtälö. Neljännessä luvussa tarkastelemme painotettujen keskiarvojen välisiä epäyhtälöitä sitä soveltaen. Vähemmän tunnettuja matematiikoidenkin keskuudessa ovat majorointiin perustuvat menetelmät. Niissä $\mathbb{R}^n$:n vektoreille määritellään majoroinniksi kutsuttu järjestysrelaatio $\prec$. Viidennessä luvussa käsitellään majorointia ja siihen perustuvat Karamatan ja Muirheadin epäyhtälöt. Sovelluksina konstruoidaan eräitä enemmän tai vähemmän tunnettuja epäyhtälöitä. Esimerkit, joissa ei ole lähdeviitettä, ovat kirjoittajan keksimiä joskaan eivät ehkä aikaisemmin tuntemattomia.

On osoittautunut, että tietyt symmetriset funktiot $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ toteuttavat implikaation

$$\boldsymbol{u} \prec \boldsymbol{v} \Rightarrow f(\boldsymbol{u}) \leq f(\boldsymbol{v}). \tag{1}$$

Tällöin funktion sanotaan olevan Schur-konveksi. Implikaation (1) avulla on mahdollista todistaa lukuisa joukko eri tyyppisiä epäyhtälöitä. Schur-konveksisuuden alkeita käsitellään kuudennessa luvussa. Seitsemännessä luvussa todistetaan mm. Cauchyn-Bunjakovskin-Schwarzin, Tšebyševin, Youngin, Hölderin ja Minkowskin epäyhtälöt sekä käsitellään lyhyesti eräitä Youngin epäyhtälöön liittyviä ajankohtaisia tutkimustuloksia.

Vanhana opettajana rohkenen toivoa onnistuneeni tekemään kirjoituksestani niin selkeän, että sen avulla on asiaan vihkiytymättömän mahdollista päästä jyvälle sekä tavanomaisesta että Schur-konveksisuudesta ja eräistä klassisista epäyhtälöistä. Tietämystään hän voi sitten syventää ja laajentaa Marshallin ja Olkinin [21] ja Steelen [26] kirjojen avulla, joita työni ohjaajana toiminut emeritusprofessori Jorma Merikoski suositteli luettavakseni. Hänelle osoitan suuren kiitoksen asiantuntevista neuvoista ja ohjauksesta.

2 Keskiarvoista

2.1 Eräitä keskiarvoja

Pythagoraan koulukunta määritteli suhdeopissaan [3, s. 96] kahden positiivisen luvun u ja v keskiarvoja verrannoilla, mm.

$$
\begin{aligned}
\frac{m-u}{v-m} &= \frac{m}{m} && \text{(aritmeettinen keskiarvo } \mathcal{A}\text{)},\\
\frac{m-u}{v-m} &= \frac{u}{m} && \text{(geometrinen keskiarvo } \mathcal{G}\text{)},\\
\frac{m-u}{v-m} &= \frac{u}{v} && \text{(harmoninen keskiarvo } \mathcal{H}\text{)},\\
\frac{m-u}{v-m} &= \frac{v}{u} && \text{(kontraharmoninen keskiarvo } \mathcal{C}\text{)},
\end{aligned}
$$

missä m on kyseinen keskiarvo. Verrannoista seuraa

$$
\mathcal{H} = \frac{2}{\frac{1}{u}+\frac{1}{v}}, \quad \mathcal{G} = \sqrt{uv}, \quad \mathcal{A} = \frac{u+v}{2} \quad \text{ja} \quad \mathcal{C} = \frac{u^2+v^2}{u+v}. \tag{1}
$$

Keskiarvojen suuruusjärjestys

$$
\mathcal{H} \le \mathcal{G} \le \mathcal{A} \le \mathcal{C} \tag{2}
$$

todistetaan näyttämällä, että kunkin epäyhtälön oikean ja vasemman puolen erotus on erään luvun neliö. Siinä yhteydessä nähdään, että yhtäsuuruus on voimassa, jos ja vain jos $u = v$.

Keskiarvot (1) yleistyvät useammalle positiiviselle luvulle yhtälöillä

$$
\begin{aligned}
\mathcal{H} &= \frac{n}{\frac{1}{u_1} + \ldots + \frac{1}{u_n}},\\
\mathcal{G} &= \sqrt[n]{u_1 \ldots u_n},\\
\mathcal{A} &= \frac{u_1 + \ldots + u_n}{n} \quad \text{ja}\\
\mathcal{C} &= \frac{u_1^2 + \ldots + u_n^2}{u_1 + \ldots + u_n}.
\end{aligned}
$$

Ne ovat lukujen $u_1, u_2, \ldots, u_n$ symmetrisiä funktioita, ja jokainen niistä sijaitsee pienimmän ja suurimman u-luvun välissä. Todistamme, että (2) yhtäsuuruusehtoineen on voimassa myös näille yleistetyille keskiarvoille. Teemme sen kolmessa erillisessä vaiheessa.

Vaihe 1. $\mathcal{G} \le \mathcal{A}$. Voimme rajoituksetta olettaa, että $u_1 \le u_2 \le \ldots \le u_n$. Koska $\mathcal{G}$ sijaitsee pienimmän ja suurimman u-luvun välissä, on olemassa k, jolle $u_k \le \mathcal{G} \le u_{k+1}$. Koska

$$\sum_{\imath=1}^{k} \int_{u_\imath}^{\mathcal{G}} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{\mathcal{G}}\right) \mathrm{d}t + \sum_{\imath=k+1}^{n} \int_{\mathcal{G}}^{u_\imath} \left(\frac{1}{\mathcal{G}} - \frac{1}{t}\right) \mathrm{d}t \ge 0, \tag{3}$$

ja koska integroitavat ovat ei-negatiivisia, on yhtäsuuruus voimassa, jos ja vain jos $u_\imath = \mathcal{G}$ kaikilla $\imath \in \{1, 2, \ldots n\}$. Suorittamalla integroinnit ja summaukset epäyhtälö (3) sievenee yhtäpitävästi epäyhtälöksi $\mathcal{G} \le \mathcal{A}$.

Vaihe 2. $\mathcal{H} \le \mathcal{G}$. Soveltamalla edellistä epäyhtälöä u-lukujen käänteislukuihin saamme

$$\sqrt[n]{\frac{1}{u_1} \cdots \frac{1}{u_n}} \le \frac{\frac{1}{u_1} + \ldots + \frac{1}{u_n}}{n},$$

mistä väite yhtäsuuruusehtoineen seuraa.

Vaihe 3. Soveltamalla Cauchyn-Bunjakovskin-Schwarzin epäyhtälöä lukuihin

$$u_1,\, u_2,\, \ldots\,,\, u_n \quad \text{ja} \quad \tfrac{1}{n},\, \tfrac{1}{n},\, \ldots\,,\, \tfrac{1}{n}$$

saadaan epäyhtälö $\mathcal{A} \le \mathcal{C}$ yhtäsuuruusehtoineen.

Olemme siis todistaneet seuraavan lauseen.

Lause 2.1 Positiivisten lukujen $u_1,\, u_2,\, \ldots,\, u_n$ harmonisen, geometrisen, aritmeettisen ja kontraharmonisen keskiarvon välillä vallitsee epäyhtälöketju

$$\mathcal{H} \le \mathcal{G} \le \mathcal{A} \le \mathcal{C},$$

missä yhtäsuuruudet ovat voimassa, jos ja vain jos $u_1 = u_2 = \ldots = u_n$.

Todistus perustui oivalluksiin, joita olisi vaikea keksiä ”tyhjästä”. Vaikein vaihe, $\mathcal{G} \le \mathcal{A}$, on Aignerin ja Zieglerin kirjasta [2, s. 110]. Se voidaan todistaa monella muullakin tavalla, esimerkiksi sidottuna ääriarvotehtävänä [20, s. 224], tai kuten jo johdannossa mainittiin, induktiolla. Cauchyn keksimä induktiotodistus löytyy myös kirjasta [2]. Ehkä kaikkein yksinkertaisin ja lyhin todistus tälle epäyhtälölle saadaan Muirheadin lauseen avulla (s. 52, esim 1).

Lauseen 2.1 epäyhtälöitä, varsinkin $\mathcal{AG}$-epäyhtälöä, sovelletaan usein matematiikkakilpailuissa. Seuraavassa esimerkissä ratkaistaan vuoden 2012 matematiikkaolympialaisissa esiintynyt tehtävä. Ratkaisu noudattaa artikkelissa [18] annettuja suuntaviivoja.

Esim. Olkoon kokonaisluku $n \geq 3$. Todistettava, että jos $a_2, a_3, \ldots, a_n \in \mathbb{R}_+$ ja $a_2\, a_3\, \ldots\, a_n = 1$, niin

$$(1 + a_2)^2 (1 + a_3)^3 \ldots (1 + a_n)^n \;>\; n^n.$$

Todistus perustuu $\mathcal{AG}$-epäyhtälöön. Jos $k \in \{2, 3, \ldots, n\}$, niin

$$1 + a_k \;=\; (k-1) \cdot \frac{1}{k-1} + a_k \;=\; \frac{1}{k-1} + \frac{1}{k-1} + \ldots + \frac{1}{k-1} + a_k,$$

mistä $\mathcal{AG}$-epäyhtälöä käyttäen seuraa

$$\frac{1}{k}\left(\frac{1}{k-1} + \frac{1}{k-1} + \ldots + \frac{1}{k-1} + a_k\right) \;\geq\; \left(\frac{a_k}{(k-1)^{k-1}}\right)^{1/k},$$

ja edelleen

$$(1 + a_k)^k \;\geq\; \frac{k^k}{(k-1)^{k-1}}\, a_k. \tag{4}$$

Kertomalla epäyhtälöt (4) keskenään saadaan

$$(1 + a_2)^2 (1 + a_3)^3 \ldots (1 + a_n)^n \;\geq\; a_2\, a_3\, \ldots\, a_n\; n^n,$$

ja koska $a_2\, a_3\, \ldots\, a_n = 1$, edelleen

$$(1 + a_2)^2 (1 + a_3)^3 \ldots (1 + a_n)^n \;\geq\; n^n. \tag{5}$$

$\mathcal{AG}$-epäyhtälön yhtäsuuruusehdon mukaan yhtäsuuruus on voimassa, jos ja vain jos

$$\frac{1}{k-1} \;=\; a_k$$

kaikilla $k \in \{2, 3, \ldots, n\}$, mutta tällöin

$$a_2\, a_3\, \ldots\, a_n \;=\; \frac{1}{(n-1)!} \;\leq\; \tfrac{1}{2} \;<\; 1,$$

mikä on vastoin oletusta. Epäyhtälössä (5) vallitsee siis pelkästään erisuuruus, joten väite on todistettu.

Seuraavassa osaluvussa pohdimme, mitkä ominaisuudet ovat useimmille keskiarvoille yhteisiä ja mitä ominaisuuksia useamman muuttujan reaaliarvoisella funktiolla tulee olla, jotta se määrittäisi keskiarvoksi kutsutun luvun. Sen jälkeen keskitymme teoriaan, jonka avulla keskiarvojen väliset ja monet muutkin epäyhtälöt todistuvat edellä nähtyä helpommin yleisempien lauseiden seurauksina.

2.2 Keskiarvon määritelmä

Mitä lukujen $u_1, \ldots, u_n$ keskiarvolla tarkoitetaan? Keskiarvoja käsittelevässä kirjallisuudessa esitellään monia jatkuvia funktioita, joiden arvoja kutsutaan u-lukujen keskiarvoiksi. Niillä on enemmän tai vähemmän yhteisiä ominaisuuksia, mutta kaikille yhteistä näyttäisi olevan se, että keskiarvo sijaitsee lukujoukon pienimmän ja suurimman luvun välissä ja on riippumaton lukujen keskinäisestä järjestyksestä. Voimme siis asettaa seuraavan määritelmän.

Olkoon f joukossa $\mathbb{R}^n$ tai jossakin sen osajoukossa määritelty jatkuva ja symmetrinen reaaliarvoinen funktio. Sen arvoa $f(u_1, \ldots, u_n)$ kutsutaan lukujen $u_1, \ldots, u_n$ *keskiarvoksi*, jos

$$u_{\min} \leq f(u_1, \ldots, u_n) \leq u_{\max}.$$

Määritelmästä seuraa välittömästi, että $f(u, u, \ldots, u) = u$.

Osoitamme, että keskiarvot $\mathcal{H}$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{A}$ ja $\mathcal{C}$ ovat annetun määritelmän mukaisia. Ne ovat selvästi jatkuvia ja symmetrisiä n:n muuttujan reaaliarvoisia funktioita. Olkoot m ja M pienin ja suurin positiivisista luvuista $u_1, \ldots, u_n$. Saamme suoraviivaiset arviot

$$\begin{aligned}
\mathcal{H} &= \frac{n}{\frac{1}{u_1} + \ldots + \frac{1}{u_n}} \leq \frac{n}{\frac{1}{M} + \ldots + \frac{1}{M}} = \frac{n}{\frac{n}{M}} = M, \\
\mathcal{H} &= \frac{n}{\frac{1}{u_1} + \ldots + \frac{1}{u_n}} \geq \frac{n}{\frac{1}{m} + \ldots + \frac{1}{m}} = \frac{n}{\frac{n}{m}} = m, \\
\mathcal{G} &= \sqrt[n]{u_1 u_2 \ldots u_n} \leq \sqrt[n]{M\,M \ldots M} = \sqrt[n]{M^n} = M, \\
\mathcal{G} &= \sqrt[n]{u_1 u_2 \ldots u_n} \geq \sqrt[n]{m\,m \ldots m} = \sqrt[n]{m^n} = m, \\
\mathcal{A} &= \frac{u_1 + \ldots + u_n}{n} \leq \frac{M + \ldots + M}{n} = \frac{nM}{n} = M, \\
\mathcal{A} &= \frac{u_1 + \ldots + u_n}{n} \geq \frac{m + \ldots + m}{n} = \frac{nm}{n} = m, \\
\mathcal{C} &= \frac{u_1^2 + \ldots + u_n^2}{u_1 + \ldots + u_n} \leq \frac{Mu_1 + \ldots + Mu_n}{u_1 + \ldots u_n} = M, \\
\mathcal{C} &= \frac{u_1^2 + \ldots + u_n^2}{u_1 + \ldots + u_n} \geq \frac{mu_1 + \ldots + mu_n}{u_1 + \ldots u_n} = m.
\end{aligned}$$

Lisäksi nämä keskiarvot ovat lukujen $u_1, \ldots, u_n$ homogeenisia ja monotonisia funktioita.

Bullen antaa viitteitä lähteisiin, joissa tarkastellaan mahdollisuuksia aksiomatisoida keskiarvon käsite, ks. [5, s. 435]. Tällöin pohdinnan kohteena on, voisivatko muutamat sopivasti valitut ominaisuudet määrätä jonkin keskiarvon yksikäsitteisesti. Tämä vaikea kysymys johtaa funktionaaliyhtälöiden teoriaan, emmekä käsittele asiaa tässä työssä.

Kahden muuttujan tapauksessa eräät funktiot generoivat väliarvolauseen kautta keskiarvoja. Jos esimerkiksi f on toisen asteen polynomifunktio, niin yhtälöstä

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a)$$

seuraa yksikäsitteisesti

$$\xi = \frac{a+b}{2}.$$

Yleisemmin, jos f on funktio, jonka derivaatalla g on käänteisfunktio g^{-1}, niin väliarvolauseen mukaan on olemassa yksikäsitteisesti määrätty $\xi \in]a,b[$ siten, että

$$\xi = g^{-1}\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t\right). \tag{1}$$

Lukua ξ voidaan pitää funktion f generoimana lukujen a ja b keskiarvona, kun sovitaan, että jos $a = b$, niin $\xi = a$. Artikkelissa [22] pohditaan yhtälön (1) määräämän keskiarvon ominaisuuksia sekä sitä, voidaanko eräitä tunnettuja keskiarvoja saada aikaan tällä tavalla.

Kahden positiivisen luvun keskiarvoja voidaan määritellä myös jatkuvan, aidosti monotonisen reaaliarvoisen funktion avulla. Olkoon $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ aidosti monotoninen, jatkuva funktio ja $a, b > 0$. Tällöin lukujen a ja b välissä on täsmälleen yksi luku m, jolle

$$f(m) = \frac{1}{2}\left(f(a) + f(b)\right).$$

Luku m on annetun määritelmän mukaan lukujen a ja b keskiarvo. Se saadaan eksplisiittisesti yhtälöstä

$$m = f^{-1}\left(\frac{1}{2}(f(a) + f(b))\right). \tag{2}$$

Tällöin esimerkiksi $f(x) = x$ generoi lukujen aritmeettisen keskiarvon ja $g(x) = \frac{1}{x}$ harmonisen keskiarvon.

Tämä ajatus voidaan yleistää mielivaltaiselle määrälle positiivisia lukuja. Olkoot $u_1, \ldots, u_n > 0$, ja $f(x) = x^p$, missä $p \neq 0$. Funktio f on positiivisille reaaliluvuille määritelty aidosti monotoninen, jatkuva reaaliarvoinen funktio. Välillä $[u_{\min}, u_{\max}]$ on yksikäsitteisesti määrätty luku m, jolle

$$f(m) = \frac{f(u_1) + f(u_2) + \ldots + f(u_n)}{n} = \frac{u_1^p + u_2^p + \ldots + u_n^p}{n} = m^p,$$

mistä seuraa

$$m = m(p) = \left(\frac{u_1^p + u_2^p + \ldots + u_n^p}{n}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Lukua $m(p)$ kutsutaan lukujen $u_1, \ldots, u_n$ *potenssikeskiarvoksi*. Näemme välittömästi, että

$$m(1) = \mathcal{A} \quad \text{ja} \quad m(-1) = \mathcal{H}.$$

Potenssikeskiarvoa tutkitaan tarkemmin osaluvussa 6.2, jossa mm. osoitetaan, että

$$\lim_{p \to 0} m(p) = \sqrt[n]{u_1 u_2 \ldots u_n} = \mathcal{G}.$$

Yhtälössä (2) on lähtökohtana funktion f arvojen aritmeettinen keskiarvo, mutta se voidaan luonnollisesti korvata muillakin keskiarvoilla. Jos esimerkiksi $f(x) = \mathrm{e}^x$ ja

$$f(m) = \sqrt[n]{f(u_1) f(u_2) \ldots f(u_n)},$$

niin

$$m = \ln \sqrt[n]{f(u_1) f(u_2) \ldots f(u_n)} = \frac{u_1 + u_2 + \ldots + u_n}{n}.$$

Eri funktiot voivat määrätä saman keskiarvon. Esimerkiksi monotoniset, jatkuvat funktiot

$$f(x) = \frac{x}{1+x} \quad \text{ja} \quad g(x) = \frac{1}{1+x},$$

missä $x \in \mathbb{R}_+$, määrittelevät aritmeettisen keskiarvon kautta saman kahta lukua koskevan keskiarvon. Jos nimittäin $a, b \in \mathbb{R}_+$,

$$f(m) = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b}\right) \quad \text{ja} \quad g(m') = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b}\right),$$

niin

$$m' = m = \frac{a + b + 2ab}{2 + a + b}.$$

Luku m toteuttaa keskiarvolle asetetut vaatimukset, sillä se on a:n ja b:n symmetrinen funktio ja sijaitsee näiden lukujen välissä.

3 Konvekseista funktioista

3.1 Konveksisuuden määritelmä ja ominaisuuksia

Tässä luvussa I tarkoittaa reaalilukuväliä ja f yhden reaalimuuttujan reaalifunktiota. Välillä I määritelty funktio f on *konveksi*, jos epäyhtälö

$$f\Big(\lambda x + (1-\lambda)y\Big) \;\leq\; \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) \tag{1}$$

toteutuu kaikilla $x, y \in I$ ja $\lambda \in]0,1[$. Funktio on *aidosti konveksi*, jos

$$f\Big(\lambda x + (1-\lambda)y\Big) \;<\; \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) \tag{2}$$

kaikilla $\lambda \in]0,1[$ ja kaikilla keskenään erisuurilla $x, y \in I$.

Esim. 1 Funktio $u(x) = |x|$ on konveksi, sillä kolmioepäyhtälöstä seuraa

$$|\lambda x \,+\, (1-\lambda)y| \;\leq\; \lambda|x| \,+\, (1-\lambda)|y|$$

kaikilla $x, y \in \mathbb{R}$ ja $\lambda \in]0,1[$.

Esim. 2 Funktio $f(x) = x^2$ on aidosti konveksi, sillä konveksisuusehto (2) pelkistyy epäyhtälöksi

$$(x \,-\, y)^2 \;>\; 0.$$

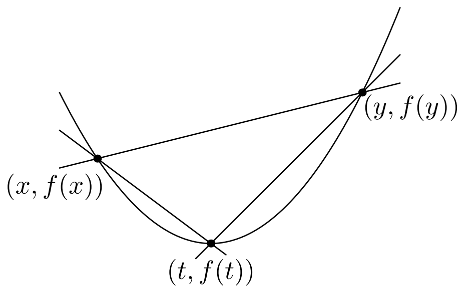
Esim. 3 Funktio $g(x) = x^{-1}$, $x > 0$, on aidosti konveksi, sillä konveksisuusehto (2) pelkistyy positiivisten lukujen x ja y väliseksi epäyhtälöksi

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} > 2 \quad \text{tai} \quad (x \,-\, y)^2 \;>\; 0$$

käsittelytavasta riippuen.

Funktio f on *konkaavi* (*aidosti konkaavi*) välillä I, jos erisuuruus epäyhtälöissä (1) tai (2) on vastakkaiseen suuntaan. Selvästi funktio f on (aidosti) konkaavi, jos ja vain jos $-f$ on (aidosti) konveksi. Täten konkaavisuutta koskevat tulokset seuraavat välittömästi konveksisuutta koskevista. Voimme siis keskittyä tutkimaan (aitoa) konveksisuutta.

Jos f on konveksi, niin piste $(t,f(t))$ ei ylitä pisteiden $(x, f(x))$ ja $(y, f(y))$ määräämää janaa millään $t \in [x,y] \subseteq I$. Lisäksi kuvion suorien kulmakertoi-



mien välillä vallitsee kaksoisepäyhtälö

$$\frac{f(t)-f(x)}{t-x} \leq \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq \frac{f(y)-f(t)}{y-t}.$$

Nämä epäyhtälöt osoitetaan konveksisuudelle välttämättömiksi ehdoiksi viitteissä [4, s. 79], [26, s. 104] ja [28, s. 2]. Kuitenkin ne ovat myös riittäviä.

Lause 3.1 Funktio $f : I \to \mathbb{R}$ on konveksi, jos ja vain jos kaikille ehdon $x < t < y$ toteuttaville välin I luvuille on voimassa

$$\frac{f(t)-f(x)}{t-x} \leq \frac{f(y)-f(x)}{y-x}. \tag{3}$$

Todistus Olkoon f konveksi. Olkoot $x, t, y \in I$ ja $x < t < y$. Tällöin on olemassa $\lambda \in]0,1[$ siten, että $t = (1-\lambda)x + \lambda y$. Koska f on konveksi, on $f(t) \leq (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y)$ eli

$$f(t) - f(x) \leq \lambda\Big(f(y) - f(x)\Big). \tag{4}$$

Koska $\lambda = (t-x)/(y-x)$, seuraa (4):stä (3).

Oletetaan käänteisesti, että (3) on voimassa. Olkoot $x,y \in I$, $x < y$ ja $\lambda \in]0,1[$. Olkoon edelleen

$$t = \lambda x + (1-\lambda)y \in]x,y[, \quad \text{jolloin} \quad t - x = (1-\lambda)(y-x) > 0,$$

ja siis

$$\frac{f(t)-f(x)}{(1-\lambda)(y-x)} \leq \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$$

eli

$$f(t) - f(x) \leq (1-\lambda)(f(y) - f(x)).$$

Tästä seuraa

$$f\Big(\lambda x + (1-\lambda)y\Big) = f(t) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y),$$

joten f on konveksi.

Lause 3.2 Funktio $f : I \to \mathbb{R}$ on konveksi, jos ja vain jos kaikille ehdon $x < t < y$ toteuttaville välin I luvuille on voimassa

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq \frac{f(y)-f(t)}{y-t}. \tag{5}$$

Todistus Olkoon f konveksi. Olkoot $x, t, y \in I$ ja $x < t < y$. Tällöin on olemassa $\lambda \in]0,1[$ siten, että $t = \lambda x + (1 - \lambda)y$. Koska f on konveksi, on $f(t) \le \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$ eli

$$\lambda\big(f(y) - f(x)\big) \le f(y) - f(t). \tag{6}$$

Koska $\lambda = (y - t)/(y - x)$, seuraa (6):sta (5).

Oletetaan käänteisesti, että (5) on voimassa. Olkoot $x,y \in I$, $x < y$ ja $\lambda \in]0,1[$. Tällöin

$$t = \lambda x + (1 - \lambda)y \in]x,y[\quad \text{ja} \quad y - t = \lambda(y - x) > 0,$$

joten epäyhtälö (5) saadaan muotoon

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \le \frac{f(y) - f(t)}{\lambda(y - x)},$$

ja edelleen

$$\lambda f(y) - \lambda f(x) \le f(y) - f(t),$$

mistä seuraa

$$f\big(\lambda x + (1 - \lambda)y\big) = f(t) \le \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y).$$

Siis f on konveksi, ja lause on todistettu.

Lause 3.3 Funktio $f : I \to \mathbb{R}$ on konveksi, jos ja vain jos kaikille ehdon $x < t < y$ toteuttaville välin I luvuille on voimassa

$$\frac{f(t) - f(x)}{t - x} \le \frac{f(y) - f(t)}{y - t}. \tag{7}$$

Todistus Jos f on konveksi, niin epäyhtälöistä (3) ja (5) seuraa (7).

Oletetaan käänteisesti, että (7) on voimassa. Olkoot $x,y \in I$, $x < y$ ja $\lambda \in]0,1[$. Tällöin $t = \lambda x + (1 - \lambda)y \in]x,y[$, joten

$$t - x = (1 - \lambda)(y - x) > 0 \quad \text{ja} \quad y - t = \lambda(y - x) > 0. \tag{8}$$

Epäyhtälö (7) sievenee muotoon

$$(y - t)\big(f(t) - f(x)\big) \le (t - x)\big(f(y) - f(t)\big),$$

ja edelleen (8):n avulla

$$(y - x)f(t) \le \lambda(y - x)f(x) + (1 - \lambda)(y - x)f(y).$$

Tästä seuraa $f\big(\lambda x + (1 - \lambda)y\big) \le \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$, joten f on konveksi.

Lauseet 3.4–3.6 todistuvat samalla tavalla kuin lauseet 3.1–3.3.

Lause 3.4 Funktio $f : I \to \mathbb{R}$ on aidosti konveksi, jos ja vain jos kaikille ehdon $x < t < y$ toteuttaville välin I luvuille on voimassa

$$\frac{f(t) - f(x)}{t - x} < \frac{f(y) - f(x)}{y - x}. \tag{9}$$

Lause 3.5 Funktio $f : I \to \mathbb{R}$ on aidosti konveksi, jos ja vain jos kaikille ehdon $x < t < y$ toteuttaville välin I luvuille on voimassa

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} < \frac{f(y) - f(t)}{y - t}. \tag{10}$$

Lause 3.6 Funktio $f : I \to \mathbb{R}$ on aidosti konveksi, jos ja vain jos kaikille ehdon $x < t < y$ toteuttaville välin I luvuille on voimassa

$$\frac{f(t) - f(x)}{t - x} < \frac{f(y) - f(t)}{y - t}. \tag{11}$$

Vastaavat konkaavisuutta koskevat tulokset saadaan kääntämällä lauseiden 3.1–3.6 epäyhtälöt vastakkaisiin suuntiin.

Lauseiden 3.1–3.6 sisältö voidaan kiteyttää seuraaviksi konveksisuuden luonnehdinnoiksi.

Lause 3.7 Funktio $f : I \to \mathbb{R}$ on (aidosti) konveksi, jos ja vain jos funktio

$$I \setminus \{a\} \ni x \longmapsto \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

on (aidosti) kasvava kaikilla $a \in I$. Funktio $f : I \to \mathbb{R}$ on (aidosti) konveksi, jos ja vain jos funktio

$$g(x,y) = \frac{f(x) - f(y)}{x - y}, \quad (x, y \in I,\ x \neq y)$$

on (aidosti) kasvava kummankin muuttujan suhteen.

Esim. 4 Funktiot $f(x) = x^2$ ja $g(x) = x^{-1}$ $(x > 0)$ nähdään aidosti konvekseiksi helposti lauseen 3.6 avulla. Jos nimittäin $x < t < y$, niin

$$\frac{f(t) - f(x)}{t - x} < \frac{f(y) - f(t)}{y - t} \Leftrightarrow \frac{t^2 - x^2}{t - x} < \frac{y^2 - t^2}{y - t} \Leftrightarrow x < y,$$

ja jos $0 < x < t < y$, niin

$$\frac{g(t) - g(x)}{t - x} < \frac{g(y) - g(t)}{y - t} \Leftrightarrow \frac{t^{-1} - x^{-1}}{t - x} < \frac{y^{-1} - t^{-1}}{y - t} \Leftrightarrow x < y.$$

Esim. 5 Funktio $h(x) = \sqrt{x}$ on aidosti konkaavi, sillä jos $0 \leq x < t < y$, niin

$$\frac{h(t) - h(x)}{t - x} > \frac{h(y) - h(t)}{y - t} \Leftrightarrow \sqrt{x} < \sqrt{y}.$$

Eräitä konveksien funktioiden yleisiä ominaisuuksia voidaan todistaa lauseiden 3.1–3.3 avulla.

Lause 3.8 ([28], s. 18, teht. 5) Rajoitettu konveksi funktio $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on vakio.

Todistus Olkoot $u, v \in \mathbb{R}$ ja $u < v$. Tehdään vastaoletus $f(u) \neq f(v)$. Voimme olettaa, että $f(u) < f(v)$. Tapaus $f(u) > f(v)$ käsitellään samalla tavalla. Määritellään funktio

$$g(x) = f(v) + \frac{f(v) - f(u)}{v - u}(x - v).$$

Jos $x > v$, niin

$$f(x) - g(x) = \left(\frac{f(x) - f(v)}{x - v} - \frac{f(v) - f(u)}{v - u} \right)(x - v) \geq 0$$

lauseen 3.3 perusteella. Siis $f(x) \geq g(x)$, kun $x > v$. Kun $x \to \infty$, niin $g(x) \to \infty$, joten myös $f(x) \to \infty$, eli f ei ole rajoitettu. Vastaoletus $f(u) \neq f(v)$ siis johtaa ristiriitaan, joten $f(u) = f(v)$ kaikilla $u, v \in \mathbb{R}$.

Tutkimme seuraavassa, miten konveksisuus ja konkaavisuus säilyvät funktioita yhdistettäessä. Oletamme aluksi, että f on välillä I määritelty konveksi funktio. Jos g on joukossa $f(I)$ määritelty kasvava ja konveksi funktio, niin

$$\begin{aligned}
(g \circ f)(\lambda x + (1 - \lambda)y) &= g\Big(f(\lambda x + (1 - \lambda y))\Big) \\
&\leq g\Big(\lambda f(x) + (1 - \lambda)y\Big) \\
&\leq \lambda g\Big(f(x)\Big) + (1 - \lambda)g\Big(f(x)\Big),
\end{aligned}$$

joten $g \circ f$ on konveksi.

Jos g on vähenevä ja konkaavi funktio, niin

$$\begin{aligned}(g \circ f)(\lambda x + (1-\lambda)y) &= g\Big(f(\lambda x + (1-\lambda y))\Big) \\ &\geq g\Big(\lambda f(x) + (1-\lambda)y\Big) \\ &\geq \lambda g\Big(f(x)\Big) + (1-\lambda)g\Big(f(x)\Big),\end{aligned}$$

joten $g \circ f$ on konkaavi.

Olkoon f nyt välillä I määritelty konkaavi funktio. Jos g on joukossa $f(I)$ määritelty kasvava ja konkaavi funktio, niin

$$\begin{aligned}(g \circ f)(\lambda x + (1-\lambda)y) &= g\Big(f(\lambda x + (1-\lambda y))\Big) \\ &\geq g\Big(\lambda f(x) + (1-\lambda)y\Big) \\ &\geq \lambda g\Big(f(x)\Big) + (1-\lambda)g\Big(f(x)\Big),\end{aligned}$$

joten $g \circ f$ on konkaavi.

Jos g on vähenevä ja konveksi funktio, niin

$$\begin{aligned}(g \circ f)(\lambda x + (1-\lambda)y) &= g\Big(f(\lambda x + (1-\lambda y))\Big) \\ &\leq g\Big(\lambda f(x) + (1-\lambda)y\Big) \\ &\leq \lambda g\Big(f(x)\Big) + (1-\lambda)g\Big(f(x)\Big),\end{aligned}$$

joten $g \circ f$ on konveksi.

Kokoamme tulokset lauseeksi.

Lause 3.9 Oletetaan, että f on välillä I ja g on joukossa $f(I)$ määritelty funktio.

i) Jos f on konveksi ja g on kasvava sekä konveksi, niin $g \circ f$ on konveksi.

ii) Jos f on konveksi ja g on vähenevä sekä konkaavi, niin $g \circ f$ on konkaavi.

iii) Jos f on konkaavi ja g on kasvava sekä konkaavi, niin $g \circ f$ on konkaavi.

iv) Jos f on konkaavi ja g on vähenevä sekä konveksi, niin $g \circ f$ on konveksi.

Esim. 6 Funktio $g(x) = x^{-1}\,(x > 0)$ on vähenevä ja konveksi, joten jos f on ei-negatiivinen konkaavi funktio, niin $(g \circ f)(x) = f(x)^{-1}$ on konveksi. Funktio $h(x) = \sqrt{x}$ on kasvava ja konkaavi, joten jos f on ei-negatiivinen konkaavi funktio, niin $(h \circ f)(x) = \sqrt{f(x)}$ on konkaavi.

3.2 Konveksisuus ja jatkuvuus

Suljetulla välillä määritelty konveksi funktio voi olla jatkuva tai epäjatkuva. Esimerkiksi funktio

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{kun } x = 0, \\ x, & \text{kun } 0 < x \leq 1, \end{cases}$$

on konveksi mutta ei jatkuva. Sen sijaan avoimella välillä määritelty konveksi funktio on aina jatkuva.

Lause 3.10 Avoimella välillä määritelty konveksi funktio on jatkuva.

Todistus Olkoon $]a{,}b[$ konveksin funktion f määrittelyväli ja $t \in]a{,}b[$. Osoitamme, että f on jatkuva pisteessä t. Olkoot $c, d, x, y \in]a{,}b[$ siten, että $c < x < t < y < d$. Lauseita 3.2 ja 3.3 soveltaen saadaan kaksoisepäyhtälö

$$\frac{f(t) - f(c)}{t - c} \leq \frac{f(t) - f(x)}{t - x} \leq \frac{f(d) - f(t)}{d - t}.$$

Ensimmäinen ja kolmas lauseke ovat x:stä riippumattomia, joten merkitsemme ne vakioiksi m ja m'. Siis

$$m \leq \frac{f(t) - f(x)}{t - x} \leq m',$$

mistä seuraa

$$m(t - x) \leq f(t) - f(x) \leq m'(t - x).$$

Kun $x \to t-$, niin $t - x \to 0$, joten $f(x) \to f(t)$. Siis,

$$\lim_{x \to t-} f(x) = f(t). \tag{1}$$

Lauseiden 2.1 ja 2.3 avulla saatavasta kaksoisepäyhtälöstä

$$\frac{f(t) - f(c)}{t - c} \leq \frac{f(y) - f(t)}{y - t} \leq \frac{f(d) - f(t)}{d - t}$$

seuraa samalla tavalla

$$\lim_{y \to t+} f(y) = f(t), \tag{2}$$

joten f on jatkuva pisteessä t.

Jatkuvuus on siis välttämätön ehto avoimella välillä määritellyn funktion konveksisuudelle. Esitämme riittävän ehdon seuraavassa lauseessa, joka on harjoitustehtävänä Rudinin kirjassa [25, s. 73, teht. 3].

Lause 3.11 Jos funktio $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ on jatkuva ja toteuttaa epäyhtälön

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2} \tag{3}$$

kaikilla $x,y \in]a,b[$, niin f on konveksi.

Todistus (Vrt. [28, s. 7]) Olkoot $x,y \in]a,b[$,

$$S_n = \left\{ \frac{k}{2^n} \,\middle|\, n \in \mathbb{Z}_+,\ k \in \{0, 1, \ldots, 2^n\} \right\} \quad \text{ja} \quad S = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}_+} S_n.$$

Todistamme aluksi induktiolla, että jos $p \in S_n$, niin

$$f\big(p\,x + (1-p)y\big) \leq p\,f(x) + (1-p)\,f(y).$$

Väite on tosi, kun $p \in S_1$. Oletetaan nyt että se on tosi, kun $p \in S_n$, ja olkoon $q \in S_{n+1}$. Luvun q osoittaja h voidaan esittää summana $h = u + v$, missä $u, v \in \{0, 1, 2, 3, \ldots 2^n\}$, joten

$$qx + (1-q)y = \frac{u+v}{2^{n+1}}x + \left(1 - \frac{u+v}{2^{n+1}}\right)y =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{u}{2^n}x + \left(1 - \frac{u}{2^n}\right)y\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{v}{2^n}x + \left(1 - \frac{v}{2^n}\right)y\right).$$

Niinpä (3):n ja induktio-oletuksen mukaan

$$2f\big(qx + (1-q)y\big) \leq f\left(\frac{u}{2^n}x + \left(1 - \frac{u}{2^n}\right)y\right) + f\left(\frac{v}{2^n}x + \left(1 - \frac{v}{2^n}\right)y\right) \leq$$

$$\frac{u+v}{2^n}f(x) + \left(2 - \frac{u+v}{2^n}\right)f(y) = \frac{h}{2^n}f(x) + \left(2 - \frac{h}{2^n}\right)f(y),$$

joten

$$f\big(qx + (1-q)y\big) \leq \frac{h}{2^{n+1}}f(x) + \left(1 - \frac{h}{2^{n+1}}\right)f(y) = qf(x) + (1-q)f(y).$$

Induktioperiaatteen mukaan

$$f\big(p\,x + (1-p)y\big) \leq p\,f(x) + (1-p)\,f(y)$$

kaikilla $p \in S_n$ ja $n \in \mathbb{Z}_+$, siis kaikilla $p \in S$. Koska S on välin $[0,1]$ tiheä osajoukko ja koska f on jatkuva, on epäyhtälö

$$f\big(\lambda x + (1-\lambda)y\big) \leq \lambda\,f(x) + (1-\lambda)\,f(y)$$

voimassa kaikilla $\lambda \in]0,1[$, joten f on konveksi.

Rudin toteaa mainitun tehtävän yhteydessä, että funktion jatkuvuus on ehdon (3) lisäksi välttämätöntä funktion konveksisuudelle. Mutta onko olemassa ehdon (3) toteuttavaa epäjatkuvaa funktiota? Näytämme, että on.

Lause 3.12 On olemassa epäjatkuva funktio f, joka toteuttaa yhtälön

$$2f(x) \;=\; f(x+y) \;+\; f(x-y)$$

kaikilla $x, y \in \mathbb{R}$.

Todistus Reaalilukujen joukko $\mathbb{R}$ voidaan ajatella vektoriavaruudeksi, jonka skalaarikunta on $\mathbb{Q}$. Olkoon $\mathcal{H} = \{e_\imath \,|\, \imath \in \mathcal{I}\}$ tämän avaruuden kanta. Mielivaltaisesti valittu $x \in \mathbb{R}$ voidaan esittää yksikäsitteisesti lineaarikombinaationa

$$x \;=\; \sum_{\imath \in \mathcal{I}} \lambda_\imath\, e_\imath, \tag{4}$$

missä kertoimet $\lambda_\imath$ ovat rationaalilukuja, ja enintään äärellinen määrä niistä on nollasta eroavia. Kiinnitetään yksi kantavektori $e_{\imath_0} \in \mathcal{H}$, ja asetetaan funktion f arvoksi kullekin reaaliluvulle x esityksessä (4) oleva $\lambda_{\imath_0}$. Siis, jos

$$x \;=\; \lambda_{\imath_0} e_{\imath_0} \;+\; \sum_{\imath \neq \imath_0} \lambda_\imath e_\imath \quad \text{ja} \quad y \;=\; \mu_{\imath_0} e_{\imath_0} \;+\; \sum_{\imath \neq \imath_0} \mu_\imath e_\imath$$

ovat mielivaltaisesti valittuja reaalilukuja, niin $f(x) = \lambda_{\imath_0}$ ja $f(y) = \mu_{\imath_0}$. Nyt

$$2f(x) = 2\lambda_{\imath_0}, \quad f(x+y) = \lambda_{\imath_0} + \mu_{\imath_0} \quad \text{ja} \quad f(x-y) = \lambda_{\imath_0} - \mu_{\imath_0},$$

mistä seuraa

$$2f(x) \;=\; 2\lambda_{\imath_0} \;=\; \lambda_{\imath_0} + \mu_{\imath_0} \;+\; \lambda_{\imath_0} - \mu_{\imath_0} \;=\; f(x+y) \;+\; f(x-y).$$

Funktio ei ole jatkuva, sillä se ei ole vakio ($f(0) = 0$ ja $f(e_{\imath_0}) = 1$), ja sen arvojoukko sisältyy rationaalilukujen joukkoon. Muuttujavaihdoilla

$$x + y \;=\; t \quad \text{ja} \quad x - y \;=\; s$$

näemme, että f toteuttaa lauseen 3.11 ehdon (3).

Huomautus Kanta $\mathcal{H}$ nähdään ylinumeroituvaksi epäsuorasti. Jos nimittäin se olisi numeroituva, niin tulojoukon $\mathbb{Q} \times \mathcal{H}$ äärellisten osajoukkojen muodostama joukko $\mathcal{P}$ olisi myös numeroituva. Luvun $x \in \mathbb{R}$ esitys kannassa $\mathcal{H}$ määrää bijektion

$$\jmath : \mathcal{P} \;\to\; \mathbb{R},$$

joten myös $\mathbb{R}$ olisi numeroituva.

Lause 3.13 Jos f ja g ovat välillä I määriteltyjä konvekseja funktioita ja $a, b \geq 0$, niin funktio $af + bg$ on konveksi.

Todistus Olkoot $x, y \in I$ sekä $\lambda \in]0,1[$ mielivaltaisesti valittuja. Tällöin, koska f ja g ovat konvekseja ja $a, b \geq 0$, on

$$(af + bg)(\lambda x + (1 - \lambda)y) = af(\lambda x + (1 - \lambda)y) + bf(\lambda x + (1 - \lambda)y)$$

$$\leq a\lambda f(x) + a(1 - \lambda)f(y) + b\lambda g(x) + b(1 - \lambda)g(y)$$

$$= \lambda(af + bg)(x) + (1 - \lambda)(af + bg)(y),$$

joten $af + bg$ on konveksi.

Avoimella välillä I määriteltyjen jatkuvien reaalifunktioiden joukko on vektoriavaruus, jota merkitään $C(I)$. Välillä I määriteltyjen konveksien funktioiden joukko on $C(I)$:n osajoukko, mutta ei aliavaruus, sillä $-f$ ei yleensä ole konveksi vaikka f on. Lauseen 3.13 mukaan kuitenkin kaikki konveksien funktioiden lineaarikombinaatiot, joiden kertoimet ovat ei-negatiivisia, ovat konvekseja. Myös nollafunktio on konveksi, joten konveksien funktioiden joukko muodostaa origohuippuisen kartion vektoriavaruudessa $C(I)$.

3.3 Konveksisuus ja derivoituvuus

Avoimella välillä määritelty konveksi funktio on jatkuva, joten herää kysymys onko se myös derivoituva. Esimerkki $f(x) = |x|$ osoittaa, että näin ei aina ole. Tämä funktio on kuitenkin kaikkialla sekä vasemmalta että oikealta derivoituva, mikä osoittautuu avoimella välillä määriteltyjen konveksien funktioiden yleiseksi ominaisuudeksi. Käsittelemme asiaa lauseissa 3.14–3.17 kirjan [4] mukaan.

Lause 3.14 Olkoon f avoimella välillä I määritelty konveksi funktio. Tällöin $f'_-(x)$ ja $f'_+(x)$ ovat olemassa kaikilla $x \in I$. Jos lisäksi $a,b \in I$, $a < b$ ja $x \in]a,b[$, niin

$$f'_+(a) \leq f'_-(x) \leq f'_+(x) \leq f'_-(b). \tag{1}$$

Todistus Olkoon $x \in I$. Olkoon edelleen (α_n) kohti lukua x suppeneva kasvava jono välin $]a,x[$ alkioita, ja (β_n) niin'ikään kohti lukua x suppeneva vähenevä jono välin $]x,b[$ alkioita. Tarkastellaan erotusosamääristä

$$\gamma_n = \frac{f(\alpha_n) - f(x)}{\alpha_n - x} \quad \text{ja} \quad \delta_n = \frac{f(\beta_n) - f(x)}{\beta_n - x}$$

muodostuvia jonoja (γ_n) ja (δ_n). Lauseen 3.7 mukaan jono (γ_n) on kasvava ja jono (δ_n) vähenevä. Edelleen $\gamma_n \leq \delta_1$ ja $\delta_n \geq \gamma_1$ kaikilla n:n arvoilla.

Täten jonot (γ_n) ja (δ_n) suppenevat monotonisen jonon suppenemislauseen perusteella. Koska (α_n) ja (β_n) ovat mielivaltaisia, on

$$\lim_{n\to\infty} \gamma_n = f'_-(x) \quad \text{ja} \quad \lim_{n\to\infty} \delta_n = f'_+(x).$$

Täten f on vasemmalta ja oikealta derivoituva kaikissa pisteissä $x \in I$. Lauseen 3.7 mukaan $\gamma_n \le \delta_m$ kaikilla $n, m \in \mathbb{Z}_+$, joten epäyhtälön säilymisperiaatteen perusteella $f'_-(x) \le f'_+(x)$.

Edellä sanotusta seuraa, että toispuoliset derivaatat ovat olemassa myös pisteissä a ja b. Olkoon (a_n) kohti lukua a suppeneva vähenevä jono välin $]a,x[$ alkioita. On olemassa n_0 siten, että jos $n > n_0$, niin $a < a_n < \alpha_1 < x$. Tällöin myös

$$\varepsilon_n = \frac{f(a) - f(a_n)}{a - a_n} \le \frac{f(a_n) - f(\alpha_1)}{a_n - \alpha_1} \le \frac{f(x) - f(\alpha_n)}{x - \alpha_n} \le f'_-(x).$$

Jonon (ε_n) raja-arvo on $f'_+(a)$, joten epäyhtälö $f'_+(a) \le f'_-(x)$ toteutuu. Samalla tavalla todistetaan, että $f'_+(x) \le f'_-(b)$. Siis (1) on voimassa.

Lause 3.15 Avoimella välillä määritelty konveksi funktio on derivoituva välin melkein jokaisessa pisteessä.

Todistus Olkoon f välillä avoimella välillä I määritelty konveksi funktio ja $S = \{x \in I \,|\, f'(x) \text{ ei olemassa}\}$. Edellisen lauseen mukaan f on vasemmalta ja oikealta derivoituva kaikilla $x \in I$ ja $f'_-(x) \le f'_+(x)$. Jos $x \in S$, on siis $f'_-(x) < f'_+(x)$, ja on olemassa rationaaliluku $q_x \in]f'_-(x), f'_+(x)[$. Jos $x, y \in S$ ja $x < y$, niin epäyhtälöketjua (1) soveltaen saamme

$$f'_-(x) < f'_+(x) \le f'_-(y) < f'_+(y),$$

mistä seuraa $q_x < q_y$. Täten funktio $S \ni x \longmapsto q_x$ on injektio. Koska tämän funktion arvojoukko on numeroituva, on myös sen määrittelyjoukko S numeroituva ja siten nollamittainen.

Olkoon f avoimella välillä I konveksi funktio. Lauseiden 3.7 ja 3.12 mukaan kaikilla $x, c, y \in I$, $x < c < y$, on voimassa

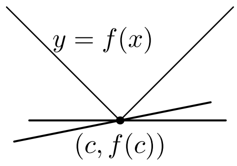
$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \le f'_-(c) \le f'_+(c) \le \frac{f(y) - f(c)}{y - c}.$$

Tästä epäyhtälöketjusta saadaan välittömästi seuraava lause.

Lause 3.16 Olkoon f avoimella välillä I määritelty konveksi funktio ja $c \in I$. Tällöin kaikilla $m \in [f'_-(c), f'_+(c)]$ ja kaikilla $x \in I$ on voimassa

$$f(x) \ge f(c) + m(x - c).$$

Siis käyrän $y = f(x)$ jokaisen pisteen $(c, f(c))$, $c \in I$, kautta kulkee suora $y = f(c) + m(x - c)$, joka ei ylitä käyrää. Tällaista suoraa kutsutaan f:n *tukisuoraksi* (*supporting line*). Jos $f'_-(c) < f'_+(c)$, niin $(c,f(c))$:n kautta kulkevia tukisuoria on useita. Jos f on derivoituva pisteessä c, niin $m = f'(c)$, ja tukisuora on käyrän tangentti.



Derivoituvan funktion konveksisuudelle saamme helpohkon kriteerin.

Lause 3.17 Olkoon $f : I \to \mathbb{R}$ derivoituva. Jos ja vain jos f' on (aidosti) kasvava, niin f on (aidosti) konveksi.

Todistus Olkoot x, t ja y ehdon $x < t < y$ toteuttavia I:n lukuja ja f' (aidosti) kasvava. Väliarvolauseen mukaan on olemassa $\xi_1 \in]x, t[$ ja $\xi_2 \in]t, y[$ siten, että

$$\frac{f(t) - f(x)}{t - x} = f'(\xi_1) \quad \text{ja} \quad \frac{f(y) - f(t)}{y - t} = f'(\xi_2).$$

Koska $\xi_1 < \xi_2$ ja f' on kasvava, on $f'(\xi_1) \le f'(\xi_2)$, joten

$$\frac{f(t) - f(x)}{t - x} = f'(\xi_1) \le f'(\xi_2) = \frac{f(y) - f(t)}{y - t},$$

ja on f konveksi lauseen 3.3 perusteella. Jos f' on aidosti kasvava, niin epäyhtälöstä $\xi_1 < \xi_2$ seuraa $f'(\xi_1) < f'(\xi_2)$, joten

$$\frac{f(t) - f(x)}{t - x} = f'(\xi_1) < f'(\xi_2) = \frac{f(y) - f(t)}{y - t},$$

ja f on aidosti konveksi lauseen 3.6 perusteella.

Olkoon nyt $f : I \to \mathbb{R}$ konveksi ja derivoituva, sekä x, t, c, s ja y välin I lukuja, joille $x < t < c < s < y$. Tällöin lauseiden 3.1 - 3.3 perusteella

$$\frac{f(t) - f(x)}{t - x} \le \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \le \frac{f(y) - f(c)}{y - c} \le \frac{f(s) - f(y)}{s - y},$$

mistä epäyhtälön säilymisperiaatteen mukaan seuraa $f'(x) \le f'(y)$. Täten f' on kasvava. Samalla tavalla todistetaan (lauseiden 3.4 - 3.6 avulla), että jos f on aidosti konveksi, niin f' on aidosti kasvava.

Seuraus 3.18 Olkoon $f : I \to \mathbb{R}$ derivoituva. Jos ja vain jos f' on (aidosti) vähenevä, niin f on (aidosti) konkaavi.

Seuraus 3.19 Jos f on kahdesti derivoituva ja jos f'' on ei-negatiivinen, niin f on konveksi. Jos f'' on ei-negatiivinen ja sillä on vain erillisiä nollakohtia, niin f on aidosti konveksi. Jos f'' on ei-positiivinen ja sillä on vain erillisiä nollakohtia, niin f on aidosti konkaavi.

Esim. 3 Funktiot $f(x) = \mathrm{e}^x$ ja $g(x) = -\ln x$ ovat aidosti konvekseja, sillä $f''(x) = \mathrm{e}^x > 0$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$ ja $g''(x) = x^{-2} > 0$ kaikilla $x \in \mathbb{R}_+$.

Esim. 4 Funktiot $f_n(x) = x^{2n}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, ovat aidosti konvekseja. Funktiot $g_n(x) = x^{2n+1}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, ovat aidosti konvekseja välillä $[0, \infty[$ ja aidosti konkaaveja välillä $]-\infty, 0]$.

Esim. 5 Funktio

$$f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x \ln x$$

on aidosti konveksi, sillä $f''(x) = x^{-1} > 0$.

Esim. 6 Funktio

$$f(x) = \frac{\ln x}{1 + \ln x}$$

on aidosti konkaavi välillä $]\frac{1}{\mathrm{e}}, \infty[$, sillä

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2}\Big((1 + \ln x)^{-2} + 2(1 + \ln x)^{-3}\Big) < 0$$

kun $x > \frac{1}{\mathrm{e}}$.

3.4 Jensenin epäyhtälö

Konveksisuuden määritelmä voidaan kirjoittaa seuraavasti:

Funktio $f : I \to \mathbb{R}$ on konveksi, jos

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \le \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2)$$

kaikilla $x_1, x_2 \in I$ ja kaikilla $\lambda_1, \lambda_2 \in]0, 1[$, joille $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$.

Jensenin epäyhtälö yleistää määritelmässä olevan epäyhtälön useammalle λ:n ja x:n arvolle.

Lause 3.20 Olkoon $f : I \to \mathbb{R}$ konveksi funktio ja olkoot $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ positiivisia lukuja, joiden summa on 1. Tällöin kaikilla $x_1, x_2, \ldots, x_n \in I$

$$f(\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n) \leq \lambda_1 f(x_1) + \ldots + \lambda_n f(x_n). \tag{1}$$

Todistus (Vrt. [26, s. 87 - 89]) Konveksisuuden määritelmän mukaan väite on tosi kun $n = 2$. Jos se on tosi $(n-1)$:lle luvulle, niin, koska

$$\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_{n-1} x_{n-1} + \lambda_n x_n =$$

$$(1 - \lambda_n)\left(\frac{\lambda_1}{1-\lambda_n} x_1 + \ldots + \frac{\lambda_{n-1}}{1-\lambda_n} x_{n-1}\right) + \lambda_n x_n,$$

on

$$\begin{aligned}
& f(\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_{n-1} x_{n-1} + \lambda_n x_n) \\
\leq\ & (1-\lambda_n) f\left(\frac{\lambda_1}{1-\lambda_n} x_1 + \ldots + \frac{\lambda_{n-1}}{1-\lambda_n} x_{n-1}\right) + \lambda_n f(x_n) \\
\leq\ & (1-\lambda_n)\left(\frac{\lambda_1}{1-\lambda_n} f(x_1) + \ldots + \frac{\lambda_{n-1}}{1-\lambda_n} f(x_{n-1})\right) + \lambda_n f(x_n) \\
=\ & \lambda_1 f(x_1) + \ldots + \lambda_{n-1} f(x_{n-1}) + \lambda_n f(x_n).
\end{aligned}$$

Valitsemalla kaikki λ:t yhtä suuriksi saamme monessa yhteydessä käyttökelpoisen seurauslauseen.

Seuraus 3.21 Jos $f : I \to \mathbb{R}$ on konveksi ja $x_1, x_2, \ldots, x_n \in I$, niin

$$f\left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n)}{n}. \tag{2}$$

Milloin epäyhtälöissä (1) ja (2) vallitsee yhtäsuuruus? Saamme yksinkertaisen välttämättömän ja riittävän ehdon, mikäli konveksisuus on aito.

Lause 3.22 Olkoon $f : I \to \mathbb{R}$ aidosti konveksi, $x_1, \ldots, x_n \in I$ ja $\lambda_1 \ldots, \lambda_n$ positiivisia lukuja, joiden summa on 1. Tällöin

$$f(\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n) = \lambda_1 f(x_1) + \ldots + \lambda_n f(x_n) \tag{3}$$

jos ja vain jos $x_1 = \ldots = x_n$.

Todistus (Vrt. [26, s. 89 - 90]) Selvästi (3) on voimassa, jos $x_1 = \ldots = x_n$. Oletetaan nyt, että (3) on voimassa, ja tehdään vastaoletus, että luvut $x_1, \ldots, x_n$ eivät ole kaikki yhtä suuria. Voimme rajoituksetta olettaa, että ne ovat pienimmästä alkaen suuruusjärjestyksessä. Tällöin x_1 on niistä pienin. Olkoon x_k ensimmäinen siitä poikkeava luku. Siis

$$x_1 = \ldots = x_{k-1} < x_k \leq \ldots \leq x_n.$$

Merkitään vielä $\mu = \lambda_1 + \ldots + \lambda_{k-1}$, jolloin $\lambda_k + \ldots + \lambda_n = 1 - \mu$. Koska f on aidosti konveksi ja

$$x_1 < \frac{\lambda_k}{1-\mu} x_k + \ldots + \frac{\lambda_n}{1-\mu} x_n,$$

saamme

$$\begin{aligned}
f\Big(\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n\Big) &= f\left(\mu x_1 + (1-\mu)\left(\frac{\lambda_k}{1-\mu} x_k + \ldots + \frac{\lambda_n}{1-\mu} x_n\right)\right) \\
&< \mu f(x_1) + (1-\mu) f\left(\frac{\lambda_k}{1-\mu} x_k + \ldots + \frac{\lambda_n}{1-\mu} x_n\right) \\
&\leq (\lambda_1 + \ldots + \lambda_{k-1}) f(x_1) + \lambda_k f(x_k) + \ldots + \lambda_n f(x_n) \\
&= \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \ldots + \lambda_n f(x_n),
\end{aligned}$$

mikä on ristiriidassa oletuksen (3) kanssa. Siis ei ole ensimmäistäkään lukua x_k, joka poikkeaisi pienimmästä luvusta x_1, joten $x_1 = \ldots = x_n$.

Yleisessä tapauksessa on helppo osoittaa, että (3) on voimassa, jos ja vain jos $x_1 = \ldots = x_n$ tai nämä luvut kuuluvat sellaiseen väliin, jossa f on asteluvultaan enintään 1 oleva polynomi.

Seuraavassa on vielä yksi käyttökelpoinen muoto (lauseen 3.20 välitön seuraus) Jensenin epäyhtälöstä.

Lause 3.23 Jos $w_1, \ldots, w_n > 0$ ja f on välillä I määritelty konveksi funktio, niin

$$f\left(\frac{w_1 x_1 + w_2 x_2 + \ldots + w_n x_n}{w_1 + w_2 + \ldots + w_n}\right) \leq \frac{w_1 f(x_1) + w_2 f(x_2) + \ldots + w_n f(x_2)}{w_1 + w_2 + \ldots + w_n}$$

kaikilla $x_1, x_2, \ldots, x_n \in I$.

Huomautus Konkaaveille funktioille saadaan lauseita 3.20 ja 3.23 vastaavat tulokset kääntämällä niissä erisuuruusmerkit vastakkaisiin suuntiin. Lauseen 3.22 yhtäsuuruusehto on voimassa myös niille.

Käsittelemme seuraavissa esimerkeissä eräitä Jensenin epäyhtälön sovelluksia.

Esim 1 Funktio $f(x) = x^2$ on aidosti konveksi, joten seurauslausetta 3.21 soveltaen saadaan kaikilla $x_1, x_2, \ldots x_n \in \mathbb{R}$ voimassa oleva epäyhtälö

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^2 \ \leq \ n(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2).$$

Yhtäsuuruus vallitsee, jos ja vain jos $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$. Näin saadaan uusi todistus $\mathcal{AC}$-epäyhtälölle (lause 2.1).

Esim. 2 (Vrt. [26, teht. 6.2], jossa $n = 3$) Jos $u_1 + \ldots + u_n = 1$ ja luvut $u_\imath$ ovat positiivisia, niin

$$\left(1 + \frac{1}{u_1}\right)\left(1 + \frac{1}{u_2}\right) \ldots \left(1 + \frac{1}{u_n}\right) \ \geq \ (1+n)^n.$$

Yhtäsuuruus on voimassa, jos ja vain jos $u_1 = u_2 = \ldots = u_n = \frac{1}{n}$.

Väitteen todistamiseksi tutkitaan funktiota $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right).$$

Se on aidosti konveksi, sillä $f''(x) = x^{-2} - (1+x)^{-2} > 0$. Jensenin epäyhtälön

$$f\left(\frac{u_1 + u_2 + \ldots + u_n}{n}\right) \ \leq \ \frac{f(u_1) + f(u_2) + \ldots + f(u_n)}{n}$$

mukaan

$$\ln\left(1 + \frac{n}{u_1 + \ldots + u_n}\right) \ \leq \ \frac{1}{n}\left(\ln\left(1 + \tfrac{1}{u_1}\right) + \ldots + \ln\left(1 + \tfrac{1}{u_n}\right)\right).$$

Koska $u_1 + \ldots + u_n = 1$, saadaan

$$n \ln(1+n) \ \leq \ \ln\left(\left(1 + \tfrac{1}{u_1}\right) \ldots \left(1 + \tfrac{1}{u_n}\right)\right),$$

mistä väite seuraa. Yhtäsuuruusehto on voimassa, koska f on aidosti konveksi.

Huomautus Jos erityisesti $u_2 + \ldots + u_n = 1$, niin

$$\left(1 + \frac{1}{u_2}\right)\left(1 + \frac{1}{u_3}\right) \ldots \left(1 + \frac{1}{u_n}\right) \ \geq \ n^{n-1}.$$

Tämä epäyhtälö muistuttaa sivulla 5 nähtyä olympiatehtävän epäyhtälöä.

Seuraava esimerkki käsitellään eri tavalla kuin lähteessä [5, s. 121].

Esim. 3 Jos $u_1, \ldots, u_n > 0$, niin

$$1 + \sqrt[n]{u_1 u_2 \ldots u_n} \leq \sqrt[n]{(1+u_1)(1+u_2)\ldots(1+u_n)}.$$

Yhtäsuuruus on voimassa, jos ja vain jos $u_1 = u_2 = \ldots = u_n$.

Väitteen todistamiseksi tutkitaan funktiota $f(x) = \ln(1 + \mathrm{e}^x)$. Se on aidosti konveksi, sillä

$$f''(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{(1+\mathrm{e}^x)^2} > 0$$

kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Soveltamalla Jensenin epäyhtälöä lukujen $u_\imath$ logaritmeihin saadaan

$$f\left(\frac{\ln u_1 + \ln u_2 + \ldots + \ln u_n}{n}\right) \leq \frac{f(\ln u_1) + f(\ln u_2) + \ldots + f(\ln u_n)}{n},$$

mikä sieventyy muotoon

$$\ln\left(1 + \mathrm{e}^{\frac{1}{n}\ln(u_1 \ldots u_n)}\right) \leq \frac{1}{n}\ln\left(\left(1+\mathrm{e}^{\ln u_1}\right)\ldots\left(1+\mathrm{e}^{\ln u_n}\right)\right)$$

ja edelleen

$$\ln(1 + \sqrt[n]{u_1 \ldots u_n}) \leq \ln\left(\sqrt[n]{(1+u_1)\ldots(1+u_n)}\right),$$

mistä väite seuraa. Yhtäsuuruusehto on voimassa, koska f on aidosti konveksi.

Seuraavassa esimerkissä todistetaan useita epäyhtälöitä saman funktion avulla Jensenin epäyhtälöä soveltaen.

Esim. 4 Jos $u_1, u_2, \ldots, u_n \geq 1$, niin

$$\frac{u_1}{1+u_1} + \frac{u_2}{1+u_2} + \ldots + \frac{u_n}{1+u_n} \leq \frac{n\mathcal{G}_u}{1+\mathcal{G}_u}, \tag{4}$$

ja

$$\frac{1}{1+u_1} + \frac{1}{1+u_2} + \ldots + \frac{1}{1+u_n} \geq \frac{n}{1+\mathcal{G}_u}, \tag{5}$$

missä $\mathcal{G}_u$ on näiden lukujen geometrinen keskiarvo. Yhtäsuuruudet ovat voimassa, jos ja vain jos $u_1 = \ldots = u_n$.

Jos $0 < v_1, v_2, \ldots, v_n \leq 1$, niin

$$\frac{v_1}{1+v_1} + \frac{v_2}{1+v_2} + \ldots + \frac{v_n}{1+v_n} \geq \frac{n\mathcal{G}_v}{1+\mathcal{G}_v}, \tag{6}$$

ja

$$\frac{1}{1+v_1} + \frac{1}{1+v_2} + \ldots + \frac{1}{1+v_n} \leq \frac{n}{1+\mathcal{G}_v}, \tag{7}$$

missä $\mathcal{G}_v$ on näiden lukujen geometrinen keskiarvo. Yhtäsuuruudet ovat voimassa, jos ja vain jos $v_1 = \ldots = v_n$.

Epäyhtälöiden (4)–(7) todistamiseksi tutkitaan funktiota

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}.$$

Se on aidosti konveksi välillä $]-\infty, 0]$ ja aidosti konkaavi välillä $[0, \infty[$, sillä sen toinen derivaatta

$$f''(x) = \frac{\mathrm{e}^x(1-\mathrm{e}^x)}{(1+\mathrm{e}^x)^3}$$

on positiivinen välillä $]-\infty, 0[$ ja negatiivinen välillä $]0, \infty[$. Soveltamalla Jensenin epäyhtälöä lukujen $u_1, \ldots, u_n$ logaritmeihin saadaan

$$\frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{n}(\ln u_1 + \ldots + \ln u_n)}}{1+\mathrm{e}^{\frac{1}{n}(\ln u_1 + \ldots + \ln u_n)}} \geq \frac{1}{n}\left(\frac{\mathrm{e}^{\ln u_1}}{1+\mathrm{e}^{\ln u_1}} + \ldots + \frac{\mathrm{e}^{\ln u_n}}{1+\mathrm{e}^{\ln u_n}}\right),$$

mistä (4) yhtäsuuruusehtoineen seuraa. Jos $0 < v_1, v_2, \ldots, v_n \leq 1$, saadaan samalla tavalla epäyhtälö (6). Soveltamalla epäyhtälöä (6) lukujen $u_1, \ldots, u_n$ käänteislukuihin saadaan epäyhtälö (5). Soveltamalla epäyhtälöä (4) lukujen $v_1, \ldots, v_n$ käänteislukuihin saadaan epäyhtälö (7). Yhtäsuuruusehtojen voimassaolo seuraa epäyhtälöiden (4) ja (6) yhtäsuuruusehdoista.

Esim. 5 [26, teht. 9.6] Olkoot $p > 1$ ja $u_1, \ldots, u_n$, $v_1, \ldots, v_n > 0$. Tällöin pätee *Minkowskin epäyhtälö*

$$\left(\sum_{\imath=1}^{n}(u_\imath + v_\imath)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{\imath=1}^{n} u_\imath^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{\imath=1}^{n} v_\imath^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Yhtäsuuruus on voimassa, jos ja vain jos on olemassa positiivinen vakio k siten, että $v_\imath = k u_\imath$ kaikilla $\imath \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Väite todistuu funktion

$$f :]0, \infty[\to \mathbb{R}, \quad f(x) = \left(1 + x^{\frac{1}{p}}\right)^p$$

avulla. Se on aidosti konkaavi, sillä

$$f''(x) = \tfrac{1-p}{p}\, x^{-2+\frac{1}{p}} \left(1 + x^{\frac{1}{p}}\right)^{p-2} < 0$$

kaikilla $x \in]0,\infty[$ ja $p \in]1,\infty[$. Lausetta 3.23 vastaavan konkaavia funktiota käsittelevän lauseen mukaan

$$\left((w_1+\ldots+w_n)^{\frac{1}{p}} + (w_1x_1+\ldots+w_nx_n)^{\frac{1}{p}}\right)^p \geq w_1(1+x_1^{\frac{1}{p}})^p+\ldots+w_n(1+x_n^{\frac{1}{p}})^p$$

kaikilla $x_1,\ldots,x_n \in \mathbb{R}_+$ ja kaikilla $w_1,\ldots,w_n \in \mathbb{R}_+$. Olkoot $u_1,\ldots,u_n$ ja $v_1,\ldots,v_n$ positiivisia reaalilukuja. Sijoittamalla viimeksi saatuun epäyhtälöön

$$w_\imath = u_\imath^p \quad \text{ja} \quad x_\imath = \left(\frac{v_\imath}{u_\imath}\right)^p \quad \text{kaikilla} \quad \imath \in \{1,2,\ldots,n\}$$

saadaan

$$\left((u_1^p+\ldots+u_n^p)^{\frac{1}{p}} + (v_1^p+\ldots+v_n^p)^{\frac{1}{p}}\right)^p \geq (u_1+v_1)^p+\ldots+(u_n+v_n)^p$$

ja edelleen

$$\left(\sum_{\imath=1}^n (u_\imath+v_\imath)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{\imath=1}^n u_\imath^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{\imath=1}^n v_\imath^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Koska f on aidosti konkaavi, on yhtäsuuruus voimassa, jos ja vain jos

$$x_\imath = \left(\frac{v_\imath}{u_\imath}\right)^p = k^p = \text{vakio} \quad \text{kaikilla} \quad \imath \in \{1,2,\ldots,n\}$$

eli jos ja vain jos $v_\imath = ku_\imath$ kaikilla $\imath \in \{1,2,\ldots,n\}$.

Käsittelemme Minkowskin epäyhtälöä perusteellisemmin luvussa 7.6.

Seuraavan esimerkin tehtävä on Leningradin (nykyisin Pietari) matematiikkaolympialaisista vuodelta 1988.

Esim. 6 [19, teht. 53] Olkoot a, b, c, d positiivisia reaalilukuja. Osoitettava, että

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{4}{c}+\frac{16}{d} \geq \frac{64}{a+b+c+d}.$$

Väite todistuu Jensenin epäyhtälön avulla, mutta ratkaisu ei ole aivan suoraviivainen. Funktio $g(t) = 8t^{-1}$, $t > 0$, on aidosti konveksi. Soveltamalla Jensenin epäyhtälöä lukuihin a, b, $\frac{1}{2}c$, $\frac{1}{4}d$ painoilla $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$ saadaan

$$g(\tfrac{1}{8}a + \tfrac{1}{8}b + \tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{1}{2}c + \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{4}d) \leq \tfrac{1}{8}g(a) + \tfrac{1}{8}g(b) + \tfrac{1}{4}g(\tfrac{1}{2}c) + \tfrac{1}{2}g(\tfrac{1}{4}d),$$

mikä sieventyy muotoon

$$\frac{64}{a+b+c+d} \leq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{4}{c} + \frac{16}{d}.$$

Yhtäsuuruus on voimassa, jos ja vain jos $a = b = \frac{1}{2}c = \frac{1}{4}d$. Yhtäsuuruusehto sievenee muotoon $d = 4a$, $c = 2a$, $b = a$.

Seuraava esimerkki juontuu epäonnistuneesta yrityksestä todistaa edellisen esimerkin epäyhtälö $\mathcal{AG}$-epäyhtälön avulla.

Esim. 7 Osoitettava, että jos $a, b, c > 0$, niin

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{8}{c} > \frac{18}{a+b+c}. \tag{8}$$

$\mathcal{AG}$ epäyhtälön avulla saadaan

$$\frac{1}{3}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{8}{c}\right) \geq \sqrt[3]{\frac{8}{abc}} \quad \text{eli} \quad \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{8}{c} \geq \frac{6}{\sqrt[3]{abc}} \tag{9}$$

ja

$$\sqrt[3]{abc} \leq \frac{a+b+c}{3}, \tag{10}$$

joten

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{8}{c} \geq \frac{3}{\sqrt[3]{abc}} \geq \frac{6}{\frac{1}{3}(a+b+c)} = \frac{18}{a+b+c}.$$

Siis

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{8}{c} \geq \frac{18}{a+b+c}.$$

Yhtäsuuruus sulkeutuu pois, sillä se ei voi olla voimassa $\mathcal{AG}$-epäyhtälöissä (9) ja (10) samanaikaisesti.

Edellinen esimerkki herättää kysymyksen, millä vakion α arvolla epäyhtälö

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{8}{c} \geq \frac{\alpha}{a+b+c}$$

on voimassa kaikilla $a, b, c > 0$ siten, että myös yhtäsuuruus on voimassa joillakin muuttujien arvoilla. Tämä ratkaistaan seuraavassa esimerkissä.

Esim. 8 Jos $a, b, c > 0$, niin

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{8}{c} \geq \frac{4(1+\sqrt{2})^2}{a+b+c}. \tag{11}$$

Yhtäsuuruus on voimassa, jos ja vain jos $b = a$ ja $c = 2\sqrt{2}a$.

Epäyhtälö (11) todistuu aidosti konveksin funktion $g(t) = t^{-1}$, $t > 0$, avulla soveltamalla Jensenin epäyhtälöä lukuihin

$$a, \quad b \quad \text{ja} \quad \frac{\sqrt{2}}{4}c \quad \text{painoilla} \quad \lambda, \quad \lambda \quad \text{ja} \quad 1-2\lambda,$$

missä

$$\lambda = \frac{1}{2}(\sqrt{2}-1).$$

Funktion g aidon konveksisuuden takia yhtäsuuruus on voimassa, jos ja vain jos

$$a \;=\; b \;=\; \frac{\sqrt{2}}{4}c,$$

mikä pelkistyy muotoon $b = a$, $c = 2\sqrt{2}a$.

Lähteen [19] mukaan seuraavaa *potenssikeskiarvoepäyhtälöä* tarvitaan toisinaan vaikeammissa kilpailutehtävissä.

Esim. 9 [19, teht. 52] Jos $0 < s < t$, $p_1, \ldots, p_n > 0$, $x_1, \ldots, x_n > 0$ ja $p_1 + \ldots + p_n = 1$, niin

$$\Big(\sum_{k=1}^{n} p_k x_k^s\Big)^{\frac{1}{s}} \;\le\; \Big(\sum_{k=1}^{n} p_k x_k^t\Big)^{\frac{1}{t}}.$$

Väitteen todistamiseksi tutkimme funktiota $g(u) = u^{\frac{t}{s}}$, $u > 0$. Se on aidosti konveksi, koska $t > s > 0$. Soveltamalla Jensenin epäyhtälöä lukuihin $x_1^s, \ldots, x_n^s$ saadaan

$$g(p_1x_1^s + \ldots + p_nx_n^s) \;\le\; p_1 g(x_1^s) + \ldots + p_n g(x_n^s),$$

mikä sievenee muotoon

$$(p_1x_1^s + \ldots + p_nx_n^s)^{\frac{t}{s}} \;\le\; p_1(x_1^s)^{\frac{t}{s}} + \ldots + p_n(x_n^s)^{\frac{t}{s}},$$

ja edelleen

$$(p_1x_1^s + \ldots + p_nx_n^s)^{\frac{t}{s}} \;\le\; p_1x_1^t + \ldots + p_nx_n^t.$$

Korottamalla viimeksi saatu epäyhtälö potenssiin $\frac{1}{t}$ saadaan todistettava epäyhtälö. Koska funktio g on aidosti konveksi, on yhtäsuuruus voimassa, jos ja vain jos $x_1^s = \ldots = x_n^s$ eli $x_1 = \ldots = x_n$.

Seuraava esimerkki on tavallaan esimerkkien 6 ja 8 yleistys mielivaltaiselle muuttujamäärälle.

Esim. 10 Jos $u_1, \ldots, u_n > 0$ ja $v_1, \ldots, v_n > 0$, niin

$$\frac{(v_1 + v_2 + \ldots + v_n)^2}{u_1 + u_2 + \ldots + u_n} \le \frac{v_1^2}{u_1} + \frac{v_2^2}{u_2} + \ldots + \frac{v_n^2}{u_n}. \tag{12}$$

Yhtäsuuruus on voimassa, jos ja vain jos vektorit

$$\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n) \quad \text{ja} \quad \boldsymbol{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$$

ovat samansuuntaiset.

Tämäkin epäyhtälö todistuu aidosti konveksin funktion $g(t) = t^{-1}$, $t > 0$, ja Jensenin epäyhtälön avulla. Olkoot

$$s = v_1 + \ldots + v_n, \quad \lambda_k = \frac{v_k}{s} \quad \text{ja} \quad \alpha_k = \frac{u_k}{\lambda_k},$$

missä $k = 1, 2, \ldots, n$. Tällöin $\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n = 1$, joten Jensenin epäyhtälön mukaan

$$g(\lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + \ldots + \lambda_n\alpha_n) \le \lambda_1 g(\alpha_1) + \lambda_2 g(\alpha_2) + \ldots + \lambda_n g(\alpha_n),$$

mikä sievenee muotoon

$$\frac{1}{u_1 + u_2 + \ldots + u_n} \le \frac{\lambda_1^2}{u_1} + \frac{\lambda_2^2}{u_2} + \ldots + \frac{\lambda_n^2}{u_n}$$

ja edelleen

$$\frac{1}{u_1 + u_2 + \ldots + u_n} \le \frac{1}{s^2}\left(\frac{v_1^2}{u_1} + \frac{v_2^2}{u_2} + \ldots + \frac{v_n^2}{u_n}\right),$$

mistä (12) seuraa. Koska g on aidosti konveksi, on yhtäsuuruus voimassa, jos ja vain jos $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n$. Yhtäsuuruusehto sievenee muotoon

$$\frac{u_1}{v_1} = \frac{u_2}{v_2} = \ldots = \frac{u_n}{v_n},$$

mikä on yhtäpitävää vektorien

$$\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n) \quad \text{ja} \quad \boldsymbol{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$$

samansuuntaisuuden kanssa.

Esim. 11 Olkoon $\underline{x}$ diskreetti, äärellinen satunnaismuuttuja, jonka arvojoukko $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ sisältyy konveksin funktion f määrittelyväliin I. Jos $P(\underline{x} = x_k) = p_k$, niin $p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$. Jensenin epäyhtälön mukaan

$$f(p_1x_1 + p_2x_2 + \ldots p_nx_n) \le p_1f(x_1) + p_2f(x_2) + \ldots + p_nf(x_n),$$

eli

$$f(\mathrm{E}\underline{x}) \le \mathrm{E}f(\underline{x}).$$

3.5 Petrovićin epäyhtälö

Lause 3.24 (Petrovićin epäyhtälö) Jos $f : [0,\infty[\to \mathbb{R}$ on konveksi funktio, niin

$$f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n) \;\leq\; f(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) + (n-1)f(0) \qquad (1)$$

kaikilla $x_1, x_2, \ldots, x_n > 0$. Yhtäsuuruus on voimassa, jos ja vain jos f on enintään astetta 1 oleva polynomi.

Todistus [14, s. 36–37] Merkitään

$$s \;=\; \sum_{\imath=1}^{n} x_\imath \quad \text{ja} \quad \lambda_\imath \;=\; \frac{x_\imath}{s}.$$

Tällöin

$$\sum_{\imath=1}^{n} \lambda_\imath \;=\; 1 \quad \text{ja} \quad x_\imath \;=\; \lambda_\imath s \;+\; (1-\lambda_\imath)\cdot 0$$

kaikilla $\imath = 1, \ldots n$. Funktion konveksisuudesta seuraa

$$f(x_\imath) \;\leq\; \lambda_\imath f(s) \;+\; (1-\lambda_\imath)f(0)\,, \;\; \imath = 1, \ldots, n.$$

Laskemalla yhteen nämä epäyhtälöt saadaan (1). Yhtäsuuruusehto on selvästi voimassa.

Huomautus Jos $f : [0,\infty[\to \mathbb{R}$ on konkaavi, niin epäyhtälössä (1) on vastakkaissuuntainen erisuuruus. Jos f on aidosti konveksi tai konkaavi, niin epäyhtälössä vallitsee pelkästään erisuuruus.

Petrovićin epäyhtälön avulla on helppo konstruoida epäyhtälöitä, joiden todistaminen olisi muuten työlästä.

.

Esim. Funktiot $f : [0,\infty[\to \mathbb{R}$,

$$f(x) \;=\; \frac{x}{1+x} \quad \text{sekä} \quad g(x) \;=\; \sqrt{f(x)}$$

ovat aidosti konkaaveja ja $f(0) = g(0) = 0$. Jos $a, b, c > 0$, niin

$$\frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b} + \frac{c}{1+c} > \frac{a+b+c}{1+a+b+c}$$

ja

$$\sqrt{\frac{a}{1+a}} + \sqrt{\frac{b}{1+b}} + \sqrt{\frac{c}{1+c}} > \sqrt{\frac{a+b+c}{1+a+b+c}}.$$

Nämä epäyhtälöt yleistyvät välittömästi useammallekin positiiviselle luvulle.

3.6 Konveksisuus ja puolisuunnikassääntö

Jos funktio f on aidosti konveksi välillä I ja $[a,b] \subset I$, niin puolisuunnikassäännöllä saadaan integraalin

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

ylälikiarvo. Jos siis

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$$

on välin $[a,b]$ tasavälinen jako, niin

$$\frac{b-a}{2n}\Big(f(x_0) + 2f(x_1) + \ldots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)\Big) > \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x, \tag{1}$$

mistä seuraa

$$f(x_0) + f(x_1) + \ldots + f(x_n) > \frac{f(a)+f(b)}{2} + \frac{n}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{2}$$

Jos f on aidosti konkaavi, niin saadaan vastaavasti epäyhtälö

$$f(x_0) + f(x_1) + \ldots + f(x_n) < \frac{f(a)+f(b)}{2} + \frac{n}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{3}$$

Esim. 1 Funktio $f(x) = x^{-1}$, $x > 0$, on aidosti konveksi, joten epäyhtälöä (1) soveltaen saamme harmonisen sarjan n:nnelle osasummalle s_n, $n \geq 2$, alarajan

$$s_n > \frac{1+\frac{1}{n}}{2} + \frac{n-1}{n-1}\int_1^n \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} + \ln n,$$

mikä osoittaa, että sarja hajaantuu. Tästä epäyhtälöstä seuraa myös, että

$$\gamma_n = s_n - \ln n > \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2}, \quad \text{kun} \quad n \geq 2,$$

joten jono $(\gamma_n)_{n=2}^{\infty}$ on alhaalta rajoitettu. Se on myös aidosti vähenevä, sillä

$$\gamma_n - \gamma_{n+1} = \int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}x}{x} - \frac{1}{n+1} > \int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}x}{n+1} - \frac{1}{n+1} = 0.$$

Monotonisen jonon suppenemislauseen perusteella jono $(\gamma_n)_{n=2}^{\infty}$ on siis suppeneva. Tunnetusti sen raja-arvo on Eulerin vakio γ.

Esim. 2 Funktio $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, $x > 0$, on aidosti konveksi, joten epäyhtälöstä (2) seuraa

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{n}}}{2} + \frac{n-1}{n-1} \int_1^n \frac{1}{\sqrt{x}} \, \mathrm{d}x,$$

mikä sievenee muotoon

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{1}{2\sqrt{n}} + 2\sqrt{n} - \frac{3}{2}. \tag{4}$$

Oikea puoli on varsin hyvä likiarvo summalle

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Esimerkiksi arvolla $n = 100$ tämä summa on (kahdella desimaalilla) 18,59 ja kaavan (4) antama arvo on 18,55.

Esim. 3 Funktio $f(x) = \sqrt{x}$, $x \geq 0$, on aidosti konkaavi, joten epäyhtälöä (3) soveltaen saadaan

$$\sqrt{1} + \sqrt{2} + \ldots + \sqrt{n} < \frac{\sqrt{1} + \sqrt{n}}{2} + \frac{n-1}{n-1} \int_1^n \sqrt{x} \, \mathrm{d}x,$$

mikä sievenee muotoon

$$\sqrt{1} + \sqrt{2} + \ldots + \sqrt{n} < \frac{1}{2}\sqrt{n} + \frac{2}{3} n\sqrt{n} - \frac{1}{6}. \tag{5}$$

Oikea puoli on tässäkin tapauksessa hyvä likiarvo summalle

$$\sqrt{1} + \sqrt{2} + \ldots + \sqrt{n}.$$

Esimerkiksi arvolla $n = 100$ tämä summa on 671,46 ja kaavan (5) antama arvo on 671,50.

Esim. 4 Olkoon $p > 1$. Funktio $f(x) = x^{-p}$, $x > 0$, on aidosti konveksi, joten samalla tavalla kuin esimerkissä 2 saadaan epäyhtälö

$$1 + 2^{-p} + \ldots + n^{-p} > \frac{1 + n^p}{2n^p} + \frac{n^{1-p} - 1}{1 - p}.$$

Esimerkiksi arvoilla $n = 100$ ja $p = 1{,}2$ epäyhtälön vasen puoli on 3,60 ja oikea puoli on 3,51. Antamalla $p \to 1$ saadaan harmonisen sarjan osasummalle esimerkissä 1 nähtyä heikompi arvio

$$s_n \geq \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} + \ln n.$$

4 Painotetuista keskiarvoista

4.1 Keskiarvoepäyhtälöitä

Painotetut keskiarvot

$$
\begin{aligned}
\mathcal{H}_\lambda &= \frac{1}{\frac{\lambda_1}{u_1} + \ldots + \frac{\lambda_n}{u_n}}, \\
\mathcal{G}_\lambda &= u_1^{\lambda_1} \ldots u_n^{\lambda_n}, \\
\mathcal{A}_\lambda &= \lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_n u_n \quad \text{ja} \\
\mathcal{C}_\lambda &= \frac{\lambda_1 u_1^2 + \ldots + \lambda_n u_n^2}{\lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_n u_n},
\end{aligned}
$$

missä $u_1, \ldots, u_n > 0$, $\lambda_1 \ldots \lambda_n > 0$ ja $\lambda_1 + \ldots + \lambda_n = 1$, eivät ole määritelmän mukaisia keskiarvoja koska ne eivät ole muuttujiensa symmetrisiä funktioita. Lause 2.1 voidaan kuitenkin yleistää niitäkin koskevaksi.

Lause 4.1 Positiivisten lukujen $u_1, \ldots, u_n$ painotettujen keskiarvojen välillä vallitsee epäyhtälöketju

$$\mathcal{H}_\lambda \leq \mathcal{G}_\lambda \leq \mathcal{A}_\lambda \leq \mathcal{C}_\lambda, \tag{1}$$

missä yhtäsuuruudet ovat voimassa, jos ja vain jos $u_1 = \ldots = u_n$.

Todistus

Vaihe 1. $\mathcal{G}_\lambda \leq \mathcal{A}_\lambda$. On olemassa luvut $x_1, \ldots, x_n$ siten, että $u_\imath = \mathrm{e}^{x_\imath}$ kaikilla $\imath \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Koska funktio $f(x) = \mathrm{e}^x$ on aidosti konveksi, on Jensenin epäyhtälön mukaan

$$\mathrm{e}^{\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n} \leq \lambda_1 \mathrm{e}^{x_1} + \ldots + \lambda_n \mathrm{e}^{x_{x_n}}.$$

Yhtälöiden $u_k = \mathrm{e}^{x_k}$ avulla tämä sievenee muotoon

$$\mathcal{G}_\lambda = u_1^{\lambda_1} u_2^{\lambda_2} \ldots u_n^{\lambda_n} \leq \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \ldots + \lambda_n u_n = \mathcal{A}_\lambda.$$

Vaihe 2. $\mathcal{H}_\lambda \leq \mathcal{G}_\lambda$. Soveltamalla edellistä epäyhtälöä lukuihin $\frac{1}{u_1}, \ldots, \frac{1}{u_n}$ saamme

$$\frac{1}{u_1^{\lambda_1}} \cdots \frac{1}{u_n^{\lambda_n}} \leq \frac{\lambda_1}{u_1} + \ldots + \frac{\lambda_n}{u_n},$$

mistä välittömästi seuraa

$$\mathcal{H}_\lambda = \frac{1}{\frac{\lambda_1}{u_1} + \ldots + \frac{\lambda_n}{u_n}} \leq u_1^{\lambda_1} \ldots u_n^{\lambda_n} = \mathcal{G}_\lambda.$$

Vaihe 3. Funktio $g(x) = x^2$ on aidosti konveksi, joten saamme Jensenin epäyhtälöä soveltaen

$$(\lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_n u_n)^2 \leq \lambda_1 u_1^2 + \ldots + \lambda_n u_n^2,$$

mistä seuraa

$$\mathcal{A}_\lambda = \lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_n u_n \leq \frac{\lambda_1 u_1^2 + \ldots + \lambda_n u_n^2}{\lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_n u_n} = \mathcal{C}_\lambda.$$

Siis (1) on voimassa. Koska funktiot $f(x) = e^x$ ja $g(x) = x^2$ ovat aidosti konvekseja, vallitsee lauseen 3.21 perusteella tässä ketjussa yhtäsuuruus, jos ja vain jos luvut $u_\imath$ ovat kaikki keskenään yhtäsuuria. Sijoittamalla λ-lukujen paikalle $\frac{1}{n}$ saamme tavanomaisia keskiarvoja koskevan epäyhtälöketjun.

Huomautus Helposti nähdään, että (1) on voimassa vaikka jokin $\lambda_\imath = 0$.

Seuraavassa käsitellään muutamia esimerkkejä tavanomaisen ja painotetun $\mathcal{AG}$-epäyhtälön avulla todistuvista epäyhtälöistä. Aloitamme kuitenkin Jensenin epäyhtälön sovelluksella.

Esim. 1 Olkoot $u_1, \ldots, u_n > 0$ ja $\mathcal{A}$ niiden aritmeettinen keskiarvo. Tällöin

$$\mathcal{A}^{\mathcal{A}} \leq \sqrt[n]{u_1^{u_1} u_2^{u_2} \ldots u_n^{u_n}}, \tag{2}$$

missä yhtäsuuruus on voimassa, jos ja vain jos $u_1 = \ldots = u_n$.

Funktio $f(x) = x \ln x$ on aidosti konveksi, joten Jensenin epäyhtälön mukaan

$$\left(\frac{u_1 + \ldots + u_n}{n}\right) \ln\left(\frac{u_1 + \ldots + u_n}{n}\right) \leq \frac{1}{n} u_1 \ln u_1 + \ldots + \frac{1}{n} u_n \ln u_n,$$

mistä (2) yhtäsuuruusehtoineen seuraa.

Esim. 2 Jos positiivisten lukujen $u_1, \ldots, u_n$ aritmeettinen keskiarvo on 1, niin edellisen esimerkin epäyhtälöstä (2) ja $\mathcal{AG}$-epäyhtälöstä seuraa välittömästi, että

$$u_1 u_2 \ldots u_n \leq 1 \leq u_1^{u_1} u_2^{u_2} \ldots u_n^{u_n}. \tag{3}$$

Yhtäsuuruudet ovat voimassa, jos ja vain jos $u_k = 1$ kaikilla $k \in \{1, \ldots, n\}$.

Tapauksessa $n = 2$ epäyhtälön (3) vasen puoli on triviaali, mutta sen oikea puoli sopii lukioon harjoitustehtäväksi. Käsittelemme sen seuraavassa esimerkissä.

Esim. 3 Osoitettava, että $(1-x)^{1-x}\,(1+x)^{1+x} > 1$ kaikilla $x \in]0,1[$. Ongelma ratkeaa tutkimalla vasemman puolen logaritmia. Funktio

$$f(x) = (1-x)^{1-x}(1+x)^{1+x} > 0,$$

kun $0 \le x < 1$, joten sen logaritmi

$$g(x) = (1-x)\ln(1-x) + (1+x)\ln(1+x)$$

on näillä x:n arvoilla määritelty. Funktion g derivaatta sievenee muotoon

$$g'(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right).$$

Derivaatta on positiivinen kun $0 < x < 1$, joten g on aidosti kasvava. Koska $g(0) = 0$ ja g on jatkuva välillä $[0,1[$, on $g(x) > 0$, kun $0 < x < 1$. Koska $f(x) = \ln g(x)$, on $f(x) > 1$, kun $0 < x < 1$.

Edeltävissä esimerkeissä oletimme, että positiivisten lukujen aritmeettinen keskiarvo on 1. Katsomme nyt mitä $\mathcal{AG}$-epäyhtälöstä seuraa, jos lukujen geometrinen keskiarvo on 1.

Esim. 4 Jos $u_1, u_2, \ldots, u_n > 0$ ja näiden lukujen geometrinen keskiarvo on 1, niin $\mathcal{AG}$-epäyhtälö tulee muotoon

$$\frac{u_1 + u_2 + \ldots + u_n}{n} \ge 1,$$

mistä seuraa

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n \ge n.$$

Erityisesti jos $u_1, u_2, \ldots, u_n > 0$, niin

$$\frac{u_1}{u_2} + \frac{u_2}{u_3} + \ldots + \frac{u_{n-1}}{u_n} + \frac{u_n}{u_1} \ge n. \tag{4}$$

$\mathcal{AG}$-epäyhtälön yhtäsuuruusehdon perusteella yhtäsuuruus on voimassa, jos ja vain jos

$$\frac{u_1}{u_2} = \frac{u_2}{u_3} = \ldots = \frac{u_{n-1}}{u_n} = \frac{u_n}{u_1},$$

mikä puolestaan toteutuu, jos ja vain jos $u_1 = \ldots = u_n$.

Epäyhtälö (4) on yleistys koulumatematiikassakin tunnetusta positiivisia lukuja a, b koskevasta epäyhtälöstä

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \ge 2.$$

Sen todistaminen ilman $\mathcal{AG}$-epäyhtälöä tuntuu hankalalta.

Keskiarvojen välisistä epäyhtälöistä saadaan helposti muitakin näyttäviä harjoitustehtäviä.

Esim. 5 Ei-negatiiviset luvut x, y, z toteuttavat epäyhtälön

$$(x+y)(y+z)(z+x) \;\geq\; 8xyz,$$

sillä se voidaan kirjoittaa muotoon

$$\frac{x+y}{2}\,\frac{y+z}{2}\,\frac{z+x}{2} \;\geq\; \sqrt{xy}\,\sqrt{yz}\,\sqrt{zx},$$

mistä väite seuraa $\mathcal{AG}$-epäyhtälön perusteella. Tämä epäyhtälö yleistyy välittömästi useampaa lukua koskevaksi. Jos $a_1, a_2, \ldots, a_n \geq 0$, niin

$$\prod_{\jmath=1}^{n} \sum_{\imath \neq \jmath} a_\imath \;\geq\; n^n \prod_{\imath=1}^{n} a_\imath .$$

Yhtäsuuruus on voimassa, jos ja vain jos $a_1 = \ldots = a_n$.

Esim. 6 Olkoot $a, b, c > 0$ ja $s = a + b + c$. Painotettua $\mathcal{AG}$-epäyhtälöä soveltaen saamme epäyhtälöt

$$\begin{aligned}
\frac{a}{s}\frac{1}{a} + \frac{b}{s}\frac{1}{b} + \frac{c}{s}\frac{1}{c} \;&\geq\; \left(\frac{1}{a}\right)^{a/s}\left(\frac{1}{b}\right)^{b/s}\left(\frac{1}{c}\right)^{c/s}, \\
\frac{c}{s}\frac{1}{a} + \frac{a}{s}\frac{1}{b} + \frac{b}{s}\frac{1}{c} \;&\geq\; \left(\frac{1}{a}\right)^{c/s}\left(\frac{1}{b}\right)^{a/s}\left(\frac{1}{c}\right)^{b/s}, \\
\frac{b}{s}\frac{1}{a} + \frac{c}{s}\frac{1}{b} + \frac{a}{s}\frac{1}{c} \;&\geq\; \left(\frac{1}{a}\right)^{b/s}\left(\frac{1}{b}\right)^{c/s}\left(\frac{1}{c}\right)^{a/s},
\end{aligned}$$

joiden tulo sievenee epäyhtälöksi

$$\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right)\left(\frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c}\right) \;\geq\; \frac{(a+b+c)^3}{3abc}.$$

Tämäkin yleistyy useammalle luvulle. Olkoot $a_1, \ldots, a_n > 0$ ja σ_k permutaatio, joka permutoi jonon $(1, 2, \ldots, n)$ jonoksi $(k, k+1, \ldots n, 1, 2, \ldots k-1)$. Tällöin

$$\prod_{k=1}^{n} a_k \sum_{\imath=1}^{n} \frac{a_{\sigma_k(\imath)}}{a_\imath} \;\geq\; \left(\sum_{\imath=1}^{n} a_\imath\right)^{n}. \tag{5}$$

Yhtäsuuruus on voimassa, jos ja vain jos $a_1 = \ldots = a_n$.

Saamme epäyhtälön (5) havainnollisemmaksi matriisien avulla. Määritellään $n \times n$-matriisi $\boldsymbol{A}$, jonka vaakariveinä ovat lukujonon $(a_1, \ldots, a_n)$ sykliset permutaatiot,

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & \ldots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_n & a_1 & \ldots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_2 & a_3 & a_4 & \ldots & a_1 \end{pmatrix}$$

sekä $n \times 1$-matriisi $\boldsymbol{B}$, jonka alkioina ovat lukujen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ käänteisluvut. Jos tulomatriisin $\boldsymbol{AB}$ alkiot ovat $c_1, c_2, \ldots, c_n$, niin (5) tulee muotoon

$$\prod_{\imath=1}^{n} a_\imath c_\imath \geq \left(\sum_{\imath=1}^{n} a_\imath \right)^n .$$

4.2 Kontraharmonisesta keskiarvosta

Käytämme edellisen kappaleen merkintöjä. Painotettu aritmeettinen keskiarvo voidaan kirjoittaa muotoon

$$\mathcal{A}_\lambda = \lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_n u_n = \frac{\lambda_1 u_1^1 + \ldots + \lambda_n u_n^1}{\lambda_1 u_1^0 + \ldots + \lambda_n u_n^0}$$

ja epäyhtälö $\mathcal{A}_\lambda \leq \mathcal{C}_\lambda$ puolestaan muotoon

$$\frac{\lambda_1 u_1^1 + \ldots + \lambda_n u_n^1}{\lambda_1 u_1^0 + \ldots + \lambda_n u_n^0} \leq \frac{\lambda_1 u_1^2 + \ldots + \lambda_n u_n^2}{\lambda_1 u_1^1 + \ldots + \lambda_n u_n^1}, \tag{1}$$

mikä antaa aiheen yleistää kontraharmonisen keskiarvon käsitettä.

Kun $x \in \mathbb{R}$, määrittelemme astetta x olevan kontraharmonisen keskiarvon yhtälöllä

$$\mathcal{C}_\lambda^x = \frac{\lambda_1 u_1^{x+1} + \ldots + \lambda_n u_n^{x+1}}{\lambda_1 u_1^x + \ldots + \lambda_n u_n^x}.$$

Tämän mukaan

$$\mathcal{H}_\lambda = \mathcal{C}_\lambda^{-1}, \quad \mathcal{A}_\lambda = \mathcal{C}_\lambda^0 \quad \text{ja} \quad \mathcal{C}_\lambda = \mathcal{C}_\lambda^1.$$

Epäyhtälö (1) voidaan yleistää kaikkien asteiden kontraharmonisille keskiarvoille.

Lause 4.2 Jos $u_1, \ldots, u_n$ ovat positiivisia lukuja, jotka eivät kaikki ole yhtäsuuria, ja $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ ovat positiivisia lukuja, joiden summa on 1, niin keskiarvo

$$\mathcal{C}_\lambda^x = \frac{\lambda_1 u_1^{x+1} + \ldots + \lambda_n u_n^{x+1}}{\lambda_1 u_1^x + \ldots + \lambda_n u_n^x}$$

on aidosti kasvava x:n suhteen. Lisäksi keskiarvo $\mathcal{C}_\lambda^x$ toteuttaa epäyhtälön

$$u_{\min} < \mathcal{C}_\lambda^x < u_{\max}.$$

Jos ja vain jos $u_1 = \ldots u_n$, niin $\mathcal{C}_\lambda^x$ on x:n funktiona vakio.

Todistus Vrt. [5, s. 246], jossa todistus on erilainen.

Keskiarvo

$$\mathcal{C}_\lambda^x = \frac{\lambda_1 u_1^{x+1} + \ldots + \lambda_n u_n^{x+1}}{\lambda_1 u_1^x + \ldots + \lambda_n u_n^x} = \frac{S_{x+1}}{S_x}$$

on x:n jatkuva funktio. Näemme helposti myös, että

$$\lim_{x\to-\infty} \mathcal{C}_\lambda^x = \min_\imath u_\imath = u_{\min} \quad \text{ja} \quad \lim_{x\to\infty} \mathcal{C}_\lambda^x = \max_\imath u_\imath = u_{\max}.$$

Jos $u_{\min} = u_{\max}$, niin $\mathcal{C}_\lambda^x = u_{\min} = u_{\max}$, jolloin $u_1 = \ldots = u_n$. Osoitamme, että jos $u_{\min} < u_{\max}$, niin $\mathcal{C}_\lambda^x$ on aidosti kasvava x:n funktio.

Olkoot siis u- ja λ-luvut kuten yllä, $u_{\min} < u_{\max}$ ja $y > x$. Tällöin

$$\mathcal{C}_\lambda^y - \mathcal{C}_\lambda^x = \frac{S_{y+1}}{S_y} - \frac{S_{x+1}}{S_x} = \frac{S_{y+1}S_x - S_y S_{x+1}}{S_x S_y} =$$

$$\frac{1}{S_x S_y} \sum_{\imath<\jmath} \lambda_\imath \lambda_\jmath \Big(u_\imath^{y+1} u_\jmath^x + u_\imath^x u_\jmath^{y+1}\Big) - \frac{1}{S_x S_y} \sum_{\imath<\jmath} \lambda_\imath \lambda_\jmath \Big(u_\imath^{x+1} u_\jmath^y + u_\imath^y u_\jmath^{x+1}\Big) =$$

$$\frac{1}{S_x S_y} \sum_{\imath<\jmath} \lambda_\imath \lambda_\jmath \{u_\imath^{x+1} u_\jmath^x \Big(u_\imath^{y-x} - u_\jmath^{y-x}\Big) + u_\imath^x u_\jmath^{x+1} \Big(u_\jmath^{y-x} - u_\imath^{y-x}\Big)\} =$$

$$\frac{1}{S_x S_y} \sum_{\imath<\jmath} \lambda_\imath \lambda_\jmath \Big(u_\imath^{y-x} - u_\jmath^{y-x}\Big)\Big(u_\imath^{x+1} u_\jmath^x - u_\imath^x u_\jmath^{x+1}\Big) =$$

$$\frac{1}{S_x S_y} \sum_{\imath<\jmath} \lambda_\imath \lambda_\jmath u_\imath^x u_\jmath^x \Big(u_\imath^{y-x} - u_\jmath^{y-x}\Big)\Big(u_\imath - u_\jmath\Big) > 0,$$

koska viimeisessä sulkulausekkeessa olevat tulot ovat ei-negatiivisia ja vähintään yksi niistä on positiivinen.

Huomautus Lause 4.2 sisältää erikoistapauksena epäyhtäköketjun

$$\mathcal{H}_\lambda \leq \mathcal{A}_\lambda \leq \mathcal{C}_\lambda.$$

5 Majoroinnista

Majorointi on hyvä työkalu epäyhtälöiden tutkimisessa. Perehdymme siihen ja sen käyttöön.

5.1 Majoroinnista

Olkoot

$$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \quad \text{ja} \quad \boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$$

vektoreita. Olkoot edelleen $x_{[\jmath]}$ ja $y_{[\jmath]}$ näiden vektorien $\jmath$:nneksi suurimmat koordinaatit. Tällöin siis

$$x_{[1]} \geq x_{[2]} \geq \ldots \geq x_{[n-1]} \geq x_{[n]} \quad \text{ja} \quad y_{[1]} \geq y_{[2]} \geq \ldots \geq y_{[n-1]} \geq y_{[n]}.$$

Sanomme, että $\boldsymbol{x}$:n *majoroi* $\boldsymbol{y}$:n, jos

$$\begin{array}{rcl} x_{[1]} & \geq & y_{[1]}, \\ x_{[1]} + x_{[2]} & \geq & y_{[1]} + y_{[2]}, \\ & \vdots & \\ x_{[1]} + x_{[2]} + \ldots + x_{[n-1]} & \geq & y_{[1]} + y_{[2]} + \ldots + y_{[n-1]}, \\ x_{[1]} + x_{[2]} + \ldots + x_{[n]} & = & y_{[1]} + y_{[2]} + \ldots + y_{[n]}. \end{array}$$

Sitä, että $\boldsymbol{x}$ majoroi $\boldsymbol{y}$:n, merkitään $\boldsymbol{x} \succ \boldsymbol{y}$ tai $\boldsymbol{y} \prec \boldsymbol{x}$. Selvästi

$$\begin{array}{l} \boldsymbol{x} \succ \boldsymbol{x}, \\ \boldsymbol{x} \succ \boldsymbol{y} \wedge \boldsymbol{y} \succ \boldsymbol{x} \Rightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}, \\ \boldsymbol{x} \succ \boldsymbol{y} \wedge \boldsymbol{y} \succ \boldsymbol{z} \Rightarrow \boldsymbol{x} \succ \boldsymbol{z} \end{array}$$

kaikilla $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^n$. Jos $\boldsymbol{x} \succ \boldsymbol{y}$ ja $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{y}$, niin $\boldsymbol{x}$ *majoroi aidosti* $\boldsymbol{y}$:n.

Esim. 1 Jos $\boldsymbol{x} = (0,3,0)$, $\boldsymbol{y} = (1,0,2)$ ja $\boldsymbol{z} = (1,1,1)$, niin $\boldsymbol{x} \succ \boldsymbol{y} \succ \boldsymbol{z}$, sillä $3 \geq 2$, $3+0 \geq 2+1$ ja $3+0+0 = 2+1+0$ sekä $2 \geq 1$, $2+1 \geq 1+1$ ja $2+1+0 = 1+1+1$.

Esim. 2 Jos n on positiivinen kokonaisluku, niin

$$\left(\frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n}\right) \prec \left(\frac{1}{n-1}, \ldots, \frac{1}{n-1}, 0\right) \prec \ldots \prec \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, \ldots, 0\right) \prec (1, 0, \ldots, 0).$$

Esim. 3 Olkoon $\bar{x}$ vektorin $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ koordinaattien aritmeettinen keskiarvo ja $\bar{\boldsymbol{x}} = (\bar{x}, \bar{x}, \ldots, \bar{x})$. Tällöin

$$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \succ (\bar{x}, \bar{x}, \ldots, \bar{x}) = \bar{\boldsymbol{x}}.$$

5.2 Karamatan epäyhtälö

Lause 5.1 (Karamatan epäyhtälö) Olkoot $\boldsymbol{a} = (a_\imath)_{\imath=1}^n$ ja $\boldsymbol{b} = (b_\imath)_{\imath=1}^n$, missä $a_\imath, b_\imath \in]\alpha,\beta[$ kaikilla $\imath = 1, 2, \dots, n$. Olkoon $f :]\alpha,\beta[\mapsto \mathbb{R}$ konveksi funktio. Jos $\boldsymbol{a} \succ \boldsymbol{b}$, niin

$$\sum_{\imath=1}^{n} f(a_\imath) \geq \sum_{\imath=1}^{n} f(b_\imath). \tag{1}$$

Jos f on aidosti konveksi, niin yhtäsuuruus voimassa, jos ja vain jos $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$.

Todistus (Vrt. [14, s. 33-34]) Epäyhtälö on selvästi voimassa, jos $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$. Jos jollakin $\imath$:n arvolla $a_\imath = b_\imath$, voidaan termit $f(a_\imath)$ ja $f(b_\imath)$ jättää huomioimatta. Voimme siis rajoituksetta olettaa, että $a_\imath \neq b_\imath$ kaikilla $\imath$:n arvoilla. Edelleen, koska epäyhtälö (1) on riippumaton vektorien $\boldsymbol{a}$ ja $\boldsymbol{b}$ koordinaattien järjestyksestä, voimme rajoituksetta olettaa, että $a_1 \geq \ldots \geq a_n$ ja $b_1 \geq \ldots \geq b_n$. Koska f on konveksi, on erotusosamääristä

$$\frac{f(a_\imath) - f(b_\imath)}{a_\imath - b_\imath} = c_\imath$$

muodostuva jono $(c_\imath)_{\imath=1}^n$ lauseen 3.7 perusteella vähenevä. Merkitään

$$A_k = \sum_{\imath=1}^{k} a_\imath \quad \text{ja} \quad B_k = \sum_{\imath=1}^{k} b_\imath \quad \text{kaikilla} \quad k \in \{1, 2, \dots, n\},$$

ja sovitaan, että $A_0 = B_0 = 0$. Koska $\boldsymbol{a} \succ \boldsymbol{b}$, on $A_n = B_n$ ja $A_\imath \geq B_\imath$ kaikilla $\imath \in \{1, \dots, n\}$. Saamme

$$\begin{aligned}
\sum_{\imath=1}^{n} f(a_\imath) - \sum_{\imath=1}^{n} f(b_\imath) &= \sum_{\imath=1}^{n} (f(a_\imath) - f(b_\imath)) = \sum_{\imath=1}^{n} c_\imath (a_\imath - b_\imath) \\
&= \sum_{\imath=1}^{n} c_\imath (A_\imath - A_{\imath-1} - B_\imath + B_{\imath-1}) \\
&= \sum_{\imath=1}^{n} c_\imath (A_\imath - B_\imath) - \sum_{\imath=1}^{n} c_\imath (A_{\imath-1} - B_{\imath-1}) \\
&= \sum_{\imath=1}^{n-1} c_\imath (A_\imath - B_\imath) - \sum_{\imath=0}^{n-1} c_{\imath+1} (A_\imath - B_\imath) \\
&= \sum_{\imath=1}^{n-1} (c_\imath - c_{\imath+1})(A_\imath - B_\imath) \geq 0,
\end{aligned} \tag{2}$$

mistä (1) seuraa. Koska $a_\imath \neq b_\imath$ kaikilla $\imath \in \{1, \dots, n\}$, on $A_\imath > B_\imath$ vähintään yhdellä $\imath$:n arvolla, ja jos f on aidosti konveksi, niin jono $(c_\imath)_{\imath=1}^n$ on aidosti vähenevä. Summassa (2) on tällöin vähintään yksi positiivinen termi, joten tämä summa on positiivinen, koska kaikki termit ovat ei-negatiivisia. Yhtäsuuruusehto seuraa tästä.

Huomautus Jos konveksi funktio f on kasvava, niin lauseen 5.1 ehto $\boldsymbol{a} \succ \boldsymbol{b}$ voidaan lieventää muotoon

$$\sum_{i=1}^{k} a_i \geq \sum_{i=1}^{k} b_i \quad \text{kaikilla} \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

sillä erotusosamäärät c_i ovat ei-negatiivisia. Yhtäsuuruusehto säilyy samana.

Esim. 1 (Vrt. [14, s. 41-42]) Huomautuksen perusteella ratkeaa seuraava Jugoslavian olympiajoukkueen karsintatehtävä vuodelta 1969: Osoitettava, että jos reaaliluvuille a_i ja b_i on voimassa

$$\begin{aligned}
&a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_n > 0, \\
&b_1 \geq a_1, \\
&b_1 b_2 \geq a_1 a_2, \\
&\vdots \\
&b_1 b_2 \ldots b_n \geq a_1 a_2 \ldots a_n,
\end{aligned}$$

niin

$$b_1 + b_2 + \ldots + b_n \geq a_1 + a_2 + \ldots + a_n.$$

Lukujen logaritmit nimittäin toteuttavat kaikilla $k = 1, 2, \ldots, n$ ehdon

$$\sum_{i=1}^{k} \ln a_i \leq \sum_{i=1}^{k} \ln b_i$$

joten väite seuraa välittömästi siitä, että funktio $f(x) = \mathrm{e}^x$ on konveksi ja kasvava.

Esim. 2 [14, esim. 2, s. 35] Jos $a, b, c > 0$, niin

$$\frac{2}{a+b} + \frac{2}{b+c} + \frac{2}{c+a} \leq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

ja

$$\sqrt{a+b} + \sqrt{b+c} + \sqrt{c+a} \geq \sqrt{2a} + \sqrt{2b} + \sqrt{2c}.$$

Molemmissa epäyhtälöissä vallitsee yhtäsuuruus, jos ja vain jos $a = b = c$.

Epäyhtälöt ovat symmetrisiä muuttujien suhteen, joten voimme rajoituksetta olettaa, että $a \geq b \geq c$. Tällöin

$$(a+b\,, b+c\,, c+a) \prec (2a\,, 2b\,, 2c). \tag{3}$$

Ensimmäinen epäyhtälö yhtäsuuruusehtoineen seuraa Karamatan epäyhtälöstä soveltamalla sitä aidosti konveksiin funktioon $f(x) = x^{-1}$, $x > 0$. Toinen epäyhtälö yhtäsuuruusehtoineen saadaan Karamatan epäyhtälöstä soveltamalla sitä aidosti konkaaviin funktioon $g(x) = \sqrt{x}$.

Esim. 3 Edellisen esimerkin epäyhtälöt yleistyvät välittömästi useammalle positiiviselle luvulle $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Jos $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = s$, niin

$$\begin{aligned} (n-1)\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{s-a_i} &\leq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i} \quad \text{ja} \\ \sum_{i=1}^{n} \sqrt{s-a_i} &\geq \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(n-1)\, a_i} \end{aligned}$$

Yhtäsuuruudet ovat voimassa, jos ja vain jos $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

Esim. 4 [14, teht. 3, s.42] Osoitettava, että jos $a, b, c > 0$, niin

$$(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b) \leq abc. \tag{4}$$

Epäyhtälö on symmetrinen muuttujien suhteen, joten voimme rajoituksetta olettaa, että $a \geq b \geq c > 0$. Tällöin epäyhtälön (4) vasemman puolen tekijöiden suuruusjärjestys on

$$a+b-c \geq a+c-b \geq b+c-a,$$

ja ainoastaan pienin näistä luvuista voi olla ei-positiivinen. Jos $b+c-a \leq 0$, niin (4) on voimassa koska $abc > 0$. Voimme siis olettaa, että $b+c-a > 0$. Selvästi

$$\begin{aligned} a+b-c &\geq a \\ (a+b-c)+(a+c-b) &\geq a+b \\ (a+b-c)+(a+c-b)+(b+c-a) &= a+b+c, \end{aligned}$$

eli $(a+b-c,\ a+c-b,\ b+c-a) \succ (a, b, c)$. Funktio $g(x) = \ln x$ on aidosti konkaavi, joten Karamatan epäyhtälöä soveltaen saadaan

$$\ln(a+b-c) + \ln(b+c-a) + \ln(c+b-a) \leq \ln a + \ln b + \ln c,$$

mistä väite seuraa. (Epäyhtälö on voimassa myös ehdolla $a, b, c \geq 0$, sillä jos esimerkiksi $c = 0$, niin sen vasen puoli pelkistyy muotoon $-(a+b)(a-b)^2$ ja oikea puoli on 0.)

Esim. 5 [14, teht. 9, s. 44] Vuoden 2000 matematiikkaolympialaisissa oli tehtävänä todistaa epäyhtälö

$$\Big(x-1+\frac{1}{y}\Big)\Big(y-1+\frac{1}{z}\Big)\Big(z-1+\frac{1}{x}\Big) \le 1, \tag{5}$$

kun $x, y, z > 0$ ja $xyz = 1$. Annetuista ehdoista seuraa, että on olemassa positiiviset luvut a, b, c siten, että

$$x = \frac{a}{b}, \quad y = \frac{b}{c}, \quad z = \frac{c}{a}.$$

Näiden muuttujien avulla (5) palautuu edellisen esimerkin epäyhtälöksi.

Esim. 6 Jensenin epäyhtälön erikoistapaus voidaan todistaa lyhyesti Karamatan epäyhtälön avulla. Olkoon f välillä I määritelty konveksi funktio ja $x_1, \ldots, x_n \in I$. Olkoon edelleen $\mathcal{A}$ lukujen $x_\imath$ aritmeettinen keskiarvo. Koska

$$(\mathcal{A}, \mathcal{A}, \ldots, \mathcal{A}) \prec (x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

seuraa Karamatan epäyhtälöstä

$$f(\mathcal{A}) + f(\mathcal{A}) + \ldots + f(\mathcal{A}) \le f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n),$$

mikä voidaan edelleen kirjoittaa muotoon

$$f\Big(\frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}\Big) \le \frac{1}{n} f(x_1) + \ldots + \frac{1}{n} f(x_n).$$

Karamatan epäyhtälöllä on myös painotettu muoto.

Lause 5.2 Olkoot $\boldsymbol{a} = (a_\imath)_{\imath=1}^n$ ja $\boldsymbol{b} = (b_\imath)_{\imath=1}^n$, missä $a_\imath, b_\imath \in]\alpha,\beta[$ kaikilla $\imath = 1, 2, \ldots, n$. Olkoon $f :]\alpha,\beta[\mapsto \mathbb{R}$ konveksi funktio. Jos $\lambda_1, \ldots, \lambda_n > 0$,

$$\sum_{\imath=1}^{k} \lambda_\imath a_\imath \ge \sum_{\imath=1}^{k} \lambda_\imath b_\imath \quad \text{kaikilla} \quad k = 1, 2, \ldots, n-1 \quad \text{ja} \quad \sum_{\imath=1}^{n} \lambda_\imath a_\imath = \sum_{\imath=1}^{n} \lambda_\imath b_\imath,$$

niin

$$\sum_{\imath=1}^{n} \lambda_\imath f(a_\imath) \ge \sum_{\imath=1}^{n} \lambda_\imath f(b_\imath).$$

Jos f on aidosti konveksi, niin yhtäsuuruus voimassa, jos ja vain jos $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$.

Todistus Lause todistuu samalla tavalla kuin lause 5.1, kun merkitään

$$A_0 = B_0 = 0, \quad A_k = \sum_{\imath=1}^{k} \lambda_\imath a_\imath \quad \text{ja} \quad B_k = \sum_{\imath=1}^{k} \lambda_\imath b_\imath$$

kaikilla $k = 1, 2, \ldots, n-1$.

Esim. 7 Painotetun Karamatan epäyhtälön avulla voidaan todistaa Jensenin epäyhtälö yleisessä tapauksessa. Olkoot

$$\lambda_1, \ldots, \lambda_n > 0 \quad \text{ja} \quad \lambda_1 + \ldots + \lambda_n = 1.$$

Jos $f :]\alpha,\beta[\mapsto \mathbb{R}$ on konveksi funktio ja $a_1, \ldots, a_n \in]\alpha,\beta[$, niin näemme tarvittaessa indeksointia muuttaen, että lauseen 5.2 oletukset ovat voimassa, kun $b_\imath = \lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_n a_n$. Mainitun lauseen mukaan

$$\sum_{\imath=1}^{n} \lambda_\imath f(a_\imath) \;\geq\; \sum_{\imath=1}^{n} \lambda_\imath f(\lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_n a_n),$$

mistä väite seuraa.

Esim. 8 Karamatan epäyhtälön avulla saadaan yksinkertainen todistus $\mathcal{AG}$-epäyhtälölle. Olkoon $x_1, x_2, \ldots, x_n > 0$ ja $\mathcal{A}$ niiden aritmeettinen keskiarvo. Tällöin

$$(\mathcal{A}, \mathcal{A}, \ldots, \mathcal{A}) \prec (x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Funktio $g(t) = \ln t$, $t > 0$, on aidosti konkaavi, joten saamme

$$\ln \mathcal{A} + \ln \mathcal{A} + \ldots + \ln \mathcal{A} \;\geq\; \ln x_1 + \ln x_2 + \ldots + \ln x_n,$$

mikä sievenee muotoon

$$n \ln \mathcal{A} \;\geq\; \ln (x_1 x_2 \ldots x_n),$$

ja edelleen

$$\ln \mathcal{A} \;\geq\; \tfrac{1}{n} \ln (x_1 x_2 \ldots x_n) \;=\; \ln \mathcal{G},$$

mistä väite seuraa. Yhtäsuuruusehto seuraa logaritmifunktion aidosta konkaavisuudesta.

Esim. 9 Olkoot $f : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ konveksi funktio ja $x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0$. Koska

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_n, \underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{n-1\,\text{kpl}}) \succ (x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

seuraa Karamatan epäyhtälöstä

$$f(x_1 + \ldots + x_n) + \underbrace{f(0) + \ldots + f(0)}_{n-1\,\text{kpl}} \;\geq\; f(x_1) + \ldots + f(x_n),$$

mikä sievenee sivulla 31 todistetuksi Petrovićin epäyhtälöksi

$$f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n) \;\leq\; f(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) + (n-1) f(0).$$

Karamatan epäyhtälön avulla saadaan summalle

$$f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n)$$

myös alaraja. Jos $\mathcal{A}$ on ei-negatiivisten lukujen $x_1, \ldots, x_n$ aritmeettinen keskiarvo, niin

$$(\mathcal{A}, \mathcal{A}, \ldots, \mathcal{A}) \prec (x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

joten

$$f(\mathcal{A}) + f(\mathcal{A}) + \ldots + f(\mathcal{A}) \leq f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n).$$

Saamme siis pienen lisäyksen Petrovićin epäyhtälöön.

Lause 5.3 Jos $f : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ on konveksi, $x_1, \ldots, x_n \geq 0$ ja $\mathcal{A}$ on lukujen $x_\imath$ aritmeettinen keskiarvo, niin

$$nf(\mathcal{A}) \leq \sum_{\imath=1}^{n} f(x_\imath) \leq f(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) + (n-1)f(0). \tag{6}$$

Jos $g : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ on konkaavi, niin

$$ng(\mathcal{A}) \geq \sum_{\imath=1}^{n} g(x_\imath) \geq g(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) + (n-1)g(0). \tag{7}$$

Esim. 10 Tutkimme vielä, millaiset rajat epäyhtälö (7) antaa summalle

$$1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \ldots + \sqrt{n}.$$

Funktio $g(x) = \sqrt{x}$ on aidosti konkaavi, joten saamme kaksoisepäyhtälön

$$(n-1)\sqrt{0} + \sqrt{1 + 2 + \ldots + n} \leq 1 + \sqrt{2} + \ldots + \sqrt{n} \leq n\sqrt{\frac{1 + 2 + \ldots + n}{n}},$$

mikä sievenee muotoon

$$\sqrt{n}\sqrt{\frac{n+1}{2}} \leq 1 + \sqrt{2} + \ldots + \sqrt{n} \leq n\sqrt{\frac{n+1}{2}}.$$

Yhtäsuuruus on voimassa ainoastaan arvolla $n = 1$. Tämä arvio on kuitenkin hyödytön, sillä triviaalissa kaksoisepäyhtälössä

$$n \leq \sqrt{1} + \sqrt{2} + \ldots + \sqrt{n} \leq n\sqrt{n}$$

rajat ovat paremmat.

5.3 Schurin epäyhtälö ja Muirheadin lause

Lause 5.4 (Schurin epäyhtälö) Jos $x, y, z \geq 0$ ja $a, b > 0$, niin

$$x^a(x^b - y^b)(x^b - z^b) + y^a(y^b - x^b)(y^b - z^b) + z^a(z^b - x^b)(z^b - y^b) \;\geq\; 0. \quad (1)$$

Yhtäsuuruus on voimassa, jos ja vain jos yksi luvuista x, y, z on nolla ja kaksi muuta muuta keskenään yhtäsuuria tai kaikki kolme ovat keskenään yhtäsuuria.

Todistus [14, 38–39] Epäyhtälön vasen puoli on symmetrinen x:n, y:n ja z:n suhteen, joten voimme rajoituksetta olettaa, että $x \geq y \geq z$. Tällöin vasemman puolen ensimmäinen ja kolmas yhteenlaskettava ovat ei-negatiivisia ja toinen on ei-positiivinen. Ensimmäisen ja toisen yhteenlaskettavan summa

$$\begin{aligned}
& x^a(x^b - y^b)(x^b - z^b) + y^a(y^b - x^b)(y^b - z^b) \\
= \;& (x^b - y^b)\Big(x^a(x^b - z^b) \;-\; y^a(y^b - z^b)\Big) \\
= \;& (x^b - y^b)\Big(x^{a+b} - y^{a+b} + z^b y^a - z^b x^a\Big) \\
= \;& (x^b - y^b)\Big(x^{a+b} - y^{a+b} - z^b(x^a - y^a)\Big) \\
\geq \;& (x^b - y^b)\Big(x^{a+b} - y^{a+b} - y^b(x^a - y^a)\Big) \\
= \;& (x^b - y^b)\Big(x^{a+b} - x^a y^b\Big) \\
= \;& x^a\Big(x^b - y^b\Big)^2 \;\geq\; 0,
\end{aligned}$$

joten (1) on todistettu. Tässä yhtälö-epäyhtälöketjussa vallitsee yhtäsuuruus, jos ja vain jos

$$(y = z) \quad \text{ja} \quad (x = 0 \;\; \text{tai} \;\; x = y),$$

mistä yhtäsuuruusehto seuraa.

Sijoittamalla epäyhtälöön (1) $a = r$ ja $b = 1$ saadaan seurauslause.

Seuraus 5.5 Jos $x, y, z \geq 0$ ja $r > 0$, niin

$$x^r(x - y)(x - z) + y^r(y - x)(y - z) + z^r(z - x)(z - y) \;\geq\; 0. \qquad (2)$$

Tuonnempana esitettävä Muirheadin lause edellyttää hieman esivalmisteluja ja uusia merkintätapoja, joita voidaan käyttää myös Schurin epäyhtälön yhteydessä.

Olkoon $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$. Jos f on n:n reaalimuuttujan funktio, niin merkinnällä

$$\sum\nolimits^! f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad (3)$$

tarkoitamme funktion f arvojen summaa, jossa vektorin $\boldsymbol{x}$ koordinaatit on permutoitu kaikilla mahdollisilla tavoilla. Summassa on siis $n!$ termiä. Jos erityisesti $x_1, \ldots, x_n \geq 0$, niin sanomme vektoria $\boldsymbol{x}$ ei-negatiiviseksi. Jos $\boldsymbol{x}$ ja $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ ovat ei-negatiivisia ja

$$f(x_1, \ldots, x_n) \;=\; x_1^{a_1} \cdot x_2^{a_2} \cdot \ldots \cdot x_n^{a_n},$$

niin (3) merkitään

$$T[a_1, a_2, \ldots, a_n](x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad \text{tai lyhyemmin} \quad T[\boldsymbol{a}], \tag{4}$$

jos vektorista $\boldsymbol{x}$ ei ole epäselvyyttä. Tässä tapauksessa voimme rajoituksetta olettaa, että $a_1 \geq \ldots \geq a_n$, sillä summa (4) voidaan ajatella muodostetuksi myös siten, että $\boldsymbol{a}$-vektorin koordinaatit permutoidaan kaikilla mahdollisilla tavoilla.

Esim. 1 $T[3,2,1](x,y,z) = x^3y^2z + x^3yz^2 + x^2y^3z + x^2yz^3 + xy^3z^2 + xy^2z^3$.

Esim. 2 $\mathcal{AG}$-epäyhtälö voidaan kirjoittaa muotoon

$$T[1, 0, \ldots, 0] \geq T\left[\tfrac{1}{n}, \tfrac{1}{n}, \ldots, \tfrac{1}{n}\right],$$

sillä

$$T[1, 0, \ldots, 0](x_1, x_2, \ldots, x_n) \;=\; (n-1)! \cdot (x_1 + x_2 + \ldots + x_n)$$

ja

$$T\left[\tfrac{1}{n}, \tfrac{1}{n}, \ldots, \tfrac{1}{n}\right] \;=\; n! \cdot \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n}.$$

Esim. 3 Lauseen 5.3 ja seurauksen 5.4 epäyhtälöt voidaan kirjoittaa muotoon

$$T[a+2b, 0, 0] + T[a, b, b] \;\geq\; 2T[a+b, b, 0] \quad \text{ja}$$

$$T[r+2, 0, 0] + T[r, 1, 1] \;\geq\; 2T[r+1, 1, 0].$$

Sijoittamalla viimeksi mainittuun $r = 1$ saadaan

$$T[3, 0, 0] + T[1, 1, 1] \;\geq\; 2T[2, 1, 0]$$

eli eksplisiittisemmin

$$x^3 + y^3 + z^3 + 3xyz \;\geq\; x^2y + xy^2 + y^2z + yz^2 + z^2x + zx^2.$$

Yhtäsuuruus on voimassa edellä annetun yhtäsuuruusehdon mukaisesti.

Esim. 4 Todistimme (s. 43, esim. 4) Karamatan lauseen avulla epäyhtälön

$$(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b) \;\leq\; abc,$$

missä $a, b, c \geq 0$. Se todistuu välittömästi myös Schurin epäyhtälön avulla, sillä sulut auki kertomalla se pelkistyy edellisen esimerkin jälkimmäiseksi epäyhtälöksi.

Epäyhtälöt

$$T[\boldsymbol{a}] \;\geq\; T[\boldsymbol{b}] \quad \text{tai} \quad T[\boldsymbol{a}] \;\leq\; T[\boldsymbol{b}]$$

eivät ole yleisesti voimassa mielivaltaisille $\boldsymbol{x}$-vektoreille. Esimerkiksi

$$T[2,1](x,y) \;\geq\; T[1,0](x,y), \quad \text{jos} \quad xy \geq 1$$

ja

$$T[2,1](x,y) \;\leq\; T[1,0](x,y), \quad \text{jos} \quad xy \leq 1.$$

Sitävastoin

$$T[2,0](x,y) \;\geq\; T[1,1](x,y)$$

on voimassa x:n ja y:n arvosta riippumatta. Jälkimmäisessä tapauksessa eksponenttivektorien välillä vallitsee relaatio (2,0) $\succ$ (1,1), mutta edeltävässä esimerkissä näin ei ole. Epäyhtälön voimassaolo liittyykin juuri tähän relaatioon, mikä nähdään seuraavassa lauseessa.

Lause 5.6 (Muirheadin lause) Olkoot $\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ ja $\boldsymbol{b} = (b_1, \ldots, b_n)$ ei-negatiivisia vektoreita. Tällöin

$$T[\boldsymbol{a}](x_1, \ldots, x_n) \leq T[\boldsymbol{b}](x_1, \ldots, x_n)$$

kaikilla ei-negatiivisilla vektoreilla $(x_1, \ldots, x_n)$, jos ja vain jos $\boldsymbol{a} \prec \boldsymbol{b}$. Yhtäsuuruus on voimassa, jos ja vain jos $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$ tai $x_1 = \ldots = x_n$.

Todistus [14, 39–40] Todistamme aluksi ehdon välttämättömyyden. Olkoot $a_1 \geq \ldots \geq a_n$ ja $b_1 \geq \ldots \geq b_n$ sekä

$$T[\boldsymbol{a}](x_1, \ldots, x_n) \leq T[\boldsymbol{b}](x_1, \ldots, x_n) \tag{5}$$

kaikilla ei-negatiivisilla vektoreilla $(x_1, \ldots, x_n)$. Silloin (5) on voimassa myös, kun $x_1 = \ldots = x_n = c$. Siis

$$c^{a_1+\ldots+a_n} \;\leq\; c^{b_1+\ldots+b_n}.$$

Koska tämän epäyhtälön on oltava voimassa silloin, kun esimerkiksi $c = \frac{1}{2}$ ja kun $c = 2$, on eksponenttien välttämättä oltava samat, eli

$$a_1 + \ldots + a_n = b_1 + \ldots + b_n. \tag{6}$$

Olkoon seuraavaksi $x_1 = \ldots = x_k = c$ ja $x_{k+1} = \ldots = x_n = 1$. Summissa $T[\boldsymbol{a}]$ ja $T[\boldsymbol{b}]$ c:n korkeimmat potenssit ovat $a_1+\ldots+a_k$ ja $b_1+\ldots+b_k$. Koska epäyhtälön $T[\boldsymbol{a}] \leq T[\boldsymbol{b}]$ on oltava voimassa myös hyvin suurilla c:n arvoilla, on

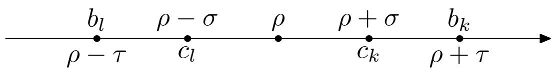
$$a_1 + \ldots + a_k \leq b_1 + \ldots + b_k \quad \text{kaikilla} \quad k = 1, \ldots, n-1. \tag{7}$$

Yhtälöstä (6) ja epäyhtälöistä (7) seuraa, että $\boldsymbol{a} \prec \boldsymbol{b}$.

Ehdon riittävyys todistetaan useammassa vaiheessa. Aluksi määritellään $\boldsymbol{b}$-vektoriin kohdistuva operaatio L. Olkoon siis

$$\boldsymbol{b} = (b_1, \ldots, b_n), \quad \text{missä} \quad b_1 \geq \ldots \geq b_n,$$

sekä b_k ja b_l kaksi koordinaattia, joiden välillä vallitsee erisuuruus $b_k > b_l$. Tällöin $b_k = \rho + \tau$ ja $b_l = \rho - \tau$, missä $0 < \tau \leq \rho$. Valitsemalla σ siten, että



$0 \leq \sigma < \tau \leq \rho$, voimme määritellä vektorin $\boldsymbol{c} = L(\boldsymbol{b})$ seuraavasti:

$$\begin{aligned} c_k &= \rho + \sigma, \\ c_l &= \rho - \sigma, \\ c_\imath &= b_\imath, \quad \text{kun} \quad \imath \neq k \text{ ja } \imath \neq l. \end{aligned}$$

Todistamme, että $\boldsymbol{c} \prec \boldsymbol{b}$. Vektorin $\boldsymbol{c}$ määritelmästä seuraa, että

$$b_1 + \ldots + b_{k-1} \geq c_1 + \ldots + c_{k-1},$$

koska alkupään koordinaatit ovat samat. Edelleen

$$b_1 + \ldots + b_{k-1} + b_k \geq c_1 + \ldots + c_{k-1} + c_k,$$

koska $b_k > c_k$, ja

$$b_1 + \ldots + b_k + \ldots + b_{l-1} + b_l \geq c_1 + \ldots + c_k + \ldots + c_{l-1} + c_l,$$

koska $b_k + b_l = c_k + c_l = 2\rho$. Loppupään osalta koordinaatit ovat samat kummassakin vektorissa, joten majorointiin vaadittavat epäyhtälöt ovat voimassa, ja lopuksi ehdosta $b_k + b_l = c_k + c_l = 2\rho$ seuraa myös, että $\sum b_\imath = \sum c_\imath$.

Seuraavaksi todistamme, että $T[\boldsymbol{c}] \leq T[\boldsymbol{b}]$, ja että tässä epäyhtälössä yhtäsuuruus on voimassa, jos ja vain jos $x_1 = \ldots = x_n$. Koska summissa $T[\boldsymbol{c}]$ ja $T[\boldsymbol{b}]$ käydään läpi kaikki x-lukujen permutaatiot, voimme rajoituksetta olettaa, että $k = 1$ ja $l = 2$. Tällöin

$$\begin{aligned} T[\boldsymbol{b}] - T[\boldsymbol{c}] &= \sum ! \, x_3^{b_3} \ldots x_n^{b_n} \left(x_1^{\rho+\tau} x_2^{\rho-\tau} + x_1^{\rho-\tau} x_2^{\rho+\tau} - x_1^{\rho+\sigma} x_2^{\rho-\sigma} - x_1^{\rho-\sigma} x_2^{\rho+\sigma} \right) \\ &= \sum ! \, (x_1 x_2)^{\rho-\tau} x_3^{b_3} \ldots x_n^{b_n} \left(x_1^{2\tau} - x_1^{\tau+\sigma} x_2^{\tau-\sigma} + x_2^{2\tau} - x_1^{\tau-\sigma} x_2^{\tau+\sigma} \right) \\ &= \sum ! \, (x_1 x_2)^{\rho-\tau} x_3^{b_3} \ldots x_n^{b_n} \left(x_1^{\tau+\sigma} (x_1^{\tau-\sigma} - x_2^{\tau-\sigma}) - x_2^{\tau+\sigma} (x_1^{\tau-\sigma} - x_2^{\tau-\sigma}) \right) \\ &= \sum ! \, (x_1 x_2)^{\rho-\tau} x_3^{b_3} \ldots x_n^{b_n} (x_1^{\tau+\sigma} - x_2^{\tau+\sigma})(x_1^{\tau-\sigma} - x_2^{\tau-\sigma}) \;\geq\; 0. \end{aligned}$$

Yhtäsuuruus on voimassa, jos ja vain jos $x_1 = x_2$, ja koska nämä itse asiassa ovat mielivaltaisesti valittuja x-koordinaatteja, on yhtäsuuruus voimassa, jos ja vain jos $x_1 = \ldots = x_n$.

Lopuksi todistamme, että jos $\boldsymbol{a} \prec \boldsymbol{b}$ ja $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{b}$, niin $\boldsymbol{a}$ voidaan muodostaa kohdistamalla äärellinen määrä operaatioita L vektoriin $\boldsymbol{b}$. Koska siis $\boldsymbol{a} \prec \boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{b}$, $a_1 \geq \ldots \geq a_n$ ja $b_1 \geq \ldots \geq b_n$, on erotuksien summa

$$\sum_{\imath=1}^{n} (b_\imath - a_\imath) \;=\; 0,$$

mutta kaikki erotukset $b_\imath - a_\imath$ eivät ole nollia. Johonkin rajaan k asti alkupään erotukset ovat positiivisia ja jostakin rajasta l asti ne ovat negatiivisia. Siis

$$a_k < b_k, \quad a_{k+1} = b_{k+1}, \; \ldots \; a_{l-1} = b_{l-1}, \quad a_l > b_l$$

eli $b_k - a_k$ on viimeinen positiivinen ja $b_l - a_l$ ensimmäinen negatiivinen erotus. Olkoot

$$b_k \;=\; \rho + \tau \quad \text{ja} \quad b_l \;=\; \rho - \tau,$$

sekä

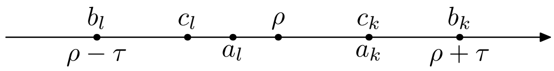
$$\sigma \;=\; \max\{ |\, a_k - \rho \,| \,, \, |\, a_l - \rho \,| \}.$$

Koska $a_k > a_l$, on voimassa vähintään toinen yhtälöistä

$$a_l \;=\; \rho - \sigma \quad \text{tai} \quad a_k \;=\; \rho + \sigma.$$

Koska $a_k < b_k$ ja $a_l > b_l$, on $\sigma < \tau$. Olkoon nyt

$$c_k \;=\; \rho + \sigma, \quad c_l \;=\; \rho - \sigma \quad \text{ja} \quad c_\imath = b_\imath, \; \text{kun } \imath \neq k, l.$$



Luvut b_k, b_l, c_k, c_l sijaitsevat kuvion osoittamalla tavalla, joten $\boldsymbol{c} = L(\boldsymbol{b})$, $\boldsymbol{b} \succ \boldsymbol{c}$ ja epäyhtälö $T[\boldsymbol{b}] \geq T[\boldsymbol{c}]$ on voimassa todistuksen alkuosan mukaan. Koska $c_k = a_k$ tai $c_l = a_l$, erotuksissa $c_\imath - a_\imath$ on nollasta eroavia vähintään yksi vähemmän kuin erotuksissa $b_\imath - a_\imath$, joten $\boldsymbol{c}$ muuttuu $\boldsymbol{a}$:ksi, kun operaatio L toistetaan enintään n kertaa. Jokaisessa toistossa epäyhtälö $T[\boldsymbol{b}] \geq T[\boldsymbol{c}]$ säilyy, ja lopulta siis

$$T[\boldsymbol{b}] \geq T[\boldsymbol{a}],$$

mikä oli todistettava. Yhtäsuuruus on todistuksen alkuosan mukaan voimassa, jos ja vain jos $x_1 = \ldots = x_n$ tai $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$.

Käsittelemme seuraavassa muutamia esimerkkejä Muirheadin lauseen sovelluksista.

Esim. 1 Muirheadin lauseesta seuraa ehkä lyhin mahdollinen todistus $\mathcal{AG}$-epäyhtälölle, sillä

$$(1, 0, \ldots, 0) \succ (\tfrac{1}{n}, \tfrac{1}{n}, \ldots, \tfrac{1}{n}),$$

joten

$$T[1, 0, \ldots, 0] \;\geq\; T[\tfrac{1}{n}, \ldots, \tfrac{1}{n}],$$

mikä on sama kuin $\mathcal{AG}$-epäyhtälö (s. 48, esim. 2). Yhtäsuuruusehto seuraa Muirheadin lauseen yhtäsuuruusehdosta.

Esim. 2 Jos $x, y, z > 0$, niin

$$x^3 + y^3 + z^3 \;\geq\; 3xyz,$$

sillä

$$(3, 0, 0) \succ (1, 1, 1), \quad T[3, 0, 0] \;=\; 2(x^3 + y^3 + z^3) \quad \text{ja} \quad T[1, 1, 1] \;=\; 6xyz.$$

Yhtäsuuruus on voimassa, jos ja vain jos $x = y = z$.

Esim. 3 Solmu-lehden keskustelupalstalla [27] otaksutaan, että kaikille positiivisille luvuille a, b, c pätee epäyhtälö

$$a^6 + b^6 + c^6 + 50abc(ab^2 + bc^2 + ca^2) \geq 51abc(a^2b + b^2c + c^2a).$$

Yhtä vaikealta näyttää epäyhtälö

$$a^6 + b^6 + c^6 + 50abc(a^2b + b^2c + c^2a) \geq 51abc(ab^2 + bc^2 + ca^2).$$

Näistä vähintään toinen on voimassa, sillä niiden summa pelkistyy epäyhtälöksi

$$T[6, 0, 0] \;\geq\; T[3, 2, 1],$$

mikä Muirheadin lauseen perusteella on tosi.

Seuraava esimerkki on harjoitustehtävänä artikkelissa [14] ja se on ollut ehdolla kilpatehtäväksi vuoden 1998 matematiikkaolympialaisiin.

Esim. 4 Jos $a, b, c \in \mathbb{R}_+$ ja $abc = 1$, niin

$$\frac{a^3}{(1+b)(1+c)} + \frac{b^3}{(1+c)(1+a)} + \frac{c^3}{(1+a)(1+b)} \geq \frac{3}{4}.$$

Yhtäsuuruus on voimassa, jos ja vain jos $a = b = c = 1$.
Epäyhtälö saadaan muuttujien suhteen tasa-asteiseksi kirjoittamalla se aluksi muotoon

$$4a^3(1+a) + 4b^3(1+b) + 4c^3(1+c) \geq 3(1+a)(1+b)(1+c)$$

ja sijoittamalla näin saatuun epäyhtälöön $1 = (abc)^{\frac{1}{3}}$. Kertomalla sulut auki, epäyhtälö tulee yhtäpitävästi muotoon

$$2\,T[4,0,0] + 2\,T[\tfrac{10}{3}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}] \geq T[\tfrac{4}{3}, \tfrac{4}{3}, \tfrac{4}{3}] + \tfrac{3}{2}\,T[2,1,1] + \tfrac{3}{2}\,T[\tfrac{5}{3}, \tfrac{5}{3}, \tfrac{2}{3}]$$

ja edelleen

$$4\,T[4,0,0] + 4\,T[\tfrac{10}{3}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}] \geq 2\,T[\tfrac{4}{3}, \tfrac{4}{3}, \tfrac{4}{3}] + 3\,T[2,1,1] + 3\,T[\tfrac{5}{3}, \tfrac{5}{3}, \tfrac{2}{3}]. \tag{8}$$

Muirheadin lauseen mukaan

$$\begin{aligned}
3\,T[4,0,0] &\geq 3\,T[2,1,1], \\
T[4,0,0] &\geq T[\tfrac{5}{3}, \tfrac{5}{3}, \tfrac{2}{3}], \\
2\,T[\tfrac{10}{3}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}] &\geq 2\,T[\tfrac{4}{3}, \tfrac{4}{3}, \tfrac{4}{3}] \qquad \text{ja} \\
2\,T[\tfrac{10}{3}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}] &\geq 2\,T[\tfrac{5}{3}, \tfrac{5}{3}, \tfrac{2}{3}],
\end{aligned}$$

mistä yhteenlaskemalla saadaan (8). Yhtäsuuruusehto seuraa välittömästi Muirheadin lauseesta ja oletuksesta $abc = 1$.

Kadelburg [13] kirjoittaa matematiikkaolympialaisten epäyhtälötehtävistä, että niiden laatijat luultavasti käyttävät Karamatan, Schurin, Muirheadin ym. epäyhtälöitä tehtäviä konstruoidessaan ja keksivät elementaariset, puhtaasti koulumatematiikkaan perustuvat ratkaisut myöhemmin. On selvää, että tehtävää ei voi käyttää kilpailussa, ellei alkeismatematiikkaan perustuvaa ratkaisua ole näköpiirissä. Alkeellisen ratkaisun löytäminen edellyttää usein huomattavaa nokkeluutta ja rajoitettu ratkaisuaika lisää vielä suorituksen vaativuutta. Luultavasti olympialaisiin osallistuvat oppivat kansallisissa valmennustiimeissään ainakin $\mathcal{AG}$-epäyhtälön, Cauchyn-Schwarzin epäyhtälön sekä suuruusjärjestyksiin liittyviä tekniikoita.

Seuraava esimerkki on harjoitustehtävänä artikkelissa [14] ja se oli olympiatehtävänä vuonna 1984.

Esim. 5 Osoitettava, että jos $x, y, z \in [0, 1]$ ja $x + y + z = 1$, niin

$$0 \le xy + yz + zx - 2xyz \le \frac{7}{27}.$$

Vasemmanpuoleinen epäyhtälö todistuu oletuksen $x + y + z = 1$ avulla suoraviivaisesti:

$$\begin{aligned} xy + yz + zx - 2xyz &= xy(x + y + z) + yz(x + y + z) + zx(x + y + z) - 2xyz \\ &= x^2y + xy^2 + y^2z + yz^2 + x^2z + xz^2 + xyz, \end{aligned}$$

ja koska luvut x, y, z ovat ei-negatiivisia, on

$$x^2y + xy^2 + y^2z + yz^2 + x^2z + xz^2 + xyz \ge 0.$$

Oikeanpuoleisen epäyhtälön todistamiseksi kirjoitamme sen äskeistä ja oletusta $x + y + z = 1$ hyväksi käyttäen muotoon

$$54(x^2y + xy^2 + y^2z + yz^2 + x^2z + xz^2 + xyz) \le 14(x + y + z)^3.$$

Näin saatu epäyhtälö on muuttujien suhteen tasa-asteinen, ja se sievenee epäyhtälöksi

$$7\,T[3, 0, 0] + 5\,T[1, 1, 1] \ge 12\,T[2, 1, 0]. \tag{9}$$

Muirheadin lauseen mukaan

$$2\,T[3, 0, 0] \ge 2\,T[2, 1, 0], \tag{10}$$

ja Schurin epäyhtälöstä

$$T[a + 2b, 0, 0] + T[a, b, b] \ge 2\,T[a + b, b, 0]$$

seuraa arvoilla $a = b = 1$, että

$$5\,T[3, 0, 0] + 5\,T[1, 1, 1] \ge 10\,T[2, 1, 0]. \tag{11}$$

Laskemalla yhteen epäyhtälöt (10) ja (11) saadaan (9), mikä todistaa alkuperäisen kaksoisepäyhtälön oikean puolen.

Tehtävän elementaarinen ratkaisu löytyy kirjasta [17].

5.4 Geometrisia sovelluksia

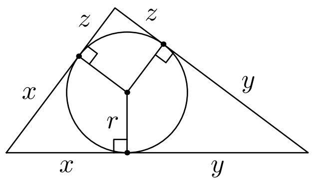
Tarkastelemme kolmiota, jonka sivut ovat a, b, c, piirin puolikas p ja ala Δ. Johdamme epäyhtälön

$$\Delta^2 \le \frac{1}{16}abc(a+b+c), \tag{1}$$

joka on tarkempi kuin epäyhtälö [21, 8.B.9], [6, s. 11]

$$\Delta^2 \le \frac{p^4}{27} = \frac{1}{432}(a+b+c)^4. \tag{2}$$

Kolmion sisään piirretty ympyrä sivuaa kolmion sivuja a, b, c pisteissä, jotka



jakavat ne kuvion osoittamalla tavalla osiin $a = x+y$, $b = y+z$ ja $c = z+x$. Näistä yhtälöistä seuraa

$$x = \frac{1}{2}(a+c-b)(>0), \quad y = \frac{1}{2}(a+b-c)(>0) \quad \text{ja} \quad z = \frac{1}{2}(b+c-a)(>0).$$

Kertomalla keskenään $\mathcal{AG}$-epäyhtälöt [6, s. 12]

$$2\sqrt{xy} \le x+y, \quad 2\sqrt{yz} \le y+z, \quad 2\sqrt{zx} \le z+x$$

saadaan

$$8xyz \le (x+y)(y+z)(z+x),$$

mikä on sama kuin sivuilla 43 ja 49 yleisemmillä edellytyksillä todistamamme epäyhtälö

$$(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b) \le abc. \tag{3}$$

Heronin kaavan mukaan

$$\Delta^2 = p(p-a)(p-b)(p-c),$$

missä $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$, ja koska (3) on voimassa, on

$$\Delta^2 = \frac{1}{16}(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a) \le \frac{1}{16}abc(a+b+c).$$

Siis (1) on voimassa. Se on tarkempi kuin (2), sillä $\mathcal{AG}$-epäyhtälön perusteella

$$abc \le \frac{1}{27}(a+b+c)^3,$$

joten

$$\frac{1}{16}abc(a+b+c) \le \frac{1}{16\cdot 27}(a+b+c)^4 = \frac{1}{432}(a+b+c)^4.$$

Epäyhtälön (1) avulla saadaan yläraja myös kolmion sisään piirretyn ympyrän säteelle r, sillä

$$r^2 = \frac{4\Delta^2}{(a+b+c)^2} \le \frac{abc}{4(a+b+c)}.$$

Karamatan epäyhtälön avulla voidaan todistaa äärettömän monta kolmion sivujen välistä epäyhtälöä käyttämällä sitä, että

$$(a+b-c,\ a+c-b,\ b+c-a) \succ (a,b,c).$$

Jos f on aidosti konveksi funktio, niin

$$f(a+b-c)+f(a+c-b)+f(b+c-a) \ge f(a)+f(b)+f(c),$$

ja jos g on aidosti konkaavi, niin

$$g(a+b-c)+g(a+c-b)+g(b+c-a) \le g(a)+g(b)+g(c).$$

Yhtäsuuruus on voimassa, jos ja vain jos $a=b=c$. Esimerkiksi, jos $n\,(\ge 2)$ on kokonaisluku, niin positiivisille luvuille määritelty funktio $f(x)=x^{-n}$ on aidosti konveksi ja ei-negatiivisille luvuille määritelty funktio $g(x)=\sqrt[n]{x}$ on aidosti konkaavi, joten

$$(a+b-c)^{-n}+(a+c-b)^{-n}+(b+c-a)^{-n} \ge a^{-n}+b^{-n}+c^{-n}$$

ja

$$\sqrt[n]{a+b-c}+\sqrt[n]{a+c-b}+\sqrt[n]{b+c-a} \le \sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}+\sqrt[n]{c}.$$

Lähteessä [13, s. 101] mainitaan, että vuonna 1996 Aasian ja Tyynenmeren alueen olympialaisissa oli tehtävänä todistaa tämä g-funktiosta saatava epäyhtälö tapauksessa $n=2$, mikä siis Karamatan epäyhtälön avulla todistuu vaivatta. Elementaarinen todistus on työläämpi.

Lähteissä [21, s. 193 - 202] ja [6, s. 10 - 13] käsitellään kolmion sivuja koskevien epäyhtälöiden lisäksi myös eräitä kolmion kulmiin liittyviä epäyhtälöitä. Esimerkiksi, koska $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ ja funktio $f(x) = \cos(x/2)$ on aidosti konkaavi, saadaan Jensenin epäyhtälöä soveltamalla välittömästi

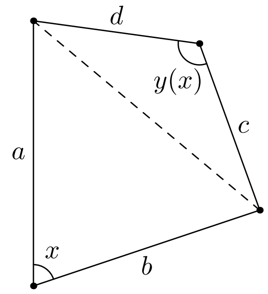
$$\cos\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\beta}{2} + \cos\frac{\gamma}{2} \leq \frac{3\sqrt{3}}{2},$$

missä yhtäsuuruus on voimassa, jos ja vain jos $\alpha = \beta = \gamma = \frac{\pi}{3}$. Edelleen, jos kolmio on teräväkulmainen, saadaan Jensenin epäyhtälön avulla epäyhtälöt

$$\begin{aligned} \tan\alpha + \tan\beta + \tan\gamma &\geq 3\sqrt{3}, \\ \cos\alpha\,\cos\beta\,\cos\gamma &\leq \frac{1}{8}, \end{aligned}$$

sillä funktio $g(x) = \tan x$ on aidosti konveksi ja funktio $h(x) = \ln\cos x$ aidosti konkaavi välillä $]0, \frac{\pi}{2}[$. Molemmissa yhtäsuuruus on voimassa, jos ja vain jos $\alpha = \beta = \gamma = \frac{\pi}{3}$. Nämä kaikki epäyhtälöt todistuvat välittömästi myös Karamatan epäyhtälön avulla, sillä $(\alpha, \beta, \gamma) \succ (\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3})$.

Nelikulmion pinta-alalle saadaan sivujen pituuksista riippuva yläraja yksinkertaisesti määrittämällä pinta-alan suurin mahdollinen arvo. On selvää, että suurin nelikulmio on kupera ja että sen jokainen sivu on lyhyempi kuin kolmen muun summa. Olkoot sivut a, b, c ja d. Nelikulmio ei ole "jäykkä"



kuten kolmio, vaan sen kulmia voidaan muuttaa sivujen pituuksien pysyessä ennallaan. Jos vastakkaiset kulmat ovat kuvion mukaisesti x ja $y(x)$, niin niiden välillä vallitsee yhtälö

$$a^2 + b^2 - 2ab\cos x = c^2 + d^2 - 2cd\cos y(x), \tag{4}$$

mistä $y(x)$ ratkeaa derivoituvien alkeisfunktioiden yhdisteenä. Derivoimalla (4) implisiittisesti x:n suhteen saadaan

$$y'(x) = \frac{ab}{cd} \cdot \frac{\sin x}{\sin y}. \tag{5}$$

Derivaatta $y'(x) > 0$, koska kulmat x ja $y(x)$ kuuluvat välille $]0, \pi[$. Nelikulmion pinta-ala

$$A(x) = \frac{1}{2}ab\sin x + \frac{1}{2}cd\sin y(x).$$

Määritämme sen suurimman arvon. Yhtälön (5) avulla A:n derivaatta sievenee muotoon

$$A'(x) = \frac{ab}{2}\frac{\sin(x+y)}{\sin y}.$$

Jos $a+b \geq c+d$, niin nelikulmiota voidaan muuntaa niin, että $y(x) = \pi$, ja jos $a+b \leq c+d$, niin muuntaminen voidaan tehdä niin, että $x = \pi$. Molemmissa tapauksissa $x + y(x) > \pi$. Nyt joko $b + c \geq a + d$ tai $a + d \geq b + c$, joten nelikulmio voidaan muuntaa myös kolmioksi, jonka kaksi kulmaa ovat x ja $y(x)$. Tässä tapauksessa $x + y(x) < \pi$. Siis, $A'(x) > 0$, kun $x + y(x) < \pi$, $A'(x) = 0$, kun $x + y(x) = \pi$ ja $A'(x) < 0$, kun $x + y(x) > \pi$, mikä osoittaa, että A:n suurin arvo saavutetaan silloin, kun $x + y(x) = \pi$, jolloin kyseessä on jännenelikulmio. Olkoon sen pinta-ala $\mathfrak{A}$. Koska tällöin $y(x) = \pi - x$, on $\sin y(x) = \sin x$, mistä seuraa

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{2}ab\sin x + \frac{1}{2}cd\sin y(x) = \frac{1}{2}(ab+cd)\sin x,$$

ja edelleen

$$\mathfrak{A}^2 = \frac{1}{4}(ab+cd)^2\sin^2 x = \frac{1}{4}(ab+cd)^2(1-\cos x)(1+\cos x).$$

Koska $\cos y(x) = -\cos x$, saadaan yhtälöstä (4)

$$\cos x = \frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2(ab+cd)}, \quad \text{joten}$$

$$\begin{aligned}
\mathfrak{A}^2 &= \frac{1}{4}(ab+cd)^2(1-\cos x)(1+\cos x) \\
&= \frac{1}{4}(ab+cd)^2\Big(1 - \frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2(ab+cd)}\Big)\Big(1 + \frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2(ab+cd)}\Big) \\
&= \frac{1}{16}(2ab+2cd+a^2+b^2-c^2-d^2)(2ab+2cd+c^2+d^2-a^2-b^2) \\
&= \frac{1}{16}\Big((a+b)^2-(c-d)^2\Big)\Big((c+d)^2-(a-b)^2\Big) \\
&= \frac{1}{16}(a+b+c-d)(a+b+d-c)(c+d+a-b)(c+d+b-a) \\
&= (p-a)(p-b)(p-c)(p-d), \quad \text{missä} \quad p = \frac{1}{2}(a+b+c+d).
\end{aligned}$$

Kokoamme tuloksen lauseeksi. (Vrt. [21, s. 209].)

Lause 5.7 Jos nelikulmion sivut ovat a, b, c ja d, niin sen pinta-ala

$$A \le \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)} = \mathfrak{A},$$

missä p on nelikulmion piirin puolikas. Yhtäsuuruus on voimassa, jos ja vain jos nelikulmio on jännenelikulmio.

Jännenelikulmion ala $\mathfrak{A}$ on sivujen pituuksien symmetrinen funktio, joten se on riippumaton sivujen suuruusjärjestyksestä. Erityisesti, koska

$$\mathfrak{A}^2 = \frac{1}{16}\Big((a+b)^2-(c-d)^2\Big)\Big((c+d)^2-(a-b)^2\Big),$$

on

$$\mathfrak{A}^2 \le \frac{1}{16}(a+b)^2(c+d)^2,$$

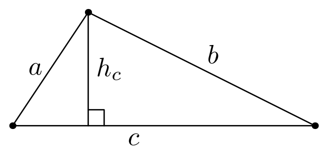
mistä saamme jännenelikulmion pinta-alalle yksinkertaisen ylärajan

$$\mathfrak{A} \le \frac{1}{4}(a+b)(c+d).$$

Antamalla d:n lähestyä nollaa saadaan kolmion pinta-alaa koskeva epäyhtälö

$$\Delta \le \frac{1}{4}(a+b)c. \tag{6}$$

Tälle löytyy triviaalikin todistus, nimittäin sivun c vastainen korkeus toteut-



taa epäyhtälön $h_c \le \min(a,b) \le \frac{1}{2}(a+b)$, joten

$$\Delta = \frac{1}{2}h_c c \le \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}(a+b)c = \frac{1}{4}(a+b)c.$$

Epäyhtälön (6) oikea puoli ei ole symmetrinen a:n, b:n ja c:n funktio, eli saamme itse asiassa kolme erilaista ylärajaa kolmion pinta-alalle:

$$\Delta \le \frac{1}{4}(a+b)c, \quad \Delta \le \frac{1}{4}(a+c)b \quad \text{ja} \quad \Delta \le \frac{1}{4}(b+c)a.$$

Sopivilla lukuarvoilla kokeilemalla nähdään, että ne eivät ole vertailullisia (ei siis aina parempia tai aina huonompia) edellä todistetun epäyhtälön (1) kanssa. Keskenään ne ovat sikäli vertailullisia, että jos $a \ge b \ge c$, niin

$$\frac{1}{4}(a+b)c \le \frac{1}{4}(a+c)b \le \frac{1}{4}(b+c)a.$$

6 Schur-konveksisuudesta

Schur-konveksisuuteen perustuva menetelmä on tehokas mutta verraten vähän tunnettu monen tyyppisten epäyhtälöiden todistamiseen. Myös se perustuu majorointiin. Käsittelemme aiheesta ainoastaan esimerkkeihimme riittävät alkeet.

6.1 Schur-konveksisuudesta

Tässä osaluvussa tarkastelemme symmetrisiä funktioita

$$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{tai} \quad f : \mathbb{R}_+^n \longrightarrow \mathbb{R},$$

jolloin voimme rajoituksetta olettaa, että niiden yhteydessä esiintyvät vektorit ovat väheneviä jonoja. Funktio f on *Schur-konveksi*, jos $f(\boldsymbol{x}) \geq f(\boldsymbol{y})$ aina, kun $\boldsymbol{x} \succ \boldsymbol{y}$. Se on *aidosti Schur-konveksi*, jos $f(\boldsymbol{x}) > f(\boldsymbol{y})$ aina, kun $\boldsymbol{x} \succ \boldsymbol{y}$ aidosti. Jos funktion arvojen suuruusjärjestykset ovat äskeiselle vastakkaisia, niin f on *Schur-konkaavi* ja *aidosti Schur-konkaavi*.

Olkoon $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Merkitsemme

$$\begin{array}{ccl} z_1 & = & x_1, \\ z_2 & = & x_1 + x_2, \\ \dots & \dots & \dots \\ z_n & = & x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1} + x_n. \end{array}$$

Funktio f on Schur-konveksi, jos ja vain jos se on kasvava muuttujien $z_1, \dots, z_{n-1}$ suhteen. Se on aidosti Schur-konveksi, jos ja vain jos se on aidosti kasvava näiden muuttujien suhteen. Jos f lisäksi on jatkuvasti derivoituva kaikkien muuttujien suhteen, niin f on Schur-konveksi, jos ja vain jos

$$\frac{\partial f}{\partial z_\imath} \geq 0 \tag{1}$$

kaikilla $\imath \in \{1, 2, \dots, n-1\}$. Muunnamme ehdon (1) käyttökelpoisemmaksi. Koska

$$\begin{array}{ccl} x_1 & = & z_1, \\ x_2 & = & z_2 - z_1, \\ \dots & \dots & \dots \\ x_n & = & z_n - z_{n-1}, \end{array}$$

saamme (1):stä ketjusääntöä soveltamalla

$$\frac{\partial f}{\partial z_\imath} = \frac{\partial f}{\partial x_\imath}\frac{\partial x_\imath}{\partial z_\imath} + \frac{\partial f}{\partial x_{\imath+1}}\frac{\partial x_{\imath+1}}{\partial z_\imath} = \frac{\partial f}{\partial x_\imath} - \frac{\partial f}{\partial x_{\imath+1}} \geq 0. \tag{2}$$

Jos $1 \leq \imath < \jmath \leq n$, niin laskemalla yhteen epäyhtälöt

$$\frac{\partial f}{\partial x_\imath} - \frac{\partial f}{\partial x_{\imath+1}} \geq 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x_{\imath+1}} - \frac{\partial f}{\partial x_{\imath+2}} \geq 0, \quad \dots \quad \frac{\partial f}{\partial x_{\jmath-1}} - \frac{\partial f}{\partial x_\jmath} \geq 0$$

saamme

$$\frac{\partial f}{\partial x_\imath} - \frac{\partial f}{\partial x_\jmath} \geq 0. \tag{3}$$

Jos (3) on voimassa kaikilla $1 \leq \imath < \jmath \leq n$, niin myös (2) on voimassa, joten f on Schur-konveksi. Koska $x_\imath \geq x_\jmath$ aina kun $\imath < \jmath$, ovat erotukset

$$x_\imath - x_\jmath \quad \text{ja} \quad \frac{\partial f}{\partial x_\imath} - \frac{\partial f}{\partial x_\jmath}$$

samanmerkkiset kaikilla $\imath \neq \jmath$ ja niiden tulo

$$(x_\imath - x_\jmath)\left(\frac{\partial f}{\partial x_\imath} - \frac{\partial f}{\partial x_\jmath}\right) \geq 0.$$

Kokoamme saadun tuloksen lauseeksi.

Lause 6.1 Jatkuvasti derivoituva symmetrinen funktio f on Schur-konveksi, jos ja vain jos

$$(x_\imath - x_\jmath)\left(\frac{\partial f}{\partial x_\imath} - \frac{\partial f}{\partial x_\jmath}\right) \geq 0$$

kaikilla $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ ja kaikilla $\imath, \jmath \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Schur-konkaavisuuden määritelmän perusteella saamme välittömän seurauslauseen.

Seuraus 6.2 Jatkuvasti derivoituva, symmetrinen funktio f on Schur-konkaavi, jos ja vain jos

$$(x_\imath - x_\jmath)\left(\frac{\partial f}{\partial x_\imath} - \frac{\partial f}{\partial x_\jmath}\right) \leq 0$$

kaikilla $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ ja kaikilla $\imath, \jmath \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Johdamme seuraavassa riittävän ehdon sille, että Schur-konveksi funktio f on aidosti Schur-konveksi. (Vrt. [21, s. 56].) Tällainen funktio on siis kasvava muuttujien $z_1, \dots, z_{n-1}$ suhteen, jolloin sen osittaisderivaatat näiden muuttujien suhteen ovat ei-negatiivisia. Jos nyt lisäksi tämä funktio on kahdesti derivoituva näiden muuttujien suhteen ja jos

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z_\imath^2} > 0, \quad \text{kaikilla} \quad \imath \in \{1, 2, \dots, n-1\}, \tag{4}$$

niin funktion ensimmäisen kertaluvun derivaatat ovat aidosti kasvavia muuttujien $z_\imath$ suhteen. Koska ne ovat ei-negatiivisia, ne saavat arvon 0 enintään yhdessä pisteessä ja ovat muualla positiivisia. Tällöin funktio f on aidosti kasvava muuttujien $z_\imath$ suhteen, siis aidosti Schur-konveksi.

Muutamme ketjusääntöä soveltaen ehdon (4) käytännöllisempään muotoon. Yhtälön (2) mukaan

$$\frac{\partial f}{\partial z_\imath} = \frac{\partial f}{\partial x_\imath}\frac{\partial x_\imath}{\partial z_\imath} + \frac{\partial f}{\partial x_{\imath+1}}\frac{\partial x_{\imath+1}}{\partial z_\imath} = \frac{\partial f}{\partial x_\imath} - \frac{\partial f}{\partial x_{\imath+1}},$$

joten ehto (4) voidaan kirjoittaa muotoon

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z_\imath^2} = \frac{\partial}{\partial z_\imath}\left(\frac{\partial f}{\partial x_\imath} - \frac{\partial f}{\partial x_{\imath+1}}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_\imath^2}\frac{\partial x_\imath}{\partial z_\imath} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_{\imath+1}\partial x_\imath}\frac{\partial x_{\imath+1}}{\partial z_\imath} -$$
$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_\imath \partial x_{\imath+1}}\frac{\partial x_\imath}{\partial z_\imath} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_{\imath+1}^2}\frac{\partial x_{\imath+1}}{\partial z_\imath}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_\imath^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_{\imath+1}\partial x_\imath} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_\imath \partial x_{\imath+1}} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_{\imath+1}^2} > 0.$$

Koska jatkossa tarkastelemme pelkästään kahdesti jatkuvasti derivoituvia funktioita, voimme yhdistää sekaderivaatat, jolloin (4) tulee muotoon

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z_\imath^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_\imath^2} - 2\frac{\partial^2 f}{\partial x_{\imath+1}\partial x_\imath} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_{\imath+1}^2} > 0.$$

Kirjoitamme tuloksen lauseeksi.

Lause 6.3 Kahdesti jatkuvasti derivoituva Schur-konveksi funktio f on aidosti Schur-konveksi, jos kaikilla $\imath \in \{1, 2, \dots, n-1\}$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_\imath^2} - 2\frac{\partial^2 f}{\partial x_{\imath+1}\partial x_\imath} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_{\imath+1}^2} > 0.$$

Tällä lauseella on välitön seuraus.

Seuraus 6.4 Kahdesti jatkuvasti derivoituva Schur-konkaavi funktio f on aidosti Schur-konkaavi, jos kaikilla $\imath \in \{1, 2, \dots, n-1\}$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_\imath^2} - 2\frac{\partial^2 f}{\partial x_{\imath+1}\partial x_\imath} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_{\imath+1}^2} < 0.$$

Seuraavissa esimerkeissä todistamme eräitä epäyhtälöitä Schur-konveksisuutta ja -konkaavisuutta soveltaen.

Esim. 1 Todistimme (s. 43, esim. 4 ja s. 49, esim. 4) epäyhtälön

$$(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b) \le abc, \quad (a,b,c \ge 0),$$

soveltamalla Karamatan ja Schurin epäyhtälöitä. Tämä epäyhtälö voidaan todistaa myös Schur-konkaavisuuteen tukeutumalla. Näimme sivulla 34, että

$$(a+b-c, a+c-b, b+c-a) \succ (a,b,c).$$

Funktio $f(x,y,z) = xyz$, $(x,y,z>0)$, on aidosti Schur-konkaavi, sillä

$$(x-y)\left(\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right) = (x-y)(yz-xz) = z(x-y)(y-x) \le 0$$

ja

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2z < 0.$$

Siis

$$f(a+b-c, a+c-b, b+c-a) \le f(a,b,c),$$

mistä väite seuraa. Koska f on aidosti Schur-konkaavi, on yhtäsuuruus voimassa, jos ja vain jos $a=b=c$.

Esim. 2 $\mathcal{AC}$-epäyhtälö voidaan kirjoittaa muotoon

$$\sum_{k=1}^{n} x_k^2 \ge \frac{1}{n}\Big(\sum_{k=1}^{n} x_k\Big)^2, \tag{5}$$

jolloin sen todistaminen Schur-konveksisuuteen tukeutumalla on helppoa.

Tarkastelemme symmetristä funktiota

$$g(x_1,\ldots,,x_n) = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 - \frac{1}{n}\Big(\sum_{k=1}^{n} x_k\Big)^2.$$

Se on Schur-konveksi, nimittäin koska

$$\frac{\partial g}{\partial x_\imath} = 2x_\imath - \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k \quad \text{ja} \quad \frac{\partial g}{\partial x_\jmath} = 2x_\jmath - \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k,$$

on

$$(x_\imath - x_\jmath)\Big(\frac{\partial g}{\partial x_\imath} - \frac{\partial g}{\partial x_\jmath}\Big) = 2(x_\imath - x_\jmath)^2 \ge 0.$$

Edelleen, se on aidosti Schur-konveksi, sillä koska

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x_\imath^2} = 2 - \frac{2}{n}, \quad \frac{\partial^2 g}{\partial x_\imath \partial x_{\imath+1}^2} = -\frac{2}{n} \quad \text{ja} \quad \frac{\partial^2 g}{\partial x_{\imath+1}^2} = 2 - \frac{2}{n},$$

on

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x_\imath^2} - 2\frac{\partial^2 g}{\partial x_\imath \partial x_{\imath+1}} + \frac{\partial^2 g}{\partial x_{\imath+1}^2} = 4.$$

Ehdosta

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \succ (\bar{x}, \bar{x}, \dots, \bar{x})$$

seuraa

$$g(x_1, \dots x_n) \geq g(\bar{x}, \dots \bar{x}) = n\bar{x}^2 - \frac{1}{n}(n\bar{x})^2 = 0,$$

joten (7.3) on voimassa. Yhtäsuuruusehto seuraa g:n aidosta Schur-konveksisuudesta.

Seuraavassa yleistämme epäyhtälön (7.3) eksponenteille $p > 1$, mutta samalla joudumme rajoittamaan x_k:t positiivisiksi.

Esim. 3 Olkoon $p > 1$ ja olkoot $x_1, \dots, x_n > 0$. Tällöin

$$\sum_{k=1}^{n} x_k^p \geq n^{1-p}\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^p, \tag{6}$$

missä yhtäsuuruus on voimassa, jos ja vain jos $x_1 = \dots = x_n$.

Todistamme symmetrisen ja derivoituvan funktion

$$g(x_1, \dots, x_n) = \sum_{k=1}^{n} x_k^p - n^{1-p}\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^p$$

aidosti Schur-konveksiksi, mistä väite seuraa. Koska $p > 1$, on

$$\left(x_\imath - x_\jmath\right)\left(\frac{\partial g}{\partial x_\imath} - \frac{\partial g}{\partial x_\jmath}\right) = p\left(x_\imath - x_\jmath\right)\left(x_\imath^{p-1} - x_\jmath^{p-1}\right) \geq 0,$$

joten g on Schur-konveksi. Edelleen, koska

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x_\imath^2} - 2\frac{\partial^2 g}{\partial x_\imath \partial x_{\imath+1}} + \frac{\partial^2 g}{\partial x_{\imath+1}^2} = p(p-1)\left(x_\imath^{p-2} + x_{\imath+1}^{p-2}\right) > 0,$$

on g myös aidosti Schur-konveksi. Koska

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \succ (\bar{x}, \bar{x}, \dots, \bar{x}),$$

on

$$g(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq g(\bar{x}, \bar{x}, \dots, \bar{x})$$

eli
$$\sum_{k=1}^{n} x_k^p - n^{1-p}\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^p \geq \sum_{k=1}^{n} \bar{x}^p - n^{1-p}\left(\sum_{k=1}^{n} \bar{x}\right)^p = 0,$$
missä g:n aidon Schur-konveksisuuden takia yhtäsuuruus on voimassa, jos ja vain jos $x_1 = \ldots = x_n = \bar{x}$.

Epäyhtälö (6) voidaan kirjoittaa myös muotoon
$$\bar{x} \leq \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k^p\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{7}$$
Tutkimme sen oikean puolen määrittelemää p:n funktiota
$$\phi(p) = \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k^p\right)^{\frac{1}{p}}$$
tarkemmin seuraavassa osaluvussa.

Schur-konkaavisuutta hyödynnetään seuraavassa esimerkissä.

Esim. 4 Reaalilukujen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ kaksittaistulojen $x_\imath x_\jmath$ $(\imath < \jmath)$ summa toteuttaa epäyhtälön
$$\sum_{\imath<\jmath} x_\imath x_\jmath \leq \binom{n}{2}\bar{x}^2.$$
Yhtäsuuruus vallitsee, jos ja vain jos $x_1 = \ldots = x_n = \bar{x}$.

Väitteen todistamiseksi tutkimme symmetristä funktiota
$$g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{\imath<\jmath} x_\imath x_\jmath.$$
Se on Schur-konkaavi, nimittäin koska
$$\frac{\partial g}{\partial x_\imath} = -x_\imath + \sum_{k=1}^{n} x_k \quad \text{ja} \quad \frac{\partial g}{\partial x_\jmath} = -x_\jmath + \sum_{k=1}^{n} x_k,$$
on
$$(x_\imath - x_\jmath)\left(\frac{\partial g}{\partial x_\imath} - \frac{\partial g}{\partial x_\jmath}\right) = (x_\imath - x_\jmath)(x_\jmath - x_\imath) \leq 0.$$
Se on aidosti Schur-konkaavi, sillä koska
$$\frac{\partial^2 g}{\partial x_\imath^2} = -1+1 = 0, \quad \frac{\partial^2 g}{\partial x_\jmath^2} = -1+1 = 0 \quad \text{ja} \quad \frac{\partial^2 g}{\partial x_{\imath+1}\partial x_\imath} = 1,$$

on
$$\frac{\partial^2 g}{\partial x_\imath^2} - 2\frac{\partial^2 g}{\partial x_{\imath+1}\partial x_\imath} + \frac{\partial^2 g}{\partial x_{\imath+1}^2} = -2.$$
Ehdosta $(x_1,\, x_2,\, \ldots\,,\, x_n) \succ (\bar{x},\, \bar{x}\, \ldots\,,\, \bar{x})$ seuraa siis
$$g(x_1,\, x_2,\, \ldots\,,\, x_n) \le g(\bar{x},\, \bar{x},\, \ldots\,,\, \bar{x}) = \binom{n}{2}\bar{x}^2.$$
Yhtäsuuruusehto on voimassa, koska g on aidosti Schur-konkaavi.

6.2 Schlömilchin epäyhtälö

Olkoot $x_1,\, x_2,\, \ldots\,,\, x_n > 0$ ja $p \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Määritellään funktio
$$\phi : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}_+, \qquad \phi(p) = \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n x_k^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$
Määritämme aluksi ϕ:n raja-arvon, kun $p \to 0$. Se onnistuu parhaiten tutkimalla ϕ:n logaritmia. (Vrt. [23, s. 76].) Saamme
$$\ln \phi(p) = \frac{1}{p}\ln\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n x_k^p\right) = \frac{1}{p}\, f(p),$$
missä
$$f(p) = \ln\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n x_k^p\right).$$
Koska $f(0) = 0$, on
$$\lim_{p\to 0} \ln \phi(p) = \lim_{p\to 0} \frac{1}{p}\, f(p) = \lim_{p\to 0} \frac{f(p) - f(0)}{p - 0} = f'(0),$$
ja koska $f'(0) = \ln\,(x_1\, x_2\, \ldots\, x_n)^{\frac{1}{n}}$, on
$$\lim_{p\to 0} \phi(p) = \sqrt[n]{x_1\, x_2\, \ldots\, x_n}.$$
Jos siis määrittelemme funktion ϕ siten, että
$$\phi(p) = \begin{cases} n^{-\frac{1}{p}}\left(x_1^p + \ldots + x_n^p\right)^{\frac{1}{p}}, & \text{kun } p \neq 0, \\ \\ \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n}\,, & \text{kun } p = 0, \end{cases}$$
niin tämä funktio on määritelty ja jatkuva kaikilla $p \in \mathbb{R}$.

Lause 6.5 Olkoot $x_1, \ldots, x_n > 0$ ja

$$\phi(p) = \begin{cases} n^{-\frac{1}{p}}\Big(x_1^p + \ldots + x_n^p\Big)^{\frac{1}{p}}, & \text{kun } p \neq 0, \\ \\ \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n}\,, & \text{kun } p = 0. \end{cases}$$

Jos $p < q$, niin $\phi(p) \leq \phi(q)$, missä yhtäsuuruus on voimassa, jos ja vain jos $x_1 = \ldots = x_n$.

Epäyhtälöä $\phi(p) \leq \phi(q)$ kutsutaan *Schlömilchin epäyhtälöksi.* Sen erikoistapaus

$$\phi(-1) \leq \phi(0) \leq \phi(1)$$

on harmonisen, geometrisen ja aritmeettisen keskiarvon välinen epäyhtälö (lause 2.1).

Todistus Tiedämme (epäyhtälö (7), s. 65), että $\phi(p) \geq \phi(1)$, kun $p > 1$, missä yhtäsuuruus on voimassa, jos ja vain jos $x_1 = \ldots = x_n = \bar{x}$.

Olkoon nyt $p > q > 0$, jolloin $\frac{p}{q} > 1$. Edellisen mukaan $\phi(\frac{p}{q}) \geq \phi(1)$. Soveltamalla tätä lukuihin $x_1^q, \ldots, x_n^q$ saamme

$$n^{-\frac{q}{p}}\left((x_1^q)^{\frac{p}{q}} + \ldots + (x_n^q)^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{q}{p}} \geq n^{-1}\left(x_1^q + \ldots + x_n^q\right),$$

mikä potenssiin $\frac{1}{q}$ korottamalla pelkistyy muotoon

$$\phi(p) = n^{-\frac{1}{p}}\left(x_1^p + \ldots + x_n^p\right)^{\frac{1}{p}} \geq n^{-\frac{1}{q}}\left(x_1^q + \ldots, x_n^q\right)^{\frac{1}{q}} = \phi(q).$$

Siis, jos $p > q > 0$, niin $\phi(p) \geq \phi(q)$, joten ϕ on kasvava välillä $]0, \infty[$.

Jos $q < p < 0$, niin $\frac{q}{p} > 1$ ja $\phi(\frac{q}{p}) \geq \phi(1)$. Soveltamalla tätä lukuihin $x_1^p, \ldots, x_n^p$ saamme

$$n^{-\frac{p}{q}}\left((x_1^p)^{\frac{q}{p}} + \ldots + (x_n^p)^{\frac{q}{p}}\right)^{\frac{p}{q}} \geq n^{-1}\left(x_1^p + \ldots + x_n^p\right),$$

mikä negatiiviseen potenssiin $\frac{1}{p}$ korottamalla pelkistyy muotoon

$$\phi(q) = n^{-\frac{1}{q}}\left(x_1^q + \ldots + x_n^q\right)^{\frac{1}{q}} \leq n^{-\frac{1}{p}}\left(x_1^p + \ldots, x_n^p\right)^{\frac{1}{p}} = \phi(p).$$

Siis, jos $q < p < 0$, niin $\phi(q) \leq \phi(p)$, joten ϕ on kasvava myös välillä $]-\infty, 0[$. Koska ϕ on kasvava väleillä $]-\infty, 0[$ ja $]0, \infty[$, ja koska ϕ on jatkuva myös kohdassa $p = 0$, on ϕ kasvava kaikkialla. Jos ja vain jos kaikki x-luvut eivät ole keskenään yhtäsuuria, on ϕ aidosti kasvava.

Olkoot p ja q positiivisia lukuja, joiden käänteislukujen summa on 1. Koska siis

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \tag{8}$$

ovat molemmat luvuista p ja q suurempia kuin 1. Seuraavassa esimerkissä muodostetaan Schlömilchin epäyhtälön avulla Hölderin epäyhtälöä muistuttava epäyhtälö.

Esim. 1 Jos $u_1, \ldots, u_n, v_1, \ldots, v_n > 0$ ja jos p sekä q ovat lukuja, joilla on ominaisuus (8), niin

$$\frac{1}{n}\sum_{\imath,\jmath} u_\imath v_\jmath \leq (u_1^p + \ldots + u_n^p)^{\frac{1}{p}}\,(v_1^q + \ldots + v_n^q)^{\frac{1}{q}}\,.$$

Väitteen todistamiseksi tarkastellaan funktioita

$$\phi_u(p) = n^{-\frac{1}{p}}\,(u_1^p + \ldots + u_n^p)^{\frac{1}{p}}$$

ja

$$\phi_v(q) = n^{-\frac{1}{q}}\,(v_1^q + \ldots + v_n^q)^{\frac{1}{q}}\,.$$

Koska sekä $p > 1$ että $q > 1$, on

$$\phi_u(p) \geq \phi_u(1) \quad \text{ja} \quad \phi_v(q) \geq \phi_v(1),$$

mistä seuraa

$$\phi_u(p)\phi_v(q) \geq \phi_u(1)\phi_v(1).$$

Siis

$$n^{-\frac{1}{p}}\,(u_1^p + \ldots + u_n^p)^{\frac{1}{p}}\,n^{-\frac{1}{q}}\,(v_1^q + \ldots + v_n^q)^{\frac{1}{q}} \geq \bar{u}\bar{v},$$

ja edelleen

$$(u_1^p + \ldots + u_n^p)^{\frac{1}{p}}\,(v_1^q + \ldots + v_n^q)^{\frac{1}{q}} \geq n^{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}}\bar{u}\bar{v} = n\,\bar{u}\bar{v}.$$

Todistettava epäyhtälö saadaan kertomalla oikean puolen keskiarvoissa sulut auki.

6.3 Muirheadin lause tapauksessa $n = 3$

Edellä nähty Muirheadin lauseen todistus (s. 49 - 52) on varsin monimutkainen, joten on aiheellista selvittää, voisiko sen todistaa yksinkertaisemmin Schur-konveksisuuden avulla. Testaamme asiaa tapauksessa $n = 3$. Koska lauseke $T[a, b, c](x, y, z)$ on symmetrinen sekä muuttujien x, y, z että eksponenttien a, b, c suhteen, voimme rajoituksetta olettaa, että $x > y > z > 0$ ja $a > b > c > 0$. Todistamme, että funktio

$$g(a, b, c) \;=\; T[a, b, c](x, y, z)$$

on aidosti Schur-konveksi, mistä välittömästi seuraa Muirheadin lause.

On riittävää todeta, että Schur-konveksisuusehto pätee kahden ensimmäisen muuttujan osalta. Varsin työläiden laskutoimitusten tuloksena nähdään, että

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g}{\partial a} - \frac{\partial g}{\partial b} \;&=\; x^b y^b z^c \Big(x^{a-b} - y^{a-b}\Big)(\ln x - \ln y) \\
&+\; x^b y^c z^b \Big(x^{a-b} - z^{a-b}\Big)(\ln x - \ln z) \\
&+\; x^c y^b z^b \Big(y^{a-b} - z^{a-b}\Big)(\ln y - \ln z),
\end{aligned}$$

joten

$$(a-b)\left(\frac{\partial g}{\partial a} - \frac{\partial g}{\partial b}\right) \;>\; 0,$$

mistä Schur-konveksisuus seuraa. Aidon Schur-konveksisuuden toteamiseksi on laskettava lauseke

$$\frac{\partial^2 g}{\partial a^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial b^2} - 2\,\frac{\partial^2 g}{\partial a\,\partial b}.$$

Erittäin työläiden laskutoimitusten tuloksena nähdään, että

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 g}{\partial a^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial b^2} - 2\,\frac{\partial^2 g}{\partial a\,\partial b} \;&=\; x^a y^b z^c\,(\ln x - \ln y)^2 \\
&+\; x^a z^b y^c\,(\ln x - \ln z)^2 \\
&+\; y^a x^b z^c\,(\ln y - \ln x)^2 \\
&+\; y^a z^b x^c\,(\ln y - \ln z)^2 \\
&+\; z^a x^b y^z\,(\ln z - \ln x)^2 \\
&+\; z^a y^b x^c\,(\ln z - \ln y)^2 \;>\; 0,
\end{aligned}$$

joten g on aidosti Schur-konveksi.

Luultavasti Muirheadin lause todistuisi yleisestikin näin, mutta suoraviivaisuudestaan huolimatta todistus lienee laskuteknisesti niin työläs, että perinteinen todistus on kuitenkin helpompi.

7 Eräitä klassisia epäyhtälöitä

Käsittelemme lopuksi eräitä klassisia epäyhtälöitä ja niiden joitakin yhteyksiä ajankohtaiseen tutkimukseen. Aloitamme epäyhtälöllä, jota on eri tahoilla kutsuttu nimistä Cauchy, Bunjakovski ja Schwarz saatavilla kombinaatioilla. Steele [26, s. 11 - 12] kertoo lyhyesti epäyhtälön syntyhistorian. Sen valossa lienee oikeutettua kutsua epäyhtälöä *Cauchyn-Bunjakovskin-Schwarzin epäyhtälöksi* eli lyhyesti CBS-epäyhtälöksi.

7.1 CBS-epäyhtälö

Lause 7.1 (CBS-epäyhtälö) Olkoot $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ reaalilukuja. Tällöin

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^2 \sum_{k=1}^{n} b_k^2 \geq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \right)^2, \tag{1}$$

missä yhtäsuuruus on voimassa, jos ja vain jos on olemassa reaaliluku t siten, että $a_\imath = tb_\imath$ tai $b_\imath = ta_\imath$ kaikilla $\imath = 1, 2, \ldots, n$.

Todistus Todistamme lauseen useammalla tavalla.

1. Aloitamme Steelen induktiotodistuksella, vrt. [26, s. 2 - 3]. Epäyhtälö

$$(a_1b_1 + a_2b_2)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2), \tag{2}$$

eli

$$|a_1b_1 + a_2b_2| \leq \left(a_1^2 + a_2^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(b_1^2 + b_2^2\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{3}$$

on yhtäpitävä toden epäyhtälön $(a_1b_2 - a_2b_1)^2 \geq 0$ kanssa, joten (1) pätee arvolla $n = 2$. Jos se pätee arvolla $n - 1$, eli jos

$$|a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_{n-1}b_{n-1}| \leq \left(a_1^2 + \ldots + a_{n-1}^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(b_1^2 + \ldots + b_{n-1}^2\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{4}$$

niin kolmioepäyhtälöä, induktio-oletusta (4) ja epäyhtälöä (3) soveltaen saadaan

$$\begin{aligned}
|a_1b_1 + \ldots + a_nb_n| &\leq |a_1b_1 + \ldots + a_{n-1}b_{n-1}| + |a_nb_n| \\
&\leq \left(a_1^2 + \ldots + a_{n-1}^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(b_1^2 + \ldots + b_{n-1}^2\right)^{\frac{1}{2}} + |a_nb_n| \\
&= \left| \left(a_1^2 + \ldots + a_{n-1}^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(b_1^2 + \ldots + b_{n-1}^2\right)^{\frac{1}{2}} + (a_n^2)^{\frac{1}{2}} (b_n^2)^{\frac{1}{2}} \right| \\
&\leq \left(a_1^2 + \ldots + a_n^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(b_1^2 + \ldots + b_n^2\right)^{\frac{1}{2}},
\end{aligned}$$

mistä neliöimällä seuraa (2). Induktioaskel on näin todistettu.

Steele käsittelee yhtäsuuruusehdon toisaalla, joten täydennämme todistusta tältäosin ja todistamme ehdon välttämättömyyden alkuosan tapaan induktiolla. Yhtäsuuruusehto on riittävä, sillä jos on olemassa $t \in \mathbb{R}$ siten, että $a_\imath = tb_\imath$ tai $b_\imath = ta_\imath$ kaikilla $\imath \in \{1, \ldots, n\}$, niin yhtäsuuruus on triviaalisti voimassa epäyhtälössä (1). Todistamme yhtäsuuruusehdon välttämättömäksi aluksi tapauksessa $n = 2$. Jos $a_1 = a_2 = 0$ tai $b_1 = b_2 = 0$, niin yhtäsuuruus on voimassa, ja t:n arvoksi kelpaa 0. Jos

$$(a_1b_1 + a_2b_2)^2 \;=\; (a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2),$$

niin

$$(a_1b_2 - a_2b_1)^2 \;=\; 0,$$

mistä seuraa $a_1b_2 = a_2b_1$. Koska tapaus $b_1 = b_2 = 0$ on käsitelty, voimme olettaa, että $b_1 \neq 0$ tai $b_2 \neq 0$. Jos $b_2 \neq 0$, niin

$$a_1 \;=\; \frac{a_2}{b_2}b_1 \;=\; tb_1 \quad \text{ja} \quad a_2 \;=\; \frac{a_2}{b_2}b_2 \;=\; tb_2.$$

Jos $b_1 \neq 0$, niin

$$a_1 \;=\; \frac{a_1}{b_1}b_1 \;=\; t'b_1 \quad \text{ja} \quad a_2 \;=\; \frac{a_1}{b_1}b_2 \;=\; t'b_2.$$

Samalla tavalla käsitellään tapaus $a_1 \neq 0$ tai $a_2 \neq 0$.
Jos nyt

$$\Big(a_1b_1+\ldots+a_{n-1}b_{n-1}+a_nb_n\Big)^2 \;=\; \Big(a_1^2+\ldots+a_{n-1}^2+a_n^2\Big)\Big(b_1^2+\ldots+b_{n-1}^2+b_n^2\Big), \quad (5)$$

ja $a_\imath = tb_\imath$ kaikilla $\imath = 1, 2, \ldots, n-1$ niin

$$\Big(tb_1^2+\ldots+tb_{n-1}^2+a_nb_n\Big)^2 \;=\; \Big(t^2b_1^2+\ldots+t^2b_{n-1}^2+a_n^2\Big)\Big(b_1^2+\ldots+b_{n-1}^2+b_n^2\Big). \quad (6)$$

Merkitsemällä $\beta = b_1^2 + \ldots + b_{n-1}^2$ yhtälö (6) tulee muotoon

$$(t\beta + a_nb_n)^2 \;=\; (t^2\beta + a_n^2)(\beta + b_n^2),$$

mikä sievenee yhtälöksi

$$(a_n - tb_n)^2 = 0.$$

Jos taas $b_\imath = ta_\imath$ kaikilla $\imath \in \{1, \ldots, n-1\}$, niin samalla tavalla saadaan $b_n = ta_n$. Näin induktioaskel on todistettu myös yhtäsuuruusehdon osalta.

2. Dragomir [7] todistaa epäyhtälön kahdella eri tavalla. Hänen ensimmäinen todistuksensa perustuu polynomifunktioon

$$p(t) \;=\; \sum_{\imath=1}^{n} (a_\imath - tb_\imath)^2 \;\geq\; 0.$$

Ensiksi oletetaan, että vähintään yksi luvuista $b_1, \dots, b_n$ on nollasta eroava. Tällöin

$$p(t) \;=\; t^2 \sum_{\imath=1}^{n} b_\imath^2 - 2t \sum_{\imath=1}^{n} a_\imath b_\imath + \sum_{\imath=1}^{n} a_\imath^2$$

on toisen asteen polynomifunktio ja sillä on enintään yksi nollakohta. Diskriminantti

$$4 \Big(\sum_{\imath=1}^{n} a_\imath b_\imath \Big)^2 \;-\; 4 \sum_{\imath=1}^{n} a_\imath^2 \sum_{\imath=1}^{n} b_\imath^2 \;\le\; 0,$$

mistä (1) seuraa. Yhtäsuuruus on voimassa, jos ja vain jos $(a_\imath - tb_\imath)^2 = 0$ eli $a_\imath = tb_\imath$ kaikilla $\imath \in \{1, 2, \dots, n\}$. Toiseksi oletetaan, että

$$b_1 = b_2 = \ldots = b_n = 0.$$

Tällöin epäyhtälöä (1) vastaava yhtälö pätee, ja

$$b_\imath = 0\, a_\imath \quad \text{kaikilla} \quad \imath \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

Yhtäsuuruusehdon toinen puoli saadaan käsittelemällä samalla tavalla polynomifunktiota

$$q(t) \;=\; \sum_{\imath=1}^{n} (a_\imath t - b_\imath)^2 \;\ge\; 0.$$

3. Dragomirin toinen todistus perustuu Lagrangen yhtälöön

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^2 \sum_{k=1}^{n} b_k^2 \;=\; \Big(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \Big)^2 \;+\; \sum_{1 \le \imath < \jmath \le n} (a_\imath b_\jmath - a_\jmath b_\imath)^2, \tag{7}$$

mistä epäyhtälö (1) seuraa välittömästi, sillä

$$\sum_{1 \le \imath < \jmath \le n} (a_\imath b_\jmath - a_\jmath b_\imath)^2 \;\ge\; 0.$$

Yhtäsuuruus on voimassa, jos ja vain jos kaikilla $\imath, \jmath$, $1 \le \imath < \jmath \le n$,

$$a_\imath b_\jmath - a_\jmath b_\imath \;=\; 0. \tag{8}$$

Vastaavasti kuin todistuksessa 1 (s. 71) huomataan, että tämä pätee, jos ja vain jos

$$a_\imath = tb_\imath \quad \text{tai} \quad t' a_\imath = b_\imath$$

kaikilla $\imath \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Todistamme vielä Lagrangen yhtälön induktiolla.

Lause 7.2 (Lagrangen yhtälö) Olkoot $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ reaalilukuja. Tällöin

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^2 \sum_{k=1}^{n} b_k^2 = \Big(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\Big)^2 + \sum_{1 \le \imath < \jmath \le n} (a_\imath b_\jmath - a_\jmath b_\imath)^2.$$

Todistus Yhtälö on voimassa arvolla $n = 2$, sillä

$$(a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2)^2 = (a_1 b_1 + a_2 b_2)^2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2.$$

Jos se on tosi arvolla $n - 1$, eli jos

$$\sum_{k=1}^{n-1} a_k^2 \sum_{k=1}^{n-1} b_k^2 = \Big(\sum_{k=1}^{n-1} a_k b_k\Big)^2 + \sum_{1 \le \imath < \jmath \le n-1} (a_\imath b_\jmath - a_\jmath b_\imath)^2,$$

niin

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} a_k^2 \sum_{k=1}^{n} b_k^2 &= \Big(a_n^2 + \sum_{k=1}^{n-1} a_k^2\Big)\Big(b_n^2 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k^2\Big) \\
&= (a_n b_n)^2 + \sum_{k=1}^{n-1} \Big(a_n^2 b_k^2 + a_k^2 b_n^2\Big) + \Big(\sum_{k=1}^{n-1} a_k b_k\Big)^2 + \sum_{1 \le \imath < \jmath \le n-1} (a_\imath b_\jmath - a_\jmath b_\imath)^2 \\
&= (a_n b_n)^2 + 2(a_n b_n) \sum_{k=1}^{n-1} a_k b_k + \Big(\sum_{k=1}^{n-1} a_k b_k\Big)^2 - 2(a_n b_n) \sum_{k=1}^{n-1} a_k b_k \\
&+ \sum_{k=1}^{n-1} \Big(a_n^2 b_k^2 + a_k^2 b_n^2\Big) + \sum_{1 \le \imath < \jmath \le n-1} (a_\imath b_\jmath - a_\jmath b_\imath)^2 \\
&= \Big(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\Big)^2 + \sum_{k=1}^{n-1} \Big((a_n b_k)^2 - 2(a_n b_k)(a_k b_n) + (a_k b_n)^2\Big) \\
&+ \sum_{1 \le \imath < \jmath \le n-1} (a_\imath b_\jmath - a_\jmath b_\imath)^2 \\
&= \Big(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\Big)^2 + \sum_{k=1}^{n-1} (a_n b_k - a_k b_n)^2 + \sum_{1 \le \imath < \jmath \le n-1} (a_\imath b_\jmath - a_\jmath b_\imath)^2 \\
&= \Big(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\Big)^2 + \sum_{1 \le \imath < \jmath \le n} (a_\imath b_\jmath - a_\jmath b_\imath)^2,
\end{aligned}$$

mikä todistaa väitteen.

7.2 CBS-epäyhtälön sovelluksia

CBS-epäyhtälö voidaan kirjoittaa muotoon

$$|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}| \le |\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|, \tag{1}$$

missä

$$\boldsymbol{a} = (a_1,\ldots,a_n) \quad \text{ja} \quad \boldsymbol{b} = (b_1,\ldots,b_n).$$

Yhtäsuuruus on voimassa, jos ja vain jos vektorit $\boldsymbol{a}$ ja $\boldsymbol{b}$ ovat yhdensuuntaiset. Koska $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} \le |\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|$, on CBS-epäyhtälöllä myös heikompi muoto

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} \le |\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|, \tag{2}$$

missä yhtäsuuruus on voimassa, jos ja vain jos vektorit $\boldsymbol{a}$ ja $\boldsymbol{b}$ ovat samansuuntaiset. Seuraavissa esimerkeissä sovelletaan CBS-epäyhtälön molempia muotoja. Aloitamme todistamalla kolmioepäyhtälön.

Esim. 1 (Kolmioepäyhtälö) Jos $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\in\mathbb{R}^n$, niin

$$\begin{aligned}
|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2 &= (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) \\
&= |\boldsymbol{a}|^2 + 2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} + |\boldsymbol{b}|^2 \\
&\le |\boldsymbol{a}|^2 + 2|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}| + |\boldsymbol{b}|^2 = (|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|)^2,
\end{aligned}$$

ja edelleen

$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}| \le |\boldsymbol{a}| + |\boldsymbol{b}|.$$

Epäyhtälön (2) perusteella yhtäsuuruus on voimassa, jos ja vain jos $\boldsymbol{a}$ ja $\boldsymbol{b}$ ovat samansuuntaiset.

Esim. 2 [26, s. 12, teht. 1.1] Kaikille $a_1,\ldots,a_n\in\mathbb{R}$ on voimassa

$$a_1+\ldots+a_n \le \sqrt{n}\left(a_1^2+\ldots+a_n^2\right)^{\frac{1}{2}} \tag{3}$$

ja

$$\sum_{\imath=1}^{n} a_\imath \le \left(\sum_{\imath=1}^{n}|a_\imath|^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{\imath=1}^{n}|a_\imath|^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{4}$$

Epäyhtälö (3) saadaan ”1-tempulla”, jolloin sijoitetaan epäytälöön (2)

$$b_1 = b_2 = \ldots = b_n = 1.$$

Epäyhtälö (4) saadaan toteamalla aluksi, että $a_\imath \le |a_\imath|$ ja tekemällä sen jälkeen ”hajotustemppu”, jolloin $|a_\imath|$ kirjoitetaan muotoon $|a_\imath|^{\frac{1}{3}}|a_\imath|^{\frac{2}{3}}$. Näiden epäyhtälöiden todistusideaa voidaan usein hyödyntää monimutkaisimmissa tilanteissa.

Seuraavassa esimerkissä yleistetään ratkaisussa [26, s. 227 - 228] annetut aputulokset.

Esim. 3 Jos $u_1, \ldots, u_n > 0$, $u_1 + \ldots + u_n = 1$ ja $p \in \mathbb{Z}_+$, niin

$$\frac{1}{u_1^p} + \frac{1}{u_2^p} + \ldots + \frac{1}{u_n^p} \geq n^{p+1}. \tag{5}$$

Yhtäsuuruus on voimassa, jos ja vain jos $u_\imath = \frac{1}{n}$ kaikilla $\imath \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Todistamme epäyhtälön aluksi pienillä p:n arvoilla. Se on voimassa arvolla $p = 1$, sillä $1 = u_\imath^{\frac{1}{2}} u_\imath^{-\frac{1}{2}}$, joten CBS-epäyhtälön mukaan

$$n^2 = \Big(\sum_{\imath=1}^{n} 1\Big)^2 = \Big(\sum_{\imath=1}^{n} u_\imath^{\frac{1}{2}} u_\imath^{-\frac{1}{2}}\Big)^2 \leq \Big(\sum_{\imath=1}^{n} u_\imath\Big)\Big(\sum_{\imath=1}^{n} u_\imath^{-1}\Big) = \sum_{\imath=1}^{n} u_\imath^{-1}.$$

Yhtäsuuruusehto on voimassa, sillä CBS-epäyhtälön yhtäsuuruusehdon mukaan on oltava $u_\imath^{\frac{1}{2}} = t \cdot u_\imath^{-\frac{1}{2}}$ eli $u_\imath = t$ kaikilla $\imath \in \{1, 2, \ldots, n\}$, mistä ehdon $u_1 + \ldots + u_n = 1$ avulla seuraa, että $u_\imath = \frac{1}{n}$ kaikilla $\imath$:n arvoilla.

Epäyhtälö on voimassa myös tapauksessa $p = 2$, sillä edellistä epäyhtälöä ja 1-temppua soveltaen saamme

$$n^2 \leq \sum_{\imath=1}^{n} \frac{1}{u_\imath} = \sum_{\imath=1}^{n} 1 \cdot \frac{1}{u_\imath} \leq \Big(\sum_{\imath=1}^{n} 1^2\Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\sum_{\imath=1}^{n} \frac{1}{u_\imath^2}\Big)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{n} \Big(\sum_{\imath=1}^{n} \frac{1}{u_\imath^2}\Big)^{\frac{1}{2}}, \tag{6}$$

mistä neliöimällä seuraa

$$n^4 \leq n \sum_{\imath=1}^{n} \frac{1}{u_\imath^2}, \quad \text{ja edelleen} \quad n^3 \leq \sum_{\imath=1}^{n} \frac{1}{u_\imath^2}.$$

Tapauksessa $p = 3$ saamme epäyhtälöä (6) ja hajotustemppua soveltaen

$$n^2 \leq \sum_{\imath=1}^{n} \frac{1}{u_\imath} = \sum_{\imath=1}^{n} \sqrt{u_\imath} \frac{1}{u_\imath \sqrt{u_\imath}} \leq \Big(\sum_{\imath=1}^{n} u_\imath\Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\sum_{\imath=1}^{n} \frac{1}{u_\imath^3}\Big)^{\frac{1}{2}} = \Big(\sum_{\imath=1}^{n} \frac{1}{u_\imath^3}\Big)^{\frac{1}{2}},$$

mistä neliöimällä seuraa

$$n^4 \leq \sum_{\imath=1}^{n} \frac{1}{u_\imath^3}.$$

Molemmissa tapauksissa yhtäsuuruusehto todistuu samalla tavalla kuin tapauksessa $p = 1$.

Väite on siis tosi, kun $p = 1$, $p = 2$ ja $p = 3$. Tapaukset $p = 2$ ja $p = 3$ seurasivat tapauksesta $p = 1$ soveltamalla CBS-epäyhtälöä kahdella eri tavalla.

Ilmeisesti myös induktioaskeleen todistaminen täytyy tehdä vastaavalla tavalla. Oletetaan siis, että (5) toteutuu kaikilla $p \in \{1, 2, \ldots, 2m-1\}$, $m > 2$. Tällöin

$$n^{m+1} \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{u_i^m} = \sum_{i=1}^{n} 1 \cdot \frac{1}{u_i^m} \leq \Big(\sum_{i=1}^{n} 1\Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{u_i^{2m}}\Big)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{n} \Big(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{u_i^{2m}}\Big)^{\frac{1}{2}},$$

mistä neliöimällä seuraa

$$n^{2m+2} \leq n \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{u_i^{2m}}, \quad \text{ja edelleen} \quad n^{2m+1} \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{u_i^{2m}}.$$

Epäyhtälö (5) toteutuu siis arvolla $p = 2m$. Se toteutuu myös arvolla $p = 2m + 1$, sillä

$$n^{m+1} \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{u_i^m} = \sum_{i=1}^{n} u_i^{\frac{1}{2}} \frac{1}{u_i^{m+\frac{1}{2}}} \leq \Big(\sum_{i=1}^{n} u_i\Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{u_i^{2m+1}}\Big)^{\frac{1}{2}} = \Big(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{u_i^{2m+1}}\Big)^{\frac{1}{2}},$$

mistä neliöimällä seuraa

$$n^{2m+2} \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{u_i^{2m+1}}.$$

Induktioaskel on näin suoritettu, joten (5) on voimassa kaikilla $p \in \mathbb{Z}_+$. Yhtäsuuruusehdot todistuvat samalla tavalla kuin todistuksen alkuosassa.

Seuraavassa esimerkissä todistetaan *Harkerin-Kasperin epäyhtälö* ja tutkitaan hieman laajemminkin siinä esiintyviä funktioita. Lähteen [26] mukaan mainitulla epäyhtälöllä on tärkeä merkitys kristallografiassa.

Esim. 4 [26, s. 13, teht. 1.5] Olkoot $p_1, \ldots, p_n \geq 0$ ja $p_1 + \ldots + p_n = 1$. Tällöin funktio

$$c(x) = \sum_{i=1}^{n} p_i \cos \beta_i x, \quad \text{missä} \quad \beta_1, \ldots, \beta_n \in \mathbb{R},$$

toteuttaa epäyhtälön $c(x)^2 \leq \frac{1}{2}(1 + c(2x))$.

Väite seuraa välittömästi CBS-epäyhtälöstä, sillä

$$\begin{aligned} c(x)^2 &= \Big(\sum_{i=1}^{n} p_i \cos \beta_i x\Big)^2 = \Big(\sum_{i=1}^{n} \sqrt{p_i}\sqrt{p_i} \cos \beta_i x\Big)^2 \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} \sqrt{p_i}^2 \sum_{i=1}^{n} \sqrt{p_i}^2 \cos^2 \beta_i x = \sum_{i=1}^{n} p_i \sum_{i=1}^{n} p_i (\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\beta_i x) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} (p_i + p_i \cos 2\beta_i x) = \frac{1}{2}(1 + c(2x)). \end{aligned}$$

Tutkimme, voiko vastaavan epäyhtälön johtaa sinifunktiolle. Olkoon siis

$$s(x) = \sum_{i=1}^{n} p_i \sin \beta_i x,$$

missä luvut p_i ja β_i ovat samat kuin edellä. Saamme

$$\begin{aligned} s(x)^2 &= \Big(\sum_{i=1}^{n} p_i \sin \beta_i x\Big)^2 = \Big(\sum_{i=1}^{n} \sqrt{p_i}\,\sqrt{p_i}\, \sin \beta_i x\Big)^2 \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} \sqrt{p_i}^2 \sum_{i=1}^{n} \sqrt{p_i}^2 \sin^2 \beta_i x = \sum_{i=1}^{n} p_i \sum_{i=1}^{n} p_i (\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\beta_i x) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} (p_i - p_i \cos 2\beta_i x) = \frac{1}{2}(1 - c(2x)). \end{aligned}$$

Funktiot c ja s siis toteuttavat kaikilla $x \in \mathbb{R}$ epäyhtälöt

$$c(x)^2 \leq \frac{1}{2}\big(1 + c(2x)\big) \quad \text{ja} \quad s(x)^2 \leq \frac{1}{2}\big(1 - c(2x)\big)$$

ja niistä seuraa yhteenlaskemalla vielä kolmaskin epäyhtälö

$$c(x)^2 + s(x)^2 \leq 1. \tag{7}$$

Epäyhtälö (7) todistuu myös suoraan CBS-epäyhtälöä soveltaen, sillä

$$\begin{aligned} s(x)^2 &= \left(\sum_{i=1}^{n} p_i \sin(\beta_i x)\right)^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} p_i \sin\left(2\,\frac{\beta_i x}{2}\right)\right)^2 \\ &= \left(\sum_{i=1}^{n} 2p_i \sin\left(\frac{\beta_i x}{2}\right) \cos\left(\frac{\beta_i x}{2}\right)\right)^2 \\ &= \left(\sum_{i=1}^{n} \sqrt{2p_i}\, \sin\left(\frac{\beta_i x}{2}\right) \sqrt{2p_i}\, \cos\left(\frac{\beta_i x}{2}\right)\right)^2 \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} 2p_i \sin^2\left(\frac{\beta_i x}{2}\right) \sum_{i=1}^{n} 2p_i \cos^2\left(\frac{\beta_i x}{2}\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} p_i (1 - \cos \beta_i x) \sum_{i=1}^{n} p_i (1 + \cos \beta_i x) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \big(p_i - p_i \cos \beta_i x\big) \sum_{i=1}^{n} \big(p_i + p_i \cos \beta_i x\big) \\ &= \big(1 - c(x)\big)\big(1 + c(x)\big) = 1 - c(x)^2. \end{aligned}$$

Edellisen esimerkkien funktioille

$$c(x) = \sum_{\imath=1}^{n} p_\imath \cos \beta_\imath x \quad \text{ja} \quad s(x) = \sum_{\imath=1}^{n} p_\imath \sin \beta_\imath x$$

on siis voimassa epäyhtälöt

$$c(x)^2 + s(x)^2 \le 1, \quad c(x)^2 \le \frac{1}{2}(1 + c(2x)) \quad \text{ja} \quad s(x)^2 \le \frac{1}{2}(1 - c(2x)).$$

Ne ovat rakenneyhtäläisiä trigonometristen yhtälöiden

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1, \quad \cos^2 x = \frac{1}{2}\big(1 + \cos 2x\big), \quad \sin^2 x = \frac{1}{2}\big(1 - \cos 2x\big)$$

kanssa, joten herää kysymys, voisivatko funktiot c ja s toteuttaa muitakin trigonometristen yhtälöiden muotoisia epäyhtälöitä. Näin ei näytä olevan, mutta funktiolle s kuitenkin löytyy etäisesti identiteettiä

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

muistuttava arvio. CBS-epäyhtälöä soveltaen saamme nimittäin

$$\begin{aligned} s(2x) &= \sum_{\imath=1}^{n} p_\imath \sin 2\beta_\imath x = \sum_{\imath=1}^{n} \sqrt{2p_\imath} \sin \beta_\imath x \sqrt{2p_\imath} \cos \beta_\imath x \\ &\le 2 \left(\sum_{\imath=1}^{n} p_\imath \sin^2 \beta_\imath x \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{\imath=1}^{n} p_\imath \cos^2 \beta_\imath x \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Seuraavassa esimerkissä CBS-epäyhtälö yleistetään kahdella tavalla kolmea lukujonoa koskevaksi.

Esim. 5 [26, s. 13, teht. 1.3] Reaalilukujonoille $(a_\imath)_{\imath=1}^n$, $(b_\imath)_{\imath=1}^n$, $(c_\imath)_{\imath=1}^n$ on voimassa

$$\sum_{\imath=1}^{n} a_\imath b_\imath c_\imath \le \left(\sum_{\imath=1}^{n} a_\imath^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{\imath=1}^{n} b_\imath^4 \right)^{\frac{1}{4}} \left(\sum_{\imath=1}^{n} c_\imath^4 \right)^{\frac{1}{4}} \tag{8}$$

ja

$$\sum_{\imath=1}^{n} a_\imath b_\imath c_\imath \le \left(\sum_{\imath=1}^{n} a_\imath^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{\imath=1}^{n} b_\imath^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{\imath=1}^{n} c_\imath^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{9}$$

Epäyhtälö (8) todistuu soveltamalla CBS-epäyhtälöä kahdesti:

$$\begin{aligned} \sum_{\imath=1}^{n} a_\imath b_\imath c_\imath &\le \left(\sum_{\imath=1}^{n} a_\imath^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{\imath=1}^{n} b_\imath^2 c_\imath^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\le \left(\sum_{\imath=1}^{n} a_\imath^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{\imath=1}^{n} b_\imath^4 \right)^{\frac{1}{4}} \left(\sum_{\imath=1}^{n} c_\imath^4 \right)^{\frac{1}{4}}. \end{aligned}$$

Epäyhtälö (9) vastaa muodoltaan alkuperäistä kahta lukujonoa koskevaa CBS-epäyhtälöä. Todistamme sen kahdella eri tavalla. Ensimmäinen todistus noudattaa lähteessä [26] annettua.

Epäyhtälö on selvästi tosi, jos $c_1 = \ldots = c_n = 0$. Voimme siis olettaa, että vähintään yksi luvuista $c_\imath$ on nollasta eroava. Tällöin

$$0 \leq \gamma_\imath = \frac{|c_\imath|}{\sqrt{c_1^2 + \ldots + c_n^2}} \leq 1$$

kaikilla $\imath \in \{1, 2, \ldots, n\}$. CBS-epäyhtälön mukaan

$$\sum_{\imath=1}^{n} |a_\imath||b_\imath| \leq \left(\sum_{\imath=1}^{n} a_\imath^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{\imath=1}^{n} b_\imath^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

ja koska $|a_\imath||b_\imath|\gamma_\imath \leq |a_\imath||b_\imath|$, on

$$\sum_{\imath=1}^{n} |a_\imath||b_\imath|\gamma_\imath \leq \left(\sum_{\imath=1}^{n} a_\imath^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{\imath=1}^{n} b_\imath^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

mistä seuraa

$$\sum_{\imath=1}^{n} |a_\imath||b_\imath||c_\imath| \leq \left(\sum_{\imath=1}^{n} a_\imath^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{\imath=1}^{n} b_\imath^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{\imath=1}^{n} c_\imath^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Tästä saadaan epäyhtälö (9), sillä $a_\imath b_\imath c_\imath \leq |a_\imath||b_\imath||c_\imath|$.

Toisessa todistuksessa näytämme, että epäyhtälö (9) seuraa epäyhtälöstä (8). Voimme rajoituksetta olettaa, että $c_1 \geq c_2 \geq \ldots \geq c_n > 0$. Tällöin

$$\begin{aligned}
\left(c_1^4 + c_2^4 + \ldots + c_n^4\right)^{\frac{1}{4}} &= c_1\left(1 + \left(\frac{c_2}{c_1}\right)^4 + \ldots + \left(\frac{c_n}{c_1}\right)^4\right)^{\frac{1}{4}} \\
&\leq c_1\left(1 + \left(\frac{c_2}{c_1}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{c_n}{c_1}\right)^2\right)^{\frac{1}{4}} \\
&< c_1\left(1 + \left(\frac{c_2}{c_1}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{c_n}{c_1}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(c_1^2 + c_2^2 + \ldots + c_n^2\right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Siis

$$\left(\sum_{\imath=1}^{n} c_\imath^4\right)^{\frac{1}{4}} \leq \left(\sum_{\imath=1}^{n} c_\imath^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Vastaavasti voidaan menetellä lukujen $b_1, \ldots, b_n$ kanssa. Epäyhtälö (9) on täten heikompi kuin epäyhtälö (8).

Esim. 6 [26, s. 12, teht. 1.2] Osoitettava, että jos $u_\imath > 0$, $v_\imath > 0$, $p_\imath \geq 0$ ja $u_\imath v_\imath \geq 1$ kaikilla $\imath \in \{1, 2, \ldots, n\}$ sekä $p_1 + \ldots + p_n = 1$, niin

$$1 \leq \Big(\sum_{\imath=1}^{n} p_\imath u_\imath\Big)\Big(\sum_{\imath=1}^{n} p_\imath v_\imath\Big).$$

CBS-epäyhtälöä ja oletuksia soveltaen saadaan

$$\begin{aligned}
1 = \sum_{\imath=1}^{n} p_\imath \quad &\leq \quad \sum_{\imath=1}^{n} p_\imath \sqrt{u_\imath v_\imath} \\
&= \quad \sum_{\imath=1}^{n} (p_\imath u_\imath)^{\frac{1}{2}} (p_\imath v_\imath)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \quad \Big(\sum_{\imath=1}^{n} p_\imath u_\imath\Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\sum_{\imath=1}^{n} p_\imath v_\imath\Big)^{\frac{1}{2}},
\end{aligned}$$

mistä väite seuraa.

Seuraavassa esimerkissä todistamme CBS-epäyhtälön avulla ylärajoja eräille summille.

Esim. 7 Vrt. [26, s. 14, teht. 1.8]

a) Jos $-1 < x < 1$, niin

$$\sum_{\imath=0}^{n} a_\imath x^\imath \leq \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \Big(\sum_{\imath=0}^{n} a_\imath^2\Big)^{\frac{1}{2}},$$

sillä CBS-epäyhtälön mukaan

$$\begin{aligned}
\sum_{\imath=0}^{n} a_\imath x^\imath \quad &\leq \quad \Big(\sum_{\imath=0}^{n} x^{2\imath}\Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\sum_{\imath=0}^{n} a_\imath^2\Big)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \quad \Big(\sum_{\imath=0}^{\infty} x^{2\imath}\Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\sum_{\imath=0}^{n} a_\imath^2\Big)^{\frac{1}{2}} \\
&= \quad \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \Big(\sum_{\imath=0}^{n} a_\imath^2\Big)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

b) Koska ([26, s. 228])

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6},$$

saamme arvion

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k} \le \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)^{\frac{1}{2}} < \frac{\pi}{\sqrt{6}}\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

c) Summa

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}} \cdot \frac{1}{n}$$

on eräs integraalin

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x} = \ln 2$$

alasummista, joten saamme arvion

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{\sqrt{n+k}} &\le \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\le \left(\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\ln 2}\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

d) Jos $-1 < x < 1$ ja $n \in \mathbb{N}$, niin

$$(1+x)^n \le \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \binom{2n}{n}^{\frac{1}{2}}.$$

Väitteen todistamiseksi kehitämme lausekkeen $(1+x)^n$ binomikaavan avulla ja sovellamme sitten CBS-epäyhtälöä. Saamme aluksi

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k \le \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=0}^{n} x^{2k}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{10}$$

Binomikertoimien neliöiden summa

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n},$$

mikä nähdään kombinatorisella päättelyllä tai vertaamalla n:nnen asteen termien kertoimia lausekkeissa $(1+x)^{2n}$ ja $(1+x)^n(1+x)^n$. Viimeksi mainittu tapa johtaa yhtälöön

$$\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2.$$

Sitä ja geometrisen summan kaavaa käyttäen arvio (10) tulee muotoon

$$\begin{aligned}(1+x)^n &\leq \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=0}^{n} x^{2k}\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \binom{2n}{n}^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1-x^{2n+2}}{1-x^2}\right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \binom{2n}{n}^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

Lopuksi todistamme kaksi Steelen esittämää epäyhtälöä ja yleistämme ne mielivaltaiselle määrälle lukuja.

Esim. 8 Vrt. [26, s. 13, teht. 1.4] Jos $x, y, z > 0$, niin

a) $$\left(\frac{x+y}{x+y+z}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{y+z}{x+y+z}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{z+x}{x+y+z}\right)^{\frac{1}{2}} \leq \sqrt{6},$$

b) $$x+y+x \leq 2\left(\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y}\right).$$

Väitteet todistuvat CBS-epäyhtälön avulla: **a**-kohdassa saamme

$$\begin{aligned}&\left(\frac{x+y}{x+y+z}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{y+z}{x+y+z}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{z+x}{x+y+z}\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \sqrt{1}\cdot\left(\frac{x+y}{x+y+z}\right)^{\frac{1}{2}} + \sqrt{1}\cdot\left(\frac{y+z}{x+y+z}\right)^{\frac{1}{2}} + \sqrt{1}\cdot\left(\frac{z+x}{x+y+z}\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq (1+1+1)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{x+y}{x+y+z} + \frac{y+z}{x+y+z} + \frac{z+x}{x+y+z}\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \sqrt{3}\left(\frac{2(x+y+z)}{x+y+z}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{6},\end{aligned}$$

ja **b**-kohdassa

$$\begin{aligned}
x+y+z &= \frac{x}{\sqrt{y+z}}\sqrt{y+z}+\frac{y}{\sqrt{z+x}}\sqrt{z+x}+\frac{z}{\sqrt{x+y}}\sqrt{x+y}\\
&\le \left(\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{z^2}{x+y}\right)^{\frac{1}{2}}\left(y+z+z+x+x+y\right)^{\frac{1}{2}}\\
&= \sqrt{2(x+y+z)}\left(\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{z^2}{x+y}\right)^{\frac{1}{2}},
\end{aligned}$$

mistä väite seuraa neliöimällä.

Nämä epäyhtälöt yleistyvät useampaakin positiivista lukua koskeviksi. Jos $u_1,\ldots,u_n>0$ ja $u_1+\ldots+u_n=s$, niin

$$\begin{aligned}
\sum_{\imath=1}^{n}\left(\frac{s-u_\imath}{s}\right)^{\frac{1}{2}} &= \sum_{\imath=1}^{n}1\cdot\left(\frac{s-u_\imath}{s}\right)^{\frac{1}{2}}\\
&\le \left(\sum_{\imath=1}^{n}\sqrt{1}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{\imath=1}^{n}\frac{s-u_\imath}{s}\right)^{\frac{1}{2}}\\
&= \sqrt{n}\,\sqrt{n-1} = \sqrt{n(n-1)},
\end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned}
s &= \sum_{\imath=1}^{n}\frac{u_\imath}{\sqrt{s-u_\imath}}\sqrt{s-u_\imath}\\
&\le \left(\sum_{\imath=1}^{n}\frac{u_\imath^2}{s-u_\imath}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{\imath=1}^{n}s-u_\imath\right)^{\frac{1}{2}}\\
&= \left(\sum_{\imath=1}^{n}\frac{u_\imath^2}{s-u_\imath}\right)^{\frac{1}{2}}\sqrt{(n-1)s},
\end{aligned}$$

mistä neliöimällä seuraa

$$s \le (n-1)\sum_{\imath=1}^{n}\frac{u_\imath^2}{s-u_\imath}.$$

7.3 Tšebyševin epäyhtälö

Käsittelemme aluksi *suuruusjärjestysepäyhtälön.*

Lause 7.3 Jos $a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n$, $b_1 \leq b_2 \leq \ldots \leq b_n$ ja $b_{\pi(1)}, \ldots, b_{\pi(n)}$ on jokin lukujen $b_1, \ldots, b_n$ permutaatio, niin

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_{n+1-k} \leq \sum_{k=1}^{n} a_k b_{\pi(k)} \leq \sum_{k=1}^{n} a_k b_k. \tag{1}$$

Epäyhtälössä (1) yhtäsuuruudet ovat voimassa, jos ja vain jos $a_1 = \ldots = a_n$ tai $b_1 = \ldots = b_n$.

Todistus [19, s. 30] Tutkitaan miten summa

$$a_1 b_{\pi(1)} + a_2 b_{\pi(2)} + \ldots + a_n b_{\pi(n)} \tag{2}$$

muuttuu, kun $b_{\pi(k)}$ ja $b_{\pi(m)}$ vaihtavat paikkaa. Olkoon $k < m$, jolloin $a_k \geq a_m$. Jos erotus

$$a_k b_{\pi(k)} + a_m b_{\pi(m)} - (a_k b_{\pi(m)} + a_m b_{\pi(k)}) = (a_k - a_m)(b_{\pi(k)} - b_{\pi(m)})$$

on ei-positiivinen, niin (2) kasvaa, kun $b_{\pi(k)}$ ja $b_{\pi(m)}$ vaihtavat paikkaa. Jos tämä erotus on ei-negatiivinen, niin (2) vastaavasti pienenee. Äärellisellä määrällä suurentavia vaihtoja summa (2) muuttuu kaksoisepäyhtälön (1) oikeaksi puoleksi. Pienentävät vaihdot johtavat vastaavasti edellisen osan vasempaan puoleen. Vaihdot kasvattavat tai vähentävät summaa (2) aidosti, jos ja vain jos $b_{\pi(k)} \neq b_{\pi(m)}$, ja siis $b_k \neq b_m$, sekä $a_k \neq a_m$ joillakin $k, m \in \{1, 2, \ldots, n\}$, mikä todistaa yhtäsuuruusehdon.

Esim. 1 Koulumatematiikassa todistetaan neliöiksi täydentämällä epäyhtälö

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca,$$

missä $a, b, c \in \mathbb{R}$. Se voidaan kuitenkin tulkita suuruusjärjestysepäyhtälöksi, jolloin ratkaisu ei edellytä muuta kuin tämän toteamisen.

Seuraavana esimerkkinä on olympiatehtävä vuodelta 1978.

Esim. 2 [19, s. 30, teht. 48] Olkoon $a_1, a_2, \ldots, a_n$ keskenään eri suuria positiivisia kokonaislukuja. Osoita, että

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k^2} \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Tehtävä ratkeaa välittömästi suuruusjärjestysepäyhtälöä soveltaen. Olkoot $b_1, \ldots, b_n$ luvut $a_1, \ldots, a_n$ suuruusjärjestyksessä pienimmästä suurimpaan. Tällöin $k \leq b_k$ kaikilla $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, ja

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k^2} \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{b_k}{k^2} \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{k^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Esim. 3 [19, s. 33, teht. 56] Olkoot $x_\imath, y_\imath$ ($\imath = 1, 2, \ldots, n$) reaalilukuja, joille pätee $x_1 \geq x_2 \geq \ldots \geq x_n$ ja $y_1 \geq y_2 \geq \ldots \geq y_n$. Todista: Jos $z_1, z_2, \ldots, z_n$ on lukujen $y_1, y_2, \ldots, y_n$ permutaatio, niin

$$\sum_{\imath=1}^{n} (x_\imath - y_\imath)^2 \leq \sum_{\imath=1}^{n} (x_\imath - z_\imath)^2.$$

Kertomalla sulut auki epäyhtälö tulee muotoon

$$\sum_{\imath=1}^{n} x_\imath^2 - \sum_{\imath=1}^{n} 2x_\imath y_\imath + \sum_{\imath=1}^{n} y_\imath^2 \leq \sum_{\imath=1}^{n} x_\imath^2 - \sum_{\imath=1}^{n} 2x_\imath z_\imath + \sum_{\imath=1}^{n} z_\imath^2$$

ja sievenee edelleen epäyhtälöksi

$$\sum_{\imath=1}^{n} x_\imath y_\imath \geq \sum_{\imath=1}^{n} x_\imath z_\imath, \tag{3}$$

koska

$$\sum_{\imath=1}^{n} z_\imath^2 = \sum_{\imath=1}^{n} y_\imath^2.$$

Epäyhtälö (3) on lukuja $x_\imath$ ja $y_\imath$ koskevana suuruusjärjestysepäyhtälönä tosi, joten väitös seuraa. Tämä oli olympiatehtävänä vuonna 1975.

Tšebyševin epäyhtälö todistetaan suuruusjärjestysepäyhtälön avulla.

Lause 7.4 (Tšebyševin epäyhtälö) Jos $a_1 \leq \ldots \leq a_n$ ja $b_1 \leq \ldots \leq b_n$, niin

$$\frac{a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n}{n} \geq \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \cdot \frac{b_1 + b_2 + \ldots + b_n}{n}. \tag{4}$$

Yhtäsuuruus on voimassa, jos ja vain jos $a_1 = \ldots = a_n$ tai $b_1 = \ldots = b_n$.

Todistus [19, s. 31, teht. 49] Suuruusjärjestysepäyhtälön mukaan

$$\begin{aligned}
a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n &\geq a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n \\
a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n &\geq a_1b_2 + a_2b_3 + \ldots + a_nb_1 \\
a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n &\geq a_1b_3 + a_2b_4 + \ldots + a_nb_2 \\
&\vdots \\
a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n &\geq a_1b_n + a_2b_1 + \ldots + a_nb_{n-1}.
\end{aligned}$$

Vasempien puolien summa on $n(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n)$ ja oikeiden puolien summa koostuu tulon $(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)(b_1 + b_2 + \ldots + b_n)$ termeistä. Epäyhtälö (4) saadaan jakamalla summat luvulla n^2. Yhtäsuuruusehto seuraa välittömästi suuruusjärjestysepäyhtälön yhtäsuuruusehdosta.

Tšebyševin epäyhtälön sovelluksena todistamme *Nesbittin epäyhtälön* n:lle muuttujalle.

Esim. 4 Jos $a_1, \ldots, a_n > 0$ ja $a_1 + \ldots + a_n = s$, niin

$$\frac{n}{n-1} \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{s - a_i}. \tag{5}$$

Yhtäsuuruus on voimassa, jos ja vain jos $a_1 = \ldots = a_n$.

Epäyhtälön (5) oikea puoli on lukujen $a_1, \ldots, a_n$ symmetrinen lauseke, joten voimme rajoituksetta olettaa, että $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_n$, jolloin myös

$$s - a_n \geq s - a_{n-1} \geq \ldots \geq s - a_1.$$

Tällöin

$$\frac{1}{s - a_n} \leq \frac{1}{s - a_{n-1}} \leq \ldots \leq \frac{1}{s - a_1},$$

joten voimme soveltaa Tšebyševin epäyhtälöä lukujonoihin

$$a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1 \quad \text{ja} \quad \frac{1}{s - a_n}, \frac{1}{s - a_{n-1}}, \ldots, \frac{1}{s - a_1}.$$

Saamme

$$\frac{s}{n} \cdot \frac{1}{n}\left(\frac{1}{s - a_n} + \ldots + \frac{1}{s - a_1}\right) \leq \frac{1}{n}\left(\frac{a_n}{s - a_n} + \ldots + \frac{a_1}{s - a_1}\right),$$

mikä sievenee muotoon

$$\frac{s}{s - a_n} + \ldots + \frac{s}{s - a_1} \leq n\left(\frac{a_n}{s - a_n} + \ldots + \frac{a_1}{s - a_1}\right)$$

ja edelleen

$$1 + \frac{a_n}{s - a_n} + \ldots + 1 + \frac{a_1}{s - a_1} \leq n\left(\frac{a_n}{s - a_n} + \ldots + \frac{a_1}{s - a_1}\right).$$

Tästä seuraa

$$n \leq (n-1)\left(\frac{a_n}{s - a_n} + \ldots + \frac{a_1}{s - a_1}\right),$$

ja edelleen (5). Yhtäsuuruusehto seuraa välittömästi Tšebyševin epäyhtälön yhtäsuuruusehdosta.

Bencze ja Pop [1, lause 2.1] todistavat epäyhtälön (5) yleisemmän lauseen seurauksena yhtäsuuruusehtoa mainitsematta. Tapauksessa $n = 3$ saadaan alkuperäinen Nesbittin epäyhtälö, ks. [24], ks. myös [26, s. 84, teht. 5.6].

7.4 Youngin epäyhtälö

Rajaamme tässä osaluvussa lähteistä poiketen luvut ja eksponentit positiivisiksi.

Painotettua $\mathcal{AG}$-epäyhtälöä (lause 4.1) kutsutaan tapauksessa $n = 2$ myös *Youngin epäyhtälöksi.* Jos $a > 0$, $b > 0$ ja $\lambda \in]0,1[$, niin tämä epäyhtälö on

$$a^\lambda b^{1-\lambda} \leq \lambda a + (1-\lambda)b, \tag{1}$$

missä yhtäsuuruus on voimassa, jos ja vain jos $a = b$.

Kittaneh ja Manasrah [16] tarkensivat sitä seuraavalla lauseella.

Lause 7.5 Jos $a, b > 0$ ja $0 < \lambda < 1$, niin

$$a^\lambda b^{1-\lambda} + r_0(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \leq \lambda a + (1-\lambda)b, \tag{2}$$

missä $r_0 = \min\{\lambda, 1-\lambda\}$. Yhtäsuuruus on voimassa, jos ja vain jos $a = b$ tai $\lambda = \frac{1}{2}$.

Todistus Jos $\lambda = \frac{1}{2}$, niin epäyhtälössä (2) vallitsee selvästi yhtäsuuruus.

Jos $0 < \lambda < \frac{1}{2}$, niin epäyhtälön (1) avulla saadaan

$$\begin{aligned}
\lambda a + (1-\lambda)b - r_0(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 &= \lambda a + (1-\lambda)b - \lambda(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \\
&= (1-2\lambda)b + 2\lambda\sqrt{ab} \\
&\geq b^{1-2\lambda}\left(\sqrt{ab}\right)^{2\lambda} \\
&= a^\lambda b^{1-\lambda}.
\end{aligned}$$

Jos $\frac{1}{2} < \lambda < 1$, niin $0 < 1-\lambda < \frac{1}{2}$ ja $2\lambda - 1 + 2(1-\lambda) = 1$, joten epäyhtälöä (1) soveltaen saadaan

$$\begin{aligned}
\lambda a + (1-\lambda)b - r_0(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 &= \lambda a + (1-\lambda)b - (1-\lambda)(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \\
&= (2\lambda-1)a + 2(1-\lambda)\sqrt{ab} \\
&\geq a^{2\lambda-1}\left(\sqrt{ab}\right)^{2(1-\lambda)} \\
&= a^\lambda b^{1-\lambda}.
\end{aligned}$$

Epäyhtälön (1) mukaan yhtäsuuruus pätee, jos ja vain jos $a = b$. Siis, epäyhtälössä (2) vallitsee yhtäsuuruus, jos ja vain jos $\lambda = \frac{1}{2}$ tai $a = b$.

Furuichi [8] kirjoitti epäyhtälön (2) muotoon

$$\lambda a + (1-\lambda)b - a^\lambda b^{1-\lambda} \geq 2r_0\left(\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab}\right)$$

ja yleisti sen useammalle luvulle. Hänen artikkelissaan on eräitä epäselvyyksiä, jotka korjataan tässä.

Lause 7.6 Jos $x_1, \ldots, x_n > 0$, $p_n \geq \ldots \geq p_2 \geq p_1 > 0$ ja $p_1 + \ldots + p_n = 1$, niin

$$\sum_{\imath=1}^{n} p_\imath x_\imath - \prod_{\imath=1}^{n} x_\imath^{p_\imath} \geq np_1\Big(\frac{1}{n}\sum_{\imath=1}^{n} x_\imath - \prod_{\imath=1}^{n} x_\imath^{1/n}\Big). \tag{3}$$

Yhtäsuuruus on voimassa, jos ja vain jos $x_1 = \ldots = x_n$ tai $p_1 = \ldots = p_n = \frac{1}{n}$.

Todistus (Vrt. [8]) Jos $p_1 = \ldots = p_n = \frac{1}{n}$, niin epäyhtälön (3) vasen ja oikea puoli ovat samat. Oletetaan nyt, että kaikki p:t eivät ole samoja. Koska $np_1 > 0$, $p_\imath - p_1 \geq 0$ ja

$$np_1 + \sum_{\imath=2}^{n}(p_\imath - p_1) = 1,$$

saadaan epäyhtälöä $\mathcal{A}_\lambda \geq \mathcal{G}_\lambda$ (lause 4.1 ja sen jälkeinen huomautus, s. 39) soveltaen

$$\begin{aligned}
\sum_{\imath=1}^{n} p_\imath x_\imath - p_1\Big(\sum_{\imath=1}^{n} x_\imath - n\prod_{\imath=1}^{n} x_\imath^{1/n}\Big) &= np_1\Big(\prod_{\imath=1}^{n} x_\imath^{1/n}\Big) + \sum_{\imath=1}^{n}(p_\imath - p_1)x_\imath \\
&= np_1\Big(\prod_{\imath=1}^{n} x_\imath^{1/n}\Big) + \sum_{\imath=2}^{n}(p_\imath - p_1)x_\imath \\
&\geq \Big(x_1^{1/n} \ldots x_n^{1/n}\Big)^{np_1} \prod_{\imath=2}^{n} x_\imath^{p_\imath - p_1} \\
&= x_1^{p_1} \ldots x_n^{p_1} \prod_{\imath=2}^{n} x_\imath^{p_\imath - p_1} \\
&= x_1^{p_1} \ldots x_n^{p_n}.
\end{aligned}$$

Epäyhtälön $\mathcal{A}_\lambda \geq \mathcal{G}_\lambda$ yhtäsuuruusehdon mukaan yhtäsuuruus on voimassa, jos ja vain jos

$$x_1^{1/n} x_2^{1/n} \ldots x_n^{1/n} = x_2 = \ldots = x_n = x,$$

mistä seuraa, että myös $x_1 = x$.

7.5 Hölderin epäyhtälö

Soveltamalla Youngin epäyhtälöä

$$a^{\lambda} b^{1-\lambda} \leq \lambda a + (1-\lambda) b$$

lukuihin u^p ja v^q, missä $p^{-1} = \lambda$ ja $q^{-1} = 1 - \lambda$, saadaan seuraava lause.

Lause 7.7 Jos $u, v \geq 0$ sekä p ja q positiivisia lukuja, joiden käänteislukujen summa on 1, niin

$$uv \leq \frac{1}{p} u^p + \frac{1}{q} v^q. \tag{1}$$

Yhtäsuuruus vallitsee, jos ja vain jos $u^p = v^q$.

Epäyhtälön (1) avulla todistetaan *Hölderin epäyhtälö.*

Lause 7.8 Olkoot $u_1, \ldots, u_n, v_1, \ldots, v_n \geq 0$ sekä p ja q kuten edeltävässä lauseessa. Tällöin

$$u_1 v_1 + \ldots + u_n v_n \leq (u_1^p + \ldots + u_n^p)^{\frac{1}{p}} (v_1^q + \ldots + v_n^q)^{\frac{1}{q}}. \tag{2}$$

Yhtäsuuruus on voimassa, jos ja vain jos on olemassa vakio λ siten, että

$$\lambda u_\imath^p = v_\imath^q \quad \text{tai} \quad u_\imath^p = \lambda v_\imath^q \quad \text{kaikilla} \quad \imath \in \{1, 2, \ldots, n\}. \tag{3}$$

Todistus [26, s. 136] Jos $u_1 = \ldots = u_n$ tai $v_1 = \ldots = v_n$, niin yhtäsuuruus on voimassa. Oletetaan seuraavaksi, että on olemassa $u_\imath > 0$ ja $v_\jmath > 0$. Sijoittamalla luvut

$$\frac{u_\imath}{(u_1^p + \ldots + u_n^p)^{1/p}} \quad \text{ja} \quad \frac{v_\imath}{(v_1^q + \ldots + v_n^q)^{1/q}} \quad (\imath = 1, 2, \ldots, n)$$

epäyhtälöön (1) sekä laskemalla näin saadut epäyhtälöt yhteen saadaan

$$\frac{u_1 v_1 + \ldots + u_n v_n}{(u_1^p + \ldots + u_n^p)^{\frac{1}{p}} (v_1^q + \ldots + v_n^q)^{\frac{1}{q}}} \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

mistä (2) seuraa. Epäyhtälön (1) yhtäsuuruusehdon mukaan yhtäsuuruus vallitsee epäyhtälössä (2), jos ja vain jos

$$\frac{u_\imath^p}{u_1^p + \ldots + u_n^p} = \frac{v_\imath^q}{v_1^q + \ldots + v_n^q}$$

kaikilla $\imath = 1, 2, \ldots, n$, mistä (3) seuraa.

Huomautus 1 [26, s. 151, teht. 9.10] Hölder ei kuitenkaan todistanut tätä epäyhtälöä muodossa (2) vaan seuraavassa: Jos $w_1, ..., w_n, y_1, ..., y_n \geq 0$ ja $p > 1$, niin

$$\sum_{k=1}^{n} w_k y_k \leq \left(\sum_{k=1}^{n} w_k\right)^{1-\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} w_k y_k^p\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{4}$$

Epäyhtälön todistamiseksi tutkitaan funktiota $f(x) = x^p$. Se on aidosti konveksi, sillä sen toinen derivaatta $f''(x) = p(p-1)x^{p-2} > 0$ kaikilla $x \in \mathbb{R}_+$. Jensenin epäyhtälö

$$f\left(\frac{w_1 y_1 + \ldots + w_n y_n}{w_1 + \ldots + w_n}\right) \leq \frac{w_1 f(y_1) + \ldots + w_n f(y_n)}{w_1 + \ldots + w_n}$$

sievenee muotoon

$$\frac{(w_1 y_1 + \ldots + w_n y_n)^p}{(w_1 + \ldots + w_n)^p} \leq \frac{w_1 y_1^p + \ldots + w_n y_n^p}{w_1 + \ldots + w_n},$$

ja edelleen epäyhtälöksi

$$(w_1 y_1 + \ldots + w_n y_n)^p \leq (w_1 + \ldots + w_n)^{p-1} (w_1 y_1^p + \ldots + w_n y_n^p),$$

mistä potenssiin $\frac{1}{p}$ korottamalla (4) seuraa.
Epäyhtälö (4) muuntuu Hölderin epäyhtälöksi (2), kun siihen sijoitetaan

$$w_k = b_k^q \quad \text{ja} \quad y_k = a_k b_k^{1-q}$$

sekä merkitään

$$\frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p}.$$

Vastaavasti epäyhtälö (2) muuntuu epäyhtälöksi (4), kun siihen sijoitetaan

$$a_k = (w_k^{\frac{1}{p}} y_k) \quad \text{ja} \quad b_k = w_k^{\frac{1}{q}}.$$

Epäyhtälöt (2) ja (4) ovat siis yhtäpitävät.

Huomautus 2 Hölderin epäyhtälön avulla saadaan vaihtoehtoinen todistus epäyhtälölle $\phi(p) \leq \phi(q)$ (lause 6.5, s. 66), missä $p < q$ ja

$$\phi(p) = \begin{cases} n^{-\frac{1}{p}} \left(x_1^p + \ldots + x_n^p\right)^{\frac{1}{p}}, & \text{kun } p \neq 0, \\ \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n}\,, & \text{kun } p = 0. \end{cases}$$

Jos $x_1, \ldots, x_n \geq 0$, $p > 1$, $q > 1$ ja $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, niin Hölderin epäyhtälön mukaan

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n \leq (1^q + \ldots + 1^q)^{\frac{1}{q}}(x_1^p + x_2^p + \ldots + x_n^p)^{\frac{1}{p}},$$

mistä seuraa

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n \leq n^{\frac{1}{q}}(x_1^p + x_2^p + \ldots + x_n^p)^{\frac{1}{p}},$$

ja edelleen n:llä jakamalla

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \leq n^{-\frac{1}{p}}(x_1^p + x_2^p + \ldots + x_n^p)^{\frac{1}{p}}.$$

Huomautus 3 Todistimme aikaisemmin (esim. 1, s. 68) Schlömilchin epäyhtälön avulla Hölderin epäyhtälöä muistuttavan epäyhtälön

$$\frac{1}{n}\sum_{\imath,\jmath} u_\imath v_\jmath \leq \left(u_1^p + \ldots + u_n^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(v_1^q + \ldots + v_n^q\right)^{\frac{1}{q}}, \tag{5}$$

missä $p, q > 0$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ja $u_1, \ldots u_n$, $v_1 \ldots v_n \geq 0$. Tämä epäyhtälö voidaan todistaa myös Hölderin epäyhtälön avulla, sillä CBS-epäyhtälön yhteydessä nähtyä 1-keinoa soveltaen saamme aluksi

$$1 \cdot u_1 + \ldots + 1 \cdot u_n \leq \left(1^q + \ldots + 1^q\right)^{\frac{1}{q}}\left(u_1^p + \ldots + u_n^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

ja

$$1 \cdot v_1 + \ldots + 1 \cdot v_n \leq \left(1^p + \ldots + 1^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(v_1^q + \ldots + v_n^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Kertomalla nämä epäyhtälöt keskenään saadaan

$$\left(u_1 + \ldots + u_n\right)\left(v_1 + \ldots + v_n\right) \leq n^{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}}\left(u_1^p + \ldots + u_n^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(v_1^q + \ldots + v_n^q\right)^{\frac{1}{q}},$$

ja edelleen, koska $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$,

$$\sum_{\imath,\jmath} u_\imath v_\jmath \leq n\left(u_1^p + \ldots + u_n^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(v_1^q + \ldots + v_n^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

mistä (5) seuraa.

Epäyhtälö (5) ei näyttäisi olevan vertailullinen on Hölderin epäyhtälön kanssa. Jos näet

$$(u_1, u_2, u_3, u_4) = (1, 0, 1, 0) \quad \text{ja} \quad (v_1, v_2, v_3, v_4) = (0, 1, 0, 1),$$

niin Hölderin epäyhtälö on $0 \leq 2$ ja epäyhtälö (5) on $1 \leq 2$. Jos taas

$$(u_1, u_2, u_3, u_4) = (v_1, v_2, v_3, v_4) = (1, 0, 0, 0),$$

niin Hölderin epäyhtälö on $1 \leq 1$ ja epäyhtälö (5) on $\frac{1}{4} \leq 1$. Koska (5) kuitenkin seuraa Hölderin epäyhtälöstä, on sen oltava heikompi kuin Hölderin yhtälö. Tämä nähdään "terästämällä" Hölderin epäyhtälö: Jos edellytämme, että $u_1 \leq \ldots \leq u_n$ ja $v_1 \leq \ldots \leq v_n$, niin (2) on edelleen voimassa ja sen oikea puoli pysyy ennallaan, mutta Tšebyševin epäyhtälön (lause 7.4, s. 85) mukaan

$$\frac{u_1 + \ldots + u_n}{n} \cdot \frac{v_1 + \ldots + v_n}{n} \leq \frac{u_1 v_1 + \ldots + u_n v_n}{n},$$

mistä seuraa

$$\frac{1}{n} \sum_{i,j} u_i v_j \leq \sum_{i=1}^{n} u_i v_i.$$

Epäyhtälö (5) on siis heikompi kuin Hölderin epäyhtälö (2).

Huomautus 4 [26, Teht. 9.9, a-kohta, s.151] Olkoot $p, q > r > 0$ ja

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}.$$

Jos $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \geq 0$, niin

$$\left(\sum_{i=1}^{n} (a_i b_i)^r \right)^{\frac{1}{r}} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q \right)^{\frac{1}{q}}. \tag{6}$$

Oletuksen mukaan

$$\frac{1}{p/r} + \frac{1}{q/r} = 1.$$

Soveltamalla Hölderin epäyhtälöä lukuihin $a_1^r, \ldots, a_n^r$, $b_1^r, \ldots, b_n^r$ saadaan

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^r b_i^r \leq \left(\sum_{i=1}^{n} (a_i^r)^{\frac{p}{r}} \right)^{\frac{r}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} (b_i^r)^{\frac{q}{r}} \right)^{\frac{r}{q}},$$

ja edelleen

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i b_i)^r \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p) \right)^{\frac{r}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} (b_i^q) \right)^{\frac{r}{q}},$$

mistä (6) seuraa korottamalla viimeksi saatu epäyhtälö potenssiin $\frac{1}{r}$.

Esim. 1 [26, Teht. 9.9, b-kohta, s.151] Olkoot $p, q, r > 1$ ja

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1.$$

Jos $a_\imath, b_\imath, c_\imath \geq 0$, kun $\imath \in \{1, 2, \ldots, n\}$, niin

$$\sum_{\imath=1}^{n} a_\imath b_\imath c_\imath \leq \left(\sum_{\imath=1}^{n} a_\imath^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{\imath=1}^{n} b_\imath^q\right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{\imath=1}^{n} c_\imath^r\right)^{\frac{1}{r}}. \tag{7}$$

Jos esimerkiksi $a_1 = \ldots = a_n = 0$, niin yhtäsuuruus on voimassa. Voimme siis olettaa, että jokaisessa joukossa

$$\{a_1, \ldots, a_n\}, \quad \{b_1, \ldots, b_n\}, \quad \{c_1, \ldots, c_n\}$$

on vähintään yksi positiivinen luku. Sovelletaan painotettua $\mathcal{AG}$-epäyhtälöä lukuihin

$$\alpha_\imath = \frac{a_\imath^p}{a_1^p + \ldots + a_n^p}, \quad \beta_\imath = \frac{b_\imath^p}{b_1^p + \ldots + b_n^p}, \quad \gamma_\imath = \frac{c_\imath^p}{c_1^p + \ldots + c_n^p}.$$

kaikilla $\imath \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Saamme epäyhtälöt

$$\alpha_\imath^{\frac{1}{p}} \beta_\imath^{\frac{1}{q}} \gamma_\imath^{\frac{1}{r}} \leq \frac{1}{p}\alpha_\imath + \frac{1}{q}\beta_\imath + \frac{1}{r}\gamma_\imath,$$

joiden summa

$$\sum_{\imath=1}^{n} \left(\frac{a_\imath b_\imath c_\imath}{\left(\sum a_\imath^p\right)^{1/p} \left(\sum b_\imath^q\right)^{1/q} \left(\sum c_\imath^r\right)^{1/r}} \right) \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1,$$

mistä väite seuraa. Epäyhtälö (7) voidaan samalla periaatteella yleistää n:n muuttujan epäyhtälöksi.

Esim. 2 Yliharmoninen sarja

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \quad (s > 1)$$

suppenee. Asettamalla Hölderin epäyhtälössä $u_k = v_k = \frac{1}{k}$ $(k = 1, \ldots, n)$ saamme

$$1 + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} \leq \left(1 + \frac{1}{2^p} + \ldots + \frac{1}{n^p}\right)^{\frac{1}{p}} \left(1 + \frac{1}{2^q} + \ldots + \frac{1}{n^q}\right)^{\frac{1}{q}},$$

missä $p, q > 1$ ja

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Tästä seuraa epäyhtälön säilymisperiaatteen mukaan

$$\zeta(2) \leq \zeta(p)^{\frac{1}{p}} \zeta(q)^{\frac{1}{q}}.$$

7.6 Minkowskin epäyhtälö

Todistimme (s. 26, esim. 5) Minkowskin epäyhtälön tapauksessa

$$u_1, u_2, ..., u_n,\ v_1, v_2, ..., v_n\ >\ 0.$$

Todistamme sen nyt yleisesti.

Olkoot $p \geq 1$, $\boldsymbol{u} = (u_1,\, u_2,\, \ldots,\, u_n) \in \mathbb{R}^n$. Merkitsemällä

$$\|\boldsymbol{u}\|_p\ =\ \left(\sum_{\imath=1}^{n} |u_\imath|^p\right)^{1/p}$$

voimme esittää Minkowskin epäyhtälön muodossa

$$\|\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}\|_p\ \leq\ \|\boldsymbol{u}\|_p\ +\ \|\boldsymbol{v}\|_p.$$

Jos $p = 1$, niin epäyhtälö on triviaalisti voimassa. Siinä vallitsee yhtäsuuruus, jos ja vain jos u- ja v-luvut eivät ole erimerkkiset, mikä pelkistyy kaikilla $\imath$:n arvoilla voimassa olevaksi ehdoksi $u_\imath v_\imath \geq 0$. Edelleen, jos $\|\boldsymbol{u}\|_p = 0$, niin epäyhtälössä vallitsee yhtäsuuruus. Vielä, jos $\|\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}\|_p = 0$, niin epäyhtälö on voimassa ja siinä vallitsee yhtäsuuruus, jos ja vain jos $\|\boldsymbol{u}\|_p = \|\boldsymbol{v}\|_p = 0$.

Voidaan siis olettaa, että $\|\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}\|_p > 0$, $\|\boldsymbol{u}\|_p > 0$ ja $p > 1$. Kolmioepäyhtälön avulla saadaan aluksi

$$\sum_{\imath=1}^{n} |u_\imath + v_\imath|^p\ =\ \sum_{\imath=1}^{n} |u_\imath + v_\imath|\, |u_\imath + v_\imath|^{p-1}\ \leq\ \sum_{\imath=1}^{n} |u_\imath|\, |u_\imath + v_\imath|^{p-1} + \sum_{\imath=1}^{n} |v_\imath|\, |u_\imath + v_\imath|^{p-1}.$$

Olkoon

$$q\ =\ \frac{p}{p-1}, \quad \text{jolloin} \quad p + q = pq.$$

Soveltamalla Hölderin epäyhtälöä oikealla puolella oleviin summiin nähdään, että

$$\sum_{\imath=1}^{n} |u_\imath|\, |u_\imath + v_\imath|^{p-1}\ \leq\ \left(\sum_{\imath=1}^{n} |u_\imath|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{\imath=1}^{n} |u_\imath + v_\imath|^{q(p-1)}\right)^{1/q}$$

ja

$$\sum_{\imath=1}^{n} |v_\imath|\, |u_\imath + v_\imath|^{p-1}\ \leq\ \left(\sum_{\imath=1}^{n} |v_\imath|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{\imath=1}^{n} |u_\imath + v_\imath|^{q(p-1)}\right)^{1/q}.$$

Laskemalla nämä yhteen ja huomaamalla, että $q(p-1) = p$, saadaan

$$\sum_{\imath=1}^{n} |u_\imath + v_\imath|^p\ \leq\ \left(\left(\sum_{\imath=1}^{n} |u_\imath|^p\right)^{1/p} +\ \left(\sum_{\imath=1}^{n} |v_\imath|^p\right)^{1/p}\right) \left(\sum_{\imath=1}^{n} |u_\imath + v_\imath|^p\right)^{1/q},$$

mistä äärimmäisenä oikealla olevalla (positiivisella) tekijällä jakamalla seuraa

$$\left(\sum_{\imath=1}^{n} |u_\imath + v_\imath|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{\imath=1}^{n} |u_\imath|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{\imath=1}^{n} |v_\imath|^p\right)^{1/p}.$$

Yhtäsuuruus voimassa, jos ja vain jos se on voimassa sekä kolmioepäyhtälöä että Hölderin epäyhtälöä sovellettaessa. Ensin mainitun mukaan luvut $u_\imath$, $v_\imath$ eivät millään $\imath$:n arvolla saa olla erimerkkiset, joten jälkimmäisen mukaan pitää olla $\lambda_1\ (\geq 1)$ ja $\lambda_2\ (\geq 1)$ siten, että kaikilla $\imath$:n arvoilla on

$$\begin{aligned} \lambda_1 |u_\imath|^p &= \left(|u_\imath + v_\imath|^{p-1}\right)^q = |u_\imath + v_\imath|^p \\ \text{ja} \qquad \\ \lambda_2 |v_\imath|^p &= \left(|u_\imath + v_\imath|^{p-1}\right)^q = |u_\imath + v_\imath|^p. \end{aligned}$$

Näistä yhtälöistä seuraa, että $\lambda_1|u_\imath|^p = \lambda_2|v_\imath|^p$, ja edelleen

$$|v_\imath| = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}|u_\imath| = k|u_\imath|$$

kaikilla $\imath \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Koska luvut $u_\imath$ ja $v_\imath$ eivät ole erimerkkiset, voidaan viimeksi saatu yhtälö kirjoittaa muotoon $v_\imath = ku_\imath$, joten voimme tiivistää Minkowskin epäyhtälön lauseeksi.

Lause 7.9 Kaikilla $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ on

$$\|\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}\|_p \leq \|\boldsymbol{u}\|_p + \|\boldsymbol{v}\|_p,$$

missä yhtäsuuruus on voimassa, jos ja vain jos vektorit $\boldsymbol{u}$ ja $\boldsymbol{v}$ ovat samansuuntaiset.

Funktio $\|\cdot\|_p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ toteuttaa siis kolmioepäyhtälön, ja on helppo nähdä, että sillä on muutkin normin ominaisuudet.

7.7 Käänteinen Youngin epäyhtälö

Youngin epäyhtälön tarkentamisesta oli puhetta luvussa 7.4. Myös Hölderin ja Minkowskin epäyhtälöitä voidaan tarkentaa. Mielenkiintoinen ja ajankohtainen tutkimusaihe on näiden epäyhtälöiden kääntäminen, mikä tarkoittaa, että epäyhtälön suunta muuttuu, mutta siinä olevat lausekkeet pysyvät samantyyppisinä. Katsomme seuraavassa Youngin epäyhtälöön liittyviä viimeaikaisia tuloksia.

Furuichi ja Minculete [9] johtivat Youngin epäyhtälön

$$a^{1-\lambda}b^{\lambda} \leq (1-\lambda)a + \lambda b$$

oikealle puolelle ylärajat

$$(1-\lambda)a + \lambda b \quad \leq \quad a^{1-\lambda}b^{\lambda} \exp\Big\{\frac{\lambda(1-\lambda)(a-b)^2}{\min\{a,b\}^2}\Big\}$$

ja

$$(1-\lambda)a + \lambda b \quad \leq \quad a^{1-\lambda}b^{\lambda} + \lambda(1-\lambda)\Big\{\ln\Big(\frac{a}{b}\Big)\Big\}^2 \max\{a,b\}.$$

Tominaga [29] oli jo heitä aikaisemmin johtanut *Spechtin suhteesta* S ja *logaritmisesta keskiarvosta* L riippuvat ylärajat

$$(1-\lambda)a + \lambda b \quad \leq \quad S\Big(\frac{a}{b}\Big)a^{1-\lambda}b^{\lambda} \tag{1}$$

ja

$$(1-\lambda)a + \lambda b \quad \leq \quad L(a,b)\ln S\Big(\frac{a}{b}\Big) + a^{1-\lambda}b^{\lambda}. \tag{2}$$

Funktiot S ja L määritellään yhtälöillä

$$S(x) \quad = \quad \frac{u(x)}{\mathrm{e}\ln u(x)}, \qquad u(x) \; = \; x^{\frac{1}{x-1}} \quad (x>0, x\neq 1),\; u(1) = \mathrm{e}$$

ja

$$L(x,y) \quad = \quad \frac{y-x}{\ln y - \ln x}, \quad (x \neq y), \qquad L(x,x) = x.$$

Logaritminen keskiarvo on jatkuva ja toteuttaa yhtälön $L(x,y) = L(y,x)$ kaikilla $x, y \in \mathbb{R}_+$. Tutkimme Spechtin suhteen ominaisuuksia hieman tarkemmin. Näemme välittömästi, että funktio u toteuttaa yhtälöt

$$u(\tfrac{1}{x}) \; = \; u(x)^x \; = \; x\,u(x),$$

joten

$$S(\tfrac{1}{x}) \; = \; \frac{u(\frac{1}{x})}{\mathrm{e}\ln u(\frac{1}{x})} \; = \; S(x) \tag{3}$$

kaikilla $x \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$. Tämä osoittaa, että epäyhtälöiden (1) ja (2) oikeat puolet ovat riippumattomien lukujen a ja b järjestyksestä. Edelleen $\ln u(x) \to 1$, kun $x \to 1$, joten

$$\lim_{x\to 1} u(x) \; = \; \mathrm{e} \quad \text{ja} \quad \lim_{x\to 1} S(x) \; = \; 1.$$

Spechtin suhde on siis positiivisille reaaliluvuille määritelty jatkuva funktio, kun määrittelemme $S(1) = 1$. Osoitamme vielä, että $S(x) > S(1)$, kun $x \neq 1$. Tutkimme funktiota S alueessa $x > 1$. Ylläolevin merkinnöin

$$S'(x) \;=\; \frac{u(x)}{\mathrm{e}(\ln x)^2(x-1)^2}\,(\ln u(x) - 1)\left(1 - \frac{1}{x} - \ln x\right).$$

Derivaatan kolmesta tekijästä ensimmäinen on positiivinen ja muut kaksi negatiivisia, kun $x > 1$, joten $S'(x) > 0$. Koska S on jatkuva, se on aidosti kasvava alueessa $x \geq 1$, mistä seuraa $S(x) > S(1)$, kun $x > 1$. Ominaisuuden (3) takia S on aidosti vähenevä alueessa $0 < x \leq 1$, joten $S(x) > S(1)$ myös välillä $]0,1[$.

Lähdeluettelo

[1] M. Bencze, O. T. Pop, Generalizations and refinements for Nesbitt's inequality, *Math. Ineq.* Volume 5, Number 1 (2011), 13–20.

[2] M. Aigner, G. M. Ziegler, *Proofs from the Book*, Springer, 2004.

[3] C. B. Boyer, *Tieteiden kuningatar, Matematiikan historia, osa I*, Art House, 1994.

[4] A. Browder, *Mathematical Analysis, An Introduction*, Springer, 1996.

[5] P. S. Bullen, *Handbook of Means and Their Inequalities*, Kluwer, 2003.

[6] A.-M. Ernvall-Hytönen, J. Lappalainen, Epäyhtälöoppia matematiikkaolympialaisten tehtäviin, `http://solmu.math.helsinki.fi/olympia/kirjallisuus/eykirja.pdf`

[7] S. S. Dragomir, A Survey on Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz type discrete inequalities, *Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics*, Volume 4, Issue 3, Article 63, 2003.

[8] S. Furuichi, A refinement of the arithmetic-geometric mean inequality, arXiv:0912.5227v1 [math.CA] 28 Dec 2009.

[9] S. Furuichi, N. Minculete, Alternative reverse inequalities for Young's inequality, *Math. Ineq.* 4 (2011), 595–600.

[10] M. Halmetoja, Epäyhtälöistä, osa 1, *Solmu 2/2010.* `http://solmu.math.helsinki.fi/2010/2/epayhtaloista_osa1.pdf`

[11] M. Halmetoja, Epäyhtälöistä, osa 2, *Solmu 3/2010.* `http://solmu.math.helsinki.fi/2010/3/epayhtaloista_osa2.pdf`

[12] M. Halmetoja, K. Häkkinen, J. Merikoski, L. Pippola, H. Silfverberg, T. Tossavainen, *Matematiikan taito 14, Kertaus*, WSOY 2007.

[13] Z. Kadelburg, Some classical inequalities and their applications to olympiad problems, *Teaching Math.* 14 (2011), 97–106.

[14] Z. Kadelburg, D. Đusić, M. Lukić, I. Matić, Inequalities of Karamata, Schur and Muirhead and some applications, *Teaching Math.* 8 (2005), 31–45.

[15] B. Khesin, S. Tabachnikov (eds.), Tribute to Vladimir Arnold, *Notices AMS* 59 (2012), 378–399.

[16] F. Kittaneh, Y. Manasrah, Improved Young and Heinz inequalities for matrices, *J. Math. Anal. Appl.* 361 (2010), 262–269.

[17] M. Lehtinen, *Matematiikan olympiakirja, tehtävät ja ratkaisut*, Weilin+Göös, 1995.

[18] M. Lehtinen, Yksi helppo, viisi vaikeaa? Kansainväliset matematiikka-olympialaiset 2012, *Solmu 3/2013*. `http://solmu.math.helsinki.fi/2012/3/imo2012.pdf`

[19] M. Lehtinen, *Kilpailumatematiikan opas*, `http://solmu.math.helsinki.fi/olympia/kirjallisuus/kilpmatopas.pdf`

[20] E. Lindelöf, *Differentiali- ja integralilasku ja sen sovellutukset II. Kahden tai useamman muuttujan funktiot*, Mercator, 1932.

[21] A. W. Marshall, I. Olkin, *Inequalities: Theory of Majorization and Its Applications*, Acad. Pr., 1979.

[22] J. Merikoski, M. Halmetoja, T. Tossavainen, Means and the mean value theorem, *Internat. J. Math. Educ. Sci. Tech.* 40 (2009), 729–740.

[23] D. S. Mitrinović, *Analytic Inequalities*, Springer, 1970.

[24] A. M. Nesbitt, Problem 15114, *Educational Times (2)*, **3** (1903), 37–38.

[25] W. Rudin, *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill, TMH-edition, 1980.

[26] J. M. Steele, *The Cauchy-Schwarz Master Class: An Introduction to the Art of Mathematical Inequatilies*, Cambridge Univ. Pr., 2007.

[27] Solmun keskustelupalsta, `http://solmu.math.helsinki.fi/cgi-bin/yabb2/YaBB.pl?num=1214593068`.

[28] J. van Tiel, *Convex Analysis: An Introductory Text*, John Wiley, 1984.

[29] M. Tominaga, Specht ratio in the Young inequality, *Sci. Math. Japon.* 55 (2002), 538–588.