TAMPEREEN YLIOPISTO

Matematiikan esimerkit funktiokäsitteen opetuksessa

Esimerkkien piirteet, analoginen suhde harjoitustehtäviin
ja siirtymä peruskoulusta lukion opetukseen
oppikirjojen ilmentämänä

Tampereen yliopisto
Kasvatustieteiden yksikkö
Pro gradu -tutkielma
TUOMAS KROOK
Huhtikuu 2014

Tampereen yliopisto
Kasvatustieteiden yksikkö
KROOK, TUOMAS: ”Matematiikan esimerkit funktiokäsitteen opetuksessa: Esimerkkien piirteet, analoginen suhde harjoitustehtäviin ja siirtymä peruskoulusta lukion opetukseen oppikirjojen ilmentämänä”
Pro gradu -tutkielma, 120 sivua, 65 liitesivua
Huhtikuu 2014

TIIVISTELMÄ

Matematiikan oppikirjat sisältävät nykyään runsaasti esimerkkejä. Vaikka oppikirjatutkimusta on runsaasti, tutkimukset eivät ole keskittyneet oppikirjojen esimerkkeihin. Tutkimusta johdattaneet kysymykset olivat tämän vuoksi uusia näkökulmia luotaavia. Millaisia esimerkkejä matematiikan oppikirjoissa on? Miten esimerkit auttavat oppijaa harjoitustehtävien tekemisessä? Kysymyksiin vastaamiseksi tutkimuksessa oli tarpeellista kehittää luokittelukehikkoa esimerkkien tarkastelemiseksi. Esimerkkien ja tehtävien suhdetta tutkittiin tukeutumalla analogioita koskevaan teoriaan.

Tutkimuksen kohteiksi valikoitui yksi kirjasarja yläkoulusta, lukion lyhyestä matematiikasta ja lukion pitkästä matematiikasta. Kirjasarjat olivat Laskutaito, Lyhyt matikka ja Pyramidi. Näistä oppikirjoista analysoitiin funktioihin liittyvät aihealueet siltä osin kun ne muodostivat jatkumon yläkoulun ja lukion välille. Esimerkkejä, sekä niiden analogista suhdetta harjoitustehtäviin, analysoitiin teoriasidonnaisen sisällönanalyysin keinoin.

Oppikirjojen havaittiin sisältävän käytännöllisesti katsoen ainoastaan suljettuja esimerkkejä. Oppikirjat olivat tältä osin opetussuunnitelmien mukaisia. Matemaattisen osaamisen eri piirteiden suhteen oppikirjat eivät kuitenkaan noudattaneet opetussuunnitelmien luonnetta. Tulosten perusteella oppikirjasarjat poikkeavat toisistaan niin esimerkkien kuin niiden opetuksellisen roolin perusteella. Yläkoulun oppikirjasta välittyi mekaaninen ja rutiininomainen kuva matematiikasta. Lukion lyhyessä matematiikassa pääpaino oli matematiikan hyötynäkökulmassa. Lukion pitkässä matematiikassa sen sijaan oppikirjojen opetukselliset ratkaisut kannustivat vaativaan matemaattiseen ajatteluun. Esimerkkien ja tehtävien välillä oli oppikirjoissa runsaasti analogiaa. Ainakin yläkoulussa ja lukion lyhyessä matematiikassa analogioiden monipuolistaminen on tutkimustulosten perusteella paikallaan. Tehtäväsarjat Laskutaidossa ja Lyhyessä matikassa eivät yleensä ottaneet huomioon esimerkkien ja tehtävien välisessä analogiassa oppijan kehittymistä. Yläkoulun aihealueiden jatkuvuuden kannalta lukion kirjat erosivat toisistaan selkeästi analogiasuhteissaan esimerkkien ja tehtävien välillä. Lyhyt matikka ei luonut analogioiden perusteella mielekästä jatkumoa yläkoulun matematiikasta. Pyramidi onnistui paremmin jatkamaan yläkoulun aiheita. Analogioiden vähäisempi määrä Pyramidissa edellytti, että opiskelijat ovat lukioon tullessaan onnistuneet kehittämään ajattelutaitojaan matematiikassa.

Avainsanat: matemaattinen osaaminen, proseduraalinen samanlaisuus, modulaarinen ja molaarinen ratkaisuprosessi, avoimet ja suljetut esimerkit, oppikirja-analyysi.

Sisältö

1 JOHDANTO

Oppikirjojen rooli kouluopetuksessa on hyvin vahva (Törnroos 2004). Matematiikan oppikirjat sisältävät nykyisin runsaasti esimerkkejä, jotka auttavat oppijaa tavalla tai toisella tehtävien tekemisessä ja oppimisessa. Matematiikassa esimerkit mallintavat yleensä jotakin tiettyä tehtävätyyppiä ja sitä kuinka siihen tulisi vastata. Esimerkit tarjoavat oppijalle mahdollisuuden oppia esimerkin taustalla vaikuttavia periaatteita, mutta samalla esimerkit voivat tarjota myös valmiin ratkaisumallin harjoitustehtävien tekemiseksi. Esimerkkien tuleminen osaksi matematiikan oppimateriaaleja ja opetusta herättää kysymyksiä esimerkkien paikasta oppimateriaaleissa.

Tutkimusprosessin alussa tämän muutoksen ymmärtäminen nosti pintaan kriittisen näkökannan: tarvitaanko matematiikan oppimisessa edes lähtökohtaisesti esimerkkejä? Muuttuuko matematiikan oppiminen mallioppimiseksi, kun oppimateriaalit pursuavat esimerkkejä? Millaisia vaikutuksia esimerkkien runsaudella on oppimistuloksiin, joita saavutetaan? Aiempiin tutkimuksiin tutustuminen sai kuitenkin tutkimusprosessin kuluessa kysymään edellisen kaltaisia kysymyksiä aivan toisesta näkökulmasta. Suuri osa esimerkkejä koskevasta tutkimuksesta keskittyi siihen, johtaako esimerkkien käyttö parempiin oppimistuloksiin ja millaiset esimerkit ovat kaikista parhaimpia oppimisen edistäjiä. Tutkimustulokset näistä aiemmista tutkimuksista vakuuttivat esimerkkien hyödyistä niin oppimisprosessin kuin tulostenkin osalta, joten oli mielekästä muuttaa tutkimuksen suuntaa. Taustatyön perusteella oli selvää, että esimerkkien integrointi luonnolliseksi osaksi oppimista on tehokkaampaa ja tuloksellisempaa kuin oppiminen ilman esimerkkejä (ks. esim. Van Loon-Hillen, Van Gog, Brand-Gruwel 2012, 89–99). Kysymys onkin lähinnä siitä, millä tavoin esimerkkejä käytetään oppimisprosessin aikana. Tätä tutkimusta johdattivat näin ollen kysymykset: millaisia esimerkkejä oppikirjoissa on? Miten esimerkit liittyvät harjoitustehtäviin ja rakentuvatko nämä suhteet oppimisen kannalta parhaalla mahdollisella tavalla?

Tutkimustehtäväksi muodostui yläkoulun ja lukion matematiikan oppikirjojen esimerkkien luonnehdinta useasta eri näkökulmasta sekä esimerkkien ja harjoitustehtävien välisen analogiasuhteen tarkastelu. Oppikirjoista tarkastellaan funktioihin liittyviä aihealueita. Lukion oppikirjoissa tarkastelua rajataan edelleen aiheisiin, jotka pohjautuivat yläkoulun opetussuunnitelmaan. Tarkoituksena on oppikirjojen kuvailun lisäksi pohtia kriittisesti niissä tehtyjä pedagogisia ratkaisuja – lähinnä siis esimerkkien välittämää kuvaa matematiikan luonteesta sekä tehtävien ja esimerkkien välisen suhteen kiinteyttä.

Esimerkkien luonnehtimiseksi on mielekästä luokittaa esimerkkejä niiden ominaisuuksien perusteella. Tutkimus pohjataan aiemmissa tutkimuksissa käytettyihin luokittelukehyksiin, mutta osin luokittelusysteemiä joudutaan muokkaamaan tämän tutkimuksen tarkoituksiin sopivaksi. Aiemmissa tutkimuksissa on nimittäin usein keskitytty harjoitustehtäviin esimerkkien sijaan. Matematiikan tehtävien ja esimerkkien välistä analogiasuhdetta on tutkittu hyvin vähän. Muun muassa Chen (2002) ja Saifaddin (2011) ovat kuitenkin luoneet tutkimuksissaan perustaa analogioiden ja oppimisen yhteydestä. Erityisesti Saifaddinin väitöskirja auttoi esimerkkien ja tehtävien välisen analogian luokittamisessa.

Esimerkkien roolin ymmärtämiseksi ja niiden luonnehtimiseksi on välttämätöntä perehtyä kattavasti myös oppimisen teoreettisiin perusteisiin. Tutkimuksen teoreettinen viitekehys yhdistelee monia tieteellisiä artikkeleita. Erityisesti esimerkkeihin liittyvä tutkimus on niin uutta, että aiheesta ei ole saatavilla painettua kirjallisuutta.

Yleisesti ottaen oppimateriaalien tutkimusta on tehty laajasti. Tutkimuksen kohteena on useimmiten ollut oppikirjojen luonne, esitystapa tai konstruktivistisen oppimiskäsityksen suhde oppikirjoihin (Törnroos 2004). Aiemmat tutkimukset ovat osoittaneet, että oppikirja vaikuttaa merkittävimpänä oppimateriaalin muotona myös koulukohtaisiin opetussuunnitelmiin. Oppikirjojen asema opetuksessa on ollut kiistaton, eikä lähitulevaisuudessakaan ole näkyvissä tämän aseman murtumista, vaikka tietotekniikka voisi tavalla tai toisella haastaa perinteisiä oppikirjoja luomalla uudenlaisia oppimisympäristöjä. (Heinonen 2005, 241–243; Joutsenlahti & Vainionpää 2010, 139–141.) Oppikirjojen ja opetussuunnitelmien suhde on yleinen ja tärkeä näkökulma oppimateriaalitutkimuksessa, joten tutkimuksessa otetaan myös kantaa siihen, miten oppikirjat toteuttavat nykyisiä opetussuunnitelmia.

Tutkimuksen eteneminen on pääkohdittain seuraavanlainen. Toisessa kappaleessa määritellään oppikirjat oppimateriaalin eräänä muotona ja tarkastellaan oppikirjan asemaa suomalaisessa kouluopetuksessa. Kolmas kappale puolestaan keskittyy tutkimuksen teoreettiseen taustaan ja taustoittaa neljännessä kappaleessa muodostettavaa luokittelusysteemiä. Kolmas ja neljäs kappale ovat siis vahvasti kytköksissä toisiinsa, mutta ne haluttiin erottaa, jotta luokittelusysteemin rakentuminen konkretisoituisi tutkimuksen empiiristä osuutta ajatellen. Empiirisessä osuudessa eritellään ensin varsinaiset tutkimustulokset tutkimuskysymysten mukaisiin kappaleisiin jaoteltuna. Tämän jälkeen tarkastellaan nykyisten opetussuunnitelmien luonnetta matemaattisen osaamisen kannalta ja pohditaan tutkimustulosten avulla miten oppikirjat toteuttavat opetussuunnitelmia. Tutkimuksen lopussa pohditaan tutkimuksen luotettavuutta ja tehdään johtopäätöksiä saaduista tutkimustuloksista.

2 OPPIMATERIAALI, OPPIKIRJAT JA AIEMMAT OPPIKIRJATUTKIMUKSET

Oppimateriaaliksi määritellään kaikki sellainen aineisto, joka sisältää oppiainesta ja on tehty opetustarkoituksiin. Oppimateriaaleja voidaan eritellä esimerkiksi kirjalliseksi, visuaaliseksi, auditiiviseksi ja muuksi oppimateriaaliksi. Muuhun oppimateriaaliin luokiteltaisiin tässä jaottelussa esimerkiksi todellisuuden esineet, oppimispelit, simuloinnit ja verkkopohjaiset oppimisympäristöt. (Heinonen 2005, 30.) Tässä tutkimuksessa oppimateriaali määritellään Heinosen (mt., 30) ehdottamalla tavalla:

> *...oppikirjaksi, oppi-/tehtäväkirjaksi, tehtäväkirjaksi, opettajan materiaaliksi tai muuksi oheismateriaaliksi (cd-romit, verkkopohjaiset oppimisympäristöt, videot, oheislukemistot ym.). Ne sisältävät oppiainesta ja on tehty opetustarkoituksiin.*

Tässä tutkimuksessa keskitytään oppimateriaalin monista muodoista ainoastaan oppikirjoihin. Perehdytään siis seuraavaksi tarkemmin oppikirjan rooliin opetuksessa, oppimisessa ja nykyisessä koulukulttuurissa.

2.1 Oppikirjat oppimateriaalin muotona

Oppikirjojen erottaminen kauno- ja tietokirjoista ei ole itsestäänselvää, joten on tarpeen selventää oppikirjaa käsitteenä. Heinonen (2005, 7) määrittelee oppikirjan teokseksi, joka on laadittu opetustarkoituksiin. Oppikirjoja laaditaan koulujen ja oppikurssien lisäksi itsenäisen opiskelun tarpeisiin, joten oppikirjoja ei tule ajatella ainoastaan koulukirjoina (Häkkinen 2002, 11–12). Aivan kuten oppimateriaalit yleensä, oppikirjat sisältävät oppiainesta, jonka on tarkoitus välittyä oppilaille aikaansaaden pysyväisluonteisia ja tavoitteiden mukaisia oppimiskokemuksia (Heinonen 2005, 7). Oppikirjat käsittelevät jotakin tiettyä opinalaa, joten yleistä ja yleispätevää oppikirjaa ei ole olemassa. Opinalojen laajuus pakottaa lisäksi paloittelemaan oppisisältöjä tarkoituksenmukaisiin osiin oppijan iän, tason ja tavoitteiden mukaisesti. Tietokirjat eroavat oppikirjoista siinä, että niitä ei yleensä rakenneta opiskelijan ja oppikurssien ehdoilla. Tietokirjoissa asiasisältöjen rooli on tärkeämpi, joten kirjan laatija käy läpi määritellyn asiakokonaisuuden parhaaksi katsomallaan tavalla, joka voi olla tieteenalalla yleisesti hyväksytty tai ei. Oppikursseilla ei ole välttämätöntä rajoittua oppikirjoihin, vaan tietokirjojen käyttö voi olla perusteltua, kun halutaan tietää tavallista enemmän jostakin erityiskysymyksestä. (Häkkinen 2002, 11–13.) Oppikirjojen ero kaunokirjallisuuteen on selkeämpi. Kaunokirjallisuuden tavoitteet ovat taiteellisia, joten kaunokirjallisuutta luetaan ennemmin huvin ja viihteen kuin oppimisen vuoksi.

Matematiikan kouluopetuksessa opiskellaan tyypillisesti pääasiassa oppikirjojen avulla, joten suomalaista opetuskulttuuria on luonnehdittu oikeutetusti oppikirjakeskeiseksi (Mikkilä-Erdmann, Olkinuora, Mattila 1999, 437; Joutsenlahti & Vainionpää 2010, 137). Oppilaat ja opiskelijat käyttävät edelleen jokainen omaa kirjaa, joka on heidän käytössään koko kouluvuoden, jakson tai kurssin ajan (Shield & Dole 2013, 184). Suomessa oppilaat käyttävät pääasiassa samoja kirjoja taitotasostaan riippumatta, toisin kuin esimerkiksi Saksassa ja Englannissa, missä eritasoiset oppilaat käyttävät eri kirjoja. Joissakin maissa oppikirjat saattavat olla lähinnä opettajien käytössä, mutta erityisesti matematiikan opetuksessa oppikirjojen käyttö on yleistä. (Törnroos 2004, 32–33.) Suomalaiset didaktiikan edustajat ovat jo vuosikymmeniä halunneet eroon oppikirjaan pohjautuvasta opetusperinteestä, joten oppikirjakeskeisyys on alkanut saada negatiivisia arvolatauksia. (Heinonen 2005, 45). Teknologian yleistyminen ja oppimiskäsitysten muutokset ovat myös haastaneet oppikirjojen asemaa opetuksessa. Edelleen jatkuvaan oppikirjakeskeisyyteen voi nähdä syyksi muun muassa opetuksen kirjallisen perinteen, pitkään jatkuneen valtakunnallisesti standardoidun opetussuunnitelman kauden sekä tasa-arvotavoitteista johtuneen yhdenmukaistamispyrkimyksen. (Mikkilä-Erdmann ym. 1999, 437.)

Suomessa oppikirjojen tarkastusprosessista on luovuttu 1990-luvun alussa. Tätä ennen oppikirjojen käsikirjoitukset tuli hyväksyttää Opetushallituksella. (Heinonen 2005, 30.) Nykyisin kustantajat voivat täten markkinoida oppikirjoja suoraan opetuksen järjestäjälle, joka huolehtii opetussuunnitelman toteutumisesta. Opetuksen järjestäjän ei tulisi käyttää opetuksessa opetussuunnitelmasta poikkeavaa materiaalia, joten on kustantajien etujen mukaista tehdä oppikirjoista opetussuunnitelmia noudattavia. Suomessa luotetaan näin ollen opettajien arviointikykyyn opetusmateriaalien suhteen sekä kustantajien välisen kilpailun positiiviseen vaikutukseen materiaalien laadun kannalta. Tarkastusprosessin poistuminen on nopeuttanut oppikirjojen kehitystyötä, sillä kirjojen tarkastaminen kesti aiemmin puolesta vuodesta yhteen vuoteen (Heinonen 2005, 30). Tarkastusprosessin poistuminen on näin ollen antanut kustantajille paremmat mahdollisuudet tuottaa ajankohtaista tietoa sisältävää opetusmateriaalia.

Oppimiskäsitysten muutokset ja erityisesti konstruktivististen teorioiden nousu on vaikuttanut siihen, miten oppikirjojen rooli opetuksessa nähdään nykyisin. Konstruktivismin yksilölliset suuntaukset ovat luultavasti vaikuttaneet eniten oppikirjojen kirjoittamiseen ja käyttöön, mutta myös sosiaalisen konstruktivismin vaikutus on viimeisen kolmen vuosikymmenen aikana muokannut oppikirjojen sisältöjä. (Miettinen 2000, 276–289; Leino 2004, 20.) Konstruktivistisen oppimiskäsityksen mukaan oppimisen tavoitteena on käsitteellinen kehittyminen ja syvä ymmärtäminen (Fosnot 1996, 10). Näin ollen konstruktivismi on mielen strukturointiin keskittyneenä suuntauksena saanut vaikutteita erityisesti psykologisesta oppimisen tarkastelusta. Oppimista eli yksilöllistä tiedon konstruointia ohjaavat merkityksen muodostamisprosessit, jotka seuraavat aiemman tietorakenteen ja uusien kokemusten kohtaamisesta. Sosiaaliset suuntaukset korostavat tiedon konstruoinnin alkuperänä ihmisten välistä sosiaalista kohtaamista. Niiden mukaan muodostamme merkityksiä jakamisen, vertailun ja väittelyn keinoin muiden kanssa. Oppijat siis auttavat myös muita muodostamaan merkityksiä määritellessään uudelleen omia merkitysrakenteitaan. (Applefield, Huber, Moallem 2000, 35–53.)

Konstruktivismi ei tarjoa suoraa ohjenuoraa oppikirjojen rakentamiseen, koska se on ennen kaikkea oppimisen teoria. Yleisten konstruktivististen periaatteiden avulla voidaan kuitenkin perustella oppimateriaalissa tehtyjä valintoja ja opetusta voidaan tarkastella konstruktivistisesta perspektiivistä. (Fosnot 1996, 29.) Riippumatta siitä, mitä konstruktivistisen oppimiskäsityksen painopisteitä korostetaan, on havaittavissa kaikkia näkemyksiä yhdistäviä seikkoja, joiden avulla voidaan tarkastella oppikirjojen konstruktivistisia piirteitä. Yleisiin periaatteisiin kuuluu ainakin ajatus siitä, että oppijat konstruoivat oman oppimisensa ja oppiminen perustuu täten oppijan aiempaan ymmärrykseen. Toisin sanoen konstruktivismi perustaa näkemyksensä oppijan aktiiviseen rooliin. Toisaalta oppiminen pohjautuu vahvasti myös sosiaaliseen vuorovaikutukseen ja edellyttää aitoja oppimistilanteita merkityksellisen oppimisen toteutumiseksi. (Applefield ym. 2000, 35–53.) Oppikirjoissa on hyvin haasteellista toteuttaa konstruktivismin periaatetta, jonka mukaan opetuksessa tulee ottaa huomioon oppijan aiempi tietopohja, koska kirjantekijät joutuvat turvautumaan oletuksiin oppijoiden tietotasosta. Luokkahuoneessa toimivalla opettajalla on paremmat edellytykset rakentaa opetus konstruktivististen periaatteiden mukaisesti, koska vuorovaikutus oppijoiden kanssa antaa hänelle tietoa oppijoiden ennakkokäsityksistä ja aiemmista tiedoista.

Konstruktivistisen oppimiskäsityksen mukaisesti opettajalta odotetaan nykyisin kriittistä otetta oppikirjojen käyttöön. Oppikirjan konstruktivistista käyttöä kuvaa käsitteelliseen muutokseen tähtäävä lähestymistapa, joka ilmenee oppikirjojen ydinkäsitteiden tarkasteluna erilaisissa konteksteissa. Opettaja ottaa tällöin huomioon oppilaidensa lähtökohdat ja ottaa opetusstrategiakseen oppilaiden aikaisempien tietojen, käsitysten ja uskomusten asettamisen tieteellisiä selityksiä vasten. Toiminta näyttäytyy käytännössä analyysien, synteesien ja arviointien tekemisenä, joten oppimisprosessia voi perustellusti pitää ajatteluun keskittyneenä. (Heinonen 2005, 43–48.) Opettaja ei kuitenkaan ole yksin ohjaamassa oppimista, vaan on realistista todeta, että myös oppikirjat ohjaavat oppilaita oppimisprosessissa. Oppikirjat paitsi luonnehtivat matemaattisia sisältöjä, ne myös välittävät mielikuvia sisältöjen avaamista mahdollisuuksista käyttää matematiikkaa. (Schmidt 2012, 143). Erityisesti oppikirjoissa tehdyt rakenteelliset ratkaisut viestittävät oppilaalle miten oppimisen oletetaan tapahtuvan matematiikassa (Heinonen 2005, 29–30; Mikkilä-Erdmann ym. 1999, 437).

Oppikirjat ovat perinteisesti kohdanneet runsaasti kritiikkiä, mikä on myös ymmärrettävää ottaen huomioon niiden runsaan käyttöasteen kouluissa. Kritiikin tyypillisiä kohteita ovat erilaiset lähestymistavat, epäloogisuudet ja suoranaiset virheet. Ulkoisista seikoista kritiikin kohteeksi ovat nousseet huonosti sisältöön integroituvat kuvitukset ja kuvien liiallinen määrä. (Mikkilä-Erdmann ym. 1999, 438; Heinonen 2005, 31–34.) Kritiikin lisäksi oppikirjojen tärkeys opetuksessa on innoittanut monia tutkijoita analysoimaan niitä tarkemmin, joten luodaan seuraavaksi katsaus muutamaan mielenkiintoiseen oppikirjoja koskevaan tutkimukseen.

2.2 Aiempia oppikirjatutkimuksia

Oppikirjatutkimukset voidaan jaotella sisältöä koskeviin, pedagogisia näkökohtia tarkasteleviin ja luettavuutta arvioiviin tutkimuksiin. Nämä kolme keskeistä asiaa ovat yleensä myös oppikirjan laatijoiden huomion kohteena alun perinkin. (Häkkinen 2002, 81; Heinonen 2005, 53–56.) Siinä missä muita kouluaineita koskevat oppikirjatutkimukset ovat keskittyneet tekstisisältöihin, on matematiikassa ollut luonnollista tarkastella oppikirjoja niiden harjoitustehtävien kautta. Matematiikan kirjoissa selittävän tekstin vähäinen määrä ei anna mahdollisuutta vastaaviin tutkimuksiin kuin esimerkiksi maantiedossa, biologiassa, kemiassa tai fysiikassa. Yleisesti ottaen matematiikan oppikirjoja koskevissa tutkimuksissa on päädytty tulokseen, että harjoitustehtävät koostuvat pääasiassa mekaanisista peruslaskutoimituksista ja että oppikirjat ilmentävät yleensä niin sanottua jälki-behavioristista oppimiskäsitystä. (Törnroos 2004, 34–35.)

Opetus tukeutuu kansainvälisten tutkimusten mukaan hyvin vahvasti oppikirjoihin riippumatta siitä, missä maassa asiaa tarkastellaan (Erbas, Alacaci & Bulut 2012, 2324–2325). Suomi ei ole poikkeus tästä kansainvälisestä suuntauksesta, vaan myös muun muassa peruskouluopetuksessa oppikirjakeskeisyys on selkeästi läsnä (Heinonen 2005, 231–233). Oppikirjat oppimateriaalien tärkeimpänä muotona vaikuttavat merkittävästi siihen, miten opettajat näkevät opetussuunnitelman. Opettajat operationalisoivat ja ymmärtävät kansalliset opetussuunnitelmat oppikirjojen avulla useissa maissa. (Erbas ym. 2012, 2324–2325.) Oppikirjoihin tukeutuminen on yleistä ainakin peruskoulussa ja lukiossa (Shield & Dole 2013, 184). Pehkosen (2004, 518) mukaan opettajat kokevatkin olevansa ristiriitaisessa tilanteessa, sillä he eivät ole varmoja oppikirjoihin tukeutumisen ja oman ammattitaitonsa välisestä suhteesta. Opettajille ei siis ole selkeää kuinka paljon heidän tulisi kunnioittaa oppikirjantekijöiden auktoriteettia ja missä määrin tulisi luottaa itseensä opetuksen ammattilaisena. Pehkonen (mt. 518–519) toteaa mielenkiintoisesti opettajien raportoineen näitä ristiriitoja ainoastaan matematiikan opetuksessa – ei muissa kouluaineissa. Pehkosen (mt.) tutkimuksesta ei kuitenkaan selviä syitä tähän merkilliseen ilmiöön.

Kautto ja Peltoniemi (2006) ovat tutkineet yhteiskunnan kuvallistumisen vaikutuksia oppikirjojen kuvitukseen ja kuvien käyttöön. Heidän mukaan matematiikan oppikirjoissa kuvitus on lisääntynyt huomattavasti viimeisen kolmenkymmenen vuoden aikana. Tämä ei ole itsestään selvä kehityskulku, sillä Kauton ja Peltoniemen analyysien perusteella esimerkiksi biologian kirjoissa muutokset ovat olleet vastaavana ajanjaksona vähäisiä. Opettajat ovat olleet kuvien lisääntymiseen tyytyväisiä, mutta toivovat vastaisuudessa oppikirjoilta kuvituksen laatua määrän sijaan. Kuvituksen suhteuttaminen yhteiskunnan kuvallistumiseen on ongelmallista. Toisaalta kuvitus voi säilyttää omia erityispiirteitään tai toisaalta yrittää seurailla teknisen kehityksen uusia innovaatioita. Kautto ja Peltoniemi (mt., 141) eivät ota selkeästi kantaa toivottavaan kehityssuuntaan, mutta huomauttavat kuvien herättävän tehokkaasti tunteita ja sallivan näin ollen oppijan manipuloinnin.

Judin (2009) on tarkastellut lukion pitkän matematiikan oppikirjoja monipuolisesti pedagogisesta ja asiasisällöllisestä näkökulmasta. Analysoituja kirjoja oli viisi: Pitkä matematiikka 9, Laudatur 9, Lukion Calculus 5, Pyramidi 9 ja Matematiikan taito 9. Trigonometrisiin funktioihin ja lukujonoihin rajatussa tutkimuksessa tarkasteltiin kirjojen kansia, yleisilmettä, johdanto-osuuksia, rakennetta, teoriaosuuksia, harjoitustehtäviä, esimerkkejä ja lisämateriaaleja. Judin (2009, 84) havaitsi tutkimuksessaan eroja kirjojen välillä aina teoriaosuuksia ja rakenteita myöten, mutta päätyi silti toteamaan, että kirjasarjojen väliset erot ovat melko vähäisiä. Esimerkkien tarkastelussa Judin (2009, 80) ei saavuttanut merkittäviä kirjasarjoja erottavia tuloksia. Toisaalta esimerkkejä myös tarkasteltiin hyvin pinnallisella tasolla, joten merkittäviä tuloksia ei ollut syytä odottaakaan. Esimerkkien määrät vaihtelivat oppikirjoissa. Pyramidi 9 (111 kpl) ja Matematiikan taito 9 (109 kpl) eivät käytännössä eronneet esimerkkien määrässä toisistaan. Muissa kirjoissa esiintyi 55–65 esimerkkiä kirjaa kohden. Judinin (2009, 80) mielestä melkein kaikissa kirjoissa esitetään turhaan esimerkkien tulokset toistamalla ne lopuksi vastaus-sanan jälkeen. Ainoastaan Matematiikan taito -kirjassa tätä konventiota vältettiin.

3 MATEMATIIKAN OPPIMINEN JA ESIMERKKIEN ROOLI

Tässä kappaleessa tarkastellaan matematiikan oppimista teoreettisesta näkökulmasta. Teoreettisen tarkastelun avulla muodostetaan myöhemmin esimerkkien ja analogioiden luokittelusysteemi. Kognitiivisen kuormituksen teoria liittyy kiinteästi oppimiseen, jossa käytetään esimerkkejä hyödyksi. Tässä tutkimuksessa tämän teorian on tarkoitus toimia pohjana muihin kappaleisiin. Kognitiivisen kuormituksen teorian avulla siis perustellaan useita muita teoreettisia näkemyksiä. Lähdetään teoreettisessa tarkastelussa kuitenkin liikkeelle matemaattisen osaamisen ja ajattelun määrittelystä ja malleista, jotka yrittävät selittää mitä matemaattinen osaaminen kattaa.

3.1 Matemaattinen osaaminen ja ajattelu

Matemaattinen kehittyminen nähdään kouluissa perinteisesti sisältöjen omaksumisena. Opettajan rooli oppilaan ja matematiikan välikappaleena nousee tällöin vahvasti esille. Matematiikan "tekeminen" näyttäytyy yleensä opettajan asettamien sääntöjen noudattamisena, "tietäminen" puolestaan mielletään näiden sääntöjen muistamiseksi ja soveltamiseksi opettajan asettamissa kysymyksissä ja matemaattinen "totuus" vahvistetaan opettajalta. (Breen & O'Shea 2010, 40–41.) Tästä taustasta käsin voidaan perustella, että todelliseen matemaattiseen osaamiseen liittyy tärkeänä osana laaja kirjo ajattelutaitoja, jotka tulisi asettaa opetustavoitteiden keskiöön. Riippumatta siitä, miten matemaattinen ajattelu tarkalleen ottaen määritellään, on oletettavaa, että koulutuksen tulisi kannustaa siihen. Ylimalkaisesti sanottuna oppimisessa tulisi kannustaa käytäntöihin ja ajatteluun, jotka muistuttavat matemaatikkojen työskentelyä. (Mt., 40–41.) Tarkempi määrittely matemaattisen ajattelun ja osaamisen käsitteistä on paikallaan.

Matemaattisen ajattelun määritelmiä voidaan tehdä eri näkökulmista (Joutsenlahti 2004, 363–367). Erään, lähinnä matematiikan lähestymistapaa muistuttavan, näkemyksen mukaan matemaattinen ajattelu koostuu mielen sisäisistä prosesseista, kuten päättelystä, yleistämisestä, vertailemisesta, otaksumisesta, selittämisestä ja perustelemisesta. Näiden ajattelutoimintojen harjoittaminen on mahdollista kaikilla matematiikan oppimisen tasoilla.

(Breen & O'Shea 2010, 40–41.) Päätteleminen voidaan esimerkiksi määritellä ajatteluksi, joka tähtää väittämien ja johtopäätösten tekemiseen (Boesen, Lithner & Palm 2010, 92). Määritelmät matemaattisen ajattelun prosesseista ovat siis hyvin laajoja ja yleisiä.

Matemaattiseen ajatteluun liittyy olennaisesti järjestäytynyt tietorakenne ja mielen sisäiset skeemat. Skeemat mahdollistavat matemaattisen informaation kategorisoinnin, esittämisen ja ongelmanratkaisun sanallisissa tehtävissä (Carroll 1994, 360). Skeemat siis liittyvät havaintojen tulkitsemiseen ja uusien tilanteiden kohtaamiseen, joten ne auttavat oppijaa järjestämään ympäröivää todellisuutta.

3.1.1 Matemaattinen osaaminen: Kilpatrickin, Swaffordin ja Findellin malli

Matemaattinen osaaminen (mathematical proficiency) on käsite, joka tarkastelee matematiikan hallitsemista niin kognitiivisina kykyinä kuin affektiivisina ulottuvuuksinakin. Kilpatrick, Swafford ja Findell (2001, 115–156) ovat määritelleet matemaattisen osaamisen viiden piirteen avulla. Määritelmä on esiintynyt 2000-luvun matematiikan oppimisen tutkimuksessa laajasti. Osaltaan tätä voi selittää se, että määritelmässä yhdistyy kognitiotutkijoiden, matematiikan parissa työskentelevien kasvattajien ja muiden oppimistutkijoiden näkemys matemaattisesta osaamisesta.

Matemaattisen osaamisen viisi piirrettä ovat: käsitteellinen ymmärtäminen, proseduraalinen sujuvuus, strateginen kompetenssi, mukautuva päättely ja yritteliäisyys. Piirteiden suomenkieliset nimet on esittänyt Joutsenlahti (2005, 96). Kilpatrick ym. (2001) painottavat piirteiden olevan toisiinsa kiinteässä yhteydessä. Tämä ominaisuus tarkoittaa samalla sitä, että matematiikan oppiminen koostuu näiden piirteiden yhtäaikaisesta kehittämisestä. Matemaattinen osaaminen ei voi rakentua vain joidenkin piirteiden varaan eikä sitä voida kehittää vain joihinkin piirteisiin keskittyen. (Mt., 115–156.)

Matemaattisen osaamisen piirteiden kiinteä vuorovaikutus korostaa organisoidun tietorakenteen tärkeyttä. Strukturoituneisuus edesauttaa tiedon palauttamista mieleen ja sen soveltamista uusissa tilanteissa. (Mt., 118.) Tämä ymmärtämiseen liittyvä tietorakenteen ominaisuus koskettaa kaikkia matemaattisen osaamisen kognitiivisia piirteitä, joten piirteet eivät edusta pelkästään tietoa: niissä on kyse myös taidoista ja ajatusprosesseista.

Käsitteellinen ymmärtäminen tarkoittaa matemaattisten käsitteiden, operaatioiden ja relaatioiden ymmärtämistä (mt., 116). Erityisesti tässä piirteessä korostuu tiedon struktuuri, johon jo viitattiin. Pelkkien eristettyjen faktojen tietäminen ei vielä tarkoita käsitteellistä ymmärrystä, vaan olennaista on, että tieto muodostaa mielessä rakenteen, jossa käsitteet, operaatiot ja relaatiot ovat yhteydessä toisiinsa. Käsitteellisen ymmärryksen taso liittyy tähän tietorakenteen yhteyksien olemassaoloon ja niiden määrään. Konstruktivistisen oppimiskäsityksen mukaan aiempi tieto luo perustan uuden oppimiselle. Kilpatrickin ym. (2001, 118) mukaan aiemmin luotu tietorakenne yhteyksineen on käsitteellisen ymmärryksen kannalta olennaista ja nimenomaan se mahdollistaa uuden oppimisen. Käsitteellisen ymmärryksen yksi mukanaan tuoma etu, huonosti organisoituun tietorakenteeseen verrattuna, on mieleen painettavan informaation vähäisempi määrä. Näin ollen myös tiedon palauttaminen onnistuu helpommin kuin siinä tapauksessa, että tieto koostuisi erillisistä faktoista. (Mt., 118–120.)

Käsitteelliseen ymmärtämiseen liittyy vahvasti proseduraalisen sujuvuuden piirre, sillä nämä piirteet vaikuttavat toisiinsa vahvistavasti. Proseduraalinen sujuvuus on taitoa käyttää proseduureja joustavasti, huolellisesti, tehokkaasti ja tarkoituksenmukaisesti. Piirre sisältää siis tiedon itse proseduureista, mutta myös siitä, milloin ja miten niitä käytetään. Proseduraalinen sujuvuus käsittää myös tulosten arvioinnin. Nykyään olennaista proseduuritietoa on lisäksi laskuvälineen valinta: joskus riittää arvioida laskua mielessään, toisinaan taas laskimen tai tietokoneen käyttäminen tulee kyseeseen. Oppimisen kannalta proseduureihin keskittyminen voi haitata oppimistuloksia, jos tätä ennen ei ole pyritty ymmärryksen syntymiseen. (Mt., 121–124.)

Strateginen kompetenssi tarkoittaa kykyä formuloida, esittää ja ratkaista matemaattisia ongelmia. Tämä piirre on siis hyvin samantapainen kuin se mitä matematiikassa pidetään yleisesti ongelmien ratkaisemisen ja muotoilun alueena. Menestyksekäs ongelman ratkaisu edellyttää yleensä sen taustalla vaikuttavien elementtien konstruoimista mielessä. Vastakohtaisesti ongelman ulkoisiin seikkoihin keskittyminen johtaa yleensä harhaan. Strateginen kompetenssi käsittää niin rutiininomaisten ongelmien ratkaisustrategioiden tietämisen kuin kyvyn kohdata uusia rutinoitumattomia ongelmia. Lähestymistavan valinta esimerkiksi päättelyn, arvauksen, algebran tai muun välillä kuuluu strategiseen kompetenssiin, joten tässä piirteessä on yhteneväisyyttä proseduraaliseen sujuvuuteen. (Mt., 124–129.)

Kilpatrick ym. (mt., 129–131) määrittelevät mukautuvan päättelyn kykynä loogiseen ajatteluun, reflektointiin, selittämiseen ja perustelemiseen. Tämä piirre on siis laajempi kokonaisuus kuin vain todistaminen ja muu deduktiivinen päättely. Mukautuva päättely on myös intuitiivista ja induktiivista järkeilyä, joka perustuu säännönmukaisuuksiin, analogioihin ja metaforiin. Mukautuva päättely liittyy vahvasti käsitteelliseen ymmärrykseen, sillä oppijan tulee pystyä perustelemaan ja selittämään ideansa tehdäkseen järkeilynsä selväksi ja kasvattaakseen omaa käsitteellistä ymmärrystään. Se on siten pystyvyyttä ajatella loogisesti käsitteiden ja tilanteiden yhteyksistä sekä ratkaisustrategioiden ja proseduurien käytön perustelua.

Matemaattisen osaamisen malliin kuuluu edellisten kognitiivisten piirteiden lisäksi tunteisiin liittyviä puolia, joka määritellään yritteliäisyyden käsitteen avulla. Yritteliäisyydellä viitataan taipumukseen nähdä matematiikka järkevänä, hyödyllisenä ja arvokkaana. Lisäksi yritteliäisyyteen kuuluu usko ahkeruuden merkitykseen ja oman työskentelyn tehokkuuteen. (Mt., 116). Yritteliäisyyden piirteessä on siis paljon yhtymäkohtia motivaatioon, kiinnostukseen, asenteisiin ja arvostukseen matematiikkaa kohtaan. Tämä piirre vuorovaikuttaa tiiviisti kaikkien muiden piirteiden kehitykseen, mutta vaikutus toimii myös toiseen suuntaan. Käsitteellinen ymmärrys, proseduraalinen sujuvuus, strateginen kompetenssi ja mukautuva päättely vaikuttavat kaikki yritteliäisyyden piirteen kattaviin affektiivisiin ominaisuuksiin. Yritteliäisyyden kehittyminen vaatii siis toistuvia mahdollisuuksia ymmärtää matematiikkaa, nähdä määrätietoisuuden ja periksiantamattomuuden hyödyt sekä kokea ymmärtämisen tuottama palkitsevuus. (Mt., 131–133.)

3.1.2 Wilsonin taksonomia

James W. Wilson esitteli vuonna 1971 kasvatuksellisten tavoitteiden luokittelujärjestelmän, johon viitataan yleisesti Wilsonin taksonomiana. Wilsonin kognitiivisten alueiden tasojen luokittelu pohjautuu Bloomin taksonomiaan, sillä Wilsonin taksonomia on Bloomin taksonomian laajennus matematiikkaan paremmin sopivaksi. Molemmat taksonomiat esiintyvät iästään huolimatta yhä edelleen tutkimusten viitekehyksinä (ks. esim. Kastberg 2003; ks.

myös Bhuyan & Khan 2014). Toisaalta Bloomin luokittelujärjestelmää on tarkistettu nykyiseen oppimiskäsitykseen paremmin istuvaksi 2000-luvun alussa (Anderson & Krathwohl 2001; Krathwohl 2002) ja sitä on käytetty edelleen tutkimusten viitekehyksinä (ks. esim. Fiegel 2013).

Wilsonin taksonomia keskittyy erityisesti kategorisoimaan matemaattisia kykyjä ja heijastelee oman aikansa oppimiskäsitystä – behaviorismia. Behaviorismi on oppimisteoria, joka selittää oppimisen käyttäytymisenä ja vasteina fyysisiin ärsykkeisiin. Olennaisia behavioristiseen oppimiskäsitykseen liittyviä tarkastelun kohteita ovat vahvistaminen, harjoitteleminen ja ulkoinen motivaatio. Oppimisen tavoitteena on yleensä jokin taito. Behavioristinen oppimiskäsitys ilmenee opetuksessa uskona tarkkailun, opettajan antamien selkeiden esitysten tai aktiviteetteja seuraavien arviointien toimivuuteen. Oppimisprosessia määrittää tällöin ajatus, jonka mukaan yksittäisten taitojen oppiminen johtaa lopulta laajempaan osaamiseen. Behavioristisesti suuntautuneen oppimisen arvioinnissa kiinnitetään huomiota tuloksiin, jotka voidaan havaita. Siten behaviorismi selittää hyvin käyttäytymisen muuttumista, mutta se ei pysty vakuuttavasti selittämään käsitteiden muokkaamista tai uusien ongelmien ratkaisuprosesseja. (Fosnot 1996, 8–9; Leino 2004, 21.)

Toisin kuin Kilpatrickin ym. mallissa, eri taitotasot ja niiden yksittäiset kyvyt nähdään toisistaan erillisinä. Wilsonin taksonomia myös erottelee kategoriat kognitiivisen kompleksisuuden perusteella. On lisäksi huomionarvoista, että kompleksisuus jossakin matemaattisessa tehtävässä merkitsee muutakin kuin yksinkertaisesti tehtävän vaikeutta.

Wilsonin taksonomian kognitiivinen jaottelu perustuu neljään taitotasoon:

1. **Laskeminen** (computation) – tehtävien painotus on operaatioiden tietämisessä ja suorittamisessa ei niinkään soveltuvien operaatioiden valinnassa.
2. **Ymmärtäminen** (comprehension) – tehtävät vaativat periaatteiden ja niiden välisten suhteiden ymmärtämistä, mutta ei niiden käyttämistä ratkaisun tuottamiseksi. Myös ongelman elementtien muokkaaminen muodosta toiseen kuuluu ymmärtämisen taitotasolle.
3. **Soveltaminen** (application) – tehtävät vaativat relevantin tiedon muistamista, soveltuvien operaatioiden valintaa ja operaatioiden suorittamista. Ne vaativat myös käsitteiden käyttöä tietyissä konteksteissa tavalla, jota on oletettavasti harjoiteltu.

4. **Analyysi** – vaatii ei-rutinoitunutta käsitteiden soveltamista. Analyysitason tehtävät vaativat siis käsitteiden ja operaatioiden käyttöä sekä organisointia vieraassa kontekstissa. Ne saattavat myös vaatia asioiden välisten suhteiden tunnistamista ja mallien löytämistä. (Wilson 1971, 649)

Jokainen näistä neljästä taitotasosta on jaettu vielä 3–6 alakategoriaan, jotka erittelevät taitotasolla olevia kykyjä ja valmiuksia. Wilsonin taksonomia huomioi myös affektiiviset ominaisuudet omina taitotasoinaan, jotka ovat kiinnostuksen ja asenteen sekä arvostuksen taitotasot. Affektiivisten saavutusten mittaaminen, niiden kompleksisesta luonteesta johtuen, on usein hankalampaa kuin kognitiivisten. (Mt., 662–663.) Affektiivisten ominaisuuksien merkitystä ei ole kuitenkaan syytä vähätellä matemaattisen osaamisen kannalta, mistä osoituksena voidaan pitää opiskelijavalinnan perinteitä. Perinteinen kynä-paperikoe ei huomioi affektiivisia ominaisuuksia, joten niiden lisäksi valintakokeissa saatetaan järjestää esimerkiksi haastatteluja, joilla voidaan kartoittaa hakijoiden asenteita, kiinnostuksia, motivaatiota, ahdistuneisuutta, itsetuntoa tai muita ominaisuuksia, jotka kuuluvat Wilsonin taksonomian affektiiviseen taitotasoon.

Wilsonin taksonomian ensimmäisen taitotason (laskeminen) alakategorioita ovat faktatieto, terminologia ja taito suorittaa algoritmeja. Faktatiedolla tarkoitetaan materiaalin tuottamista lähes samassa muodossa kuin se on esitetty. Terminologia viittaa puolestaan yksinkertaisiin käsitteisiin. Viimeinen laskemistason alakategoria, taito suorittaa algoritmeja, tarkoittaa lausekkeiden tai yleisemmin elementtien manipulointia joidenkin opittujen sääntöjen mukaan. Algoritmin valinta kuuluu kognitiivisesti kompleksisemmalle tasolle. (Mt., 660, 665–669.)

Ymmärtämisen taitotasolla on kuusi alakategoriaa, jotka liittyvät pääasiassa periaatteiden ja niiden välisten suhteiden ymmärtämiseen. Käsitetieto on jossakin mielessä faktatietoa kompleksisempaa, sillä siihen liittyy päätöksentekoon sisältyvää käsitteen käyttämistä tai jonkin asian tunnistamista tiettyyn käsitteeseen kuuluvaksi. Tieto periaatteista, säännöistä ja yleistyksistä liittyy oppijan aiemmin kohtaamiin käsitteisiin ja ongelmien elementteihin. Tieto matemaattisesta struktuurista koskee lähinnä numerosysteemien ominaisuuksia ja algebrallisia struktuureja. Taito muokata ongelman elementit moodista toiseen tarkoittaa muokkaamista verbaalisen, kuvallisen tai symbolisen esityksen välillä. Taito seurata päättelyketjua on toisin sanoen taito lukea ja tulkita matemaattisia argumentteja, kun taas viimeinen alakategoria tällä taitotasolla, taito lukea ja tulkita matemaattisia ongelmia, viittaa ongelmanratkaisun ensimmäisiin vaiheisiin. Viimeisin alakategoria on taito, joka on selvästi erillinen normaalista verbaalisesta ja yleisestä lukutaidosta. (Mt., 660–661, 669–676.)

Soveltamistason tehtävät edellyttävät usein monivaiheista työskentelyä, mikä erottaa ne laskemisen ja ymmärtämisen tasoista. Toisaalta soveltamistason tehtävät sisältävät ennestään tuttuja elementtejä, jotka liittyvät läheisesti aiemmin opittuihin asioihin. Ensimmäinen alakategoria tällä tasolla on taito ratkaista rutiiniongelmia. Se saattaa edellyttää algoritmin valintaa ja käyttämistä ongelman ratkaisemiseksi. Sanallisissa tehtävissä tätä edeltää ongelman muotoilu symbolisessa muodossa. Voi olla myös, että ongelman ratkaisemiseen liittyy periaatteen tai säännön valinta, periaatteen käyttöä algoritmin valinnassa tai useiden laskujen suorittamista. Jos opiskelija ei tunnista ongelmaa samanlaiseksi kuin aiemmin opituissa tilanteissa, on kyseessä kognitiivisesti vaativampi ongelma. Taito tehdä vertailuja vaatii relevantin tiedon mieleen palauttamista, yhteyksien löytämistä ja päätösten muotoilua. Vertailujen tekeminen on luonteeltaan rutiininomaista, joten tämä alakategoria kuuluu analyysin sijaan soveltamisen tasolle. Kolmas alakategoria on taito analysoida tietoa. Se tarkoittaa informaation lukemista ja tulkitsemista sekä päätösten tekemistä niiden perusteella. Tiedon analysointitaitoihin kuuluu myös taito jakaa ongelma osaongelmiksi, erottaa olennainen epäolennaisesta ja muodostaa yhteyksiä jo ratkaistujen osaongelmien kanssa. Viimeinen soveltamistason alakategoria, taito tunnistaa säännönmukaisuuksia, isomorfismeja ja symmetrioita, tarkoittaa relevantin tiedon mieleen palauttamista, ongelman elementtien muokkaamista, näiden elementtien muokkaamista tietyssä järjestyksessä tai yhteyksien tunnistamista. (Mt., 661–662, 676–680.)

Kognitiivisesti kompleksisin taso on analyysi, joka tarkoittaa usein siirtymistä ennestään tuntemattomaan kontekstiin. Sen vuoksi tämän tason tehtävissä korostuu heuristinen lähestymistapa ja luovuus. Ensimmäinen alakategoria on taito ratkaista rutinoitumattomia ongelmia, mikä edellyttää aiemmin opitun siirtämistä uuteen yhteyteen. Rutinoitumattomat ongelmat ovat siis sellaisia, joita ei ole aiemmin kohdattu ja joiden ratkaisemiseksi ei ole käytettävissä algoritmia. Niiden ratkaiseminen saattaa vaatia ongelman osasten uudelleenjärjestelyä ja niiden yksityiskohtaista tutkimista. Analyysitasolle kuuluu myös taito löytää asioiden välisiä suhteita, mikä eroaa sovellustason taidosta, "taito tunnistaa säännönmukaisuuksia, isomorfismeja ja symmetrioita", siinä, että tuttujen suhteiden tunnistamisen sijaan tulee muodostaa uusia yhteyksiä. Asioiden välisten suhteiden löytäminen vaatii ongelman elementtien uudelleen järjestämistä. Analyysitasolle kuuluu luonnollisesti todistamisen taito. Tämä taito saattaa kuulua myös alemmalle tasolle, jos todistuksessa on jotakin ennestään tuttua. Todistamisen lisäksi Wilsonin taksonomia erittelee tälle analyysitasolle taidon kritisoida todistuksia, joka voidaan myös ilmaista yleisemmin taitona kritisoida mitä tahansa matemaattisia argumentteja. Todistamisen taidosta erillisenä alakategoriana on taito muodostaa ja perustella yleistyksiä. Se tarkoittaa yhteyksien löytämistä ja niiden vahvistamista muotoilemalla todistuksia. (Mt., 662, 680–685.)

3.2 Kognitiivinen kuormitus ja esimerkeistä oppiminen

Ongelmakeskeinen oppiminen on yleensä orientaatiovaiheessa kognitiivisesti kuormittavaa ja kiinnittää oppijan huomion oppimisen kannalta epäolennaisiin seikkoihin (Van Loon-Hillen ym. 2012, 89–99). Ongelmien muotoilu saattaa esimerkiksi haitata keskittymistä oppimisen kannalta hyödyllisiin ajatustoimintoihin. Kuormituksen vähentäminen on tällöin oppimisen kannalta tärkeää. Oppimisprosessin yksinkertaistaminen ei kuitenkaan takaa oppimistulosten paranemista. On nimittäin merkityksellistä, millaista kognitiivista kuormitusta vähennetään ja millaiselle kuormitukselle annetaan näin tilaa. Esimerkkien funktiota opetuksessa perustellaan usein tästä perspektiivistä: ne auttavat oppijaa keskittämään työmuistiaan oppimisen kannalta haluttaviin kognitiivisiin operaatioihin. (Mt., 89–99.) Työmuistilla käsitetään tässä yhteydessä lyhytaikaisessa muistissa tallessa olevaa informaatiota aktiivisesti käsitteleviä aivotoimintoja (Pickering & Phye 2006, xvii; Baddeley 2006, 25).

Esimerkkejä koskevassa tutkimuksessa esiintyy usein kognitiivisen kuormituksen teoria (cognitive load theory), joka jaottelee oppimiseen liittyviä ajatteluprosesseja ja on kiinnostunut pääasiassa monimutkaisten ajatteluprosessien oppimisesta (Paas, Renkl & Sweller 2004, 1–2). Kognitiivisen kuormituksen teoria erottaa toisistaan luonnollisen, ylimääräisen ja olennaisen kuormituksen. Luonnollinen kuormitus riippuu tehtävän monimutkaisuudesta, siitä kuinka monta toisiinsa vaikuttavaa elementtiä se sisältää (mt., 1–2). Luonnollinen kognitiivinen kuormitus ei ole ainoastaan tehtävästä riippuvainen, vaan myös oppijan edeltävillä tiedoilla on merkitystä (Gerjets, Scheiter & Catrambone 2004, 33–58).

Edistynyt oppija voi palauttaa pitkäaikaisesta muistista kognitiivisia skeemoja, jotka helpottavat informaation käsittelyä yksittäisinä elementteinä. Näin rajallisen työmuistin käyttö on tehokkaampaa ja luonnollinen kognitiivinen kuormitus pienempää kuin oppijalla, joka ei ole vielä omaksunut informaation käsittelyä helpottavia skeemoja. (Van Loon-Hillen ym. 2012, 90.) Ylimääräinen kognitiivinen kuormitus liittyy tapaan, jolla informaatio esitetään oppijalle eli tehtävän muotoiluun. Kuormitus on siinä mielessä ylimääräistä, että se ei liity skeemojen rakentamiseen tai ajattelun automatisoitumiseen. (Paas ym. 2004, 1–2.) Tarpeeton visuaalinen tai mentaalinen etsimisprosessi ovat esimerkkejä ylimääräisestä kognitiivisesta kuormituksesta (Van Loon-Hillen ym. 2012, 90).

Olennainen kuormitus on kolmesta kognitiivisen kuormituksen tyypistä nimensä mukaisesti tavoiteltavinta vaikuttavan ja tehokkaan oppimisen kannalta. Se liittyy siis informaation esittämistapaan, joka vaikuttaa mielen sisäisten skeemojen ja automatisoitumisen kehitykseen – oppimiseen. (Van Loon-Hillen ym. 2012, 90; Paas ym. 2004, 1–2). Esimerkeistä opittaessa olennainen kognitiivinen kuormitus saattaa olla vahvasti edustettuna aktiviteeteissa, kuten esimerkkien vertailussa tai esimerkkien elävöittämisessä (Gerjets ym. 2004, 33–58).

Esimerkkien käyttäminen oppimisprosessissa edellyttää oppijalta vähemmän kognitiivista kapasiteettia kuin ongelmakeskeinen oppiminen. Näin ollen ajatteluprosesseissa on enemmän tilaa olennaiselle ja luontaiselle kuormitukselle. (Shen & Tsai 2009, 238–244.) Kognitiivista kuormitusta ja oppimista koskevista tutkimuksista voi saada sen kuvan, että kokonaiskuormituksen pienentäminen olisi oppimisen kannalta hyödyllistä. Näin ei kuitenkaan ole, vaan olennaista on suunnata käytettävissä oleva kuormitus oppimisen kannalta hyödyllisiin ajatteluprosesseihin. (Paas ym. 2004, 3.) Kognitiivisen kuormituksen teorian soveltaminen opetuksen järjestelyssä ei ole aivan yksinkertaista, sillä tehtävien ja esimerkkien muotoilun lisäksi on otettava huomioon oppijan ajattelun kehittyneisyys. Tyypillisesti koululuokassa oppilaat muodostavat ajattelun kehittyneisyyden kannalta heterogeenisen joukon, joten opetuksen perustaminen kognitiivisen kuormituksen teoriaan edellyttää todennäköisesti eriyttämistä.

3.3 Esimerkit matematiikan oppimisprosessissa

Oppikirjojen esimerkkejä yhdistää jonkin säännön tai periaatteen demonstroiminen. Ne auttavat siten keskittymään oppimisen kannalta olennaisiin ajatusprosesseihin. Yleinen ongelmanratkaisukyky ei ole matemaattisen taitavuuden kannalta yhtä olennaista ja rakentavaa kuin hyvin organisoidun tietorakenteen ja skeemojen kehittäminen, johon esimerkkien käyttäminen opetuksessa tähtää. (Carroll 1994, 360–367.) Tutkimukset osoittavat oppilaiden ymmärtävän oppimateriaalissa esitetyt asiat helpommin esimerkkien kuin ongelmanratkaisun avulla. Esimerkkien hyödyt tulevat esille niin yksilö- kuin ryhmätyöskentelyssäkin. (Retnowati 2010, 349–367.)

3.3.1 Oppimisprosessin vaiheet ja eritasoiset oppijat

Oppijat käyttävät esimerkkejä eri tavalla tieto- ja ajattelutasostaan riippuen. Aiempien tutkimusten mukaan esimerkit ovat hyödyllisiä varsinkin oppijoille, joilla ei ole aiheeseen liittyviä skeemoja tai jäsentyneitä tietorakenteita. Tätä perustellaan yleensä kognitiivisen kuormituksen teorialla, joka selittää ajatusprosessien keskittymistä oppimisen kannalta hyödyllisiin toimintoihin esimerkkejä käytettäessä. Ajattelutaitojen kehittyessä esimerkit menettävät merkitystään, sillä kognitiivisesti luonnollisen kuorman pieneneminen saattaa johtaa esimerkkien hyödyttömyyteen tai jopa haitallisuuteen oppimisen kannalta. (Van Loon-Hillen ym. 2012, 89–99.)

Tällaista esimerkkien roolia opetuksessa puoltaa nelivaiheinen oppimisen malli, jossa esimerkit ovat tärkeässä osassa nimenomaan taitojen oppimisen alkuvaiheissa. Esimerkkien käyttö perustuu analogioiden tekemiseen ja ongelmien ratkaisemiseen analogioiden avulla tämän mallin ensimmäisessä vaiheessa. Toisessa vaiheessa oppijat kehittävät itselleen abstrakteja selittäviä sääntöjä ja verbaalista tietoa, jotka ohjaavat ongelmanratkaisuprosessia. Harjoittelun avulla oppija pääsee eroon verbaalisista säännöistä, jolloin ongelmien ratkaiseminen nopeutuu ja automatisoituu. Harjoittelun kautta edetään siis kolmannelle tasolle. Neljännellä tasolla puolestaan monia eri ongelmia harjoitelleet oppijat pystyvät antamaan opitusta asiasta monia esimerkkejä ja ratkaisustrategian mieleen palauttaminen on nopeaa. (Atkinson, Derry, Renkl & Wortham 2000, 185.)

On myös esitetty, että esimerkit eivät hyödyttäisi heikosti menestyviä opiskelijoita (Carroll 1994, 360–367). Tämä voisi olla selitettävissä esimerkkien roolilla heikkojen opiskelijoiden opiskelussa. Siinä missä hyvin menestyvät opiskelijat käyttävät esimerkkejä yleensä periaatteiden ja sääntöjen ymmärtämiseen, heikosti menestyvät käyttävät esimerkkejä keinona ratkaista tehtäviä analogioiden avulla (mt., 360–367). Voisi olettaa, että tämä tarkoittaisi työskentelyn olevan lyhytjänteistä mallioppimista, joka keskittyy tehtävien ratkaisemiseen – ei oppimiseen. Näin ollen oppimistulosten voisi olettaa jäävän vaatimattomiksi. Carroll (1994, 360–367) esittää omien havaintojensa perusteella, että heikosti menestyvät oppilaat kuitenkin hyötyisivät esimerkeistä. Hän perustelee tätä esimerkkien vaikutuksilla oppimismotivaatioon.

Analogioiden avulla oppiminen saattaa olla merkityksellisempää ja tehokkaampaa etenkin heikoille oppijoille. Esimerkit kannustavat oppijaa pysymään pitempään tehtävän ääressä, sillä ne tarjoavat mahdollisuuden edetä lähikehityksen vyöhykkeellä (omien kykyjen äärirajoilla). Carroll (1994, 360–367) havaitsi, että esimerkkejä hyödyntävät opiskelijat tekivät vähemmän virheitä kotona ja koulussa ja saivat esimerkeistä havainnollistuksia yhtälöiden oikeaan muotoon, symbolien käyttöön sekä sanojen merkityksiin. Opiskelijat myös käyttivät esimerkkejä itsereflektointiin: virheiden korjaamiseen ja ymmärryksen tason testaukseen. Carrollin tutkimus ei kuitenkaan onnistunut vastaamaan perusteellisempaan kysymykseen: mikä tiedon omaksumisen syvyys on esimerkkejä hyödyntävässä opetuksessa? Kysymys on erityisen olennainen heikkojen opiskelijoiden osalta. Esimerkkien tehokkuus ja oppimisen syvyys riippuu ainakin hyvin paljon esimerkkien esittämisen tavoista ja tähän liittyvää tutkimusta on tehty melko kattavasti.

3.3.2 Esimerkkien molaarinen ja modulaarinen prosessi

Tutkimuksessa voidaan lähteä kuvailemaan niitä ominaisuuksia, jotka tekevät esimerkeistä tehokkaita oppimisen kannalta. Toisaalta voidaan myös muodostaa jaotteluita, jotka korostavat esimerkkien ominaisuuksia. Yksi esimerkkien jako perustuu kognitiivisen kuormittavuuden teoriaan. Gerjets, Scheiter ja Catrambone (2004, 33–58) esittävät molaarisen ja modulaarisen esimerkin käsitteet, jotka erottelevat ratkaisuprosessien esitykset toisistaan luonnollisen kognitiivisen kuormituksen perusteella. Oppikirjoissa esimerkit esitetään heidän mukaan yleensä molaarisella tavalla, jossa ratkaisut ovat ikään kuin reseptejä tietyn ongelmakategorian ratkaisemiseen. Esimerkkien esittämien ratkaisuprosessien molaariselle lähestymistavalle on tyypillistä, että ne kategorisoivat ongelmia useiden strukturaalisten ominaisuuksien perusteella. Näin ollen molaariset esimerkit opettavat omaksumaan tämän kategoriajaottelun, mikä voi kannustaa opiskelijaa muistamaan stereotyyppisiä kategorioita ja niihin liittyviä ratkaisuprosesseja ulkoa. (Mt., 33–58.) Kaavoihin ja erilaisiin tilanteisiin, joissa kaavoja voi soveltaa, keskittyminen on molaariselle lähestymistavalle tyypillistä.

Skeemat määritellään ja ymmärretään mielen sisäisiksi rakennelmiksi, jotka auttavat asetelmien ja tilanteiden tunnistamisessa aiemmin opittuun kategoriaan kuuluvaksi. Skeemat myös ohjaavat oikeiden ratkaisuprosessien valinnassa. Molaarisen lähestymistavan yleisyys esimerkeissä on tätä määrittelyä vasten ymmärrettävää. (Mt., 33–58.) Esimerkkien roolista pyritään luultavasti tekemään liian suoraviivaisia oppimisen suhteen, jolloin luontainen kognitiivinen kuormitus kasvaa tarpeettomasti. Molaarinen lähestymistapa esimerkeissä jäljittelee edistyneiden ongelmanratkaisijoiden ajattelua, eikä tämä ole välttämättä optimaalisin tapa oppia uusia asioita. Opiskelijoille saattaa tulla tällöin illuusio siitä, että he ovat ymmärtäneet oppimisen kohteen esimerkkien perusteella, mutta esimerkkien yleistäminen uudenlaisiin tilanteisiin on hankalaa (mt., 33–58).

Luontaisen kognitiivisen kuormituksen vähentäminen, toisin kuin siihen liittyvä teoria antaa ymmärtää, on mahdollista erilaisen lähestymistavan avulla (Gane 2006, 46). Gerjets, Scheiter ja Catrambone (2004, 41–42) esittelevät kolme tapaa, joilla oppimateriaalien aiheuttamaa luontaista kognitiivista kuormittavuutta voidaan pienentää. Ensinnäkin on mahdollista pilkkoa ongelman ratkaisussa esiintyvät toiminnot pienempiin oppimistavoitteisiin. Vasta kun oppija on kehittänyt yksittäisten välivaiheiden osaamista, voidaan siirtyä ongelmaan kokonaisuudessaan. Monimutkainen ongelma ei tällöin muodosta liian suurta kognitiivista kuormaa. Toisaalta monimutkaista ongelmaa voidaan itsessään yksinkertaistaa etenkin oppimisen alkuvaiheessa ja näin vaikuttaa luontaisen kuormituksen määrään. Oppimisen myötä tehtäviä ja ongelmia voidaan monimutkaistaa, koska rakentuneiden skeemojen ja tietorakenteiden avulla on mahdollista käsitellä monimutkaisempia ongelmia. Kolmas lähestymistapa on modulaaristen ratkaisuprosessien esittäminen. Niiden on tarkoitus alusta pitäen keskittyä monimutkaisiin ongelmiin, mutta siitä huolimatta vähentää luonnollista kognitiivista kuormitusta. Tämä tavoite saavutetaan kun vältetään kokonaan viittaamasta molaarisiin käsitteisiin kuten ongelmakategorioihin, tehtävien strukturaalisiin ominaisuuksiin tai kategorioihin liittyviin ratkaisuprosesseihin. (Mt., 41–42.)

Modulaarisissa esityksissä keskitytään kerrallaan pieniin ratkaisun elementteihin ja niiden suhteeseen yksittäisiin tehtävien strukturaalisiin ominaisuuksiin. Modulaarinen lähestymistapa saattaa kuulostaa hyvin samanlaiselta kuin ongelman pilkkominen pienempiin osiin, mutta eroaa tästä merkittävästi. Ero on siinä, että modulaarisessa lähestymistavassa keskitytään alusta asti koko tehtävään eikä yksittäisiin osaratkaisuihin. Toisaalta modulaarinen lähestymistapa ei myöskään pyri luonnollisen kognitiivisen kuormituksen vähentämiseen yksinkertaistamalla tehtäviä, vaan tehtävänannot voivat olla monimutkaisia alusta lähtien. (Mt., 41–42.)

Molaaristen ja modulaaristen ratkaisuprosessien tutkimus on vahvistanut modulaaristen esitysten hyötyjä ongelmanratkaisun kannalta. Aihetta on tutkittu erityisesti todennäköisyyden käsitteen ympärillä, mutta myös muissa yhteyksissä modulaarisesta esitystavasta on ollut selkeitä hyötyjä. Oppijat ovat raportoineet tutkimuksissa mentaalisen kuorman pienentyneen modulaarisen esitystavan avulla ja havainnot ovatkin osoittaneet modulaarisen lähestymistavan vähentäneen esimerkkien tutkimiseen kulunutta aikaa ja parantaneen edelleen ongelmanratkaisutaitoja molaariseen lähestymistapaan verrattuna. (Gane 2006, 45–47.)

3.3.3 Esimerkkien muotoilu ja oppimista edistäviä periaatteita

Esimerkkien muotoilusta ja hyödyllisistä periaatteista niitä rakennettaessa on tehty useita tutkimuksia. Shen ja Tsai (2009, 238–244) ovat tarkastelleet empiirisiä tutkimuksia ja pohtineet niistä nousevia yhdistäviä periaatteita, jotka tekevät esimerkeistä oppimisen kannalta hyödyllisempiä. Näistä periaatteista voidaan päätellä, että oppijan aktiivinen rooli yleensä parantaa oppimistuloksia.

Oppimistuloksia parantavia esimerkkiperiaatteita ovat ainakin häivyttäminen, osittaiset ratkaisut ja selittäminen. Esimerkkien häivyttämisperiaate tarkoittaa ratkaisun asteittaista piilottamista. Kaikista parhaiten oppimista edistäväksi on havaittu oppijan edistymisen mukaan häivyttäminen, jossa seuraavat esimerkit sisältävät entistä vähemmän valmista ratkaisua vain, jos oppija on pystynyt täyttämään edelliset ratkaisut oikein. Häivyttäminen on havaittu tehokkaimmaksi, kun se tehdään ratkaisun lopusta (ei siis alkupäästä). (Mt., 238–244.)

Täydennysperiaate on melko samanlainen kuin häivyttäminen, siinä ei vain ole asteittaisuutta. Molemmat periaatteet herättävät oppijan ajattelemaan ja perustelemaan, mikä johtaa parempiin oppimistuloksiin. Käsitysten muodostumista voidaan myös edistää vaatimalla oppijaa selittämään esimerkeissä esiintyviä periaatteita ja sääntöjä. Näin voidaan välttää kokemusta, jossa esimerkin sisältämä informaatiomäärä tuntuu yhdellä kertaa liian suurelta. Selitysperiaate on erityisen hyödyllinen, kun oppijalla ei ole aiempaa tietopohjaa opiskeltavasta asiasta. (Mt., 238–244.)

Oppijan omien selitysten on havaittu olevan oppimisen kannalta tehokkaampia kuin asiantuntijan (opettajan) tarjoamat selitykset. Tämä johtuu siitä, että asiantuntijan selitykset eivät useinkaan mukaudu oppijan tietorakenteeseen tai ne tarjotaan oppijan ajatteluvaiheeseen nähden väärässä kohdassa oppimisprosessia. Itse tuotettu tieto myös muistetaan paremmin. (Van Gog, Paas & Merriënboer 2004, 83–98.)

Shen ja Tsai (2009, 238–244) esittävät oppijan aktiiviseen rooliin perustuvien periaatteiden lisäksi esimerkkien muotoilua koskevia periaatteita. Yksi näistä on esitysperiaate, johon liittyy olennaisesti huomionjako-efekti (split-attention effect). Mikäli oppija joutuu koostamaan esimerkkiin liittyvän informaation useasta lähteestä, oppimisprosessiin liittyy ylimääräistä kognitiivista kuormitusta. Kuvan ja tekstin esittäminen integroituna kuitenkin johtaa parempiin oppimistuloksiin kuin pelkät kuva- tai tekstiesimerkit. Shen ja Tsai esittävät, että myös visuaalisen ja verbaalisen esityksen integraatio on havaittu tutkimuksissa oppimista edistäväksi. Integraatio voi koskea myös esimerkkien ja ongelmanratkaisun yhdistämistä. Tutkimusten mukaan näiden yhdistelmä johtaa selvästi parempiin oppimistuloksiin kuin pelkkä esimerkkien tutkiminen tai ongelmanratkaisu yksistään (mt., 238–244).

3.3.4 Avoimet ja suljetut esimerkit

Avointen tehtävien esiintyminen matematiikan opetuksessa on alkanut yleistyä vasta 1970-luvulta lähtien. Avoimen lähestymistavan juuret ovat Japanissa; 1980-luvulla hieman vastaava tutkimuksellisten tehtävien perinne levisi Englannista ympäri maailmaa. (Pehkonen 1997, 7.) Avoimet tehtävät luovat mahdollisesti tarpeen muotoilla myös avoimia esimerkkejä oppimateriaaleihin, joten tässä kohdassa on mielekästä määritellä mitä tarkoitetaan avoimilla ja suljetuilla esimerkeillä. Esimerkkien tutkimus on vasta lapsenkengissä, joten avoimia ja suljettuja esimerkkejä koskevia tutkimuksia ja määrittelyjä on niukasti saatavilla. Esimerkkien ja tehtävien läheinen suhde tarjoaa kuitenkin mahdollisuuden määritellä niiden avointa tai suljettua luonnetta samoin perustein. Tässä yhteydessä tukeudutaan näin ollen määritelmiin, jotka koskevat alun perin tehtäviä tai ongelmia – eivät suoranaisesti esimerkkejä.

Avointen ja suljettujen esimerkkien erottamisessa on selkeintä määritellä ensin suljetut esimerkit, koska niitä vastaavat suljetut tehtävät ovat opetuksessa olleet perinteisesti huomattavasti yleisempiä kuin avoimet tehtävät. Suljettujen esimerkkien lopputuloksessa on mahdollista päätyä ainoastaan yksiselitteiseen ja ennalta määrättyyn rajojen asettamien ehtojen mukaiseen ratkaisuun. Esimerkkien rajat ovat koko ratkaisuprosessin ajan vakiot, joten niissä ei ole tulkinnan varaa. Suljetut esimerkit mallintavat matemaattista ajattelua, joka on kontrolloitavissa eli ajattelu on loogista ja uudelleenjärjestettävissä. Esimerkkitehtävien ratkaisumenetelmät ovat suoria ja ratkaisuprosessit yleensä näin ollen opittavissa mekaanisluonteisesti, kun kyseessä on suljettu esimerkki. (Sahlberg, Meisalo, Lavonen & Kolari 1993, 16–18; Heikkilä 1981, 21.)

Suljettujen esimerkkien vastakohtana voidaan pitää avoimia esimerkkejä. Avoimien esimerkkien lopputuloksia voi olla monia erilaisia, eikä varteenotettavien ratkaisujen keskinäistä paremmuutta ole yksinkertaista todeta. Esimerkissä asetetut rajat ovat joustavat ja antavat näin ollen ratkaisijalle enemmän vapauksia kuin suljetuissa esimerkeissä. Avointen esimerkkien mallintama ajattelu ilmentää innovatiivisuutta ja luovuutta, joten esimerkin tarkastelijasta tausta-ajattelu näyttää kontrolloimattomalta. Ratkaisumenetelmien oppiminen ei ole välttämättä mielekästä, koska mekaanisluontoisten prosessien oppiminen ei ole avointen esimerkkien esittämisen päämääränä alun perinkään. (Salhberg ym. 1993, 16–18; Heikkilä 1981, 21.)

Avointen ongelmien ja erityisesti avointen lopputulosten esiintymistä koulumatematiikassa on varmistettu merkitsemällä ne opetussuunnitelmiin joissakin maissa (Pehkonen 1997, 7). Suomessa perusopetuksen opetussuunnitelma ei kuitenkaan viittaa edes epäsuorasti avoimeen ongelmanratkaisuun (Opetushallitus 2004, 163–167). Lukion opetussuunnitelmassa avoimet ongelmat tulevat epäsuorasti esille luovuuden yhteydessä. Yleisissä tavoitteissa todetaan: "Opiskelijaa myös kannustetaan kehittämään luovia ratkaisuja matemaattisiin ongelmiin." Lyhyessä ja pitkässä matematiikassa mainitaan lisäksi opetuksen tavoitteeksi, että opiskelijan tulisi rohkaistua kokeilevaan ja tutkivaan toimintaan tai oppimiseen. Lyhyessä matematiikassa mainitaan myös keksivä oppiminen. Näitä tavoitteita lukuun ottamatta lukion opetussuunnitelmat eivät nosta esille avointa ongelmanratkaisua, vaan korostavat matematiikkaa suljettujen ongelmien kohtaamisena ja loogiseen ajatteluun kasvattamisena.

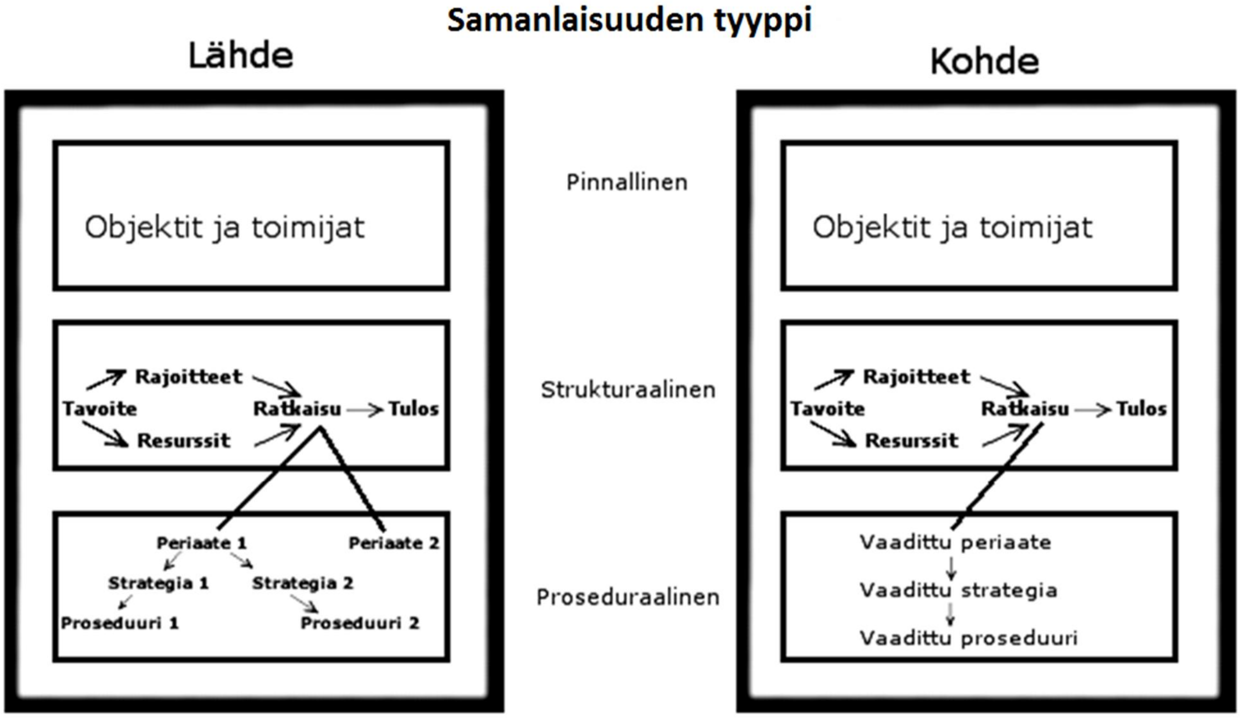
3.4 Analoginen ajattelu ja ongelmanratkaisu

Esimerkit ovat varsinkin oppimisen alkuvaiheissa tärkeitä analogisen ajattelun lähteitä. Oppija, jolla ei ole opiskeltavasta asiasta järjestäytynyttä tietorakennetta, turvautuu yleensä esimerkkeihin ratkaistessaan tehtäviä ja niissä esiintyviä ongelmia. (Atkinson ym. 2000, 185.) Ongelmat saattavat olla hyvin samankaltaisia kuin esimerkit, jolloin analogioiden käyttäminen ajattelun tukena auttaa huomattavasti tehtävien ratkaisemista. Analogioiden tutkimus on keskittynyt psykologian kirjallisuuteen ja nykyisin myös tekoälyyn tähtäävien teknologioiden kehittämiseen. Jonkin verran analogioita käsitellään myös opetusta koskevissa artikkeleissa ja tutkimuksissa, joissa pääpaino vaikuttaa olevan luonnontieteiden ja erityisesti fysiikan opetuksessa. Analogista päättelyä ei ole tutkittu matematiikassa yhtä paljon kuin edellä mainituilla aloilla (Schlimm 2008, 179).

Matematiikan opetuksen osalta on mielekästä ottaa esille analogioiden merkitys oppimisprosessille, vaikka aiemmat tutkimukset eivät olekaan tähän keskittyneet. Esimerkkien ja tehtävien suhde vaikuttaa varsin tiiviiltä nykyisissä oppimateriaaleissa, mikä nostaa väistämättä esiin kysymyksiä analogioista ja niiden roolista oppimisessa. Analogian muodostamiseen ja hyödyntämiseen vaikuttaa erityisesti se, millä tavoin esimerkissä ja tehtävässä esiintyvät ongelmat ovat samanlaisia. Samanlaisuudesta voidaan siis puhua eri merkityksissä.

Perinteisesti analogian lähteen ja kohdeongelman vastaavuus jaetaan pinnalliseen ja strukturaaliseen samanlaisuuteen (Ross & Kilbane 1997, 428; Chen 2002, 81). Nämä ominaisuudet analogian lähteen ja kohdeongelman välillä ovat olleet yleisesti esillä aihetta käsittelevissä tutkimuksissa, mutta myös proseduurien samanlaisuutta on tutkittu analogioiden yhteydessä (Chen 2002, 81).

Pinnallisella samanlaisuudella tarkoitetaan ratkaisun kannalta epäolennaisten, mutta muuten keskeisten yksityiskohtien yhtenevyyttä. Tällainen pinnallisuus voi olla esimerkiksi toimijoiden, teeman tai tavoitteiden samanlaisuutta. Strukturaalinen samanlaisuus viittaa puolestaan keskeisten elementtien kausaalisten suhteiden yhteneväisyyteen. Strukturaalinen samanlaisuus voi olla esimerkiksi sitä, että analogian lähde ja kohdeongelma sisältävät molemmat tavoitteen, ratkaisun periaatteen ja tuloksen, jotka vastaavat toisiaan. (Chen 2002, 81–82.) Strukturaalinen samanlaisuus viittaa ongelman objektien välisiin suhteisiin ennemmin kuin siihen mitä nämä objektit ovat (Novick 1988, 511). Chen (2002) esittää, että tämä perinteinen jaottelu ei ole riittävä monimutkaisen analogisen suhteen kuvaamiseksi, vaan samanlaisuutta tulisi tarkastella myös proseduraalisen ulottuvuuden avulla. Proseduraalinen samanlaisuus tarkoittaa operationaalisten piirteiden yhtymäkohtia analogian lähteen ja kohdeongelman välillä. Toisin sanoen proseduraalinen samanlaisuus viittaa yleisen ratkaisuperiaatteen tai idean muuttamiseen konkreettisiksi operaatioiksi ratkaisuun päätymiseksi. Kuvassa 1 on havainnollistus Chenin (2002) käsityksestä samanlaisuuden eri tyypeistä ongelmanratkaisussa, jossa tukeudutaan analogioihin.



Kuva 1. Samanlaisuuden tyypit Chenin (2002, 83) mukaan.

Gentner (1983) on esittänyt analogioiden kognitiivisia perusteita *Structure-mapping* -teoriassaan (SMT). SMT kuvailee analogioita informaation tulkinnan ja soveltamisen kannalta. (Saifaddin 2011, 26). Teoria perustuu erityisesti strukturaaliseen samanlaisuuteen, jossa objektien väliset suhteet ovat avainasemassa. Matematiikassa tämä analogia ilmenee esimerkiksi verrattaessa lukuparia (5, 10) lukupariin (40, 80). Olennaista ei ole lukujen 5 ja 40 tai 10 ja 80 yhteiset ominaisuudet, vaan suhde "kaksi kertaa niin suuri kuin", joka on 5:n ja 10:n välillä samoin kuin 40:n ja 80:n välillä. (Gentner 1983, 156.) Analogian tekeminen on siis SMT:n mukaan objektien välisten relaatioiden asettamista vastaavuussuhteeseen analogian lähteessä ja kohdeongelmassa. Näin ollen analogia ei vaadi pinnallista samanlaisuutta yhteisten objektien muodossa. (Saifaddin 2011, 26–27.)

Gentnerin teoriassa ei käsitellä analogioiden yhteyttä ongelmien mielensisäisiin esityksiin, ongelmia ei siis abstrahoida, vaan niiden välille muodostetaan relaatioiden vastaavuuksia. Tämä näkemys sisältää ongelmia, kun ajatellaan oppimisprosessia, jossa käsitys tarkasteltavasta asiasta muodostetaan usean esimerkin avulla. Useat tutkimukset osoittavat, että analogian muodostaminen perustuu abstraktien skeemojen muotoilemiseen konkreettisten esimerkkien avulla (Chen 2002, 426).

Holyoak ja Thagard (1989) ovat kehittäneet analogioita koskevan teorian, joka tunnetaan nimellä *multiconstraint theory* (MT). MT olettaa analogioiden muotoutuvan samoin kuin SMT:ssä: vastaavuuksien etsimisenä kahden struktuurin elementeistä. Analogioiden tekeminen sisältää MT:n mukaan abstrakteja prosesseja, jotka auttavat analogian lähteen ja kohteen yhdistämisessä, joten näkemys analogioista ei ole niin suoraviivainen kuin SMT:ssä. Tämän lisäksi MT:n mukaan analogioiden muotoilussa on otettava huomioon erinäisiä rajoitteita. Holyoakin ja Thagardin muotoilema teoria koskee analogioiden strukstuuristen rajoitteiden lisäksi semanttisia ja pragmaattisia rajoitteita (constraints). Struktuurien rajoitteet edistävät elementtien asettamista vastaavuussuhteeseen. Semanttinen samanlaisuus on Holyoakin ja Thagardin teoriassa elementtien samanlaisia merkityksiä, jotka tukevat mahdollisia vastaavuuksia. Pragmaattiset rajoitteet tarkoittavat analogioiden kannalta sitä, että tietyt elementit nähdään keskeisyytensä vuoksi kohteina, joista analogiat muotoillaan. (Holyoak & Thagard 1989, 295; Saifaddin 2011, 29–30.)

Holyoakin ja Thagardin (1989) analogia-teoriassa ongelmanratkaisu jakautuu useisiin aliprosesseihin. Nämä ovat tiedonhaku (retrieval), kartoitus (mapping) ja induktio. Tiedonhaun vaiheessa keskitytään semanttisiin elementteihin, kuten relaatioihin tai objekteihin, jotka ovat johtaneet analogian hakemiseen. Sopivan analogian löydyttyä aloitetaan kartoitus, jota ehkä kuvaa paremmin termi yhteensovittaminen. Kartoittaminen tapahtuu abstraktilla skemaattisella tasolla, jolla tuotetaan yhteensopivia ratkaisuehdotuksia käsillä olevaan ongelmaan. (Saifaddin 2011, 29.) Analogioiden ja induktiivisen ajattelun selvin yhteys MT:ssä on oppimisprosessissa, jossa tarkastellaan useita esimerkkejä ja käytetään niitä oppimisen edistämiseksi. Tällöin analogisuus rakentuu abstraktien skeemojen avulla, kun esimerkkejä tarkasteltaessa eliminoidaan eroavaisuuksia ja havaitaan yhteisiä piirteitä. Skeemojen ja suorempien analogioiden kautta tapahtuva ongelmanratkaisu on siis syytä erottaa, koska ne ovat hyvin erilaiset kognitiiviset prosessit. (Mt., 29–30.)

Saifaddinin (2011, 122–123) mukaan ongelmanratkaisu suorien analogioiden avulla voidaan esittää hyvin samankaltaisena prosessina kuin Holyoakin ja Thagardin teoriassa. Analogian muotoileminen koostuu tällöin kolmesta keskeisestä prosessista: valikoivasta enkoodauksesta, kartoituksesta ja siirtämisestä. Valikoiva enkoodaus tarkoittaa mekanismia, joka ratkaisee mitä tietoa analogian muodostamiseen valitaan. Valikointi perustuu objektien pinnallisiin ominaisuuksiin. Valikoivan enkoodauksen aikana tai sen jälkeen esiintyy kartoitusprosessi, joka liittyy toisiaan vastaavien objektien ominaisuuksien integrointiin. Näin saadaan esille strukturaaliset suhteet, joissa valikoidut objektit ovat pääosassa. Siirtämisen prosessissa on kyse analogian lähteestä opitun soveltamisesta kohdeongelmaan. Siirtovaikutus voi vaihdella täydellisestä aina osittaiseen tai jopa väärään siirtoon. (Mt., 122–123.) Suorien analogioiden ja skeemojen kautta tapahtuva analogioiden muodostaminen ovat molemmat läsnä formaalissa oppimisprosessissa. Oletettavasti oppija voi vaihdella näiden prosessien välillä ainakin oppimistavoitteiden, tarjolla olevan materiaalin ja oppimisvalmiuksien mukaan.

Saifaddinin näkemyksessä on yhtäläisyyksiä Holyoakin ja Thagardin teoriaan myös siltä osin, että analogian lähteenä olevan ongelman struktuuri määrittää kartoitusprosessin tehokkuuden (Saifaddin 2011, 30). On havaittu, että asiantuntijat käyttävät noviiseja paremmin analogioita, kun kaksi ongelmaa jakaa ainoastaan yhteisen struktuurin (eivät pinnallista samanlaisuutta). Niin kutsuttu spontaani positiivinen transferi eli siirtovaikutus muodostuu tällöin todennäköisemmin asiantuntijoiden kuin noviisien tapauksessa. (Novick 1988, 512.) Huomattavin ero Saifaddinin näkemyksessä Holyoakin ja Thagardin teoriaan on luultavasti Holyoakin ja Thagardin pragmaattisten rajoitteiden osuudessa analogiseen ajatteluun. (Saifaddin 2011, 32.)

Pinnallisen samanlaisuuden merkitystä ei ole syytä vähätellä, sillä sen on osoitettu johtavan analogioiden tekemiseen varsinkin oppimisen alkuvaiheissa (Novick 1988; Ross & Kilbane 1997). Pinnallisen samanlaisuuden vuoksi noviisit päätyvät yleensä tekemään asiantuntijoita herkemmin analogisia suhteita, jolloin strukturaalinen erilaisuus voi viedä ratkaisuprosessin virheelliseen suuntaan. Hieman vastaava ilmiö on matemaattisen ongelmanratkaisun teoriassa suoran käännöksen strategia (direct translation strategy), joka tarkoittaa ongelmanratkaisua pinnallisten huomioiden avulla. Ratkaisija muotoilee tätä strategiaa käyttäessään analogian tehtävänannon ja ratkaisun välille poimimalla avainsanoja, kuten "vähemmän", "korko" tai "kasvaa". Tietyissä, suoraviivaisissa tapauksissa, suoran käännöksen strategia on tehokas ja toimiva, mutta ongelman asettelu saattaa monesti johtaa tätä strategiaa käytettäessä harhaan. (Mayer & Hegarty 1996, 35–40.)

Periaatteen, strategian tai proseduurin samanlaisuuden hyödyntäminen analogian lähteen ja kohdeongelman välillä perustuu proseduraalisen samanlaisuuden eri tasojen mahdollisuuksiin siirtovaikutuksen kannalta (Saifaddin 2011, 2). Yleensä siirtovaikutuksesta erotetaan lähi- ja kaukosiirto analogisen suhteen ominaisuuksien perusteella. Lähisiirto (near transfer) tapahtuu, kun oppija kohtaa ongelman, joka on hyvin samanlainen kuin ongelma tai ongelmat oppimisvaiheen aikana. Ongelmat siis sisältävät lähisiirron tapauksessa tuttuja periaatteita, strategioita tai proseduureja. (Kneppers, Elshout-Mohr, Van Boxtel & Van Hout-Wolters 2007, 117.) Lähisiirto koskee yleensä ongelmia, joilla on strukturaalista ja pinnallista samanlaisuutta. Tapauksessa, jossa strukturaaliset ominaisuudet eroavat analogian lähteen ja kohdeongelman välillä, on mahdollista, että ongelmat joko sisältävät tai eivät sisällä pinnallista samanlaisuutta. Ainoastaan pinnallista samanlaisuutta sisältävät ongelmat asettuvat siirrännäisvaikutuksen jatkumon keskivaiheille. Kaukosiirron tapauksessa ollaan tämän jatkumon ääripäässä, jolloin analogian lähde ja kohdeongelma eivät sisällä yhteisiä ominaisuuksia missään suhteessa. Kaukosiirron tapahtuminen on selkeästi lähisiirtoa harvinaisempaa, sillä mitä kaukaisempaa siirrännäisvaikutusta ongelma vaatii, sitä syvempää ymmärrystä ja kehittyneempiä ongelmanratkaisutaitoja ongelman ratkaisijalta edellytetään. (Kneppers ym. 2007, 117.)

Schlimm (2008) ehdottaa, että matematiikan osalta analogioita tulisi tarkastella erilaisesta teoreettisesta näkökulmasta kuin perinteisesti muun muassa SMT ehdottaa. Matematiikan ero muihin yhteyksiin, joissa analogiat ovat ajattelun kannalta merkittävässä roolissa, johtuu matemaattisten kohteiden erilaisesta luonteesta. Arkipäivän tilanteissa ja ei-matemaattisissa yhteyksissä analogioiden kohteet sisältävät yleensä paljon objektien välisiä suhteita ja vähän objekteja. Matematiikassa tämä suhde on Schlimmin (mt., 183–184) mukaan päinvastainen: kohteet sisältävät tyypillisesti useita objekteja (usein äärettömän monia), mutta objektien välisten suhteiden määrä on hyvin pieni. Tästä perusteellisesta erosta johtuen analogioita tulisi matematiikassa Schlimmin mielestä tarkastella aksiomaattisesta näkökulmasta. Analogioiden aksiomaattisen selittämisen mukaan kaksi kohdetta ovat analogisia, kun ne toteuttavat samat lainalaisuudet tai aksioomat. Ne ovat tällöin saman aksioomajoukon esityksiä. (Mt., 180.)

Matematiikan oppimisessa aksiomaattinen ajattelu korostuu sitä enemmän, mitä pidemmällä opinnoissa ollaan. Deduktiivinen päättely nähdään myös olennaisena ajatteluprosessina oppimisen aikaisemmissa vaiheissa, mutta käytännössä deduktiivisuus ja etenkin aksioomiin nojaaminen ovat tällöin vain osa matematiikan oppimista. Peruskoulun oppikirjoissa päädytään yleisesti niin kutsuttuihin esiformaalisiin selityksiin, joita ei esitetä osana aksiomaattista systeemiä. Tämä ratkaisu tehdään todennäköisesti didaktisista syistä. (Stacey & Vincent 2009, 285–287.) Päättelyn luonne peruskoulussa (ja ainakin osittain lukiossa) viittaa siihen, että analogioiden aksiomaattisen tarkastelun hyödyt tulevat esille vasta edistyneemmässä matematiikan oppimisessa.

Analogioiden ja oppimisen kannalta on mielenkiintoista pohtia mihin oppimisteoreettiseen näkemykseen analogioiden kautta tapahtuva oppiminen nojaa. Voidaan ajatella, että esimerkit ja niiden avulla muodostettavat analogiat perustavat oppimisen behavioristiseen oppimiskäsitykseen. Oppimista kuvailisi tällöin haluttujen toimintojen vahvistaminen ja harjoitteleminen (Fosnot 1996, 8–9; Leino 2004, 21). Oppimisen tavoitteena olisi siis esimerkiksi harjoituttaa oppijoita vastaamaan tiettyihin tehtäviin esimerkkien havainnollistavan kaavan mukaisesti. Analogisessa ajattelussa keskeiset asiat, skeemojen rakentaminen ja erityisesti MT:n korostama induktiivinen ajattelu, eivät kuitenkaan viittaa behavioristiseen oppimisnäkemykseen. Mielen sisäisen informaatiorakenteen muutokset ja metakognitiivisten taitojen tärkeys analogisen ajattelun yhteydessä liittävät analogioiden kautta tapahtuvan oppimisen ennemminkin kognitiivisiin kuin behavioristisiin oppimisteorioihin (Moreno & Park 2010, 20–21). Analogioita koskevien teorioiden tiedonkäsitys poikkeaa kuitenkin sekä behavioristisesta että kognitiivisesta oppimiskäsityksestä.

Behavioristinen teoria ja kognitiiviset informaation prosessointiin keskittyneet teoriat olettavat ihmisen omaksuvan oppimisprosessissa, olemassaolostaan riippumatonta, objektiivista tietoa. Konstruktivismi ei nojaa tällaiseen objektivismiin, vaan selittää oppimista yksilöllisten tulkintojen tekemisenä ja ymmärtämisprosessin tuloksena. Oppiminen ei siis ole tiedon välittymistä tai tiedon tallentamista muiden esityksistä. Oppimisen sosiaalinen ulottuvuus johtaa kuitenkin usein siihen, että muodostamme kokemustemme kautta samanlaisia merkityksiä ja käsitteellistyksiä. (Applefield ym. 2000, 35–53.) Gentnerin (1983) sekä Holyoakin ja Thagardin (1989) analogioita koskevat teoriat ilmentävät tässä suhteessa konstruktivistisia piirteitä. Analogioiden aksiomaattinen lähestymistapa poikkeaa tästä näkemyksestä, sillä sen tietoteoreettinen perusta nojaa vahvasti oppijasta riippumattoman objektiivisen tiedon olemassaoloon. (Applefield ym. 2000, 35–53.) Analogioiden ja niiden muodostamisen kautta tapahtuvan oppimisen teoreettiset näkemykset ovat siis kaikkea muuta kuin yhtenäisiä.

4 ESIMERKKIEN JA ANALOGIOIDEN LUOKITTELUN PERUSTA

Tässä kappaleessa hyödynnetään edellisen kappaleen teoreettisia tarkasteluja esimerkkien ja analogioiden luokittamiseksi. Luokittelusysteemin muodostamisessa on kuitenkin luonnollisinta lähteä liikkeelle siitä, miten aiemmissa tutkimuksissa on luokitettu matematiikan tehtäviä.

4.1 Aiempien tutkimusten viitekehyksiä

Tehtävien vaatimaa matemaattista ajattelua ja osaamista voidaan luokitella muun muassa sisällön, kykyjen tai ajattelun perusteella. PISA[1] 2012 -tutkimuksen viitekehyksestä selviää, että tutkimuksessa matematiikan tehtäviä luokitellaan lisäksi niiden kontekstiin perustuen (OECD[2] 2013, 23–58). Luokittelusysteemejä on rakennettu useita, mutta mikään niistä ei näytä saaneen yleistä hyväksyntää. Osittain tähän vaikuttanevat erilaiset tarkoitusperät, joita luokittelusysteemit palvelevat. Luokittelusysteemit on yleensä rakennettu uusien tehtävien muotoilemisen perustaksi. Toki myös valmiiden tehtävien tarkastelusta nousseita luokituksia on esitetty. Esimerkit esitetään usein mallisuorituksina tiettyjen tehtävien tai ongelmien ratkaisemisesta, joten tehtävien luokittamiseen soveltuvista luokittelusysteemeistä voidaan saada runsaasti virikkeitä esimerkkien luokittamiseen soveltuvan kehyksen rakentamiseen.

PISA 2012 -tutkimuksen on tarkoitus arvioida yksilöiden kykyä muotoilla, käyttää ja tulkita matematiikkaa useissa eri konteksteissa. Matematiikan taitojen arvioinnissa ja tehtävien suunnittelussa käytetään pääpiirteittäin kolmea ulottuvuutta: prosesseja, sisältöjä ja konteksteja. (Mt., 24.) Näistä kolmesta erityisesti prosessi-ulottuvuus on tämän tutkimuksen kannalta mielenkiintoinen, sillä se heijastelee ja erottelee matemaattisen ajattelun piirteitä.

---

[1] PISA = Programme for International Student Assessment
[2] OECD = Organisation for Economic Cooperation and development

Ensinnäkin PISA 2012 -tutkimuksen matemaattiseen viitekehyksen prosessi-ulottuvuuteen kuuluu *matemaattisten tilanteiden muotoilu*. Sillä viitataan kykyyn tunnistaa mahdollisuuksia käyttää matematiikkaa ja rakentaa matemaattista muotoa kohdatulle ongelmalle. Matemaattisten tilanteiden muotoilu tarkoittaa siis sitä, että yksilö tunnistaa olennaisen matematiikan ongelman analysoinnin, rakentamisen ja ratkaisemisen taustalla. (Mt., 28.) Matemaattisten tilanteiden muotoiluun liittyy läheisesti matematiikan multisemioottinen näkökulma, joka erottelee toisistaan puhutun, matematiikan ja kuvallisen kielen. Matemaattisten tilanteiden muotoilussa tarvitsee usein tehdä muunnoksia eri esitystapojen (moodien) välillä.

Toinen PISA 2012 -tutkimuksen prosessi-ulottuvuuteen liittyvä kategoria on *matemaattisten käsitteiden, faktojen, proseduurien ja päättelyn käyttäminen*. Käsitteitä, faktoja, proseduureja ja päättelyä käytetään matemaattisesti muotoiltujen ongelmien ratkaisemiseen ja matemaattisten johtopäätösten tekemiseen. Ratkaisustrategioiden suunnittelu ja toteuttaminen kuuluvat myös tähän kategoriaan. (Mt., 29.)

Kolmantena prosessi-ulottuvuuteen kuuluvana kategoriana PISA 2012 -viitekehyksessä mainitaan *matemaattisten tulosten tulkinta, soveltaminen ja arvioiminen*. Tähän kategoriaan kuuluu siis matemaattisten tulosten tai päättelyn liittäminen ongelman kontekstiin sekä tulosten arviointi ongelman kontekstissa. Matemaattisten tulosten tulkinta saattaa edellyttää selitysten ja argumenttien rakentamista ongelmatapauksen perusteella. (Mt., 29–30.)

Prosessi-ulottuvuus ilmenee edellä kuvattujen kolmen kategorian lisäksi seitsemänä eri kykynä: kommunikointina, matematisointina, esittämisenä, päättelynä ja argumentointina, ongelmien ratkaisustrategioiden suunnittelemisena, symbolisen, formaalisen ja teknisen kielen ja operaatioiden käyttämisenä sekä matemaattisten työkalujen käyttämisenä. Kaikista edellä kuvatuista kolmesta kategoriasta eritellään seitsemän kyvyn ilmeneminen niissä. (Mt., 32.) On ilmeistä, että PISA 2012 -viitekehys on melko monimutkainen, kun otetaan huomioon, että prosessi-ulottuvuuden lisäksi siihen on rakennettu vielä kaksi muutakin ulottuvuutta: sisällöt ja konteksti.

Joutsenlahti on käyttänyt lisensiaatin- (1996, 47) ja väitöskirjatutkimuksessaan (2005) Wilsonin taksonomiaan perustuvaa luokittelua, joka jaottelee tehtäviä niiden ratkaisemisen edellyttämän kognitiivisen tason perusteella. Wilsonin taksonomiassa on neljä eri tasoa: laskutaito, ymmärtäminen, soveltaminen ja analysoiminen (ks. edeltä luku 3.1.2). Joutsenlahti (1996; 2005) on tehnyt luokittelusysteemistään kolmitasoisen, sillä hänen mukaan tehtävissä esiintyy yleensä kaksi Wilsonin taksonomian kategoriaa yhdessä. Näin ollen Joutsenlahden (1996; 2005) kognitiivisen alueen taksonomia on rakentunut yhdistetyistä Wilsonin taksonomian kategorioista:
1. Laskutaito / ymmärtäminen (LY)
2. Ymmärtäminen / soveltaminen (YS)
3. Soveltaminen / analyysi. (SA)
Joutsenlahden (1996; 2005) mallissa LY-tason ajatteluprosesseja kuvaa tunnistaminen ja mieleenpalauttaminen, YS-tasoa algoritminen ajattelu ja yleistäminen sekä SA-tasoa reflektoiva ajattelu ja avoin etsiminen.

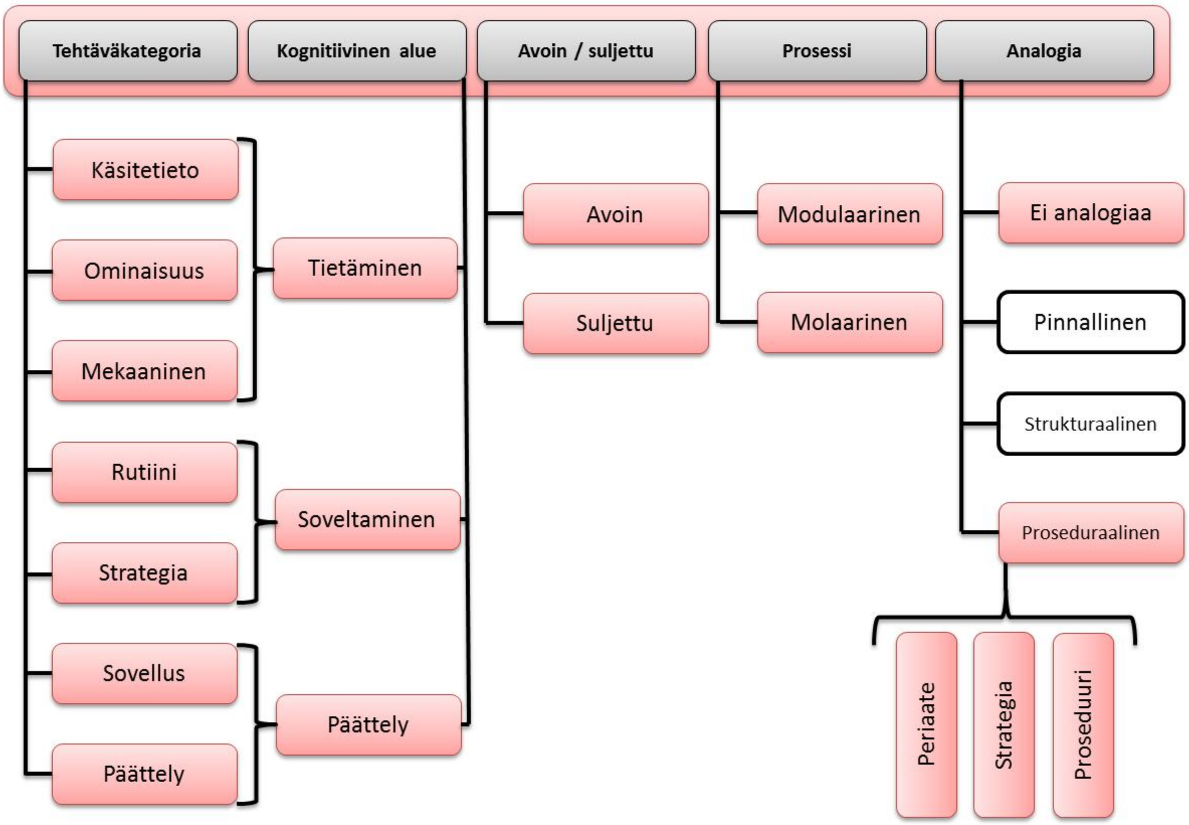
Pointon ja Sangwin (2003, 674–679) ovat kehittäneet tehtävien luokitteluun sopivan taksonomian. Heidän tutkimuksessaan luokittelusysteemiä käytettiin taskulaskinten mahdollisuuksien arvioimiseksi yliopistotasoisten matematiikan tehtävien tekemisessä. Taksonomian kahdeksan tehtäväluokkaa olivat:

1. Faktojen muistaminen
2. Rutiinilaskun tai algoritmin suorittaminen
3. Matemaattisen objektin luokittaminen
4. Vastauksen tai tilanteen tulkitseminen
5. Todistus, osoitus tai perustelu
6. Käsitteen laajentaminen
7. Esimerkin rakentaminen
8. Virhepäätelmän kritisointi

Pointonin ja Sangwinin taksonomiassa matemaattiset kysymykset jaetaan kahdeksaan luokkaan, joista neljä ensimmäistä liittyy omaksuvaan oppimiseen (adoptive learning). Omaksuva oppiminen tarkoittaa tässä yhteydessä oppijan sitoutumista sisimmiltään reproduktiiviseen prosessiin, jossa vaaditaan hyvin ymmärretyn tiedon soveltamista rajatuissa tilanteissa. Viimeiset neljä luokkaa sen sijaan kuuluvat mukautuvan oppimisen (adaptive learning) alueeseen, jossa edellytetään kognitiivisesti haastavampia toimintoja. Tällaiset toiminnot ovat esimerkiksi luovuutta, reflektointia ja kritisointia vaativia, joten ne edellyttävät oppijan toimivan kuin asiantuntija. (Sangwin 2003, 815.)

4.2 Luokittelusysteemin rakenne

Edellisessä luvussa mainittiin erilaisten luokittelusysteemien muodostumisen todennäköiseksi syyksi erilaiset tarkoitusperät. Tarkoitusperä sanelee siten myös tässä tutkimuksessa muodostetun luokittelusysteemin muotoa. Tutkimuksessa on tarkoitus arvioida esimerkkien roolia matematiikan opetuksessa erityisesti kognitiivisten oppimisprosessien kannalta. Vastaavien tutkimusten huomio on yleensä kiinnittynyt erilaisten opetuksellisten toteutusten hyödyllisyyteen oppimistulosten kannalta, joten edelliset tutkimukset eivät tarjoa valmiita näkökulmia analyysin toteuttamiseksi.

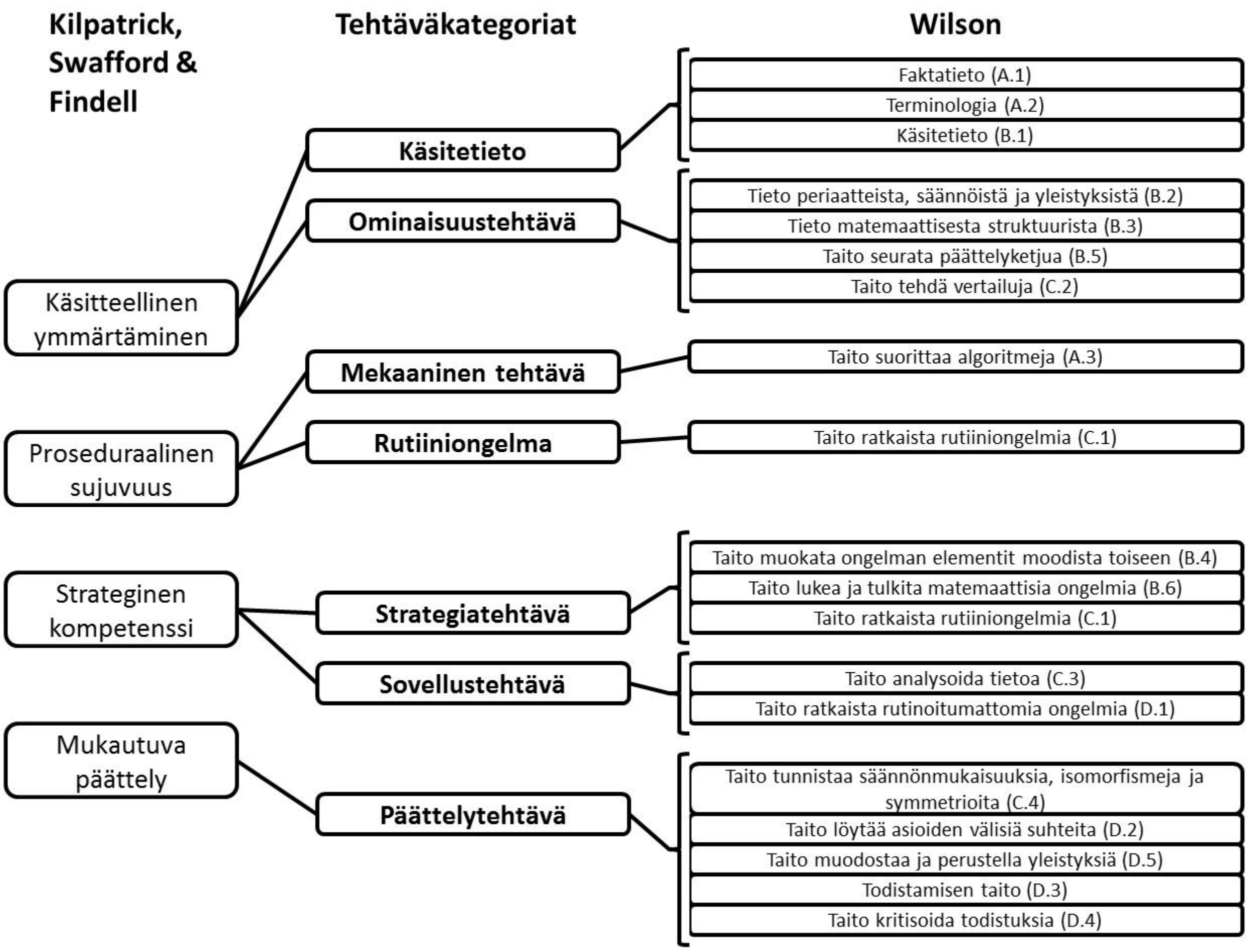


Kuva 2. Esimerkkien luokittamisen analyysirunko tässä tutkimuksessa. Värjätyt kategoriat muodostavat luokittelukehyksen. Pinnallinen ja strukturaalinen samanlaisuus on rajattu analogioiden tarkastelun ulkopuolelle.

Edellisten vastaavien tutkimusten puuttumisen vuoksi analyysissä käytettävän luokittelurungon ja tarkastelunäkökulman muotoilemiseksi on ollut tarpeellista tutustua monipuolisesti oppimisteorioiden ja erityisesti matematiikan oppimisen perusteisiin. Tämän tarkastelun avulla on voitu pohjustaa esimerkkien ja tehtävien luokittelun ja analysoinnin raameja, jotka esitellään seuraavaksi omissa alaluvuissaan. Kuvassa 2 on havainnollistettu luokittamisperustaa.

4.2.1 Tehtäväkategoriat

Wilsonin (1971) taksonomia ja Kilpatrickin ym. (2001) matemaattisen taitavuuden malli tarjoavat hyvän lähtökohdan tehtäväkategorioiden luomiseksi. Wilsonin taksonomia antaa kategoriasysteemille konkreettisuutta, sillä sen sisältämä luokittelu on hyvin tarkennettua ja yksityiskohtaista. Kilpatrickin ym. matemaattisen taitavuuden malli puolestaan luo kategoriasysteemille raamit. Kuvassa 3 on havainnollistus mallien yhteensovittamisesta.



Kuva 3. Kilpatrickin ym. mallin ja Wilsonin taksonomian synteesinä luodut tehtäväkategoriat. Wilsonin taksonomiassa alakategoriat on merkitty taitotason mukaisesti kirjain-numeroparilla siten, että A = laskeminen, B = ymmärtäminen, C = soveltaminen ja D = analyysi. Numero on helpottamassa vain alakategorioiden identifioimista.

Wilsonin taksonomian alakategoriat asettuvat jotakuinkin kognitiivisen kompleksisuuden mukaiseen järjestykseen, vaikka ne yhdistetäänkin Kilpatrickin ym. malliin, joka ei ota yhtä selvästi kantaa ominaisuuksiensa vaatiman ajattelun tasoon. Selviä eroja näistä malleista kuitenkin löytyy, kun niiden välittämää kuvaa matemaattisesta osaamisesta tarkastelee lähemmin.

Kilpatrick ym. (2001) eivät mainitse mallissaan ehkä jopa itsestäänselvää faktatiedon ja terminologian yhteyttä matemaattiseen taitavuuteen. Ilman näitä tietoja on hankalaa olla vuorovaikutuksessa matemaattisen kulttuurin kanssa. Käsitetieto on selvästi erillistä faktatiedosta ja terminologiasta, sillä jotkin asiat ovat ainoastaan sopimuskysymyksiä eikä niiden tietämiseen liity erityistä ymmärtämistä. Biologisesti sekundääriset matemaattiset taidot, joita opitaan formaalissa opetuksessa, sisältävät yleensä näitä konventioita (Geary

1996, 145–166). Faktatiedon ja terminologian merkitys tulee ottaa näin ollen osaksi esimerkkien luokittelua.

Wilsonin esittämä laskemisen taitotaso on kognitiivisesti hyvin vaatimaton, koska se käsittää ainoastaan laskujen mekaanisen suorittamisen – ei esimerkiksi proseduurien valintaa. Kilpatrick ym. yhdistävät myös tiedon siitä miten ja milloin käyttää proseduureja vastaavaan luokkaan. Tässä tutkimuksessa tullaan erottelemaan esimerkit edellä mainitun ominaisuuden perusteella mekaanisiin esimerkkeihin ja rutiiniesimerkkeihin, sillä näin voidaan erotella paremmin selvästi erityyppisiä esimerkkejä.

Kilpatrickin ym. mallissa strateginen kompetenssi edustaa ongelmanratkaisun taitoja, mutta se ei vielä erottele riittävästi ongelmien vaatimaa matemaattista ajattelua. Wilson puolestaan erottelee toisistaan rutinoituneen ja rutinoitumattoman ongelmanratkaisun. Tämä jako on luonnollinen matematiikan ongelmien tarkastelussa, vaikka se ei olekaan yksikäsitteinen. Pehkonen (2012, 3) esittää ongelmien olevan tehtäviä, joissa ratkaisija joutuu yhdistelemään ennestään tuttua tietoa (hänelle) uudella tavalla. Pehkonen rajaa ongelmista pois ne tehtävät, joissa ratkaisija tunnistaa heti toimenpiteet, joita tehtävän ratkaiseminen vaatii. Pehkonen esittää rutiinitehtäville myös vaihtoehtoisia nimityksiä standarditehtävä tai harjoitustehtävä, joista jälkimmäinen on ehkä hieman harhaan johtava, koska oppikirjojen tehtäviä kutsutaan yleensä kaikkia yhteisesti harjoitustehtäviksi. Rutiininomaisen ja rutinoitumattoman prosessin arviointi edellyttää etenkin ongelman kohtaavan yksilön taitojen arviointia. Esimerkkien kannalta tämä tarkoittaa oppimistavoitteiden pohtimista. Rutiiniongelman ja rutinoitumattoman ongelman esitteleminen esimerkin avulla tulee erottaa toisistaan, vaikka tämä saattaa vaatia melko vaativien tulkintojen tekemistä muun muassa esimerkin asemasta oppimateriaalin kokonaisuudessa.

Tarkastellaan seuraavaksi seitsemää tehtäväkategoriaa, jotka muotoiltiin tämän tutkimuksen tarkoituksiin sopiviksi. Kategoriat on muodostettu sen mukaan, millaista matemaattista ajattelua niitä edustavat ratkaisuprosessit vaativat. Tarkoituksena on ollut luoda Kilpatrickin ym. määrittelemän matemaattisen taitavuuden käsittävä kategoriasysteemi, joka jaottelee tehtävätyyppejä myös niiden vaatiman ajattelun kompleksisuuden perusteella. Tehtäväkategoriat on pyritty muotoilemaan selkeästi erillisiksi, mutta se ei tarkoita sitä, että sama esimerkki ei voisi kuulua kahteen tai jopa useampaan kategoriaan samanaikaisesti.

Tämä on perusteltua Kilpatrickin ym. mallin piirteiden toisiinsa kietoutumisen vuoksi. Kaikista kategorioista on annettu esimerkki kuvissa 16–22 (liitteet 1–5).

Käsitteellinen ymmärtäminen

1. Käsitetieto

Käsitetietoa vaativat tehtävät sisältävät faktatietoa, terminologiaa tai käsitteitä, joiden tunteminen on edellytys tehtävän suorittamiselle. Käsitetiedon tulee olla selvästi tehtävässä avainasemassa ja sen tulee olla yleisistä triviaaleista faktoista, termeistä tai käsitteistä poikkeavaa.

2. Ominaisuustehtävä

Tämän kategorian tehtävät vaativat ratkaisijaltaan tietoa tai analysointia matemaattisten olioiden tai objektien ominaisuuksista. Tehtävän ratkaiseminen edellyttää sisäistynyttä tietoa tai ymmärrystä matematiikan periaatteista, säännöistä tai struktuurista. Tehtävillä arvioidaan matemaattisen ymmärryksen hyödyntämistä ja yleistä matemaattista abstraktia ajattelua.

Proseduraalinen sujuvuus

3. Mekaaninen tehtävä

Mekaaniset tehtävät voidaan ratkaista tietyn algoritmin tai muutaman ilmeisen laskusäännön avulla. Toisen asteen yhtälön ratkaiseminen lukiotasolla on hyvä esimerkki mekaanisesta tehtävästä. Ratkaisijan tulee olla sisäistänyt yhtälöiden manipulointiin liittyvät säännöt, mutta ratkaisu ei edellytä välttämättä niiden syvällistä ymmärtämistä.

4. Rutiiniongelma

Rutiiniongelmaa tarkasteltaessa on yleensä ilmeistä miten se tulee ratkaista, joten siihen ei liity olennaisesti menetelmän valinta. Rutiiniongelmassa pääosassa on menetelmän tai periaatteen soveltaminen yksinkertaisessa tilanteessa. Tämän tehtäväkategorian harjoittelussa tietyn tilanteen ja ratkaisuprosessin liittäminen yhteen on selvästi keskiössä. Harjoittelussa tähdätään todennäköisesti ongelmien kategorisointiin. Kun oppija on harjoitellut riittävästi, rutiiniongelmat sisältävät ennestään tuttuja elementtejä siinä määrin, että niiden ratkaisemiseksi tulee ainoastaan palauttaa mieleen menetelmä tai periaate, jolla vastaavat ongelmat ovat aiemmin ratkenneet.

Strateginen kompetenssi

5. Strategiatehtävä

Tämän tehtävätyypin ratkaisussa käytettävä menetelmä ei ole yhtä ilmeinen kuin rutiiniongelmissa, joten tehtävän ratkaiseminen edellyttää huolellista suunnittelua. Strategiatehtävät vaativat yleensä tunnettujen, tuntemattomien ja haluttujen asioiden tarkastelua ja lähestymistavan valintaa näiden tietojen hyödyntämiseksi. Matemaattinen lukutaito korostuu näiden tehtävien ratkaisussa, sillä niissä saatetaan esittää ratkaisun kannalta ylimääräistä tietoa. Ongelman ratkaisemiseksi tulee hahmottaa tehtävän elementtien suhteita ja hyödyntää matemaattisia periaatteita tilanteissa, jotka pelkistyvät rutiininomaiseksi ongelmanratkaisuksi.

6. Sovellustehtävä

Sovellustehtävät vaativat ongelman analysoimista ja aiemman tiedon soveltamista uudessa kontekstissa. Tehtävänannon sanamuodot, konteksti ja esitysmuoto saattavat poiketa rutiininomaisista tehtävistä, joten sovellustehtävät edellyttävät taitoa analysoida tietoa. Valmista algoritmia tai menetelmää, jolla ongelma voitaisiin ratkaista, ei ole käytettävissä, joten tehtävän ratkaiseminen vaatii taitoa paloitella ongelmaa osaongelmiksi, erottaa olennainen epäolennaisesta ja muodostaa yhteyksiä osaongelmiin, jotka on jo ratkaistu. Sovellustehtävien ratkaiseminen voi siis olla ongelmien ratkaisemista tapauksissa, joihin ei ole opetuksellisesti järkevää antaa valmista ratkaisumenetelmää. Olennaista on oppijan valmiuksien huomiointi suhteessa tehtävän vaatimiin taitoihin. Sovellustehtävän ratkaiseminen vaatii ennen kaikkea aiemmin opitun soveltamista uudessa yhteydessä, osaongelmien ratkaiseminen sinänsä on ajoittain rutiininomaista. Sovellustehtävän ratkaisu koostuu tyypillisesti osaongelmien ratkaisemisesta ja niiden merkityksien tulkinnasta kokonaisratkaisun kannalta.

Mukautuva päättely

7. Päättelytehtävä

Päättelytehtävien ratkaiseminen edellyttää ajattelua, joka perustuu säännönmukaisuuksien, analogioiden tai symmetrioiden näkemiseen ja niiden hyödyntämiseen. Tämän tehtävätyypin ongelmissa saatetaan muodostaa yleisesti pätevä lauseke tai periaate induktiivista päättelyä käyttäen. Yleisesti pätevän ratkaisun muotoilu voi olla tehtävän tavoite tai vain keino sen ratkaisemiseksi. Ratkaisuprosessi vaatii tyypillisesti matemaattisen perusymmärryksen ja järkeilyn yhdistämistä, joten ratkaisut edellyttävät myös perustelutaitoja. Perusteleminen saattaa tulla esille ainoastaan yksilön sisäisenä aktiviteettina, koska ratkaisussa eteneminen vaatii asioiden perustelemista itselleen – ei välttämättä muille. Päättelytehtävän ratkaisuun voi sisältyä mekaanisia piirteitä, mutta vaaditun ajattelun taso on mekaanisia tehtäviä kompleksisempi, sillä se vaatii ongelman elementtien uudelleenjärjestelyä ja niiden välisten suhteiden muotoilemista.

Päättelytehtäviksi luokitetaan tyypillisesti todistukset, jotka sisältävät jonkin matemaattisen oletuksen ja niistä seuraavan väitteen. Todistuksen rakentaminen edellyttää yleensä perustelemis-, päättely- ja yhdistelytaitojen soveltamista. Päättelytehtävät voivat olla myös osoituksia, joissa tulee perustella jonkin matemaattisen menetelmän tai lausekkeen paikkansapitävyys.

Tehtäväkategoriat muotoutuivat osin Kilpatrickin ym. (2001) matemaattisen osaamisen malliin pohjautuen. Esimerkkien ja niiden edustamien tehtävätyyppien kognitiivisten ominaisuuksien tarkastelu tähän malliin pohjautuen voisi olla perusteltua, sillä nyt muodostetut tehtäväkategoriat ja matemaattisen osaamisen piirteet ovat toisiinsa kiinteässä yhteydessä. Kilpatrickin ym. malli ei kuitenkaan ota suorasti kantaa kognitiivisen alueen jaotteluun, joten tältä osin luokittelusysteemiin on etsittävä vaikutteita muualta.

4.2.2 Esimerkkien ja tehtävien kognitiivinen alue

Tehtävien luokittelussa kognitiivinen alue on yleensä jaettu kolmeen osaan (vrt. Joutsenlahti 2005, 120–124; OECD 2013; Mullis, Martin, Ruddock, O'Sullivan & Preuschoff 2009). Tässä tutkimuksessa jatketaan tämän konvention viitoittamalla tiellä, jotta analyysin tuloksia voidaan heijastella aiempiin tutkimuksiin. Kognitiivisen alueen taksonomia perustuu suurelta osin kansainväliseen TIMSS-tutkimukseen (Trends in international mathematics and science study). Kognitiiviset alueet (domains) olivat vuoden 2011 viitekehyksessä: tietäminen, soveltaminen ja päättely (Mullis ym. 2009, 40–46). Taulukossa 1 on esitetty näihin alueisiin liittyviä toimintoja.

Taulukko 1. Kognitiivisiin alueisiin liittyvät toiminnot (Mullis ym. 2009, 40–46).

Kognitiivinen alue	Tietäminen	Soveltaminen	Päättely
Alueessa ilmenevät ajattelutoiminnot	▪ Mieleen palauttaminen ▪ Tunnistaminen ▪ Laskeminen ▪ Tiedonhaku ▪ Mittaaminen ▪ Luokittaminen/ järjestäminen	▪ Valikointi ▪ Esittäminen ▪ Mallintaminen ▪ Toteuttaminen ▪ Rutiiniongelmien ratkaiseminen	▪ Analysointi ▪ Yleistäminen ▪ Integrointi/ syntetisointi ▪ Perusteleminen ▪ Ei-rutiini ongelmanratkaisu

Tietäminen (knowing) liittyy kognitiivisena alueena matemaattisiin perusfaktoihin, konventioihin, käsitteisiin, proseduureihin ja mieleen palauttamiseen. Matematiikan hyödyntäminen riippuu tietorakenteen kehittyneisyydestä ja käsitteiden tuntemisesta. Käsitteellinen tieto on helposti hyödynnettävissä, kun se on strukturoitunutta ja muodostaa yhteyksiä eri käsitteiden välille. Toisaalta proseduurit muodostavat linkin perustietämyksen ja rutiiniongelmien välille. Yksilö ei voi hyödyntää vuorovaikutusta ympäristönsä kanssa, mikäli matemaattisten konventioiden ja perusfaktojen tuntemisessa on puutteita, joten niiden tehtävä on olla ajattelun välineitä ja mahdollistajia. (Mt., 40–46.)

Soveltamisesta (applying) on kyse, kun ongelma edellyttää matemaattisen esityksen luomista tietoa, faktoja, taitoja, proseduureja tai ymmärrystä soveltamalla. Rutiiniongelmien ratkaiseminen on siten yksi keskeisimmistä toiminnoista tällä kognitiivisella alueella. Tiettyjen menetelmien tai tekniikoiden soveltaminen sekä faktojen, periaatteiden ja proseduurien valikointi liittyy myös keskeisesti rutiiniongelmien ratkaisemiseen. Rutiiniongelmissa sovellettavat faktat, periaatteet ja proseduurit ovat ratkaisijalle ennestään tuttuja. (Mt., 40–46.)

Päättely (reasoning) on kolmas kognitiivinen alue. Se vaatii kykyä ajatella loogisesti ja systemaattisesti. Intuitiivinen, induktiivinen ja deduktiivinen päättely säännönmukaisuuksien tai oletusten ja sääntöjen perusteella on siten ominaista tämän alueen ajattelulle. Tällaisia ajattelutaitoja tarvitaan rutinoitumattomissa ongelmissa, jotka ovat kognitiivisesti vaativampia kuin rutiiniongelmat, vaikka myös niiden ratkaisussa esiintyvät tiedot ja taidot voivat olla aiemmin opittuja. Rutinoitumaton ongelma saattaa esiintyä uudenlaisessa kontekstissa tai se muodostaa kompleksisen kokonaisuuden. Se ei kuitenkaan tarkoita, ettei tällainen ongelma voisi olla puhtaasti matemaattinen. Ratkaisu on tyypillisesti useita välivaiheita vaativa ja mahdollisesti ymmärrystä muulta kuin matematiikan alalta integroiva. Päättelemisen alueeseen kuuluu myös havaintojen ja otaksumien tekeminen sekä tulosten perusteleminen. (Mullis ym. 2009, 40–46.)

Taulukko 2. Kognitiiviset alueet ja esimerkkejä tehtävänannoista. Tehtävien ratkaisijaksi ajatellaan näissä esimerkeissä peruskoulun suorittanutta.

Kognitiivinen alue	Esimerkki tehtävänannosta
Tietäminen	Mitä tarkoittaa $f(x) = y$?
Soveltaminen	Määritä funktion $f(x) = x^2 - 121$ nollakohdat laskemalla.
Päättely	Päättele funktion $3x^2 - 6$ pienin arvo.

Taulukossa 2 on esitetty esimerkinomaisesti, mitkä tehtävänannot luokitettaisiin yläkoulun matematiikassa eri kognitiivisiin alueisiin. Huomattava seikka on, että ratkaisijan aiemmat tiedot määrittävät hyvin paljon mille kognitiiviselle alueelle ongelma kuuluu. Taulukon 2 päättelyesimerkki voisi kuulua lukiossa soveltamisen alueeseen, sillä funktion ääriarvojen laskeminen on tällöin jo usein rutiiniongelma.

4.2.3 Esimerkkien prosessit: modulaarisuus ja molaarisuus

Esimerkkien muotoilua koskevassa analyysissä erotetaan kaksi suuntausta, jotka eroavat esimerkkitehtävien mallintaman tehtävänratkaisun prosessin suhteen. Perinteisesti esimerkit muotoillaan tavalla, jossa tehtävänannon strukturaaliset ominaisuudet määrittävät ongelman kategorian ja ratkaisu perustuu ikään kuin reseptiin, jolla vastaavat ongelmat ratkeavat aina: vain muuttujien arvot vaihtelevat. Oppimistulokset perustuvat näiden ongelmakategorioiden omaksumiseen ja siirtoon uusiin yhteyksiin. (Van Gog ym. 2004, 87–88.) Ongelmien kategoriat ja ratkaisujen prosessit ovat tällöin esimerkkien pääasiallinen analysoitava yksikkö, jota ei pilkota sen enempää (Gerjets, Scheiter & Catrambone, 2006, 105). Nämä esimerkkien molaariset prosessit liittyvät läheisesti kaavakeskeiseen opetukseen muun muassa fysiikan opiskelussa. Vastaavasti matematiikassa molaariset esimerkit sisältävät useiden välivaiheiden tiivistyksiä yksittäisiksi kaavoiksi. Molaarinen ratkaisuprosessi sisältää tyypillisesti neljä vaihetta: tehtävän piirteiden tunnistaminen, kaavan soveltaminen, arvojen sijoittaminen ja lopputuloksen laskeminen. (Mt., 105–106.)

Esimerkkien luonnollista kognitiivista kuormitusta vähentävät modulaariset esimerkit keskittyvät yksittäisiin strukturaalisiin ongelman ominaisuuksiin ja yksittäisiin välivaiheisiin, jotka esitetään tarkemmin kuin ongelmakategorioiden tapauksessa (mt., 105). Tällä orientaatiolla voi olla merkittäviä hyötyjä etenkin, kun modulaarisia esimerkkejä käytetään opetuksessa, jossa oppijat eivät ole muodostaneet opiskeltavasta asiasta vahvaa skemaattista tietopohjaa. Mahdollisia syitä modulaaristen esimerkkien vähäiseen määrään oppimateriaaleissa saattaa olla se, että ne ilmentävät ajatusprosesseja, joita asiantuntijat eivät käytä ongelmia ratkaistessaan. Asiantuntijoiden ongelmanratkaisu perustuu suurelta osin molaariseen lähestymistapaan. Luonnollisen kuormituksen väheneminen modulaarisessa esityksessä hyödyttää noviiseja, sillä vapautunut kognitiivinen kapasiteetti on mahdollista käyttää olennaiseen kuormitukseen. (Van Gog ym. 2004, 83–90.)

Molaaristen ja modulaaristen esimerkkien eroa on syytä havainnollistaa esimerkkien avulla. Eron havainnollistamiseksi samasta esimerkistä esitetään sekä molaarinen, että modulaarinen muotoilu taulukossa 3. Gerjets, Scheiter ja Catrambone (2006, 106) ovat esittäneet pinnallisesti erilaisen, mutta muuten analogisen, esimerkin modulaarisen ja molaarisen prosessin erosta.

Taulukko 3. Molaarisen ja modulaarisen esimerkin ero.

<table>
<tr><td colspan="2">Tehtävänanto:
Pekka valitsee vaatevarastostaan seitsemän paitaa ja arpoo viikon jokaiselle päivälle eri paidan. Hän tekee arvonnastaan veikkauksen koskien kolmen ensimmäisen päivän paitoja. Mikä on todennäköisyys, että hän veikkaa oikein kolmen ensimmäisen päivän paidat ja niiden järjestyksen?</td></tr>
<tr><th>Molaarinen ratkaisuprosessi</th><th>Modulaarinen ratkaisuprosessi</th></tr>
<tr><td>

Tunnista tehtävän piirteet:

Tässä tehtävässä on kyseessä permutaation erikoistapaus, josta käytetään myös nimeä variaatio. Tämän tyypin ongelmilla on kaksi tärkeää ominaisuutta: järjestyksellä on merkitystä ja valittuja kohteita ei voida korvata. Ratkaisun kannalta on siis merkitystä paitsi sillä mitkä kolme paitaa seitsemästä ovat ensimmäisten joukossa niin myös sillä missä järjestyksessä ne ovat. Paita voidaan valita vain yhdelle päivälle, joten jo valittuja paitoja ei korvata uusilla.

Sovella kaavaa:

Tämän tyyppisessä ongelmassa käytetään kaavaa:

$$\frac{n!}{(n-k)!}$$

, missä n on kaikkien paitojen määrä ja k oikein arvattavien paitojen lukumäärä.

Sijoita arvot:

Esimerkissä valitaan seitsemän paidan joukosta kolme, joten $n = 7$ ja $k = 3$. Näiden arvojen sijoittaminen variaatio-kaavaan tuottaa tulokseksi

$$\frac{7!}{(7-3)!} = 210$$

Erilaisia mahdollisuuksia valita kolme paitaa seitsemästä, kun järjestyksellä on väliä, on siis 210.

Laske todennäköisyys:

Todennäköisyys, että Pekan arvaus osuu oikeaan, on yksi 210:stä. Todennäköisyys on siis

$$\frac{1}{210}$$

</td><td>

1. tapauksen todennäköisyys

Todennäköisyyden päättelemiseksi tulee pohtia valittavia tapauksia ja mahdollisten valintojen lukumäärää. Tässä tapauksessa viikon ensimmäiselle päivälle valitaan yksi paita ja mahdollisia valintoja on seitsemän kappaletta. Todennäköisyys, että ensimmäisen päivän paita veikataan oikein, on näin ollen $1/_7$.

2. tapauksen todennäköisyys

Todennäköisyyden päättelemiseksi täytyy jälleen pohtia valittavia tapauksia ja mahdollisten valintojen lukumäärää. Valittavia paitoja on toiselle päivälle yksi kappale, mutta mahdollisten valintojen määrä on pienentynyt kuuteen, koska yksi paidoista valittiin ensimmäiseksi päiväksi. Todennäköisyys, että toisen päivän veikkaus osuu oikeaan, on näin ollen $1/_6$.

3. tapauksen todennäköisyys

Todennäköisyyden päättelemiseksi tulee jälleen pohtia valittavien määrää. Kolmannelle päivälle valitaan myös yksi paita. Mahdollisten valintojen määrä on pienentynyt viiteen, sillä paidoista on valittu jo ensimmäisen ja toisen päivän paidat. Todennäköisyys, että kolmannen päivän veikkaus osuu oikeaan, on $1/_5$.

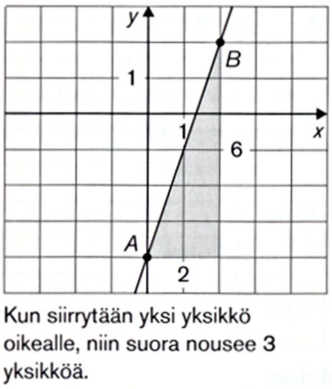
Laske koko tapahtuman todennäköisyys:

Kaikkien tapausten yhdistetty todennäköisyys saadaan, kun yksittäisten tapausten todennäköisyydet kerrotaan keskenään. Täten todennäköisyys, että kaikkien kolmen päivän paidat veikataan oikein, on

$$1/_7 \cdot 1/_6 \cdot 1/_5 = 1/_{210}$$

</td></tr>
</table>

Modulaarisia esimerkkien ratkaisuprosesseja voidaan pitää, ainakin noviisien tapauksessa, ymmärtämiseen tähtäävinä. Molaaristen esimerkkien opetuksellinen tavoite on sen sijaan painottunut enemmän ulkoaoppimiseen, sillä kategorisoidut ongelmat ja niihin liittyvät kaavat eivät välttämättä tarjoa oppijalle mahdollisuutta rakentaa skemaattista tietopohjaa yhtä tehokkaasti kuin modulaaristen prosessien avulla olisi mahdollista. Kuvassa 4 on esitetty Laskutaito 9 -oppikirjan esimerkki, joka on ratkaisuprosessiltaan modulaarinen.



Esimerkki 1

Suora kulkee pisteiden $A(0, -4)$ ja $B(2, 2)$ kautta. Laske suoran kulmakerroin k.

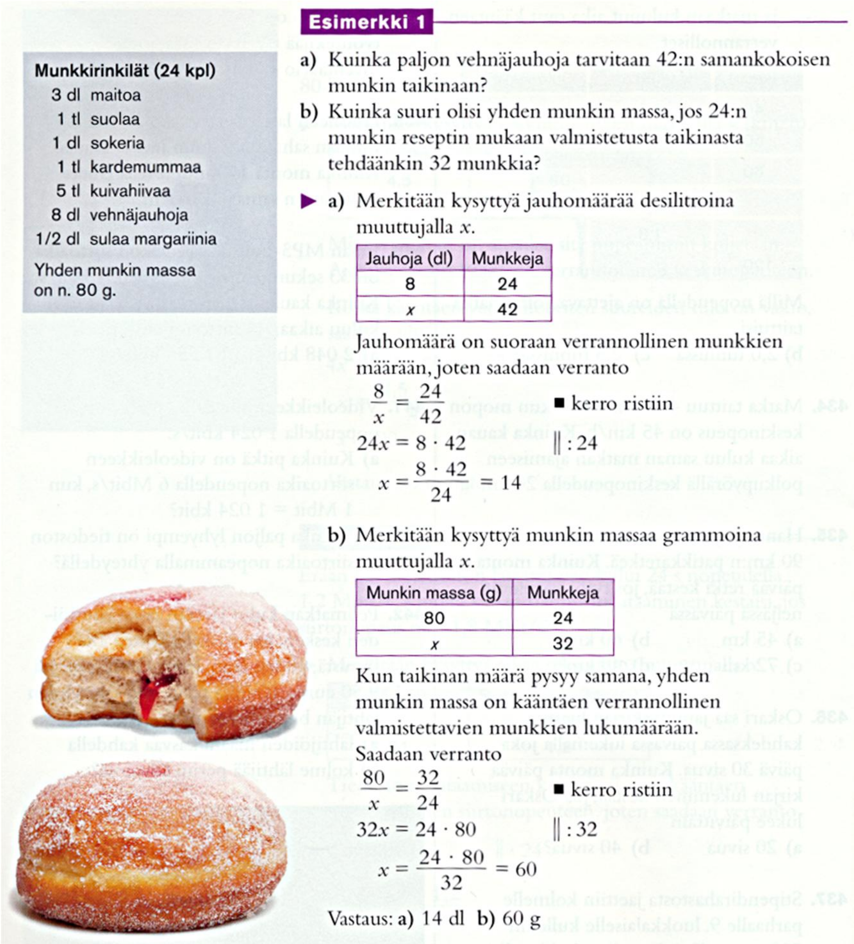
▶ Siirryttäessä pisteestä A pisteeseen B x-koordinaatti muuttuu arvosta 0 arvoon 2, joten pisteiden A ja B välinen vaakaerotus on $\Delta x = 2 - 0 = 2$.

Vastaavasti y-koordinaatti muuttuu arvosta -4 arvoon 2, joten pisteiden A ja B välinen pystyerotus on $\Delta y = 2 - (-4) = 6$.

Suoran kulmakerroin on $k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{6}{2} = 3$.

Kuva 4. Laskutaito 9 -oppikirjan esimerkki, jonka ratkaisuprosessi on modulaarinen (Laurinolli, Lindroos-Heinänen, Luoma-aho, Sankilampi, Talvitie & Vähä-Vahe 2013, 78).

Molaarisen esimerkin havainnollistus (kuva 5) on poimittu myös Laskutaito 9 -oppikirjasta. Molaarisen esimerkin a)- ja b)-kohdista voidaan havaita samanlaiset tehtävänratkaisun vaiheet kuin taulukossa 3 esitetyssä molaarisessa esimerkissä: tunnista tehtävän piirteet, sovella kaavaa, sijoita arvot ja tulkitse vastaus.



Esimerkki 1

Munkkirinkilät (24 kpl)
3 dl maitoa
1 tl suolaa
1 dl sokeria
1 tl kardemummaa
5 tl kuivahiivaa
8 dl vehnäjauhoja
1/2 dl sulaa margariinia
Yhden munkin massa on n. 80 g.

a) Kuinka paljon vehnäjauhoja tarvitaan 42:n samankokoisen munkin taikinaan?
b) Kuinka suuri olisi yhden munkin massa, jos 24:n munkin reseptin mukaan valmistetusta taikinasta tehdäänkin 32 munkkia?

▶ a) Merkitään kysyttyä jauhomäärää desilitroina muuttujalla x.

Jauhoja (dl)	Munkkeja
8	24
x	42

Jauhomäärä on suoraan verrannollinen munkkien määrään, joten saadaan verranto

$$\frac{8}{x} = \frac{24}{42} \quad \blacksquare \text{ kerro ristiin}$$
$$24x = 8 \cdot 42 \quad \| :24$$
$$x = \frac{8 \cdot 42}{24} = 14$$

b) Merkitään kysyttyä munkin massaa grammoina muuttujalla x.

Munkin massa (g)	Munkkeja
80	24
x	32

Kun taikinan määrä pysyy samana, yhden munkin massa on kääntäen verrannollinen valmistettavien munkkien lukumäärään. Saadaan verranto

$$\frac{80}{x} = \frac{32}{24} \quad \blacksquare \text{ kerro ristiin}$$
$$32x = 24 \cdot 80 \quad \| :32$$
$$x = \frac{24 \cdot 80}{32} = 60$$

Vastaus: a) 14 dl b) 60 g

Kuva 5. Laskutaito 9 -oppikirjan esimerkki, jonka ratkaisuprosessi on molaarinen (Laurinolli ym. 2013, 98).

Esimerkit vaikuttavat oletettavasti siihen, miten oppija lähestyy kohtaamiaan matemaattisia ongelmia. Tehtävät voivat myös johdattaa oppijaa kategorisoimaan ongelmatilanteita molaaristen esimerkkien tavalla. Esimerkki tällaisesta tehtävänannosta on kuvassa 6.

450. Auton nopeusmittarin näyttämä nopeus ja todellinen nopeus ovat suoraan verrannolliset. Ajonopeuden tarkistuspiste ilmoitti auton todelliseksi nopeudeksi 76 km/h, vaikka auton matkamittari näytti nopeudeksi 80 km/h.
a) Mikä on matkamittarin näyttö, kun todellinen nopeus on 100 km/h?
b) Mikä on todellinen nopeus, kun matkamittari näyttää 90 km/h?

Kuva 6. Tehtävä, jonka muotoilu kannustaa Laskutaito 9:ssä molaariseen ratkaisuprosessiin. (Laurinolli ym. 2013, 99).

Kuvassa 6 esitetyssä tehtävänannossa ensimmäinen lause vihjaa käyttämään suoraan verrannollisuutta tehtävän ratkaisun periaatteena. Oppija luultavasti tukeutuu tällöin samassa kappaleessa esitettyyn ratkaisuprosessiin, jolla suoraan verrannollisiin suureisiin liittyvät ongelmat on ratkaistu. Ratkaisuprosessi tulee toiston kautta tutuksi ja oppija harjaantuu näkemään kategorisesti vastaavia ongelmia.

4.2.4 Esimerkkien analoginen suhde harjoitustehtäviin

Oppikirjoissa esiintyvien esimerkkien ja harjoitustehtävien välisen analogian analysointi tehdään luvussa 3.4 muodostetun teoreettisen ymmärryksen perusteella. Analyysin selkeyttämiseksi on mielekästä pelkistää ymmärrystä analogioiden muodostumisesta luokittelun sallivaan kategorisointisysteemiin. Chen (2002) on osoittanut proseduraalisen samanlaisuuden eroavan pinnallisesta ja strukturaalisesta samanlaisuudesta, joten hän on lisännyt tämän ulottuvuuden perinteiseen jaotteluun. Saifaddin (2011, 140–142) havaitsi tutkimuksessaan, että proseduraalisen samanlaisuuden eri tasot (periaate, strategia ja proseduuri) kuitenkin sisältävät yleensä tasolle ominaisen määrän strukturaalisia ja pinnallisia samanlaisuuksia. Proseduraalisen samanlaisuuden kolme alatasoa integroivat näin ollen Chenin (2002) mallin ylätason käsitteitä, joten on mielekästä rajoittaa luokittelu proseduraaliseen samanlaisuuteen ja sen kolmeen alatasoon.

Periaatteen samanlaisuus tarkoittaa tehtävän ja esimerkin välisen analogian kannalta lähinnä mahdollisuutta valikoivaan enkoodaukseen, sillä esimerkin sisältämä informaatio on tehtävän ratkaisemisen kannalta niukkaa. Valikoivan enkoodauksen avulla integroidaan tällöin ainoastaan pinnallisia ominaisuuksia. Strateginen samanlaisuus on periaatetta korkeampitasoisempaa, sillä pinnallisten ominaisuuksien lisäksi strukturaalisten suhteiden välisiä analogioita on mahdollista muotoilla. Strateginen samanlaisuus siis auttaa tehtävän ratkaisemisessa tarjoamalla alustan skeemojen rakentamiseen tai strategioiden muotoiluun, mutta tarkkaa proseduuria esimerkki ei silti tarjoa tehtävän tai ongelman ratkaisemiseen. Proseduurin samanlaisuus sen sijaan tarkoittaa sekä pinnallisten, että strukturaalisten yhtymäkohtien runsautta tehtävien ja esimerkkien välillä. Analogian muotoilu on oletettavasti tällöin kaikista helpointa. (Saifaddin 2011, 140–142.)

Siirrännäisvaikutuksen kannalta proseduraaliseen samanlaisuuteen kuuluvien periaatteen, strategian tai proseduurin analogiataso ongelmien välillä tarkoittaa mahdollisuutta lähisiirtoon. Analyysissä halutaan erottaa nämä lähisiirron mahdollistavat analogiatasot, koska niiden välillä on havaittu selkeitä eroja analogioiden muodostamisen kannalta. Luokittelukategorioiden muodostamista näin ollen tukee myös se, että vastaavaa luokittelua on käytetty aiemmissa analogioita koskevissa tutkimuksissa ja sen avulla on pystytty osoittamaan samanlaisuuden eri tasojen yhteys analogioiden muotoiluun (tarkemmin esim. Saifaddin 2010). Yleensä analogioiden tutkimuksessa on keskitytty huolellisesti rakennettuihin tehtäviin, joiden avulla on tutkittu koehenkilöiden oppimistuloksia. Perinteisesti analogioiden muodostamisen mahdollisuuksia on varioitu näiden, tutkimuksia varten rakennettujen, tehtävien avulla. Valmiiden aineistojen analysointi sen sijaan on ollut analogioihin keskittyneissä tutkimuksissa vähäisempää.

Ei analogiaa -kategoriaan luokitetaan tehtävät, jotka eivät ole esimerkkien kanssa periaatteen, strategian tai proseduurin kannalta samanlaisia. Tällöin tehtävät ja esimerkit eivät jaa ensinnäkään proseduraalisen samanlaisuuden piirteitä. Toisaalta myös strukturaalisten ja pinnallisten samanlaisuuksien osuus on tällöin erittäin vähäinen. Otetaan esimerkki, jossa havainnollistetaan esimerkin ja tehtävän välisen analogian eri tasoja:

JOHDANTO-ESIMERKKI 1

Talon ulkoseiniä maalataan. Kun oli maalattu $40\ m^2$, maalia oli kulunut kuusi litraa. Kuinka paljon maalia tarvitaan lisää, jos maalaamatta on vielä

a) $120\ m^2$ **b)** $75\ m^2$?

RATKAISU

a) Koska maalattava ala on kolminkertainen, tarvitaan maaliakin kolminkertainen määrä eli 18 litraa.

	seinän pinta-ala (m^2)	maalin määrä (l)	
$3\cdot$	40	6	$3\cdot$
	120	18	

Tarvittavan maalin määrä muuttuu samassa suhteessa kuin seinän pinta-ala.

Pinta-alojen suhde $\frac{40}{120}$ on sama kuin maalin määrien suhde $\frac{6}{18}$.
Sanotaan, että maalin määrä ja seinän pinta-ala ovat suoraan verrannolliset.

b) Merkitään tarvittavan maalin määrää x ja kootaan tiedot taulukkoon:

seinän pinta-ala (m^2)	maalin määrä (l)
40	6
75	x

Koska seinän pinta-ala ja maalin määrä muuttuvat samassa suhteessa, niin $\frac{40}{75} = \frac{6}{x}$. Yhtälö on niin sanottu verrantoyhtälö, joka ratkaistaan symbolisella laskimella tai kertomalla ristiin.

$$\frac{40}{75} = \frac{6}{x}$$

$$40 \cdot x = 75 \cdot 6 \qquad |:40$$

$$x = \frac{75 \cdot 6}{40} \approx 11$$

Maalia tarvitaan siis noin 11 litraa.

VASTAUS **a)** 18 litraa **b)** 11 litraa

Kuva 7. Esimerkki Lyhyt matikka 1 -oppikirjasta (Aalto, Kangasaho, Kylliäinen, Metiäinen, Mäkinen & Tahvanainen 2013, 62–63).

Kuvassa 7 esitetyssä esimerkissä havainnollistetaan suoraan verrannollisia suureita. Tämän esimerkin a)-kohdassa suureiden väliset suhteet on helppo havaita, sillä maalattavan pinta-alan ja maalin määrää tarkastellaan kokonaislukusuhteessa. Saman kappaleen tehtäväsarjassa tehtävä 204 (kuva 8) on periaatetasolla analoginen, sillä tehtävässä käytetään toki samaa periaatetta, mutta ladatun tiedostokoon ja jäljellä olevan tiedostokoon välillä ei ole samanlaista kokonaislukusuhdetta. Tehtävässä 204 ratkaisija joutuu laskemaan jäljellä olevan tiedostokoon, toisin kuin esimerkissä, jossa maalamatta oleva pinta-ala on valmiiksi annettu. Tämän vuoksi tehtävä 204 on esimerkin a)-kohdan (kuva 7) kanssa analoginen periaatetasolla

204. Tiedostosta, jonka suuruus on 173 Mb, oli 5 minuutin ja 20 sekunnin kuluttua latautunut 48 Mb. Kuinka kauan tiedoston lataaminen vielä kestää?

Kuva 8. Lyhyt matikka 1 -oppikirjan tehtävä, joka on analoginen kuvassa 7 esitetyn esimerkin a)-kohdan kanssa proseduraalisen samanlaisuuden periaatetasolla. Tämä tehtävä on saman esimerkin b)-kohdan kanssa analoginen strategiatasolla. (Aalto ym. 2013, 67.)

Periaatetasoa syvempi analogia voidaan havaita tehtävän 204 (kuva 8) ja esimerkin b)-kohdan (kuva 7) välillä, sillä ne ovat analogisia strategiatasolla. Tämä luokitus johtuu siitä, että proseduurit eivät ole aivan toisiaan vastaavat.

212. Ritva luki 560-sivuisesta kirjasta ensimmäiset 140 sivua 3,5 tunnissa. Kuinka kauan jäljellä olevan osan lukeminen vie aikaa?

Kuva 9. Lyhyt matikka 1 -oppikirjan tehtävä, joka on analoginen kuvassa 7 esitetyn esimerkin a)-kohdan kanssa proseduraalisen samanlaisuuden proseduuritasolla (Aalto ym. 2013, 68).

Kuvassa 9 on esitetty tehtävä, jolla on syvimmän tason analogia esimerkin a)-kohdan (kuva 7) kanssa. Tehtävän 212 ja esimerkin a)-kohdan analogia ei ole proseduuri-luokitusten selkeimpiä, sillä ei ole välttämättä aivan yhtä todennäköistä, että lukion lyhyen matematiikan opiskelija tunnistaa 560 olevan 140:n monikerta kuin esimerkin tapauksessa, jossa 120 on kohtuullisen vaivatonta havaita 40:n monikerraksi. Mikäli tehtävän tekijä ei tunnista tätä tehtävää ja esimerkkiä yhdistävää suhdetta, on tehtävän ratkaisuprosessi erilainen ja analogia strategiatasoinen. Kuten huomataan, analogioiden luokittaminen vaatii tulkintojen ja oletusten tekemistä.

4.2.5 Avoimet ja suljetut esimerkit

Esimerkit voivat olla avoimia tai suljettuja niiden tehtävänannon (eli alkutilanteen) ja lopputuloksen kannalta. Alkutilanteesta lopputulokseen päätyminen voi myös tapahtua avoimien menetelmien kautta, mutta tämä kolmas tarkastelukohta on yleensä jätetty maininnan tasolle. (Sullivan, Warren, White 2000, 3–4; Pehkonen 1997, 7–9.) Joissakin oppikirja-analyyseissä on kuitenkin käytetty "puoliavoin"-luokkaa, kun tehtävän voi ratkaista usealla eri tavalla. (Vrt. Kautto & Riihiaho 2006, 34). Tässä tutkimuksessa ei tehdä vastaavaa luokitusta, koska avoimen tai suljetun luonteen tarkastelun katsotaan olevan riittävän kattava tutkimuksen tarkoituksiin. Avoin tai suljettu lähtötilanne ja lopputulos luovat kolme erityyppistä avointa esimerkkiä (tai kolme erityyppistä suljettua esimerkkiä). Nämä kolme eri luokkaa yhdistetään yhdeksi, joten avoin esimerkki voi sisältää ainoastaan toisen: avoimen lähtötilanteen tai lopputuloksen. Tätä havainnollistetaan taulukossa 4, jossa on annettu mahdollisia avoimia ja suljettuja tehtävänantoja.

Taulukko 4. Esimerkkejä tehtävänannoista, joiden lopputulos ja lähtötilanne ovat joko avoimia tai suljettuja. Sullivan ym. (2000, 3) ovat esittäneet esimerkkejä, jotka ovat analogisia tässä esitettyjen kanssa.

Lopputulos / **Lähtötilanne**	**Suljettu**	**Avoin**
Suljettu	Tee soppakauha opettajan tarjoamasta puukappaleesta	Tee mitä tahansa opettajan tarjoamasta puukappaleesta
Avoin	Tee soppakauha jostakin puuvaraston tarpeista	Tee jotakin hyödyllistä puuvaraston tarpeista

Avointen esimerkkien esiintyminen ei todennäköisesti ole opetussuunnitelmat (ks. edeltä luku 3.3.4) ja matematiikan opetuksen perinteet huomioon ottaen yleistä, joten rajoittuminen heikosti erittelevään kategorisointiin on perusteltua. Avoimia esimerkkejä voidaan tarkastella lähemmin analyysin jälkeen tässä ja kappaleessa 3.3.4 esitetyn avulla, koska todennäköinen vähäinen määrä sallii yksittäisten esimerkkien tarkastelun.

5 TUTKIMUSTEHTÄVÄ JA TUTKIMUSONGELMAT

Tutkimuksen tarkoitus on kuvata esimerkkien roolia nykyisissä matematiikan oppikirjoissa. Tähän tavoitteeseen on pyritty rakentamalla monipuolista teoriasidonnaista tarkastelunäkökulmaa tutkimuksen alkuosassa. Tutkimuksen mielenkiinto jakautuu paitsi esimerkkeihin, myös esimerkkien ja harjoitustehtävien väliseen analogiaan. Tarkoituksena on tehdä havaintoja oppikirjojen välittämän oppimiskäsityksen rakentumisesta esimerkkien roolin perusteella. Tällä näkökulmalla halutaan avartaa oppimateriaaleihin liittyvää tutkimusta, sillä perinteisesti kirja-analyysit ovat keskittyneet materiaalien ulkoisiin seikkoihin (kuviin, asetteluun, semantiikkaan) (ks. esim. Hannus 1996), tiettyjen teemojen esiintymiseen (kapitalismi, sukupuoli) tai asiasisältöihin teorianmuodostuksen tai harjoitustehtävien avulla (ks. esim. Perkkilä 1998). Esimerkkien asema oppikirjoissa on sen sijaan jäänyt vähemmälle huomiolle. Luultavasti vähäinen huomio johtuu siitä, että esimerkkien käyttö on lisääntynyt ja monipuolistunut oppikirjoissa vasta viime vuosikymmeninä (Inkeroinen & Mattila 2008, 50). Oppikirjat ovat opettajanoppaiden ohella tärkein suomalaisen opettajan opetusta ohjaava tekijä, joten materiaalitutkimuksella on merkittävä asema koulutuksemme kehittämisen kannalta (Patrikainen 2012, 83).

Tutkimuksessa rajoitutaan oppikirjojen aiheisiin, jotka koskevat funktioita. Tämän aiheen käsittelyyn perehdytään niin yläkoulun kuin lukionkin oppikirjoissa. Oppimisen rakentumista voidaan näin tarkastella uuden aiheen esittelystä syventävämpään lähestymistapaan asti. Oppimisen eri vaiheissa tehdyt didaktiset ratkaisut voidaan siten ottaa tarkastelun kohteiksi.

Tutkimuksen päämäärä muotoiltiin kolmen tutkimuskysymyksen avulla. Näihin kolmeen pääkysymykseen vastaamiseksi kehiteltiin tarkennettuja alakysymyksiä, joita muotoutui lopulta yhdeksän kappaletta. Tutkimuksessa keskitytään ensisijaisesti vastaamaan alakysymyksiin, jotka auttavat yhdessä vastaamaan pääkysymyksiin. Useimpia tutkimuskysymyksiä tarkennettiin tutkimusprosessin aikana. Tutkimuskysymykset ovat:

1. Millaisia oppikirjojen funktioihin liittyvät esimerkit ovat yläkoulussa ja lukiossa?

1.1 Millä tavoin esimerkkitehtävien ja -ongelmien kognitiivinen taso tulee ilmi oppikirjoissa?

1.2 Miten oppikirjat tuovat esille erilaisia tehtävätyyppejä esimerkeissään?

1.3 Millä tavoin esimerkkitehtävät jakautuvat molaaristen ja modulaaristen prosessien osalta?

1.4 Miten esimerkit tuovat esille avoimia ja suljettuja tehtäviä?

2. Miten oppikirjat hyödyntävät funktioihin liittyviä esimerkkejä analogioiden tekemisen lähteinä harjoitustehtävien kannalta?

2.1 Miten analogiat esiintyvät oppikirjojen esimerkkien ja harjoitustehtävien välillä?

2.2 Millä tavoin esimerkkien ja harjoitustehtävien proseduraalinen samanlaisuus ilmenee oppikirjoissa?

3. Miten oppikirjojen funktioihin liittyvät esimerkit eroavat toisistaan yläkoulussa, lukion lyhyessä ja lukion pitkässä matematiikassa?

3.1 Miten esimerkit eroavat toisistaan kognitiivisen kompleksisuuden, prosessien tai tehtävätyyppien kannalta?

3.2 Minkälaisia eroja on esimerkkien määrissä?

3.3 Miten analogioita hyödynnetään oppimateriaaleissa?

6 TUTKIMUSMENETELMÄT JA TUTKIMUKSEN TOTEUTUS

Tutkijalla itsellään ja hänen esiymmärryksellään tutkimuksen kohteesta on merkittävä rooli laadullisen tutkimusprosessin kulkuun. Tutkimusmenetelmien selvittäminen on olennaista, sillä tehdyillä valinnoilla on yhteys aineiston käsittelyyn ja lopulta tutkimukseen kokonaisuutena. Varsinkin tutkimuksen alkuvaiheissa tutkija joutuu tekemään valintoja, jotka vaikuttavat koko prosessiin: mitä halutaan tutkia, mitä tutkimuksella tavoitellaan, millaisia taustafilosofisia sitoumuksia tehdään ja mihin teoreettiseen taustaan nojaudutaan. Laadullisessa tutkimuksessa kaiken ei tarvitse kuitenkaan olla lukittua valintojen tekemisen jälkeen, vaan muun muassa tutkimuskysymysten tarkentaminen kuuluu asteittaisen ymmärryksen myötä tehtäviin korjausliikkeisiin. (Hirsijärvi, Remes & Sajavaara 2009, 123–124.)

Tutkimusote ja menetelmälliset ratkaisut vaikuttavat tiedostamattakin tutkimuksen kulkuun, joten niiden selvittäminen on tutkimuksen luotettavuuden kannalta olennaista (Hirsijärvi ym. 2009, 125–129). Tutkimusstrategia tässä tutkimuksessa on pääasiassa laadullinen eli kvalitatiivinen, mutta myös määrällisiä eli kvantitatiivisia piirteitä esiintyy osana tutkimusta. Tutkimuksen menetelmälliset ratkaisut pohjautuvat teoriasidonnaisen sisällönanalyysin keinoihin. Tavoitteena on kuvata ja ymmärtää esimerkkien roolia matematiikan nykyisissä oppimateriaaleissa – ei niinkään selittää esimerkkien yhteyttä oppimisen tehokkuuteen, mielekkyyteen tai muihin vastaaviin näkökohtiin. Nämä lähtökohdat ovat ohjanneet muun muassa tutkimusongelmien muotoilua, mutta ne ovat vaikuttaneet tutkimukseen laajemminkin.

6.1 Tutkimuksen metodologiset perusteet

Tässä tutkimuksessa käytetään laadullisen ja määrällisen tutkimuksen perusanalyysimenetelmää – sisällönanalyysiä. Sisällönanalyysin keinoin voidaan tutkia käytännössä mitä tahansa kirjalliseen muotoon saatettua dokumenttia objektiivisesti ja systemaattisesti. Tavoitteena on yleensä järjestää aineisto tiiviiseen ja selkeään muotoon kadottamatta sen sisältämää informaatiota. Aineiston järjestäminen ja tiivistäminen eivät kuitenkaan yksistään kata tutkimuksen päämäärää. Tässä piileekin sisällönanalyysin keinoin toteutettujen tutkimusten yleinen kompastuskivi, sillä vasta analyysin jälkeen tehtävät johtopäätökset antavat tutkimukselle arvoa. Järjestetty aineisto ei vielä itsessään siis hyödytä tutkimuksellisia päämääriä. (Tuomi & Sarajärvi 2009, 91–120.)

Sisällönanalyysin lähestymistapa voi olla karkeasti ottaen joko induktiivinen tai deduktiivinen: tässä tutkimuksessa kallistutaan deduktiivisen sisällönanalyysin puoleen. Tuomi ja Sarajärvi (mt., 91–125) erottavat sisällönanalyysit toisistaan kuitenkin tätä hieman tarkemmin. He (mt., 91–125) jaottelevat sisällönanalyysin joko aineistolähtöiseksi, teoriaohjaavaksi tai teoriasidonnaiseksi. Teoriasidonnaisen analyysin lähestymistapa on hyvin usein luonnontieteissä käytetty. Siinä tutkimukselle luodaan ensin kehys valmiiden mallien, teorioiden ja ajattelutapojen avulla. Tutkittava ilmiö määritellään tämän kehyksen puitteissa, joten yleensä aiempaa tietoa koetellaan ja hyödynnetään uudessa ympäristössä. Aineiston käsittely teoriaosassa hahmoteltujen kategorioiden avulla on yleistä teoriasidonnaiselle sisällönanalyysille. (Mt., 91–125.)

Sisällönanalyysissä, yleisesti ottaen, on tärkeää keskittyä etukäteen määriteltyihin kiinnostuksen kohteisiin. Usein tutkimuksen aikana tutkija havaitsee muita mielenkiintoisia seikkoja, jotka voisivat johtaa tutkimusta sivupoluille. Selkeyden ja systemaattisuuden vuoksi tutkimuksen tarkoitus, tutkimuskysymykset ja tutkimustehtävä tulee olla linjassa raportoitujen havaintojen kanssa. Sisällönanalyyttinen tutkimus etenee yleensä lähtökohtien ollessa selvillä aineiston litteroinnin tai koodaamisen vaiheeseen. Tällöin merkitään kaikki kiinnostuksen kohteet ja kerätään ne erilleen muusta aineistosta. Tämän jälkeen aineisto joko luokitellaan, teemoitellaan tai tyypitellään. Luokitellusta aineistosta voidaan esittää taulukkoja, jolloin analyysin tulokset ovat selkeämmin näkyvillä. Viimeisessä vaiheessa analyysin tuloksia pyritään tulkitsemaan eli niiden perusteella kirjoitetaan yhteenveto. (Mt., 91–125.)

Tämä tutkimus pohjaa kategorioiden rakentamiseen ja luokitteluun, joten sisällönanalyysiin liittyy olennaisena osana kvantifioivia piirteitä. Määrällinen lähestymistapa auttaa varmentamaan aineiston tulkintaa, joten määrällisyys on tässä kohtaa yhteydessä tutkimuksen luotettavuuteen. Kvantifioiva kvalitatiivinen analyysi asettuu perinteisten laadullisten ja määrällisten tutkimusten välimaastoon. (Eskola & Suoranta 1998, 165–166.) Tutkimukseen ei tulisi näin ollen soveltaa yleistämisen periaatetta eikä luotettavuustestejä. Kvantifioinnilla on omat hyötynsä, sillä se selkeyttää laadullista tutkimusta määrällisen otteen avulla.

Luokittelukriteerien ja tulkintasääntöjen laadinta on olennainen osa kvantifioivaa kvalitatiivista analyysiä. Huolellisesti rakennettu luokittelusysteemi helpottaa analyysin tekoa tehden siitä vähemmän subjektiivista ja tulkinnanvaraista. Luokittelusysteemiin itseensä liittyy kuitenkin aina puntarointia yksityiskohtaisuuden ja luotettavuuden välillä. Jos luokittelusysteemi rakennetaan useammista kategorioista, saadaan luultavasti yksityiskohtaisempaa tietoa aineistosta, mutta samalla luokittelun luotettavuus ja yksikäsitteisyys yleensä heikkenee. Pienempi luokittelusysteemi taas toisaalta ei kerro kovinkaan paljoa aineistosta ja jotkin ilmiöt saattavat jäädä huomaamatta. (Eskola & Suoranta 1998, 167–168.)

Tehtävien luokittelussa myös tutkijan työtavoilla on merkitystä analyysin luotettavuuteen ja onnistumiseen. Aineiston luokittaminen kannattaa tehdä mahdollisimman tiiviissä aikataulussa, jotta luokittelukriteerit pysyvät samoina. Luokittelun toistaminen vaikuttaa myös analyysin luotettavuuteen, sillä eri luokittelukertojen avulla voidaan tehdä havaintoja luokittelun yksikäsitteisyydestä ja vähentää subjektiivisten tekijöiden osuutta luokituksiin. (Eskola & Suoranta 1998, 167–168.)

6.2 Tutkimuksen kohteet

Tutkimuksen kohteeksi valikoitui yhteensä kolme kirjasarjaa: yksi yläkoulusta sekä lukion lyhyestä ja pitkästä matematiikasta. Yläkoulussa on käytössä pääasiassa viittä eri oppikirjasarjaa. Näiden viiden kirjasarjan lisäksi muita kirjasarjoja käyttää ainoastaan 4,2 % oppilaista (suomen- ja ruotsinkielisistä oppilaista). Suosituin kirjasarja on Laskutaito 33 % osuudella ja toiseksi yleisin Kolmio 27 %:lla. (Hannula & Oksanen 2013, 270–272.) Nämä ovat selkeästi suosituimmat kirjasarjat yläkoulun matematiikassa. Tähän tutkimukseen valitaan Laskutaito-kirjasarja sen suosion perusteella. Analyysiin otetaan seitsemännen ja yhdeksännen luokan kirjat, koska ne sisältävät funktioon liittyviä aiheita.

Lyhyen matematiikan kirjasarjaksi valittiin Lyhyt matikka, koska sitä käytetään eniten (Kavonius 2013). Lyhyessä matematiikassa funktioon liittyvät aiheet esiintyvät ensimmäisessä, kolmannessa ja neljännessä kurssissa, joten näiden kurssien kirjat otetaan mukaan analyysiin.

Pitkän matematiikan kirjojen käytöstä ei löytynyt ajankohtaista tutkimusaineistoa, joten valinta jouduttiin suorittamaan hieman toisella tavalla. Kirjasarjojen suosion oletettiin korreloivan Internetissä myytävien käytettyjen kirjojen määrän kanssa. Tämä yhteys varmistettiin hakemalla lukion lyhyen matematiikan oppikirjojen myynti-ilmoituksia huuto.net -sivustolta. Lyhyt matikka -sarja oli selkeästi suosituin, joten myynti-ilmoitusten määrän ja kirjasarjojen osuuksien välillä oletettiin olevan jonkinlainen yhteys. Tämän jälkeen tutkittiin samalla sivustolla myynnissä olevia pitkän matematiikan kirjoja. Kaksi kirjasarjaa erottui myynti-ilmoitusten määrän perusteella: Pyramidi ja Pitkä matematiikka. Näistä kahdesta Pyramidi-sarjaa oli hieman enemmän myynnissä, joten se valittiin lopulta lukioissa oletettavasti eniten käytettynä kirjasarjana.

Kustantajien osalta lukion oppikirjoissa ei ole Suomessa kovin paljon valinnan mahdollisuuksia. Vuonna 2011 tehtyjen yrityskauppojen jälkeen pitkässä matematiikassa on käytännössä kaksi kustantajaa: SanomaPro ja Otava (Sanoma.com -sivusto 2011). Lyhyessä matematiikassa näiden kahden lisäksi Edita kustantaa Summa-sarjaa. Tässä tutkimuksessa olisi ollut mahdollista valita kirjasarjat myös eri kustantajilta, koska se olisi myös voinut antaa jonkinlaisen kokonaiskuvan oppikirjojen nykytilasta. Oppikirjojen tekijät eivät yleensä ole kuitenkaan samoja, vaikka kirjasarjat olisivat samalta kustantajalta, joten valintaperusteena kirjojen yleisyys kouluissa nähtiin mielekkäämpänä vaihtoehtona kuin valinta kustantajien perusteella.

Oppikirjoista analysoitiin ainoastaan oppitunneille tarkoitetut tehtäväsarjat. Lyhyt matikka -sarjassa tämä tarkoitti sitä, että "sarja II" otsikon jälkeisiä tehtäviä ei analysoitu, sillä kirjasarjan esipuheen mukaan niitä on tarkoitus valikoida kotitehtäviksi (ks. esim. Lyhyt matikka 1: Aalto ym. 2013, 2).

Kirjojen analyysissä päätettiin keskittyä funktiokäsitteeseen liittyviin aiheisiin, jotta aineiston kokoa saataisiin rajoitettua järkevän kokoiseksi. Analyysiin mukaan otettavien aiheiden valikoinnissa turvauduttiin peruskoulun ja lukion opetussuunnitelmien perusteisiin, kun kartoitettiin käsitteitä, jotka liittyvät funktioihin. Yläkoulusta analyysiin päätettiin ottaa mukaan kaikki funktioihin liittyvät aiheet. Lukiossa funktio esiintyy käsitteenä niin monissa yhteyksissä, että tarkasteluun otettavia aiheita päätettiin rajoittaa. Aiheiden valintaperusteeksi otettiin välitön yhteys yläkoulun matematiikkaan funktioon liittyvissä aiheissa. Näin ollen lukion aiheet, jotka selkeästi jatkavat peruskoulussa funktioista opittua otettiin mukaan analyysiin ja aiheet, jotka lukiossa pohjautuvat toisiin lukion kursseihin päätettiin jättää analyysin ulkopuolelle. Lukion funktioon liittyvistä aiheista karsittiin ainakin sellaisia keskeisiä sisältöjä, jotka liittyivät derivaattaan, trigonometrisiin funktioihin, logaritmifunktioihin tai juurifunktioihin. Taulukossa 5 on esitetty yläkoulun, lukion lyhyen ja lukion pitkän matematiikan keskeiset sisällöt, jotka lopulta päätettiin ottaa mukaan analyysiin. Samassa taulukossa myös havainnollistetaan aiheiden yhteyttä peruskoulun ja lukion matematiikan välillä.

Taulukko 5. Funktioon liittyvien aihekokonaisuuksien likimääräiset yhteydet yläkoulun ja lukion välillä. Lukion aihealueet on merkitty ryhmiksi 1–4, jotka toimivat vertailun perustana luokittelutulosten tarkastelussa. Yläkoulun aiheet, jotka nähdään ryhmiä vastaavina löytyvät taulukosta samalta riviltä.

<table>
<tr><th colspan="2">Yläkoulu</th><th colspan="2">Lukion lyhyt matematiikka</th><th colspan="2">Lukion pitkä matematiikka</th></tr>
<tr><th>Luokka</th><th>Aihe</th><th>Kurssi</th><th>Aihe</th><th>Kurssi</th><th>Aihe</th></tr>
<tr><td>7 & 9</td><td>Riippuvuuden havaitseminen ja sen esittäminen muuttujien avulla</td><td>1 & 3</td><td>Suureiden välinen lineaarinen riippuvuus

(Ryhmä 1)</td><td rowspan="3">1 & 8</td><td rowspan="3">Potenssifunktio (1. kurssi)

Eksponenttifunktio (1. kurssi)

Yhdistetty funktio

Käänteisfunktio

(Ryhmä 1)</td></tr>
<tr><td>7 & 9</td><td>Lukuparin esittäminen koordinaatistossa</td><td rowspan="3">1

3</td><td rowspan="3">Lineaarisen ja eksponentiaalisen mallin soveltaminen

Toisen asteen polynomifunktio

(Ryhmä 2)</td></tr>
<tr><td>7 & 9</td><td>Funktion käsite</td></tr>
<tr><td>9</td><td>Lineaarinen funktio</td><td>2</td><td>Polynomifunktio

(Ryhmä 2)</td></tr>
<tr><td>9</td><td>Yksinkertaisten funktioiden tulkitseminen ja niiden kuvaajien piirtäminen koordinaatistoon</td><td rowspan="2">4</td><td rowspan="2">Polynomifunktion merkin ja kulun tutkiminen

Polynomifunktion suurimman ja pienimmän arvon määrittäminen

(Ryhmä 3)</td><td rowspan="2">7</td><td rowspan="2">Funktion raja-arvo, jatkuvuus ja derivaatta

Polynomifunktion kulun tutkiminen ja ääriarvojen määrittäminen

(Ryhmä 3)</td></tr>
<tr><td>9</td><td>Funktiokuvaajan tutkimista: funktion nollakohta, suurin ja pienin arvo, kasvaminen ja väheneminen</td></tr>
<tr><td>9</td><td>Suoraan ja kääntäen verrannollisuus</td><td>1</td><td>Verrannollisuus

(Ryhmä 4)</td><td>1</td><td>Verrannollisuus

(Ryhmä 4)</td></tr>
</table>

Valitsemalla tarkasteluun ainoastaan funktioihin liittyviä aiheita, joilla on selkeä yhteys peruskoulun ja lukion välillä saadaan aikaan mielekäs vertailuasetelma. Näin saadaan kenties selvitettyä miten matematiikan opetuksen spiraalisen luonteen vaikutus näkyy oppikirjatasolla. Samalla voidaan tehdä mahdollisia huomioita koulutuksen nivelvaiheen ilmenemisestä oppimateriaaleissa. Analysoitujen kappaleiden tiedot löytyvät taulukkoon 5 merkittyjen ryhmien mukaan järjestettynä liitteistä 6 ja 7.

6.3 Aineiston analyysi ja tutkimuksen käytännön kulku

Oppikirjojen analysoinnissa otettiin huomioon useita eri ulottuvuuksia, joita on havainnollistettu aiemmin kuvassa 2 ja kappaleessa 4. Tehtävien ja analogioiden luokittelua harjoiteltiin ennen varsinaisia luokituksia, jotta luokitteluun saataisiin varmuutta ja yhtenäisyyttä. Sopivan luokittelupohjan rakentaminen Excelissä vaati myös kehittelyä etenkin analogioiden osalta. Luokittelussa nähtiin tässä vaiheessa kaksi mahdollista tapaa: kirjan kappale tai ulottuvuus kerrallaan. Luokitusten yhdenmukaisuuden takaamiseksi eri ulottuvuudet päätettiin käsitellä käyden läpi koko aineisto yksi ulottuvuus kerrallaan. Käytännössä esimerkit luokitettiin ensin avoimuuden, sitten tehtäväkategorian ja edelleen ratkaisuprosessin suhteen. Tämän jälkeen analysoitiin esimerkkien ja tehtävien välistä analogiaa.

Kaikissa luokituksissa otettiin huomioon tehtävien ja esimerkkien jakautuminen mahdollisiin alakohtiin. Jokainen eri esimerkki- tai tehtävänumerolla ollut tehtävä luokitettiin samanarvoisesti. Luokittelussa käytettiin vapaasti murtolukuja, jotta yhden tehtävän kokonaispainotus olisi aina tasan 1. Esimerkki, jossa oli esimerkiksi a-, b- ja c-kohdat, luokitettiin painokertoimella 1/3 alakohtaa kohden.

Analogioiden tarkastelussa esimerkkien alakohdat ja kokonaiset esimerkit nähtiin yhdenvertaisina, joten ne eivät vaikuttaneet painokertoimiin. Ainoastaan tehtävien alakohdat määräsivät painokertoimet analogioita tarkasteltaessa. Tämä nähtiin luokitusten analysoinnin ja tulkinnan kannalta järkevimpänä ratkaisuna. Analogioiden tarkastelussa oli tarkoitus saada tietoa tehtäväsarjojen rakentumisesta, joten sillä ei ollut merkitystä millainen analogian lähde oli painotukseltaan oppikirjassa.

Esimerkeissä esitetään toisinaan vaihtoehtoisia tapoja ratkaista tehtävä. Nämä vaihtoehtoiset tavat saattavat olla keskenään eri luokkiin kuuluvia. Eri ratkaisutapoja käsiteltiin kuten alakohtia yleensäkin. Näin esimerkit saatiin keskenään samanarvoisiksi tulosten käsittelyä ajatellen. Luokittelusysteemin yhdessä ulottuvuudessa eri ratkaisutavat eivät vaikuttaneet luokitukseen, sillä avoimuuden määritti ainoastaan tehtävänanto.

Analogioita tarkasteltaessa ongelmallista on mikäli yhteen tehtävään (tai sen alakohtaan) liittyy useita esimerkkejä, jotka muodostavat yhdessä toisiaan täydentävän analogisen suhteen esimerkkien ja tehtävän välille. Tähän ongelmaan törmätään kun esimerkkejä ja tehtäviä verrataan pareittain eikä esimerkiksi niin, että kaikki esimerkit otettaisiin huomioon yhtäaikaisesti. Harjoitusanalyysien perusteella arvioitiin, että oppikirjojen tehtävät liittyvät yleensä kiinteästi yhteen esimerkkiin. Näin ollen monien esimerkkien yhtäaikaisen, täydentävän, analogiasuhteen katsottiin olevan harvinainen tilanne eikä tätä tarvitsisi ottaa systemaattisesti huomioon luokittelussa.

Toinen asia, joka harjoitusluokittelun perusteella tuli ottaa huomioon, oli tehtävien alakohtien liittyminen aiempiin alakohtiin. Tässä oli kaksi vaihtoehtoa: alakohdan analoginen suhde määritettäisiin olettaen, että aiemman alakohdan tulos on valmiiksi annettu tai alakohtaa tarkasteltaisiin vastauksen tuottamiseen vaadittavan kokonaisen ratkaisuprosessin kannalta. Jälkimmäisessä tapauksessa esimerkiksi mekaaninen sijoitus aiemmin samassa tehtävässä muodostettuun lausekkeeseen luokitettaisiin ikään kuin sen tekeminen vaatisi myös lausekkeen muodostamista. Ensimmäisessä vaihtoehdossa puolestaan alakohta olisi luokitettu sen mukaan, että sen tekeminen vaatisi ainoastaan valmiiseen lausekkeeseen sijoittamisen. Toinen vaihtoehto, jossa tehtävien analogiasuhde arvioitiin koko ratkaisuprosessin kannalta, katsottiin mielekkäämmäksi. Luokittelussa korostettiin näin ollen paremmin ratkaisun kannalta olennaisia prosesseja. Toisaalta tämä ratkaisu saattaa jossakin määrin vääristää luokituksia, koska sama ratkaisuprosessi saatettiin näin ollen luokittaa useampaan kuin yhteen kertaan.

Luokittelutulosten koonti tehtiin Excelillä liitteiden 8–65 mukaisiin taulukoihin. Esimerkkien luokittelun tulokset koottiin kappaleittain ja edelleen opetustason (yläkoulu, lukion lyhyt ja pitkä matematiikka) mukaisesti. Analogioihin liittyviä luokittelutuloksia tarkasteltiin sekä painotukset huomioon ottaen että ilman painotuksia. Ilman painotuksia tehdyssä tarkastelussa jokainen alakohta arvioitiin samanarvoiseksi. Kokonaiset tehtävät, joissa ei ollut alakohtia, olivat tässä tarkastelussa samanarvoisia kuin yksittäiset alakohdat. Ilman painotuksia tehdyn tarkastelun oli tarkoitus ainoastaan näyttää mahdollisia analyysitulosten eroja, jotka syntyisivät painotusten huomioon ottamisesta.

7 TUTKIMUSTULOKSET

Tutkimuksen tulokset raportoidaan tässä kappaleessa tutkimuskysymysten avulla jäsennettynä. Kappale on jaettu kolmeen osaan tutkimuksen pääkysymysten mukaisesti ja nämä kolme kappaletta on edelleen jaettu alakysymyksiin vastaamiseksi. Ensimmäisessä osassa oppikirjojen esimerkkejä tarkastellaan koulutasojen mukaisesti eli yläkoulua, lukion lyhyttä ja pitkää matematiikkaa tarkastellaan omina kokonaisuuksinaan. Toisessa osassa eritellään esimerkkien ja tehtävien analogista suhdetta näillä koulutasoilla. Kolmannessa osassa puolestaan vertaillaan yläkoulun oppikirjoja lukion oppikirjoihin.

Taulukko 6. Luokitettujen esimerkkien ja tehtävien määrät.

	Kappaleet	Esimerkit	Esimerkkien alakohdat	Tehtävät	Tehtävien alakohdat	Analogiat
Laskutaito 7	5	8	23	40	121	526
Laskutaito 9	18	34	71	162	448	1926
Lyhyt matikka 1	7	23	40	71	134	820
Lyhyt matikka 3	7	28	46	68	134	909
Lyhyt matikka 4	4	11	15	39	61	248
Pyramidi 1	6	23	41	48	99	679
Pyramidi 2	3	3	5	14	48	195
Pyramidi 7	5	21	32	50	87	570
Pyramidi 8	2	10	13	24	38	247
Yht.	57	161	286	516	1170	6120

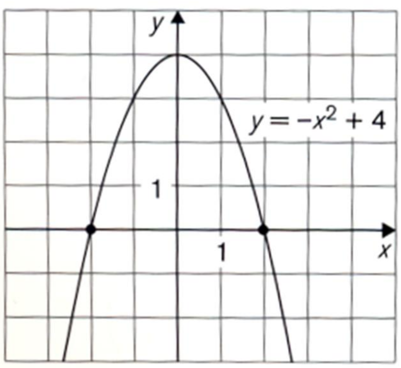
Analysoidut oppikirjat olivat yläkoulusta Laskutaito 7 ja 9, lukion lyhyestä matematiikasta Lyhyt matikka 1, 3 ja 4 sekä lukion pitkästä matematiikasta Pyramidi 1, 2, 7 ja 8. Taulukossa 6 on esitetty analysoiduista oppikirjoista poimittujen esimerkkien ja tehtävien sekä niiden alakohtien määrät. Kokonainen tehtävä, jossa ei ole alakohtia, on tässä laskettu yhdeksi "alakohdaksi". Analogioiden määrä on laskettu sen mukaan, kuinka monta esimerkki-tehtävävertailua kokonaisuudessaan tehtiin. Jos esimerkiksi yhdessä kappaleessa oli esimerkkejä alakohtineen neljä (esim. 1a, 1b, 1c ja 1d) ja tehtäviä vastaavasti alakohtineen 12 niin analogioiden määrä tässä kappaleessa olisi 48 ($= 4 \cdot 12$).

7.1 Oppikirjojen esimerkit funktiokäsitteeseen liittyvässä oppimateriaalissa

7.1.1 Kysymys 1.1: millä tavoin esimerkkitehtävien ja -ongelmien kognitiivinen taso tulee ilmi oppikirjoissa?

Esimerkkien kognitiivinen taso voitiin luokitella suoraan tehtäväkategorian perusteella (ks. kuva 2). Esimerkkejä ei siis luokitettu erikseen kognitiivisen tason mukaan, vaan luokitus on ikään kuin tiivistys tehtäväkategorioiden luokituksista. Tämän ratkaisun tarkoituksena oli parantaa tutkimuksen vertailtavuutta aiempiin tutkimuksiin, joissa vastaavaa jakoa kognitiivisen tason mukaan on käytetty. Tietämisen aluetta vastasivat tehtäväkategoriat käsitetieto, ominaisuustehtävät ja rutiinitehtävät. Soveltamisen aluetta puolestaan vastasivat rutiinitehtävät ja strategiatehtävät. Päättelyn alueeseen liitettiin sovellus- ja päättelytehtävät.

Laskutaito-sarjassa tietäminen ja soveltaminen olivat likipitäen yhtä paljon edustettuna. Tietämisen kognitiiviseen alueeseen luokitettiin 47,9 ja soveltamiseen alueeseen 51,3 prosenttia kaikista esimerkeistä. Päättelyn alueeseen kuului ainoastaan 0,8 prosenttia esimerkeistä. Soveltamisen alueeseen luokitetut esimerkit olivat usein kognitiivisesti yksinkertaisia, joten "soveltaminen" kuvaa näitä esimerkkejä melko huonosti. Tyypillinen soveltaminen-kategoriaan luokitettu esimerkki on esitetty kuvassa 10.



Esimerkki 2

Määritä funktion $f(x) = -x^2 + 4$ nollakohdat laskemalla ja tarkista vastaus kuvaajalta.

▶ Nollakohdat saadaan ratkaisemalla yhtälö $f(x) = 0$.

$$\begin{aligned} -x^2 + 4 &= 0 && \| -4 \\ -x^2 &= -4 && \| \cdot (-1) \\ x^2 &= 4 && \blacksquare \text{ päättele ratkaisut} \\ x &= 2 \text{ tai } x = -2 \end{aligned}$$

Vastaus: $x = 2$ ja $x = -2$

Kuva 10. Soveltamis-kategorian esimerkki Laskutaito 9:ssä (Laurinolli ym. 2013, 102).

Lyhyt matikka -sarjassa esimerkit olivat selkeästi eniten soveltamisen kognitiiviselta alueelta. Esimerkeistä 56,9 prosenttia kuului tähän kategoriaan. Kategoriaan tietäminen luokitettiin 24,5 ja päättelyyn 13,5 prosenttia kaikista esimerkeistä. Tietämistä edustaa muun muassa seuraava esimerkki (kuva 11) Lyhyt matikka 1 -oppikirjasta.

ESIMERKKI 3

Onko funktion kuvaaja paraabeli? Jos kuvaaja on paraabeli, niin aukeaako se ylöspäin vai alaspäin?

a) $f(x) = -x^2 + 6x - 3$

b) $g(x) = 5x - 1$

c) $h(x) = -x(1 - 3x)$

RATKAISU

a) Funktio $f(x) = -x^2 + 6x - 3$ on toisen asteen funktio, joten funktion kuvaaja on paraabeli. Toisen asteen termin $-x^2$ kerroin on -1. Koska kerroin on negatiivinen, funktion kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli.

b) Funktio $g(x) = 5x - 1$ ei ole toisen asteen funktio, joten sen kuvaaja ei ole paraabeli. (Funktio g on ensimmäisen asteen funktio, joten sen kuvaaja on suora.)

c) Sievennetään funktion h lauseketta.

$$h(x) = -x(1 - 3x) = -x + 3x^2 = 3x^2 - x$$

Funktio h on toisen asteen funktio, joten funktion kuvaaja on paraabeli. Toisen asteen termin $3x^2$ kerroin on 3. Koska kerroin on positiivinen, kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli.

VASTAUS

a) On, aukeaa alaspäin. **b)** Ei ole. **c)** On, aukeaa ylöspäin.

Kuva 11. Tietämis-kategorian esimerkki (Aalto ym. 2013, 79).

Pyramidi sisälsi analysoitujen esimerkkien osalta lähes yhtä paljon tietämisen ja soveltamisen alueen esimerkkejä. Kategoriaan tietäminen kuului 41,2 ja soveltamiseen puolestaan 37,7 prosenttia kaikista esimerkeistä. Päättelyn alueelle luokitettiin näin ollen 21,1 prosenttia esimerkeistä. Tyypillinen päättelyesimerkki on esitetty kuvassa 12.

Esimerkki 4 Osoita, että funktio $f(x) = x^2 \cdot (x+1)^3 + \left|\frac{x}{x+3}\right|$ on jatkuva.

Ratkaisu Todistus.

Funktio $f(x) = x^2 \cdot (x+1)^3 + \left|\frac{x}{x+3}\right|$ on määritelty, kun $x \neq -3$.

- Funktio $f_1(x) = x^2$ on potenssifunktiona jatkuva.
- Funktio $f_2(x) = (x+1)^3$ on polynomifunktiona jatkuva.
- Funktio $f_3(x) = x^2 \cdot (x+1)^3$ on kahden jatkuvan funktion f_1 ja f_2 tulona jatkuva.
- Funktio $f_4(x) = \frac{x}{x+3}$ on rationaalifunktiona jatkuva.
- Funktio $f_5(x) = \left|\frac{x}{x+3}\right|$ on jatkuvan funktion f_4 itseisarvona jatkuva.
- Funktio $f(x) = x^2 \cdot (x+1)^3 + \left|\frac{x}{x+3}\right|$ on jatkuvien funktioiden f_3 ja f_5 summana jatkuva. □

Kuva 12. Päättely-kategorian esimerkki Pyramidi 7 -oppikirjasta (Härkönen, Kontkanen, Lehtonen, Luosto & Ronkainen 2013, 71).

Päättelytehtävät olivat tyypillisesti todistuksia tai osoituksia. Pyramidissa niiden määrä esimerkeissä oli hieman suurempi loppupään kursseissa, mutta päättelyesimerkkejä oli myös ensimmäisessä kurssissa. Tarkastellaan seuraavaksi tarkemmin kognitiivisen alueen luokituksia kursseittain ja selvitetään miten funktiokäsitteeseen liittyvissä esimerkeissä voidaan havaita muutoksia yläkoulun, lukion lyhyen ja pitkän matematiikan aikana (taulukko 7).

Taulukko 7. Kognitiivisen alueen luokitusten osuudet kursseittain. Pyramidi 2:sta analysoitiin ainoastaan 3 kokonaista esimerkkiä, joten aineisto ei tältä osin ollut riittävä johtopäätösten tekemiseksi.

Kirja	Laskutaito		Lyhyt matikka			Pyramidi			
Kurssi	7	9	1	3	4	1	2	7	8
Tietäminen	41,3	49,5	26,7	32,3	0,0	65,2	33,3	26,2	20,0
Soveltaminen	58,8	49,5	54,5	58,1	59,1	19,6	33,3	54,8	45,0
Päättely	0,0	1,0	18,8	9,5	40,9	15,2	33,3	19,0	35,0
Yht.	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0

Yläkoulun oppikirjat Laskutaito 7 ja 9 eivät eroa merkittävästi esimerkkien kognitiivisen alueen kannalta. Seitsemännen luokan kirjassa soveltaminen oli hieman yleisempää kuin tietäminen esimerkkien kategorioissa. Yhdeksännen luokan kirjassa esimerkkien jakautuminen tietämisen ja soveltamisen kategorioihin oli puolestaan hyvin tasaista.

Lukion lyhyessä matematiikassa Lyhyt matikka -sarjassa syntyi eroja kurssien suhteen. Siinä missä ensimmäinen ja kolmas kurssi sisälsivät suurin piirtein samassa määrin tietämiseen ja soveltamiseen liittyviä esimerkkejä, neljäs kurssi poikkesi edellisistä kursseista selkeästi. Neljännessä kurssissa tietämiseen liittyviä esimerkkejä ei ollut ainuttakaan. Päättelyalue oli selkeästi yleisempi neljännessä kuin aiemmissa kursseissa.

Lukion pitkän matematiikan kirjasarja, Pyramidi, sisälsi selviä kehityssuuntia kurssien myötä. Tietäminen oli yleisin kategoria ensimmäisessä kurssissa, mutta sen osuus pieneni kurssien edetessä. Päättely puolestaan esiintyi useammin myöhempien kurssien esimerkeissä. Soveltamis-kategoria ei tässä tarkastelussa tuonut esille selkeitä lineaarisia kehityssuuntia, vaikka soveltaminen näytti yleistyvän kurssien edetessä.

7.1.2 Kysymys 1.2: miten oppikirjat tuovat esille erilaisia tehtävätyyppejä esimerkeissään?

Tehtäväkategorioihin luokitettiin esimerkkejä niiden mallintamien ratkaisuprosessien perusteella. Luokitusten tekemiseksi esimerkkejä tarkasteltiin niiden kontekstissa: luokitukseen vaikutti oppijoiden oletettu kehitystaso ja esimerkin opetuksellinen rooli kirjassa. Erityisesti kiinnitettiin huomiota esimerkkien esittämisen tarkoituksiin rutiininomaisten ja ei-rutiininomaisten tehtävien mallintajina. Mikäli samantyyppinen esimerkki toistettiin useammin kuin kerran, oli todennäköistä, että esimerkkien oli tarkoitus havainnollistaa rutiinitehtäviä. Tämä ei kuitenkaan ollut ensisijainen peruste luokitukselle, vaan luokitukset perustettiin luvussa 4.2.1 esitettyihin kategoriakuvauksiin.

Taulukko 8. Esimerkkien jakautuminen tehtäväkategorioihin.

Kirja	Laskutaito		Lyhyt matikka		Pyramidi	
	Summa [kpl]	Osuus [%]	Summa [kpl]	Osuus [%]	Summa [kpl]	Osuus [%]
Käsitetieto	1,2	2,8	3,4	5,6	2,0	3,5
Ominaisuus	11,4	27,1	5,6	9,1	20,5	36,0
Mekaaninen	7,6	18,1	6,1	9,9	1,0	1,8
Rutiini	19,2	45,7	25,5	41,1	17,3	30,3
Strategia	2,3	5,6	9,8	15,9	4,3	7,5
Sovellus	0,3	0,8	9,2	14,8	4,0	7,0
Päättely	0,0	0,0	2,3	3,8	8,0	14,0
Yht.	42,0	100,0	62,0	100,0	57,0	100,0

Taulukossa 8 on kootusti esitetty esimerkkien luokitukset tehtäväkategorioihin kirjasarjoittain. Kategorioiden summat ovat useissa tapauksissa desimaalilukuja, koska luokittelussa painotettiin esimerkkejä alakohtien määrän perusteella. Useissa tapauksissa esimerkit luokitettiin kahteen tai jopa kolmeen kategoriaan, jolloin käytettiin myös painotuksia.

Laskutaito-sarjassa yleisimmät esimerkkien kategoriat olivat rutiini-, ominaisuus- ja mekaaniset tehtävät. Muihin kategorioihin luokitettiin vain harvoja esimerkkejä. Ominaista Laskutaito-sarjalle oli, että esimerkit kuuluivat samassa kappaleessa samaan kategoriaan. Tämä voi johtua siitä, että kappaleiden opetuksellinen sisältö on hyvin yksityiskohtaista ja tarkennettua. Näin ollen joissakin kappaleissa opetustavoitteena voi olla mekaanisten taitojen opettaminen tai tiettyjen matemaattisten kohteiden ominaisuuksien omaksuminen. Esimerkiksi Laskutaito 7 -kirjassa kappale *30 Funktion arvo* on tällainen yhden kategorian kappale, jossa mekaaninen laskeminen on pääosassa. Oppimiskäsitysten kannalta yhteen tarkasti rajattuun taitoon tai proseduuriin keskittyneet kappaleet ilmentävät behavioristisia piirteitä.

Laskutaidossa rutiinitehtävien mallintaminen esimerkkien avulla on selkeästi yleisintä, sillä esimerkeistä 45,7 prosenttia kuuluu rutiinitehtävä-kategoriaan. Rutiinitehtävien määrässä on kuitenkin selkeä ero kurssien 7 ja 9 välillä (taulukko 9). Eroja syntyi myös mekaanisten esimerkkien osuuksissa, sillä niiden osuus on melkein puolet pienempi yhdeksännen luokan kirjassa kuin seitsemännen luokan kirjassa. Vastaavasti ominaisuustehtävien osuus on yhdeksännen luokan kirjassa kaksi kertaa suurempi kuin seitsemännellä luokalla.

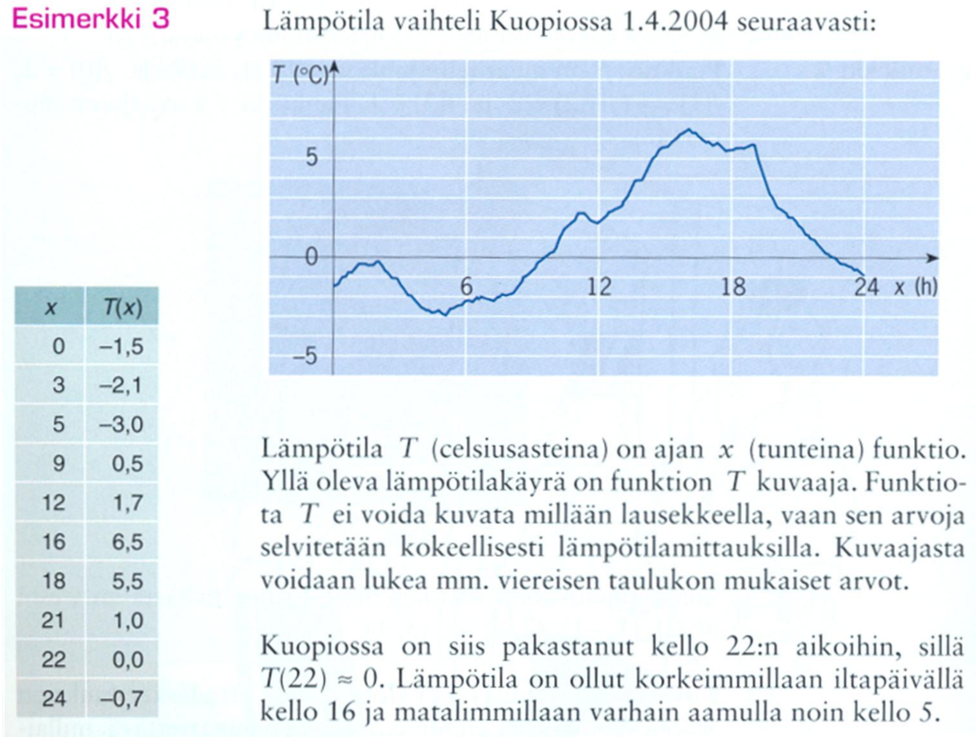
Taulukko 9. Tehtäväkategorioihin luokitettujen esimerkkien prosenttiosuudet analysoiduissa oppikirjoissa.

Kirja	Laskutaito		Lyhyt matikka			Pyramidi			
Kurssi	7	9	1	3	4	1	2	7	8
Käsitetieto	0,0	3,4	8,5	5,4	0,0	6,5	0,0	2,4	0,0
Ominaisuus	14,2	30,1	5,4	15,6	0,0	58,7	33,3	23,8	10,0
Mekaaninen	27,1	15,9	12,8	11,4	0,0	0,0	0,0	0,0	10,0
Rutiini	58,8	42,6	30,6	42,7	59,1	9,8	33,3	45,2	45,0
Strategia	0,0	6,9	23,9	15,5	0,0	9,8	0,0	9,5	0,0
Sovellus	0,0	1,0	17,4	9,5	22,7	8,7	33,3	4,8	0,0
Päättely	0,0	0,0	1,4	0,0	18,2	6,5	0,0	14,3	35,0
Yht.	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0

Taulukosta 8 voidaan edelleen tehdä havaintoja Lyhyt matikka -sarjan esimerkkien jakautumisesta tehtäväkategorioihin. Selkeästi yleisin kategoria on rutiinitehtävät, joihin luokitettiin 41,1 prosenttia esimerkeistä. Muiden kategorioiden osuudet olivat huomattavasti pienempiä. Strategia ja sovellustehtävät olivat seuraavaksi yleisimpiä noin 15 prosentin osuudella.

Lyhyt matikka -sarjan funktioihin liittyvät kappaleet sisälsivät kurssien edetessä yhä enemmän rutiinitehtäviä mallintavia esimerkkejä (taulukko 9). Neljäs kurssi sisälsi 11 esimerkkiä, joten useiden kategorioiden puuttuminen voi selittyä esimerkkien vähäisellä määrällä. Esimerkiksi strategiatehtävien osuus näytti vähenevän kurssien edetessä; neljännessä kurssissa ei enää ollut strategiatehtäviä esimerkkien joukossa. Sovellustehtävien osuus puolestaan oli kolmannessa kurssissa selkeästi kahta muuta kurssia pienempi. Päättelytehtävien osuus oli neljännessä kurssissa suurempi kuin ensimmäisessä ja kolmannessa kurssissa.

Pyramidi-sarjassa funktioihin liittyvissä esimerkeissä esiintyi eniten ominaisuus-, rutiini- ja päättelytehtäviä (taulukko 8). Ominaisuustehtävät olivat yleisimpiä 36 prosentin osuudella. Tähän jakaumaan vaikutti erityisesti esimerkkien esittäminen muodossa, jossa ei varsinaisesti mallinneta tiettyyn tehtävätyyppiin vastaamista. Pyramidi-sarjassa nimittäin monet esimerkit havainnollistivat oppimiskohteiden ominaisuuksia kuvassa 13 esitetyn esimerkin tavalla.



Esimerkki 3 Lämpötila vaihteli Kuopiossa 1.4.2004 seuraavasti:

x	$T(x)$
0	–1,5
3	–2,1
5	–3,0
9	0,5
12	1,7
16	6,5
18	5,5
21	1,0
22	0,0
24	–0,7

Lämpötila T (celsiusasteina) on ajan x (tunteina) funktio. Yllä oleva lämpötilakäyrä on funktion T kuvaaja. Funktiota T ei voida kuvata millään lausekkeella, vaan sen arvoja selvitetään kokeellisesti lämpötilamittauksilla. Kuvaajasta voidaan lukea mm. viereisen taulukon mukaiset arvot.

Kuopiossa on siis pakastanut kello 22:n aikoihin, sillä $T(22) \approx 0$. Lämpötila on ollut korkeimmillaan iltapäivällä kello 16 ja matalimmillaan varhain aamulla noin kello 5.

Kuva 13. Pyramidi 2 -oppikirjan esimerkki, joka on Pyramidille tunnusomaisesti muotoiltu eri tavalla kuin esimerkit yleensä (Härkönen, Kontkanen, Luosto, Ronkainen, Savolainen, Nurmi & Nurmiainen 2012, 122).

Ominaisuustehtävien jälkeen toisiksi yleisin tehtäväkategoria olivat rutiinitehtävät 30,3 prosentin osuudella. Muut kategoriat olivat Pyramidi-sarjan esimerkeissä selkeästi vähemmän edustettuina. Päättelytehtävät esiintyivät 14 prosentin osuudella, joten yhdessä nämä kolme kategoriaa kattoivat yli 80 prosenttia kaikista esimerkeistä. Taulukosta 9 havaitaan, että kurssien välillä oli kuitenkin selkeitä kehityssuuntia ja eroja esimerkkien kategorioiden yleisyyden suhteen.

Yleisin esimerkkien kategoria, ominaisuustehtävät, pieneni osuudeltaan hyvin johdonmukaisesti Pyramidissa kurssien edetessä. Karkeasti ottaen ominaisuustehtävien osuus puolittui aina seuraavassa kurssissa. Rutiinitehtävien osuus puolestaan kasvoi myöhemmissä kursseissa, jolloin seitsemännessä ja kahdeksannessa kurssissa osuus oli noin 45 prosenttia. Esimerkkien luokituksissa päättelytehtäviin on havaittavissa taulukon 9 perusteella myös selkeä johdonmukaisuus kurssien mukaisesti. Kahdeksannessa kurssissa päättelytehtävät ovat jo hyvin vahvasti edustettuna 35 prosentin osuudella. Kursseittain tehdyssä tarkastelussa Pyramidi 2:ssa ei ollut riittävästi esimerkkejä, sillä kahdessa kolmesta analyysiin poimitusta oppikirjan kappaleesta ei esitetty esimerkkejä.

7.1.3 Kysymys 1.3: millä tavoin esimerkkitehtävät jakautuvat molaaristen ja modulaaristen prosessien osalta?

Molaaristen ja modulaaristen esimerkkien osalta melko harvat esimerkit sopivat luokituksen kohteiksi. Luokitusta ei ole nimittäin mielekästä tehdä esimerkeistä, jotka eivät ole luonteeltaan ongelmatehtäviä. Monivaiheisen ratkaisuprosessin (tai edes sen mahdollisuuden) puuttuessa esimerkit luokitettiin epärelevantti-kategoriaan.

Taulukko 10. Ratkaisuprosessin kategorisointi funktioihin liittyvissä esimerkeissä.

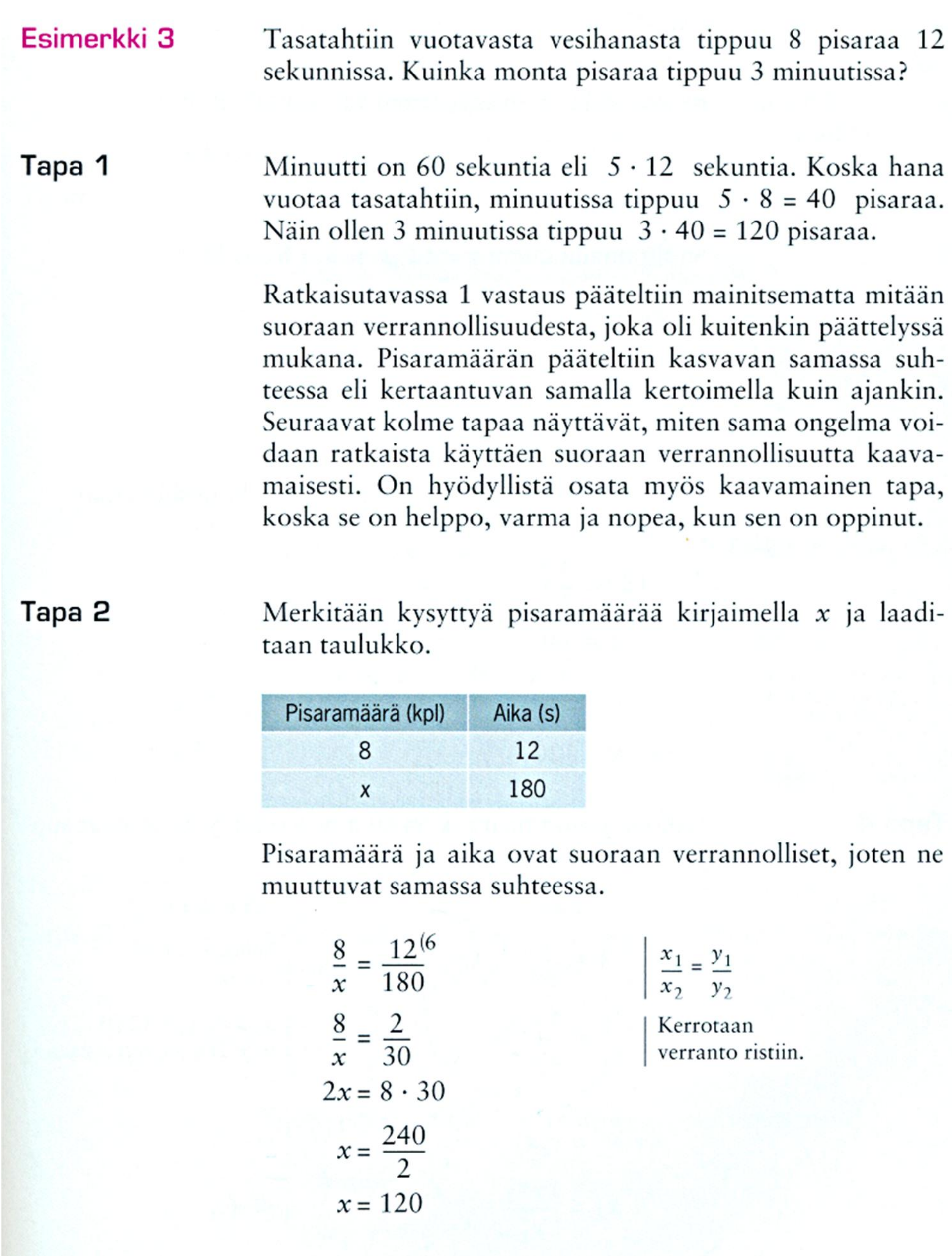
Kirja	Laskutaito		Lyhyt matikka		Pyramidi	
	Summa [kpl]	Osuus [%]	Summa [kpl]	Osuus [%]	Summa [kpl]	Osuus [%]
Molaarinen	5,5	13,1	16,7	26,9	11,3	19,9
Modulaarinen	7,8	18,7	11,5	18,5	1,0	1,8
Epärelevantti	28,7	68,3	33,8	54,6	44,7	78,4
Yht.	42,0	100,00	62,0	100,00	57,0	100,00

Taulukko 10 antaa käsityksen epärelevanttien esimerkkien suuresta osuudesta kaikissa kirjasarjoissa. Ratkaisuprosessien jakautumista modulaariseen ja molaariseen kategoriaan on kuitenkin mielekkäämpää tarkastella ainoastaan näiden kahden ominaisuuden suhteen. Taulukkoon 11 on koottu molaaristen ja modulaaristen esimerkkien osuudet kirjasarjoittain.

Taulukko 11. Ratkaisuprosessin molaarisen ja modulaarisen luonteen jakautuminen analysoiduissa kirjasarjoissa.

Kirja	Laskutaito		Lyhyt matikka		Pyramidi	
	Summa [kpl]	Osuus [%]	Summa [kpl]	Osuus [%]	Summa [kpl]	Osuus [%]
Molaarinen	5,5	41,3	16,7	59,2	11,3	91,9
Modulaarinen	7,8	58,8	11,5	40,8	1,0	8,1
Yht.	13,3	100,0	28,2	100,0	12,3	100,0

Laskutaidossa modulaaristen esimerkkien osuus (58,8 %) on hieman molaarisia esimerkkejä suurempi (41,3 %). Suhde on päinvastainen Lyhyt matikka -sarjassa, sillä molaaristen esimerkkien osuus (59,2 %) on näissä oppikirjoissa suurempi. Pyramidissa puolestaan molaariset esimerkit ovat hallitsevassa asemassa (91,9 %). Kirjasarjojen tarkastelu kursseittain ei ollut mielekästä, sillä useissa kirjoissa "relevanttien" esimerkkien vähäinen määrä ei antanut mahdollisuutta kurssien väliseen vertailuun.



Esimerkki 3 Tasatahtiin vuotavasta vesihanasta tippuu 8 pisaraa 12 sekunnissa. Kuinka monta pisaraa tippuu 3 minuutissa?

Tapa 1 Minuutti on 60 sekuntia eli $5 \cdot 12$ sekuntia. Koska hana vuotaa tasatahtiin, minuutissa tippuu $5 \cdot 8 = 40$ pisaraa. Näin ollen 3 minuutissa tippuu $3 \cdot 40 = 120$ pisaraa.

Ratkaisutavassa 1 vastaus pääteltiin mainitsematta mitään suoraan verrannollisuudesta, joka oli kuitenkin päättelyssä mukana. Pisaramäärän pääteltiin kasvavan samassa suhteessa eli kertaantuvan samalla kertoimella kuin ajankin. Seuraavat kolme tapaa näyttävät, miten sama ongelma voidaan ratkaista käyttäen suoraan verrannollisuutta kaavamaisesti. On hyödyllistä osata myös kaavamainen tapa, koska se on helppo, varma ja nopea, kun sen on oppinut.

Tapa 2 Merkitään kysyttyä pisaramäärää kirjaimella x ja laaditaan taulukko.

Pisaramäärä (kpl)	Aika (s)
8	12
x	180

Pisaramäärä ja aika ovat suoraan verrannolliset, joten ne muuttuvat samassa suhteessa.

$$\frac{8}{x} = \frac{12^{(6}}{180} \qquad \left| \; \frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} \right.$$

$$\frac{8}{x} = \frac{2}{30} \qquad \left| \; \text{Kerrotaan verranto ristiin.} \right.$$

$$2x = 8 \cdot 30$$

$$x = \frac{240}{2}$$

$$x = 120$$

Kuva 14. Modulaarinen esimerkki (tapa 1) ja molaarinen esimerkki (tapa 2) Pyramidi 1 -oppikirjasta (Härkönen, R., Kontkanen, P., Luosto, K., Ronkainen, A., Savolainen, S., Nurmi, J. & Nurmiainen, R. 2013, 61).

Kuvassa 14 esitetyssä Pyramidi 1 -oppikirjan esimerkissä voidaan tulkita ratkaisutapa 1:n jälkeisessä huomautuksessa viitattavan molaaristen prosessien hyötyihin. Selityksessä kannustetaan oppimaan "kaavamainen" tapa ratkaista verrannollisuustehtäviä. Saman esimerkin ratkaisutapa 2 onkin rakennettu molaariseksi. Huomattavaa on myös, että eri ratkaisutavat esitetään tässä järjestyksessä. Tapa 1 on nimittäin oppijalle, joka ei ole muodostanut verrannollisuuteen liittyvää skemaattista tietopohjaa, luultavasti mielekkäämpi lähestymistapa ongelmaan. Verrannollisuus on käsitteenä lukion pitkän matematiikan opiskelijalle ennestään tuttu yläkoulusta, joten modulaarisen ja molaarisen ratkaisutavan esittäminen on perusteltua tässä yhteydessä.

7.1.4 Kysymys 1.4: miten esimerkit tuovat esille avoimia ja suljettuja tehtäviä?

Kaikissa analysoiduissa kirjasarjoissa funktioihin liittyvät esimerkit ovat käytännössä kaikki suljettuja. Tämä käy ilmi taulukosta 12, johon on koottu avointen ja suljettujen esimerkkien määrät ja osuudet.

Taulukko 12. Avointen ja suljettujen esimerkkien luokitukset.

Kirja	**Laskutaito**		**Lyhyt matikka**		**Pyramidi**	
	Summa [kpl]	Osuus [%]	Summa [kpl]	Osuus [%]	Summa [kpl]	Osuus [%]
Suljettu	42,0	100,0	62,0	100,0	56,0	98,2
Avoin	0,0	0,0	0,0	0,0	1,0	1,8
Yht.	42,0	100,0	62,0	100,0	57,0	100,0

Ainoastaan yksi esimerkki Pyramidi 8 -kirjassa oli luonteeltaan avoin. Kuvassa 15 esitetty esimerkki luokitettiin avoimeksi, koska esimerkin tehtävänanto antaa vapauden keksiä mitkä tahansa sisä- ja ulkofunktiot, jotka toteuttavat annetun ehdon. Tehtävä ei näin ollen ole täysin avoin, koska alkutilanne on suljettu. Lopputulos sen sijaan on avoin.

Esimerkki 3 Anna neljä esimerkkiä sisäfunktioista s ja ulkofunktioista u, joille $f(x) = (u \circ s)(x)$, kun $f(x) = (x^3 + x)^4$.

Ratkaisu Sisä- ja ulkofunktioksi kelpaavat esimerkiksi

1 $s(x) = x^3 + x$ ja $u(x) = x^4$, koska

$$(u \circ s)(x) = u(s(x)) = u(x^3 + x) = (x^3 + x)^4 = f(x)$$

2 $s(x) = x$ ja $u(x) = (x^3 + x)^4$, koska

$$(u \circ s)(x) = u(s(x)) = u(x) = (x^3 + x)^4 = f(x)$$

3 $s(x) = (x^3 + x)^4$ ja $u(x) = x$, koska

$$(u \circ s)(x) = u(s(x)) = u((x^3 + x)^4) = (x^3 + x)^4 = f(x)$$

Tapaukset 2 ja 3 ovat itsestään selviä eli triviaaleja.

4 $s(x) = (x^3 + x)^2$ ja $u(x) = x^2$, koska

$$\begin{aligned}(u \circ s)(x) &= u(s(x)) \\ &= u((x^3 + x)^2) \\ &= ((x^3 + x)^2)^2 \\ &= (x^3 + x)^4 \\ &= f(x)\end{aligned}$$

Kuva 15. Pyramidi 8 -oppikirjan avoin esimerkki (Kontkanen, Lehtonen, Luosto & Savolainen 2014, 10).

Tässä tutkimuksessa osittain avoimet esimerkit määriteltiin avoin-luokkaan kuuluviksi. Tästä huolimatta kuvassa 15 esitetyn esimerkin lisäksi muita avoimia esimerkkejä ei esiintynyt analysoiduissa oppikirjoissa.

7.2 Esimerkkien rooli analogioiden muodostajina

7.2.1 Kysymys 2.1: miten analogiat esiintyvät oppikirjojen esimerkkien ja harjoitustehtävien välillä?

Tarkastellaan määrällisesti esimerkkien ja tehtävien analogioita Laskutaito, Lyhyt matikka ja Pyramidi -oppikirjojen funktioihin liittyvissä kappaleissa. Taulukkoon 13 on koottu analogioiden määrät ja osuudet. Tässä taulukossa "ei"-kategoriaan luokitettiin kaikki tehtävät, jotka eivät olleet analogisia esimerkkien kanssa. Oppikirjojen kappaleissa esitetään yleensä useita toisistaan poikkeavia esimerkkejä, joten on luonnollista, että tähän kategoriaan tehtiin runsaasti luokituksia.

Taulukko 13. Funktioihin liittyvien esimerkkien ja tehtävien kaikki luokitetut analogiat tehtävien painotukset huomioiden.

Kirja	Laskutaito		Lyhyt matikka		Pyramidi	
	Summa [kpl]	Osuus [%]	Summa [kpl]	Osuus [%]	Summa [kpl]	Osuus [%]
Ei	445,7	53,9	618,9	59,9	600,0	68,1
Periaate	82,8	10,0	199,8	19,3	104,0	11,8
Strategia	66,1	8,0	91,6	8,9	68,3	7,8
Proseduuri	232,3	28,1	123,8	12,0	108,7	12,3
Yht.	**827,0**	**100,0**	**1034,0**	**100,0**	**881,0**	**100,0**

Taulukon 13 ei-kategoria voidaan tulkita kappaleiden monimuotoisuuden mitaksi tietyin oletuksin. Ei-kategoriaan tulee nimittäin sitä enemmän luokituksia, mitä monipuolisemmin oppikirjojen kappaleet käsittelevät oppimisen kohteita. Tietenkin ei-kategoria on myös vahvasti edustettuna, jos esimerkkien ja tehtävien välillä ei yksinkertaisesti ole analogiaa. Edellä kappaleessa 9.1.2 mainitut, ominaisuus-kategoriaan tyypillisesti luokitetut, esimerkit saattoivat vaikuttaa Pyramidi-sarjassa analogioiden vähyyteen. Kappaleet, joissa ominaisuus-kategoria oli yliedustettuna, sisälsivät keskimääräistä enemmän ei-kategorisointeja analogioita tarkasteltaessa. Ottaen huomioon "tarkoituksenmukaisen analogiattomuuden" vaikuttaa siltä, että oppikirjojen kappaleet ovat Laskutaidossa oppimiskohteita yksinkertaisimmin esitteleviä ja Pyramidissa kaikkein monipuolisimpia.

Taulukko 14. Proseduraalisen samanlaisuuden tasot oppikirjoissa.

Kirja	Laskutaito		Lyhyt matikka		Pyramidi	
	Summa [kpl]	Osuus [%]	Summa [kpl]	Osuus [%]	Summa [kpl]	Osuus [%]
Periaate	82,8	21,7	199,8	48,1	104,0	37,0
Strategia	66,1	17,3	91,6	22,1	68,3	24,3
Proseduuri	232,3	60,9	123,8	29,8	108,7	38,7
Yht.	**381,3**	**100,0**	**415,2**	**100,0**	**281,0**	**100,0**

Taulukossa 14 on poistettu ei-kategorian vaikutukset ja eritellään ainoastaan proseduraalisen samanlaisuuden tasojen määriä ja niiden välisiä suhteita tapauksissa, joissa analogioita esiintyi. Näissä luokituksissa on hyvä huomioida, että varsinkin periaate-kategoriaan luokitettiin tehtäviä, joilla saattoi olla strategia- tai proseduuri-analogia toiseen esimerkkiin.

Oppikirjan käyttäjä muodostaa todennäköisimmin syvimmän mahdollisen analogian, joten matalamman tason analogiat on mielekästä poistaa tulosten ulkopuolelle. Jos siis samaan tehtävään on mahdollista muodostaa sekä periaate- että strategia-analogia, otetaan seuraavaan tarkasteluun mukaan ainoastaan strategia-analogia. Yhdelle tehtävälle on jaettu painotus yksi, joten useat syvimmän tason analogiat eivät nosta luokittelukertoimia. Taulukon 15 summat vastaavat näin ollen tarkalleen kokonaisten tehtävien määrää luokitteluanalyysissä.

Taulukko 15. Esimerkkien ja tehtävien syvin analogia tehtävien painotukset huomioon ottaen.

Kirja	Laskutaito		Lyhyt matikka		Pyramidi	
	Summa [kpl]	Osuus [%]	Summa [kpl]	Osuus [%]	Summa [kpl]	Osuus [%]
Ei	19,8	9,8	17,1	9,6	29,3	21,6
Periaate	23,9	11,8	36,2	20,3	23,8	17,5
Strategia	31,2	15,4	36,4	20,4	25,7	18,9
Proseduuri	127,2	62,9	88,4	49,6	57,1	42,0
Yht.	**202,0**	**100,0**	**178,0**	**100,0**	**136,0**	**100,0**

Taulukon 15 arvot poikkeavat nyt selvästi taulukosta 13 ja antavat luultavasti paremman kuvan tehtävien ja esimerkkien analogiasuhteiden yleisyydestä. Keskitytään seuraavaksi jokaiseen analysoituun kirjasarjaan erikseen taulukoiden 13–15 sisältämän informaation perusteella.

Laskutaidossa oppija saa karkeasti ottaen tehtävää tehdessään jonkinlaista tukea puolesta kappaleen esimerkeistä. Tämä voidaan tulkita taulukon 13 ei-kategorian osuudesta (53,9 %). Mikäli kappale siis sisältäisi neljä esimerkkiä, jokaiseen tehtävään liittyisi keskimäärin kaksi esimerkkiä. Analogioiden löytäminen esimerkkien joukosta on Laskutaidossa verrattain helppoa, jos esimerkkeihin tutustuu. Oppija ajautuu näin ollen harvoin tilanteeseen, jossa tehtävä olisi haastava ja pakottaisi itsenäiseen matemaattiseen ajatteluun vastaavien esimerkkien puuttuessa.

Laskutaidossa proseduuri on selkeästi yleisin proseduraalisen samanlaisuuden tasoista 60,9 prosentin osuudella (taulukko 14). Osuus on vielä suurempi kun tarkastellaan syvimpiä mahdollisia analogioita (taulukko 15). Ainoastaan vajaassa kymmenessä prosentissa tehtävistä ei ole mahdollista muodostaa analogista suhdetta esimerkkeihin. Käytännössä tämä tarkoittaa, että kappaleiden keskimääräisestä vajaan yhdeksän tehtävän joukosta löytyy vajaan yhden tehtävän verran tapauksia, joissa analogioita ei ole. Esimerkit ja tehtävät liittyvät siis hyvin kiinteästi toisiinsa ja tehtävät on yleensä mahdollista tehdä esimerkkien avulla.

Lyhyt matikka -sarjassa alle puolet kappaleiden esimerkeistä tarjoaa jonkinlaisen analogian tehtäviin. Tämä voidaan tulkita ei-kategorian noin 60 prosentin osuudesta taulukossa 13. Proseduraalisen samanlaisuuden tasoista periaate on yleisin 48 prosentin osuudella taulukossa 14. Tämä tarkoittaa sitä, että esimerkkien ja tehtävien välillä on runsaasti periaatteellista analogiaa, mikä ohjaa skemaattisen tietorakenteen muodostamiseen. Oppijalta siis edellytetään itsenäistä ajattelua ja ymmärrykseen tähtäävää oppimista. Puolet tehtävistä on kuitenkin proseduuritasoisesti analogisia jonkin esimerkin kanssa (taulukko 15). Tehtäviä, joilla ei ole proseduraalista samanlaisuutta millään tasolla esimerkkien kanssa, on 9,6 prosenttia. Lyhyt matikka -sarjan kappaleissa kymmenen tehtävän tehtäväsarjoissa on näin ollen keskimäärin noin yksi tehtävä, johon ei ole vastaavaa esimerkkiä tarjolla.

Pyramidissa tehtävät ovat proseduraalisesti samanlaisia vain keskimäärin noin joka kolmannen esimerkin kanssa (taulukko 13). Oppijan tulee näin ollen tunnistaa tehtäviä tehdessään sopivat esimerkit analogioiden muodostamiseksi. Kappaleessa voidaan tulkita tavoiteltavan useampien oppimistavoitteiden täyttymistä samanaikaisesti, joten oppija joutuu jäsentämään Pyramidissa oppimaansa, jotta tehtävien tekeminen on mahdollista. Joissakin kappaleissa esitettiin esimerkkejä, jotka eivät mallintaneet suoranaisesti mitään tehtävää tai siihen vastaamista, vaan esittelivät oppimiskohteita niiden ominaisuuksien kannalta (ks. edeltä kuva 13). Nämä esimerkit toimivat usein tehtävistä erillisinä, ymmärrystä tukevina, oppimiskohteina.

Kaiken kaikkiaan proseduraalisen samanlaisuuden tasot olivat suunnilleen yhtä paljon edustettuna. Strategia oli kuitenkin hieman harvinaisempi kuin periaate tai proseduuri analogian tasona (taulukko 14). Noin 42 prosenttia tehtävistä on Pyramidissa ratkaistavissa proseduurin tasolla analogisen esimerkin kanssa (taulukko 15). Tehtävien ja esimerkkien välinen analogia oli strategian ja periaatteen tasolla melko tasaisesti noin 20 prosentin luokkaa. Samoin tehtäviä, joilla ei ollut esimerkkeihin analogista suhdetta, oli noin 20 prosenttia kaikista tehtävistä. Pyramidi vaikuttaa proseduraalisen samanlaisuuden kannalta monipuoliselta oppikirjasarjalta, joka antaa oppijalle mahdollisuuden tehdä niin hyvin analogisia tehtäviä kuin myös tehtäviä, jotka luultavasti pohjautuvat esimerkkien sijaan kappaleissa esitettyihin teoriaosuuksiin. Tehtävät edellyttävät näin ollen analogisen ajattelun lisäksi matematiikalle tyypillistä perustelua, loogista ajattelua ja ymmärtämistä.

7.2.2 Kysymys 2.2: millä tavoin esimerkkien ja harjoitustehtävien proseduraalinen samanlaisuus ilmenee oppikirjoissa?

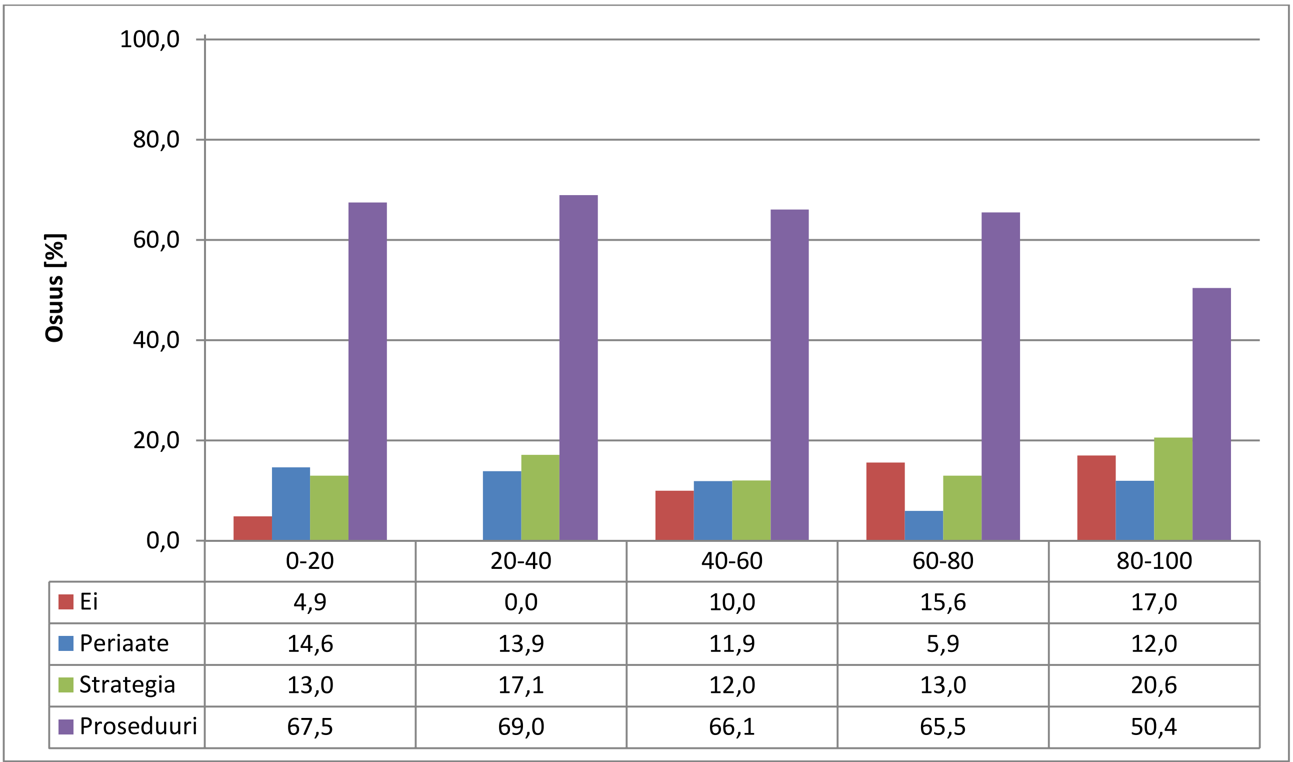
Edellinen kappale 7.2.1 tarkasteli esimerkkien ja tehtävien välistä proseduraalista samanlaisuutta käsitellen kirjasarjoja kokonaisuudessaan funktioihin liittyvien aiheiden osalta. Tässä luvussa vastataan tutkimuskysymykseen 2.2, joka koskee analogioiden tarkastelua yksityiskohtaisemmin. Analogioiden tarkasteluun otetaan näin ollen mukaan eri kurssien vertailu koulutasojen mukaisesti. Analogioita tarkastellaan myös tehtäväsarjojen eri kohtiin sijoitettujen tehtävien suhteen. Jälkimmäinen tarkastelu on mahdollinen, koska oppikirjojen tehtäviä tehdään kouluissa tyypillisesti siinä järjestyksessä kuin ne on esitetty eli toisin sanoen numerojärjestyksessä.

Taulukko 16. Proseduraalisen samanlaisuuden tasojen prosenttiosuudet kursseittain tarkasteluna. Tarkastelussa on huomioitu ainoastaan syvin analogiataso ja kokonaiset tehtävät on huomioitu samanarvoisina.

Kirja	**Laskutaito**		**Lyhyt matikka**			**Pyramidi**			
Kurssi	7	9	1	3	4	1	2	7	8
Ei	21,5	6,9	13,6	2,8	14,1	27,8	53,6	9,0	16,7
Periaate	8,1	12,7	11,0	29,9	20,5	20,0	8,9	15,5	21,9
Strategia	12,9	16,0	33,4	9,1	16,7	19,3	7,1	22,5	17,5
Proseduuri	57,4	64,3	41,9	58,2	48,7	33,0	30,4	53,0	44,0
Yht.	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0

Taulukosta 16 havaitaan, että Laskutaito-sarjan seitsemännen ja yhdeksännen osan välillä on eroja varsinkin ei-analogiaa -kategorian osalta. Seitsemännen luokan kirjassa tehtäviä, joilla ei ole proseduraalista samanlaisuutta esimerkkien kanssa on peräti 21,5 prosenttia. Yhdeksännen luokan kirjassa vastaava osuus on ainoastaan 6,9 prosenttia. Osuuksien ero ja varsinkin niiden asettuminen tähän järjestykseen ei ole oppijoiden ajattelutaitojen kehittymisen mukaista. Tässä tarkastelussa ei huomioida oppikirjojen asiasisältöjen linkittymistä oppilaiden aiempaan tietopohjaan. Voi nimittäin olla, että seitsemännen luokan kirjassa syvennetään aiemmin opittua ja yhdeksännen luokan kirjassa asiat sisältävät vähemmän yhteyksiä aiempaan. Tässä tapauksessa ei-analogiaa tehtävien osuudet voisivat olla perusteltuja. Asian selvittämiseksi tarvittaisiin lisätutkimuksia.

Tarkastellaan sitten Laskutaito 7 ja 9 -oppikirjoja tehtäväsarjojen rakentumisen kannalta. Tätä tarkastelua varten tehtäväsarjojen tehtävät on jaettu viiteen luokkaan niiden sijainnin perusteella. Luokkia on merkitty esimerkiksi "40–60", mikä tarkoittaa, että tehtävä sijaitsee tehtäväsarjassa jossakin välillä 40–60 %. Ensimmäinen tehtävä sijaitsee kohdassa 0 % ja viimeinen kohdassa 100 %. Tässä luokittelussa kategoriat 0–20 ja 80–100 korostuivat hieman, koska niihin liitettiin useampia tehtäviä kuin muihin kategorioihin. Jaottelun katsottiin kuitenkin palvelevan analyysin tarkoituksia riittävän hyvin tästä epätarkkuudesta huolimatta, joten kategorioihin liitettyjen tehtävien määriä ei nähty tarpeelliseksi tasata.

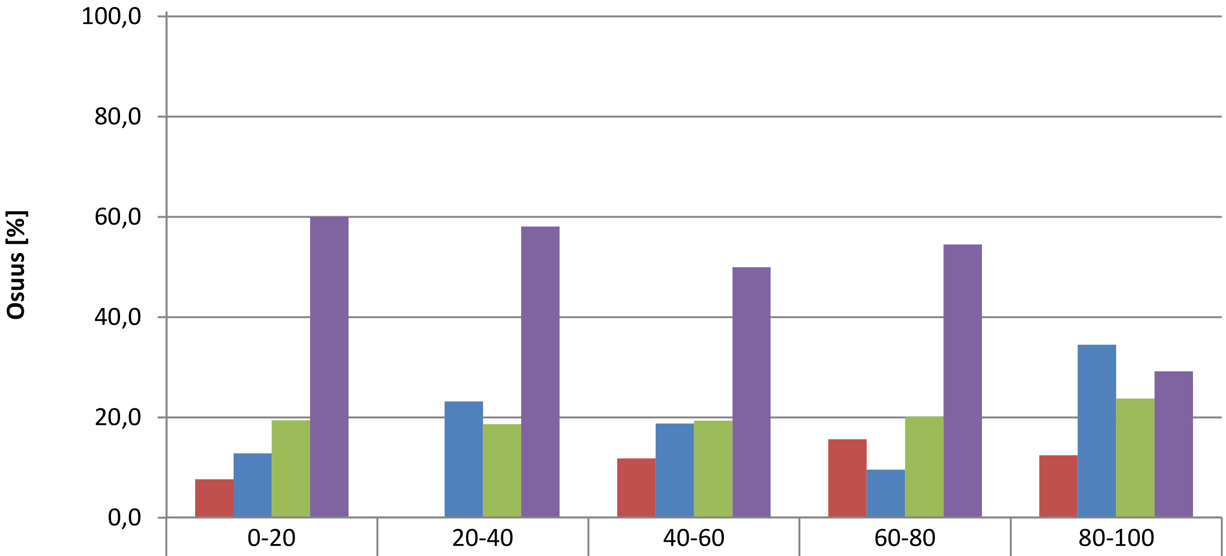


	0-20	20-40	40-60	60-80	80-100
Ei	4,9	0,0	10,0	15,6	17,0
Periaate	14,6	13,9	11,9	5,9	12,0
Strategia	13,0	17,1	12,0	13,0	20,6
Proseduuri	67,5	69,0	66,1	65,5	50,4

Kuvio 1. Laskutaito 7 ja 9 -kirjoissa esiintyvät esimerkkien ja tehtävien väliset proseduraalisen samanlaisuuden tasot tehtäväsarjoihin sijoittumisen mukaan tarkasteltuna. Tarkastelussa on mukana ainoastaan syvin analogiataso ja kokonaiset tehtävät ovat keskenään samanarvoisia.

Laskutaidossa proseduuri on yleinen proseduraalisen samanlaisuuden taso eivätkä muut tasot tai tehtävät, joissa ei ole analogiaa esimerkkeihin, nouse edes tehtäväsarjojen loppua kohden hallitseviksi (kuvio 1). Ei-analogiaa esiintyi luokituksena kylläkin nousujohteisesti tehtäväsarjojen edetessä, mutta viimeisessä kategoriassa, "80–100", osuus on silti vain 17 prosenttia kaikista tämän kategorian tehtävistä. Periaate- ja strategiatasojen voidaan katsoa pysyvän lähes vakioina koko tehtäväsarjan ajan Laskutaidossa.

Proseduuri oli yleisin proseduraalisen samanlaisuuden taso Lyhyt matikka 1, 3 ja 4 -kirjojen funktioihin liittyvien aihealueiden analogiasuhteissa (taulukko 16). Kolmannessa kurssissa tämä taso oli lähes 60 % tehtävien ja esimerkkien välisistä suhteista. Kolmannessa kurssissa myös tehtävät, joissa ei ole proseduraalista samanlaisuutta esimerkkien kanssa, ovat harvinaisia (2,8 %). Kolmas kurssi nojautuu näin ollen vahvasti analogioiden muodostamisen mahdollisuuksiin ja poikkeaa kahdesta muusta analysoidusta kurssista. Vastapainona on todettava, että likipitäen 30 prosenttia tehtävistä on ainoastaan periaatteen tasolla analogisia esimerkkien kanssa, tämä on huomattavasti kursseja 1 ja 4 enemmän. Ensimmäisessä kurssissa puolestaan strategiataso on selkeästi toisia kursseja yleisempi 33 prosentin osuudella.

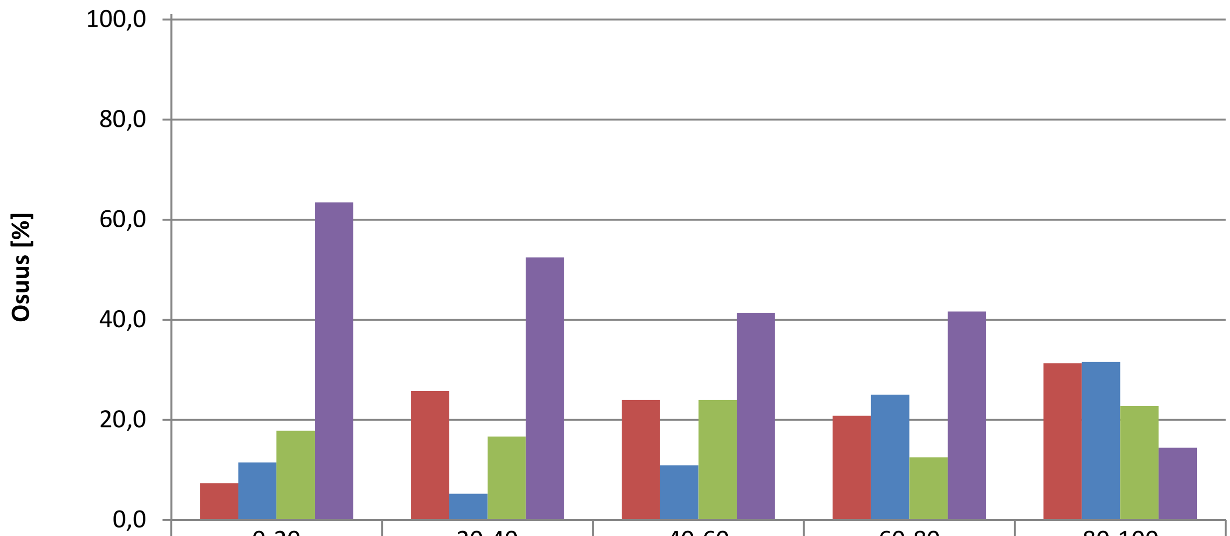


	0-20	20-40	40-60	60-80	80-100
Ei	7,7	0,0	11,8	15,7	12,5
Periaate	12,8	23,2	18,8	9,6	34,5
Strategia	19,4	18,7	19,4	20,2	23,8
Proseduuri	60,0	58,1	50,0	54,5	29,2

Kuvio 2. Lyhyt matikka 1, 3 ja 4 -kirjoissa esiintyvät esimerkkien ja tehtävien väliset proseduraalisen samanlaisuuden tasot tehtäväsarjoihin sijoittumisen mukaan tarkasteltuna. Tarkastelussa on mukana ainoastaan syvin analogiataso ja kokonaiset tehtävät ovat keskenään samanarvoisia.

Proseduuritaso on Lyhyt matikka -kirjojen tehtäväsarjoissa hallitseva viimeisiä tehtäviä lukuun ottamatta (kuvio 2). Strategiatason analogiat ovat puolestaan suunnilleen yhtä yleisiä tehtävien syvimpinä analogioina tehtäväsarjojen jokaisessa tehtävässä riippumatta niiden sijainnista. Periaatetaso nousee tehtäväsarjojen alkupuolella, kategoriassa "20–40" noin joka neljännen tehtävän ja esimerkin väliseksi analogiaksi. Viimeisissä tehtävissä on useimmiten (34,5 %) periaatetason analogioita. Tehtävät, joissa ei ole proseduraalista analogiaa esimerkkien kanssa, eivät nouse tehtäväsarjoissa missään kohdissa kovin yleisiksi.

Pyramidissa havaittiin joitakin eroja eri kurssien välillä proseduraalisten analogiatasojen osuuksissa (taulukko 16). Toisen kurssin osalta luokitettiin kuitenkin vain 14 tehtävää yhdestä kappaleesta, joten vertaus muihin kursseihin ei ole mielekästä. Proseduuritaso nousee yleisemmäksi kursseissa 7 ja 8 kuin kurssissa 1. Tämä on yllättävää, kun huomioidaan myös ei-analogiaa -tehtävien suuri osuus ensimmäisessä kurssissa (27,8 %). Periaatteen ja strategian tasot ilmenivät samankaltaisesti näissä kolmessa kurssissa, joissa aineisto oli riittävä johtopäätösten tekemiseksi. Näiden havaintojen perusteella ensimmäinen kurssi on haastava, sillä oppijalla on tehtävissä vähemmän apua esimerkeistä analogioiden lähteinä. Luokittelutuloksien perusteella ensimmäisen kurssin loppupuolella on yleistä, että ei-kategoriaan luokitettavia tehtäviä on hallitsevassa määrin. Luultavasti tehtävät edellyttävät näin ollen teoriaosuuksiin pohjautuvaa päättelyä ja soveltamista.



	0-20	20-40	40-60	60-80	80-100
Ei	7,3	25,7	23,9	20,8	31,3
Periaate	11,5	5,2	10,9	25,0	31,6
Strategia	17,8	16,7	23,9	12,5	22,7
Proseduuri	63,4	52,4	41,3	41,7	14,4

Kuvio 3. Pyramidi 1, 2, 7 ja 8 -kirjoissa esiintyvät esimerkkien ja tehtävien väliset proseduraalisen samanlaisuuden tasot tehtäväsarjoihin sijoittumisen mukaan tarkasteltuna. Tarkastelussa on mukana ainoastaan syvin analogiataso ja kokonaiset tehtävät ovat keskenään samanarvoisia.

Pyramidin tarkastelu tehtäväsarjojen rakentumisen suhteen paljastaa, että proseduurianalogiat vähenevät tehtävien edetessä (kuvio 3). Ensimmäisten tehtävien analogiat ovat pääasiassa proseduuritasolla, mutta loppupuolen tehtävissä vain 14,4 prosenttia tehtävistä on mahdollista ratkaista proseduuritason analogian avulla. Periaate ja strategia ovat analogiatasoina nousujohteisia tehtäväsarjojen loppuja kohden. Periaate nouseekin ei-analogiaa kategorian kanssa yhtä yleiseksi viimeisissä tehtävissä. Pyramidissa tehtäväsarjat etenevät analogioiden kannalta oikeansuuntaisesti: syvemmät analogiatasot vähenevät ja matalan tason analogiat lisääntyvät tehtävien edetessä. Tämä ominaisuus tarjoaa analogioita koskevan oppimisteoreettisen taustan perusteella hyvän lähtökohdan asteittain etenevälle oppimiselle.

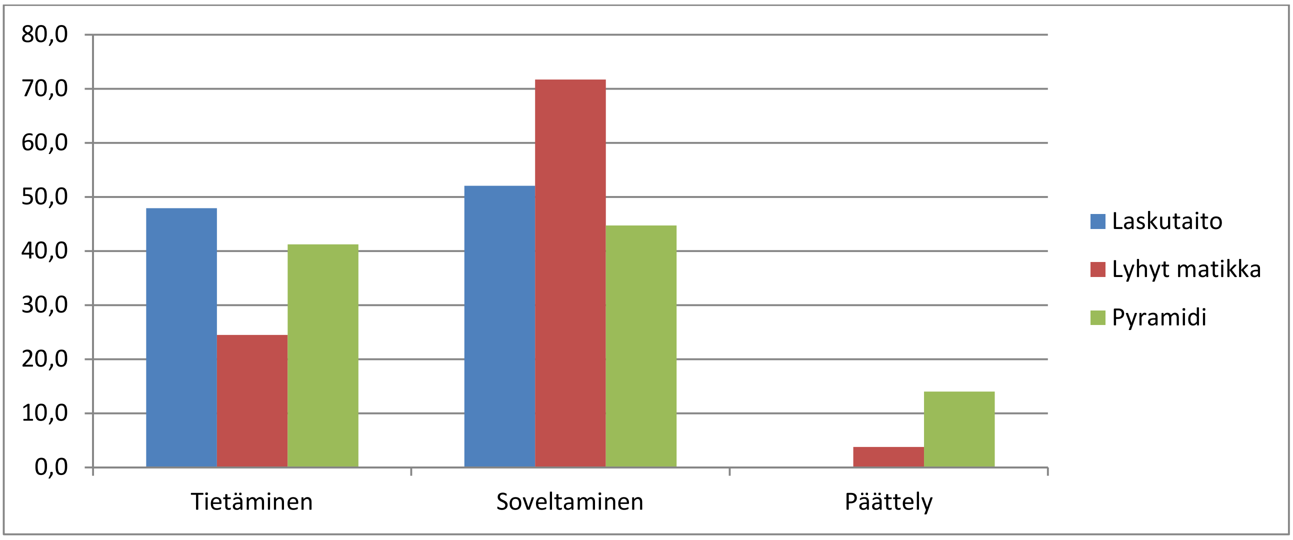
7.3 Oppikirjojen vertailua

Tässä kappaleessa kiinnitetään huomio oppikirjojen vertailuun koulutasoittain. Vertailuja tehdään luokittelutuloksista niin yleisellä kuin yksityiskohtaisemmallakin tasolla. Osaltaan tämä kappale ja tutkimuksen kolmanteen pääkysymykseen vastaaminen pohjautuu edellisissä tuloskappaleissa tehtyihin huomioihin. Mukaan otetaan kuitenkin myös uusi näkökulma, jossa oppikirjojen analysoituja aihealueita vertaillaan yläkoulun ja lukion kesken. Aihealueiden jaottelu perustuu taulukossa 5 esitettyyn aiheiden jatkuvuuteen peruskoulusta lukioon. Käytännössä Laskutaidon ja lukion kirjasarjojen, Lyhyen matikan ja Pyramidin, välisessä vertailussa muodostui kummassakin neljä aihealuetta, joihin kirjojen kappaleet jaettiin. Tutkimuskysymyksiin 3.1 ja 3.2 vastaamiseksi luokittelutuloksia tarkastellaan kuitenkin ensin yleisemmällä tasolla käsitellen kirjasarjojen funktioihin liittyviä esimerkkejä yhtenä kokonaisuutena.

7.3.1 Kysymys 3.1: miten esimerkit eroavat toisistaan avoimuuden, kognitiivisen kompleksisuuden, prosessien tai tehtävätyyppien kannalta?

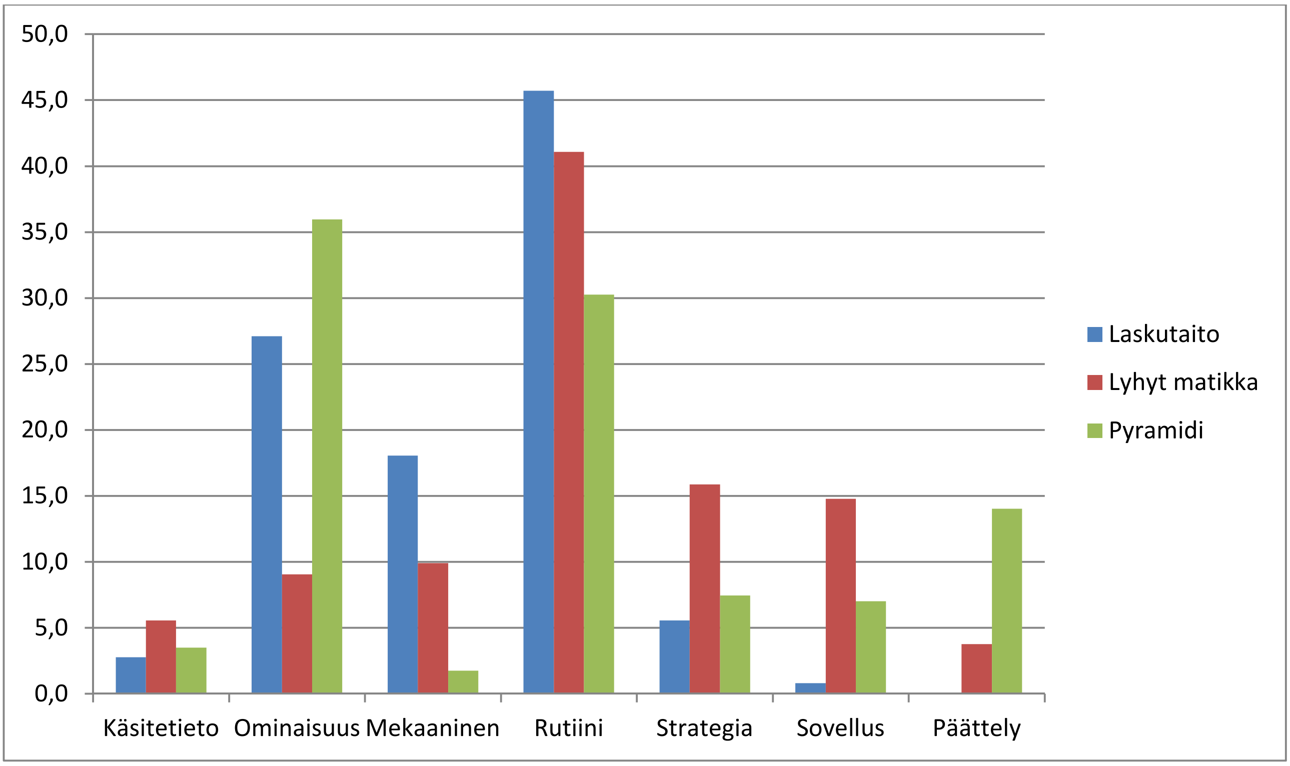
Esimerkit eivät eronneet toisistaan niiden avoimen tai suljetun luonteen osalta. Pyramidissa esitetty yksi avoin esimerkki ei vielä merkitse, analysoitujen esimerkkien määrä huomioon ottaen, että Pyramidi poikkeaisi tältä osin Laskutaidosta tai Lyhyestä matikasta. Kaikissa oppikirjoissa on näin ollen yhteistä, että esimerkit ovat suljettuja.

Verrataan sitten esimerkkien jakautumista kognitiivisen kompleksisuuden perusteella. Kuviossa 4 on esitetty analysoitujen kirjasarjojen esimerkkien osuudet kategorioissa tietäminen, soveltaminen ja päättely.



Kuvio 4. Kognitiivisten alueiden osuudet esimerkeissä.

Kuviosta 4 havaitaan, että kirjasarjat painottavat kognitiivisten alueiden osalta erilaisia esimerkkejä. Laskutaidossa on muihin kirjasarjoihin verrattuna suurin osuus tietämiseen liittyviä esimerkkejä. Lyhyt matikka puolestaan sisältää selkeästi suuremman osuuden soveltamiseen liittyviä esimerkkejä. Pyramidissa esimerkit liittyvät enemmän päättelyyn kuin muissa analysoiduissa kirjasarjoissa. Laskutaidossa tietämisen ja soveltamisen kategoriat ovat suunnilleen yhtä yleisiä. Myös pyramidissa tietäminen ja soveltaminen ovat karkeasti ottaen yhtä paljon edustettuna esimerkeissä – päättelyesimerkkien osuus vain pienentää niiden prosentuaalisia osuuksia. Samaa havaintoa ei voida tehdä Lyhyt matikka -sarjan osalta. Tietäminen ja soveltaminen ovat selkeästi eri tavalla edustettuina. Näiden erojen tutkimiseksi on tarkasteltava esimerkkien jakautumista tehtäväkategorioihin, joiden perusteella kognitiivinen alue alun perin määriteltiinkin.



Kuvio 5. Esimerkkien jakautuminen tehtäväkategorioihin.

Kuvio 5 vahvistaa edellisiä päätelmiä Laskutaidon ja Lyhyen matikan eroista. Ainoastaan rutiinitehtävien mallintaminen esimerkeissä on suunnilleen yhtä runsaasti edustettuna. Lyhyt matikka sisältää huomattavasti vähemmässä määrin ominaisuustehtäviä ja mekaanisia tehtäviä esimerkeissä. Lyhyt matikka sen sijaan sisältää isomman osuuden strategia- ja sovellusesimerkkejä kuin Laskutaito. Lyhyt matikka ei niinkään keskity esimerkkien perusteella matematiikan ymmärtämiseen, vaan käyttämiseen – tästä kielii ominaisuusesimerkkien pieni osuus strategia- ja sovellusesimerkkien kustannuksella. Lyhyt matikka -sarjassa tosin eri tehtäväkategoriat ovat rutiinitehtäviä lukuun ottamatta melko tasapainoisesti edustettuina. Samaa ei voi sanoa Laskutaidosta, jossa sovellus- ja päättelyesimerkkejä on niukasti. Laskutaidossa kolme kategoriaa kattaa melkein kaikki esimerkit, joten matemaattinen osaaminen tulee yksipuolisemmin esille kuin Lyhyessä matikassa.

Pyramidi poikkeaa Laskutaidosta esimerkkien tehtäväkategorioihin jakautumisen osalta, joten myös nämä kirjasarjat eroavat toisistaan, toisin kuin kognitiivisen kompleksisuuden tarkastelu antoi ymmärtää. Laskutaidossa mekaanisten esimerkkien osuus on selkeästi isompi kuin Pyramidissa, josta ne puuttuvat melkein kokonaan. Rutiinitehtävien osuus on Laskutaidossa noin 15 prosenttiyksikköä suurempi, joten kirjasarjat eroavat tältäkin osin. Pyramidissa ominaisuus, sovellus- ja päättelyesimerkit ovat yleisempiä kuin Laskutaidossa. Näiden erojen perusteella Laskutaito tähtää mekaanisten ja rutiininomaisten proseduurien opettamiseen siinä missä Pyramidi painottaa enemmän ymmärtämistä, soveltamista ja päättelytaitoja.

7.3.2 Kysymys 3.2: minkälaisia eroja on esimerkkien määrissä?

Esimerkkien määrällinen tarkastelu tarjoaa hämmästyttäviä samanlaisuuksia Laskutaidon, Lyhyen matikan ja Pyramidin välillä. Taulukossa 17 on laskettu analysoitujen kappaleiden osalta keskiarvot esimerkkien, tehtävien ja analogioiden määristä.

Taulukko 17. Analysoidut kappaleet: esimerkkien, tehtävien ja analogioiden määrät keskimäärin. Alakohdaksi lasketaan myös kokonainen tehtävä, joka ei erikseen sisällä alakohtia.

	Kappaleet	Esimerkit	Esimerkkien alakohdat	Tehtävät	Tehtävien alakohdat	Analogiat
Laskutaito	23,00	1,83	4,09	8,78	24,74	106,61
Lyhyt matikka	18,00	3,44	5,61	9,89	18,28	109,83
Pyramidi	16,00	3,56	5,69	8,50	17,00	105,69
ka.	19,00	2,94	5,13	9,06	20,01	107,38

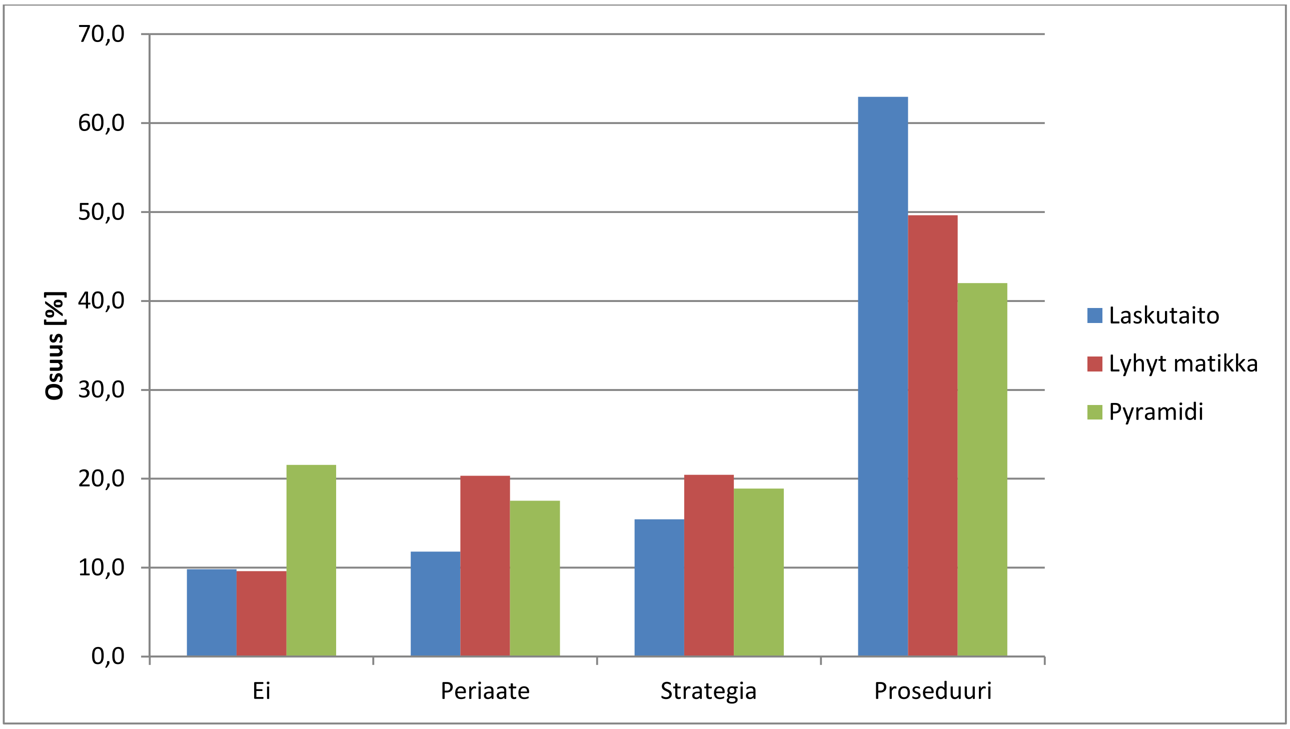
Laskutaidossa kappaleet sisältävät keskimäärin noin puolet vähemmän esimerkkejä kuin Lyhyen matikan ja Pyramidin kappaleet, jotka sisältävät keskenään melkein saman määrän esimerkkejä. Laskutaidossa tehtävät ja esimerkit sisältävät enemmän alakohtia kuin Lyhyessä matikassa ja Pyramidissa, joten esimerkkien alakohtia on kaikkiaan Laskutaidossa vain hieman vähemmän. Alakohtien määrä on suurempi tehtävien osalta Laskutaidossa, vaikka Lyhyt matikka ja Pyramidi sisältävät suunnilleen saman määrän kokonaisia tehtäviä. Laskutaidossa tehtävät jaetaan pienempiin osiin, mikä selittää havaintoja alakohtien määrästä. Mahdollisten analogioiden määrät, eli kappalekohtaisesti alakohtineen laskettujen esimerkkien ja tehtävien määrien tulot, ovat todella lähellä toisiaan.

7.3.3 Kysymys 3.3: miten analogioita hyödynnetään oppimateriaaleissa?

Esimerkkien ja tehtävien välistä proseduraalista samanlaisuutta tarkastellaan kahdesta näkökulmasta tutkimuskysymykseen 3.3 vastaamiseksi. Ensinnäkin tarkastelun kohteeksi otetaan Laskutaito, Lyhyt matikka ja Pyramidi kokonaisuudessaan funktioihin liittyvien esimerkkien osalta. Toisaalta aihealueiden jatkuvuutta yläkoulusta lukioon tarkastellaan jakamalla oppikirjojen kappaleet toisiaan vastaaviin ryhmiin. Näin saadaan kuvaa siitä miten tiettyihin kokonaisuuksiin kytkeytyvät kappaleet hyödyntävät analogioita ja miten peruskoulun ja lukion välinen nivelvaihe näyttäytyy oppikirjoja käyttävälle oppijalle.

Laskutaidon ja Lyhyen matikan vertailu edellä kappaleessa 7.2.1 esitetyn taulukon 15 perusteella osoittaa, että Laskutaidossa tehtävät on mahdollista ratkaista useammin proseduuritason analogioiden avulla. Ei-analogisten tehtävien osuuden ollessa käytännöllisesti katsoen sama näissä oppikirjasarjoissa, on Lyhyessä matikassa hieman suurempi osuus analogioita strategian ja periaatteen tasolla. Pyramidi on kirjasarjana haastavampi kuin Lyhyt matikka, koska esimerkkien ja tehtävien välisiä analogioita ei ole yli 20 prosentissa tehtävistä, kun Lyhyessä matikassa vastaava osuus on 9,6 prosenttia. Pyramidi tukeutuu luultavasti kirjasarjana enemmän teoriaosuuksiin ja deduktiiviseen päättelyyn kuin Lyhyt matikka, koska analogioita esimerkkeihin on vähemmän.

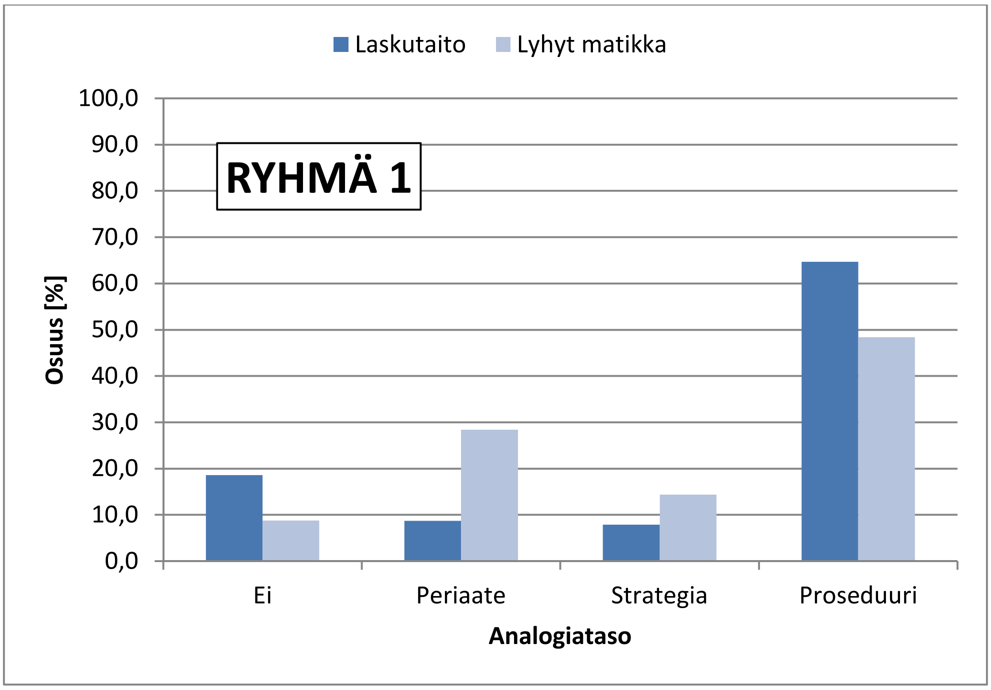
Kuviossa 6 on esitetty kirjasarjojen proseduraalisen samanlaisuuden tasot esimerkkien ja tehtävien välisissä analogioissa. Kuviosta havaitaan, että proseduuritaso on kaikkein yleisin Laskutaidossa ja harvinaisin Pyramidissa. Tämä tarkoittaa, että Laskutaidossa tehtävät on yleensä vaivattomampia ratkaista esimerkkien avulla ja Pyramidissa oppijan on vaikeampaa hyödyntää esimerkkejä tehtävien ratkaisemisessa.



Kuvio 6. Syvin analogia kirjasarjoittain esimerkkien ja tehtävien välillä.

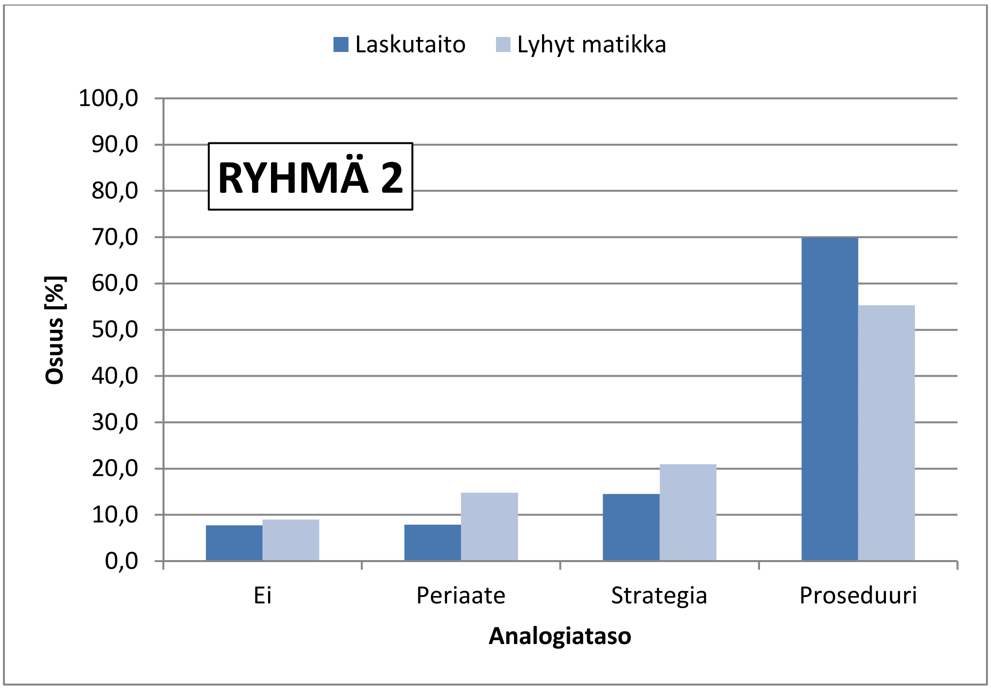
Teoriaosuuteen perustuvan ymmärryksen mukaan proseduurin tulisi olla noviisien oppimisessa vahvasti edustettu proseduraalisen samanlaisuuden taso. Oppijan tietorakenteen kehittyessä ja ymmärryksen karttuessa syvien analogioiden osuus tulisi pienentyä, jolloin ei-analogiaa ja periaatetason tulisi yleistyä. Tarkastellaan luokitusten avulla tapahtuuko näin Laskutaidon ja lukion kirjasarjojen välillä, kun otetaan huomioon kappaleiden kuuluminen tiettyihin aihealueisiin.

Aihealueet poikkeavat toisistaan, kun yläkoulun kirjasarjaa verrataan lukion lyhyen ja pitkän matematiikan kirjasarjoihin. Tämä johtuu erilaisista opetussuunnitelmista lukion matematiikassa. Opetussuunnitelmien perusteella tehdyt vastaavuusluokat on esitetty taulukossa 5, joten niitä ei ole tarpeen toistaa enää tässä yhteydessä. Otetaan tarkasteluun ensin Laskutaidon ja Lyhyen matikan suhde. Kuviossa 7 on verrattu Laskutaitoa ja Lyhyttä matikkaa ensimmäisen ryhmän osalta.



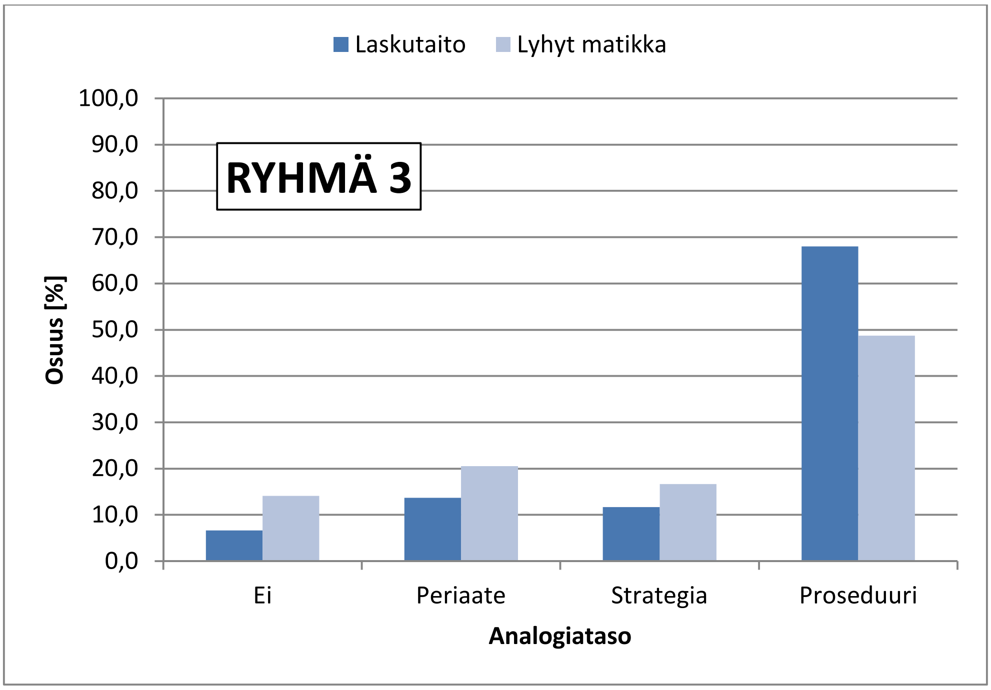
Kuvio 7. Laskutaidon ja Lyhyen matikan tehtävien ja esimerkkien välisen syvimmän analogiatason osuudet ryhmässä 1.

Kuvion 7 perusteella Lyhyen matikan jatkuvuus Laskutaidosta ei ole ryhmän 1 osalta täysin sujuvaa. Laskutaidossa nimittäin "ei"-kategorian osuus on selkeästi suurempi kuin lyhyessä matikassa. Analogiatasojen osuudet ovat kuitenkin oikean suuntaisia, sillä Laskutaidossa proseduuri on yleisempi taso kuin Lyhyessä matikassa. Periaatetaso on lisäksi selkeästi yleisempi Lyhyessä matikassa, mikä tekee oppikirjojen suhteesta oikeansuuntaisen.



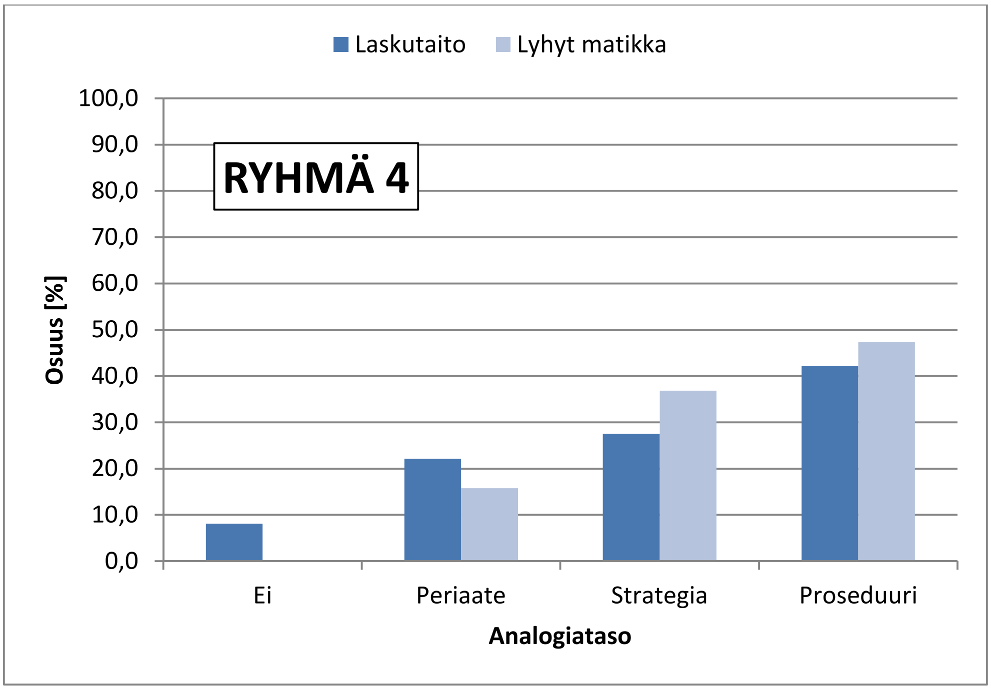
Kuvio 8. Laskutaidon ja Lyhyen matikan tehtävien ja esimerkkien välisen syvimmän analogiatason osuudet ryhmässä 2.

Ryhmässä 2 Laskutaito ja Lyhyt matikka onnistuvat luomaan hyvän jatkumon yläkoulun ja lukion lyhyen matematiikan välille (kuvio 8). Proseduuritason analogiat ovat yleisempiä Laskutaidon tehtävien ja esimerkkien välillä kuin Lyhyessä matikassa. Toisaalta muut analogiatasot ovat hieman yleisempiä Lyhyessä matikassa, joten oppija ei voi tukeutua yhtä vahvasti esimerkkien ja tehtävien väliseen analogiaan kuin Laskutaidossa.



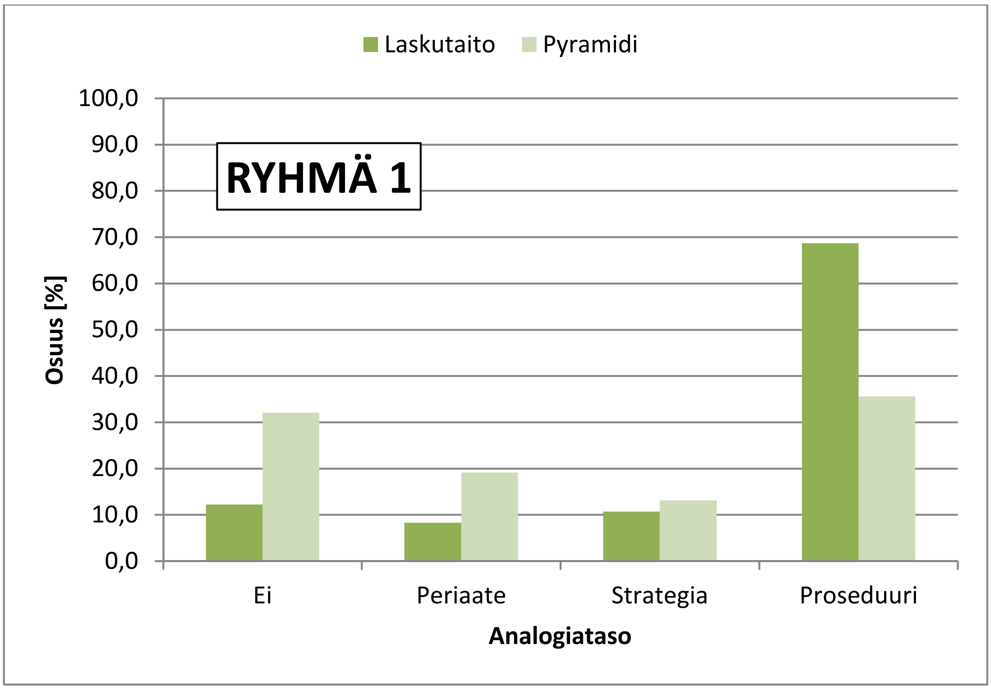
Kuvio 9. Laskutaidon ja Lyhyen matikan tehtävien ja esimerkkien välisen syvimmän analogiatason osuudet ryhmässä 3.

Ryhmässä 3 Laskutaito ja Lyhyt matikka onnistuvat luomaan mielekkään jatkumon esimerkkien ja tehtävien välisen analogian osalta (kuvio 9). Lyhyessä matikassa nimittäin proseduuritason osuus tehtävien syvimmästä mahdollisesta analogiasta esimerkkeihin on pienempi kuin Laskutaidossa. Muut analogiatasot ovat Lyhyessä matikassa yleisempiä kuin Laskutaidossa, joten analogioiden osuudet kehittyvät yläkoulusta lukion lyhyeen matematiikkaan oikeansuuntaisesti ryhmän 3 osalta.



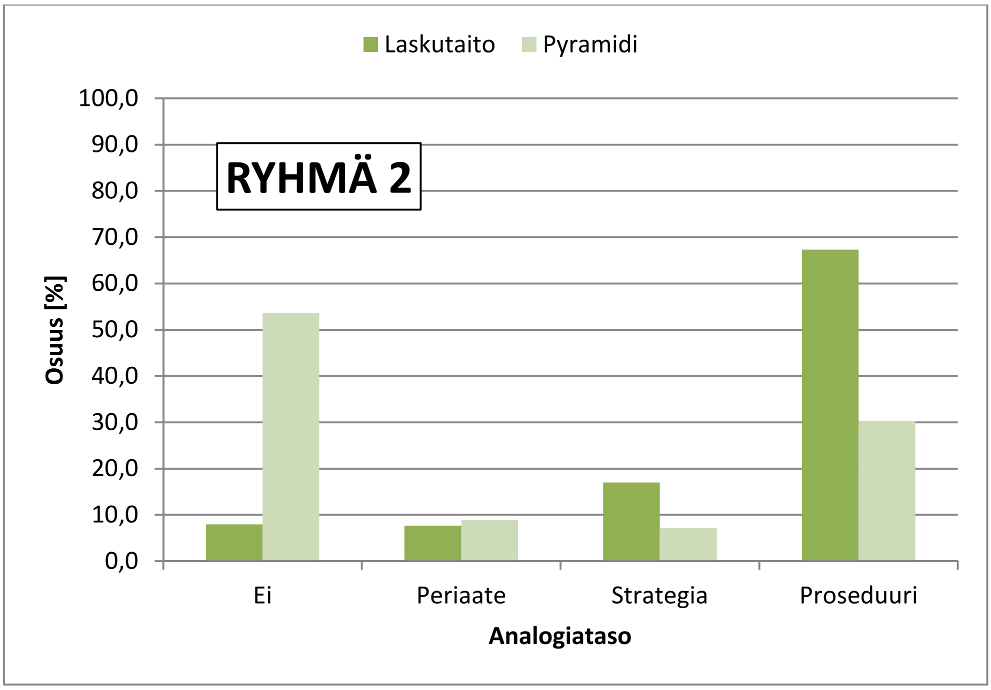
Kuvio 10. Laskutaidon ja Lyhyen matikan tehtävien ja esimerkkien välisen syvimmän analogiatason osuudet ryhmässä 4.

Kuviosta 10 voidaan päätellä, että ryhmän 4 tehtävät eivät muodosta yläkoulun ja lukion lyhyen matematiikan välille mielekästä jatkumoa. Laskutaidossa proseduuritason analogiat ovat selkeästi vähemmän edustettuina kuin edellisissä ryhmissä. Näin ollen matalan tason analogiat korostuvat Laskutaidossa liikaa. Lyhyt matikka ei sisällä tässä ryhmässä ollenkaan tehtäviä, joilla ei ole analogiasuhdetta esimerkkeihin. Näiden huomioiden perusteella Lyhyessä matikassa on luultavasti helpotettu tehtävien tekemistä liikaa analogioiden avulla tai Laskutaidossa ryhmän 4 aihealueet saattavat olla oppijalle melko vaikeita, koska analogioita ei ole mahdollista muodostaa tehtävien ja esimerkkien välille riittävässä määrin.



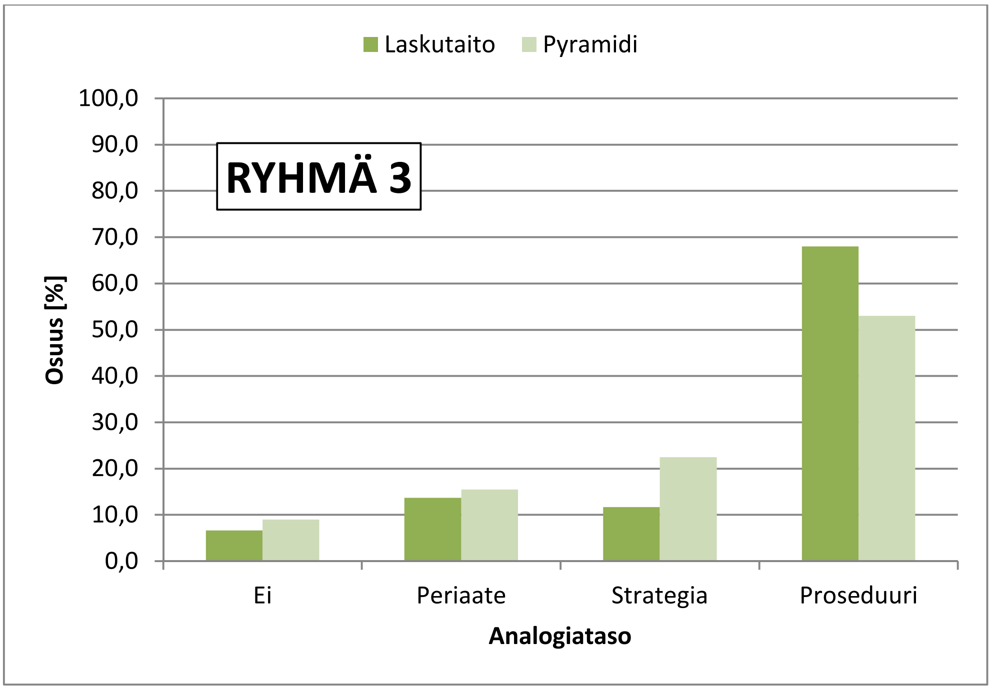
Kuvio 11. Laskutaidon ja Pyramidin tehtävien ja esimerkkien välisen syvimmän analogiatason osuudet ryhmässä 1.

Laskutaidon ja Pyramidin tehtävissä on selkeästi eroa tehtävien ja esimerkkien välisen analogian eri tasojen osuuksissa (kuvio 11). Pyramidi erottuu Laskutaidosta selkeästi haastavampana oppikirjana ryhmän 1 aihealueiden osalta, sillä proseduuritason analogiat ovat noin puolet yleisempiä Laskutaidossa. Toisaalta Pyramidissa ei analogiaa -tehtävät ja periaatetason analogiat ovat selkeästi yleisempiä kuin Laskutaidossa.



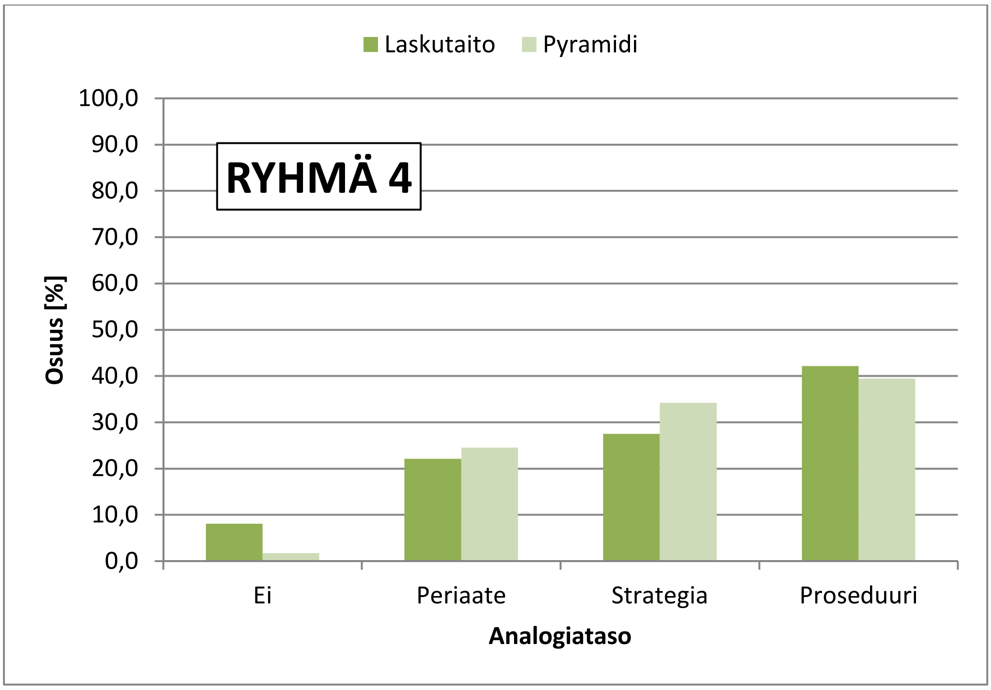
Kuvio 12. Laskutaidon ja Pyramidin tehtävien ja esimerkkien välisen syvimmän analogiatason osuudet ryhmässä 2.

Ryhmässä 2 (kuvio 12) Pyramidin ja Laskutaidon väliset erot ovat hyvin suuria. Pyramidista tähän ryhmään kuuluu ainoastaan 14 tehtävää, jotka esiintyvät kappaleessa "ensimmäisen asteen polynomifunktio". Kappaleissa, jotka koskevat toisen ja korkeamman asteen polynomifunktioita, ei ole esimerkkejä, joten käytännössä ei analogiaa -kategoriaan olisi voitu luokittaa huomattavasti isompi osuus tehtävistä. Tätä ei kuitenkaan nähty mielekkääksi, koska oletuksena analyysissä oli, että kappaleet sisältävät esimerkkejä. Proseduuritason analogioita esiintyy tehtävien ja esimerkkien välillä Pyramidissa 30,4 prosenttia, kun vastaava osuus Laskutaidossa on 67,3 prosenttia. Tähän ryhmään kuuluvien kappaleiden osalta olisi aiheellista tutkia tarkemmin sitä, ovatko Pyramidin tehtävät turhankin vaikeita vai onnistutaanko teoriaosuuksissa tarjoamaan riittävät edellytykset tehtävien tekemiseksi.



Kuvio 13. Laskutaidon ja Pyramidin tehtävien ja esimerkkien välisen syvimmän analogiatason osuudet ryhmässä 3.

Laskutaito ja Pyramidi eroavat vain vähän ryhmän 3 osalta tehtävien ja esimerkkien välisessä analogiassa (kuvio 13). Oppikirjat suhtautuvat toisiinsa oikeansuuntaisesti, sillä proseduuritaso on hieman yleisempi Laskutaidossa (68 %) kuin Pyramidissa (53 %). Pyramidissa on noin kaksi kertaa isompi osuus (22,5 %) strategiatason analogioita kuin Laskutaidossa (11,7 %). Kaiken kaikkiaan tämän aihealueen kappaleet ovat hyvin tasapainossa Laskutaidon ja Pyramidin välillä.



Kuvio 14. Laskutaidon ja Pyramidin tehtävien ja esimerkkien välisen syvimmän analogiatason osuudet ryhmässä 4.

Ryhmässä 4 ei muodostu suuria eroja Laskutaidon ja Pyramidin välille (kuvio 14). Ei analogiaa -kategorian tehtävät kuitenkin puuttuvat Pyramidista käytännössä kokonaan. Laskutaidossa on sarjalle hyvin tyypilliseen tapaan hieman alle 10 prosenttia näitä tehtäviä, joten Pyramidilta voitaisiin odottaa vähintään samanlaista osuutta. Lisäämällä tehtäviä, jotka eivät ole analogisia esimerkkien kanssa, saataisiin Pyramidi jatkamaan paremmin siitä mihin Laskutaito on jäänyt ryhmän 4 aihealueissa. Ryhmän 4 aihealueet, suoraan ja kääntäen verrannollisuus, ovat yläkoulusta lukioon jatkuvia, joten lukiossa näihin aihealueisiin liittyvät tehtävät voisivat kenties olla haasteellisempia analogioiden puuttumisen kannalta.

8 OPPIKIRJAT JA MATEMAATTISEN OSAAMISEN TAVOITTEET OPETUSSUUNNITELMISSA

Oppimateriaalitutkimuksen asettaminen opetussuunnitelmista nousevien huomioiden kontekstiin antaa tutkimukselle perustan, johon heijastaa oppimateriaalien analyysistä saatuja tuloksia. Tämän vuoksi on perusteltua tarkastella seuraavaksi yläkoulun ja lukion opetussuunnitelmia. Matemaattisen osaamisen arviointi tehdään tässä yhteydessä Kilpatrickin ym. (2001) esittelemän mallin avulla, sillä tutkimuksen analyysi nojaa vahvasti tähän teoriaan. Opetussuunnitelmista voidaan saada yleiskuva opetuksen painotuksista, kun niitä tutkitaan kvantifioivan sisällönanalyysin keinoin. Tämä on opetussuunnitelmatarkastelun kannalta vain suuntaa antava analyysimenetelmä, joten huomiota kiinnitetään myös sanojen ja lauseiden merkitykseen kokonaisuuden kannalta. Perusopetuksen vuosiluokkien 6–9 sekä lukion lyhyen ja pitkän matematiikan opetussuunnitelmat vaikuttaisivat eroavan toisistaan matemaattisen osaamisen painotusten kannalta riippumatta tulkintojen syvyydestä.

8.1 Matemaattinen osaaminen vuosiluokkien 6–9, lukion lyhyessä ja lukion pitkässä matematiikassa

Taulukossa 18 on ilmaistu matemaattisen osaamisen painotukset eri piirteiden suhteen. Nämä prosenttiosuudet kertovat opetussuunnitelmien painopisteistä, mutta ne epäonnistuvat lauseiden merkitysten tulkinnassa. Tämän vuoksi taulukon 18 on tarkoitus olla ainoastaan suuntaa antava suunnitelmia tarkasteltaessa. Opetussuunnitelmista analysoitiin yleisiä osioita, joten pitkän ja lyhyen matematiikan analyysiin tuli osittain samoja tavoitteita, sillä niitä esitetään yhteisesti saman otsikon alla. Keskeisten sisältöjen osuuksia ei analysoitu. Nämä osuudet sisälsivät yleisesti ottaen maininnat aihealueista, joita opetuksen tulee kattaa, joten matemaattisen osaamisen arviointi niiden perusteella olisi ollut ongelmallista.

Taulukko 18. Opetussuunnitelmissa esiintyvät painotukset matemaattisen osaamisen (Kilpatrick ym. 2001) piirteiden avulla tulkittuna. Viittausten määrä on ilmaistu prosentteina.

	Käsitteellinen ymmärtäminen	Proseduraalinen sujuvuus	Strateginen kompetenssi	Mukautuva päättely	Yritteliäisyys
Perusopetus	7	7	29	29	29
Lyhyt matematiikka	35	9	13	9	35
Pitkä matematiikka	24	12	20	16	28

Opetussuunnitelmien kvantifioiva sisällönanalyysi paljastaa, että peruskoulun matematiikan yleisissä tavoitteissa annetaan painoarvoa erityisesti strategiselle kompetenssille, mukautuvalle päättelylle ja yritteliäisyydelle. Käsitteellisen ymmärtämisen ja proseduraalisen sujuvuuden vaatimattomat osuudet tässä tarkastelussa saattavat johtua niiden sisällyttämisestä keskeisten sisältöjen osuuksiin opetussuunnitelmissa. Mikäli keskeisten sisältöjen osuudet olisivat olleet mukana tarkastelussa, nämä kaksi piirrettä olisivat saaneet huomattavasti suuremman painoarvon. Lukion osalta tätä vastaavaa osiota ei ollut mielekästä ottaa mukaan analyysiin, koska funktioita ei ole eritelty samalla tavalla omaksi kokonaisuudekseen ja sisällöt erittelevät hyvin ylimalkaisesti aihealueita, kuten esimerkiksi pitkän matematiikan ensimmäisessä kurssissa tyydytään toteamaan:

> *KESKEISET SISÄLLÖT*
> •*potenssifunktio*
> •*potenssiyhtälön ratkaiseminen*
> •*juuret ja murtopotenssi*
> •*eksponenttifunktio*
> (Lukion opetussuunnitelman perusteet 2004, 119.)

Taulukossa 18 on esitetty opetussuunnitelmien tarkastelun tulokset kootusti vertailun helpottamiseksi. Näyttää ensinnäkin siltä, että yritteliäisyys saa opiskelutasosta riippumatta paljon painoarvoa. Yritteliäisyyden piirteeseen viitataan hyvin samankaltaisesti. Pieni ero syntyy ehkä siitä, että pitkässä matematiikassa on tavoitteena kasvattaa matematiikkaa itsenäisenä tieteenä arvostavia oppijoita, mutta lyhyessä matematiikassa arvostus syntyy matematiikan käyttökelpoisuuden havaitsemisesta.

Mukautuvaan päättelyyn viitataan eniten peruskoulun ja vähiten lukion lyhyen matematiikan opetussuunnitelmassa. Yhteistä kaikille opetustasoille on, että suunnitelmissa korostetaan luovan ongelmanratkaisukyvyn kehittämistä. Kaikista monipuolisimmin mukautuva päättely tulee esille pitkän matematiikan suunnitelmassa, vaikka peruskoulussa viittausten osuus onkin hieman suurempi. Lukion matematiikan suunnitelmissa tulee esille itsenäiseksi tieteentekijäksi kasvattaminen, kuten pitkän matematiikan opetussuunnitelmasta voi tulkita:

...opiskelija

- *rohkaistuu kokeilevaan ja tutkivaan toimintaan, ratkaisujen keksimiseen sekä niiden kriittiseen arviointiin.*
- *tottuu tekemään otaksumia, tutkimaan niiden oikeellisuutta ja laatimaan perusteluja sekä arvioimaan perustelujen pätevyyttä ja tulosten yleistettävyyttä.*

(Lukion opetussuunnitelman perusteet 2004, 118–119.)

Strategisen kompetenssin piirteeseen viitataan kaikissa opetussuunnitelmissa samankaltaisesti, vaikka viittausten osuudet vaihtelevat etenkin peruskoulun ja lukion lyhyen matematiikan välillä. Ongelmien ratkaisemisen taitoihin ja tiedonhankinnan menetelmiin viitattiin kaikissa suunnitelmissa. Ajattelumallien oppiminen liitettiin tässä tarkastelussa strategisen kompetenssin piirteeseen. Ajattelumalleja ei mainittu pitkän matematiikan opetussuunnitelmassa.

Toisiinsa kiinteästi liittyvät proseduraalisen sujuvuuden ja käsitteellisen ymmärryksen piirteet paljastavat eroja perusopetuksen ja lukion matematiikan välillä. Pitkässä ja lyhyessä matematiikassa nimittäin painotus on selkeästi käsitteellisessä ymmärryksessä, kun taas peruskoulussa tällaista painotusta ei esiinny. Peruskoulussa näihin piirteisiin viitataan muutenkin hyvin niukasti yleisissä tavoitteissa: yhdessä kohdassa. Opetussuunnitelmatarkastelu ei tältä osin luultavasti vastaa opetuksen todellisuutta, koska perinteisesti perusopetuksessa on painotettu peruslaskutaitoja, jotka edellyttävät nimenomaan proseduraaliseen sujuvuuteen ja käsitteelliseen ymmärrykseen keskittymistä. Analyysin ja taulukon 18 ulkopuolelta on todettava, että keskeisten sisältöjen osuudet opetussuunnitelmissa ovatkin näitä piirteitä korostavia.

8.2 Oppikirjojen suhde opetussuunnitelmiin

Oppikirjoja tarkastellaan tässä tutkimuksessa esiin nousseiden tulosten avulla. Tulokset sisältävät oppikirjojen esimerkkien ja niiden tehtäviin kohdistuvan analogiasuhteen luonnehdintaa.

Esimerkkien suljettu luonne vastaa hyvin opetussuunnitelmien sisältöjä. On tulkinnanvaraista käsittääkö opetussuunnitelmissa esiintyvä sana "ongelmanratkaisu" sekä suljetun että avoimen ongelmanratkaisun. Näin ollen ei voida päätellä, että oppikirjat eivät noudattaisi opetussuunnitelmia, vaikka niissä ei tulosten perusteella anneta painoarvoa avoimelle ongelmanratkaisulle.

Opetussuunnitelmat analysoitiin matemaattisen osaamisen käsitteen avulla. Näin ollen oppikirjojen vertailu opetussuunnitelmien sisältöihin on selkeintä tehdä esimerkkien tehtäväkategorioiden perusteella, sillä niillä on suora yhteys matemaattisen osaamisen piirteisiin (ks. edeltä kuva 3). Opetussuunnitelmissa esiintyvä matemaattinen osaaminen analysoitiin niin kognitiivisten kuin affektiivisten piirteidenkin osalta. Tehtäväkategoriat eivät liity matemaattisen osaamisen affektiivisiin puoliin, joten tämä otettiin huomioon opetussuunnitelmien ja oppikirjojen vastaavuutta tutkittaessa. Opetussuunnitelmien painotuksia tarkasteltiin näin ollen ainoastaan käsitteellisen ymmärtämisen, proseduraalisen sujuvuuden, strategisen kompetenssin ja mukautuvan päättelyn kannalta.

Laskutaidossa korostetaan käsitteellisen ymmärtämisen ja proseduraalisen sujuvuuden piirteitä (ks. edeltä kuvio 5 & kuva 2), mikä ei vastaa opetussuunnitelmien sisältöjä kovin hyvin (taulukko 18). Opetussuunnitelmien analyysiä tehdessä kuitenkin huomattiin, että kyseiset piirteet korostuvat mahdollisesti keskeisten sisältöjen osuuksissa, joita ei huomioitu opetussuunnitelmia tarkasteltaessa. Opetussuunnitelmien perusteella vuosiluokilla 6–9 matematiikassa tulisi painottaa strategisen kompetenssin ja mukautuvan päättelyn piirteitä. Näiden piirteiden painoarvo on hyvin pieni Laskutaidon esimerkkien perusteella. Tehtävien ja esimerkkien vahva analogiasuhde (kuvio 6) vahvistaa myös päätelmiä siitä, että Laskutaito korostaa nimenomaan proseduraalisen sujuvuuden piirrettä. Näiden havaintojen ja päätelmien perusteella voidaan sanoa, että Laskutaito korostaa matemaattisessa osaamisessa aivan eri piirteitä kuin opetussuunnitelma.

Lyhyt matikka poikkeaa myös selkeästi opetussuunnitelman painotuksista matemaattisen osaamisen suhteen. Käsitteellistä ymmärtämistä korostetaan nimittäin selkeästi opetussuunnitelmissa (taulukko 18), mutta Lyhyt matikka tuo tätä piirrettä esille vain vähäisessä määrin (kuvio 5). Proseduraalinen sujuvuus puolestaan korostuu Lyhyessä matikassa paitsi rutiiniesimerkkien suuren osuuden perusteella niin myös proseduuritason analogioiden perusteella (kuvio 6). Strategisen kompetenssin osalta Lyhyt matikka onnistuu toteuttamaan opetussuunnitelmaa sopivalla painotuksella, strategiseen kompetenssiin liittyviä esimerkkejä on vain hieman enemmän kuin opetussuunnitelman painotuksissa. Päättelyn osalta opetussuunnitelma ja Lyhyt matikka eroavat toisistaan, sillä opetussuunnitelmassa korostetaan mukautuvaa päättelyä hieman enemmän kuin esimerkkien tehtävätyypeissä.

Pyramidi painottaa vahvasti ominaisuusesimerkkejä (kuvio 5), jotka voidaan liittää matemaattisen osaamisen kannalta käsitteellisen ymmärryksen piirteeseen. Pitkän matematiikan opetussuunnitelma korostaa myös tätä piirrettä (taulukko 18), joten Pyramidi toteuttaa tältä osin hyvin opetussuunnitelman sisältöjä. Proseduraalisen sujuvuuden kannalta Pyramidin esimerkit keskittyvät liikaa rutiinitehtävien mallintamiseen, mikäli esimerkkejä verrataan opetussuunnitelman painotuksiin. Strategisen kompetenssin osalta Pyramidissa on vähemmän tähän piirteeseen liittyviä esimerkkejä kuin opetussuunnitelman painotukset edellyttäisivät. Myös päättelyesimerkkien osuus on liian vähäinen, mutta ei poikkea opetussuunnitelman painotuksista kovin merkittävästi.

9 LUOTETTAVUUSTARKASTELU

Tässä tutkimuksessa muutama kohta vaati erityistä huolellisuutta tulosten luotettavuuden kannalta. Esimerkkien ja analogioiden luokittelusysteemit pyrittiin rakentamaan teoreettiseen taustaan perustuen mahdollisimman kattaviksi. Kuitenkaan kaikkia matemaattisen osaamisen puolia ei voitu arvioida mielekkäästi oppikirjojen sisällöistä. Matemaattisen osaamisen piirteistä yritteliäisyys nimittäin rajattiin tutkimuksen ulkopuolelle, joten sen toteutumista ei voida päätellä edes välillisesti nyt käytettyjen luokitusten perusteella. Tämän piirteen tärkeyttä ei tule vähätellä, sillä sitä korostetaan myös opetussuunnitelmissa (ks. edeltä luku 8.1).

Tehtävien luokittaminen on tutkimusmenetelmänä hyvin haastava. Luokittamisessa on otettava huomioon subjektiivisten tekijöiden vaikutus. Tehtäväkategorioiden määrä (7 kpl) on melko suuri, joten tulkinnanvaraisissa tapauksissa väärien luokitusten tekeminen on saattanut vaikuttaa tuloksiin. Luokitteluvarmuuden lisäämiseksi tehtävien luokittamista harjoiteltiin kaikkien luokittelusysteemin ulottuvuuksien suhteen. Varsinaiseen luokitteluun ryhdyttiin vasta kun riittävän tuntuinen varmuus oli saavutettu.

Tutkimuksen luotettavuutta olisi voitu parantaa suorittamalla luokittaminen kahteen kertaan. Aineiston koko kuitenkin rajoitti mahdollisuuksia toteuttaa luokittelua kahdesti. Tehtäväkategorioiden osalta luokittelu oli tutkijalle jo ennestään tuttua (ks. Krook 2014). Näin ollen luokittelun toiston hyödyt olisivat olleet todennäköisesti pienet. Avointen ja suljettujen esimerkkien luokittamisen osalta toistolla ei luultavasti olisi saavutettu erilaisia tuloksia, sillä käytännössä kaikkien esimerkkien kuuluessa selkeästi suljettuun kategoriaan ei luokitteluun liittynyt erityisiä vaikeuksia.

Ulkopuolisten luokittelijoiden käyttö olisi voinut paljastaa luokittelusysteemistä jotakin, joka jäi nyt huomioimatta. Useamman luokittelijan avulla olisi myös voitu parantaa tutkimuksen luotettavuutta. Nyt käytetty luokittelusysteemi saattaa olla puutteellinen, koska tutkijalla luokittelusysteemin rakentajana on ollut tietynlainen käsitys luokittelussa käytetyistä kategorioista eikä tämä käsitys ole välttämättä välittynyt luokittelukategorioiden määrittelyyn. Tästä seikasta johtuvat vaikutukset pyrittiin luokittelun aikana tietoisesti poistamaan, sillä luokittelussa tukeuduttiin usein luokittelusysteemissä esitettyihin määritelmiin. Määritelmiin tukeuduttiin erityisesti silloin, kun esimerkin tai analogian luokittaminen ei tuntunut itsestäänselvältä.

Analogioita koskevien luokittelutulosten tulkintaan liittyi myös luotettavuutta koskevia ongelmia. Tehtäväsarjoittain tehdyissä tarkasteluissa (kappale 7.2.2) ei voitu huomioida sitä, että oppikirjojen kappaleet sisältävät tyypillisesti useita toisistaan erotettavia harjoituksen kohteita, tehtävätyyppejä tai proseduureja. Mikäli kappaleiden tarkastelu olisi tehty jotenkin hienojakoisemmin, esimerkiksi oppikirjan kappaleen pääkohteet huomioon ottaen, olisi analogioiden tarkastelussa saatettu päätyä erilaisiin tuloksiin. Nyt tehtäväsarjat eivät ainakaan tulosten perusteella kehittyneet analogioiden osalta Laskutaidossa ja Lyhyessä matikassa mainittavasti ennen viimeisiä tehtäviä.

Analogioiden luokituksissa tulosten analysointi osoittautui luultua haasteellisemmaksi. Analogioita koskevaa analyysiä ei ollut mielekästä jättää muokkaamattomien luokittelutulosten tasolle. Tämä johtui analogioiden todennäköisestä hyödyntämisestä käytännössä. On nimittäin todennäköistä, että tehtävän tekemisessä analogian lähteenä toimii yksittäinen esimerkki, joka on mahdollisimman (proseduraalisesti) samanlainen tehtävän kanssa. Analyysissä tämä huomioitiin poistamalla syvintä analogiatasoa alemmat luokitukset. Tämä operaatio teki luokittelutulosten tulkinnasta luultavasti paremmin todellista oppikirjojen käyttöä vastaavan.

Oppikirjojen käytöstä tehtiin taustaoletus, jonka mukaan kokonaisten tehtävien ja esimerkkien parissa vietetty aika on aina samansuuruinen. Näin ollen luokittelussa käytettiin murtolukuja, jotta tehtävien alakohdat eivät painottaisi yksittäisiä tehtäviä. Luokittelutuloksia tarkasteltiin myös tapauksessa, jossa jokainen yksittäinen tehtäväkokonaisuus (esim. c-kohta) olisi luokitettu samanarvoisesti. Tämä tarkastelu tuotti vain vähän nyt esitellyistä tuloksista poikkeavia havaintoja. Analogioiden ja esimerkkien luokitukset pysyivät samansuuntaisina, joten tuloksista vedetyt johtopäätökset olisivat olleet samoja kuin analyysissä, jossa kokonaiset tehtävät arvioitiin samanarvoisiksi. Luultavasti tämä ilmiö johtui ainakin analogioiden kohdalla siitä, että aineisto saavutti saturaatiopisteen.

10 YHTEENVETO, POHDINTAA JA JATKOTUTKIMUKSEN AIHEITA

Tässä tutkimuksessa haluttiin selvittää yläkoulun ja lukion matematiikan oppikirjoissa esiintyvien esimerkkien piirteitä. Tarkastelussa rajoitluttiin funktioon liittyviin aihealueisiin, jotka jatkuvat yläkoulusta lukioon. Lukion aiheista rajautui näin ollen joitakin funktioihin liittyviä aiheita pois, koska ne pohjautuivat aiempiin lukion aiheisiin – eivät suorasti yläkoulun matematiikkaan. Esimerkkien lisäksi tutkimuksessa pääosassa olivat esimerkkien ja tehtävien väliset analogiasuhteet. Analogioita tarkasteltiin proseduraalisen samanlaisuuden käsitteen avulla. Käsite salli eritasoisten analogioiden erottelemisen. Luonnollisesti tarkastelun mielenkiinto kohdistui myös siihen, miten paljon kirjasarjat käyttävät ylipäänsä esimerkkejä analogioiden mahdollistajina riippumatta analogian tasosta.

Tutkimuksen kohteiksi valittiin kirjasarjat yläkoulusta, lukion lyhyestä ja pitkästä matematiikasta niiden suosion perusteella. Taustatutkimuksen perusteella eniten käytettyinä oppikirjoina kohteiksi valikoituivat Laskutaito, Lyhyt matikka ja Pyramidi. Tutkimukseen valikoituivat näin ollen Laskutaito 7 ja 9, Lyhyt matikka 1, 3 ja 4 sekä Pyramidi 1, 2, 7 ja 8 soveltuvin osin.

Tutkimuksen ensimmäinen pääkysymys oli: millaisia oppikirjojen funktioihin liittyvät esimerkit ovat yläkoulussa ja lukiossa? Luokitteluanalyysin perusteella näyttää siltä, että esimerkit ovat lähes poikkeuksetta luonteeltaan suljettuja. Opetussuunnitelmat eivät tuo esille erikseen avointen lähtökohtien, prosessien tai lopputulosten tärkeyttä matemaattisessa ongelmanratkaisussa. Kaiken kaikkiaan opetussuunnitelmat ohjaavat matematiikan opetusta suljettuihin ongelmiin, vaikka koulun ulkopuoliset ongelmat sisältävät usein myös avoimia piirteitä. Tältä osin matematiikan opetustamme tulisi muuttaa opetussuunnitelmatasolta käsin, mikä todennäköisesti muokkaisi myös oppimateriaaleja paremmin avointa ongelmanratkaisua huomioiviksi.

Opetussuunnitelmat ja oppikirjat vastasivat toisiaan huonosti analyysitulosten perusteella. Matemaattisen osaamisen piirteet korostuivat oppikirjojen esimerkeissä ja niiden analogiasuhteissa eri tavalla kuin opetussuunnitelman perusteet edellyttäisivät. Yhteistä kaikille oppikirjoille oli, että niiden esimerkit keskittyivät enemmän proseduraalisen sujuvuuden piirteeseen kuin opetussuunnitelmien perusteella olisi syytä. Myös tehtävien ja esimerkkien välisen analogiasuhteen painottuminen proseduuritasolle viittaa siihen, että oppikirjoissa painotetaan liikaa mekaanisia ja rutiininomaisia osaamisalueita. Oppikirjoja koskevissa aiemmissa tutkimuksissa on päädytty samansuuntaisiin tuloksiin (vrt. Törnroos 2004, 34–35).

Esimerkkien kognitiivisen alueen luokittelu perustettiin usein käytettyyn jaotteluun: tietäminen, soveltaminen ja päättely (ks. esim. Joutsenlahti 2005, 120–124; OECD 2013; Mullis ym. 2009). Laskutaidossa esiintyi suunnilleen yhtä paljon tietämisen ja soveltamisen kognitiivisen alueen esimerkkejä. Päättelyesimerkkejä ei esitetty Laskutaidossa ollenkaan. TIMSS 2011 tutkimuksessa suomalaiset kahdeksasluokkalaiset menestyivät kuitenkin melko tasaisesti jokaisella kognitiivisella alueella. Tietäminen ja päättely olivat jonkin verran heikompia alueita kuin soveltaminen (Mullis, Martin, Foy & Arora 2012, 150). Päättelyalueen puuttuminen esimerkeistä ei siis ole vaikuttanut oppilaiden taitoihin merkittävästi. Luultavasti selitystä tähän voidaan hakea harjoitustehtävien luonteesta, sillä loppujen lopuksi ne määrittävät oppimisprosessien kohteita ja oppimistulosten luonnetta paremmin kuin esimerkit. Esimerkit luultavasti vain heijastelevat löyhästi sitä, millaiseksi oppimisprosessi lopulta muotoutuu, kun oppija tekee oppikirjojen tehtäviä. Lukion kirjoista Lyhyt matikka oli selkeästi soveltamisen kognitiiviseen alueeseen keskittynyt. Pyramidi puolestaan painotti suurin piirtein samassa määrin tietämistä ja soveltamista esimerkeissään. Päättelyesimerkkejä esiintyi myös jonkin verran Pyramidissa.

Kognitiivisen alueen painotukset vaihtelivat tarkastelluissa kirjasarjoissa kursseittain, mutta myös johdonmukaisia kehityssuuntia voitiin havaita. Päättelyesimerkit yleistyivät molemmissa lukion kirjasarjoissa kurssien edetessä. Pyramidissa tietämisen alueelle liitetyt esimerkit vähenivät kurssien myötä. Lyhyessä matikassa puolestaan soveltamisesimerkit yleistyivät selkeästi viimeisessä analysoidussa kurssissa, jolloin niiden osuus oli peräti 82 prosenttia kaikista esimerkeistä. Näiden havaintojen perusteella on selvää, että koulun eri tasoilla oppikirjat ovat luonteeltaan selkeästi toisistaan poikkeavia.

Tutkimuksessa käytettiin luokittelun tukena tehtäväkategorisointia, joka on kehitelty Kilpatrickin, Swaffordin ja Findellin (2001) matemaattisen taitavuuden mallin sekä Wilsonin taksonomian (1971) avulla. Tehtäväkategorioita oli seitsemän: käsitetieto, ominaisuus, mekaaninen, rutiini, strategia, sovellus ja päättely. Tehtäväkategorioita on käytetty aiemmin lukion pitkän matematiikan ylioppilaskirjoitusten ja pääsykokeiden matemaattisten osuuksien luokitteluun (Krook 2014). Luokittelusysteemiä kehitettiin edelleen tätä tutkimusta varten.

Tehtävätyyppien tarkastelu paljasti kognitiivisia alueita tarkemmin oppikirjasarjojen välisiä eroja esimerkkien luonteessa. Laskutaito on selkeästi matematiikan perusteisiin keskittynyt kirjasarja, sillä esimerkit olivat lähes yksinomaan ominaisuustehtäviä, mekaanisia tehtäviä tai rutiinitehtäviä. Lyhyt matikka -sarjassa esimerkit luokittuivat melko tasaisesti eri tehtäväkategorioihin lukuun ottamatta selkeästi hallitsevaa rutiinitehtävien osuutta. Pyramidissa puolestaan painotettiin kahden tyyppisiä esimerkkejä: ominaisuus- ja rutiinitehtäviä. Päättelytehtävät olivat vahvasti edustettuina varsinkin myöhemmissä kursseissa. Ominaisuusesimerkkien osuuden kasvattaminen voisi olla perusteltua Lyhyt matikka -sarjassa, sillä tähän kategoriaan liittyvän osaamisen on havaittu heijastuvan yleisemminkin matematiikan osaamiseen muiden tehtäväkategorioiden alueella (Krook 2014, 69–70).

Esimerkkien ratkaisuprosesseja tarkasteltiin modulaarisen ja molaarisen ulottuvuuden avulla. Modulaaristen ratkaisuprosessien on havaittu edistävän etenkin noviisien oppimista molaarisiin prosesseihin verrattuna (Gane 2006, 45–47). Pieniin ratkaisun elementteihin keskittymisen on modulaarisissa esimerkeissä havaittu olevan oppimisen kannalta tehokasta (Gerjets ym. 2004, 41–42). Näin ollen oli mielenkiintoista tarkastella oppikirjojen esimerkkien jakautumista näihin kahteen luokkaan. Luokittelun tulokset olivat modulaarisen ja molaarisen ulottuvuuden osalta varsin erilaisia kirjasarjojen välillä. Laskutaidossa modulaarinen lähestymistapa oli nimittäin selkeästi molaarista yleisempi, vaikka molemmat ratkaisuprosessin tyypit esiintyivät esimerkeissä. Lyhyt matikka puolestaan painotti molaarisia ratkaisuprosesseja, vaikka myös modulaarisia ratkaisuprosesseja oli esimerkeissä. Pyramidin osalta molaariset ratkaisuprosessit olivat hallitsevasti edustettuna, joten modulaarisia esimerkkejä esiintyi vain vähän.

Kirjasarjat noudattavat teoreettista ymmärrystä modulaaristen ja molaaristen ratkaisuprosessien paikasta oppimistason eri kohdissa. Tähän viittaa se, että molaariset esimerkit ovat harvinaisimpia Laskutaidossa ja yleisimpiä Pyramidissa. Lukion pitkän matematiikan opiskelijoita voidaan kuitenkin luultavasti pitää samoilla perusteilla noviiseina kuin yläkoulun oppilaita opetettavien asioiden suhteen. Tämän vuoksi Pyramidissa esiintyvien esimerkkien taipumus esittää ainoastaan kategorisoituja, molaarisia, ratkaisuprosesseja ei välttämättä tue oppimista parhaalla mahdollisella tavalla. Jos oppiminen perustuu Pyramidi-kirjoja käytettäessä esimerkkien tarkasteluun, on se luultavasti luonteeltaan lähinnä tehtävätyyppien ja niiden ratkaisuprosessien tunnistamista ja yhteen liittämistä. Oppiminen ei näin ollen perustuisi ymmärtämiseen, vaan ensisijaisesti muistamiseen. Pitkässä matematiikassa teorian rooli ymmärtämisessä on kuitenkin todennäköisesti korostunut, joten tämän tutkimuksen perusteella ei voida kattavasti sanoa, onnistuuko vai epäonnistuuko Pyramidi ymmärtämiseen tähtäävän oppimisen mahdollistajana.

Toinen tutkimuksen pääkysymys koski oppikirjojen esimerkkien ja tehtävien välistä analogiaa. Analysoitujen oppikirjojen tehtävät luokitettiin sen mukaan, minkä tasoista proseduraalista samanlaisuutta ne sisälsivät esimerkkien kanssa. Proseduraalinen samanlaisuus on strukturaalisen ja pinnallisen samanlaisuuden lisäksi yksi näkökulma analogian lähteen ja kohteen välisen suhteen tutkimiseksi. Proseduraalisen samanlaisuuden kolme eri tasoa sisältävät myös aina tietyssä määrin pinnallisia ja strukturaalisia samanlaisuuksia, joita on perinteisesti käytetty analogioita koskevissa tutkimuksissa selittämään analogisen suhteen eri puolia.

Laskutaito, Lyhyt matikka ja Pyramidi sisälsivät funktioihin liittyvissä kappaleissaan toisistaan poikkeavan määrän analogioita ja erityisesti tehtäviä, joilla ei ollut analogista suhdetta esimerkkeihin. Analogioiden määrien ja prosentuaalisten osuuksien perusteella voitiin päätellä, että Laskutaito on kappaleiden osalta yksinkertaisin ja Pyramidi monimuotoisin kirjasarja. Pyramidissa esitetään siis useampia asioita samassa kappaleessa kuin toisissa analysoiduissa kirjasarjoissa. Tämä voitiin päätellä siitä, että valtaosa tehtävien luokituksista tehtiin ei analogiaa -luokkaan.

Kaiken kaikkiaan Laskutaidon tehtävät sisälsivät useimmiten syvän, proseduuritasoisen, analogian jonkin kappaleen esimerkin kanssa. Pyramidissa tämä osuus oli puolestaan pienin, joten tehtäviin ei usein löydy täysin analogista esimerkkiä. Oppija joutuu siis keskimäärin suurempien kognitiivisten haasteiden eteen Pyramidissa kuin Laskutaidossa tai Lyhyessä matikassa. Pyramidissa noin joka viides analysoitu tehtävä oli lisäksi sellainen, että se ei ollut analoginen minkään esimerkin kanssa, mikä haastaa edelleen oppijaa kehittämään skemaattista tietopohjaa ja tarkastelemaan matematiikan teoreettista perustaa ratkaisujen tuottamiseksi. Näiden havaintojen perusteella Laskutaito, Lyhyt matikka ja Pyramidi suhteutuvat opetussuunnitelmien tavoitteisiin oikeansuuntaisesti. Toinen asia on, onko matematiikan oppiminen, varsinkin Laskutaidon avulla, liikaa syviin esimerkkien ja tehtävien välisiin analogioihin perustuvaa. Laskutaidossa nimittäin noin 63 prosenttia tehtävistä voidaan ratkaista käytännössä suoraan esimerkkien avulla, koska ne ovat analogisia esimerkkien kanssa syvimmällä, proseduurin, tasolla. Matalamman tason analogiat olisivat oppimisen kannalta hyödyllisiä, sillä ne luultavasti pakottavat oppijan kasvattamaan ymmärrystään aiheesta ja tarkkailemaan oppimistaan tehokkaammin kuin syvien analogioiden avulla tapahtuvassa oppimistilanteessa.

Syvien analogioiden rooli on tärkeä oppimisen alkuvaiheessa, jolloin ne vaikuttavat kognitiivista kuormitusta hillitsevästi. Kognitiivisen kuorman hillintä on tarpeen, koska ollessaan liian suuri se vaikuttaa negatiivisesti oppimiseen. (Van Loon-Hillen ym. 2012, 89–99; vrt. Carroll 1994, 360–367.) Modulaaristen ratkaisuprosessien ja syvien analogiatasojen tarkoitukseksi voi näin ollen nähdä kognitiivisen kuorman kohtuullistamisen ja optimoinnin oppimisen kannalta. Oppikirjojen tehtäväsarjoja tarkasteltiin sen suhteen, miten eri analogiatasot esiintyvät tehtävien ja esimerkkien välillä tehtävien edetessä. Sama tarkastelu tehtiin myös eri kurssien kesken. Tämä tarkastelu oli mielekästä tehdä kognitiivisen kuormituksen teorian perusteella, koska sen mukaan oppimisprosessin alussa syvien analogioiden tulisi olla hyvin edustettuna ja niiden tulisi vähentyä oppimisprosessin edistyessä.

Oppikirjojen esimerkkien ja tehtävien välisten analogiasuhteiden tarkastelu osoitti kurssien kehityskuluissa olevan useita mahdollisia epäkohtia. Laskutaito 7 ja Pyramidi 1 voitiin tulkita, ei analogiaa -kategorian suuren osuuden ja proseduuri-kategorian pienuuden perusteella, vaikeammiksi kuin jälkimmäiset kurssit näissä kirjasarjoissa. Laskutaito 7 ja Pyramidi 1 olivat sarjassaan haastavia, koska ne poikkesivat jälkimmäisistä osista huomattavasti tehtävien ja esimerkkien välisen analogian suhteen. Lyhyt matikka -sarjassa analogiasuhteiden kehitys oli kurssien välillä hieman maltillisempaa, vaikka kolmannessa kurssissa olikin liian vähän strategiatason analogioita ja tehtäviä, joilla ei ole analogiaa esimerkkien kanssa. Lyhyt matikka 3 oli näin ollen ainakin osittain liikaa proseduuritason analogioihin keskittynyt, mutta periaatetason suuri osuus tasoitti tätä epäkohtaa.

Tehtäväsarjojen tarkastelu paljasti, että analysoidut oppikirjat eroavat toisistaan myös siinä, miten analogiasuhteet tehtävien ja esimerkkien välillä kehittyvät tehtäväsarjojen alusta loppuun. Kaikille oppikirjasarjoille oli ominaista, että proseduuritason analogiat vähenivät tehtäväsarjojen loppua kohden. Strategiatason osalta tehtäväsarjat eivät tuoneet esille kovin selkeitä kehityskulkuja, vaikka strategiatason analogiat hieman yleensä yleistyivät tehtäväsarjojen edetessä. Toisin kuin Pyramidissa ja Lyhyessä matikassa, Laskutaidossa ei hyödynnetty periaatetason analogioiden yleistymistä tehtäväsarjojen loppua kohden. Kaikissa kirjasarjoissa ei analogiaa -kategorian tehtävien osuus kasvoi tehtäväsarjojen edetessä. Laskutaidosta ja Lyhyestä matikasta voidaan tästä huolimatta todeta, että ne eivät noudattaneet tehtäväsarjoissaan analogioiden avulla tapahtuvan oppimisen hyviä piirteitä. Pyramidi onnistui tässä luultavasti kaikista parhaiten, sillä syvien analogioiden osuus pieneni johdonmukaisesti tehtäväsarjoissa ja vastaavasti matalan tason analogiat (mukaan lukien ei analogiaa -tehtävät) yleistyivät selkeästi mitä pidemmälle tehtäväsarjat etenivät.

Oppikirjojen vertailu antoi mahdollisuuden vielä yhteen tarkastelunäkökulmaan eli siihen miten eri aihealueet jatkuvat yläkoulusta lukion opintoihin. Tässä tarkastelussa hyödynnettiin luokittelutuloksia, jotka jaettiin kappaleittain neljään ryhmään, joihin kuuluneet kappaleet luovat aiheiden jatkumon yläkoulusta lukioon. Tehtävien syvimpien analogiatasojen perusteella voitiin päätellä, miten analogioiden hyödyntäminen auttaa oppijaa eri opetustasoilla.

Lyhyt matikka ei onnistunut kaikissa aihealueissa jatkamaan sujuvasti Laskutaidon vastaavista aiheista. Joiltakin osin Lyhyt matikka oli nimittäin selkeästi enemmän tehtävien ja esimerkkien analogioihin tukeutuva kuin Laskutaito. Pyramidi onnistui kuitenkin hyvin etenemään Laskutaidon vastaavista aiheista painottamalla vähemmässä määrin syviä analogioita ja korostamalla matalan tason analogioita johdonmukaisesti. Pyramidin ja Laskutaidon erot olivat kuitenkin osassa aihealueita melko suuria, joten Pyramidi saattaa olla oppijalle toisinaan hyvinkin haastava oppikirja.

Oppikirjojen kehittämisen kannalta tutkimuksessa havaittiin useita epäkohtia, joihin keskittyminen saattaisi parantaa oppimateriaalien tasoa entisestään. Eri kurssien osalta olisi esimerkiksi Laskutaidossa ja Pyramidissa syytä tarkastella tehtävien ja esimerkkien analogisten suhteiden pientä määrää ensimmäisissä kursseissa.

Yleisesti kirjasarjoja tarkastellessa kävi ilmi, että proseduuritason analogioiden suurta määrää voisi olla aiheellista vähentää ainakin Laskutaidossa lisäämällä strategiatason analogioita tehtävien ja esimerkkien välille. Tällöin oppiminen ei perustuisi suoraan esimerkkien esittelemiin ratkaisuprosesseihin nykyisessä laajuudessa. Matematiikka saattaa näyttäytyä Laskutaitoa käyttävälle oppilaalle nyt hyvin mekaanisena ratkaisuprosessien oppimisena, koska esimerkit tarjoavat useimmiten selkeän mallin tehtävien tekemiseksi. Tehtäväkategorioiden tarkastelu paljasti, että Laskutaito kehittyy yläkoulun aikana ymmärtämistä paremmin tukevaksi. Tämä voitiin päätellä rutiiniesimerkkien ja mekaanisten esimerkkien pienemmästä ja ominaisuusesimerkkien suuremmasta osuudesta yhdeksännen luokan kirjassa verrattuna seitsemännen luokan kirjaan.

Esimerkit ovat Laskutaidossa hyviä siinä mielessä, että ne soveltuvat modulaaristen prosessien perusteella yläkoululaisten opetuksellisiin tarpeisiin. Pyramidissa puolestaan esimerkit ovat luonteeltaan edistyneille oppijoille suunnattuja, mikä ei välttämättä johda parhaisiin mahdollisiin oppimistuloksiin. Tässä tutkimuksessahan lukion aihealueet pohjautuivat ainakin jossakin määrin yläkoulun aihealueisiin. Tästä huolimatta ei voida olettaa, että oppija olisi muodostanut näistä aiheista vahvan tietopohjan yläkoulun aikana. Pyramidiin tulisi luultavasti sisällyttää enemmän modulaarisia esimerkkejä kohtiin, joissa oppijan ei voida olettaa muodostaneen vahvaa ymmärrystä käsiteltävistä asioista. Tämä voisi edistää oppimista, joka perustuisi ulkoa opettelun sijaan ymmärtämiseen.

Lyhyt matikka oli joidenkin tarkastelunäkökulmien perusteella epäjohdonmukainen kirjasarja. Tehtäväkategorioiden tarkastelu paljasti, että esimerkit muuttuvat kurssien edetessä mallintamaan rutiinitehtäviä useiden muiden kategorioiden kustannuksella. Tältä osin Lyhyt matikka -sarjassa voisi olla paikallaan esimerkkityyppien uudelleen pohtiminen. Kun asiaa tarkastellaan kognitiivisen kuormituksen teorian perspektiivistä, rutiinitehtävien osuuden tulisi nimittäin luultavasti vähentyä kurssien edetessä. Lyhyen matikan epäjohdonmukaisuudet näkyivät myös siinä, miten eri aihealueet jatkuivat yläkoulun matematiikasta. Aihealueiden tarkastelu niiden pohjautumisesta aiempiin opetuskohteisiin voisi saada aikaan selkeämmän jatkumon koulutasojen välille.

Vastaavien tutkimusten puuttuessa tuloksia on hankala verrata aiempiin tutkimuksiin. Tässä tutkimuksessa onkin aiempien tutkimusten vahvistamisen sijaan pyritty luomaan uusia mahdollisuuksia tarkastella esimerkkejä teoreettisista käsitteistä lähtien. Jatkotutkimukset ovat tästä johtuen tarpeellisia.

Tutkimuksen aikana heräsi useita kysymyksiä, joihin ei voitu vastata tämän tutkimuksen aineiston perusteella. Tässä tutkimuksessa analysoitiin kaikki oppikirjojen esimerkit ja tehtävät, jotka liittyivät rajattuun aihealueeseen, mutta koulutyöskentelyssä näihin ei kaikkiin luultavasti ehditä paneutua. Olisikin siis mielenkiintoista tietää, millaisia tehtäviä ja esimerkkejä opettajat valitsevat tuntityöskentelyä varten. Erityisesti tämän tutkimuksen teemaan liittyen tarkasteluun voisi ottaa mukaan käsiteltyjen tehtävien luokittelun tehtäväkategorioiden tai kognitiivisten alueiden mukaisesti.

Jatkotutkimuksissa voitaisiin ottaa myös huomioon osioita, joita ei tässä tutkimuksessa käsitelty: teoriaosuudet ja kotitehtävät. Alun perin tässä tutkimuksessa oli tarkoitus analysoida teoriaosuuksien ja esimerkkien yhteyttä toisiinsa, mutta tämä näkökulma jouduttiin lopulta rajaamaan tutkimuksen ulkopuolelle. Toisaalta myös kotitehtävien ja tuntitehtävien suhde jäi kokonaan tarkastelematta. Kotitehtävät ovat oppimisen kannalta tärkeitä ja esimerkkien rooli korostuu kotitehtäviä tehtäessä, koska oppija ei pysty tukeutumaan muihin oppijoihin tai opettajaan yhtä vaivattomasti kuin luokkahuoneessa. Esimerkkien onkin todettu edistävän oppimista, koska ne auttavat oppijaa kotitehtävien tekemisessä. Oppijat luovuttavat kotitehtävissä harvemmin, kun heillä on tukenaan oppikirjojen esimerkkejä, jotka tarjoavat hyödynnettävissä olevan analogian. (Vrt. Carroll 1994, 360–367.) Tästä taustasta käsin olisi mielekästä jatkaa tutkimuksen keinoin esimerkkien ja kotitehtävien välisen analogian tarkastelua.

LÄHTEET

Anderson, L. & Krathwohl, D. 2001. Taxonomy for learning, teaching and assessing: a revision of Bloom's taxonomy of educational objectives. New York: Longman.

Applefield, J., Huber, R. & Moallem, M. 2000. Constructivism in theory and practice: toward a better understanding. High School Journal, vol. 84, nro 2, 35–53.

Atkinson, R., Derry, S., Renkl, A. & Wortham, D. 2000. Learning from examples: instructional principles from the worked examples research. Review of educational research, vol. 70, nro 2, 181–214.

Baddeley, A. 2006. Working memory: an overview. Teoksessa S. Pickering & G. Phye (toim.) Working memory and education. London: Academic Press.

Bhuyan, M. & Khan S. 2014. Teaching a numerical analysis for electrical engineering students in the cognitive domain. International journal of electrical engineering education, vol. 51, nro 1, 82–92.

Breen, S. & O'Shea, A. 2010. Mathematical thinking and task design. Bulletin of the Irish mathematical society, vol. 66, 39–49.

Boesen, J., Lithner, J. & Palm, T. 2010. The relation between types of assessment tasks and the mathematical reasoning students use. Educational studies in mathematics, vol. 75, nro 1, 89–105.

Carroll, W. 1994. Using worked examples as an instructional support in the algebra classroom. Journal of educational psychology, vol. 86, nro 3, 360–367.

Chen, Z. 2002. Analogical problem solving: a hierarchial analysis of procedural similarity. Journal of experimental psychology, vol. 28, nro 1, 81–98.

Erbas, A., Alacaci, C. & Bulut, M. 2012. A comparison of mathematics textbooks from Turkey, Singapore, and the United States of America. Educational sciences: theory & practice, vol. 12, nro 3, 2324–2330.

Eskola, J. & Suoranta, J. 1998. Johdatus laadulliseen tutkimukseen. Tampere: Vastapaino.

Fiegel, G. 2013. Incorporating learning outcomes into an introductory geotechnical engineering course. European journal of engineering education, vol. 38, nro 3, 238–253.

Fosnot, C. 1996. Constructivism: theory, perspectives and practice. New York: Teachers College Press.

Gane, B. 2006. Can modular examples and contextual interference improve transfer? Georgia Institute of Technology. School of Psychology.

Geary, D. 1996. Biology, culture, and cross-national differences in mathematical ability. Teoksessa R. Sternberg, T. Ben-Zeev (toim.) The nature of mathematical thinking. Mahwah (NJ): Erlbaum, 145–172.

Gentner, D. 1983. Structure-mapping: a theoretical framework for analogy. Cognitive science, vol. 7, nro 2, 155–170.

Gerjets, P., Scheiter, K. & Catrambone, R. 2004. Designing instructional examples to reduce intrinsic cognitive load: molar versus modular presentation of solution procedures. Instructional science, vol. 32, nro 1, 33–58.

Gerjets, P., Scheiter, K. & Catrambone, R. 2006. Can learning from molar and modular worked examples be enhanced by providing instructional explanations and prompting self-explanations? Learning and Instruction, vol. 16, nro 2, 104–121.

Hannula, M. & Oksanen, S. 2013. Opettajamuuttujien yhteys osaamisen muutokseen. Teoksessa J. Metsämuuronen (toim.) Perusopetuksen matematiikan oppimistulosten pitkittäisarviointi vuosina 2005–2012. Tampere: Opetushallitus.

Hannus, M. 1996. Oppikirjan kuvitus – koriste vai ymmärtämisen apu. Turun yliopiston julkaisuja, sarja C 122.

Heikkilä, J. 1981. Luovan ongelmanratkaisun didaktiikka. Helsinki: WSOY.

Heinonen, J. 2005. Opetussuunnitelmat vai oppimateriaali. Peruskoulun opettajien käsityksiä opetussuunnitelmien ja oppimateriaalien merkityksestä opetuksessa. Tutkimuksia 257. Helsingin yliopisto. Soveltavan kasvatustieteen laitos.

Hirsijärvi, S., Remes, P. & Sajavaara, P. 2009. Tutki ja kirjoita. Helsinki: Tammi.

Holyoak, K. & Thagard, P. 1989. Analogical mapping by constraint satisfaction. Cognitive science, vol. 13, nro 3, 295–355.

Häkkinen, K. 2002. Suomalaisen oppikirjan vaiheita. Helsinki: Suomen tietokirjailijat.

Inkeroinen, P. & Mattila, U. 2008. Derivaatasta ja differentiaalilaskennan kouluopetuksesta eri aikoina. Tampere: Tampereen yliopisto, matematiikan ja tilastotieteen laitos. Pro gradu -tutkielma.

Joutsenlahti, J. 1996. Matemaattisen ajattelun kehittyminen lukiossa. Tampereen yliopisto. Kasvatustieteen laitos. Lisensiaatintyö.

Joutsenlahti, J. 2004. Matemaattinen ajattelu lukiossa. Teoksessa: P. Räsänen, P. Kupari, T. Ahonen & P. Malinen (toim.) Matematiikka – näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen. Jyväskylä: Niilo Mäki Instituutti.

Joutsenlahti, J. 2005. Lukiolaisten tehtäväorientoituneen matemaattisen ajattelun piirteitä. 1990-luvun pitkän matematiikan opiskelijoiden matemaattisen osaamisen ja uskomusten ilmentämänä. Tampereen yliopisto. Opettajankoulutuslaitos. Väitöskirja.

Joutsenlahti, J. & Vainionpää, J. 2010. Oppimateriaali matematiikan opetuksessa ja osaamisessa. Teoksessa E. Niemi & J. Metsämuuronen (toim.) Miten matematiikan taidot kehittyvät? Matematiikan oppimistulokset peruskoulun viidennen vuosiluokan jälkeen vuonna 2008. Koulutuksen seurantaraportit 2010:2. Helsinki: Opetushallitus. 137–148.

Judin, L. 2009. Lukujonot ja trigonometriset funktiot lukion matematiikassa. Tampere: Tampereen teknillinen yliopisto, Matematiikan laitos. Diplomityö.

Kastberg, S. 2003. Using Bloom's taxonomy as a framework for classroom assessment. Mathematics teacher, vol. 96, nro 6, 402–405.

Kautto, K. & Riihiaho, K. 2006. Tuhattaituri matikkamatkalla laskutaidon maailmaan. Peruskoulun neljännen vuosiluokan matematiikan oppikirjojen analyysia. Tampere: Tampereen yliopisto, Opettajankoulutuslaitos. Pro gradu -tutkielma.

Kavonius, R. 2013. Lyhyen matematiikan opiskelijoiden kiinnostus sanallisiin soveltaviin tehtäviin. Luma Sanomat -verkkosivusto, luettu 3.2.2014. Saatavissa: http://www.luma.fi/artikkelit/2173/lyhyen-matematiikan-opiskelijoiden-kiinnostus-sanallisiin-soveltaviin-tehtaviin

Kilpatrick. J., Swafford. J. & Findell, B. 2001. Adding it up: Helping children learn mathematics. Washington DC: National Academy Press.

Kneppers, L., Elshout-Mohr, M., Van Boxtel, C. & Van Hout-Wolters, B. 2007. Conceptual learning in relation to near and far transfer in the secondary school subject of economics. European journal of psychology of education, vol. 22, nro 2, 115–129.

Krathwohl, R. 2002. A revision of Bloom's taxonomy: an overview. Theory into practice, vol 41, nro 4, 212–218.

Krook, T. 2014. Matemaattinen osaaminen ylioppilaskokeissa ja korkeakoulujen pääsykokeissa. Tampereen yliopisto. Informaatiotieteiden yksikkö. Sivuainetutkielma.

Kupari, P. & Törnroos, J. 2004. Matematiikan osaaminen peruskoulussa kansainvälisten arviointitutkimusten valossa. Teoksessa: P. Räsänen, P. Kupari, T. Ahonen & P. Malinen. Matematiikka – näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen. Jyväskylä: Niilo Mäki Instituutti.

Leino, J. 2004. Konstruktivismi matematiikan opetuksessa. Teoksessa: P. Räsänen, P. Kupari, T. Ahonen & P. Malinen. Matematiikka – näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen. Jyväskylä: Niilo Mäki Instituutti.

Mayer, R. & Hegarty, M. 1996. The process of understanding mathematical problems. Teoksessa R. Sternberg, T. Ben-Zeev (toim.) The nature of mathematical thinking. Mahwah (NJ): Erlbaum, 29–54.

Miettinen, R. 2000. Konstruktivistinen oppimisnäkemys ja esineellinen toiminta. Aikuiskasvatus, vol. 20, nro 4, 276–292.

Mikkilä-Erdmann, M., Olkinuora, E. & Mattila, E. 1999. Muuttuneet käsitykset oppimisesta ja opettamisesta – haaste oppikirjoille. Kasvatus, vol. 30, nro 5, 436–449.

Moreno, R. & Park, B. 2010. Cognitive load theory: historical development and relation to other theories. Teoksessa J. Plass, R. Moreno, R. Brünken (toim.) Cognitive load theory. Cambridge: Cambridge University Press.

Mullis, I., Martin, M., Foy, P. & Arora, A. 2012. TIMSS 2011 international results in mathematics. Chestnut Hill: TIMMS & PIRLS International Study Center.

Mullis, I., Martin, M., Ruddock, G., O'Sullivan, C. & Preuschoff, C. 2009. TIMSS 2011 assessment frameworks. Chestnut Hill, MA: TIMSS & PIRLS International Study Center, Boston College. Viitattu 23.8.2013. http://timssandpirls.bc.edu/timss2011/downloads/TIMSS2011_Frameworks.pdf

Novick, L. 1988. Analogical transfer, problem similarity, and expertise. Journal of experimental psychology: learning, memory, and cognition, vol. 14, nro 3, 510–520.

OECD 2013. PISA 2012 Assessment and analytical framework: mathematics, reading, science, problem solving and financial literacy. OECD Publishing. Tulostettu 25.11.2013. http://dx.doi.org/10.1787/9789264190511-en

Opetushallitus 2003. Lukion opetussuunnitelman perusteet 2003. Luettu 16.12.2013. Saatavissa: http://www.oph.fi/download/47345_lukion_opetussuunnitelman_perusteet_2003.pdf

Opetushallitus 2004. Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet 2004. Luettu 1.3.2014. Saatavissa: http://www.oph.fi/download/139848_pops_web.pdf

Paas, F., Renkl, A. & Sweller, J. 2004. Cognitive Load Theory: Instructional implications of the interaction between information structures and cognitive architecture. Instructional science, vol. 32, nro 1, 1–8.

Patrikainen, S. 2012. Luokanopettajan pedagoginen ajattelu ja toiminta matematiikan opetuksessa. Tutkimuksia 342. Helsinki: Helsingin yliopisto.

Pehkonen, E. 1997. Use of open-ended problems in mathematics classroom. Research report 176. Helsingin yliopisto.

Pehkonen, E. 2012. Luovuus matematiikassa. Dimensio, vol. 77, nro 1, 48–55.

Pehkonen, L. 2004. The magic circle of the textbook - an option or an obstacle for teacher change. Teoksessa M. Hoines & A. Fuglestad (toim.) Proceedings of the 28th conference of the international group for the psychology of mathematics education, vol. 3, 513–520. Bergen: PME.

Perkkilä, P. 1998. Kahden alkuopetuksen matematiikan oppikirja -sarjan didaktinen analyysi. Jyväskylän yliopisto. Opettajankoulutuslaitos. Lisensiaatintutkimus.

Pickering, S. & Phye, G. 2006. Working memory and education. London: Academic Press.

Pointon, A. & Sangwin, C. 2003. An analysis of undergraduate core material in the light of hand-held computer algebra systems. International journal of mathematical education in science and technology vol. 34, nro 5, s. 671–686.

Retnowati, E. 2010. Worked example effects in individual and group work setting. Educational psychology, vol. 30, nro 3, s. 349–367.

Ross, B. & Kilbane, M. 1997. Effects of principle explanation and superficial similarity on analogical mapping in problem solving. Journal of experimental psychology, vol. 23, nro 2, 427–440.

Sahlberg, P., Meisalo, V., Lavonen, J. & Kolari, M. 1993. Luova ongelmanratkaisu koulussa. Opetushallitus ja FINISTE. Helsinki: Painatuskeskus.

Saifaddin, H. 2011. The role of procedural similarity, self-explanation and self-constituted diagrams in analogical problem solving. University of Nottingham. Väitöskirja.

Sangwin, C. 2003. New opportunities for encouraging higher level mathematical learning by creative use of emerging computer assessment. International journal of mathematical education in science and technology vol. 34, nro 6, s. 813–829.

Sanoma.com -sivusto. 2011. Sanoma Pro keskittyy oppimisliiketoimintaan vahvistetuin voimin, luettu 7.2.2014. Saatavissa: http://www.sanoma.com/fi/uutiset/sanoma-pro-keskittyy-oppimisliiketoimintaan-vahvistetuin-voimin.

Schmidt, W. 2012. Measuring content through textbooks: the cumulative effect of middle-school tracking. Teoksessa G. Gueudet, B. Pepin & L. Trouche (toim.) From text to 'lived' resources: Mathematics curriculum materials and teacher development, 143–160. Dordrecht: Springer.

Schlimm, D. 2008. Two ways of analogy: extending the study of analogies to mathematical domains. Philosophy of science, vol. 75, nro 2, 178–200.

Shen, C. & Tsai, H. 2009. Design principles of worked examples: a review of the empirical studies. Journal of instructional psychology, vol. 36, nro 3, 238–244.

Shield, M. & Dole, S. 2013. Assessing the potential of mathematics textbooks to promote deep learning. Educational studies in mathematics, vol. 82, nro 2, 183–199.

Stacey, K. & Vincent J. 2009. Modes of reasoning in explanations in Australian eight-grade mathematics textbooks. Educational studies in mathematics, vol. 72, nro 3, 271–288.

Sullivan, P., Warren, E. & White, P. 2000. Students' responses to content specific open-ended mathematical tasks. Mathematics Education Research Journal, vol. 12, nro 1, 2–17.

Tuomi, J. & Sarajärvi, A. 2009. Laadullinen tutkimus ja sisällönanalyysi. Helsinki: Tammi.

Törnroos, J. 2004. Opetussuunnitelma, oppikirjat ja oppimistulokset – seitsemännen luokan matematiikan osaaminen arvioitavana. Koulutuksen tutkimuslaitos. Tutkimuksia 13. Jyväskylä: Jyväskylän yliopisto.

Van Loon-Hillen, N., Van Gog, T. & Brand-Gruwel, S. 2012. Effects of worked examples in a primary school mathematics curriculum. Interactive learning environments, vol. 20, nro 1, 89–99.

Van Gog, T., Paas, F. & Van Merriënboer, J. 2004. Process-oriented worked examples: improving transfer performance through enhanced understanding. Instructional Science, vol. 32, nro 1, 83–98.

Wilson, J. 1971. Evaluation of learning in secondary school mathematics. Teoksessa B. Bloom, T. Hasting & G. Madaus (toim.). Handbook on formative and summative evaluation of student learning. New York: McGraw-Hill. 643–695.

Analysoidut oppikirjat

Aalto, A., Kangasaho, J., Kylliäinen, O., Metiäinen, A., Mäkinen, J. & Tahvanainen, J. 2013. Lyhyt matikka 1: Lausekkeet ja yhtälöt. Helsinki: Sanoma Pro.

Aalto, A., Kangasaho, J., Kylliäinen, O. & Tahvanainen, J. 2013. Lyhyt matikka 3: Matemaattisia malleja 1. Helsinki: Sanoma Pro.

Aalto, A., Kangasaho, J., Kylliäinen, O., Metiäinen, A., Mäkinen, J. & Tahvanainen, J. 2008. Lyhyt matikka 4: Matemaattinen analyysi. Helsinki: WSOY.

Härkönen, R., Kontkanen, P., Lehtonen, J., Luosto, K. & Ronkainen, A. 2013. Pyramidi 7: Derivaatta. Helsinki: Sanoma Pro.

Härkönen, R., Kontkanen, P., Luosto, K., Ronkainen, A., Savolainen, S., Nurmi, J. & Nurmiainen, R. 2012. Pyramidi 2: Polynomifunktiot. Helsinki: Sanoma Pro.

Kontkanen, P., Lehtonen, J., Luosto, K. & Savolainen, S. 2014. Pyramidi 8: Juuri- ja logaritmifunktiot. Helsinki: Sanoma Pro.

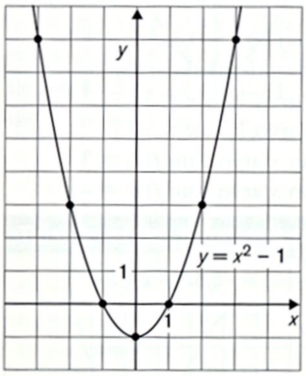
Härkönen, R., Kontkanen, P., Luosto, K., Ronkainen, A., Savolainen, S., Nurmi, J. & Nurmiainen, R. 2013. Pyramidi 1: Funktiot ja yhtälöt. Helsinki: Sanoma Pro.

Laurinolli, T., Lindroos-Heinänen, R., Luoma-aho, E., Sankilampi, T., Selenius, R., Talvitie, K. & Vähä-Vahe, O. 2013. Laskutaito 7. Helsinki: Sanoma Pro

Laurinolli, T., Lindroos-Heinänen, R., Luoma-aho, E., Sankilampi, T., Talvitie, K. & Vähä-Vahe, O. 2013. Laskutaito 9. Helsinki: Sanoma Pro.

LIITTEET

Liite 1: Tehtäväkategorioita havainnollistavia esimerkkejä



Esimerkki 1

b) Onko paraabeli $y = x^2 - 1$ ylöspäin vai alaspäin aukeava?

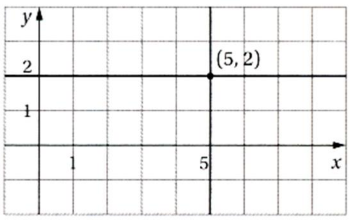
▶ b) Paraabeli on ylöspäin aukeava.

Kuva 16. Käsitetieto: Laskutaito 9 (Laurinolli ym. 2013, 102).

ESIMERKKI 3

Muodosta yhtälö pisteen $(5, 2)$ kautta kulkevalle

b) y-akselin suuntaiselle suoralle.



RATKAISU

b) y-akselin suuntaisella suoralla ei ole kulmakerrointa, joten suoran yhtälön kaavaa ei voida käyttää. Yhtälö päätellään: piste (x, y) on pisteen $(5, 2)$ kautta kulkevalla y-akselin suuntaisella suoralla, kun pisteen x-koordinaatti on 5 eli kun

$x = 5.$

Yhtälössä ei esiinny y:tä, joten yhtälöä ei voi saattaa muotoon $y = kx + b$.

Kuva 17. Ominaisuusesimerkki: Lyhyt matikka 3 (Aalto, Kangasaho, Kylliäinen & Tahvanainen 2013, 33–34).

Esimerkki 2

Funktion lauseke on $f(x) = x^2 - 3x$.

Laske funktion arvo **a)** $f(2)$ **b)** $f(-5)$ **c)** $f\left(\frac{1}{3}\right)$.

▶ **a)** $f(2) = 2^2 - 3 \cdot 2 = 4 - 6 = -2$

b) $f(-5) = (-5)^2 - 3 \cdot (-5) = 25 + 15 = 40$

c) $f\left(\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^2 - 3 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9} - 1 = -\frac{8}{9}$

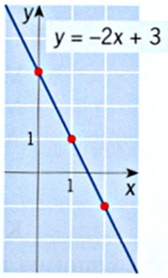
Kuva 18. Mekaaninen esimerkki: Laskutaito 9 (Laurinolli ym. 2013, 68).

Liite 2: Tehtäväkategorioita havainnollistavia esimerkkejä

Esimerkki 1 Piirrä funktion $f(x) = -2x + 3$ kuvaaja. Määritä funktion nollakohta.

Ratkaisu Piirretään funktion kuvaaja laskemalla ainakin kaksi suoran pistettä.

x	y = −2x + 3
0	3
1	1
2	−1



Lasketaan funktion nollakohta ratkaisemalla yhtälö $f(x) = 0$:

$$\begin{aligned} -2x + 3 &= 0 \\ -2x &= -3 \\ x &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Nollakohta on $x = 1\frac{1}{2}$.

Kuva 19. Rutiiniesimerkki: Pyramidi 2 (Härkönen ym. 2012, 31).

Liite 3: Tehtäväkategorioita havainnollistavia esimerkkejä

ESIMERKKI 1

Kallen, Eeron ja Elinan kesämökit ovat saman yksityistien varrella. Päätieltä on matkaa tonteille 200 m, 350 m ja 500 m. Vuotuiset 600 euron tienhoitokulut päätetään jakaa näiden matkojen suhteessa. Kuinka suuret ovat tienhoito-osuudet?

RATKAISU

Kulut jaetaan suhteessa 200 : 350 : 500. Ratkaistaan sellainen rahamäärä x, että jaettavat osuudet ovat $200x$, $350x$ ja $500x$. Muodostetaan yhtälö.

$$200x + 350x + 500x = 600 \qquad \text{Osuuksien summa on 600 euroa.}$$

Tapa 2. Yhtälö voidaan ratkaista ensimmäisen asteen yhtälön ratkaisumenetelmällä.

$$\begin{aligned} 200x + 350x + 500x &= 600 \\ 1050x &= 600 \qquad |:1050 \\ x &= \frac{600}{1\,050}\ (€) \end{aligned}$$

Osuudet ovat:

Kalle: $200 \cdot \frac{600}{1\,050}\ € \approx 114\ €$

Eero: $350 \cdot \frac{600}{1\,050}\ € = 200\ €$

Elina: $500 \cdot \frac{600}{1\,050}\ € \approx 286\ €$

VASTAUS

Kalle 114 euroa, Eero 200 euroa ja Elina 286 euroa

Kuva 20. Strategiaesimerkki: Lyhyt matikka 1 (Aalto ym. 2013, 55).

Liite 4: Tehtäväkategorioita havainnollistavia esimerkkejä

ESIMERKKI 4

Einari lähtee polkupyörällä Sysmästä nopeudella 15 km/h kohti 96 kilometrin päässä olevaa Kuusankoskea. Sirkka lähtee vastaan samaan aikaan Kuusankoskelta traktorilla nopeudella 35 km/h. Kuinka kauan Einarin pitää polkea, ennen kuin hän pääsee traktorin lavalle?

RATKAISU

Olkoon x lähdöstä kulunut aika tunteina.

Tarkastellaan Einarin ja Sirkan etäisyyksiä Sysmästä.

Einari etääntyy Sysmästä 15 kilometriä tunnissa. Kun on kulunut x tuntia, Einarin etäisyys Sysmästä on $15x$ kilometriä.

Sirkka lähestyy Sysmää nopeudella 35 km/h. Sirkan etäisyys Sysmästä x tunnin kuluttua on $96-35x$ kilometriä.

Kohtaamishetkellä molempien etäisyydet Sysmästä ovat samat.

$$
\begin{aligned}
15x &= 96-35x \quad && | +35x \\
50x &= 96 && | :50 \\
x &= 1{,}92
\end{aligned}
$$

Yhtälö voidaan ratkaista myös symbolisella laskimella.

Yhtälön ratkaisu on $x = 1{,}92$. Siis Sirkka ja Einari kohtaavat 1,92 tunnin kuluttua.
Ilmaistaan aika tunteina ja minuutteina. Koska yksi tunti on 60 minuuttia, niin 0,92 tuntia on $0{,}92 \cdot 60 \approx 55$ minuuttia. Sirkka ja Einari kohtaavat yhden tunnin ja 55 minuutin kuluttua.

VASTAUS

1 tunti ja 55 minuuttia

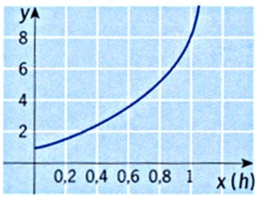
Kuva 21. Sovellusesimerkki: Lyhyt matikka 1 (Aalto ym. 2013, 43).

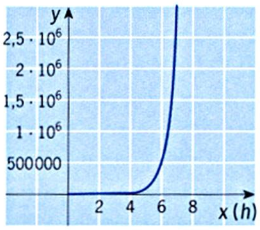
Liite 5: Tehtäväkategorioita havainnollistavia esimerkkejä

Esimerkki 1 Escherichia coli -bakteeri aiheuttaa muun muassa virtsatieinfektiota. Se jakautuu joka 20. minuutti kahdeksi bakteeriksi. Ilmoita bakteerien lukumäärä y, kun aikaa on kulunut x tuntia bakteerin joutumisesta elimistöön.

Ratkaisu Koska bakteerien lukumäärä kaksinkertaistuu 20 minuutissa, niiden määrä on nelinkertainen 40 minuutin kuluttua ja kahdeksankertainen tunnin kuluttua. Jos elimistöön pääsee yksi bakteeri, bakteerien lukumäärälle saadaan matemaattinen malli

$y = 8^x$, jossa x on aika tunteina





Bakteerien lukumäärä kasvaa eksponentiaalisesti (kantaluku $8 > 1$), ja mallin mukaan niiden määrä on 12 tunnin kuluttua jo 8^{12} eli lähes 69 miljardia.

Kuva 22. Päättelyesimerkki: Pyramidi 1 (Härkönen ym. 2013, 134)

Liite 6: Laskutaito ja Lyhyt matikka – aiheiden vastaavuudet ryhmittäin

Ryhmä	Kurssi	Aihe	Kurssi	Aihe
1	7	76 Suoran yhtälö	1	Suureiden keskinäinen riippuvuus
1	7	77 Suoran piirtäminen yhtälön avulla	1	Ensimmäisen asteen yhtälö
1	7	80 Kuvaaja ja sen tulkinta	3	Lineaarinen muutos ja kulmakerroin
1	9	37 Suoran yhtälön muodostaminen	3	Kulmakertoimen laskeminen
1	9	39 Lineaarinen mallintaminen	3	Suoran yhtälön muodostaminen
2	7	78 Erilaisia suoria	1	Lineaarinen funktio f(x)=ax+b
2	7	60 Funktiokone	1	Ensimmäisen asteen yhtälön sovelluksia
2	9	29 Funktio	1	Toisen asteen funktio ja toisen asteen yhtälö
2	9	30 Funktion arvo	3	Suoran yhtälö
2	9	32 Lineaarinen funktio ja suora	3	Suorien leikkauspiste
2	9	33 Lineaarisia funktioita	3	Kahden pisteen määräämä suora
2	9	36 Suoran yhtälö	3	Eksponenttifunktio
2	9	46 Toisen asteen funktio ja paraabeli		
2	9	47 Toisen asteen funktioita		
3	9	31 Funktion kuvaaja ja nollakohdat	4	Funktion kasvaminen ja väheneminen
3	9	34 Lineaarisen funktion nollakohta	4	Funktion ääriarvot
3	9	35 Suoran kulmakerroin	4	Funktion suurin ja pienin arvo välillä
3	9	48 Heittoliike	4	Sovelluksia avaruusgeometriaan
4	9	41 Tietoliikenne (verrannollisuus)	1	Suoraan ja kääntäen verrannolliset suureet
4	9	42 Suoraan verrannollisuus	1	Verrannollisuussovelluksia
4	9	43 Kääntäen verrannollisuus		
4	9	44 Kääntäen verrannollisia suureita		
4	9	45 Verrannollisuussovelluksia		

Liite 7: Laskutaito ja Pyramidi – aiheiden vastaavuudet ryhmittäin

Ryhmä	Kurssi	Aihe	Kurssi	Aihe
1	7	76 Suoran yhtälö	1	7.1 Määritelmä (funktio)
1	7	77 Suoran piirtäminen yhtälön avulla	1	7.2 Funktion kuvaaja
1	7	80 Kuvaaja ja sen tulkinta	1	7.3 Potenssifunktio
1	7	60 Funktiokone	1	7.4 Eksponenttifunktio
1	7	78 Erilaisia suoria	8	2.1 Yhdistetyn funktion määritelmä
1	9	29 Funktio	8	3.1 Käänteisfunktion määritelmä
1	9	30 Funktion arvo		
1	9	37 Suoran yhtälön muodostaminen		
1	9	39 Lineaarinen mallintaminen		
1	9	46 Toisen asteen funktio ja paraabeli		
1	9	47 Toisen asteen funktioita		
2	9	32 Lineaarinen funktio ja suora	2	2.1 Ensimmäisen asteen polynomifunktio
2	9	33 Lineaarisia funktioita	2	3.1 Toisen asteen polynomifunktio
2	9	36 Suoran yhtälö	2	4.1 Korkeamman asteen polynomifunktio
3	9	31 Funktion kuvaaja ja nollakohdat	7	4.1 Funktion raja-arvo
3	9	34 Lineaarisen funktion nollakohta	7	5.2 Funktion jatkuvuus
3	9	35 Suoran kulmakerroin	7	5.4 Jatkuvia funktioita koskevia lauseita
3	9	48 Heittoliike	7	6.2 Funktion derivaatta
			7	7.1 Funktion ääriarvot
4	9	41 Tietoliikenne (verrannollisuus)	1	4.2 Suoraan verrannollisuus
4	9	42 Suoraan verrannollisuus	1	4.2 Kääntäen verrannollisuus
4	9	43 Kääntäen verrannollisuus		
4	9	44 Kääntäen verrannollisia suureita		
4	9	45 Verrannollisuussovelluksia		

Liite 8: Luokitteluanalyysissä käytetyt taulukkopohjat

ANALOGIAERITTELY

Tehtävä

Kohta															
Kategoria	0-20	0-20	0-20	0-20	0-20	0-20	0-20	0-20	0-20	0-20	0-20	0-20	0-20	0-20	0-20
Ei															
Periaate															
Strategia															
Proseduuri															

SUMMAT KATEGORIOITTAIN

Kategoria	0-20	20-40	40-60	60-80	80-100
Ei					
Periaate					
Strategia					
Proseduuri					
Analogia					

ANALOGIAERITTELY - MÄÄRÄT

Tehtävä

Kohta															
Kategoria	0-20	0-20	0-20	0-20	0-20	0-20	0-20	0-20	0-20	0-20	0-20	0-20	0-20	0-20	0-20
Ei															
Periaate															
Strategia															
Proseduuri															

SUMMAT KATEGORIOITTAIN

Kategoria	0-20	20-40	40-60	60-80	80-100
Ei					
Periaate					
Strategia					
Proseduuri					
Analogia					
Ei analogiaa					

Liite 9: Syvimpien analogioiden vertailu aihealueittain

RYHMÄ 1

Syvin analogia - Painotus huomioiden

	Taso	Laskutaito		Lyhyt matikka	
		Summa [kpl]	Osuus [%]	Summa [kpl]	Osuus [%]
Analogia	**Ei**	7,5	18,6	4,5	8,8
	Periaate	3,5	8,8	14,5	28,4
	Strategia	3,2	7,9	7,3	14,4
	Proseduuri	25,9	64,7	24,7	48,4
	Yht.	**40,0**	**100,0**	**51,0**	**100,0**

RYHMÄ 2

Syvin analogia - Painotus huomioiden

	Taso	Laskutaito		Lyhyt matikka	
		Summa [kpl]	Osuus [%]	Summa [kpl]	Osuus [%]
Analogia	**Ei**	7,0	7,7	7,1	9,0
	Periaate	7,2	7,9	11,7	14,8
	Strategia	13,2	14,5	16,6	21,0
	Proseduuri	63,6	69,9	43,7	55,3
	Yht.	**91,0**	**100,0**	**79,0**	**100,0**

RYHMÄ 3

Syvin analogia - Painotus huomioiden

	Taso	Laskutaito		Lyhyt matikka	
		Summa [kpl]	Osuus [%]	Summa [kpl]	Osuus [%]
Analogia	**Ei**	2,0	6,7	5,5	14,1
	Periaate	4,1	13,7	8,0	20,5
	Strategia	3,5	11,7	6,5	16,7
	Proseduuri	20,4	68,0	19,0	48,7
	Yht.	**30,0**	**100,0**	**39,0**	**100,0**

RYHMÄ 4

Syvin analogia - Painotus huomioiden

	Taso	Laskutaito		Lyhyt matikka	
		Summa [kpl]	Osuus [%]	Summa [kpl]	Osuus [%]
Analogia	**Ei**	3,3	8,1	0,0	0,0
	Periaate	9,1	22,2	3,0	15,8
	Strategia	11,3	27,5	7,0	36,8
	Proseduuri	17,3	42,2	9,0	47,4
	Yht.	**41,0**	**100,0**	**19,0**	**100,0**

Liite 10: Syvimpien analogioiden vertailu aihealueittain

RYHMÄ 1

Syvin analogia - Painotus huomioiden

Analogia	Taso	Laskutaito		Pyramidi	
		Summa [kpl]	Osuus [%]	Summa [kpl]	Osuus [%]
	Ei	11,5	12,3	17,0	32,1
	Periaate	7,8	8,3	10,2	19,2
	Strategia	10,1	10,7	7,0	13,1
	Proseduuri	64,6	68,7	18,9	35,6
	Yht.	94,0	100,0	53,0	100,0

RYHMÄ 2

Syvin analogia - Painotus huomioiden

Analogia	Taso	Laskutaito		Pyramidi	
		Summa [kpl]	Osuus [%]	Summa [kpl]	Osuus [%]
	Ei	3,0	8,0	7,5	53,6
	Periaate	2,9	7,7	1,3	8,9
	Strategia	6,3	17,0	1,0	7,1
	Proseduuri	24,9	67,3	4,3	30,4
	Yht.	37,0	100,0	14,0	100,0

RYHMÄ 3

Syvin analogia - Painotus huomioiden

Analogia	Taso	Laskutaito		Pyramidi	
		Summa [kpl]	Osuus [%]	Summa [kpl]	Osuus [%]
	Ei	2,0	6,7	4,5	9,0
	Periaate	4,1	13,7	7,8	15,5
	Strategia	3,5	11,7	11,3	22,5
	Proseduuri	20,4	68,0	26,5	53,0
	Yht.	30,0	100,0	50,0	100,0

RYHMÄ 4

Syvin analogia - Painotus huomioiden

Analogia	Taso	Laskutaito		Pyramidi	
		Summa [kpl]	Osuus [%]	Summa [kpl]	Osuus [%]
	Ei	3,3	8,1	0,3	1,8
	Periaate	9,1	22,2	4,7	24,6
	Strategia	11,3	27,5	6,5	34,2
	Proseduuri	17,3	42,2	7,5	39,5
	Yht.	41,0	100,0	19,0	100,0

Liite 11: Laskutaito 7 - 60 Funktiokone

	ESIMERKKI	1 a	1 b	1 c	1 d	2 a	2 b	2 c						Yht.
Avoin / suljettu	**Suljettu**	1/4	1/4	1/4	1/4	1/3	1/3	1/3						2,0
	Avoin													
														2,0
Tehtäväkategoria	**Käsitetieto**													
	Ominaisuus					1/3								0,3
	Mekaaninen	1/4	1/4	1/4	1/4		1/3	1/3						1,7
	Rutiini													
	Strategia													
	Sovellus													
	Päättely													
														2,0
Kogn. alue	**Tietäminen**	1/4	1/4	1/4	1/4	1/3	1/3	1/3						2,0
	Soveltaminen													
	Päättely													
														2,0
Prosessi	**Molaarinen**													
	Modulaarinen													
	Epärelevantti	1/4	1/4	1/4	1/4	1/3	1/3	1/3						2,0
														2,0

	TEHTÄVÄ [6..]	47a	47b	47c	47d	48a	48b	48c	48d	49a	49b	49c	49d	50a	50b	51a
Analogia	**Ei**	1/4	1/4	1/4	1/4	1/4	1/4	1/4	1/4	3/4	3/4	3/4	3/4	1	1/2	1 1/2
	Periaate													2		
	Strategia									1	1	1	1			2
	Proseduuri	1 1/2	1 1/2	1 1/2	1 1/2	1 1/2	1 1/2	1 1/2	1 1/2					1/2	3	

	TEHTÄVÄ [6..]	51b	52	53a	53b	53c										
Analogia	**Ei**	1 1/2	3	2/3	1/3	1/3										
	Periaate		4	1 1/3												
	Strategia	2			2/3	2										
	Proseduuri			1/3	1 1/3											

	TEHTÄVÄ [6..]																Yht.
Analogia	**Ei**																13 5/6
	Periaate																7 1/3
	Strategia																10 2/3
	Proseduuri																17 1/6
																kaikki	49

Liite 12: Laskutaito 7 - 76 Suoran yhtälö

	ESIMERKKI	1 a	1 b	2 a	2 b									Yht.
Avoin / suljettu	Suljettu	1/2	1/2	1/2	1/2									2,0
	Avoin													
														2,0
Tehtäväkategoria	Käsitetieto													
	Ominaisuus													
	Mekaaninen	1/2												0,5
	Rutiini		1/2	1/2	1/2									1,5
	Strategia													
	Sovellus													
	Päättely													
														2,0
Kogn. alue	Tietäminen	1/2												0,5
	Soveltaminen		1/2	1/2	1/2									1,5
	Päättely													
														2,0
Prosessi	Molaarinen													
	Modulaarinen			1/2	1/2									1,0
	Epärelevantti	1/2	1/2											1,0
														2,0

	TEHTÄVÄ	22	23	24a	24b	24c	25a	25b	25c	26a	26b	26c	27a	27b		
Analogia	Ei	3	3	1	1	2/3	1	1	2/3	1	1	2/3	1	1		
	Periaate												1/2	1/2		
	Strategia										1/3		1/2	1/2		
	Proseduuri	1	1	1/3	1/3	2/3	1/3	1/3	2/3	1/3		2/3				

	TEHTÄVÄ															
Analogia	Ei															
	Periaate															
	Strategia															
	Proseduuri															

	TEHTÄVÄ																Yht.
Analogia	Ei																16
	Periaate																1
	Strategia																1 1/3
	Proseduuri																5 2/3
																kaikki	24

Liite 13: Laskutaito 7 - 77 Suoran piirtäminen yhtälön avulla

	ESIMERKKI	1 a	1 b	1 c	1 d									Yht.
Avoin / suljettu	Suljettu	1/4	1/4	1/4	1/4									1,0
	Avoin													
														1,0
Tehtäväkategoria	Käsitetieto													
	Ominaisuus													
	Mekaaninen													
	Rutiini	1/4	1/4	1/4	1/4									1,0
	Strategia													
	Sovellus													
	Päättely													
														1,0
Kogn. alue	Tietäminen													
	Soveltaminen	1/4	1/4	1/4	1/4									1,0
	Päättely													
														1,0
Prosessi	Molaarinen													
	Modulaarinen													
	Epärelevantti	1/4	1/4	1/4	1/4									1,0
														1,0

	TEHTÄVÄ	28a	28b	28c	29a	29b	29c	29d	30a	30b	30c	30d	30e	31a	31b	32a
Analogia	Ei	2/3	2/3	2/3	1/2	1/2	1/2	1/2	2/5	2/5	2/5	2/5	2/5	1	1	1
	Periaate	2/3	2/3	2/3												
	Strategia															
	Proseduuri				1/2	1/2	1/2	1/2	2/5	2/5	2/5	2/5	2/5	1	1	1

	TEHTÄVÄ	32b	33a	33b	33c	34a	34b	35a	35b	35c	35d	36a	36b	36c	36d	37a
Analogia	Ei	1	2/3	1 1/3	1 1/3	1	2	1	1	1	1	1	1	1	1	2/3
	Periaate															
	Strategia															
	Proseduuri	1	2/3			1										2/3

	TEHTÄVÄ	37b	37c	38a	38b	38c	38d										Yht.
Analogia	Ei	1 1/3	1 1/3	3/4	1	1	1										31 3/7
	Periaate			1/4													2 1/4
	Strategia																
	Proseduuri																10 1/3
																kaikki	44

Liite 14: Laskutaito 7 - 78 Erilaisia suoria

	ESIMERKKI	1	2 a	2 b	Yht.
Avoin / suljettu	Suljettu	1	1/2	1/2	2,0
	Avoin				
					2,0
Tehtäväkategoria	Käsitetieto				
	Ominaisuus				
	Mekaaninen				
	Rutiini	1	1/2	1/2	2,0
	Strategia				
	Sovellus				
	Päättely				
					2,0
Kogn. alue	Tietäminen				
	Soveltaminen	1	1/2	1/2	2,0
	Päättely				
					2,0
Prosessi	Molaarinen				
	Modulaarinen				
	Epärelevantti	1	1/2	1/2	2,0
					2,0

	TEHTÄVÄ	39a	39b	39c	40a	40b	40c	41a	41b	41c	41d	42a	42b	43a	43b	43c
Analogia	Ei	1/3	1/3	1/3	1/3	1/3	1/3	1/4	1/4	1/4	1/4	1/2	1/2	1/4	1/4	1/4
	Periaate															
	Strategia	2/3	2/3	2/3												
	Proseduuri				2/3	2/3	2/3	1/2	1/2	1/2	1/2	1	1	1/2	1/2	1/2

	TEHTÄVÄ	43d	44a	44b	44c	45a	45b	45c	45d	46a	46b	46c	47a	47b	47c	48a
Analogia	Ei	1/4	2/3	2/3	2/3	1/2	1/2	1/2	1/2	1/3	1	1	1/3	2/3	2/3	1/2
	Periaate															
	Strategia															
	Proseduuri	1/2	1/3	1/3	1/3	1/4	1/4	1/4	1/4	2/3			2/3	1/3	1/3	1

	TEHTÄVÄ	48b	49a	49b	49c	49d	Yht.
Analogia	Ei	1 1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	17
	Periaate		1/4	1/4	1/4	1/4	1
	Strategia						2
	Proseduuri						13
						kaikki	33

Liite 15: Laskutaito 7 - 80 Kuvaaja ja sen tulkinta

	ESIMERKKI	1 a	1 b	1 c	1 d	1 e	Yht.
Avoin / suljettu	Suljettu	1/5	1/5	1/5	1/5	1/5	1,0
	Avoin						
							1,0
Tehtäväkategoria	Käsitetieto						
	Ominaisuus	1/5	1/5	1/5	1/5		0,8
	Mekaaninen						
	Rutiini					1/5	0,2
	Strategia						
	Sovellus						
	Päättely						
							1,0
Kogn. alue	Tietäminen	1/5	1/5	1/5	1/5		0,8
	Soveltaminen					1/5	0,2
	Päättely						
							1,0
Prosessi	Molaarinen						
	Modulaarinen						
	Epärelevantti	1/5	1/5	1/5	1/5	1/5	1,0
							1,0

	TEHTÄVÄ	59a	59b	59c	59d	59e	60a	60b	60c	60d	60e	60f	61a	61b	62a	62b
Analogia	Ei	3/5	3/5	3/5	1	4/5	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	2/3	2 1/2	2 1/2	1 2/3	1 2/3
	Periaate	1/5	1/5	1/5			1/6	1/6	1/6		1/6					
	Strategia									1/6	1/6					
	Proseduuri	1/5	1/5	1/5		1/5	1/6	1/6	1/6	1/6		1/6				

	TEHTÄVÄ	62c	63
Analogia	Ei	1	5
	Periaate	1/3	
	Strategia	1/3	
	Proseduuri		

	TEHTÄVÄ	Yht.
Analogia	Ei	21 1/9
	Periaate	1 3/5
	Strategia	2/3
	Proseduuri	1 5/8
	kaikki	25

Liite 16: Laskutaito 9 - 29 Funktio

	ESIMERKKI	1 a	1 b	1 c	1 d	2 a	2 b	3 a	3 b					Yht.
Avoin / suljettu	**Suljettu**	1/4	1/4	1/4	1/4	1/2	1/2	1/2	1/2					3,0
	Avoin													
														3,0
Tehtäväkategoria	**Käsitetieto**													
	Ominaisuus	1/4						1/2	1/2					1,3
	Mekaaninen		1/4	1/4	1/4									0,8
	Rutiini					1/2	1/2							1,0
	Strategia													
	Sovellus													
	Päättely													
														3,0
Kogn. alue	**Tietäminen**	1/4	1/4	1/4	1/4			1/2	1/2					2,0
	Soveltaminen					1/2	1/2							1,0
	Päättely													
														3,0
Prosessi	**Molaarinen**													
	Modulaarinen													
	Epärelevantti	1/4	1/4	1/4	1/4	1/2	1/2	1/2	1/2					3,0
														3,0

	TEHTÄVÄ	73a	73b	73c	73d	74a	74b	74c	74d	75a	75b	75c	75d	76a	76b	77a
Analogia	**Ei**	1 3/4	1 1/4	1 1/4	1 1/4	1 3/4	1 1/4	1 1/4	1 1/4	1 3/4	1 3/4	1 3/4	1 3/4	3 1/2	2 1/2	2 1/3
	Periaate				1/2				1/2						1	
	Strategia	1/4	1/4	1/4			1/4	1/4		1/4	1/4	1/4	1/4			
	Proseduuri		1/2	1/2	1/4	1/4	1/2	1/2	1/4					1/2	1/2	1/3

	TEHTÄVÄ	77b	77c	78a	78b	78c	79a	79b	80a	80b	81a	81b				
Analogia	**Ei**	2 1/3	2	2 1/3	2 1/3	2 1/3	3	3	3	3	3	3				
	Periaate		1/3			1/3	1/2	1/2	1/2	1/2	1	1/2				
	Strategia				1/3							1/2				
	Proseduuri	1/3	1/3	1/3			1/2	1/2	1/2	1/2						

	TEHTÄVÄ																Yht.
Analogia	**Ei**																55 2/3
	Periaate																6 1/6
	Strategia																3
	Proseduuri																7
																kaikki	72

Liite 17: Laskutaito 9 - 30 Funktion arvo

	ESIMERKKI	1 a	1 b	1 c	2 a	2 b	2 c	3 a	3 b					Yht.
Avoin / suljettu	Suljettu	1/3	1/3	1/3	1/3	1/3	1/3	1/2	1/2					3,0
	Avoin													
														3,0
Tehtäväkategoria	Käsitetieto													
	Ominaisuus													
	Mekaaninen	1/3	1/3	1/3	1/3	1/3	1/3	1/2	1/2					3,0
	Rutiini													
	Strategia													
	Sovellus													
	Päättely													
														3,0
Kogn. alue	Tietäminen	1/3	1/3	1/3	1/3	1/3	1/3	1/2	1/2					3,0
	Soveltaminen													
	Päättely													
														3,0
Prosessi	Molaarinen													
	Modulaarinen													
	Epärelevantti	1/3	1/3	1/3	1/3	1/3	1/3	1/2	1/2					3,0
														3,0

	TEHTÄVÄ	82a	82b	83a	83b	83c	84a	84b	84c	85a	85b	85c	86a	86b	86c	87a
Analogia	Ei	4	4	1/3	1/3	1/3	1/3	1/3	1/3	1/3	1/3	1/3	1/3	1/3	1/3	1/4
	Periaate															1 3/4
	Strategia															
	Proseduuri			2 1/3	2 1/3	2 1/3	2 1/3	2 1/3	2 1/3	2 1/3	2 1/3	2 1/3	2 1/3	2 1/3	2 1/3	

	TEHTÄVÄ	87b	87c	87d	88a	88b	88c	89a	89b	89c	90a	90b	90c	91a	91b	91c
Analogia	Ei	1/4	1/4	1/4	1/3	1/3	1/3	1/3	1/3	1/3	1/3	1/3	1/3	2 2/3	1/3	2 1/3
	Periaate	1 3/4	1 3/4	1 3/4												
	Strategia															
	Proseduuri				2 1/3	2 1/3	2 1/3	2 1/3	2 1/3	2 1/3	2 1/3	2 1/3	2 1/3		2 1/3	1/3

	TEHTÄVÄ	92a	92b	92c	93a	93b	93c	93d	94a	94b							Yht.
Analogia	Ei	2 2/3	1/3	1/3	1 3/4	1 3/4	1 3/4	2	4	4							40
	Periaate																7
	Strategia																
	Proseduuri		2 1/3	2 1/3	1/4	1/4	1/4										57
																kaikki	104

Liite 18: Laskutaito 9 - 31 Funktion kuvaaja ja nollakohdat

	ESIMERKKI	1 a	1 b	1 c	2 a	2 b	2 c	2 d						Yht.
Avoin / suljettu	**Suljettu**	1/3	1/3	1/3	1/4	1/4	1/4	1/4						2,0
	Avoin													
														2,0
Tehtäväkategoria	**Käsitetieto**													
	Ominaisuus	1/3	1/3	1/3	1/4	1/4	1/4	1/4						2,0
	Mekaaninen													
	Rutiini													
	Strategia													
	Sovellus													
	Päättely													
														2,0
Kogn. alue	**Tietäminen**	1/3	1/3	1/3	1/4	1/4	1/4	1/4						2,0
	Soveltaminen													
	Päättely													
														2,0
Prosessi	**Molaarinen**													
	Modulaarinen													
	Epärelevantti	1/3	1/3	1/3	1/4	1/4	1/4	1/4						2,0
														2,0

	TEHTÄVÄ	95a	95b	95c	95d	95e	96a	96b	96c	96d	96e	97a	97b	97c	97d	97e
Analogia	**Ei**	4/5	4/5	1	1	1	4/5	4/5	1	1	1	4/5	4/5	1	1	1
	Periaate															
	Strategia															
	Proseduuri	3/5	3/5	2/5	2/5	2/5	3/5	3/5	2/5	2/5	2/5	3/5	3/5	2/5	2/5	2/5

	TEHTÄVÄ	98a	98b	98c	98d	99a	99b	99c	99d	300						
Analogia	**Ei**	1	1	1	1 1/4	1	1	1	1 1/4	7						
	Periaate															
	Strategia				1/2				1/2							
	Proseduuri	3/4	3/4	3/4		3/4	3/4	3/4								

	TEHTÄVÄ																Yht.
Analogia	**Ei**																29 1/3
	Periaate																
	Strategia																1
	Proseduuri																11 5/7
																kaikki	42

Liite 19: Laskutaito 9 - 32 Lineaarinen funktio ja suorat

	ESIMERKKI	1 a	1 b											Yht.
Avoin / suljettu	Suljettu	1/2	1/2											1,0
	Avoin													
														1,0
Tehtäväkategoria	Käsitetieto													
	Ominaisuus													
	Mekaaninen													
	Rutiini	1/2	1/2											1,0
	Strategia													
	Sovellus													
	Päättely													
														1,0
Kogn. alue	Tietäminen													
	Soveltaminen	1/2	1/2											1,0
	Päättely													
														1,0
Prosessi	Molaarinen													
	Modulaarinen													
	Epärelevantti	1/2	1/2											1,0
														1,0

	TEHTÄVÄ	1	2a	2b	3a	3b	4a	4b	5	6a	6b	7a	7b	8a	8b	9a
Analogia	Ei	2							2							
	Periaate															
	Strategia															
	Proseduuri		1	1	1	1	1	1		1	1	1	1	1	1	1

	TEHTÄVÄ	9b	10a	10b	11a	11b										
Analogia	Ei															
	Periaate															
	Strategia				1	1										
	Proseduuri	1	1	1												

	TEHTÄVÄ																Yht.
Analogia	Ei																4
	Periaate																
	Strategia																2
	Proseduuri																16
																kaikki	22

Liite 20: Laskutaito 9 - 33 Lineaarisia funktioita

	ESIMERKKI	1 a	1 b	1 c	2 a	2 b	2 c							Yht.
Avoin / suljettu	**Suljettu**	1/3	1/3	1/3	1/3	1/3	1/3							2,0
	Avoin													
														2,0
Tehtäväkategoria	**Käsitetieto**													
	Ominaisuus		1/3	1/3	1/3	1/3	1/3							1,7
	Mekaaninen													
	Rutiini	1/3												0,3
	Strategia													
	Sovellus													
	Päättely													
														2,0
Kogn. alue	**Tietäminen**		1/3	1/3	1/3	1/3	1/3							1,7
	Soveltaminen	1/3												0,3
	Päättely													
														2,0
Prosessi	**Molaarinen**		1/3	1/3										0,7
	Modulaarinen													
	Epärelevantti	1/3			1/3	1/3	1/3							1,3
														2,0

	TEHTÄVÄ	12a	12b	13a	13b	14a	14b	14c	15a	15b	15c	15d	16a	16b	16c	17a
Analogia	**Ei**	2	2	2	2	1 1/3	1 1/3	1 1/3	1	1	1	1	1 1/3	1 2/3	1 2/3	1 1/3
	Periaate															
	Strategia	1/2		1/2									1/3			1/3
	Proseduuri	1/2	1	1/2	1	2/3	2/3	2/3	1/2	1/2	1/2	1/2	1/3	1/3	1/3	1/3

	TEHTÄVÄ	17b	17c	18a	18b	18c	18d	18e	19a	19b	19c	19d	19e	20a	20b	21a
Analogia	**Ei**	1 2/3	1 2/3	4/5	1	1	1	1	4/5	1	1	1 1/5	1	2	2	1
	Periaate							1/5								
	Strategia			1/5					1/5							
	Proseduuri	1/3	1/3	1/5	1/5	1/5	1/5		1/5	1/5	1/5		1/5	1	1	1/5

	TEHTÄVÄ	21b	21c	21d	21e	22a	22b	22c	22d	22e							Yht.
Analogia	**Ei**	1	1	4/5	1	4/5	1	1	4/5	1							48 1/2
	Periaate			1/5	1/5				1/5	1/5							1
	Strategia	1/5		1/5		1/5	1/5		1/5								3
	Proseduuri		1/5			1/5		1/5									13 2/5
																kaikki	66

Liite 21: Laskutaito 9 - 34 Lineaarisen funktion nollakohta

	ESIMERKKI	1 a	1 b	2 a	2 b	Yht.
Avoin / suljettu	**Suljettu**	1/2	1/2	1/2	1/2	2,0
	Avoin					
						2,0
Tehtäväkategoria	**Käsitetieto**					
	Ominaisuus					
	Mekaaninen			1/2	1/2	1,0
	Rutiini	1/2	1/2			1,0
	Strategia					
	Sovellus					
	Päättely					
						2,0
Kogn. alue	**Tietäminen**			1/2	1/2	1,0
	Soveltaminen	1/2	1/2			1,0
	Päättely					
						2,0
Prosessi	**Molaarinen**		1/2			0,5
	Modulaarinen					
	Epärelevantti	1/2		1/2	1/2	1,5
						2,0

	TEHTÄVÄ	23a	23b	23c	24a	24b	24c	24d	25a	25b	26a	26b	26c	26d	27a	27b
Analogia	**Ei**	1	1	1	3/4	3/4	3/4	3/4	1 1/2	1 1/2	3/4	3/4	3/4	3/4	1/4	1/4
	Periaate														1/4	1/4
	Strategia				1/4	1/4	1/4	1/4								
	Proseduuri	1/3	1/3	1/3					1/2	1/2	1/4	1/4	1/4	1/4	1/2	1/2

	TEHTÄVÄ	27c	27d	28a	28b	29a	29b	29c	29d	30a	30b	30c	31a	31b	31c	32a
Analogia	**Ei**	1/4	1/4	1 1/2	1 1/2	3/4	3/4	3/4	3/4	1/3	1/3	1/3	1/3	1/3	1/3	1 1/2
	Periaate	1/4	1/4							1/3	1/3	1/3	1/3	1/3	1/3	
	Strategia															
	Proseduuri	1/2	1/2	1/2	1/2	1/4	1/4	1/4	1/4	2/3	2/3	2/3	2/3	2/3	2/3	1/2

	TEHTÄVÄ	32b	33a	33b	Yht.
Analogia	**Ei**	1 1/2	1 1/2	1 1/2	27
	Periaate				3
	Strategia				1
	Proseduuri	1/2	1/2	1/2	13
				kaikki	44

Liite 22: Laskutaito 9 - 35 Suoran kulmakerroin

	ESIMERKKI	1	2											Yht.
Avoin / suljettu	Suljettu	1	1											2,0
	Avoin													
														2,0
Tehtäväkategoria	Käsitetieto													
	Ominaisuus													
	Mekaaninen													
	Rutiini	1	1											2,0
	Strategia													
	Sovellus													
	Päättely													
														2,0
Kogn. alue	Tietäminen													
	Soveltaminen	1	1											2,0
	Päättely													
														2,0
Prosessi	Molaarinen													
	Modulaarinen	1	1/2											1,5
	Epärelevantti		1/2											0,5
														2,0

	TEHTÄVÄ	34a	34b	34c	35	36	37a	37b	37c	37d	38	39a	39b	40a	40b	40c
Analogia	Ei						1/8	1/8	1/8	1/8		1/4	1/4			
	Periaate					2	1/8	1/8	1/8	1/8	2					
	Strategia				2							1/2	1/2	1/4	1/4	1/4
	Proseduuri	2/3	2/3	2/3			1/4	1/4	1/4	1/4		1/4	1/4	1/4	1/4	1/4

	TEHTÄVÄ	40d	41a	41b	41c	41d	42a	42b	42c							
Analogia	Ei		1/4	1/4	1/4	1/4	2/3	2/3	2/3							
	Periaate															
	Strategia	1/4														
	Proseduuri	1/4	1/4	1/4	1/4	1/4										

	TEHTÄVÄ																Yht.
Analogia	Ei																4
	Periaate																4 1/2
	Strategia																4
	Proseduuri																5 1/2
																kaikki	18

Liite 23: Laskutaito 9 - 36 Suoran yhtälö

	ESIMERKKI	1 a	1 b	2	Yht.
Avoin / suljettu	Suljettu	1/2	1/2	1	2,0
	Avoin				
					2,0
Tehtäväkategoria	Käsitetieto	1/6	1/6		0,3
	Ominaisuus	1/3	1/3		0,7
	Mekaaninen				
	Rutiini			1	1,0
	Strategia				
	Sovellus				
	Päättely				
					2,0
Kogn. alue	Tietäminen	1/2	1/2		1,0
	Soveltaminen			1	1,0
	Päättely				
					2,0
Prosessi	Molaarinen				
	Modulaarinen			1	1,0
	Epärelevantti	1/2	1/2		1,0
					2,0

	TEHTÄVÄ	43a	43b	43c	43d	44a	44b	45a	45b	45c	45d	46a	46b	46c	46d	47
Analogia	Ei	1/4	1/4	1/4	1/4											
	Periaate			1/2	1/4											1
	Strategia	1/4	1/4		1/4	1/2	1	1/2	1/2	1/2	1/4	1/4	1/4	1/4	1/4	
	Proseduuri	1/4	1/4			1	1/2	1/4	1/4	1/4	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	2

	TEHTÄVÄ	48a	48b	49a	49b	49c	49d	50a	50b	51a	51b	51c	51d	52a	52b	52c
Analogia	Ei			1/2	1/2	1/2	1/2							3/4	3/4	3/4
	Periaate	1 1/2	1 1/2					1 1/2	1	1/4	1/4	1/4	1/4			
	Strategia								1/2	1/2	1/2	1/2	1/2			
	Proseduuri			1/4	1/4	1/4	1/4									

	TEHTÄVÄ	52d	53a	53b	54a	54b	55a	55b	55c	55d	56a	56b	57a	57b	57c	57d	Yht.
Analogia	Ei	1/2			1	1	1/2	1/2	1/2	1/2	1	1	1/2	1/2	1/2	1/2	13 3/4
	Periaate		1	1 1/2													10 3/4
	Strategia	1/4	1/2		1/2	1/2					1/2	1/2					10 1/4
	Proseduuri						1/4	1/4	1/4	1/4			1/4	1/4	1/4	1/4	10 1/4
																kaikki	45

Liite 24: Laskutaito 9 - 37 Suoran yhtälön muodostaminen

	ESIMERKKI	1 a	1 b	2	3									Yht.
Avoin / suljettu	Suljettu	1/2	1/2	1	1									3,0
	Avoin													
														3,0
Tehtäväkategoria	Käsitetieto													
	Ominaisuus	1/4	1/4	1/2	1/2									1,5
	Mekaaninen													
	Rutiini	1/4	1/4	1/2	1/2									1,5
	Strategia													
	Sovellus													
	Päättely													
														3,0
Kogn. alue	Tietäminen	1/4	1/4	1/2	1/2									1,5
	Soveltaminen	1/4	1/4	1/2	1/2									1,5
	Päättely													
														3,0
Prosessi	Molaarinen													
	Modulaarinen	1/2	1/2	1	1									3,0
	Epärelevantti													
														3,0

	TEHTÄVÄ	58a	58b	58c	59	60a	60b	60c	60d	61	62a	62b	63a	63b	63c	63d
Analogia	Ei	2/3	2/3	2/3	2	3/4	1/4	1/4		1			3/4	3/4	3/4	1/2
	Periaate								1/4	2						
	Strategia						1/2	1/2			2	2				1/4
	Proseduuri	2/3	2/3	2/3	2	1/4	1/4	1/4	3/4	1			1/4	1/4	1/4	1/4

	TEHTÄVÄ	64	65	66a	66b	66c	66d	67	68a	68b	68c					
Analogia	Ei	1	1	1/2	1/2	1/2	1/2	2	1	1	1					
	Periaate	1	1					1								
	Strategia			1/4	1/4	1/4	1/4									
	Proseduuri	2	2	1/4	1/4	1/4	1/4	1	1/3	1/3	1/3					

	TEHTÄVÄ																Yht.
Analogia	Ei																18
	Periaate																5 1/4
	Strategia																6 1/4
	Proseduuri																14 1/2
																kaikki	44

Liite 25: Laskutaito 9 - 39 Lineaarinen mallintaminen

	ESIMERKKI	1 a	1 b	1 c										Yht.
Avoin / suljettu	**Suljettu**	1/3	1/3	1/3										1,0
	Avoin													
														1,0
Tehtäväkategoria	**Käsitetieto**													
	Ominaisuus													
	Mekaaninen			1/3										0,3
	Rutiini	1/3												0,3
	Strategia													
	Sovellus		1/3											0,3
	Päättely													
														1,0
Kogn. alue	**Tietäminen**			1/3										0,3
	Soveltaminen	1/3	1/3											0,7
	Päättely													
														1,0
Prosessi	**Molaarinen**													
	Modulaarinen		1/3											0,3
	Epärelevantti	1/3		1/3										0,7
														1,0

	TEHTÄVÄ	**79**	**80a**	**80b**	**81**	**82a**	**82b**	**83a**	**83b**	**84a**	**84b**	**84c**	**85a**	**85b**	**85c**	**85d**
Analogia	**Ei**	2	1	1	2	1	1	1	1	2/3	2/3	2/3	1/2	1/2	1/2	1/2
	Periaate	1		1/2					1/2					1/4		
	Strategia									1/3						
	Proseduuri		1/2		1	1/2	1/2	1/2			1/3	1/3	1/4		1/4	1/4

	TEHTÄVÄ																Yht.
Analogia	**Ei**																14
	Periaate																2 1/4
	Strategia																1/3
	Proseduuri																4 3/7
																kaikki	21

Liite 26: Laskutaito 9 - 41 Tietoliikenne (verrannollisuus)

	ESIMERKKI	1 a	1 b											Yht.
Avoin / suljettu	Suljettu	1/2	1/2											1,0
	Avoin													
														1,0
Tehtäväkategoria	Käsitetieto													
	Ominaisuus													
	Mekaaninen													
	Rutiini													
	Strategia	1/2	1/2											1,0
	Sovellus													
	Päättely													
														1,0
Kogn. alue	Tietäminen													
	Soveltaminen	1/2	1/2											1,0
	Päättely													
														1,0
Prosessi	Molaarinen													
	Modulaarinen	1/2	1/2											1,0
	Epärelevantti													
														1,0

	TEHTÄVÄ	10a	10b	11a	11b	12a	12b	12c	12d	13a	13b	14a	14b	15a	15b	16
Analogia	Ei														1	2
	Periaate			1	1	1/4	1/4	1/4	1/4			1/2	1/2	1/2		
	Strategia	1/2	1/2			1/4	1/4	1/4	1/4	1	1			1/2		
	Proseduuri	1/2	1/2									1/2	1/2			

	TEHTÄVÄ																Yht.
Analogia	Ei																3
	Periaate																4 1/2
	Strategia																4 1/2
	Proseduuri																2
																kaikki	14

Liite 27: Laskutaito 9 - 42 Suoraan verrannollisuus

	ESIMERKKI	1 a	1 b	1 c	2 a	2 b	2 c							Yht.
Avoin / suljettu	**Suljettu**	1/3	1/3	1/3	1/3	1/3	1/3							2,0
	Avoin													
														2,0
Tehtäväkategoria	**Käsitetieto**			1/6			1/3							0,5
	Ominaisuus	1/3	1/3											0,7
	Mekaaninen													
	Rutiini			1/6	1/3									0,5
	Strategia					1/3								0,3
	Sovellus													
	Päättely													
														2,0
Kogn. alue	**Tietäminen**	1/3	1/3	1/6			1/3							1,2
	Soveltaminen			1/6	1/3	1/3								0,8
	Päättely													
														2,0
Prosessi	**Molaarinen**					1/3								0,3
	Modulaarinen													
	Epärelevantti	1/3	1/3	1/3	1/3		1/3							1,7
														2,0

	TEHTÄVÄ	17a	17b	17c	18a	18b	18c	19a	19b	19c	20a	20b	20c	20d	20e	21a
Analogia	**Ei**	1 2/3	1 2/3	1 1/3	1 2/3	1 2/3	1 1/3	1 2/3	1 1/3	1 1/3	1	1	1	4/5	4/5	1 2/3
	Periaate								1/3							
	Strategia				1/3								1/5			
	Proseduuri	1/3	1/3	2/3		1/3	2/3	1/3	1/3	2/3	1/5	1/5		2/5	2/5	1/3

	TEHTÄVÄ	21b	21c	22a	22b	23a	23b	23c								
Analogia	**Ei**	1 1/3	1 1/3	2 1/2	2 1/2	1 2/3	1 2/3	1 2/3								
	Periaate	1/3	1/3					1/3								
	Strategia			1/2	1/2											
	Proseduuri	1/3	1/3			1/3	1/3									

	TEHTÄVÄ																Yht.
Analogia	**Ei**																32 3/5
	Periaate																1 1/3
	Strategia																1 1/2
	Proseduuri																6 1/2
																kaikki	42

Liite 28: Laskutaito 9 - 43 Kääntäen verrannollisuus

	ESIMERKKI	1	2											Yht.
Avoin / suljettu	**Suljettu**	1	1											2,0
	Avoin													
														2,0
Tehtäväkategoria	**Käsitetieto**													
	Ominaisuus	1												1,0
	Mekaaninen													
	Rutiini		1											1,0
	Strategia													
	Sovellus													
	Päättely													
														2,0
Kogn. alue	**Tietäminen**	1												1,0
	Soveltaminen		1											1,0
	Päättely													
														2,0
Prosessi	**Molaarinen**		1											1,0
	Modulaarinen													
	Epärelevantti	1												1,0
														2,0

	TEHTÄVÄ	24a	24b	25a	25b	26a	26b	27a	27b	28a	28b	29a	29b	30a	30b	30c
Analogia	**Ei**	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2					
	Periaate			1/2	1/2			1/2	1/2			1/2	1/2	1/4	1/4	1/4
	Strategia	1/2				1/2	1/2			1/2						
	Proseduuri		1/2								1/2	1/2	1/2	1/4	1/4	1/4

	TEHTÄVÄ	30d	31	32a	32b	32c	32d									
Analogia	**Ei**			1/4	1/4		1/4									
	Periaate	1/4	1	1/4	1/4	1/4	1/4									
	Strategia					1/4										
	Proseduuri	1/4	1													

	TEHTÄVÄ																Yht.
Analogia	**Ei**																5 3/4
	Periaate																6
	Strategia																2 1/4
	Proseduuri																4
																kaikki	18

Liite 29: Laskutaito 9 - 44 Kääntäen verrannollisia suureita

	ESIMERKKI	1	2											Yht.
Avoin / suljettu	**Suljettu**	1	1											2,0
	Avoin													
														2,0
Tehtäväkategoria	**Käsitetieto**													
	Ominaisuus													
	Mekaaninen													
	Rutiini	1	1											2,0
	Strategia													
	Sovellus													
	Päättely													
														2,0
Kogn. alue	**Tietäminen**													
	Soveltaminen	1	1											2,0
	Päättely													
														2,0
Prosessi	**Molaarinen**	1	1											2,0
	Modulaarinen													
	Epärelevantti													
														2,0

	TEHTÄVÄ	33a	33b	33c	34	35a	35b	35c	35d	36a	36b	37a	37b	37c	37d	38
Analogia	**Ei**															
	Periaate	2/3				1/2	1/2	1/2	1/2	1	1	1/2	1/2	1/2	1/2	
	Strategia		1/3	1/3	1											1
	Proseduuri		1/3	1/3	1											1

	TEHTÄVÄ	39	40a	40b	41a	41b	42a	42b								
Analogia	**Ei**					1										
	Periaate				1/2		1	1								
	Strategia	2	1/2	1/2												
	Proseduuri		1/2	1/2	1/2											

	TEHTÄVÄ																Yht.
Analogia	**Ei**																1
	Periaate																9 1/6
	Strategia																5 2/3
	Proseduuri																4 1/6
																kaikki	20

Liite 30: Laskutaito 9 - 45 Verrannollisuussovelluksia

	ESIMERKKI	1 a	1 b											Yht.
Avoin / suljettu	**Suljettu**	1/2	1/2											1,0
	Avoin													
														1,0
Tehtäväkategoria	**Käsitetieto**													
	Ominaisuus													
	Mekaaninen													
	Rutiini													
	Strategia	1/2	1/2											1,0
	Sovellus													
	Päättely													
														1,0
Kogn. alue	**Tietäminen**													
	Soveltaminen	1/2	1/2											1,0
	Päättely													
														1,0
Prosessi	**Molaarinen**	1/2	1/2											1,0
	Modulaarinen													
	Epärelevantti													
														1,0

	TEHTÄVÄ	43a	43b	44a	44b	45a	45b	46	47a	47b	47c	48	49	50a	50b	
Analogia	**Ei**	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	1	1/3	1/3	2/3	2	1	1/2	1/2	
	Periaate								1/3	1/3						
	Strategia			1/2	1/2	1/2	1/2						1	1/2	1/2	
	Proseduuri	1/2	1/2					1								

	TEHTÄVÄ																Yht.
Analogia	**Ei**																9 1/3
	Periaate																2/3
	Strategia																4
	Proseduuri																2
																kaikki	16

Liite 31: Laskutaito 9 - 46 Toisen asteen funktio ja paraabeli

	ESIMERKKI	1 a	1 b	1 c	2									Yht.
Avoin / suljettu	Suljettu	1/3	1/3	1/3	1									2,0
	Avoin													
														2,0
Tehtäväkategoria	Käsitetieto													
	Ominaisuus	1/6	1/6	1/3										0,7
	Mekaaninen	1/6	1/6											0,3
	Rutiini				1									1,0
	Strategia													
	Sovellus													
	Päättely													
														2,0
Kogn. alue	Tietäminen	1/3	1/3	1/3										1,0
	Soveltaminen				1									1,0
	Päättely													
														2,0
Prosessi	Molaarinen													
	Modulaarinen													
	Epärelevantti	1/3	1/3	1/3	1									2,0
														2,0

	TEHTÄVÄ	51a	51b	51c	51d	52a	52b	52c	52d	53a	53b	53c	53d	54a	54b	54c
Analogia	Ei	1/2	1/2	1/2	3/4	1/2	1/2	1/2	3/4	3/4	3/4	3/4	3/4	2/5	2/5	2/5
	Periaate	1/4	1/4	1/4		1/4	1/4	1/4						1/5	1/5	1/5
	Strategia															
	Proseduuri	1/4	1/4	1/4	1/4	1/4	1/4	1/4	1/4	1/4	1/4	1/4	1/4	1/5	1/5	1/5

	TEHTÄVÄ	54d	54e	55a	55b	55c	55d	55e	56a	56b	56c	56d				
Analogia	Ei	2/5	3/5	2/5	2/5	2/5	2/5	3/5	3/4	3/4	3/4	3/4				
	Periaate	1/5		1/5	1/5	1/5	1/5									
	Strategia															
	Proseduuri	1/5	1/5	1/5	1/5	1/5	1/5	1/5	1/4	1/4	1/4	1/4				

	TEHTÄVÄ																Yht.
Analogia	Ei																15
	Periaate																3 1/9
	Strategia																
	Proseduuri																6
																kaikki	24

Liite 32: Laskutaito 9 - 47 Toisen asteen funktioita

	ESIMERKKI	1 a	1 b	1 c	2									Yht.
Avoin / suljettu	**Suljettu**	1/3	1/3	1/3	1									2,0
	Avoin													
														2,0
Tehtäväkategoria	**Käsitetieto**		1/3											0,3
	Ominaisuus			1/3										0,3
	Mekaaninen													
	Rutiini	1/3			1									1,3
	Strategia													
	Sovellus													
	Päättely													
														2,0
Kogn. alue	**Tietäminen**		1/3	1/3										0,7
	Soveltaminen	1/3			1									1,3
	Päättely													
														2,0
Prosessi	**Molaarinen**													
	Modulaarinen													
	Epärelevantti	1/3	1/3	1/3	1									2,0
														2,0

	TEHTÄVÄ	57a	57b	58a	58b	58c	58d	59a	59b	60	61a	61b	61c	61d	62a	62b
Analogia	**Ei**	1 1/2	1 1/2	3/4	3/4	3/4	3/4	1 1/2	1 1/2	3	3/4	3/4	3/4	3/4	3/4	3/4
	Periaate			1/4	1/4											
	Strategia					1/4	1/4									
	Proseduuri	1/2	1/2					1/2	1/2	1	1/4	1/4	1/4	1/4	1/4	1/4

	TEHTÄVÄ	62c	62d	63a	63b	63c	64a	64b	64c	64d						
Analogia	**Ei**	3/4	3/4	1	1	1	1/2	1/2	1/2	1/2						
	Periaate						1/4	1/4	1/4	1/4						
	Strategia						1/4	1/4	1/4	1/4						
	Proseduuri	1/4	1/4	1/3	1/3	1/3										

	TEHTÄVÄ																Yht.
Analogia	**Ei**																23
	Periaate																1 1/2
	Strategia																1 1/2
	Proseduuri																6
																kaikki	32

Liite 33: Laskutaito 9 - 48 Heittoliike

	ESIMERKKI	1 a	1 b											Yht.
Avoin / suljettu	Suljettu	1/2	1/2											1,0
	Avoin													
														1,0
Tehtäväkategoria	Käsitetieto													
	Ominaisuus	1/2												0,5
	Mekaaninen													
	Rutiini		1/2											0,5
	Strategia													
	Sovellus													
	Päättely													
														1,0
Kogn. alue	Tietäminen	1/2												0,5
	Soveltaminen		1/2											0,5
	Päättely													
														1,0
Prosessi	Molaarinen													
	Modulaarinen													
	Epärelevantti	1/2	1/2											1,0
														1,0

	TEHTÄVÄ	65a	65b	65c	66	67a	67b	67c	67d	67e	68a	68b	68c	68d	68e	68f
Analogia	Ei				1	1/5		1/5	1/5	1/5	1/6	1/6		1/6	1/6	1/6
	Periaate	2/3	2/3	2/3		1/5	2/5			1/5	1/6		1/3		1/6	
	Strategia				1											
	Proseduuri							1/5	1/5			1/6		1/6		1/6

	TEHTÄVÄ																Yht.
Analogia	Ei																2 5/8
	Periaate																3 1/2
	Strategia																1
	Proseduuri																8/9
																kaikki	8

Liite 34: Lyhyt matikka 1 - Suureiden keskinäinen riippuvuus

	ESIMERKKI	1 a	1 b	1 c	2									Yht.
Avoin / suljet-tu	**Suljettu**	1/3	1/3	1/3	1									2,0
	Avoin													
														2,0
Tehtäväkategoria	**Käsitetieto**													
	Ominaisuus													
	Mekaaninen													
	Rutiini	1/3	1/3	1/3	1									2,0
	Strategia													
	Sovellus													
	Päättely													
														2,0
Kogn. alue	**Tietäminen**													
	Soveltaminen	1/3	1/3	1/3	1									2,0
	Päättely													
														2,0
Prosessi	**Molaarinen**													
	Modulaarinen													
	Epärelevantti	1/3	1/3	1/3	1									2,0
														2,0

	TEHTÄVÄ	82a	82b	83a	83b	83c	84a	84b	85a	85b	85c	86	87a	87b	87c	87d
Analogia	**Ei**	1/2	1/2	1/3	1/3	1/3		1/2	1 1/3	1 1/3	1 1/3	1	1/4	1/4	1/4	3/4
	Periaate	1/2	1/2	1/3	1/3	2/3	1/2	1				2	1/4	1/4	1/2	
	Strategia	1/2	1/2				1/2					1	1/2	1/2		1/4
	Proseduuri	1/2	1/2	2/3	2/3	1/3	1	1/2							1/4	

	TEHTÄVÄ															
Analogia	**Ei**															
	Periaate															
	Strategia															
	Proseduuri															

	TEHTÄVÄ																Yht.
Analogia	**Ei**																9
	Periaate																6 5/6
	Strategia																3 3/4
	Proseduuri																4 2/5
																kaikki	24

Liite 35: Lyhyt matikka 1 - Lineaarinen funktio f(x) = ax + b

	ESIMERKKI	1 a	1 b	2	3	4 a	4 b	4 c	5					Yht.
Avoin / suljet-tu	Suljettu	1/2	1/2	1	1	1/3	1/3	1/3	1					5,0
	Avoin													
														5,0
Tehtäväkategoria	Käsitetieto	1/4	1/4				1/9		1/2					1,1
	Ominaisuus													
	Mekaaninen	1/4	1/4	1			1/9							1,6
	Rutiini				1		1/9	1/3	1/2					1,9
	Strategia					1/3								0,3
	Sovellus													
	Päättely													
														5,0
Kogn. alue	Tietäminen	1/2	1/2	1			2/9		1/2					2,7
	Soveltaminen				1	1/3	1/9	1/3	1/2					2,3
	Päättely													
														5,0
Prosessi	Molaarinen													
	Modulaarinen													
	Epärelevantti	1/2	1/2	1	1	1/3	1/3	1/3	1					5,0
														5,0

	TEHTÄVÄ	97a	97b	98	99a	99b	100a	100b	101	102a	102b	102c	103a	103b	103c	103d
Analogia	Ei	2	2	4	3 1/2	1 1/2	2 1/2	2 1/2	5	1 2/3	2 1/3	2 2/3	1 2/5	1 2/5	1 2/5	1
	Periaate	1/2	1/2	3		2				1						
	Strategia			1	1/2		1 1/2	1 1/2	2		1/3			1/5		
	Proseduuri	1 1/2	1 1/2			1/2			1				1/5		1/5	3/5

	TEHTÄVÄ	103e	104a	104b	104c											
Analogia	Ei	1 2/5	2 1/3	1 2/3	2 2/3											
	Periaate															
	Strategia	1/5	1/3													
	Proseduuri			1												

	TEHTÄVÄ																Yht.
Analogia	Ei																43
	Periaate																7
	Strategia																7 4/7
	Proseduuri																6 1/2
																kaikki	64

Liite 36: Lyhyt matikka 1 - Ensimmäisen asteen yhtälö

	ESIMERKKI	1	2 t1	2 t2	3 a	3 b	4							Yht.
Avoin / suljettu	**Suljettu**	1	1/2	1/2	1/2	1/2	1							4,0
	Avoin													
														4,0
Tehtäväkategoria	**Käsitetieto**													
	Ominaisuus													
	Mekaaninen		1/2	1/2										1,0
	Rutiini	1/2			1/2									1,0
	Strategia	1/2				1/2								1,0
	Sovellus						1							1,0
	Päättely													
														4,0
Kogn. alue	**Tietäminen**		1/2	1/2										1,0
	Soveltaminen	1			1/2	1/2	1							3,0
	Päättely													
														4,0
Prosessi	**Molaarinen**					1/2								0,5
	Modulaarinen						1							1,0
	Epärelevantti	1	1/2	1/2	1/2									2,5
														4,0

	TEHTÄVÄ	113a	113b	113c	113d	114	115a	115b	115c	116a	116b	116c	117a	117b	118	119
Analogia	**Ei**	1 1/4	1 1/4	1 1/4	1 1/4	6	1 1/3	1 1/3	1 1/3	2/3	2/3	2/3	1 1/2	1 1/2	4	4
	Periaate						1/3	1/3	1/3	2/3	2/3	2/3	1 1/2	1 1/2	2	1
	Strategia			1/4			1/3	1/3	1/3							
	Proseduuri	1/4	1/4		1/4					2/3	2/3	2/3				1

	TEHTÄVÄ	120	121a	121b	121c	122a	122b	122c	123	124a	124b	125				
Analogia	**Ei**	5	2	1 2/3	1 1/3	2	1 2/3	1 1/3	3	2	3	5				
	Periaate				1/3			1/3	3	1						
	Strategia			1/3	1/3		1/3	1/3				1				
	Proseduuri	1														

	TEHTÄVÄ																Yht.
Analogia	**Ei**																56
	Periaate																13 2/3
	Strategia																3 4/7
	Proseduuri																4 3/4
																kaikki	78

Liite 37: Lyhyt matikka 1 - Ensimmäisen asteen yhtälön sovelluksia

	ESIMERKKI	1 t1	1 t2	2 t1	2 t2	3 a	3 b	3 c						Yht.
Avoin / suljet-tu	Suljettu	1/2	1/2	1/2	1/2	1/3	1/3	1/3						3,0
	Avoin													
														3,0
Tehtäväkategoria	Käsitetieto													
	Ominaisuus													
	Mekaaninen													
	Rutiini													
	Strategia	1/2	1/2			1/3		1/3						1,7
	Sovellus			1/2	1/2									1,0
	Päättely						1/3							0,3
														3,0
Kogn. alue	Tietäminen													
	Soveltaminen	1/2	1/2	1/2	1/2	1/3		1/3						2,7
	Päättely						1/3							0,3
														3,0
Prosessi	Molaarinen	1/2	1/2	1/2	1/2									2,0
	Modulaarinen					1/3	1/3							0,7
	Epärelevantti							1/3						0,3
														3,0

	TEHTÄVÄ	162	163	164	165	166a	166b	167	168	169	170	171	172	173	174	175a
Analogia	Ei	3	3	3	3	2 1/2	2 1/2	3	5	3	7	7	7	7	3	1 2/3
	Periaate	2			2			2	2	2					2	1/3
	Strategia		4	2	2	1	1			2					2	
	Proseduuri	2		2				2								1/3

	TEHTÄVÄ	175b	175c	176a	176b	176c	177a	177b	177c	178a	178b	178c	178d	178e	178f	179a
Analogia	Ei	1 2/3	1 2/3	1 2/3	1 2/3	1 2/3	1 2/3	1 2/3	1 2/3	5/6	5/6	5/6	5/6	5/6	5/6	1 2/3
	Periaate	1/3	1/3	1/3	1/3	1/3	1/3	1/3	1/3	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/3
	Strategia										1/6		1/6			1/3
	Proseduuri	1/3	1/3	1/3	1/3	1/3	1/3	1/3	1/3	1/6		1/6		1/6	1/6	

	TEHTÄVÄ	179b	179c														Yht.
Analogia	Ei	1 2/3	2 1/3														84 2/3
	Periaate	1/3															16 2/3
	Strategia	1/3															15
	Proseduuri																9 2/3
																kaikki	126

Liite 38: Lyhyt matikka 1 - Suoraan ja kääntäen verrannolliset suureet

	ESIMERKKI	1 a	1 b	2	3	4	Yht.
Avoin / suljet-tu	Suljettu	1/2	1/2	1	1	1	4,0
	Avoin						
							4,0
Tehtäväkategoria	Käsitetieto						
	Ominaisuus				1/2		0,5
	Mekaaninen						
	Rutiini	1/2			1/2		1,0
	Strategia		1/2	1		1	2,5
	Sovellus						
	Päättely						
							4,0
Kogn. alue	Tietäminen				1/2		0,5
	Soveltaminen	1/2	1/2	1	1/2	1	3,5
	Päättely						
							4,0
Prosessi	Molaarinen		1/2			1	1,5
	Modulaarinen			1			1,0
	Epärelevantti	1/2			1		1,5
							4,0

	TEHTÄVÄ	196	197	198a	198b	199	200a	200b	201	202	203	204	205	206a	206b	207
Analogia	Ei	2	2	1 1/2	1 1/2	2	1 1/2	1 1/2	3	3	3	2	3	1/2	1/2	3
	Periaate	2	2			1	1/2	1/2	1	1	1	2	1	1/2	1	2
	Strategia			1/2	1/2	1	1/2	1/2		1	1	1	1	1	1	
	Proseduuri	1	1	1/2	1/2	1			1					1/2		

	TEHTÄVÄ	208	209a	209b
Analogia	Ei	4	2	2
	Periaate		1/2	1/2
	Strategia	1		
	Proseduuri			

	TEHTÄVÄ	Yht.
Analogia	Ei	38
	Periaate	16 1/2
	Strategia	10
	Proseduuri	5 1/2
	kaikki	70

Liite 39: Lyhyt matikka 1 - Verrannollisuussovelluksia

	ESIMERKKI	1	2											Yht.
Avoin / suljet-tu	Suljettu	1	1											2,0
	Avoin													
														2,0
Tehtäväkategoria	Käsitetieto													
	Ominaisuus													
	Mekaaninen													
	Rutiini													
	Strategia													
	Sovellus	1	1											2,0
	Päättely													
														2,0
Kogn. alue	Tietäminen													
	Soveltaminen	1	1											2,0
	Päättely													
														2,0
Prosessi	Molaarinen	1	1											2,0
	Modulaarinen													
	Epärelevantti													
														2,0

	TEHTÄVÄ	223a	223b	224a	224b	225a	225b	226	227a	227b						
Analogia	Ei	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	1	1/2	1/2						
	Periaate						1/2			1/2						
	Strategia								1/2							
	Proseduuri	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2		1								

	TEHTÄVÄ															
Analogia	Ei															
	Periaate															
	Strategia															
	Proseduuri															

	TEHTÄVÄ																Yht.
Analogia	Ei																5
	Periaate																1
	Strategia																1/2
	Proseduuri																3 1/2
																kaikki	10

Liite 40: Lyhyt matikka 1 - Toisen asteen funktio ja toisen asteen yhtälö

	ESIMERKKI	1 a	1 b	1 c	1 d	2	3 a	3 b	3 c					Yht.
Avoin / suljet-tu	Suljettu	1/4	1/4	1/4	1/4	1	1/3	1/3	1/3					3,0
	Avoin													
														3,0
Tehtäväkategoria	Käsitetieto					1/3	1/6	1/6	1/6					0,8
	Ominaisuus			1/8	1/8		1/6	1/6	1/6					0,8
	Mekaaninen					1/3								0,3
	Rutiini	1/4	1/4	1/8	1/8	1/3								1,1
	Strategia													
	Sovellus													
	Päättely													
														3,0
Kogn. alue	Tietäminen			1/8	1/8	2/3	1/3	1/3	1/3					1,9
	Soveltaminen	1/4	1/4	1/8	1/8	1/3								1,1
	Päättely													
														3,0
Prosessi	Molaarinen													
	Modulaarinen	1/4	1/4	1/4	1/4									1,0
	Epärelevantti					1	1/3	1/3	1/3					2,0
														3,0

	TEHTÄVÄ	234a	234b	234c	235a	235b	236a	236b	237a	237b	237c	237d	238a	238b	239	240
Analogia	Ei	1 2/3	1 2/3	2	4	4	3	3 1/2	1 1/2	1 1/2	1 1/2	1 1/2	3	4	6	6
	Periaate	2/3	2/3	1/3			1/2		1/4	1/4	1/4	1/4			1	1
	Strategia	1/3											1			1
	Proseduuri		1/3	1/3			1/2	1/2	1/4	1/4	1/4	1/4			1	

	TEHTÄVÄ															
Analogia	Ei															
	Periaate															
	Strategia															
	Proseduuri															

	TEHTÄVÄ																Yht.
Analogia	Ei																44 5/6
	Periaate																5 1/6
	Strategia																2 1/3
	Proseduuri																3 2/3
																kaikki	56

Liite 41: Lyhyt matikka 3 - Lineaarinen muutos ja kulmakerroin

	ESIMERKKI	1 a	1 b	2 a	2 b	3	4	5 a	5 b					Yht.
Avoin / suljettu	Suljettu	1/2	1/2	1/2	1/2	1	1	1/2	1/2					5,0
	Avoin													
														5,0
Tehtäväkategoria	Käsitetieto	1/2												0,5
	Ominaisuus				1/2		1/2							1,0
	Mekaaninen		1/2											0,5
	Rutiini			1/2		1	1/2							2,0
	Strategia							1/2	1/2					1,0
	Sovellus													
	Päättely													
														5,0
Kogn. alue	Tietäminen	1/2	1/2		1/2		1/2							2,0
	Soveltaminen			1/2		1	1/2	1/2	1/2					3,0
	Päättely													
														5,0
Prosessi	Molaarinen													
	Modulaarinen													
	Epärelevantti	1/2	1/2	1/2	1/2	1	1	1/2	1/2					5,0
														5,0

	TEHTÄVÄ	1	2	3	4	5a	5b	5c	6a	6b	6c	7a	7b	7c	8a	8b
Analogia	Ei	6	5	5	5	2	2	2 1/3	1 2/3	1 2/3	1 2/3	1	1	1	1 1/3	2 2/3
	Periaate	2						1/3	1	1	1	1 2/3	1 2/3	1 2/3	1 1/3	
	Strategia		2	2	2											
	Proseduuri		1	1	1	2/3	2/3									

	TEHTÄVÄ	8c	9a	9b	9c	10a	10b	10c	11	12a	12b	13				
Analogia	Ei	2 2/3	1 2/3	1 2/3	1 2/3	1	2 2/3	2 2/3	5	2 1/2	2 1/2	4				
	Periaate		1/3	1/3	1/3	1 2/3			3	1/2	1/2	2				
	Strategia															
	Proseduuri		2/3	2/3	2/3					1	1	2				

	TEHTÄVÄ																Yht.
Analogia	Ei																67 1/3
	Periaate																20 1/3
	Strategia																6
	Proseduuri																10 1/3
																kaikki	104

Liite 42: Lyhyt matikka 3 - Kulmakertoimen laskeminen

	ESIMERKKI	1 a	1 b	2	3	4							Yht.
Avoin / suljettu	Suljettu	1/2	1/2	1	1	1							4,0
	Avoin												
													4,0
Tehtäväkategoria	Käsitetieto			1/2	1/2								1,0
	Ominaisuus		1/4										0,3
	Mekaaninen												
	Rutiini	1/2	1/4	1/2									1,3
	Strategia				1/2								0,5
	Sovellus					1							1,0
	Päättely												
													4,0
Kogn. alue	Tietäminen		1/4	1/2	1/2								1,3
	Soveltaminen	1/2	1/4	1/2	1/2	1							2,8
	Päättely												
													4,0
Prosessi	Molaarinen			1		1							2,0
	Modulaarinen	1/2	1/2		1								2,0
	Epärelevantti												
													4,0

	TEHTÄVÄ	24a	24b	24c	24d	25a	25b	25c	25d	26	27	28	29a	29b	30	31
Analogia	Ei										3	3	1	1	4	3
	Periaate	3/4	3/4	3/4	3/4	1 1/4	1 1/4	1 1/4	1 1/4	5	1	1	1	1	1	2
	Strategia	1/4	1/4	1/4	1/4							1				
	Proseduuri	1/4	1/4	1/4	1/4						1		1/2	1/2		

	TEHTÄVÄ	32														
Analogia	Ei	4														
	Periaate	1														
	Strategia															
	Proseduuri															

	TEHTÄVÄ																Yht.
Analogia	Ei																19
	Periaate																21
	Strategia																2
	Proseduuri																3
																kaikki	45

Liite 43: Lyhyt matikka 3 - Suoran yhtälö

	ESIMERKKI	1	2	3	4	5 t1	5 t2	Yht.
Avoin / suljet-tu	Suljettu	1	1	1	1	1/2	1/2	5,0
	Avoin							
								5,0
Tehtäväkategoria	Käsitetieto							
	Ominaisuus			1/2	1			1,5
	Mekaaninen							
	Rutiini	1	1	1/2		1/2	1/2	3,5
	Strategia							
	Sovellus							
	Päättely							
								5,0
Kogn. alue	Tietäminen			1/2	1			1,5
	Soveltaminen	1	1	1/2		1/2	1/2	3,5
	Päättely							
								5,0
Prosessi	Molaarinen		1	1				2,0
	Modulaarinen				1			1,0
	Epärelevantti	1				1/2	1/2	2,0
								5,0

	TEHTÄVÄ	43a	43b	44a	44b	44c	44d	44e	45a	45b	45c	46a	46b	46c	47	48
Analogia	Ei	2	2	1/5	1/5	1/5	1/5	1/5	1 1/3	1 1/3	1 1/3	1 1/3	1 1/3	1 1/3	2	2
	Periaate	1/2	1/2	1	1	1	1	1	1/3	1/3	1/3	2/3	2/3	2/3	1	1
	Strategia								1/3	1/3	1/3					
	Proseduuri	1/2	1/2												3	3

	TEHTÄVÄ	49	50a	50b	51a	51b
Analogia	Ei	5	2 1/2	2 1/2	1 1/2	1 1/2
	Periaate		1/2	1/2	1 1/2	1 1/2
	Strategia					
	Proseduuri	1				

	TEHTÄVÄ	Yht.
Analogia	Ei	30
	Periaate	15
	Strategia	1
	Proseduuri	8
	kaikki	54

Liite 44: Lyhyt matikka 3 - Suoran yhtälön muodostaminen

	ESIMERKKI	1 a	1 b	2 a	2 b	3 a	3 b	4 a	4 b	4 c	5			Yht.
Avoin / suljet-tu	Suljettu	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	1/3	1/3	1/3	1			5,0
	Avoin													
														5,0
Tehtäväkategoria	Käsitetieto													
	Ominaisuus		1/2			1/2	1/2							1,5
	Mekaaninen										1			1,0
	Rutiini			1/2	1/2				1/3	1/3				1,7
	Strategia	1/2												0,5
	Sovellus							1/3						0,3
	Päättely													
														5,0
Kogn. alue	Tietäminen		1/2			1/2	1/2				1			2,5
	Soveltaminen	1/2		1/2	1/2			1/3	1/3	1/3				2,5
	Päättely													
														5,0
Prosessi	Molaarinen			1/2	1/2	1/2		1/3						1,8
	Modulaarinen													
	Epärelevantti	1/2	1/2				1/2		1/3	1/3	1			3,2
														5,0

	TEHTÄVÄ	62a	62b	63a	63b	64a	64b	65a	65b	66	67a	67b	67c	67d	68a	68b
Analogia	Ei	3	3	3	3	3	3	4 1/2	4 1/2	5	2 1/4	2 1/4	2	2	2 2/3	2 2/3
	Periaate					1/2	1/2			5			1/4	1/4	1/3	1/3
	Strategia	1/2	1/2	1/2	1/2	1 1/2	1 1/2									
	Proseduuri	1 1/2	1 1/2	1 1/2	1 1/2			1/2	1/2		1/4	1/4	1/4	1/4	1/3	1/3

	TEHTÄVÄ	68c	69a	69b	69c	70a	70b	71a	71b							
Analogia	Ei	2 2/3	1 2/3	2 2/3	2 2/3	4 1/2	4 1/2	3	3							
	Periaate	1/3	1 1/3	1/3	1/3											
	Strategia							1/2	1/2							
	Proseduuri	1/3	1/3	1/3	1/3	1/2	1/2	1 1/2	1 1/2							

	TEHTÄVÄ																Yht.
Analogia	Ei																70 1/2
	Periaate																9 1/2
	Strategia																6
	Proseduuri																14
																kaikki	100

Liite 45: Lyhyt matikka 3 - Suorien leikkauspiste

	ESIMERKKI	1 t1	1 t2	2	3									Yht.
Avoin / suljet-tu	Suljettu	1/2	1/2	1	1									3,0
	Avoin													
														3,0
Tehtäväkategoria	Käsitetieto													
	Ominaisuus													
	Mekaaninen	1/4												0,3
	Rutiini	1/4	1/2	1										1,8
	Strategia													
	Sovellus				1									1,0
	Päättely													
														3,0
Kogn. alue	Tietäminen	1/4												0,3
	Soveltaminen	1/4	1/2	1	1									2,8
	Päättely													
														3,0
Prosessi	Molaarinen	1/2		1										1,5
	Modulaarinen		1/2		1									1,5
	Epärelevantti													
														3,0

	TEHTÄVÄ	79a	79b	80a	80b	81	82a	82b	82c	83	84	85a	85b	86	87	
Analogia	Ei			1/2	1/2	2	2/3	1/3	1/3	3	3		1 1/2	3	1	
	Periaate	1	1	1	1	2	2/3	2/3	2/3	1		1 1/2			3	
	Strategia							1/3	1/3				1/2	1		
	Proseduuri	1	1	1/2	1/2						1	1/2				

	TEHTÄVÄ															
Analogia	Ei															
	Periaate															
	Strategia															
	Proseduuri															

	TEHTÄVÄ																Yht.
Analogia	Ei																15 5/6
	Periaate																13 1/2
	Strategia																2 1/6
	Proseduuri																4 1/2
																kaikki	36

Liite 46: Lyhyt matikka 3 - Kahden pisteen määräämä suora

	ESIMERKKI	1	2 a	2 b	2 c	Yht.
Avoin / suljettu	Suljettu	1	1/3	1/3	1/3	2,0
	Avoin					
						2,0
Tehtäväkategoria	Käsitetieto					
	Ominaisuus					
	Mekaaninen			1/3		0,3
	Rutiini	1				1,0
	Strategia				1/3	0,3
	Sovellus		1/3			0,3
	Päättely					
						2,0
Kogn. alue	Tietäminen			1/3		0,3
	Soveltaminen	1	1/3		1/3	1,7
	Päättely					
						2,0
Prosessi	Molaarinen	1				1,0
	Modulaarinen		1/3			0,3
	Epärelevantti			1/3	1/3	0,7
						2,0

	TEHTÄVÄ	98a	98b	98c	99a	99b	100a	100b	101a	101b	101c	102	103	104	105a	105b
Analogia	Ei	2/3	2/3	2/3	1	1	1 1/2	1 1/2	2/3	2/3	2/3	1	2		1/2	1/2
	Periaate	1/3	1/3	1/3	1/2	1/2	1/2	1/2			1/3	2		2	1/4	1/4
	Strategia								1/3	1/3			1	1		
	Proseduuri	1/3	1/3	1/3	1/2	1/2			1/3	1/3	1/3	1	1	1	1/4	1/4

	TEHTÄVÄ	105c	105d	106a	106b	106c
Analogia	Ei	1/2	1	2/3	2/3	1 1/3
	Periaate	1/4		1/3	1/3	
	Strategia					
	Proseduuri	1/4		1/3	1/3	

	TEHTÄVÄ	Yht.
Analogia	Ei	17 1/6
	Periaate	8 3/4
	Strategia	2 2/3
	Proseduuri	7 2/5
	kaikki	36

Liite 47: Lyhyt matikka 3 - Eksponenttifunktio

	ESIMERKKI	1 a	1 b	1 c	2	3 a	3 b	4 a	4 b	4 c				Yht.
Avoin / suljet-tu	Suljettu	1/3	1/3	1/3	1	1/2	1/2	1/3	1/3	1/3				4,0
	Avoin													
														4,0
Tehtäväkategoria	Käsitetieto													
	Ominaisuus			1/9										0,1
	Mekaaninen			1/9	1									1,1
	Rutiini	1/3	1/3	1/9										0,8
	Strategia					1/2	1/2	1/3	1/3	1/3				2,0
	Sovellus													
	Päättely													
														4,0
Kogn. alue	Tietäminen			2/9	1									1,2
	Soveltaminen	1/3	1/3	1/9		1/2	1/2	1/3	1/3	1/3				2,8
	Päättely													
														4,0
Prosessi	Molaarinen			1/3		1/2	1/2	1/3	1/3	1/3				2,3
	Modulaarinen													
	Epärelevantti	1/3	1/3		1									1,7
														4,0

	TEHTÄVÄ	232a	232b	232c	233	234	235a	235b	236a	236b	237a	237b	238a	238b	239	240
Analogia	Ei	1 1/3	1	1	7	6	2	2	1/2	2 1/2	1/2	1/2	1/2	2 1/2	8	2
	Periaate		1/3	1/3		1	1 1/2	1	2 1/2		2	2	2 1/2		1	5
	Strategia	2/3	2/3	2/3				1/2	1	1	1/2	1/2	1	1		2
	Proseduuri	1	1	1	2	2	1	1	1/2	1	1 1/2	1 1/2	1/2	1		

	TEHTÄVÄ															
Analogia	Ei															
	Periaate															
	Strategia															
	Proseduuri															

	TEHTÄVÄ																Yht.
Analogia	Ei																37 1/3
	Periaate																19 1/6
	Strategia																9 1/2
	Proseduuri																15
																kaikki	81

Liite 48: Lyhyt matikka 4 - Funktion kasvaminen ja väheneminen

	ESIMERKKI	1 a	1 b	2 a	2 b	3	4 a	4 b						Yht.
Avoin / suljet-tu	Suljettu	1/2	1/2	1/2	1/2	1	1/2	1/2						4,0
	Avoin													
														4,0
Tehtäväkategoria	Käsitetieto													
	Ominaisuus													
	Mekaaninen													
	Rutiini	1/2		1/2	1/2	1								2,5
	Strategia													
	Sovellus							1/2						0,5
	Päättely		1/2				1/2							1,0
														4,0
Kogn. alue	Tietäminen													
	Soveltaminen	1/2		1/2	1/2	1		1/2						3,0
	Päättely		1/2				1/2							1,0
														4,0
Prosessi	Molaarinen													
	Modulaarinen													
	Epärelevantti	1/2	1/2	1/2	1/2	1	1/2	1/2						4,0
														4,0

	TEHTÄVÄ	199a	199b	200	201a	201b	201c	202a	202b	203a	203b	203c	203d	204	205a	205b
Analogia	Ei	3	3	7	1	1	1	3	3	3/4	3/4	3/4	1 1/2	3	2 1/2	3
	Periaate	1/2	1/2		1/3	1/3	1/3			1/4	1/4	1/4		1	1	
	Strategia				1/3	1/3	1/3									1/2
	Proseduuri				2/3	2/3	2/3	1/2	1/2	3/4	3/4	3/4	1/4	3		

	TEHTÄVÄ	206a	206b	207a	207b	208										
Analogia	Ei	1 1/2	3	3 1/2	3	7										
	Periaate	1			1/2											
	Strategia	1/2														
	Proseduuri	1/2	1/2													

	TEHTÄVÄ																Yht.
Analogia	Ei																52 1/4
	Periaate																6 1/4
	Strategia																2
	Proseduuri																9 1/2
																kaikki	70

Liite 49: Lyhyt matikka 4 - Funktion ääriarvot

	ESIMERKKI	1	2											Yht.
Avoin / suljettu	Suljettu	1	1											2,0
	Avoin													
														2,0
Tehtäväkategoria	Käsitetieto													
	Ominaisuus													
	Mekaaninen													
	Rutiini	1	1											2,0
	Strategia													
	Sovellus													
	Päättely													
														2,0
Kogn. alue	Tietäminen													
	Soveltaminen	1	1											2,0
	Päättely													
														2,0
Prosessi	Molaarinen													
	Modulaarinen													
	Epärelevantti	1	1											2,0
														2,0

	TEHTÄVÄ	220	221a	221b	222a	222b	223	224	225	226						
Analogia	Ei				1/2	1/2										
	Periaate	2			1/2	1/2										
	Strategia		1/2	1/2			1	1	1	1						
	Proseduuri		1/2	1/2			1	1	1	1						

	TEHTÄVÄ															
Analogia	Ei															
	Periaate															
	Strategia															
	Proseduuri															

	TEHTÄVÄ																Yht.
Analogia	Ei																1
	Periaate																3
	Strategia																5
	Proseduuri																5
																kaikki	14

Liite 50: Lyhyt matikka 4 - Funktion suurin ja pienin arvo

	ESIMERKKI	1	2	Yht.
Avoin / suljet-tu	Suljettu	1	1	2,0
	Avoin			
				2,0
Tehtäväkategoria	Käsitetieto			
	Ominaisuus			
	Mekaaninen			
	Rutiini	1	1	2,0
	Strategia			
	Sovellus			
	Päättely			
				2,0
Kogn. alue	Tietäminen			
	Soveltaminen	1	1	2,0
	Päättely			
				2,0
Prosessi	Molaarinen			
	Modulaarinen			
	Epärelevantti	1	1	2,0
				2,0

	TEHTÄVÄ	234a	234b	234c	234d	235a	235b	236a	236b	237a	237b	237c	238	239a	239b	240
Analogia	Ei															
	Periaate	1/4	1/4	1/4	1/4	1/2	1/2	1/2	1/2	1/3	1/3	1/3	1	1/2	1/2	1
	Strategia	1/4	1/4	1/4	1/4	1/2	1/2	1/2	1/2							
	Proseduuri									1/3	1/3	1/3	1	1/2	1/2	1

	TEHTÄVÄ	241	242	243	244
Analogia	Ei	2	1	2	1
	Periaate		1		1
	Strategia				
	Proseduuri				

	TEHTÄVÄ	Yht.
Analogia	Ei	6
	Periaate	9
	Strategia	3
	Proseduuri	4
	kaikki	22

Liite 51: Lyhyt matikka 4 - Sovelluksia avaruusgeometriaan

	ESIMERKKI	1	2 a	2 b	3									Yht.
Avoin / suljet-tu	Suljettu	1	1/2	1/2	1									3,0
	Avoin													
														3,0
Tehtäväkategoria	Käsitetieto													
	Ominaisuus													
	Mekaaninen													
	Rutiini													
	Strategia													
	Sovellus	1	1/2	1/2										2,0
	Päättely				1									1,0
														3,0
Kogn. alue	Tietäminen													
	Soveltaminen	1	1/2	1/2										2,0
	Päättely				1									1,0
														3,0
Prosessi	Molaarinen													
	Modulaarinen	1	1/2	1/2	1									3,0
	Epärelevantti													
														3,0

	TEHTÄVÄ	255	256	257a	257b	258	259	260	261	262a	262b	263	264	265		
Analogia	Ei	3	3	1/2	1/2	1	1	1	3	1	1	1	2	4		
	Periaate				1/2			1		1	1	2	2			
	Strategia		1	1	1/2	2	2	2				1				
	Proseduuri	1		1/2	1/2	1	1		1							

	TEHTÄVÄ															
Analogia	Ei															
	Periaate															
	Strategia															
	Proseduuri															

	TEHTÄVÄ																Yht.
Analogia	Ei																22
	Periaate																7 1/2
	Strategia																9 1/2
	Proseduuri																5
																kaikki	44

Liite 52: Pyramidi 1 - 4.1 Suoraan verrannollisuus

	ESIMERKKI	1	2 a	2 b	3 t1	3 t2	3 t3	3 t4	4 t1	4 t2	4 t3	Yht.
Avoin / suljet-tu	**Suljettu**	1	1/2	1/2	1/4	1/4	1/4	1/4	1/3	1/3	1/3	4,0
	Avoin											
												4,0
Tehtäväkategoria	**Käsitetieto**											
	Ominaisuus	1	1/2	1/2								2,0
	Mekaaninen											
	Rutiini					1/4						0,3
	Strategia						1/4	1/4	1/3	1/3	1/3	1,5
	Sovellus											
	Päättely				1/4							0,3
												4,0
Kogn. alue	**Tietäminen**	1	1/2	1/2								2,0
	Soveltaminen					1/4	1/4	1/4	1/3	1/3	1/3	1,8
	Päättely				1/4							0,3
												4,0
Prosessi	**Molaarinen**					1/4	1/4	1/4	1/3	1/3	1/3	1,8
	Modulaarinen				1/4							0,3
	Epärelevantti	1	1/2	1/2								2,0
												4,0

	TEHTÄVÄ	401a	401b	402	403	404	405	406	407
Analogia	**Ei**	3 1/2	3 1/2	9	1	1	3	6	6
	Periaate	1/2	1/2	1	5	5	3	1	1
	Strategia		1		1	1	1		3
	Proseduuri	1			3	3	3	3	

	TEHTÄVÄ								
Analogia	**Ei**								
	Periaate								
	Strategia								
	Proseduuri								

	TEHTÄVÄ									Yht.
Analogia	**Ei**									33
	Periaate									17
	Strategia									7
	Proseduuri									13
									kaikki	70

Liite 53: Pyramidi 1 - 4.2 Kääntäen verrannollisuus

	ESIMERKKI	1	2	3 t1	3 t2	3 t3	3 t4	4 t1	4 t2					Yht.
Avoin / suljettu	Suljettu	1	1	1/4	1/4	1/4	1/4	1/2	1/2					4,0
	Avoin													
														4,0
Tehtäväkategoria	Käsitetieto													
	Ominaisuus	1	1											2,0
	Mekaaninen													
	Rutiini													
	Strategia				1/4	1/4	1/4							0,8
	Sovellus							1/2	1/2					1,0
	Päättely			1/4										0,3
														4,0
Kogn. alue	Tietäminen	1	1											2,0
	Soveltaminen				1/4	1/4	1/4	1/2	1/2					1,8
	Päättely			1/4										0,3
														4,0
Prosessi	Molaarinen				1/4	1/4	1/4	1/2	1/2					1,8
	Modulaarinen			1/4										0,3
	Epärelevantti	1	1											2,0
														4,0

	TEHTÄVÄ	408a	408b	408c	408d	409a	409b	410	411	412	413	414	415	416	417a	417b
Analogia	Ei	1	1	1	1	1	1	5	4	4	1	4	6	7	2	2
	Periaate	3/4	3/4	3/4	3/4	1 1/2	1 1/2	1			3			1	2/3	2/3
	Strategia	1/4	1/4	1/4	1/4	1 1/2	1 1/2	2	1	4	1		2			
	Proseduuri								3		3	4				

	TEHTÄVÄ	417c	418	419												
Analogia	Ei	2 2/3	6	6												
	Periaate		2	2												
	Strategia															
	Proseduuri															

	TEHTÄVÄ																Yht.
Analogia	Ei																55 2/3
	Periaate																16 1/3
	Strategia																14
	Proseduuri																10
																kaikki	96

Liite 54: Pyramidi 1 - 7.1 Määritelmä (funktio)

	ESIMERKKI	1	2	3 a	3 b	3 c	3 d	4 a	4 b	5	6 a	6 b		Yht.
Avoin / suljettu	**Suljettu**	1	1	1/4	1/4	1/4	1/4	1/2	1/2	1	1/2	1/2		6,0
	Avoin													
														6,0
Tehtäväkategoria	**Käsitetieto**	1	1/2											1,5
	Ominaisuus		1/2	1/4	1/4	1/4	1/4	1/2	1/2	1				3,5
	Mekaaninen													
	Rutiini										1/2	1/2		1,0
	Strategia													
	Sovellus													
	Päättely													
														6,0
Kogn. alue	**Tietäminen**	1	1	1/4	1/4	1/4	1/4	1/2	1/2	1				5,0
	Soveltaminen										1/2	1/2		1,0
	Päättely													
														6,0
Prosessi	**Molaarinen**													
	Modulaarinen													
	Epärelevantti	1	1	1/4	1/4	1/4	1/4	1/2	1/2	1	1/2	1/2		6,0
														6,0

	TEHTÄVÄ	701a	701b	702	703a	703b	703c	704a	704b	704c	705	706a	706b	706c	706d	707
Analogia	**Ei**	2	2	8	1 1/3	1 1/3	1 1/3	3 2/3	3 2/3	3 2/3	9	2 3/4	2 3/4	2 3/4	2 3/4	11
	Periaate	1 1/2	1/2	2	1 2/3	1 2/3	1 2/3				2					
	Strategia	2	2													
	Proseduuri		1	1	2/3	2/3	2/3									

	TEHTÄVÄ	708a	708b	708c	709a	709b	709c	709d	710a	710b						
Analogia	**Ei**	3	3	3	2 3/4	2 3/4	2 1/2	2 1/2	5	5 1/2						
	Periaate							1/4	1/2							
	Strategia						1/4									
	Proseduuri	2/3	2/3	2/3												

	TEHTÄVÄ																Yht.
Analogia	**Ei**																88
	Periaate																11 3/4
	Strategia																4 1/4
	Proseduuri																6
																kaikki	110

Liite 55: Pyramidi 1 - 7.2 Funktion kuvaaja

	ESIMERKKI	1	2	3	4	5								Yht.
Avoin / suljettu	Suljettu	1	1	1	1	1								5,0
	Avoin													
														5,0
Tehtäväkategoria	Käsitetieto													
	Ominaisuus	1		1	1	1								4,0
	Mekaaninen													
	Rutiini		1											1,0
	Strategia													
	Sovellus													
	Päättely													
														5,0
Kogn. alue	Tietäminen	1		1	1	1								4,0
	Soveltaminen		1											1,0
	Päättely													
														5,0
Prosessi	Molaarinen													
	Modulaarinen													
	Epärelevantti	1	1	1	1	1								5,0
														5,0

	TEHTÄVÄ	711a	711b	711c	711d	711e	711f	712a	712b	712c	713a	713b	714	715	716	
Analogia	Ei	5/6	5/6	5/6	5/6	2/3	5/6	1 2/3	1 2/3	1	2	2	4	4	5	
	Periaate					1/6				1/3	1/2		1			
	Strategia													1		
	Proseduuri									1/3		1/2				

	TEHTÄVÄ															
Analogia	Ei															
	Periaate															
	Strategia															
	Proseduuri															

	TEHTÄVÄ																Yht.
Analogia	Ei																26 1/6
	Periaate																2
	Strategia																1
	Proseduuri																5/6
																kaikki	30

Liite 56: Pyramidi 1 - 7.3 Potenssifunktio

	ESIMERKKI	1	2											Yht.
Avoin / suljet-tu	**Suljettu**	1	1											2,0
	Avoin													
														2,0
Tehtäväkategoria	**Käsitetieto**													
	Ominaisuus	1	1											2,0
	Mekaaninen													
	Rutiini													
	Strategia													
	Sovellus													
	Päättely													
														2,0
Kogn. alue	**Tietäminen**	1	1											2,0
	Soveltaminen													
	Päättely													
														2,0
Prosessi	**Molaarinen**													
	Modulaarinen													
	Epärelevantti	1	1											2,0
														2,0

	TEHTÄVÄ	717a	717b	717c	717d	717e	718	719	720a	720b	720c	721a	721b	721c	721d	721e
Analogia	**Ei**						2	2				1/4	1/4	1/4	1/4	1/4
	Periaate	1/5	1/5	1/5	1/5	1/5			1/3							
	Strategia	1/5	1/5	1/5	1/5	1/5										
	Proseduuri								1/3	2/3	2/3					

	TEHTÄVÄ	721f	721g	721h												
Analogia	**Ei**	1/4	1/4	1/4												
	Periaate															
	Strategia															
	Proseduuri															

	TEHTÄVÄ																Yht.
Analogia	**Ei**																6
	Periaate																1 1/3
	Strategia																1
	Proseduuri																1 2/3
																kaikki	10

Liite 57: Pyramidi 1 - 7.4 Eksponenttifunktio

	ESIMERKKI	1	2 a	2 b	2 c	2d								Yht.
Avoin / suljettu	Suljettu	1	1/4	1/4	1/4	1/4								2,0
	Avoin													
														2,0
Tehtäväkategoria	Käsitetieto													
	Ominaisuus													
	Mekaaninen													
	Rutiini													
	Strategia													
	Sovellus		1/4	1/4	1/4	1/4								1,0
	Päättely	1												1,0
														2,0
Kogn. alue	Tietäminen													
	Soveltaminen		1/4	1/4	1/4	1/4								1,0
	Päättely	1												1,0
														2,0
Prosessi	Molaarinen	1	1/4	1/4	1/4	1/4								2,0
	Modulaarinen													
	Epärelevantti													
														2,0

	TEHTÄVÄ	722a	722b	723a	723b	724a	724b	724c	724d	725	726a	726b	727	728a	728b	728c
Analogia	Ei	1	2	1/2	1/2	1/2	1/2	3/4	3/4	3	2 1/2	1	5	1 1/4	1 1/4	1 1/4
	Periaate		1/2	2	2			1/4	1/4			1/2				
	Strategia	1/2								1						
	Proseduuri	1				3/4	3/4	1/4	1/4	1		1				

	TEHTÄVÄ	728d	729													
Analogia	Ei	1 1/4	5													
	Periaate															
	Strategia															
	Proseduuri															

	TEHTÄVÄ																Yht.
Analogia	Ei																28
	Periaate																5 1/2
	Strategia																1 1/2
	Proseduuri																5
																kaikki	40

Liite 58: Pyramidi 2 - 2.1 Ensimmäisen asteen polynomifunktio

	ESIMERKKI	1	2 a	2 b	2 c	3								Yht.
Avoin / suljet-tu	Suljettu	1	1/3	1/3	1/3	1								3,0
	Avoin													
														3,0
Tehtäväkategoria	Käsitetieto													
	Ominaisuus					1								1,0
	Mekaaninen													
	Rutiini	1												1,0
	Strategia													
	Sovellus		1/3	1/3	1/3									1,0
	Päättely													
														3,0
Kogn. alue	Tietäminen					1								1,0
	Soveltaminen	1	1/3	1/3	1/3									2,0
	Päättely													
														3,0
Prosessi	Molaarinen		1/3											0,3
	Modulaarinen													
	Epärelevantti	1		1/3	1/3	1								2,7
														3,0

	TEHTÄVÄ	201a	201b	201c	201d	202a	202b	202c	202d	203a	203b	203c	203d	203e	203f	204
Analogia	Ei	3/4	1	1	1	1	1	1	1	5/6	5/6	5/6	5/6	5/6	5/6	5
	Periaate	1/4		1/4				1/4								
	Strategia	1/4				1/4										
	Proseduuri		1/4		1/4		1/4		1/4							

	TEHTÄVÄ	205	206	207a	207b	207c	207d	207e	207f	208	209a	209b	209c	209d	210	211
Analogia	Ei	5	5	5/6	5/6	5/6	5/6	5/6	5/6	5	1	1	3/4	3/4	3	3
	Periaate										1/4	1/4			1	1
	Strategia												1/4	1/4		
	Proseduuri												1/4	1/4	1	1

	TEHTÄVÄ	212a	212b	212c	212d	213a	213b	213c	213d	214							Yht.
Analogia	Ei	1	1	1	1 1/4	1	1 1/4	1	1	5							60 3/4
	Periaate	1/4															3 1/2
	Strategia					1/4			1/4								1 1/2
	Proseduuri		1/4	1/4				1/4									4 1/4
																kaikki	70

Liite 59: Pyramidi 7 - 4.1 Funktion raja-arvo

	ESIMERKKI	1 a	1 b	1 c	1 d	1 e	2	3	4					Yht.
Avoin / suljet-tu	Suljettu	1/5	1/5	1/5	1/5	1/5	1	1	1					4,0
	Avoin													
														4,0
Tehtäväkategoria	Käsitetieto													
	Ominaisuus						1							1,0
	Mekaaninen													
	Rutiini	1/5	1/5	1/5	1/5	1/5		1	1					3,0
	Strategia													
	Sovellus													
	Päättely													
														4,0
Kogn. alue	Tietäminen						1							1,0
	Soveltaminen	1/5	1/5	1/5	1/5	1/5		1	1					3,0
	Päättely													
														4,0
Prosessi	Molaarinen													
	Modulaarinen													
	Epärelevantti	1/5	1/5	1/5	1/5	1/5	1	1	1					4,0
														4,0

	TEHTÄVÄ	401a	401b	401c	401d	402a	402b	402c	402d	403a	403b	403c	403d	404	405a	405b
Analogia	Ei	1/2	3/4	3/4	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	3/4	3/4	1/2	3/4	2	1/3	1/2
	Periaate	1/4										1/4		1		
	Strategia	1/4	1/4	1/4	1 1/4	1/2		1/2	1/4	1/4	1/4	1/4	1/4	1		1/6
	Proseduuri	1	1	1	1/4	1	1 1/2	1	1 1/4	1	1	1	1	4	1	2/3
		2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	8	1 1/3	1 1/3

	TEHTÄVÄ	405c	405d	405e	405f	406	407									
Analogia	Ei	1/3	1/3	1/3	1/2	7	7									
	Periaate															
	Strategia			1/6	1/6		1									
	Proseduuri	1	1	5/6	2/3	1										

	TEHTÄVÄ																Yht.
Analogia	Ei																25 3/5
	Periaate																1 1/2
	Strategia																6 3/4
	Proseduuri																22 1/6
																kaikki	56

Liite 60: Pyramidi 7 - 5.2 Funktion jatkuvuus

	ESIMERKKI	1 a	1 b	1 c	1 d	2 a	2 b	2 c	3	4				Yht.
Avoin / suljet-tu	Suljettu	1/4	1/4	1/4	1/4	1/3	1/3	1/3	1	1				4,0
	Avoin													
														4,0
Tehtäväkategoria	Käsitetieto													
	Ominaisuus	1/4	1/4	1/4	1/4	1/3	1/3	1/3	1					3,0
	Mekaaninen													
	Rutiini													
	Strategia													
	Sovellus													
	Päättely									1				1,0
														4,0
Kogn. alue	Tietäminen	1/4	1/4	1/4	1/4	1/3	1/3	1/3	1					3,0
	Soveltaminen													
	Päättely									1				1,0
														4,0
Prosessi	Molaarinen													
	Modulaarinen													
	Epärelevantti	1/4	1/4	1/4	1/4	1/3	1/3	1/3	1	1				4,0
														4,0

	TEHTÄVÄ	501a	501b	501c	501d	502a	502b	502c	503a	503b	504a	504b	504c	504d	505a	505b
Analogia	Ei	1 1/2	1 1/2	1 1/2	1 1/2	1 2/3	2	2	4	3 1/2	2	2	2	1 1/2	2 1/3	2 1/3
	Periaate					1									2/3	2/3
	Strategia											1/4	1/4	1/4		
	Proseduuri	3/4	3/4	3/4	3/4	1/3	1	1	1/2	1	1/4			1/2		

	TEHTÄVÄ	505c	506	507												
Analogia	Ei	2 1/3	7	8												
	Periaate	2/3	2													
	Strategia			1												
	Proseduuri															

	TEHTÄVÄ																Yht.
Analogia	Ei																48 2/3
	Periaate																5
	Strategia																1 3/4
	Proseduuri																7 3/5
																kaikki	63

Liite 61: Pyramidi 7 - 5.4 Jatkuvia funktioita koskevia lauseita

	ESIMERKKI	1	2 t1	2 t2	3	4	Yht.
Avoin / suljettu	Suljettu	1	1/2	1/2	1	1	4,0
	Avoin						
							4,0
Tehtäväkategoria	Käsitetieto						
	Ominaisuus					1/2	0,5
	Mekaaninen						
	Rutiini			1/2			0,5
	Strategia				1		1,0
	Sovellus						
	Päättely	1	1/2			1/2	2,0
							4,0
Kogn. alue	Tietäminen					1/2	0,5
	Soveltaminen			1/2	1		1,5
	Päättely	1	1/2			1/2	2,0
							4,0
Prosessi	Molaarinen			1/2		1	1,5
	Modulaarinen		1/2				0,5
	Epärelevantti	1			1		2,0
							4,0

	TEHTÄVÄ	518a	518b	519	520	521	522a	522b	523	524	525	526a	526b	527
Analogia	Ei	2 1/2	2	2	2	3	2	2	4	4	5	2 1/2	2 1/2	5
	Periaate		1/2		1									
	Strategia				2									
	Proseduuri			3		2	1/2	1/2	1	1				

	TEHTÄVÄ
Analogia	Ei
	Periaate
	Strategia
	Proseduuri

	TEHTÄVÄ	Yht.
Analogia	Ei	38 1/2
	Periaate	1 1/2
	Strategia	2
	Proseduuri	8
	kaikki	50

Liite 62: Pyramidi 7 - 6.2 Funktion derivaatta

	ESIMERKKI	1	2	3 t1	3 t2	4								Yht.
Avoin / suljet-tu	Suljettu	1	1	1/2	1/2	1								4,0
	Avoin													
														4,0
Tehtäväkategoria	Käsitetieto													
	Ominaisuus													
	Mekaaninen													
	Rutiini	1	1	1/2	1/2									3,0
	Strategia													
	Sovellus					1								1,0
	Päättely													
														4,0
Kogn. alue	Tietäminen													
	Soveltaminen	1	1	1/2	1/2	1								4,0
	Päättely													
														4,0
Prosessi	Molaarinen	1	1	1/2	1/2	1								4,0
	Modulaarinen													
	Epärelevantti													
														4,0

	TEHTÄVÄ	601	602	603	604	605	606	607a	607b	608a	608b	608c	608d	609		
Analogia	Ei	4	2	2	2	2	5	2	2	1/4	1	1	1	4		
	Periaate		2							3/4			1/4	1		
	Strategia			1	3	3				1/4	1/4	1/4				
	Proseduuri	1	1	2				1/2	1/2							

	TEHTÄVÄ															
Analogia	Ei															
	Periaate															
	Strategia															
	Proseduuri															

	TEHTÄVÄ																Yht.
Analogia	Ei																28 1/4
	Periaate																4
	Strategia																7 3/4
	Proseduuri																5
																kaikki	45

Liite 63: Pyramidi 7 - 7.1 Funktion ääriarvot

	ESIMERKKI	1	2	3	4	5	Yht.
Avoin / suljet-tu	Suljettu	1	1	1	1	1	5,0
	Avoin						
							5,0
Tehtäväkategoria	Käsitetieto	1/2					0,5
	Ominaisuus	1/2					0,5
	Mekaaninen						
	Rutiini		1	1	1		3,0
	Strategia					1	1,0
	Sovellus						
	Päättely						
							5,0
Kogn. alue	Tietäminen	1					1,0
	Soveltaminen		1	1	1	1	4,0
	Päättely						
							5,0
Prosessi	Molaarinen						
	Modulaarinen						
	Epärelevantti	1	1	1	1	1	5,0
							5,0

	TEHTÄVÄ	701	702a	702b	702c	702d	702e	702f	703	704	705	706	707	708	709	710
Analogia	Ei	4	2/3	2/3	2/3	2/3	2/3	2/3	3	3	3	2	2	4	2	2
	Periaate											1	1		2	2
	Strategia								1	1	1	1	1	1	1	1
	Proseduuri	1	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1	1	1	1	1			

	TEHTÄVÄ	711	712	713	714	715	716	717
Analogia	Ei	3	3	4	2	3	3	4
	Periaate	1	2	1	1	1	2	1
	Strategia	1			2			
	Proseduuri					1		

	TEHTÄVÄ		Yht.
Analogia	Ei		51
	Periaate		15
	Strategia		11
	Proseduuri		8
		kaikki	85

Liite 64: Pyramidi 8 - 2.1 Yhdistetyn funktion määritelmä

	ESIMERKKI	1 t1	1 t2	2	3	4 a	4 b	5	6					Yht.
Avoin / suljet-tu	Suljettu	1/2	1/2	1		1	1	1						5,0
	Avoin				1									1,0
														6,0
Tehtäväkategoria	Käsitetieto													
	Ominaisuus				1									1,0
	Mekaaninen					1/2	1/2							1,0
	Rutiini	1/2	1/2	1/2					1					2,5
	Strategia													
	Sovellus													
	Päättely			1/2				1						1,5
														6,0
Kogn. alue	Tietäminen				1	1/2	1/2							2,0
	Soveltaminen	1/2	1/2	1/2					1					2,5
	Päättely			1/2				1						1,5
														6,0
Prosessi	Molaarinen													
	Modulaarinen													
	Epärelevantti	1/2	1/2	1	1	1/2	1/2	1	1					6,0
														6,0

	TEHTÄVÄ	201a	201b	202a	202b	202c	202d	202e	203	204	205	206	207	208	209a	209b
Analogia	Ei	3	3	2/5	2/5	2/5	2/5	4/5	3	7	7	8	7	7	2 1/2	3 1/2
	Periaate			2/5	2/5	2/5	2/5		4		1				1	1/2
	Strategia							4/5		1			1	1		
	Proseduuri	1	1	4/5	4/5	4/5	4/5		1						1/2	

	TEHTÄVÄ	210	211a	211b	212											
Analogia	Ei	7	3	3	4											
	Periaate	1	1	1	3											
	Strategia				1											
	Proseduuri															

	TEHTÄVÄ																Yht.
Analogia	Ei																70 2/5
	Periaate																14
	Strategia																4 4/5
	Proseduuri																6 2/3
																kaikki	96

Liite 65: Pyramidi 8 - 3.1 Käänteisfunktion määritelmä

	ESIMERKKI	1	2 a	2 b	3	4								Yht.
Avoin / suljettu	Suljettu	1	1/2	1/2	1	1								4,0
	Avoin													
														4,0
Tehtäväkategoria	Käsitetieto													
	Ominaisuus													
	Mekaaninen													
	Rutiini		1/2	1/2	1									2,0
	Strategia													
	Sovellus													
	Päättely	1				1								2,0
														4,0
Kogn. alue	Tietäminen													
	Soveltaminen		1/2	1/2	1									2,0
	Päättely	1				1								2,0
														4,0
Prosessi	Molaarinen													
	Modulaarinen													
	Epärelevantti	1	1/2	1/2	1	1								4,0
														4,0

	TEHTÄVÄ	301a	301b	302	303	304a	304b	304c	304d	305	306	307	308	309a	309b	309c
Analogia	Ei	1 1/2	1 1/2	2	2	1 1/4	1 1/4	3/4	3/4	3	3	4	3	1 2/3	1 2/3	1 2/3
	Periaate			1					1/2		1	1	1			
	Strategia	1/2	1/2	1												
	Proseduuri	1/2	1/2	1	3			1/2		2	1		1			

	TEHTÄVÄ	310a	310b	311	312											
Analogia	Ei	1 1/2	2 1/2	2	5											
	Periaate	1														
	Strategia			2												
	Proseduuri			1												

	TEHTÄVÄ		Yht.
Analogia	Ei		40
	Periaate		5 1/2
	Strategia		4
	Proseduuri		10 1/2
		kaikki	60