TAMPEREEN YLIOPISTO

Sivuainetutkielma

Tuomas Krook

Matemaattinen osaaminen ylioppilaskokeissa ja korkeakoulujen pääsykokeissa

Informaatiotieteiden yksikkö

Matematiikka

Toukokuu 2014

Tampereen yliopisto
Informaatiotieteiden yksikkö
KROOK, TUOMAS: Matemaattinen osaaminen ylioppilaskokeissa ja korkeakoulujen pääsykokeissa
sivuainetutkielma, 81 s., 6 liites.
Matematiikka
Toukokuu 2014

Tiivistelmä

Matematiikan osaamisen esitetään yleisesti heikentyneen suomalaisessa koulutuksessa viime vuosikymmeninä. Tutkimuksen tavoitteena oli arvioida lukion suorittaneiden ja korkeakoulutukseen hakevien matemaattista osaamista. Tavoitteena oli myös kuvata lukion ja korkeakoulujen matematiikan luonnetta ja niiden eroja. Tutkimuksessa kehitetään aiempiin matemaattisen osaamisen teorioihin pohjaten luokittelusysteemiä, jonka avulla matemaattisten ratkaisuprosessien vaatimaa osaamista ja ajattelua voidaan arvioida. Luokittelusysteemin kehittelyn lähtökohdiksi otetaan Kilpatrickin, Swaffordin ja Findellin määrittelemä matemaattinen taitavuus yhdessä Wilsonin taksonomian kanssa.

Aineiston muodostivat kevään 2004–2013 pitkän matematiikan ylioppilaskokeet ja korkeakoulujen pääsykokeet kolmella eri koulutusalalla: yliopiston matematiikka, teknillisen yliopiston insinöörikoulutus ja ammattikorkeakoulun tekniikan ja liikenteen ala. Kokeiden perusteella tarkasteltiin eri oppilaitosten painopisteitä matemaattisen osaamisen kannalta. Kevään 2004–2012 ylioppilaskokeiden ja vuosien 2004–2013 matematiikan pääsykokeiden tilastoista eriteltiin tehtäväluokittelun jälkeen yleisiä huomioita lukiolaisten matemaattisen osaamisen tasosta. Pääsykoetilastoja käytettiin lisäksi osaamistyyppien ryhmittelyyn ja luokittelusysteemin testaukseen ja jatkokehittelyyn.

Tulokset osoittivat lukiokoulutuksen matemaattisen osaamisen painopisteiden vastaavan hyvin erilaisiin korkeakoulutustarpeisiin. Matemaattisten käsitteiden ymmärtäminen oli kuitenkin hieman alikorostettua ja vaativa todistusajattelu ylikorostettua. Yleisesti ottaen ylioppilas- ja pääsykokeissa oli siirrytty testaamaan matemaattisen ajattelun kannalta yksinkertaisempia taitoja tarkasteluajanjakson aikana. Ylioppilaskokeiden tulokset paljastivat mielenkiintoisia huomioita opiskelijoiden osaamisesta ja oman osaamisen arvioinnista. Lukiolaisten itsearviointitaidot tulkittiin vahvoiksi matemaattisten ominaisuuksien tuntemista vaativissa tehtävissä pisteytyksissä havaittujen poikkeamien perusteella. Pääsykoetilastojen analyysi nosti esiin viisi erilaista osaamistyyppiä, joiden tiedostaminen hyödyttää niin yksittäistä opettajaa kuin opetuksen kehittämistä yleisellä tasolla. Tutkimuksessa kehitetty luokittelusysteemi voi niin ikään auttaa näkemään matematiikan opetuksen ja osaamisen arvioinnin uudesta näkökulmasta.

Asiasanat: tehtävien luokittelu, matemaattisen osaamisen tyypittely, matemaattinen taitavuus, matemaattinen ajattelu, oppimisen nivelvaihe.

SISÄLTÖ

1 JOHDANTO

Matemaattisen osaamisen taso suomalaisessa perus- ja lukiokoulutuksessa on herättänyt yleistä huolestusta viime vuosikymmeninä. Erityisesti peruslaskutaidon hallinnan väitetään heikentyneen niin radikaalisti, että korkeakoulujen opettajat ovat ilmaisseet vaatimustason laskun ja orientoivien matematiikan kurssien olleen välttämättömiä vastatoimia meneillään olevan matemaattisen rappeutumisen korjaamiseksi. (Hautamäki, Säkkinen, Tenhunen, Ursin, Vuorinen, Kamppi & Knubb-Manninen2012.)

Matematiikan oppimista kuvaillaan usein spiraaliksi, jossa aiemmin opitun päälle rakennetaan uutta tietoa. Näin ollen perusopetuksella ja lukiolla samoin kuin lukiolla ja korkeakoulutuksella on kiinteä suhde matematiikan oppimisessa. Lukion opetussuunnitelman perusteissa yksi selkeästi esiin tuotu tavoite onkin nimenomaan korkeakouluvalmiuksien tuottaminen (Lukion opetussuunnitelman perusteet 2003, 118). Tämä lukion pitkän matematiikan opetuksen tuottamiin korkeakouluvalmiuksiin keskittyvä tutkimus kertoo lukiotason opetuksen lisäksi yleisemminkin matematiikan opetuksen ja osaamisen nykytilasta. Tutkimusta aiheesta on tehty melko paljon, mutta painopiste on ollut selvästi perusopetuksessa, vaikka myös lukiota ja korkeakoulutusta koskevia tutkimuksia on tehty. Koulutuksen arviointineuvosto on toteuttanut neljä lukioon liittyvää tutkimusta, jotka ovat kaikki suhteellisen tuoreita (2007–2012). Opetushallituksella puolestaan on pitempi historia lukiota koskevissa tutkimuksissa. Mitä siis voidaan tutkia jo melko kattavasti kolutusta aiheesta? Mielestäni osaamisen tutkimusta on vaivannut tietynlainen pinnallisuus: on keskitytty muun muassa matematiikan aihealueiden tai oppijoiden taustatekijöiden tutkimukseen. Siksi tarkoituksena on nyt tarjota uusi näkökulma matematiikan opetuksen ja oppimisen tutkimukseen, jossa matemaattisen ajattelun eri puolet eivät ole saaneet riittävää painoarvoa.

Tämän tutkimuksen mielenkiinnon kohteena on ylioppilaskokeissa ja korkeakoulujen pääsykokeissa vaadittu ja niissä osoitettu matemaattinen osaaminen ja ajattelu. Huomio kiinnitetään myös kokeiden välittämään kuvaan matematiikasta. Ylioppilaskokeiden tulisi mitata lukion suorittaneiden matemaattista osaamista hyvin laaja-alaisesti, sillä korkeakoulutuksen kentällä tarvitaan varsin erilaista matematiikan osaamista oppilaitoksesta ja alasta riippuen. Korkeakoulujen pääsykokeet on otettu tarkastelun kohteeksi, sillä näin saadaan kuva eri oppipolkujen vaatimasta matemaattisesta osaamisesta ja voidaan suhteuttaa lukio-opetuksessa tehtyjä valintoja opiskelijoiden todellisuuteen. Toki matematiikan opiskelu lukion jälkeisissä oppilaitoksissa saattaa poiketa merkittävästi lukio-opetuksesta, mutta tämän tutkimuksen mielenkiinto kohdistuukin siihen mitä lukiomatematiikka tarjoaa korkeakouluopiskelulle sen alkuvaiheessa. Pääsykokeet ovat oletettavasti hyvä indikaattori korkeakoulutuksen vaatimista perustaidoista, joiden pohjalta korkeakouluissa jatketaan matematiikan taitojen kehittämistä. Tallila (2013) on tutkinut aihetta matematiikan aihealueiden näkökulmasta ja mainitsee tutkimuksen yhtenä tuloksena sen, että ylioppilaskokeissa testataan tyypillisesti hyvin tasaisesti eri aihealueita. Ylioppilaskokeiden valmistelussa huomioidaan siis todennäköisesti matemaattinen osaaminen eri aihe-alueiden muodossa, mutta tehtäviä valmistellessa tulisi keskittyä yhtä lailla matemaattisen ajattelun vaativuuteen. Tässä tutkimuksessa selvitetään miten matemaattisen ajattelun eri puolet tulevat esille ja samalla voidaan kenties päätellä miten hyvin ne kokeiden valmistelussa huomioidaan. Erityisesti aihe on ajankohtainen, kun matemaattisen ajattelun ja osaamisen perusteita joudutaan miettimään uudelleen teknologian tullessa kiinteäksi osaksi matematiikan kulttuuria. Tutkimus saattaa hyödyttää myös opettajia, jotka muun muassa valmistelevat kokeita ja joutuvat pohtimaan kokeissaan vaadittujen ajattelutaitojen ilmenemistä. Heille tämä tutkimus voi tarjota ajattelun välineitä matematiikan osaamisen mittaamiseksi uudesta näkökulmasta.

Matemaattinen osaaminen määritellään tässä tutkimuksessa teoreettisiin malleihin pohjaten. Tämä lähtökohta katsottiin kaikista mielekkäimmäksi, koska aineisto olisi joka tapauksessa niin pieni, että tehtävät eivät välttämättä olisi nostaneet kaikkia matemaattisen osaamisen piirteitä yhtä varmasti esiin – tai ainakin tuloksena olisi ollut ylioppilaslautakunnan ja korkeakoulujen pääsykokeista vastaavien tahojen värittämä näkemys matematiikan osaamisesta, mikä ei palvelisi tutkimuksen tarkoitusta. Teoriasidonnaisuus nähtiin siis välttämättömänä ylioppilaskokeiden ja pääsykokeiden arvioinnin kannalta. Matemaattisen osaamisen kokonaisuuden teoreettinen ymmärtäminen on yksi tämän tutkimuksen ensisijaisista tavoitteista, mutta se ei tarkoita sitä, että tarkastelu jätettäisiin aiemman tiedon varaan. Tutkimuksen aikana kävi nimittäin selväksi, että aiemmat tarkastelut eivät tarjonneet valmiita ratkaisuja matemaattisen osaamisen arvioimiseksi, kun arvioinnin kohteena olivat ylioppilaskokeet ja korkeakoulujen pääsykokeet. Hähkiöniemi ja Viholainen (2004) ovat olleet saman ongelman edessä ja päätyneet muotoilemaan oman mallinsa tehtävien luokittamiseksi. Luokittelusysteemi keskittyi kuitenkin ehkä liiaksi tehtävien ulkoisten seikkojen luokittamiseen ja perustui pääasiassa suomalaiseen näkemykseen, joten sitä ei nähty riittäväksi tämän tutkimuksen tarkoituksiin. Uuden luokittelusysteemin luomiseksi tarkasteltiin kansainvälisesti suosittuja ja lupaavia matemaattisen osaamisen teorioita. Luokittelusysteemi päädyttiin muodostamaan pääasiassa kahden, vanhan ja uuden, näkemyksen yhteistarkastelulla: Wilsonin (1971) ja Kilpatrickin, Swaffordin ja Findellin (2001) muotoilemat matemaattisen osaamisen mallit yhdistyivät teoreettisessa osuudessa luokittelusysteemiksi – käytännössä tehtäväkategorioiksi, joiden avulla matematiikan tehtävien ratkaisussa vaadittavaa ajattelua voidaan luokitella.

Tutkimuksen yksi tavoite on tarkastella toisen- ja korkea-asteen matematiikan vastaavuutta: vastaako lukiokoulutus korkeakoulujen matemaattisiin tarpeisiin ja toisaalta haetaanko korkeakouluissa sellaista matemaattista osaamista, jota lukio tarjoaa? Aihetta on toki tutkittu esimerkiksi koulutuksen arviointineuvoston julkaisussa *Lukion tuottamat jatkokoulutusvalmiudet korkeakoulutuksen näkökulmasta* (Hautamäki, Säkkinen, Tenhunen, Ursin, Vuorinen, Kamppi & Knubb-Manninen 2012), jossa keskitytään erityisesti lukiolaisten näkemyksiin omasta korkeakoulukelpoisuudestaan ja toisaalta korkeakouluopettajien huomioihin lukio-opiskelijoiden osaamisesta. Tässä tutkimuksessa jatketaan samasta teemasta tarkastelemalla oppilaitosten osuutta matemaattisen osaamisen kehittämisessä niiden opiskelijavalinnan painopisteitä tutkimalla. Aihetta tarkastellaan myös laajemmin kuin korkeakoulutuksen tarpeiden näkökulmasta, sillä ylioppilaskokeiden ilmentämää matemaattisen osaamisen mittaamisen laaja-alaisuutta arvioidaan myös teoreettisesta perspektiivistä. Opiskelijoiden osaamisen analysointiin käytettiin Tallilan (2013) esittämiä kevään 2004–2012 ylioppilaskoetilastoja ja Tampereen yliopiston opiskelijavalintajärjestelmästä saatuja, vuosien 2004–2013 matematiikan pääsykokeiden arvostelutilastoja.

2 MATEMAATTINEN OSAAMINEN MATEMATIIKAN TEHTÄVIEN RATKAISUPROSESSISSA

Matemaattisen osaamisen tai taitavuuden käsitteestä on muodostettu kirjallisuudessa useita erilaisia näkemyksiä. Tämän tutkimuksen perustana tullaan käyttämään kahta mallia, joiden avulla on tarkoitus rakentaa tehtävien luokitteluun sopiva kategoriasysteemi. Mallilla tarkoitetaan tässä yhteydessä eri asiaa kuin teorialla. Mallit ovat todellisuuden abstraktioita, jotka auttavat jäsentämään kokonaisuuksia tuomalla esiin niiden olennaisia piirteitä. Teorian ja mallin ero liittyy täsmällisten lakien olemassaoloon ja niiden varmentamiseen. Mallit ovat usein teorioiden esiasteita, joita voidaan testata tutkimuksen keinoin. Eräs mallityyppi on yhteiskuntatieteissä paljon käytetyt taksonomiat eli luokitusjärjestelmät. (Hirsijärvi, Remes & Sajavaara 2009, 145–146.) Jäljempänä esiteltävä Wilsonin (1971) *taksonomia*, onkin nimenomaan kategoriasysteemi, jonka avulla tehtäviä voidaan luokitella. Toinen, Kilpatrickin, Swaffordin ja Findellin (2001) *malli*, puolestaan keskittyy kuvailemaan matemaattisen taitavuuden osa-alueita. Termien selventäminen lienee paikallaan, sillä haluan erottaa toisistaan taitavuuden, osaamisen ja ajattelun käsitteet. Tässä tutkimuksessa käytetään termiä ”matemaattinen taitavuus”, kun viitataan Kilpatrickin, Swaffordin ja Findellin (2001) malliin. ”Matemaattinen osaaminen” puolestaan liittyy teoreettisessa viitekehyksessä muodostettuun kokonaiskäsitykseen, joka koskee oppijan kognitiivisia ominaisuuksia ja taitoja. Matemaattiseen osaamiseen liittyy vahvasti myös affektiivinen puoli, vaikka siihen ei keskitytä tässä tutkimuksessa. ”Matemaattinen ajattelu” puolestaan mainitaan kun halutaan erityisesti korostaa mielen sisäisiä prosesseja.

2.1 Kilpatrickin, Swaffordin ja Findellin malli

Matemaattisen taitavuuden (mathematical proficiency) malli esitellään teoksessa Adding it up: helping children learn mathematics (Kilpatrick ym. 2001). Tätä mallia on lainattu laajalti 2000-luvulla aiheeseen liittyvissä tutkimuksissa ja kirjallisuudessa (ks. esim. Joutsenlahti 2005, Schoenfeld 2007).

Kilpatrick, Swafford ja Findell (2001, 115–175) esittävät ja kuvailevat viiden säikeen avulla menestyksekkään matemaattisen oppimisen edellyttämiä ominaisuuksia. Nämä viisi säiettä ovat:

1. **Käsitteellinen ymmärtäminen** (conceptual understanding): matemaattisten käsitteiden, operaatioiden ja relaatioiden ymmärrys; tieto matemaattisten symbolien, diagrammien ja proseduurien merkityksestä.

2. **Proseduraalinen sujuvuus** (procedural fluency): matemaattisten proseduurien suorittaminen joustavasti, huolellisesti, tehokkaasti ja tarkoituksenmukaisesti.
3. **Strateginen kompetenssi** (strategic competence): Kyky muodostaa matemaattisia ongelmia sekä suunnitella strategioita niiden ratkaisemiseksi käyttäen käsitteitä ja proseduureja soveltuvalla tavalla.
4. **Mukautuva päättely** (adaptive reasoning): logiikan käyttäminen ongelman ratkaisun selittämiseen ja perustelemiseen tai eteneminen jostakin tunnetusta johonkin aiemmin tuntemattomaan.
5. **Yritteliäisyys** (productive disposition): matematiikan näkeminen järkevänä, käytännöllisenä ja käyttökelpoisena sekä tahtoa nähdä vaivaa matematiikan eteen. (Kilpatrick ym. 2001, 118–133.)

Matemaattisen taitavuuden säikeet ovat tiukasti toisiinsa yhteenkietoutuneet, sillä ne kuvaavat kompleksisen kokonaisuden eri puolia. Taitavuuden kehittyminen matematiikassa vaatii näiden kaikkien säikeiden kehittämistä. Keskittymällä ainoastaan yhteen tai kahteen säikeeseen ei ole mahdollista tulla matemaattisesti taitavaksi Kilpatrickin ym. (2001, 116) esittelemässä merkityksessä.

Käsitteellinen ymmärtäminen liittyy matemaattisen tiedon strukturointiin. Käsitteiden, operaatioiden ja relaatioiden ymmärtäminen perustuu yhteyksien runsauteen ja määrään. Tällainen hyvin organisoitu tietorakenne edistää niin uuden oppimista kuin vanhan mieleen palauttamista. Ymmärtäen opitun palauttaminen on helpompaa kuin ulkoa opitun tiedon, koska tieto voidaan tällöin rekonstruoida. Esimerkiksi opitun menetelmän muistaminen väärin on epätodennäköistä, jos se on aikanaan ymmärretty, sillä tällöin on mahdollista päätellä onko mieleen palautettu menetelmä matemaattisesti mielekäs. (Kilpatrick ym. 2001, 118–120.)

Käsitteellistä ymmärtämistä ei välttämättä voi tarkastella luotettavasti objektiivisesta näkökulmasta kun kyseessä on äskettäin opittu asia. Tämä johtuu siitä, että käsitteellisen ymmärryksen ei tarvitse olla verbaalisesti ilmaistavissa, koska käsitteet ymmärretään usein ennen kuin tätä ymmärrystä kyetään ilmaisemaan. (Kilpatrick ym. 2001, 118–120.)

Uuden asian oppimiseen vaadittavan tiedon määrä vähenee kun on mahdollista perustaa se aiemmin opittuun. Samoin uusien ja vieraiden ongelmien ratkaiseminen perustuu tietoon, joka on aiemmin ymmärretty. Käsitteellistä ymmärrystä kartuttaneet oppijat näkevät yhteyksiä käsitteiden ja proseduurien välillä sekä osaavat perustella joitakin faktoja muiden seurauksina. (Kilpatrick ym. 2001, 118–120.)

Proseduraalinen sujuvuus liittyy paitsi taitoon käyttää matemaattisia proseduureja niin myös siihen milloin ja miten niitä käytetään. Konseptuaalinen ymmärtäminen ja proseduraalinen sujuvuus ovat vahvasti kytköksissä toisiinsa, sillä usein proseduurien harjoittelu vahvistaa ymmärrystä ja toisaalta ymmärtämällä proseduurin taustalla olevan matemaattisen rakenteen on virheen tekeminen epätodennäköisempää. Proseduurien oppiminen kuitenkin ennen ymmärtämiseen tähtäävää opetusta voi haitata ymmärryksen muodostumista. Tästä käy esimerkiksi vähennyslaskujen suorittaminen allekkain: kokematon laskija saattaa erehdyksessä vähentää aina isommasta luvusta pienen, vaikka luvut olisivat allekkainlaskussa missä järjestyksessä tahansa. Vähennyslaskun ymmärtänyt laskija sen sijaan tietää, että lukujen järjestyksellä on merkitystä ja osaa perustella sen. Proseduurien käyttöön liittyvän tiedon lisäksi myös tulosten arviointi kuuluu proseduraalisen sujuvuuden säikeeseen. (Kilpatrick ym. 2001, 121–124.)

Strateginen kompetenssi on säikeenä hyvin samankaltainen kuin perinteisesti kirjallisuudessa esitetty taito muotoilla ja ratkaista ongelmia. Ongelman muotoilu on olennainen osa ongelman ratkaisua, vaikka usein tämä vaihe sivuutetaan koulussa valmiiksi laadittuina tehtävinä. Ongelman ratkaiseminen itsessään lähtee yleensä liikkeelle sen esittämisestä jossakin muodossa: sanallisesti, numeerisesti, symbolisesti tai graafisesti. Strateginen kompetenssi edellyttää useiden ratkaisustrategioiden tietämistä sekä kykyä soveltaa tietoja ja taitoja. Ongelmia voi lähestyä tilanteesta ja omista kyvyistä riippuen esimerkiksi päättelemällä, arvaamalla, algebrallisesti tai muulla tavoin. Yksittäisten tilanteiden mentaalinen konstruointi on usein menestyksekkään ongelmanratkaisun avain. Samoin ongelmien taustalla olevien matemaattisten struktuurien näkeminen on osa strategista kompetenssia. Ulkoisista seikoista huolimatta eri ongelmilla voi olla samanlainen matemaattinen struktuuri ja tällöin on ongelmanratkaisun kannalta hyödyllistä tunnistaa tilanteiden samanlaisuus ja yhteys matemaattisiin käsitteisiin. Proseduraalisen sujuvuuden säie liittyy vahvasti strategiseen kompetenssiin proseduurien valinnan kannalta. (Kilpatrick ym. 2001, 124–129.)

Mukautuva päättely viittaa kykyyn ajatella loogisesti käsitteiden ja tilanteiden välisistä suhteista. Todistaminen ja muu deduktiivinen päätteleminen kuuluvat tähän säikeeseen, mutta eivät kata sen merkitystä kokonaan. Mukautuva päättely sisältää vielä informaalin selittämisen ja perustelemisen lisäksi intuitiivisen ja induktiivisen järkeilyn, joka perustuu säännönmukaisuuksiin, analogioihin ja metaforiin. Toisin kuin voisi luulla, mukautuva päättely ei ole ainoastaan hyvin edistyneiden oppijoiden säie. Lapset kykenevät mukautuvaan päättelyyn jo hyvin pienessä iässä ja osaavat "todistaa" yksinkertaisia matemaattisia väitteitä. Oppimisen kannalta on tärkeää kyetä perustelemaan ja selittämään ideansa, jotta voi tehdä järkeilynsä itselleen selväksi ja kasvattaa näin käsitteellistä ymmärrystään. (Kilpatrick ym. 2001, 129–131.)

2.2 Wilsonin taksonomia

James W. Wilson esitteli jo vuonna 1971 tehtävien luokittelujärjestelmän, johon viitataan yleisesti Wilsonin taksonomiana. Se keskittyy vahvasti kategorisoimaan matemaattisia kykyjä ja heijastelee oman aikansa kognitiivista oppimiskäsitystä. Toisin kuin Kilpatrickin ym. mallissa, eri tasot ja niiden yksittäiset kyvyt nähdään toisistaan erillisinä. Huomattavaa on myös, että malli jaottelee kategoriat kognitiivisen kompleksisuuden perusteella, ja että kompleksisuus jossakin matemaattisessa tehtävässä merkitsee muutakin kuin yksinkertaisesti sen vaikeutta.

Wilsonin taksonomian kognitiivinen jaottelu perustuu neljään tasoon:

1. **Laskeminen** (computation) - tehtävien painotus on operaatioiden tietämisessä ja suorittamisessa, ei niinkään soveltuvien operaatioiden valinnassa.
2. **Ymmärtäminen** (comprehension) - tehtävät vaativat periaatteiden ja niiden välisten suhteiden ymmärtämistä, mutta ei niiden käyttämistä ratkaisun tuottamiseksi. Myös ongelman elementtien muokkaaminen muodosta toiseen kuuluu ymmärtämisen tasolle.
3. **Soveltaminen** (application) - tehtävät vaativat relevantin tiedon muistamista, soveltuvien operaatioiden valintaa ja operaatioiden suorittamista. Ne vaativat myös käsitteiden käyttöä tietyissä konteksteissa tavalla, jota on oletettavasti harjoiteltu.
4. **Analyysi** - vaatii ei-rutinoitunutta käsitteiden soveltamista. Analyysitason tehtävät vaativat siis käsitteiden ja operaatioiden käyttöä sekä organisointia vieraassa kontekstissa. Ne saattavat myös vaatia asioiden välisten suhteiden tunnistamista ja mallien löytämistä. (Wilson 1971, 649)

Jokainen näistä neljästä tasosta on jaettu 3–6 alakategoriaan, jotka erittelevät tasolla olevia kykyjä ja valmiuksia. Wilsonin taksonomia huomioi myös affektiiviset ominaisuudet omina tasoinaan: kiinnostus ja asenne sekä arvostus. Affektiivisten saavutusten mittaaminen, niiden kompleksisesta luonteesta johtuen, on usein hankalampaa kuin kognitiivisten. (Wilson 1971, 662–663.) Affektiivisten ominaisuuksien merkitystä ei ole kuitenkaan syytä vähätellä matemaattisen osaamisen kannalta, mistä osoituksena voidaan pitää opiskelijavalinnan perinteitä. Perinteinen kynä-paperi -koe ei huomioi affektiivisia ominaisuuksia. Valintakokeissa saatetaankin järjestää esimerkiksi haastatteluja, joilla voidaan kartoittaa hakijoiden asenteita, kiinnostuksia, motivaatiota, ahdistuneisuutta, itsetuntoa tai muita ominaisuuksia, jotka kuuluvat Wilsonin taksonomian affektiiviseen tasoon.

Wilsonin taksonomian ensimmäisen tason (laskeminen) alakategorioita ovat faktatieto, terminologia ja taito suorittaa algoritmeja. *Faktatiedolla* tarkoitetaan materiaalin tuottamista lähes samassa muodossa kuin se on esitetty. *Terminologia* viittaa puolestaan yksinkertaisiin käsitteisiin. Viimeinen laskemistason alakategoria, *taito suorittaa algoritmeja*, tarkoittaa lausekkeiden tai yleisemmin elementtien manipulointia joidenkin opittujen sääntöjen mukaan. Algoritmin valinta kuuluu kognitiivisesti kompleksisemmalle tasolle. (Wilson 1971, 660, 665–669.)

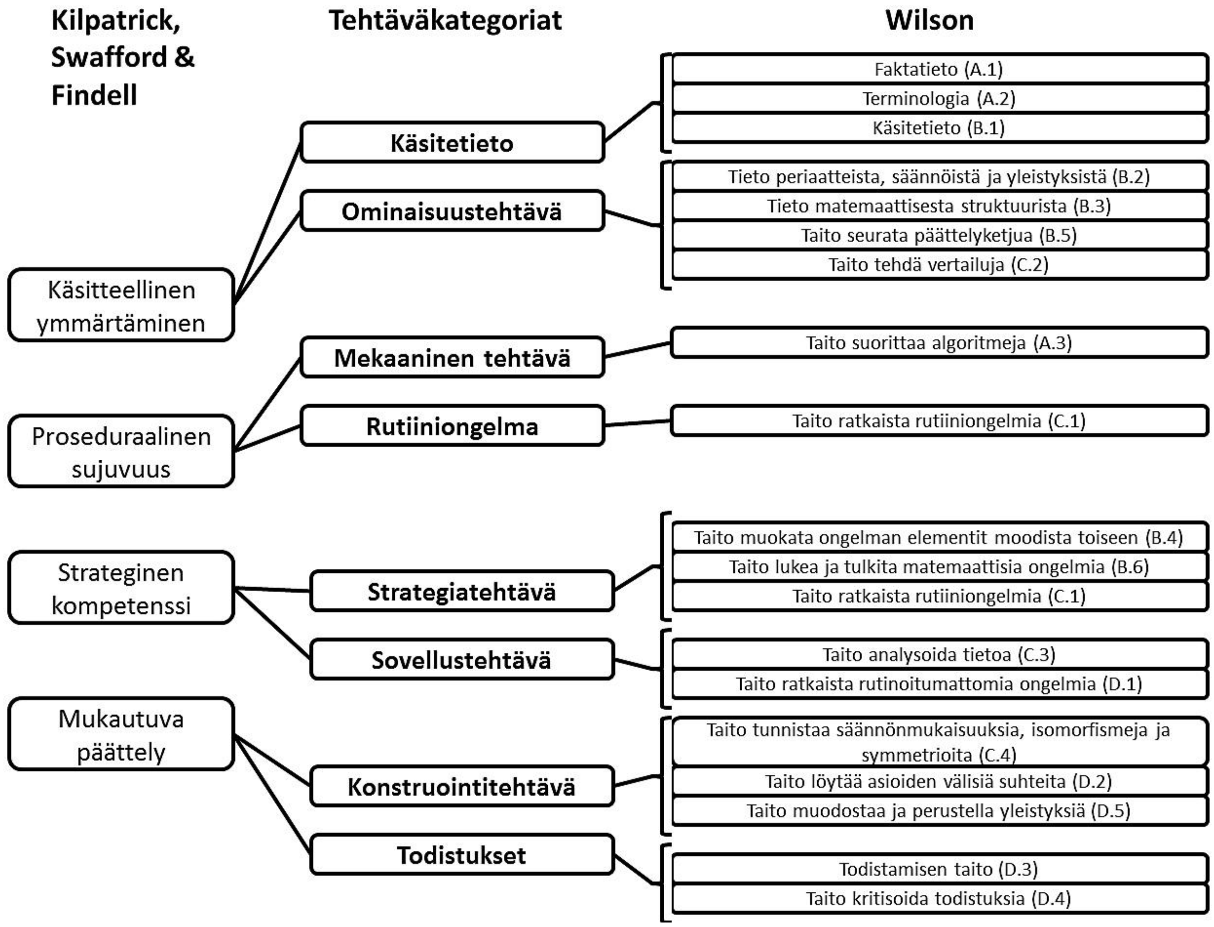
Ymmärtämisen tasolla on kuusi alakategoriaa, jotka liittyvät pääasiassa periaatteiden ja niiden välisten suhteiden ymmärtämiseen. *Käsitetieto* on jossakin mielessä faktatietoa kompleksisempaa, sillä siihen liittyy päätöksentekoon sisältyvää käsitteen käyttämistä tai jonkin asian tunnistamista tiettyyn käsitteeseen kuuluvaksi. *Tieto periaatteista, säännöistä ja yleistyksistä* liittyy oppijan aiemmin kohtaamiin käsitteisiin ja ongelmien elementteihin. *Tieto matemaattisesta struktuurista* koskee lähinnä numerosysteemien ominaisuuksia ja algebrallisia struktuureja. *Taito muokata ongelman elementit moodista toiseen* tarkoittaa muokkaamista verbaalisen, kuvallisen tai symbolisen esityksen välillä. *Taito seurata päättelyketjua* on toisin sanoen taito lukea ja tulkita matemaattisia argumentteja kun taas viimeinen alakategoria tällä tasolla, *taito lukea ja tulkita matemaattisia ongelmia*, viittaa ongelmanratkaisun ensimmäisiin vaiheisiin. Viimeisin alakategoria on taito, joka on selvästi erillinen normaalista verbaalisesta ja yleisestä lukutaidosta. (Wilson 1971, 660–661, 669–676.)

Soveltamistason tehtävät edellyttävät usein monivaiheista työskentelyä, mikä erottaa ne laskemisen- ja ymmärtämisen tasoista. Toisaalta ne sisältävät ennestään tuttuja elementtejä, jotka liittyvät läheisesti aiemmin opittuihin asioihin. Ensimmäinen alakategoria tällä tasolla on *taito ratkaista rutiiniongelmia*. Se saattaa edellyttää algoritmin valintaa ja käyttämistä ongelman ratkaisemiseksi. Sanallisissa tehtävissä tätä edeltää ongelman muotoilu symbolisessa muodossa. Voi olla myös, että ongelman ratkaisemiseen liittyy periaatteen tai säännön valinta, periaatteen käyttöä algoritmin valinnassa tai useiden laskujen suorittamista. Jos opiskelija ei tunnista ongelmaa samanlaiseksi kuin aiemmin opituissa tilanteissa, on kyseessä kognitiivisesti vaativampi ongelma. *Taito tehdä vertailuja* vaatii relevantin tiedon mieleen palauttamista, yhteyksien löytämistä ja päätösten muotoilua. Vertailujen tekeminen on luonteeltaan rutiininomaista, joten tämä alakategoria kuuluu analyysin sijaan soveltamisen tasolle. Kolmas alakategoria on *taito analysoida tietoa*. Se tarkoittaa informaation lukemista ja tulkitsemista sekä päätösten tekemistä niiden perusteella. Tiedon analysointitaitoihin kuuluu myös taito paloitella ongelmaa osaongelmiksi, erottaa olennainen epäolennaisesta ja muodostaa yhteyksiä jo ratkaistujen osaongelmien kanssa. Viimeinen soveltamistason alakategoria, *taito tunnistaa säännönmukaisuuksia, isomorfismeja ja symmetrioita,* voi tarkoittaa relevantin tiedon mieleen palauttamista, ongelman elementtien muokkaamista, näiden elementtien muokkaamista tietyssä järjestyksessä tai yhteyksien tunnistamista. (Wilson 1971, 661–662, 676–680.)

Kognitiivisesti kompleksisin taso on analyysi, joka tarkoittaa usein siirtymistä ennestään tuntemattomaan kontekstiin. Sen vuoksi tämän tason tehtävissä korostuu heuristinen lähestymistapa ja luovuus. Ensimmäinen alakategoria on *taito ratkaista rutinoitumattomia ongelmia*, mikä edellyttää aiemmin opitun siirtämistä uuteen yhteyteen. Rutinoitumattomat ongelmat ovat siis sellaisia, joita ei ole aiemmin kohdattu, ja joiden ratkaisemiseksi ei ole käytettävissä algoritmia. Niiden ratkaiseminen saattaa vaatia ongelman osasten uudelleenjärjestelyä ja niiden yksityiskohtaista tutkimista. Analyysitasolle kuuluu myös *taito löytää asioiden välisiä suhteita*, joka eroaa sovellustason taidosta tunnistaa säännönmukaisuuksia, isomorfismeja ja symmetrioita siinä, että tuttujen suhteiden tunnistamisen sijaan tulee muodostaa uusia yhteyksiä. Asioiden välisten suhteiden löytäminen vaatii ongelman elementtien uudelleen järjestämistä. Analyysitasolle kuuluu luonnollisesti *todistamisen taito*, joka saattaa kuulua myös alemmalle tasolle, jos todistuksessa on jotakin ennestään tuttua. Todistamisen lisäksi Wilsonin taksonomia erittelee tälle analyysitasolle taidon *kritisoida todistuksia*, joka voidaan myös ilmaista yleisemmin taitona kritisoida mitä tahansa matemaattisia argumentteja. Todistamisen taidosta erillisenä alakategoriana on *taito muodostaa ja perustella yleistyksiä*. Se tarkoittaa yhteyksien löytämistä ja niiden vahvistamista muotoilemalla todistuksia.(Wilson 1971, 662, 680–685.)

2.3 Mallien yhdistäminen tehtäväkategorioiden luomiseksi

Wilsonin taksonomia ja Kilpatrickin ym. matemaattisen taitavuuden malli tarjoavat hyvän lähtökohdan tehtäväkategorioiden luomiseksi. Wilsonin taksonomia antaa kategoriasysteemille konkreettisuutta, sillä sen sisältämä luokittelu on hyvin tarkennettua ja yksityiskohtaista. Kilpatrickin ym. matemaattisen taitavuuden malli puolestaan luo kategoriasysteemille raamit ja eheyttää sitä. Kuvassa 1 on havainnollistus mallien yhteensovittamisesta.



Kuva 1. Kilpatrickin ym. mallin ja Wilsonin taksonomian synteesinä luodut tehtäväkategoriat. Wilsonin taksonomiassa alakategoriat on merkitty tason mukaisesti kirjain-numero -parilla siten, että A = laskeminen, B = ymmärtäminen, C = soveltaminen ja D = analyysi. Numero on helpottamassa vain alakategorioiden identifioimista.

Wilsonin taksonomian alakategoriat asettuvat jotakuinkin kognitiivisen kompleksisuuden mukaiseen järjestykseen, vaikka ne yhdistetäänkin Kilpatrickin ym. malliin, joka ei ota yhtä selvästi kantaa ominaisuuksiensa vaatiman ajattelun tasoon. Selviä eroja näistä malleista kuitenkin löytyy, kun niiden välittämää kuvaa matemaattisesta osaamisesta tarkastelee lähemmin.

Kilpatrick ym. eivät mainitse mallissaan ehkä jopa itsestäänselviää faktatiedon ja terminologian yhteyttä matemaattiseen taitavuuteen. Ilman näitä tietoja on hankalaa olla vuorovaikutuksessa matemaattisen kulttuurin kanssa. Käsitetieto on selvästi erillistä faktatiedosta ja terminologiasta, sillä jotkin asiat ovat ainoastaan sopimuskysymyksiä eikä niiden tietämiseen liity erityistä ymmärtämistä. Biologisesti sekundääriset matemaattiset taidot, joita opitaan formaalissa opetuksessa, sisältävät yleensä näitä konventioita (Geary 1996, 145–166).

Wilsonin esittämä laskemisen taso on kognitiivisesti hyvin vaatimaton, koska se käsittää ainoastaan laskujen mekaanisen suorittamisen – ei esimerkiksi proseduurien valintaa. Kilpatrick ym. yhdistävät myös tiedon siitä miten ja milloin käyttää proseduureja vastaavaan luokkaan. Tässä tutkimuksessa tullaan erottelemaan tehtävät edellä mainitun ominaisuuden perusteella mekaanisiin tehtäviin ja rutiiniongelmiin, sillä näin voidaan erotella paremmin selvästi erityyppisiä tehtäviä.

Kilpatrickin ym. mallissa strateginen kompetenssi edustaa ongelmanratkaisun taitoja, mutta se ei vielä erottele riittävästi ongelmien vaatimaa matemaattista ajattelua. Wilson puolestaan erottelee toisistaan rutinoituneen ja rutinoitumattoman ongelmanratkaisun. Tämä jako on matematiikan tehtäviä tarkastellessa luonnollinen, vaikka se ei olekaan yksikäsitteinen. Rutiinin ja rutinoitumattoman prosessin arviointi edellyttää ratkaisijan taitojen arviointia.

Tarkastellaan sitten muodostettuja kahdeksaa tehtäväkategoriaa. Kategoriat on muodostettu sen mukaan, millaista matemaattista osaamista ne vaativat. Tarkoituksena on ollut luoda Kilpatrickin, Swaffordin ja Findellin määrittelemän matemaattisen taitavuuden käsittävä kategoriasysteemi, joka jaottelee tehtäviä myös niiden vaatiman ajattelun kompleksisuuden perusteella. Kilpatrickin ym. mallin neljä kognitiivista ominaisuutta koskevaa kategoriaa on jaettu kukin kahdeksi eri tehtäväkategoriaksi, mutta tavoitteena ei ole ollut "pakottaa" tehtäväkategorioita jakautumaan näin symmetrisesti. Tehtäväkategoriat on pyritty muotoilemaan selkeästi erillisiksi, mutta se ei tarkoita sitä ettei sama tehtävä voisi kuulua kahteen tai jopa useampaan samanaikaisesti. Tämä on linjassa Kilpatrickin ym. mallin yhteenkietoutuneiden säikeiden kanssa. Jokaisesta kategoriasta on annettu esimerkki tehtävänantona, jonka ratkaisijaksi ajatellaan lukion pitkän matematiikan suorittanutta opiskelijaa ellei toisin mainita. Ylioppilastehtävien tehtävänantojen lähteenä on käytetty MatTa-sivustoa (Kivelä 2012). Ylioppilastehtävien osalta nämä viittaukset sisältävät jäljempänä tehtävien esiintymisajankohdan ja tehtävänumeron.

Käsitteellinen ymmärtäminen

1. Käsitetieto

Käsitetietoa vaativat tehtävät sisältävät faktatietoa, terminologiaa tai käsitteitä, joiden tunteminen on edellytys tehtävien suorittamiselle. Käsitetiedon tulee olla selvästi tehtävässä avainasemassa ja sen tulee olla yleisistä triviaaleista faktoista, termeistä tai käsitteistä poikkeavaa.

Esim. Selosta millainen on yhtälön numeerisessa ratkaisemisessa sovellettava Newtonin menetelmä.

Esim. Miten määritellään sarjan $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ n:s osasumma S_n? Mitä tarkoitetaan sarjan $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ suppenemisella? (YO pitkä 2009 kevät, t. 13)

Ratk. n:s osasumma määritellään seuraavasti:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$$

Sarjan suppenemisella tarkoitetaan sitä, että on olemassa raja-arvo

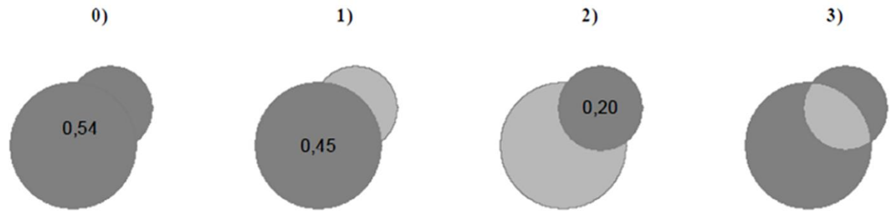
$$\lim_{n\to\infty} S_n.$$

Edellä olevassa ratkaisussa tulee ensinnäkin tietää mitä sarjan osasummalla tarkoitetaan ja toiseksi tulee tietää osasumman merkitsemistapa. Toiseen kysymykseen vastaamiseksi edellytetään suppenemisen käsitteen tuntemista, jolloin on mahdollista liittää tämä tieto sarjan summan raja-arvoon.

2. Ominaisuustehtävä

Tämän kategorian tehtävät vaativat ratkaisijaltaan tietoa tai analysointia matemaattisten olioiden tai objektien ominaisuuksista. Tehtävän ratkaiseminen edellyttää sisäistynyttä tietoa tai ymmärrystä matematiikan periaatteista, säännöistä tai struktuurista. Tehtävillä arvioidaan matemaattisen ymmärryksen hyödyntämistä ja yleistä matemaattista abstraktia ajattelua.

Esim. Oheiset kuviot muodostuvat kahdesta ympyrästä, jotka menevät osittain päällekkäin. Kuviot ovat identtisiä lukuun ottamatta varjostuksia.



Kuvissa 0, 1 ja 2 tummemmalla harmaalla merkittyjen alueiden pinta-alat ovat 0) 0,54; 1) 0,45 ja 2) 0,20. Mitkä ovat kuvioissa 1, 2 ja 3 vaaleammalla harmaalla varjostettujen alueiden pinta-alat? (TAMK 2013.)

Esim. Suora kulkee pisteen (1,2) kautta. Määritä suoran yhtälö, kun

a) se on x-akselin suuntainen,

b) se on y-akselin suuntainen,

c) sen suuntakulma on – 45 astetta,

d) se on kohtisuorassa suoraa $2x + y = 0$ vastaan.

Piirrä kuviot. (YO pitkä 2002 kevät, t. 1.)

Ratk. a) Suoran yhtälö on $y = 2$

b) Suoran yhtälö on $x = 1$

c) Suoran yhtälö yleisessä muodossa on $y - y_0 = k(x - x_0)$. Nyt $(x_0, y_0) = (1, 2)$ ja kulmakerroin on -1. Näin ollen suoran yhtälö on

$$y = 3 - x.$$

d) Suoran $2x + y = 0$ yhtälö voidaan ilmaista myös muodossa $y = -2x$, mistä nähdään että sen kulmakerroin $k' = -2$. Kohtisuoran suoran kulmakertoimelle k pätee $kk' = -1$. Nyt kysytyn suoran kulmakerroin on $\frac{1}{2}$, joten sen yhtälö on

$$y - 2 = \frac{1}{2}(x - 1)$$

$$y = \frac{1}{2}x + 1\frac{1}{2}$$

Edellä olevan ratkaisun a- ja b-kohdissa vastaajalla tulee olla tietoa tai ymmärrystä suoran ominaisuuksista. Ratkaisu on toki mahdollista tuottaa muistamalla ulkoa tämän ominaisuuden, mutta todennäköisemmin oikeaan vastaukseen päätyy, jos on sisäistänyt suorien ja koordinaatiston ominaisuuksia. c-kohdan ratkaisuun voi saada apua taulukkokirjasta. Tehtävän ratkaiseminen edellyttää kuitenkin sisäistynyttä tietoa matematiikan periaatteista ja säännöistä, joten kyse on ominaisuustehtävästä. d-kohdassa ratkaisu edellyttää kulmakertoimien ja suorien kohtisuoruuden välisen yhteyden tuntemista tai suorien ominaisuuksiin liittyvää abstraktia ajattelua.

Havainnollistuksen vuoksi otetaan vielä yksi esimerkki. Ominaisuustehtävästä olisi myös kyse, jos alakoululaiselle esitettäisiin tehtävä:

Esim. Mikä on puuttuva luku?

a) $53 + 29 = 29 + \blacksquare$

b) $(167 \div 13) \times \blacksquare = 167$

Tämä tehtävä edellyttää sisäistynyttä tietoa tai ymmärrystä matematiikan periaatteista, säännöistä ja struktuurista kyseisellä ikäkaudella.

Proseduraalinen sujuvuus

3. Mekaaninen tehtävä

Mekaaniset tehtävät voidaan ratkaista tietyn algoritmin tai muutaman ilmeisen laskusäännön avulla.

Esim. Ratkaise yhtälö $x+4=3x-2$.

Ratk. $x+4=3x-2 \Leftrightarrow x-3x=-2-4 \Leftrightarrow 2x=6 \Leftrightarrow x=3$

Yhtälön ratkaiseminen on hyvä esimerkki mekaanisesta tehtävästä. Ratkaisijan tulee olla sisäistänyt yhtälöiden manipulointiin liittyvät säännöt, mutta ratkaisu ei edellytä välttämättä niiden syvällistä ymmärtämistä. Toinen esimerkki on sekin mekaaninen, vaikka ratkaisussa vaaditun ajattelun taso on luultavasti edellistä esimerkkiä korkeampi.

Esim. Olkoon $f(x)=xe^{-x^2}$ ja $g(x)=2e^{-x^2}$

a) Ratkaise yhtälö $f(x)=g(x)$

b) Laske $f'(1)$

c) Laske integraali $\int_0^1 f(x)dx$ (YO pitkä 2011 kevät, t. 3).

4. Rutiiniongelma

Rutiiniongelmat sisältävät ennestään tuttuja elementtejä siinä määrin, että niiden ratkaisemiseksi tulee ainoastaan palauttaa mieleen menetelmä tai periaate, jolla vastaavat ongelmat ovat aiemmin ratkenneet. Tehtävää tarkastellessa on yleensä ilmeistä miten se tulee ratkaista.

Esim. Viivi kävi ostoksilla kolmessa kaupassa. Jokaisessa kaupassa hän pani menemään 2/3 euroistaan. Lopuksi hänelle jäi rahapussiin 1,5 euroa. Miten paljon hänellä oli euroja kun hän lähti ostoksille?

a) 13,5 euroa

b) 35,5 euroa

c) 40,5 euroa

d) 45,5 euroa (Saimaan ammattikorkeakoulu 2005)

Esim. Kuutio pienennetään toiseksi kuutioksi siten, että sen kokonaispinta-ala pienenee 36 %. Kuinka monta prosenttia tilavuus pienenee? (YO 2004 syksy, t. 3).

Ratk. Merkitään kuution sivun pituutta x:llä. Tällöin alkuperäisen kuution pinta-ala on $6x^2$ ja tilavuus x^3. Kokonaispinta-ala pienennetyssä kuutiossa on $0{,}64 \cdot 6x^2$, joten sivun pituus on $\sqrt{\frac{0{,}64 \cdot 6x^2}{6}} = \sqrt{0{,}64 \cdot x^2} = 0{,}8x$. Pienennetyn kuution tilavuus on $(0{,}8x)^3 = 0{,}512x^3$ ja tilavuus pienenee alkuperäiseen verrattuna $100 \cdot (1 - 0{,}512)\ \% = 48{,}8\ \%$.

Lukion pitkän matematiikan opinnot sisältävät runsaasti tehtävän ratkaisemiseen valmentavaa ajattelua yksinkertaisista ongelmista, joissa tarvitaan tietoa geometristen kappaleiden ominaisuuksista. Oletettavasti lukion pitkän matematiikan jälkeen opiskelija tunnistaa kuution sivun, pinta-alan ja tilavuuden suhteet olennaisiksi osiksi ratkaisua ja pystyy hahmottamaan ratkaisustrategian suhteellisen helposti. Näin ollen, vaikka vastaavaa tehtävää ei olisi koskaan ratkaissut, se on rutiininomaisesti ratkaistavissa eikä siten kuulu seuraavaan strategiatehtäväkategoriaan.

Strateginen kompetenssi

5. Strategiatehtävä

Tämän tehtävätyypin ratkaisussa käytettävä menetelmä ei ole yhtä ilmeinen kuin rutiiniongelmissa, joten tehtävän ratkaiseminen edellyttää huolellista suunnittelua. Strategiatehtävät vaativat yleensä tunnettujen, tuntemattomien ja haluttujen asioiden tarkastelua ja lähestymistavan valintaa näiden tietojen hyödyntämiseksi. Matemaattinen lukutaito korostuu näiden tehtävien ratkaisussa, sillä niissä saatetaan esittää ratkaisun kannalta ylimääräistä tietoa. Ongelman ratkaisemiseksi tulee hahmottaa tehtävän elementtien suhteita ja hyödyntää matemaattisia periaatteita tilanteissa, jotka pelkistyvät rutiininomaiseksi ongelmanratkaisuksi.

Esim. Paikkakunnat A ja B sijaitsevat pohjoisella pallonpuoliskolla siten, että kummankin leveysaste on 49 mutta pituusasteiden ero on 38. Laske paikkakuntien välimatka leveyspiiriä pitkin mitattuna. Laske myös paikkakuntien välinen lyhin välimatka maan pintaa pitkin mitattuna. (Maanpinnan epätasaisuutta ei oteta huomioon.) Maapallon isoympyrän pituudeksi oletetaan 40 000 km. Anna vastaus kolmen numeron tarkkuudella. (YO pitkä 1999 syksy, t. 8.)

Esim. Vuonna 2011 uudentyyppisen influenssaviruksen aiheuttama sairastumistodennäköisyys on kaikilla 20 %. Yleisesti henkilön alttius sairastua tarkasteltavana vuonna riippuu hänen hankkimastaan immuniteetista: jos henkilö on ollut sairas tarkasteltavaa vuotta edeltävänä vuonna, on hänen todennäköisyytensä sairastua tarkasteltavana vuonna 30 % edellisen vuoden vastaavasta todennäköisyydestä. Jos henkilö on ollut terve tarkasteltavaa vuotta edeltävän vuoden, on hänen todennäköisyytensä pysyä terveenä koko tarkasteltava vuosi 45 % edellisen vuoden vastaavasta todennäköisyydestä.

(a) Henkilö ei sairasta vuonna 2011. Millä todennäköisyydellä hän sairastaa vuonna 2012? (b) Henkilö ei sairasta vuonna 2011. Millä todennäköisyydellä hän sairastaa vuonna 2013? (Diplomi-insinööri- ja arkkitehtikoulutuksen yhteisvalinta 2013.)

Esim. Kokonaistuotanto jaetaan materian ja palveluiden tuotantoon. Verrataan tuotantoa tammikuussa 2008 tammikuuhun 2009. Tänä vuoden pituisen tarkastelujakson aikana materiatuotanto kasvoi 2,0 % ja palveluntuotanto laski 7,0 %. Kuinka suuri oli materiantuotannon osuus kokonaistuotannosta tammikuussa 2009,

(a) kun tammikuussa 2008 materia- ja palvelutuotanto olivat yhtä suuret?

(b) kun vertailuaikana kokonaistuotanto laski 2,0 %?

(Diplomi-insinööri- ja arkkitehtikoulutuksen yhteisvalinta 2013.)

Ratk. a) Merkitään materiatuotannon osuutta m:llä, palvelutuotannon osuutta p:llä ja kokonaistuotantoa T:llä vuonna 2008. Merkitään vastaavia suureita vuonna 2009 m', p' ja T'. Materiatuotanto vuonna 2009 on

$$m' = 1{,}02m = 1{,}02 \cdot 0{,}50T = 0{,}51T.$$

Vastaavasti palvelutuotanto on tällöin

$$p' = 0{,}93p = 0{,}93 \cdot 0{,}50T = 0{,}465T$$

Vuonna 2009 kokonaistuotanto

$$T' = 0{,}51T + 0{,}465T = 0{,}975T$$

Materiatuotannon osuus koko tuotannosta on siis

$$\frac{m'}{T'} = \frac{0{,}51T}{0{,}975T} \approx 0{,}523$$

b) Kokonaistuotanto vuoden 2009 tammikuussa oli

$$T' = 0{,}98T = 1{,}02mT + 0{,}93pT$$

Materiatuotanto voidaan ratkaista edellisestä yhtälöstä:

$$m = \frac{0{,}98 - 0{,}93}{1{,}02 - 0{,}93}$$

Materiatuotannon osuus koko tuotannosta vuonna 2009 voidaan laskea sijoittamalla m:

$$\frac{m'}{T'} = \frac{1{,}02mT}{0{,}98T} \approx 0{,}578$$

Tämä esimerkki eroaa rutiinitehtävästä suunnitelmallisuuden korostumisena: tuntemattomien, tunnettujen ja haluttujen asioiden suuremmassa merkityksessä ratkaisun onnistumisen kannalta. Tehtävän voi luultavasti myös ratkaista useilla erilaisilla tavoilla, sillä käytetyt ratkaisustrategiat eivät ole pakotettuja samanlaisiksi esimerkkiratkaisun kanssa.

6. Sovellustehtävä

Sovellustehtävät vaativat ongelman analysoimista ja aiemmin opitun soveltamista uudessa kontekstissa ratkaisun tuottamiseksi. Tehtävänannon sanamuodot, konteksti ja esitysmuoto saattavat poiketa rutiininomaisista tehtävistä, joten sovellustehtävät edellyttävät taitoa analysoida tietoa. Valmista algoritmia tai menetelmää, jolla ongelma voitaisiin ratkaista, ei ole käytettävissä, joten tehtävän ratkaiseminen vaatii taitoa paloitella ongelmaa osaongelmiksi, erottaa olennainen epäolennaisesta ja muodostaa yhteyksiä osaongelmien kanssa, jotka on jo ratkaistu. Sovellustehtävien ratkaiseminen on siis ongelmien ratkaisemista tapauksissa, joita ei ole aiemmin harjoiteltu.

Esim. Kaksi lauttaa lähtee liikkeelle samalta rannalta keskipäivällä. Toisen nopeus on 4,5 kilometriä tunnissa kun taas toisen on 4 kilometriä tunnissa. Lautat matkustavat samanpituisia reittejään lahden poikki (oleta, että aikaa ei kulu lauttojen nopeuden hidastumisessa tai lastauksessa). Seuraavan kerran lautat ovat samassa laiturissa seuraavana keskipäivänä, kun ne tapaavat lähtöpisteissään. Kuinka leveä on lahti, jonka lautat ylittävät? (Wilson 1971, 680.)

Esim. Laskeva suora kulkee pisteen (3,4) kautta siten, että sen ja koordinaattiakselien rajoittaman kolmion ala on mahdollisimman pieni. Määritä suoran kulmakerroin ja vastaava pienin ala. (YO pitkä 2005 syksy, t. 9.)

Ratk. Suoran yleiseen muotoon $y - y_0 = k(x - x_0)$ sijoittamalla saadaan pisteen $(3, 4)$ kautta kulkevan suoran yhtälöksi $y - 4 = k(x - 3)$. Suora leikkaa koordinaattiakselit arvoilla $y_1 = 4 - 3k$ ja $x_1 = 3 - \frac{4}{k}$. Muodostuvan suorakulmaisen kolmion pinta-ala on $\frac{1}{2}x_1y_1$, joten se voidaan ilmaista k:n funktiona muodossa

$$f(k) = \frac{1}{2}\left(3 - \frac{4}{k}\right)(4 - 3k) = \frac{1}{2}(24 - 9k - \frac{16}{k})$$

Haetaan funktion f pienin arvo tutkimalla sen derivaatan nollakohtaa:

$$f'(k) = 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(-9 + \frac{16}{k^2}\right) = 0$$
$$\Leftrightarrow k^2 = \frac{16}{9}$$
$$\Leftrightarrow k = \pm\frac{4}{3}$$

Laskevan suoran kulmakerroin on negatiivinen, joten mahdollinen minimikohta on $k_0 = -\frac{4}{3}$. Varmistetaan tämä tutkimalla derivaatan arvoja k_0:n ympäristössä: $f'(k) < 0$, kun $k < k_0$ ja $f'(k) > 0$, kun $k_0 < k < 0$. Kyseessä on siis aito minimikohta ja funktion arvo tässä kohtaa on $f\left(-\frac{4}{3}\right) = 24.$

Suoran kulmakerroin on siis $-\frac{4}{3}$ ja vastaava pienin ala 24.

Tehtävän ratkaiseminen vaatii lukiolaiselta ennen kaikkea aiemmin opitun soveltamista uudessa yhteydessä, sinänsä osaongelmien ratkaiseminen on ajoittain rutiininomaista eikä tehtävänannon analysointi ole pääosassa. Tehtävän ratkaisu koostuu osaongelmien ratkaisemisesta ja niiden merkityksen tulkinnasta kokonaisratkaisun kannalta, siksi kyseessä on sovellustehtävä.

Mukautuva päättely

7. Konstruointitehtävä

Konstruointitehtävien ratkaiseminen edellyttää päättelyä, joka perustuu säännönmukaisuuksien, analogioiden tai symmetrioiden näkemiseen ja niiden hyödyntämiseen. Tämän tehtävätyypin ongelmissa saatetaan muodostaa yleisesti pätevä lauseke tai periaate induktiivista päättelyä käyttäen. Yleisesti pätevän ratkaisun muotoilu voi olla tehtävän tavoite tai vain keino sen ratkaisemiseksi. Ratkaisuprosessi vaatii tyypillisesti matemaattisen perusymmärryksen ja järkeilyn yhdistämistä, joten ratkaisut edellyttävät myös perustelutaitoja. Perusteleminen saattaa tulla esille ainoastaan yksilön sisäisenä aktiviteettina, koska ratkaisussa eteneminen vaatii asioiden perustelemista itselleen – ei välttämättä muille.

Esim. Astiassa on vedellä laimennettua etanolia, jota kuluu jatkuvasti. Alkutilanteessa, jolloin astia on täynnä, etanolin ja veden sekoitussuhde on 1:4. Tämän jälkeen, aina kun seosta on kulunut puolet astian sisällöstä, astia täytetään lisäämällä etanolia ja vettä sekoitussuhteessa 1:9. Mikä on seoksen etanolipitoisuus k:nnen täytön jälkeen? Mitä arvoa pitoisuus lähestyy, kun täyttökertojen lukumäärä kasvaa rajatta? (Diplomi-insinööri- ja arkkitehtikoulutuksen yhteisvalinta 2013.)

Ratk. Merkitään V:llä astian tilavuutta ja c:llä etanolipitoisuutta. Alussa pitoisuus on

$$c_0 = \frac{\frac{1}{1+4} \cdot V}{V} = \frac{1}{5}$$

Etanolia lisätään jokaisessa täytössä määrä $\frac{1}{1+9} \cdot \frac{V}{2}$, joten ensimmäisen ja toisen täytön jälkeen pitoisuus on

$$c_1 = \frac{\frac{1}{5} \cdot \frac{V}{2} + \frac{1}{10} \cdot \frac{V}{2}}{V} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{10}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10}$$

$$c_2 = \frac{c_1 \cdot \frac{V}{2} + \frac{1}{10} \cdot \frac{V}{2}}{V} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{1}{5} + \left(\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2\right) \frac{1}{10}$$

Yleisesti pitoisuus on

$$c_k = \left(\frac{1}{2}\right)^k \frac{1}{5} + \left(\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^k\right) \frac{1}{10},$$

joka voidaan sieventää muotoon

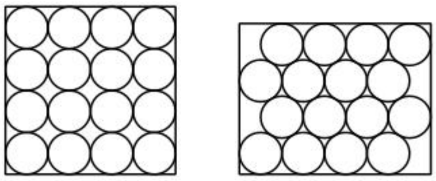
$$c_k = \left(\frac{1}{2}\right)^k \frac{1}{5} + \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^k\right) \frac{1}{10}$$

Nyt

$$\lim_{k \to \infty} c_k = \frac{1}{10}$$

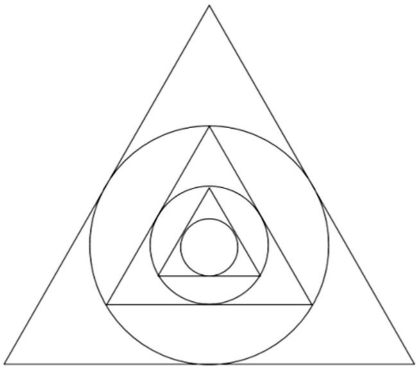
Konstruointitehtävän ratkaisuun sisältyy tyypillisesti mekaanisia piirteitä, mutta vaaditun ajattelun taso on mekaanisia tehtäviä kompleksisempi, sillä se vaatii ongelman elementtien uudelleenjärjestelyä ja niiden välisten suhteiden muotoilemista. Edellisessä ratkaisussa on konstruoinnin tuottamiseksi tehtävä päätelmiä täyttöjen jälkeisistä pitoisuuksista ja tunnistettava pitoisuuksien lausekkeissa toistuvia säännönmukaisuuksia. Tämän tyyppinen tehtävä vaatii lukiolaiselta matemaattista päättelytaitoa, kuten seuraavatkin esimerkit.

Esim. Viinipullon pohjan säde on r. Suorakulmaiseen laatikkoon pakataan n^2 viinipulloa rinnakkain n riviin, jolloin jokaisessa rivissä on n pulloa.



Pakkaaminen tehdään jommallakummalla seuraavien kuvioiden esittämistä tavoista (kuvissa on $n = 4$). Miten täyttösuhteet käyttäytyvät, kun viinilaatikko tulee äärettömän suureksi, ts. $n \to \infty$? (YO pitkä 2008 kevät, t. 15.)

Esim. Tasasivuisen kolmion K_1 sivun pituus on a. Sen sisään asetetaan ympyrä Y_1, joka sivuaa kolmion kylkiä. Tämän ympyrän Y_1 sisään asetetaan tasasivuinen kolmio K_2, jonka kärjet ovat ympyrällä Y_1. Jatkamalla näin saadaan oheisen kuvan mukainen päättymätön jono ympyröitä $Y_1, Y_{2,}$ ... Laske ympyröiden pinta-alojen summa.



8. Todistustehtävä

Todistustehtävät sisältävät jonkin matemaattisen oletuksen ja siitä seuraavan väitteen. Tämän kategorian tehtävät vaativat todistuksen rakentamista, mikä tarkoittaa yleensä perustelemis-, päättely- ja yhdistelytaitojen soveltamista.

Esim. Osoita, että yhtälöllä $x - 2\ln x = 0$ ei ole reaalijuuria (YO 2005 syksy, t. 11).

Esim. Kokonaisluku *m* on kokonaisluvun *n* tekijä, jos on olemassa kokonaisluku *k* siten, että $n = km$. Osoita:

a) Jos *m* on *n*:n tekijä ja *n* on *m*:n tekijä, niin $m = \pm n$.

b) Jos *m* on *n*:n tekijä ja *n* on *p*:n tekijä, niin *m* on *p*:n tekijä. (YO pitkä 2004, t. 13.)

Ratk. a) Oletuksen mukaan on olemassa kokonaisluvut *k* ja *p*, siten että $n = km$ ja $m = pn$. Voidaan siis kirjoittaa $n = kpn$, joten $kp = 1$ tai $n = 0$. Jos $kp = 1$, niin $k = p = 1$ tai $k = p = -1$. Tapauksesesta $k = p = 1$ seuraa, että $m = n$. Toisaalta, jos $k = p = -1$ niin $m = -n$. Kun $n = 0$ seuraa, että $m = p \cdot 0 = 0$. Näin ollen $m = \pm n$.

b) Jos on olemassa kokonaisluvut k ja q siten, että $n = km$ ja $p = qn$, niin voidaan kirjoittaa $p = qkm$, jolloin m on p:n tekijä.

Todistustehtäväkategoriaan luetaan siis myös edellisen kaltaiset osoitukset. Ne vaativat lukiolaiselta kehittyneitä päättelyn taitoja, koska hän on harjoitellut yleensä melko vähän tämän tyyppisiä tehtäviä.

3 TUTKIMUSTEHTÄVÄ JA AIEMMAT TUTKIMUKSET

Tutkimuksen tarkoituksena on tarkastella lukion pitkän matematiikan ylioppilaskokeita ja korkeakoulujen pääsykokeita matemaattisen taitavuuden ja osaamisen näkökulmasta. Ylioppilaskokeiden ja korkeakoulujen pääsykokeiden mittaamien matemaattisten taitojen painotuksia tarkastelemalla voidaan tehdä päätelmiä siitä, minkä näitä kokeita edustavat instituutiot näkevät tärkeänä matematiikan osaamisen kannalta. Vertailemalla taitojen mittaamista usean vuoden kokeissa voidaan verrata niiden välittämää kuvaa matematiikasta. Tämä kuva vaikuttaa niin lukion opintoihin kuin pääsykokeisiin valmistautumiseen ja ylipäätään oppijoiden matematiikkakuvan rakentumiseen.

Tutkimuksen tavoitteena on myös kehittää jo olemassa olevien teorioiden pohjalta tehtävien kategorisointisysteemiä, sillä sellaista ei tähän tarkoitukseen ollut käytettävissä. Kehitellyn mallin toimivuutta arvioidaan vertaamalla eri luokittelukertojen yhtenevyyttä ja tarkastelemalla arvostelutilastoja tilastollisin menetelmin. Tilastojen avulla voidaan myös tarkastella opiskelijoiden yleistä taitotasoa ja eritellä osaamista matemaattisen taitavuuden osa-alueissa. Kohdentamalla huomiota mahdollisiin hyvin ja heikosti hallittuihin matemaattisiin taitoihin voidaan tulevaisuudessa kiinnittää entistä paremmin huomiota opetusjärjestelyihin.

Tallila (2013) on lähestynyt aihetta äskettäin pro gradu -tutkielmassaan 15 itse muodostamansa matematiikan aihealueen näkökulmasta. Tallila on tarkastellut vuosien 2004–2012 keväiden ylioppilaskokeita tehtäväkohtaisten pisteiden osalta ja selvittänyt näin eri aihealueiden hallintaa. Aihealueiden painotukset ovat tutkimuksen mukaan vaihdelleet eri vuosina ja kokeista löytyy myös selkeitä pysyviä painotuksia tiettyjen alueiden osalta. Tehtäväsarjarakenteet eivät luonnollisesti mittaa aina yhtä aihealuetta vaan tehtävät saattavat yhdistää niistä kahta tai jopa useampaa, joten Tallila on ottanut huomioon tämän antamalla osittain tiettyä aluetta koskeville tehtäville painokertoimia $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{4}$ ja $\frac{3}{4}$. Näin ollen useita aihealueita sisältävät tehtävät arvioidaan aihealueen hallinnan ja siitä pisteiden muodossa saatavan hyödyn osalta.

Ylioppilaskokeissa jokainen aihealue esiintyy Tallilan (2013, 74) mukaan tyypillisesti yhdessä tehtävässä eli jokainen tehtävä käsittelee eri aihealuetta. Ylioppilaskokeiden analyysin perusteella Tallila kuitenkin havaitsi, että erityisesti derivaatan ja integraalilaskennan aihealueet toistuvat tehtäväsarjoissa keskimääräistä useammin. Samansuuntaisia havaintoja esiintyi myös geometrian- ja analyyttisen geometrian aihealueista. Vähiten puolestaan ylioppilaskokeissa testataan aihealueita funktiot ja yhtälöt, polynomifunktiot sekä trigonometria. Kaksi ensin mainittua aihealuetta ovat Tallilan mukaan ymmärrettävästi vähemmän painotettuja, sillä niiden hallinta toimii perustana muiden aihealueiden hallinnalle ja täten niidenkin osaamista vaaditaan kokeen tekijältä.

Tallilan (2013) tutkimuksen tulosten mukaan prosenttilaskujen osuus on laskenut huomattavasti tutkimusaikavälillä 2004–2012. Prosenttilaskuissa menestymistä ei kyetty selvittämään luotettavasti pienen aineiston vuoksi, mutta tutkimuksessa tehdyt havainnot viittaisivat siihen, että kokelaat hallitsevat tämän aihealueen hyvin. Näin ollen näyttää siltä, että tehtäväsarjoissa on viime vuosina vähennetty ainakin yhden hyvin hallitun aihealueen osuutta. Tutkimuksessa tarkemmin tarkasteltujen aihealueiden hallinta ei muuten antanut viitteitä yhtä positiivisesta osaamisen tasosta. Onkin tyypillistä, että tehtävät joko osataan kuuden pisteen arvoisesti tai sitten niitä ei osata ollenkaan ja tehtävästä saadut pisteet jäävät nollille.

Matematiikan osaamista on tutkittu useissa kansainvälisesti toteutetuissa arvioinneissa. TIMSS (Trends in International Mathematics and Science Study) on yksi tällainen laajasti toteutettu tutkimus, joka on toteutettu neljän vuoden välein vuodesta 1995 lähtien. Vuonna 2011 tutkimukseen osallistui 63 maan neljäs- ja kahdeksasluokkalaisia, joiden osaamista arvioitiin sisältö- ja kognitioperusteisesti. (Mullis, Martin, Foy & Arora 2012, 5–6.)

TIMSS-tutkimuksessa osaamisen mittareiden kehittäminen on tehty useiden maiden verrokkisuoritusten ja asiantuntijoiden johdolla, joten on mielenkiintoista tarkastella tällaista ison kehittämistyön tulosta. Mittareiden yksinkertaisuus on kuitenkin yllätys, sillä kognitiivisia kykyjä mitataan ainoastaan kolmella osa-alueella: tietämisen (knowing), soveltamisen (applying) ja päättelyn (reasoning) osalta. Tietäminen määritellään fakta-, käsite- ja proseduuritietona. Soveltaminen on puolestaan keskittynyt oppilaiden kykyyn soveltaa tietoa ja käsitteellistä ymmärrystä ongelmiin. Kolmannen osa-alueen, päättelyn, kattaa rutinoitumattomien ongelmien ratkaiseminen, kompleksiset kontekstit ja useampivaiheiset ongelmat. (Mullis, Martin, Ruddock, O'Sullivan, & Preuschoff 2009, 19–46.)

Edellä mainitut kolme kognitiivista osa-aluetta on eritelty melko yksityiskohtaisesti, vaikka TIMSS-tutkimuksen analyysissä pitäydytään tässä yksinkertaisessa kolmijaossa. Tehtävät, joita tutkimuksessa käytettiin, jaoteltiin sisältöalueiden mukaan ja jokaista sisältöaluetta testattiin kognitiivisten osa-alueiden suhteen. Näin ollen esimerkiksi numeroiden sisältöaluetta testattiin tietämisen, soveltamisen ja päättelyn osalta. (Mullis, Martin, Foy & Arora 2012, 112–138; Mullis, Martin, Ruddock, O'Sullivan & Preuschoff 2009, 19–46.)

Suomesta TIMSS-tutkimukseen osallistui vuonna 2011 oppilaita neljänneltä, seitsemänneltä ja kahdeksannelta luokalta. Seitsemäsluokkalaiset osallistuivat tutkimukseen, koska haluttiin saada vertailutietoa vuoden 1999 tutkimukseen osallistuneisiin seitsemäsluokkalaisiin nähden. Yleisesti ottaen seitsemäsluokkalaisten suoriutuminen oli tutkimuksessa kansainvälisesti korkeatasoista, vaikka tulokset olivatkin vuoteen 1999 verrattuna merkittävästi huonompia. Suomi ei loistanut tutkimuksessa korkeasti suoriutuvien oppilaiden määrällä, mutta heikkojen oppilaiden vähäinen määrä selittää osaltaan korkeaa sijoitusta. Kognitiivisten osa-alueiden tarkastelun perusteella suomalaisten oppilaiden taidot olivat melko tasaisesti jakautuneet tietämisen, soveltamisen ja päättelyn osa-alueille. Kahdeksasluokkalaisten taidot olivat kuitenkin suhteessa heikompia tietämisen tasolla ja vahvempia soveltamisessa. (Mullis, Martin, Foy & Arora 2012, 35–66, 147–152.)

PISA (Programme for International Student Assessment) on toinen kansainvälinen matematiikan osaamista kartoittanut tutkimus, joka toteutetaan kolmen vuoden välein. Tutkimuksen painotukset kuitenkin vuorottelevat lukutaidon, matematiikan ja luonnontieteiden välillä. Matematiikka on ollut PISA-tutkimuksen pääkohteena vuosina 2003 ja 2012. Vuoden 2012 tulokset julkaistaan 2013 lopussa, joten ne eivät olleet käytettävissä tätä tutkimusta tehdessä. (OECD 2013a.) Yleensä Aasian maat ja Suomi ovat menestyneet hyvin näissä tutkimuksissa. Kansainvälisten vertailujen tekeminen on saanut aikaan kriittisiä kannanottoja muun muassa arviointiperusteista. Geary (1996, 145–166) on esittänyt, että lasten kykyerot eivät selity ainakaan lasten primääristen eli informaalien kykyjen erilaisuudella. Tulosten eroksi hän on sen sijaan esittänyt matematiikan kulttuurillisen arvostuksen erilaisuutta, joka vaikuttaa suoraan opiskelumotivaatioon. Aasian hyvää menestystä Geary on selittänyt myös isommalla työmäärällä, joka on seurausta niin opetuksen toteutuksesta kuin tehokkaammasta luokkahuonetyöskentelystäkin. Puhuttu ja kirjoitettu kieli vaikuttavat omalta osaltaan matematiikan oppimiseen, sillä tutkimusten mukaan maissa, joissa kymmenjärjestelmän ja kielen rakenteen välillä on looginen yhteys, oppimistulokset ovat parempia kuin maissa, joissa kielen ja kymmenjärjestelmän suhde on epälooginen. (Miller & Paredes 1996, 83–115). Esimerkiksi suomenkielessä epäloogisuus ilmenee siinä, että luvun kymmenen jälkeen tulee yksitoista eikä "yksikymmentäyksi", joka olisi suora, looginen, transformaatio matematiikan kielestä.

Tehtävät, joita PISA-tutkimuksessa käytetään, eivät mittaa niinkään opetussuunnitelmien tavoitteiden toteutumista vaan pyrkivät selvittämään niitä tosielämän valmiuksia, jotka 15-vuotiaat oppilaat ovat saavuttaneet muodollisen koulutuksensa aikana. Matemaattisen osaamisen arvioinnin viitekehys on rakennettu kolmen näkökulman pohjalle: ensimmäinen koskee matemaattisia prosesseja ja kykyjä, toinen matemaattisen substanssin kategorioita ja kolmas konteksteja, joissa matemaattisia ongelmia kohdataan. (OECD 2013a, 24, 37.)

Tämän tutkimuksen kannalta erityisen mielenkiintoinen PISA-tutkimuksen viitekehyksen kohta on matemaattisten kykyjen kategorisointi. Vuoden 2012 tutkimuksessa viitekehyksen muodosti seitsemän matemaattista kykyä, jotka jokainen liittyivät osaltaan matemaattiseen lukutaitoon – termiin, joka kuvailee tutkimuksen mittaamaa perimmäistä ominaisuutta. Ensimmäisenä kykynä määritellään *kommunikaatio* (communication), joka käsittää mentaalisten mallien rakentamisen, niiden monipuolisen hyödyntämisen ratkaisuprosessissa ja ratkaisuprosessin esittämisen sen eri vaiheissa. Toinen on *matematisointi* (mathematising), millä tarkoitetaan ongelmien elementtien muokkaamista moodista toiseen. Reaalimaailman ongelmien ratkaiseminen saattaa vaatia matematisointia, kun esimerkiksi ongelma käsitteellistetään, tehdään oletuksia tai muotoillaan mallia. (OECD 2013a, 30.) Tämä toinen kyky on siis hyvin samankaltainen kuin Wilsonin taksonomian taito muokata ongelman elementit moodista toiseen.

Kolmas PISA-tutkimuksessa määritelty matemaattinen kyky on *esittäminen* (representation). Sillä tarkoitetaan matemaattista lukutaitoa, joka koskee objektien ja tilanteiden esittämistä: se voi tarkoittaa eri esitysmuotojen valintaa, tulkintaa tai käyttämistä. Neljäs määritelty kyky on nimetty *päättelyksi ja perusteluksi* (reasoning and argument). Sillä tarkoitetaan loogista ongelman elementtien tulkintaa päätelmien tekemiseksi, annettujen perustelujen tarkistamista ja ratkaisujen perustelemista. Ratkaisun useasti vaatima kyky *suunnitella ongelmien ratkaisustrategioita* (devising strategies for solving problems) on PISA-tutkimuksen viitekehyksen viides matemaattinen kyky. Se on kriittinen kyky, joka säätelee ongelmanratkaisua ja valintoja, joita sen aikana tehdään. (OECD 2013a, 30–31.)

Symbolisen, formaalisen ja teknisen kielen ja operaatioiden käyttö (using symbolic, formal and technical language and operations) on kuudes kyky, joka määritellään PISA-tutkimuksen matemaattisessa viitekehyksessä. Siihen liittyy symbolisten esitysten ymmärtäminen, tulkinta, manipulointi ja hyödyntäminen matemaattisissa konteksteissa, joita koskettavat matemaattiset konventiot ja säännöt. Tähän kykyyn liittyy myös formaalien matemaattisten rakennelmien ymmärtäminen ja hyväksikäyttö. Viimeinen tutkimuksessa määritelty kyky on *matemaattisten työkalujen käyttö* (using mathematical tools), millä tarkoitetaan lähinnä fyysisten työkalujen hyödyntämistä. Näitä ovat muun muassa laskimet, mittausvälineet ja tietokoneohjelmat. (OECD 2013a, 31.) PISA-tutkimuksen viitekehys on eriytyneempi ja kompleksisempi kuin TIMSS-tutkimuksissa, vaikka tutkimuksissa on myös selvää analogiaa. PISA-tutkimuksessa edellä mainitut matemaattiset kyvyt nimittäin esiintyivät myös kolmessa luokassa niiden ratkaisun edellyttämän kognitiivisen kompleksisuuden mukaan. Näistä ensimmäinen oli tilanteiden matemaattinen muotoilu, toinen matemaattisten käsitteiden, faktojen, proseduurien ja päättelyn käyttäminen ja kolmas matemaattisten tulosten tulkinta, soveltaminen ja arviointi. Nämä kolme matemaattisen prosessin luonnetta määritellään jokaisen kyvyn kodalla, joten jokaisella kyvyllä (esim. päättely ja perustelu) on kolme prosessitasoa. (OECD 2013a, 32.) Vuoden 2003 PISA-tutkimuksessa viitekehyksen samanlaisuus TIMSS-tutkimuksen kanssa oli vielä ilmeisempi, joten matemaattisen osaamisen määrittelyssä on nähtävissä tiettyä universaaliutta, joka ilmenee määrittelytahosta riippumatta (ks. OECD 2004, 40–41).

Nyt jo 15 vuotta vanhassa peruskoulun matematiikan oppimistulosten kansallisessa arvioinnissa (Korhonen 1998, 68) perustaitojen hallintaa pidettiin vielä keskimäärin hyvänä, vaikka lähes neljäsosalla oli selviä puutteita tällä saralla. Soveltamistaitojen taso sen sijaan oli "mekaanisia" perustaitoja heikompaa, minkä ajateltiin olevan suoraa seurausta kouluopetuksen keskittymisestä mekaanisten taitojen harjoitteluun. Oletettavaa on, että oppimistulokset ovat olleet tuolloin samansuuntaisia myös lukion päättövaiheessa. Tuoreemmassa opetushallituksen matematiikan oppimistulosten arvioinnissa todetaan taitojen rapistuneen peruskoulun päättövaiheessa kaikilla keskeisillä osa-alueilla (algebra, funktiot, geometria, luvut ja laskutoimitukset sekä todennäköisyys ja tilastot). Erityisesti matematiikan perusteiden mureneminen on tutkimuksen tulosten perusteella todellista. Toinen huolestuttava kehityssuunta on ollut oppimistulosten polarisoituminen. (Opetushallitus 2012, 118–120.)

Koulutuksen arviointineuvoston tutkimuksessa (Hautamäki, Säkkinen, Tenhunen, Ursin, Vuorinen, Kamppi & Knubb-Manninen 2012) todetaan, että matematiikan perusosaamista olisi vahvistettava lukiossa. Näin tutkimuksen mukaan ajattelevat erityisesti korkeakoulujen edustajat, joiden mukaan peruslaskutaidot ovat hukassa suurimmalta osalta korkeakoulutukseen hakevista. Korkeakoulutukseen hakemisen näkökulmasta matematiikan taitoja pidetään kuitenkin riittävinä hakijoiden puolesta, vaikka usein matematiikkaa joudutaankin kertaamaan jatko-opinnoissa. Matematiikan tärkeyttä korostaa se, että 24 prosenttia korkeakouluopiskelijoista pitää sitä lukion hyödyllisimpänä oppiaineena. Tutkimuksen perusteella lähes kaikissa korkeakouluissa on jouduttu madaltamaan tai miettimään uudelleen matematiikan opetuksen vaatimuksia ja sisältöjä. Valintakokeita pidettiin tutkimukseen osallistuneiden korkeakoulujen edustajien toimesta tärkeinä, koska niiden avulla voidaan mitata jatkokoulutuksen edellyttämiä tietoja ja taitoja.

Joutsenlahden (2005) väitöskirjatutkimus tarkastelee lukiolaisten matemaattisen ajattelun piirteitä, ja Kilpatrickin ym. mallilla on keskeinen teoreettinen osa tässä tutkimuksessa. Joutsenlahti yhdistelee monipuolisesti matemaattisen ajatteluprosessin malleja ylioppilastehtävien luokittelemiseksi. Wilsonin taksonomian neljän kognitiivisen tason, laskutaidon, ymmärtämisen, soveltamisen ja analyysin, hän yhdistää kolmeksi tasoksi. Joutsenlahti perustelee valintaansa sillä, että tehtävät voi usein luokittaa Wilsonin taksonomian tasoista kahdelle (neljästä), joten luokittelun yksinkertaistamiseksi on pitäydyttävä näinkin karkeassa mallissa. Tutkimuksessa käytettiin tasoja, jotka nimettiin seuraavasti: laskutaito/ymmärtäminen (LY), ymmärtäminen/soveltaminen (YS) ja soveltaminen/analyysi (SA).

Joutsenlahden (2005) tutkimuksesta käy ilmi, että 1990-luvun kevään ylioppilaskokeissa 42 % tehtävistä kuului LY-, 27 % YS- ja 31 % SA-tasolle. LY-tason tehtävien hallinta oli tutkimuksen mukaan heikentynyt 1990-luvun aikana, mikä näkyi hylättyjen arvosanojen määrän kasvuna. Lukio-opintojen pirstaleisuutta ja opiskelijoiden lyhytjänteisyyttä kuvaa Joutsenlahden (2005, 176) havaitsema 11 prosentin joukko, jonka matemaattista osaamista ja ajattelua hän nimittää sisältörajoittuneeksi. Nämä opiskelijat saattavat menestyä lukion aikana ennalta määritellyillä kapeilla sisältöalueilla, mutta ylioppilaskirjoitusten edellyttämä laaja, tiettyyn kontekstiin sitomaton, tehtäväpohja tuottaa heille vaikeuksia. Joutsenlahden (2005) ja Tallilan (2013, 77) tutkimuksissa havaittiin selviä eroja ylimääräisenä ja pakollisena kirjoittavien suorituksissa. Yleisesti ottaen pakollisena matematiikan kirjoittavat kokelaat ovat sitoutuneempia ja täten menestyvät paremmin. Pakollisena aineena matematiikkaa kirjoittavien määrä on ollut nousussa 2000-luvulla (vuotta 2004 lukuun ottamatta), joten kehitys on tässä suhteessa positiivista.

4 METODOLOGISET JA TEOREETTISET LÄHTÖKOHDAT

Tutkiminen on varsinkin alkuvaiheissaan tyypillisesti täynnä valintoja. Perinteisesti ennen aineiston keruuta tulee selvittää ja tehdä valintoja ongelmanasettelun, tieteenfilosofian, menetelmien ja teoreettisen ymmärryksen suhteen. Tämä vaihe onkin yleensä tutkimuksen vaikeimpia kohtia. Laadullisen eli kvalitatiivisen tutkimuksen ongelmanasettelu saattaa kuitenkin muuttua tutkimuksen edetessä, sillä vasta tutkimusaineisto saattaa paljastaa, mihin kysymyksiin sillä voidaan vastata. Tämä ei kuitenkaan tarkoita sitä, että tutkija voisi vain kerätä jotakin aineistoa ja päättää vasta sitten mitä tutkii. Tutkimuksen alussa on oltava vähintään alustavia ideoita tutkimuksen suunnasta ja mielenkiinnon kohteista. Määrällisen eli kvantitatiivisen tutkimuksen piirteisiin kuuluu puolestaan selvempi tutkimuksen vaiheiden erottuminen ja ongelmien asettaminen. (Hirsijärvi, Remes & Sajavaara 2009, 123–124.)

Ongelmanasettelu voi koostua yhdestä tai useammasta pääongelmasta ja niiden alaongelmista tai samantasoisista ongelmista. Mitään tiukasti määrättyä mallia tutkimuksessa ei kuitenkaan tarvitse noudattaa ongelmanasettelun suhteen. Tutkimuskysymyksistä on kuitenkin hyvä perustella: miksi niihin on päädytty ja miksi ne on rajattu ja muotoiltu tietyllä tavalla. Tutkimuksen filosofiset lähtökohdat ohjaavat tietenkin myös ongelmien muotoilua, vaikka tutkimus ei itsessään olisi erityisen teoreettinen tai filosofinen. Oletuksia tehdään tiedostamattakin muun muassa ihmisestä ja tiedonhankinnasta. (Hirsijärvi ym. 2009, 125–129.) Tässä tutkimuksessa epistemologiset eli tietämisen alkuperää ja luonnetta sekä tiedon muodostusta koskevat lähtökohdat ovat keskeisessä asemassa. Keskeinen epistemologinen tarkastelun paikka on matemaattisen osaamisen mallin luominen. Tässä tutkimuksessa sitouduttiin alusta lähtien tarkastelemaan aihetta jo olemassa olevien teorioiden pohjalta. Toisin sanoen tutkimus toteutettiin teoriasidonnaisen sisällönanalyysin keinoin. Toinen mahdollinen – vastakkainen – lähestymistapa olisi ollut aineistolähtöinen: siinä tutkimusta olisi karakterisoinut aiempien teorioiden ja mallien hylkääminen ja induktiivinen luonne. Tällöin olisi esimerkiksi voitu tarkastella matematiikan tehtäviä aineistolähtöisen sisällönanalyysin keinoin ja muotoilla näin teoreettista näkemystä matemaattisen osaamisen tai tehtävien luokittelun perustaksi. Tarkastellaan seuraavaksi lähemmin näitä eri lähestymistapoja, joita sisällönanalyysin perustaksi olisi voitu valita.

4.1 Sisällönanalyysi

Sisällönanalyysillä tarkoitetaan laadullisen ja määrällisen tutkimuksen perusanalyysimenetelmää, jolla tavoitellaan aineiston järjestämistä tiiviiseen ja selkeään muotoon kadottamatta sen sisältämää informaatiota. Lähes mikä tahansa kirjalliseen muotoon saatettu dokumentti voidaan analysoida sisällönanalyysin keinoin. Analyysin toteutuksessa on tärkeää määritellä mitä aineistosta halutaan selvittää ja keskittyä valittuihin kiinnostuksen kohteisiin, vaikka aineistosta havaittaisiinkin muita mielenkiintoisia seikkoja. Sisällönanalyysissä onkin pyrkimyksenä systemaattisuus ja objektiivisuus. (Tuomi & Sarajärvi 2009, 91–120.)

Yleensä sisällönanalyysin työskentely etenee mielenkiinnon kohteiden määrittelyn jälkeen aineiston litterointiin ja koodaamiseen, jolloin merkitään kaikki kiinnostuksen kohteet ja kerätään ne yhteen erilleen muusta aineistosta. Tämän jälkeen seuraa aineiston luokittelu, teemoittelu tai tyypittely. Luokittelu on näistä yksinkertaisin aineiston järjestämisen muoto. Sen avulla voidaan määritellä kuinka monta kertaa tietyt luokat esiintyvät aineistossa ja esittää luokiteltu aineisto taulukkona. Se, miten nämä luokat muodostetaan, riippuu olennaisesti analyysin päättelylogiikasta, joka voi olla perusteiltaan induktiivinen tai deduktiivinen. (Tuomi & Sarajärvi 2009, 91–120.)

Tuomi ja Sarajärvi (2009, 95–120) erottelevat sisällönanalyysin aineistolähtöiseksi, teoriaohjaavaksi tai teoriasidonnaiseksi. Aineistolähtöisessä sisällönanalyysissä teoria koskee ainoastaan analyysin toteuttamista, mutta muuten aineisto luo itsessään teoreettisen kokonaisuuden. Ongelmallisen tästä lähestymistavasta tekee se, että tutkija ei voi kokonaan irrottautua omista ennakkokäsityksistään, joten analyysin objektiivisuus voidaan saattaa kyseenalaiseksi. Tutkimuksessa tuleekin tällöin kirjoittaa tutkijan omista lähtökohdista, jolloin niihin voi suhtautua tietoisesti analyysin aikana. Teoriaohjaava sisällönanalyysi eroaa aineistolähtöisestä sen teoreettisten kytkentöjen suhteen. Analyysiyksiköt valitaan kuitenkin aineistosta, joten teoria ei sido tämän tyyppistä lähestymistapaa. Teoriaohjaavan sisällönanalyysin ajatteluprosessi vaihtelee aineistolähtöisyyden ja valmiiden mallien välillä. Teoriaohjaava sisällönanalyysi ei yleensä eroa teoriasidonnaisesta tutkimustulosten raportoinnissa, mutta teoriasidonnaisen sisällönanalyysin toteutus on silti lähtökohdiltaan erilainen. Teoriasidonnaisuus nimittäin tarkoittaa sisällönanalyysissä nimensä mukaisesti perinteistä luonnontieteellistä mallia, jossa valmiiden teorioiden avulla luodaan tutkimuksen viitekehys. Ilmiö, jota tutkitaan, määritellään siis olemassa olevan tiedon perusteella. Yleensä aiempaa tietoa testataan ja koetellaan jossakin uudessa ympäristössä.

4.2 Kvantifiointi sisällönanalyysin keinona

Tutkimuksen kvalitatiivinen lähestymistapa ei tarkoita sitä, että se ei voisi sisältää myös määrällisiä piirteitä. Kvantifioinnilla tarkoitetaan muun muassa tutkimuksen aineiston luokittelemista eri luokkiin ja näiden luokittelujen määrällistä tarkastelua. Kvantifiointi auttaa varmentamaan tutkimuksen aineiston tulkintaa ja edistää näin tutkimuksen luotettavuutta. (Eskola & Suoranta 1998, 165–166.) Kvantifiointi liittyy olennaisesti sisällönanalyysiin ja sisällön erittelyyn, mutta kirjallisuudessa ei olla yksimielisiä käsitteiden välisistä suhteista (ks. Tuomi & Sarajärvi 2009, 105).

Kvantifioiva kvalitatiivinen analyysi on perinteisen laadullisen ja kovan kvantitatiivisen analyysin välimuoto (Eskola & Suoranta 1998, 166). Näin ollen siihen ei tulisi soveltaa kvantitatiivisesta tutkimuksesta tuttua yleistämisen periaatetta eikä luotettavuustestejä. Kvantifioinnin tarkoituksena voidaan pitää pikemminkin laadullisen tutkimuksen eheyttämistä ja selkeyttämistä.

Laadullisen aineiston kvantifiointi edellyttää luokittelukriteerien ja tulkintasääntöjen laadintaa. Luokittelu on sitä haastavampaa, mitä väljemmin nämä edellytykset on täytetty. Toisaalta huolellisesti laadittu luokittelukehikko ei itsessään tarkoita, että luokittelusta tulisi helppoa, sillä on pohdittava myös luokittelusysteemin kompleksisuutta. Yksityiskohtaisemmilla luokilla saadaan toki eriteltyä aineistoa paremmin, mutta samalla luokittelun suorittamisen yksikäsitteisyys vaikeutuu huomattavasti. Näin ollen on tehtävä valintoja luokittelun luotettavuuden ja aineiston runsaan erittelyn välillä. Luokittelun luotettavuuteen voidaan vaikuttaa myös työskentelyn keinoin: nimittäin yhdeltä istumalta luokiteltu aineisto käsitellään todennäköisemmin samoin kriteerein, kuin jos luokittelu hajautettaisiin tehtäväksi useassa jaksossa. Luokittelun toistaminen vaikuttaa myös osaltaan tutkimuksen reliabiliteettiin. (Eskola & Suoranta 1998, 167–168.)

4.3 Operationalisointi

Tieteellisessä tutkimuksessa lähdetään perinteisesti liikkeelle teoreettisista käsitteistä (kuten matemaattinen taitavuus). Tällöin tutkimuksessa tulee eteen mitattavuuden ongelma, kun teoreettisten käsitteiden on kytkeydyttävä jollakin tavalla empiiriseen todellisuuteen. Operationalisoinnin tavoitteena on tuottaa tällaisille teoreettisille käsitteille empiirisesti mitattavat vastineet, jolloin puhutaan käsitteen operationaalisesta määritelmästä. (Eskola & Suoranta 1998, 75.)

Teoreettisen käsitteen operationaalinen vastine saattaa olla merkitykseltään erilainen, jos sitä ei muotoilla riittävän tarkasti. Matemaattisen taitavuuden yhteydessä proseduraalinen sujuvuus saattaisi huolimattomasti operationalisoituna merkitä ainoastaan laskujen suorittamista nopeasti. Tällöin operationaalinen vastine olisi teoreettista käsitettä suppeampi. Toisaalta operationaalinen vastine saatetaan yhtä hyvin täsmentää teoreettista käsitettä suuremmaksi. On myös mahdollista, että operationaalinen vastine ei täysin kohtaa teoreettista käsitettä. (Eskola & Suoranta 1998, 75–76.)

4.4 Korrelaatio ja kausaalisuus

Kahden asian välinen korrelaatio tarkoittaa sitä, että niiden välillä on tietty riippuvuus. Tällainen korrelaatio voi olla esimerkiksi ruokavaliolla ja terveydellä. Toisaalta myös haikaroiden määrä saattaa korreloida syntyvyyden kanssa. Näiden korrelaatioiden ero on siinä että jälkimmäisen taustalla ei oletettavasti ole kausaalisuhdetta. Tällöin puhutaan näennäiskorrelaatiosta.

Ihmistutkimuksessa ei ole yleensä itsestään selvää onko havaittujen korrelaatioiden taustalla jokin kausaalisuhde vai onko kyse vain näennäiskorrelaatiosta. Kausaalisuhteen toteamista voidaan helpottaa tarkastelemalla kontingenssia. Tällöin on olennaista selvittää ovatko selittävä ja selitettävä muuttuja käsitteellisessä suhteessa. Mittaukset on syytä järjestää niin, että toinen tekijä mitataan toisesta riippumatta. Kausaalisuhteen varmistamiseksi on myös varmistuttava syyn ja seurauksen ajallisesta suhteesta. Tarkemmin ottaen kausaalisuhteessa syyn on tapahduttava ennen vaikutusta. Näennäiskorrelaatioiden lisäksi kausaalisuhteiden toteamista voi haitata niin sanottu käänteinen näennäiskorrelaatio. Tällainen suhde voi olla aineistolla, jonka havainnot kumoavat toisensa ja ilmiö onkin oletettua monimutkaisempi. Käänteisen näennäiskorrelaation eliminoimiseksi tulee ottaa huomioon kaikki mahdolliset tekijät ja vakioida niiden vaikutus tuloksiin. Viimeinen kausaalisuhteen toteamista varmentava seikka on mekanismin selittäminen. Jos nimittäin kykenee esittämään miten X aiheuttaa Y:n, voi hälventää epäilyksiä näennäiskorrelaatiosta. Aina ilmiön taustalla olevan mekanismin selittäminen ei kuitenkaan ole mahdollista, sillä se saattaa olla hyvin monimutkainen. Näin ollen kaikkien syiden tutkiminenkaan ei ole aina mahdollista. Teoriatieto auttaa tässä tapauksessa huomion keskittämisessä oikeisiin tekijöihin. (Töttö 2004, 112–161.)

4.5 Klusterianalyysit ja K-means -klusterianalyysi SPPS-ohjelmalla

Klusterianalyysit voidaan jakaa karkeasti hierarkkisiin ja ei-hierarkkisiin menetelmiin, vaikka myös muita jakoja voidaan esittää (ks. Fielding 2007, 55). Hierarkkisissa menetelmissä lähdetään liikkeelle joko yhdestä, koko aineiston käsittävästä, klusterista tai kaikista tapauksista omina klustereinaan. Tämän jälkeen edetään kohti toista ääripäätä klustereiden määrän suhteen yhdistämällä tai jakamalla klustereita. Molempien hierarkkisten menetelmien tulokset voidaan esittää kaksiulotteisessa diagrammissa, jota kutsutaan dendogrammiksi. (Johnson & Wichern 2002, 679–680). Siinä missä hierarkkisilla menetelmillä voidaan luokitella myös *muuttujia*, ei-hierarkkiset menetelmät on suunniteltu erityisesti *tapausten* luokitteluun. K-means klusterianalyysillä viitataan ei-hierarkkiseen menetelmään, jolla etsitään aineistosta luonnollisia ryhmittymiä. Termillä viitataan myös algoritmien väljään joukkoon, joilla voidaan luokitella samanlaisia tapauksia yhteen. (Fielding 2007, 46–48.) K-means klusterianalyysistä voidaan puhua vaihtoehtoisesti joko k-, c-, C- tai q-means -menetelmänä (Boberg 1999, 113). Tarkastellaan seuraavaksi lähemmin erästä K-means klusterianalyysin algoritmia.

Algoritmin kuvaus perustuu pääpiirteittäin IBM SPSS Statistics (2013) -ohjeeseen, jossa on eritelty ohjelman sisältämää K-means -klusterianalyysiä. SPSS suorittaa K-means klusterianalyysin kolmessa vaiheessa, joista kaksi toistetaan iteroitaessa. Algoritmi perustuu Hartiganin (1975) ehdottamaan vaiheittaiseen menetelmään, jonka avulla klusterikeskukset määrittyvät lähelle aineiston mahdollisesti muodostamia ryppäitä. Tässä Hartiganin menetelmässä valitaan aluksi satunnaisesti ennalta valittu määrä (K) tapauksia, jotka muodostavat ensimmäiset klusterikeskukset $\mathbf{M}_\mathrm{i}$, missä $i \in A = \{x \in \boldsymbol{Z}_{+} | x \leq K\}$. Klusterikeskuksiin valitaan vain tapauksia, joissa ei ole puuttuvia arvoja. Seuraavaksi algoritmin vaiheessa 1 käydään läpi kaikki muut tapaukset. Tässä tutkimuksessa tapauksena käsitellään yksittäisen henkilön pääsykoetuloksista muodostettua vektoria. Vektoreiden ulottuvuuksiksi määritetään edellä luvussa 2.3 muodostetut tehtäväkategoriat.

Vaihe 1

Käytetään $\mathbb{R}^d$:n vektoreiden $\boldsymbol{x}_i$ ja $\boldsymbol{x}_j$ euklidiselle etäisyydelle merkintää

$$d(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}_j) = \sqrt{\sum_{p=1}^{d} (x_{i,p} - x_{j,p})^2},$$

missä $x_{i,p}$ on i:nnen tapauksen p:s koordinaatti.

Olkoon $\mathbf{x}_\mathrm{k}$ k:s tarkasteltava tapaus. Tapaus $\mathbf{x}_\mathrm{k}$ korvaa klusterikeskuksen $\mathbf{M}_\mathrm{n}$, mikäli on olemassa $i \in A$ siten, että

$$\min \mathrm{d}(\boldsymbol{x}_k, \boldsymbol{M}_i) > d_{mn},$$

missä d_{mn} on kahden toisiaan lähinnä olevan klusterikeskuksen etäisyys. Näistä kahdesta keskuksesta $\mathbf{M}_\mathrm{n}$ ja $\mathbf{M}_\mathrm{m}$ valitaan $\mathbf{M}_\mathrm{n}$, mikäli

$$d(\boldsymbol{x}_k, \boldsymbol{M}_n) < d(\boldsymbol{x}_k, \boldsymbol{M}_m)$$

Toisin sanoen klusterikeskuksista valitaan korvattavaksi se, jonka euklidinen etäisyys on pienempi vektoriin $\boldsymbol{x}_k$ nähden.

Vektori $\boldsymbol{x}_k$ voi olla myös lähempänä klusterikeskusta $\boldsymbol{M}_i$, kuin mikä tahansa etäisyys d_{mn}. Tällöin edellinen tapaus ei toteudu ja vektorille tehdään vielä toinen testi. Oletetaan, että kaksi vektoria $\boldsymbol{x}_k$ lähintä klusterikeskusta ovat $\boldsymbol{M}_q$ ja $\boldsymbol{M}_p$ siten, että

$$d(\boldsymbol{x}_k, \boldsymbol{M}_q) \leq d(\boldsymbol{x}_k, \boldsymbol{M}_p).$$

Jos on voimassa

$$d(\boldsymbol{M}_q, \boldsymbol{M}_i) < d(\boldsymbol{x}_k, \boldsymbol{M}_p)$$

kaikilla $i \in A$, niin $\boldsymbol{x}_k$ korvaa keskuksen $\boldsymbol{M}_q$. Aineisto käydään oletusarvoisesti läpi yhden kerran vaiheen 1 mukaisesti, jolloin saadaan klusterien alustavat keskiarvot. Alustavat keskiarvot ovat siis käytännössä jotkin tapaukset $\boldsymbol{x}_i$, jotka edustavat nyt klustereita.

Vaihe 2

Tässä vaiheessa algoritmia jokainen yksittäistapaus yhdistetään lähimpään klusteriin. Tämä tehdään vaiheittain lähtien ensimmäisestä tapauksesta ja päivittäen klusterin keskiarvo jokaisen yhdistämisen jälkeen.

Askel 1: Oletetaan vaiheesta 1 saadut alustavat keskiarvot klusterikeskuksille $\mathbf{M}_\mathrm{i}$. Määritetään tapauksen $\mathbf{x}_1$ ja klusterikeskusten $\mathbf{M}_\mathrm{i}$ euklidiset etäisyydet $d(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{M}_i)$ ja linkitetään $\mathbf{x}_1$ klusterikeskukseen, johon on pienin etäisyys. Olkoon $\mathbf{M}_\mathrm{k}$ sellainen klusterikeskus, jolla

$$d(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{M}_k) \leq d(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{M}_i),$$

kun $i \neq k$. Tällöin yhdistetään $\boldsymbol{x}_1$ klusterikeskukseen $\boldsymbol{M}_k$.

Askel 2: Lasketaan klusterikeskuksen uusi keskiarvo

$$\boldsymbol{M}_{k,\text{päivitetty}} = \frac{N_k \boldsymbol{M}_k + \boldsymbol{x}_k}{N_k + 1},$$

missä N_k on alkioiden määrä klusterissa k. Klusterikeskuksen keskiarvo otetaan vaiheessa 2 siis aina mukaan uuden keskiarvon laskemisessa. Merkitään tämän laskun jälkeen $\boldsymbol{M}_{k,\text{päivitetty}} = \boldsymbol{M}_k$.

Askel 3: Toistetaan askeleet 1 ja 2 lopuille tapauksille $\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \dots, \mathbf{x}_\mathrm{n}$, missä n on tapausten lukumäärä. Näin saadaan lopulta klusterien luokitetut keskiarvot ja edetään seuraavaan vaiheeseen.

Vaihe 3

Tässä vaiheessa toistetaan askel 1 vaiheesta 2 jokaiselle tapaukselle ja näin saadaan tapaukset luokiteltua lähimpään, klusterien luokitetun keskiarvon mukaiseen, klusteriin. Lopulliset klusterikeskiarvot lasketaan klusteriin kuuluvien tapausten keskiarvona

$$\boldsymbol{M}_i = \frac{\sum_{i \in \boldsymbol{M}_i} \boldsymbol{x}_i}{N_i}$$

Klusterikeskusta ei oteta huomioon lopullisen klusterikeskiarvon laskemisessa. Oletusarvoisesti iteraatiokierrosten lukumäärä on yhtä suurempi, jolloin lopulliset klusterikeskiarvot asetetaan uudelleen luokitetuiksi keskiarvoiksi ja toistetaan vaihe 3. Iteraatioiden lukumäärälle asetetaan etukäteen maksimiarvo, joka pysäyttää algoritmin. Vaihtoehtoisesti algoritmi päättyy, kun iteraatioiden välillä kaikille klusterille $\boldsymbol{M}_i$ pätee

$$\Delta \boldsymbol{M}_i < \varepsilon \cdot \min d(\boldsymbol{M}_n, \boldsymbol{M}_m),$$

missä $\varepsilon > 0$ ja $\boldsymbol{M}_n, \boldsymbol{M}_m$ ovat jotkin kaksi alkuperäisistä klusterikeskuksista.

5 TUTKIMUKSEN TOTEUTUS

5.1 Tutkimusongelmat

Tutkimusongelmat jakautuivat tässä tutkimuksessa kolmeen pääongelmaan ja niiden alaongelmiin.

1. Miten matemaattinen taitavuus ja osaaminen tulevat esille pitkän matematiikan ylioppilaskirjoituksissa ja korkeakoulujen pääsykokeiden matematiikan osioissa?

   1.1 Minkälaisia painotuksia näissä kokeissa on matemaattisen osaamisen suhteen?

   1.2 Arvioidaanko ylioppilaskokeilla laaja-alaisesti matemaattista taitavuutta kognitiivisten ominaisuuksien osalta niin, että opetussuunnitelman tavoite korkeakouluvalmiuksien tuottamisesta toteutuu?

   1.3 Millaisia muutoksia tehtävien osaamispainotuksissa on tapahtunut ylioppilaskirjoitusten matematiikan kokeessa?

   1.4 Miten ylioppilaskokeet ja korkeakoulujen pääsykokeet heijastavat opetussuunnitelmissa esitettyjä matemaattisen taitavuuden tavoitteita?

2. Millainen on ylioppilaiden ja yliopistoon pyrkivien matemaattinen osaamistaso?

   2.1 Miten tehtävissä menestytään matematiikan ylioppilaskirjoituksissa ja yliopistojen yhteisessä matematiikan pääsykokeessa?

   2.2 Voidaanko matemaattisen osaamistason laskua selittää kokeissa arvioitujen ominaisuuksien muuttumisella?

   2.3 Miten matematiikan pääsykokeisiin osallistuneita voidaan ryhmitellä matemaattisen osaamisen suhteen tarkastelemalla osallistujien menestymistä eri tehtävätyypeissä?

3. Onko tässä tutkimuksessa muodostettujen tehtäväkategorioiden jaottelu onnistunut?

   3.1 Ovatko tehtäväkategorian jäsenet toisistaan riittävän erillisiä, kun niitä tarkastellaan yliopiston matematiikan pääsykokeen tulosten avulla?

   3.2 Kattavatko muodostetun tehtäväkategorian jaottelut kaikki tutkimusaineistossa esiintyvät tehtävätyypit vai ilmeneekö luokittelua tehdessä kategorioihin sopimattomia tehtäviä?

5.2 Tutkimuksen kohteet

Tutkimuksen kohteiksi valikoituivat vuosien 2004–2013 kevään pitkän matematiikan ylioppilaskokeet, 2004–2009 Tampereen yliopiston matematiikan ja tilastotieteen kokeet, yliopistojen matematiikan yhteisvalinnan kokeet vuosilta 2010–2013, 2001–2013 dia-yhteisvalinnan insinöörikohteen matematiikan kokeet sekä 2004–2013 ammattikorkeakoulujen tekniikan ja liikenteen alan matematiikan kokeet. Tampereen yliopiston matematiikan ja tilastotieteen pääsykokeet siirtyivät vuonna 2010 yhteisvalinnan piiriin, joten uudistus tarjosi hyvän tilaisuuden arvioida sen mukanaan tuomia muutoksia. Insinöörivalinnan kokeista vuodet 2001—2003 jätettiin tehtäväluokittelun jälkeen analyysin ulkopuolelle, vaikka liitteen 2 taulukkoon on sisällytetty myös nämä vuodet. Lähes kaikkiin kokeisiin oli saatavilla valmiit ratkaisut, jotka helpottivat tehtävien luokittelua. On huomattava, että opetussuunnitelmia uudistetaan tasaisin väliajoin, joten opetussuunnitelmat, joita tarkasteltiin, eivät välttämättä vastaa tarkalleen edellä mainittuja pääsykokeita ajallisesti. Tämän tutkimuksen tarkoituksiin ei kuitenkaan nähty välttämättömäksi ulottaa opetussuunnitelmatarkastelua koskettamaan kaikkia mahdollisia suunnitelmaversioita, joihin opiskelijat on valittu.

Tampereen yliopiston matematiikan (ja tilastotieteen) pääsykokeisiin vuosina 2004—2013 osallistuneiden tehtäväkohtaisia suorituksia tarkasteltiin pistematriisin avulla. Pitkän matematiikan ylioppilaskokeiden suorituksia arvioitiin puolestaan Tallilan (2013) esittämien, vuosien 2004—2012, tilastojen perusteella. Toisin kuin pääsykoetilastoissa, Tallilan tilastoissa ei eritelty henkilöiden suorituksia vaan tehtäväkohtaisesti pisteiden saajien lukumäärä.

5.3 Tutkimuksen suoritus ja aineiston analyysi

Teoreettisen tiedon ja aiheeseen liittyvän materiaalin keruu aloitettiin vuoden 2013 toukokuussa. Ensimmäinen tavoite oli tutustua matemaattisesta osaamisesta ja ajattelusta kertovaan kirjallisuuteen sekä aiemmin tehtyihin tutkimuksiin. Tämän katsauksen jälkeen oli selvää, että olisi muodostettava tehtävien luokitteluun sopiva kategoriasysteemi, sillä sellaista ei yrityksistä huolimatta löytynyt, vaikka matematiikan tehtäviä on luokiteltu useissa yhteyksissä, kuten kansainvälisissä arvioinneissa ja tutkielmissa (ks. esim. Mullis, I., Martin, M., Ruddock, G., O'Sullivan, C. & Preuschoff, C. 2009; Hähkiöniemi & Viholainen 2004).

Opetussuunnitelmatarkastelu tehtiin sähköisesti julkaistujen uusimpien opetussuunnitelmien avulla. Osaamistavoitteita tarkasteltiin sisällönanalyysin keinoin kokoamalla kaikkien tarkasteltavien kurssien osaamistavoitteet yhteen, merkitsemällä matemaattiseen taitavuuteen liittyvät viittaukset ja järjestämällä nämä kohdat vastaaviin luokkiin. Näin suoritetun kvantifioinnin avulla saatiin osviittaa osaamistavoitteiden painotuksista, mutta analyysissä ei pitäydytty ainoastaan viittausten laskemisen tasolla vaan tavoitteiden painoarvoa kokonaisuudessa arvioitiin myös merkitysten laajuuden perusteella. Näin ollen analyysi otti paremmin huomioon esimerkiksi pienten yksityiskohtaisten ja laajojen, luultavasti koko kurssin kestävien, tavoitteiden merkityksen opetuskokonaisuuksissa.

Tutkimuksen kohteena olleiden korkeakoulujen pääsykokeiden ja ylioppilaskokeiden arviointi tehtiin muodostettujen tehtäväkategorioiden avulla. Matematiikan ja tilastotieteen pääsykokeissa menestymistä tarkasteltiin osallistujien tehtäväkohtaisia pisteitä tutkimalla. Tilastojen avulla arvioitiin pääsykokeisiin osallistuneiden matemaattista taitotasoa ensin yleisesti. Tämän jälkeen tilastoaineisto analysoitiin K-means klusterianalyysillä SPSS-ohjelmalla osaamistyyppien löytämiseksi. Muodostuneiden klusterien eroavuutta tutkittiin yksisuuntaisen varianssianalyysin avulla. Ylioppilaskokeiden osalta ei ollut käytettävissä yhtä yksityiskohtaista tilastointia, mutta Tallilan (2013) esittämät taulukot mahdollistivat ylioppilaskokelaiden yleisen taitotason arvioinnin. Taulukot sisälsivät joitakin virheitä sarakkeiden ja rivien summiin liittyen, joten ne otettiin huomioon ennen analyysien tekoa. Tallilan (2013) esittämissä taulukoissa on eritelty matematiikan pakollisena ja ylimääräisenä kirjoittaneiden suoritukset. Pakolliset ja ylimääräiset tilastot yhdistettiin, koska tämän tutkimuksen tavoitteiden toteutumiseksi ei nähty tarpeelliseksi tehdä eroa näiden kahden ryhmän välillä.

Tehtävät luokiteltiin niiden *vastaamiseen* vaadittavan matemaattisen osaamisen perusteella. Ratkaisun vaatimat ajattelun ominaisuudet pyrittiin arvioimaan lukiolaiselle mahdollisen ja todennäköisen matemaattisen käsittelyn perusteella: tehtäviä ei siis luokitettu esimerkiksi mahdollisimman elegantin ratkaisun mukaisesti. Valmiiden ratkaisujen puuttuessa hahmoteltiin tehtävän ratkaisua, jolloin voitiin luotettavammin arvioida niitä taitoja, joita ratkaisu vaatii. Tehtävät olivat usein jaettuna pienemmiksi osatehtäviksi (esim. a-, b- ja c-kohdat). Tällöin käytettiin pisteytysohjeita tai niiden puuttuessa tasaista pistejakoa eri kohtien painokertoimien arvioinnissa. Jos esimerkiksi tehtävässä oli kolme alakohtaa ja c-kohdan tehtävä luokiteltaisiin puolittain ominaisuustehtäväksi, niin silloin kyseinen painokerroin olisi $\frac{1}{6}$. Luokittelussa tehtäviä ei pakotettu yhteen kategoriaan vaan painokertoimissa käytettiin vapaasti murtolukuja. Luokitteluanalyysin tulokset on koottu liitteisiin 1–4, joissa esitetään myös tehtävien lukumäärän aritmeettinen keskiarvo, keskihajonta ja keskimääräinen prosenttiosuus. Dia-yhteisvalintaa koskevaan liitteeseen 2 päätettiin sisällyttää myös vuodet 2001–2003, vaikka niitä ei lopullisessa vertailussa otettukaan huomioon, jotta tarkasteluajankohta olisi sama kaikissa oppilaitoksissa.

Luokittelussa turvauduttiin luvun 2.3 tehtäväkategorioiden kuvauksiin. Tehtävätyypit toistuvat usein ylioppilaskokeissa ja pääsykokeissa samankaltaisina ratkaisuprosesseina, joten luokittelun tekeminen helpottui luokittelun edetessä. Luokitteluun tuli siis varmuutta ja yhtenäisyyttä, kun tehtävien vaatimat taidot alkoivat toistua. Edellä mainitun rutinoitumisen vuoksi jo luokiteltuihin kokeisiin palattiin toistamiseen, jotta varmistuttiin luokittelun yhtenäisyydestä. Kaikki tehtävät arvioitiin siis kahteen kertaan ja luokitteluerojen ilmetessä harkittiin tarkkaan luokittelua tukeutumalla vielä uudelleen tehtäväkategorioiden määrittelyyn. Tämä vähensi luokittelun subjektiivisuutta, sillä lopullisesta luokittelutuloksesta voitiin näin eliminoida vaikeasti luokitettavien tehtävien virheellistä tulkintaa.

Luokitukset kirjattiin tehtäväpapereille tehtävien viereen. Vuosittaiset tehtäväkategorioiden frekvenssit laskettiin, kun tarkasteluajanjakson kaikki kokeet oli analysoitu ja merkittiin luokittelutulokset liitteiden 1–4 taulukoihin. Toisinaan luokittelutulosten yhteenlaskussa sattui virheitä (esimerkiksi painokertoimen tulkinta), joten tulosten oikeellisuus varmistettiin summaamalla tehtäväkategorioiden frekvenssit vuosittain ja tarkistamalla, että summa vastasi tehtävien määrää kokeissa.

Tehtäväluokittelutulosten tilastolliset merkitsevyydet testattiin z-testillä ja tarkastelun kohteiksi otettiin pareittain eri oppilaitokset. Samat testit tehtiin myös kaikkien oppilaitosten pääsykokeille kahtena eri ajanjaksona, jotka olivat 2004—2009 ja 2010—2013. Näin saatiin arvioitua oppilaitosten välisiä ja sisäisiä, aikakaudellisia, eroja.

6 MATEMATIIKAN OSAAMINEN OPETUSTAVOITTEISSA

Tarkastellaan matematiikan osuutta lukiossa ja sen jälkeisissä opinnoissa analysoimalla opetussuunnitelmissa määriteltyjä tavoitteita uusimpien saatavissa olevien opetussuunnitelmien mukaan. Hakukohteissa ja osaamistavoitteissa tapahtuneet muutokset jätetään siis huomioimatta. Opetussuunnitelmat muuttuvat verrattain hitaasti, joten uusimmat opetussuunnitelmat ovat luultavasti luonteeltaan samanlaisia kuin aiemmatkin. Opetussuunnitelmien tarkastelun avulla voidaan pohtia ylioppilas- ja pääsykokeiden matemaattista luonnetta suhteessa opetuksessa painotettuihin matemaattisen taitavuuden puoliin. Korkeakoulujen osalta opetussuunnitelmien tarkasteluun otetaan mukaan esimerkinomaisesti muutama oppilaitos, jolloin voidaan analysoida niissä annettavan matematiikan opetuksen tavoitteita kokonaisvaltaisesti ja näin pyrkiä muodostamaan kokonaiskuvaa kyseisistä koulutusaloista yleisemmällä tasolla. Opetussuunnitelmien tarkastelussa ei keskitytä niinkään opetettaviin matematiikan aihealueisiin, vaan osaamistavoitteiden luonteeseen matemaattisen taitavuuden kannalta.

6.1 Lukion pitkä matematiikka

Pitkän matematiikan oppimäärään kuuluu 10 pakollista ja 3 syventävää kurssia, joissa annetaan jokaisessa noin 38 tuntia opetusta. Opetuksen tavoitteena on tuottaa monipuolisia matematiikan osaajia, joilla on valmiudet jatkaa matematiikan opiskelua jatko-opinnoissaan korkeakoulussa. (Opetushallitus 2013b.) Tutkimuksen teon aikaan voimassa olevat lukion opetussuunnitelman perusteet on laadittu vuonna 2003 ja niihin pohjautuvat paikalliset opetussuunnitelmat on ollut määrä ottaa käyttöön syksyllä 2005 (Opetushallitus 2013a).

Matemaattisen taitavuuden laaja-alainen kehittäminen niin kognitiivisilta kuin affektiivisilta puoliltaan näyttää olevan lukion pitkän matematiikan tavoite. Yllättäen yleisissä tavoitteissa ei viitata proseduraalisen sujuvuuden säikeeseen niin paljon kuin muihin. Käsitteelliseen ymmärtämiseen, strategiseen kompetenssiin ja mukautuvaan päättelyyn liittyviin tavoitteisiin sen sijaan viitataan useammin. Yritteliäisyyden osuus tavoitteissa nousee vahvasti esille ja siihen viitataankin useimmin. Lukion tavoitteena on siis ennen kaikkea kehittää rohkeita, itseensä luottavia ja matematiikkaa arvostavia oppijoita.

6.2 Tampereen yliopiston matematiikan ja tilastotieteen opinnot

Matematiikan ja tilastotieteen tutkinto-ohjelmassa opiskelijat voivat valita opintosuuntansa matematiikan, matematiikan aineenopettajan, tietotekniikan matematiikan ja tilastotieteen välillä. Tutkinto-ohjelma valmistaa asiantuntemusta vaativiin tutkimus-, suunnittelu- ja opetustehtäviin, joiden yleisimmät työpaikat ovat oppilaitoksissa, teollisuudessa, pankeissa, vakuutusyhtiöissä, tutkimuslaitoksissa ja tilastotoimistoissa. Kaksiportaisen tutkinnon kandidaatin tutkintoon kuuluu matematiikan ja tilastotieteen perus- ja aineopintoja 70–90 opintopistettä. Määrä vaihtelee valittavan opintosuunnan mukaan niin, että aineenopettajat opiskelevat vähiten ja tilastotieteilijät eniten näitä opintoja. 25 opintopisteen perusopintojen kurssit ovat kaikille opintosuunnille yhteiset, mutta pakolliset 35 opintopisteen aineopinnot on eritelty tilastotieteessä, yhtä viiden opintopisteen kurssia lukuun ottamatta, omiksi kokonaisuuksikseen. (Tampereen yliopisto 2013.) Matemaattista taitavuutta tarkasteltiin ainoastaan matematiikan perus- ja aineopintojen pakollisten kokonaisuuksien osalta.

Matematiikan kurssien osaamistavoitteiden (Tampereen yliopisto 2013) analysointi paljastaa, että yliopistomatematiikkaan kuuluu olennaisena osana todistaminen, päätteleminen ja käsitteiden ymmärtäminen. Ensimmäinen kurssi, Analyysi 1, kuitenkin perustuu enimmäkseen proseduraalisen sujuvuuden ja käsitteellisen ymmärtämisen säikeisiin. Tätä seuraavissa kursseissa, ainakin opetustavoitteiden perusteella, keskitytään eniten joko mukautuvaan päättelyyn tai käsitteelliseen ymmärtämiseen. Strategiseen kompetenssiin liittyviä tavoitteita on jonkin verran lähes kaikissa kursseissa, mutta ne eivät hallitse mitään kurssia. Huomattavaa on, että yritteliäisyyteen viittaavia mainintoja ei löydy yhdenkään kurssin tavoitteista.

6.3 Teknillisen yliopiston insinöörikoulutus

Dia-yhteisvalinnan piiriin kuului vuonna 2013 seitsemän yliopistoa tai tiedekuntaa: Aalto-yliopisto, Tampereen teknillinen yliopisto, Lappeenrannan teknillinen yliopisto, Oulun yliopiston teknillinen tiedekunta, Åbo Akademi, Turun yliopiston matemaattis-luonnontieteellinen tiedekunta ja Vaasan yliopiston teknillinen tiedekunta. Hakukohteita on yhteensä 39 ja lähes kaikkiin valitaan samoin perustein. (Diplomi-insinööri- ja arkkitehtikoulutuksen yhteisvalinta 2013.) Tarkastellaan esimerkinomaisesti Tampereen teknillisen yliopiston opetussuunnitelmia tekniikan kandidaatin tutkintoon johtavien tutkinto-ohjelmien osalta.

Tampereella voi opiskella Dia-yhteisvalinnan insinöörivaihtoehdon kautta viidessä tutkinto-ohjelmassa, joita ovat rakennustekniikka, tekniikka ja luonnontieteet, teknistaloudellinen, tekniset tieteet ja tieto- ja sähkötekniikka. Näissä tutkinto-ohjelmissa voi edelleen valita opintosuunnan 11 vaihtoehdon välillä. (TTY 2013.)

Tampereen teknillisen yliopiston (TTY) insinöörikoulutuksen matematiikan opinnot on jaettu kursseihin, jotka on nimetty joko insinöörimatematiikaksi tai matematiikaksi. Insinöörimatematiikat on jaettu vielä kolmeen eri toteutukseen, mutta sisältöjen ja tavoitteiden tarkastelu paljastaa, että jako on ilmeisesti vain tehty käytännön syistä. Osaamistavoitteiden suhteen neljä insinöörimatematiikan ja matematiikan kurssia eroavat toisistaan merkittävästi.

Insinöörimatematiikkaa kuvailee yleisesti matematiikan hyötynäkökulma: matematiikan osaaminen nähdään työkaluna. Tämä käy ilmi hyvin selkeästä proseduraalisen tiedon korostamisesta. Pääpaino tavoitteissa on siis laskemisessa ja ratkaisujen tuottamisessa. Toisaalta opetussuunnitelma tähtää insinöörimatematiikassa jonkin verran käsitteellisen ymmärtämisen tuottamiseen, vaikka sanaa "ymmärtäminen" ei käytetä kertaakaan. Insinöörimatematiikan kolmannessa ja neljännessä kurssissa esiintyy vähäisessä määrin strategisen kompetenssin säikeeseen viittaavia tavoitteita. Todistamiseen, perustelemiseen, päättelyyn tai ylipäätään mukautuvan päättelyn säikeeseen liittyviä osaamistavoitteita ei esitetä yhdenkään kurssin suunnitelmissa. Samoin yritteliäisyyteen liittyviä tavoitteita ei esiinny.

TTY:n tutkinto-ohjelmista vain tekniikan ja luonnontieteiden opintoihin kuuluvat pakollisena kurssit, jotka on nimetty Matematiikka 1–4. Tässä tutkinto-ohjelmassa opiskelevat biotekniikan, teknis-luonnontieteellisen sekä ympäristö- ja energiatekniikan opintosuunnan opiskelijat. Osaamistavoitteiden perusteella ensimmäiset kaksi kurssia tähtäävät käsitteellisen ymmärtämisen lisäämiseen matematiikan alueissa, jotka ovat edellytyksenä muille kursseille osallistumiselle. Laskeminen ja yleisemmin proseduraalinen sujuvuus ovat kaikkien paitsi ensimmäisen kurssin tavoitteissa selvästi esillä, mutta tavoitteet eivät jää yhtä yksipuolisiksi kuin insinöörimatematiikan kursseilla. Jokaisella matematiikan kurssilla on nimittäin strategiseen kompetenssiin ja mukautuvaan päättelyyn liittyviä osaamistavoitteita. Ainoastaan affektiiviset tavoitteet on jätetty tavoitteista kokonaan pois.

6.4 Ammattikorkeakoulujen tekniikan ja liikenteen ala

Suomessa voi opiskella tutkimuksen teon aikana 21 ammattikorkeakoulussa tekniikan ja liikenteen alalla (opiskelupaikka.fi-sivusto). Kyse on siis varsin laajasta koulutusalasta, kun otetaan huomioon, että yksittäisessä oppilaitoksessa voi opiskella useita koulutusohjelmia ja niiden sisällä vielä suorittaa suuntautumiseen vaikuttavia erikoistumisopintoja. Ala on niin laaja, että kaikkien opetussuunnitelmien analysointi ei tässä tutkimuksessa ole mielekästä. Tarkastellaan näin ollen kahden eri oppilaitoksen kaikkia koulutusohjelmia opetussuunnitelmien matematiikan osalta ja pyritään näin muodostamaan kokonaiskuvaa alasta.

Joensuussa sijaitsevan Karelia-ammattikorkeakoulun tekniikan ja liikenteen alalla on mahdollisuus opiskella viidessä eri koulutusohjelmassa: kone- ja tuotantotekniikan, rakennustekniikan, sähkötekniikan, tietotekniikan ja ympäristöteknologian koulutusohjelmissa. Matematiikkaa opiskellaan näissä koulutusohjelmissa 16 opintopisteen edestä lukuun ottamatta ympäristöteknologiaa, jossa matematiikkaa on sisällytetty koulutukseen ainoastaan 9 opintopistettä. Koulutusohjelmien painotukset aihealueiden suhteen vaihtelevat, mutta opetussuunnitelmien perusteella on selvää, että aihealueista riippumatta tavoitteissa painotetaan valmiuksia tekniikan sovellusten matemaattiseen käsittelyyn. Rakennustekniikassa soveltamisen lisäksi keskeiseen asemaan nousee matemaattinen ajattelu ja hahmotuskyky. Kone- ja tuotantotekniikassa puolestaan soveltamisen lisäksi opetussuunnitelmassa korostetaan matematiikan perusteiden hallintaa aihealueissa, jotka suurimmaksi osaksi pohjautuvat lukiomatematiikkaan. (Karelia ammattikorkeakoulu 2009.)

Toisena ammattikorkeakouluna, johon voi hakea opiskelemaan tekniikan ja liikenteen alaa, tarkastellaan Jyväskylän ammattikorkeakoulua. Suomenkielisiä koulutusohjelmia on haettavissa 9 kappaletta: automaatiotekniikka, energiatekniikka, hyvinvointitekniikka, kone- ja tuotantotekniikka, logistiikka, mediatekniikka, ohjelmistotekniikka, paperiteknologia ja tietotekniikka. Koulutusohjelmiin kuuluu tyypillisesti 15 opintopistettä matematiikkaa, poikkeuksen tästä kuitenkin tekevät mediatekniikka ja tietotekniikka 10 ja logistiikka 20 opintopisteellä. (Jyväskylän ammattikorkeakoulu 2013.)

Jyväskylän ammattikorkeakoulun tekniikan ja liikenteen alan koulutusohjelmat rakentuvat opetussuunnitelmien perusteella matemaattiselta osaamistasoltaan hyvin samanlaisesti. Ensimmäisellä matematiikan kurssilla on selvästi painotus perusasioiden hallinnassa ja proseduraalisessa sujuvuudessa. Tähän viittaavat esimerkiksi maininnat "opiskelija *osaa käsitellä* lausekkeita ja *ratkaista yhtälöitä* käsin, laskimella ja matemaattisia tietokoneohjelmia käyttäen" sekä "Hän osaa kompleksilukujen ja matriisien laskusäännöt." Funktioiden kohdalla ensimmäisten kurssien tavoitteissa mainitaan myös ymmärtäminen ja analysoiminen. Myöhemmissä matematiikan kursseissa tuodaan osaamistavoitteisiin vahvasti mukaan soveltaminen, jota ei alussa niinkään painoteta. Toisaalta myös käsitteellistä ymmärtämistä painotetaan enemmän opintojen edistyessä. (Jyväskylän ammattikorkeakoulu 2013.)

Yhteistä molemmille ammattikorkeakouluille opetussuunnitelmissa mainittujen matematiikan kurssien osalta on toisaalta peruslaskutoimitusten hallinnan tai proseduraalisen sujuvuuden korostaminen sekä tekniikan sovellusten matemaattinen käsittely. Käsitteellistä ymmärrystä painotetaan myös selvästi osaamistavoitteissa. Näin ollen matemaattisen taitavuuden osa-alueista kaksi – mukautuva päättely ja yritteliäisyys – loistavat poissaolollaan.

6.5 Opetussuunnitelmien osaamistavoitteiden vertailua

Yleisesti voidaan sanoa opetussuunnitelmien tarkastelun perusteella, että lukiossa pyritään vahvistamaan opiskelijan matemaattista itsetuntoa rohkaisemalla luovan ja ennakkoluulottoman persoonan kehitykseen. Yritteliäisyyden säie on siis selvästi matemaattisen taitavuuden osalta lukion opetustavoitteiden kohteena. Toisaalta myös muut osa-alueet esiintyvät tavoitteissa suhteellisen tasapuolisesti, joten lukion opetus tähtää kattavasti matemaattisen taitavuuden kehittymiseen, vaikka proseduraalisen sujuvuuden säie esiintyykin tavoitteissa muita vähemmän.

Korkeakouluja yhdistää affektiivisten ominaisuuksien puuttuminen opetustavoitteista. Kyse voi olla vain semantiikasta, mutta toisaalta korkeakoulutuksessa saatetaan myös luottaa opiskelijoiden sisäsyntyiseen motivaatioon ja yritteliäisyyteen, joten niiden edistämistä ei pidetä tärkeänä. Kognitiivisten ominaisuuksien osalta korkeakoulut näyttävät jakaantuvan tavoitteissaan selvästi matematiikan kurssien osaamistavoitteiden perusteella. Yliopistomatematiikassa tärkeäksi nostetaan käsitteellinen ymmärtäminen ja mukautuva päättely. Tämä painotus on luonnollinen, sillä matematiikkaa käsitellään itsenäisenä tieteenä, mikä selittää laskemisen ja sovellusten vähyyden. Teknillisessä yliopistossa matematiikkaa käsitellään melko monipuolisesti, jos opiskelee tekniikan ja luonnontieteiden tutkinto-ohjelmassa. Matematiikan opinnot TTY:llä keskittyvät kuitenkin muissa ohjelmissa laskurutiinien hallintaan eli proseduraalisen sujuvuuden säikeeseen. Ammattikorkeakoulussa osaamistavoitteet keskittyvät perusteiden hallintaan niin proseduraalisen sujuvuuden kuin käsitteellisen ymmärtämisen osalta. Soveltaminen ja yleisemmin strateginen kompetenssi on myös hyvin vahvasti esillä ammattikorkeakoulujen matematiikassa.

7 TEHTÄVIEN LUOKITTELU, SUORITUSTEN ANALYYSI JA LUOKITTELUSYSTEEMIN EDELLEENKEHITTÄMINEN

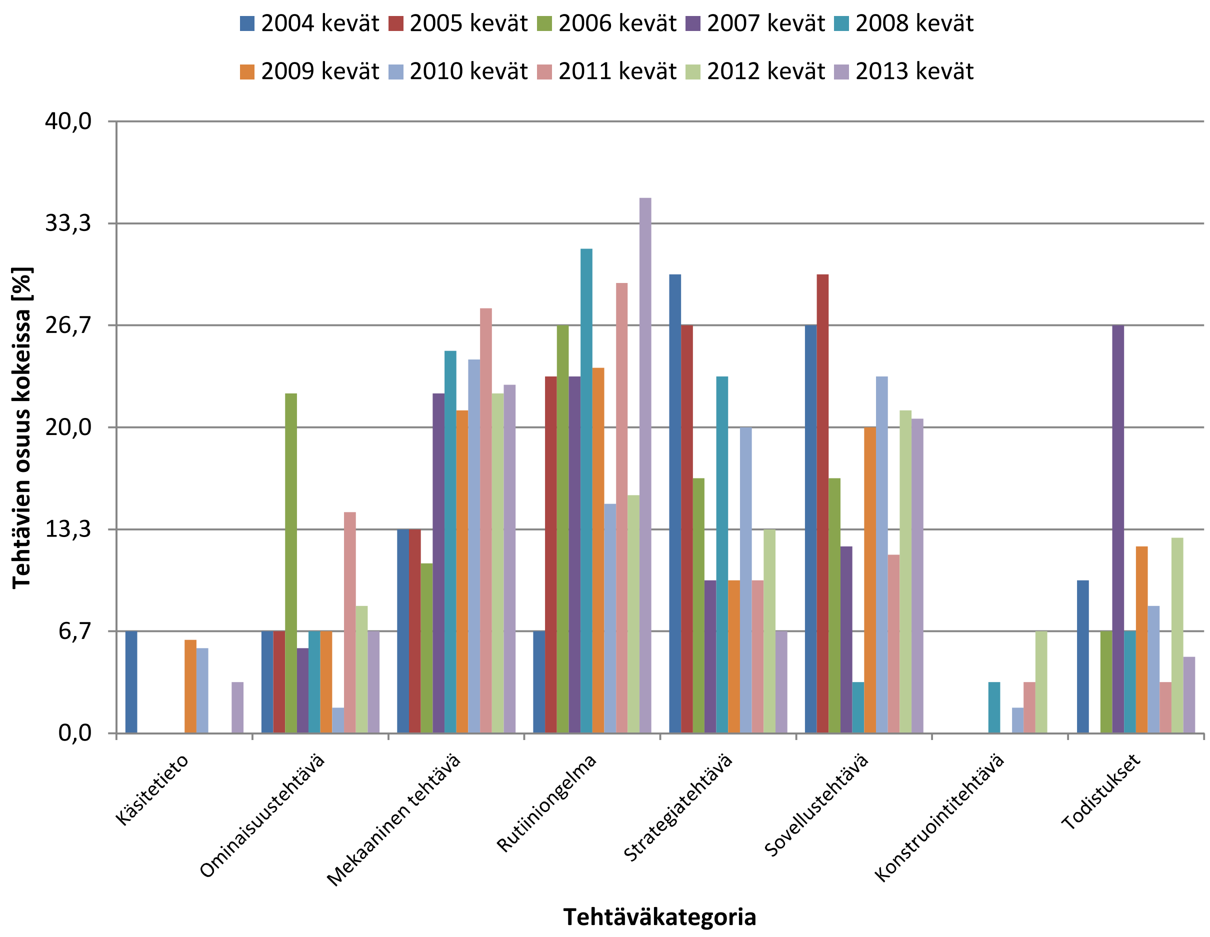
Tässä osiossa pyritään vastaamaan tutkimuksessa asetettuihin kysymyksiin, jotka on esitetty luvussa 6.1. Tutkimuskysymyksiin vastaamiseksi matemaattisen osaamisen mittaamista tarkastellaan Kilpatrickin ym. matemaattisen taitavuuden (2005) ja Wilsonin taksonomian (1971) pohjalta luodun tehtäväkategorisoinnin avulla, kategorisoinnin kuvaus on esitetty luvussa 2.3. Huomioita tehdään myös Kilpatrickin ym. malliin pohjautuen, sillä tehtäväkategorisoinnin voi nähdä tähän malliin kiinteästi liittyvänä (ks. kuva 2). Kokeiden sisällönanalyyttisen tarkastelun tuloksia eritellään ensimmäisessä osiossa tehtäväsarjojen rakenteiden osalta, minkä jälkeen toisessa osiossa kiinnitetään huomio tehtävissä menestymiseen. Kolmannessa osiossa puolestaan raportoidaan ryhmittelyanalyysin tuloksia. Viimeiseksi arvioidaan tehtäväkategorisoinnin onnistumista tehtävien luokittelusta nousseiden huomioiden perusteella.

7.1 Tehtävätyyppien tarkastelua

Seuraavat alaluvut 7.1.1–7.1.4 erittelevät tutkimuksen kohteina olleiden kokeiden rakentumista tehtäväkategorioiden avulla tarkasteltuna. Analyysin tulokset esitetään prosentuaalisina osuuksina. Liitteissä 1–4 on esitetty analyysin tulokset kappalemääräisesti. Tampereen yliopiston ja yliopistojen yhteisvalinnan matematiikan pääsykokeissa (luku 7.1.4) tehtävien määrä ei ollut sama koko tutkimusaikavälillä, joten prosentuaalinen tarkastelu on tältä osin perusteltua. Yhtenäisyyden vuoksi myös muiden kokeiden tulokset eritellään samalla tavalla kuin matematiikan pääsykokeiden osuudessa.

7.1.1 Lukion pitkän matematiikan ylioppilaskokeet

Kevään ylioppilaskirjoitukset näyttävät yleensä sisältävän eniten proseduraalista sujuvuutta vaativia tehtäviä, joihin luokitettiin mekaaniset tehtävät (21 %) ja rutiiniongelmat (25 %). Toisaalta myös strategia- (15 %) ja sovellustehtäviä (18 %) esiintyy yleisesti tehtäväsarjoissa. Käsitetietoa ja konstruointitaitoja vaatineet tehtävät olivat selvästi vähiten suosittuja kokeissa, ja yleensä niitä testattiinkin vain osana yksittäisiä tehtäviä. Tehtäväluokittelun tuloksia on havainnollistettu kuviossa 1. Ylioppilaskirjoituksissa esiintyneiden tehtävien luokittelu on esitetty tarkemmin liitteessä 1.



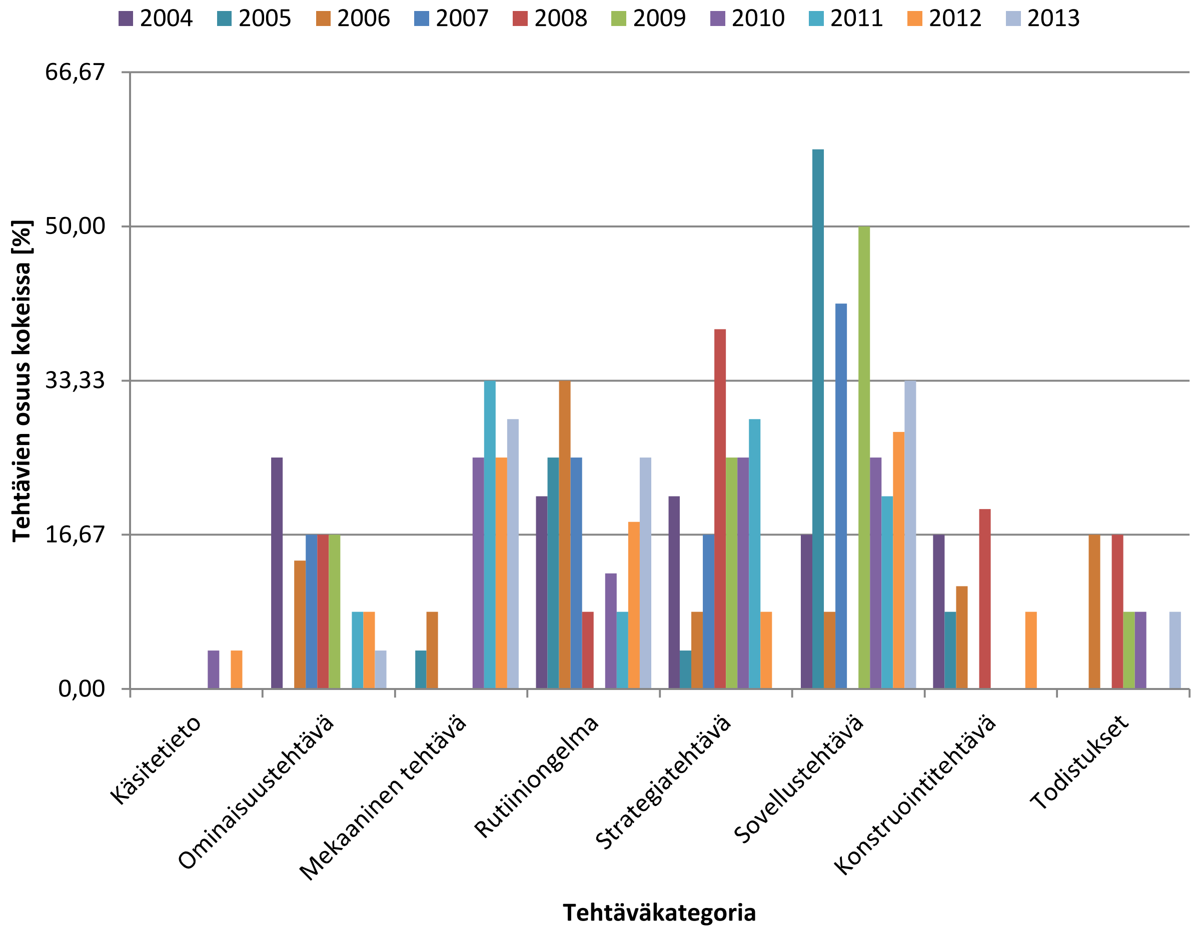
Kuvio 1. Ylioppilaskokeiden matematiikan tehtävien vuosittainen jakautuminen eri kategorioihin. Tutkimuksen aikavälillä matematiikan tehtäviä on ollut joka vuosi 15 kappaletta, joista kokelas voi valita enintään kymmenen. Pystysuora akseli on jaettu kokonaisia tehtäviä vastaaviin osiin.

Kuviosta 1 voidaan havaita, että mekaanisten tehtävien määrää on tuntuvasti kasvatettu vuosiin 2004–2006 verrattuna. Niiden määrä näyttäisi vakiintuneen noin 3–4 tehtävään. Mekaaniset tehtävät näyttävätkin olevan varmimmin esiintyvä kategoria, sillä muiden tehtävien määrät ovat vaihdelleet selvästi enemmän eri vuosina. Mekaanisten tehtävien ja rutiiniongelmien yhteismäärät ovat vaihdelleet viidestä ja puolesta lähes yhdeksään tehtävään vuotta kohden, joten kokeista on luultavasti mahdollista saada kohtuullinen tai hyvä arvosana osaamalla pääasiassa näiden kategorioiden tehtäviä. Sovellus- ja strategiatehtäviä on yhdessä selvästi korostettu ainoastaan vuonna 2005, jolloin niitä oli kahdeksan ja puolen tehtävän edestä. Ominaisuus- ja todistustehtäviä esiintyy vuosittain, mutta niiden määrät ovat tyypillisesti melko vähäisiä. Vuotta 2005 lukuun ottamatta ne ovat kuitenkin olleet aina molemmat edustettuna, muutamana vuonna runsaastikin. Todistustehtäviä oli erityisen paljon vuonna 2007, jolloin niitä mahtui 15 tehtävän joukkoon peräti neljä kappaletta.

Ylioppilaskokeissa ei ole arvioitu vuosittain käsitetietoa, konstruointia tai todistuksia. Näin ollen voidaan todeta, että ylioppilaskokeet ovat mitanneet matemaattista osaamista vain kohtuullisen laaja-alaisesti eri vuosina, mikäli asiaa tarkastellaan tässä tutkimuksessa tehtyjen määrittelyjen perusteella. Se, että kokeissa on mahdollista valita kymmenen tehtävää viidestätoista ja täten sivuuttaa mahdollisesti vaikeita tehtävätyyppejä, pakottaa ylioppilaskokelaat jossain määrin myös arvioimaan omaa osaamistaan. Omien kykyjen tuntemista voidaan pitää epäilemättä eräänlaisena taitona, josta on hyötyä muun muassa oppimisvalmiutena. Tehtävien vastausprosentteja ja niistä saatuja pistejakaumia tutkimalla voidaan tehdä päätelmiä yleisesti vaikeaksi koetuista tehtävätyypeistä ja omien taitojen arvioinnista eri tehtävätyyppien suhteen. Tähän tarkasteluun palataan jäljempänä.

7.1.2 Dia-yhteisvalinta 2004–2013

Dia-yhteisvalinnan insinöörikokeen matematiikan osiossa on ollut vuosina 2004–2013 kuusi tehtävää jokaisella kerralla. Analyysin perusteella (liite 2) kokeissa esiintyi keskimäärin eniten sovellustehtäviä (28 %), niiden määrät ovat kuitenkin vaihdelleet suuresti eri vuosina. Rutiiniongelmien, toiseksi yleisimmän tehtävätyypin (18 %), hajonta on sen sijaan selvästi pienempi. Strategiatehtävät (18 %) ovat olleet rutiiniongelmien kanssa yhtä yleinen tehtävätyyppi. Nämä kolme kategoriaa edustavat noin kahta kolmasosaa kaikista tehtävistä ja muita kategorioita esiintyykin selvästi vähemmän.

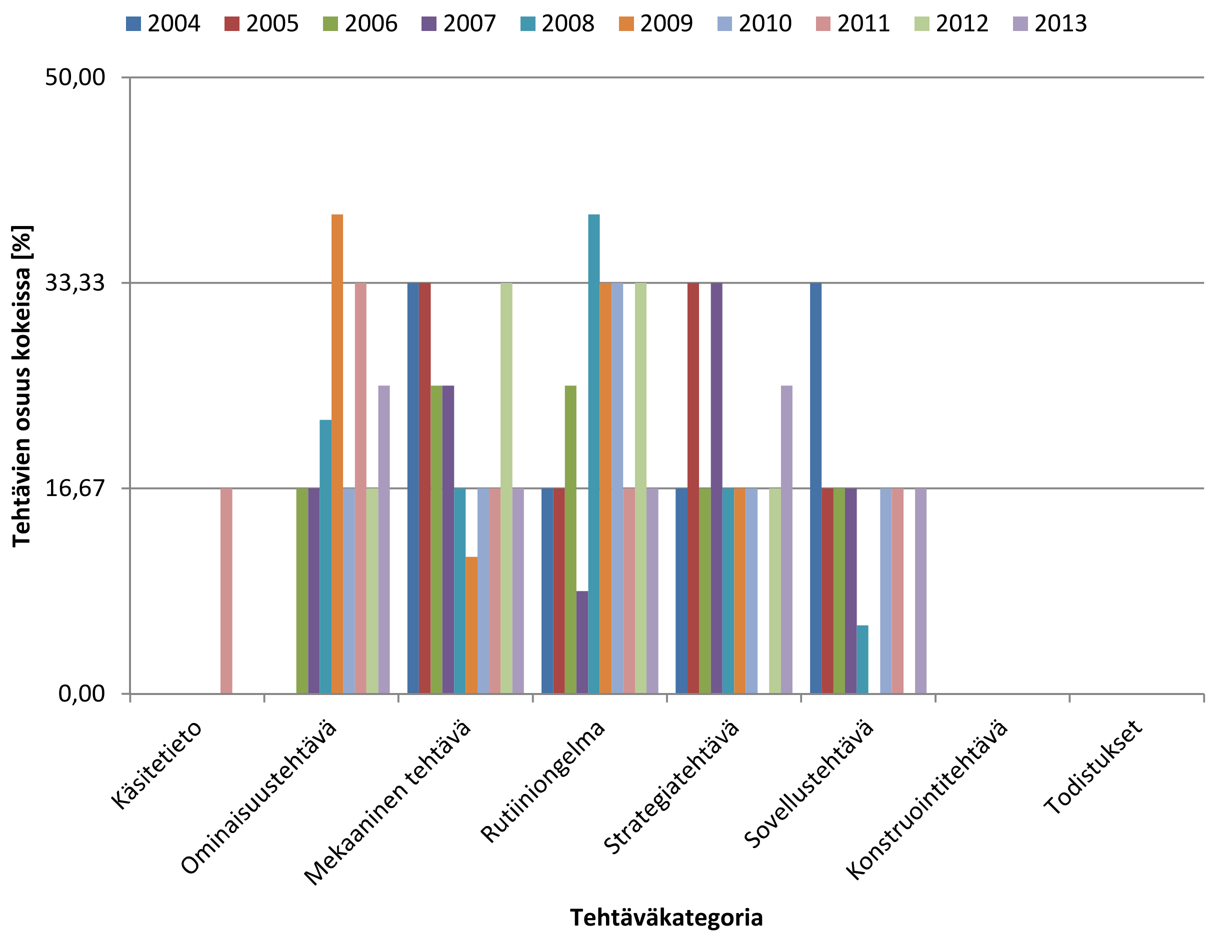


Kuvio 2. Dia-yhteisvalinnan insinöörikokeen matematiikan osiossa esiintyneet tehtäväkategoriat eri vuosina. Tarkemmat tehtävämäärät on koottu liitteeseen 2. Pystysuora akseli on jaettu kokonaisia tehtäviä vastaaviin osiin.

Dia-yhteisvalinnan kokeita tarkastellessa huomion kiinnitti se, että mekaaniset tehtävät näyttävät tulleen niihin pysyvästi 2010-luvulla. Tämän uudistuksen myötä konstruointitehtävien määrä on vähentynyt, sillä ne ovat puuttuneet lähes kaikista kokeista viime vuosina. Kognitiivisesti vähemmän haastavien mekaanisten tehtävien vastapainoksi kokeissa on alkanut esiintymään todistustehtäviä vuodesta 2006 lähtien, joten luultavasti taitopainotusten muutokset ovat edistäneet kokeiden matemaattista laaja-alaisuutta ja täten niiden erottelevuus on parantunut. Insinöörikokeen luokittelutuloksia on kuvattu kuviossa 2. Liitteessä 2 on esitetty analyysitulokset myös vuosilta 2001–2003, mutta ne päätettiin jättää lopullisen tarkastelun ulkopuolelle, jotta tutkimusaikaväli olisi yhtenäinen muiden analysoitujen kokeiden kanssa. Tarkastelun ulkopuolelle jätetyt kokeet olivat hyvin samantyyppisiä seuraavien vuosien kokeiden kanssa.

7.1.3 Ammattikorkeakoulujen tekniikan ja liikenteen ala

Ammattikorkeakoulujen pääsykokeissa oli tutkimusaikavälillä 2004–2013 vuosittain kuusi matematiikan tehtävää. Rutiiniongelmat (24 %) ja mekaaniset tehtävät (23 %) hallitsevat vain hieman tehtäväsarjoissa, koska strategia- (19 %), ominaisuus- (19 %) ja sovellustehtävät (14 %) ovat myös usein edustettuna.

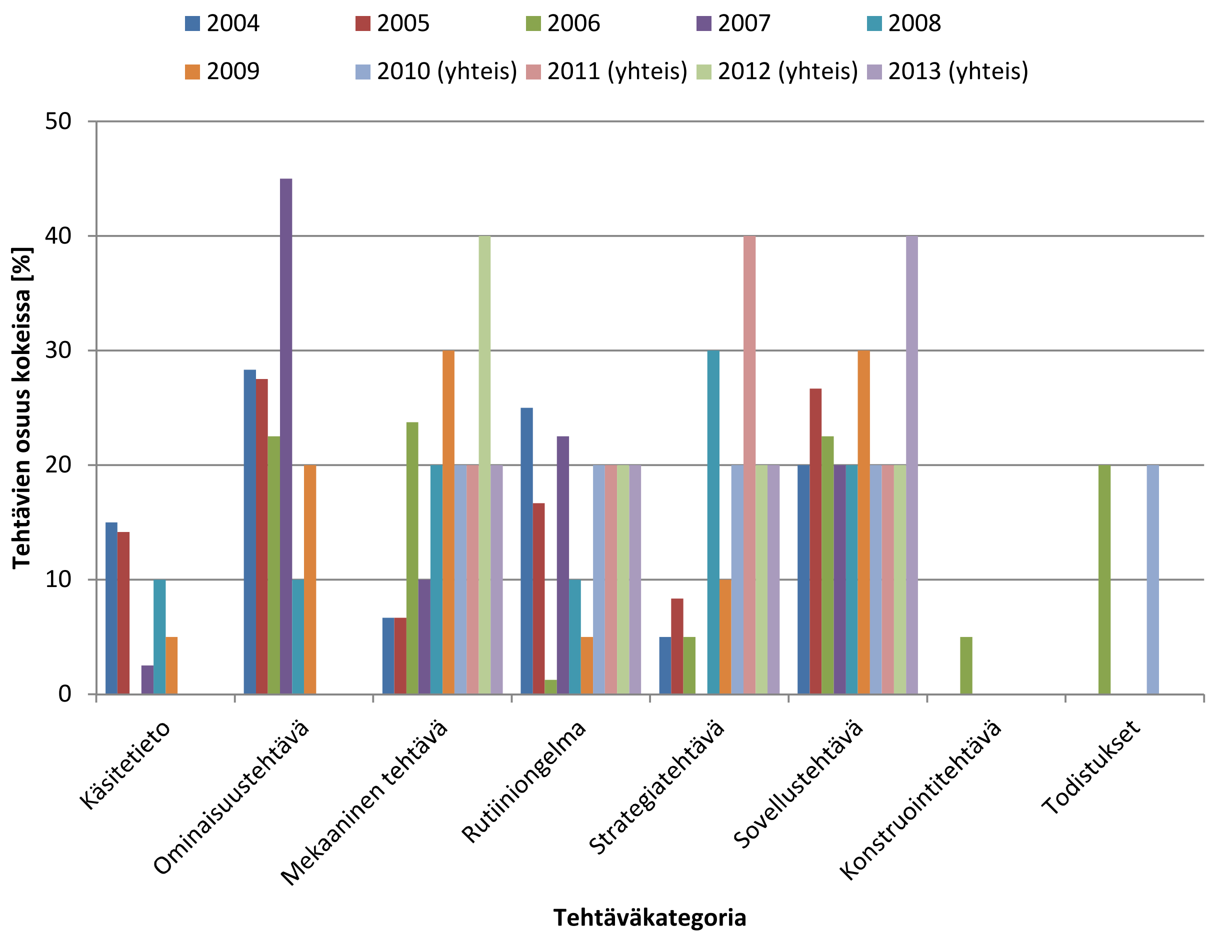


Kuvio 3. Ammattikorkeakoulujen tekniikan ja liikenteen alan matematiikan pääsykokeissa esiintyneet tehtävätyypit. Pystysuora akseli on jaettu kokonaisia tehtäviä vastaaviin osiin.

Ammattikorkeakoulujen pääsykokeet oli selvästi rakennettu monien tehtävien osalta hyvin samantyyppisiksi vuodesta toiseen, vaikka kuviosta 3 ja liitteessä 3 esitetystä taulukosta voidaan havaita, että sovellus- ja strategiatehtävien lukumäärä onkin laskenut tutkimusaikavälillä. Pääsykokeissa arvioidaan loogista päättelyä, mikä ehkä vaikutti ominaisuustehtävien määrään, koska monet näistä tehtävistä testaavat käsitystä matemaattisten objektien ominaisuuksia. Loogista päättelyä saatettiin arvioida esimerkiksi lukujonolla, jonka sääntö tuli päätellä, joten näitä tehtäviä ei ollut mielekästä sulkea tarkastelun ulkopuolellekaan. Mekaanisten tehtävien ja rutiiniongelmien suurempi osuus selittyy sillä, että kokeet ovat sisältäneet niitä jokaisena tarkasteltavana vuonna. Käsitetietoa, konstruointia ja todistamista vaatineet tehtävät puolestaan loistavat poissaolollaan. Tutkimusaikavälillä ainoastaan vuonna 2011 esiintyi yksi käsitetietotehtävä.

7.1.4 Tampereen yliopiston ja yliopistojen yhteisvalinnan matematiikan pääsykokeet

Tampereen yliopiston matematiikan ja tilastotieteen pääsykokeet siirtyivät vuonna 2010 yliopistojen yhteisvalinnan piiriin. Kokeet on tästä lähin järjestetty yhteistyössä Helsingin, Itä-Suomen, Jyväskylän, Oulun, Tampereen ja Turun yliopistojen kanssa. Uudistuksen myötä tehtävien määrä väheni kymmenestä viiteen tehtävään. Jo ennen uudistusta, vuosien 2004 ja 2005 jälkeen, pääsykokeissa tapahtui selkeitä muutoksia. Vuosina 2004 ja 2005 pääsykokeiden tehtävät perustuivat vahvasti tilastojen ja todennäköisyyksien aiheisiin kun taas vuodesta 2006 lähtien aihealueet ovat selkeästi monipuolistuneet. Tämä saattoi osaltaan vaikuttaa tehtävien luokitteluun, vaikka aihealueella ei sinänsä ole suoraa vaikutusta luokitukseen. Tehtäväluokittelun tulokset on esitetty kuviossa 4.



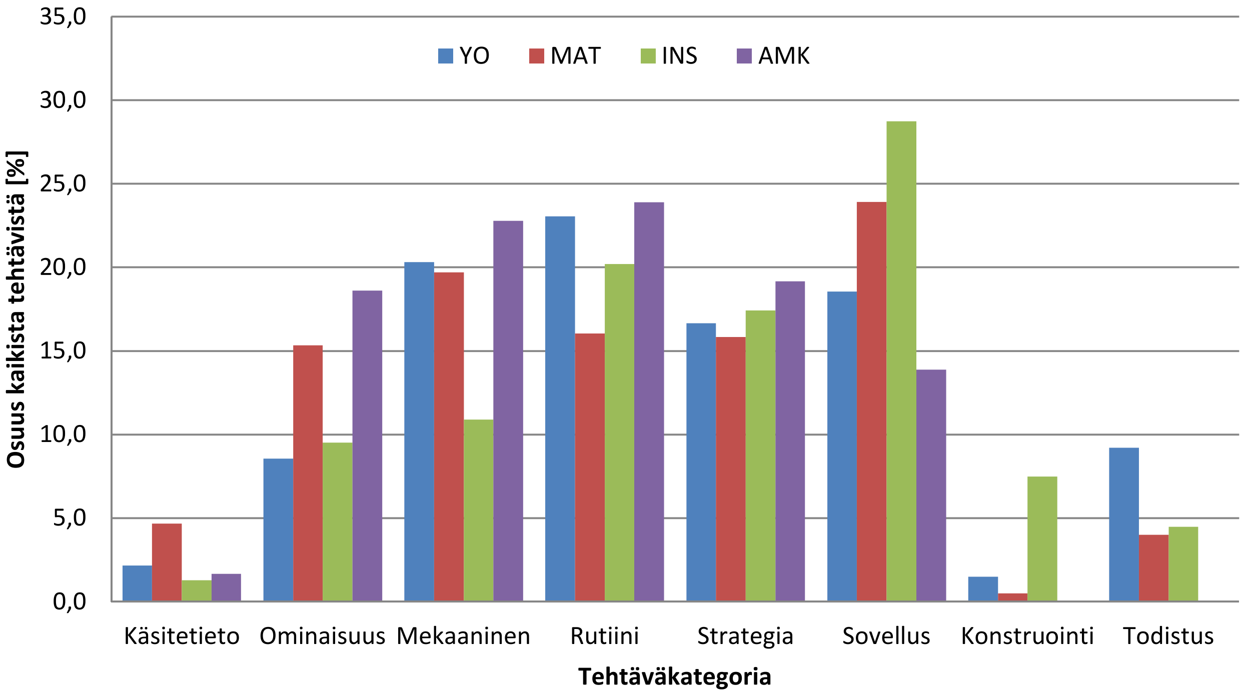
Kuvio 4. Matematiikan ja tilastotieteen valintakokeissa esiintyneet tehtävätyypit vuosina 2004–2013. Vuosina 2004–2009 yksi tehtävä vastasi 10 prosenttia ja vuosina 2010–2013 20 prosenttia kokeesta.

Matematiikan ja tilastotieteen pääsykokeissa sovellustehtävät (25 %) ovat selvästi yleisin tehtäväkategoria, mutta myös muita kategorioita on esiintynyt yleisesti. Tutkimusaikavälillä neljä kategoriaa on ollut suurin piirtein yhtä paljon edustettuna: mekaaniset tehtävät (17 %), ominaisuustehtävät (16 %), strategiatehtävät (16 %) ja rutiiniongelmat (15 %). Todistukset, konstruoinnit ja käsitetietotehtävät ovat selkeästi olleet tehtäväkategorioita, joita ei kokeissa mitata. Matematiikan pääsykokeissa on ollut esimerkiksi todistustehtäviä ainoastaan vuosina 2006 ja 2010.

Kahteen kertaan selkeitä ulkoisia muutoksia kokeneiden matematiikan ja tilastotieteen pääsykokeiden vuosittainen tarkastelu osoittaa, että tehtäväkategorioiden painotuksissa on tapahtunut selviä muutoksia. Kuvion 4 perusteella on ilmeistä, että käsitetieto- ja ominaisuustehtävät ovat jääneet kokonaan pois 2010-luvulla, kun on siirrytty yliopistojen yhteistyössä järjestämiin kokeisiin. Mekaanisten tehtävien lisääntyminen näyttäisi tapahtuneen jo ennen valintakoeyhteistyötä ja muutokset liittyvät tässä tarkastelussa pääasiassa vuosien 2004 ja 2005 poikkeuksellisiin kokeisiin. Rutiiniongelmien määrä näyttäisi vakiintuneen 2010-luvulla 20 prosenttiin eli käytännössä yhteen tehtävään viidestä. Aiempina vuosina tässä kategoriassa on ollut vaihtelua, kun rutiinitehtävät ovat olleet joinakin vuosina lähes tyystin unohdettuja. Strategiatehtävien osuus näyttäisi selvästi lisääntyneen ja niitäkin on ollut viimeaikaisissa pääsykokeissa tyypillisesti yksi viiden tehtävän joukossa. Valintakoeyhteistyö on johtanut vuosittain tarkasteluna yhtenäisempään testaukseen, sillä kokeet ovat olleet 2010-luvulla selvästi keskenään samankaltaisia. Näyttää siltä, että sovellustehtäväkategoria on ainoa, joka ei ole kokenut merkittäviä muutoksia koko tarkastelujakson aikana.

7.1.5 Ylioppilaskokeiden tehtävätyyppien vertailu korkeakoulujen pääsykokeisiin

Yleisesti ottaen voidaan todeta, että ylioppilaskokeissa ja korkeakoulujen pääsykokeissa voidaan havaita selviä painotuksia tietyn tyyppistä ajattelua vaativien tehtävien suhteen (kysymys 1.1). Painotusten tarkastelua tehtiin jokaisen oppilaitoksen kohdalla erikseen luvuissa 7.1–7.4. Tässä luvussa kootaan ja suhteutetaan näitä huomioita. Kaikille kokeille on yhteistä, että proseduraaliseen sujuvuuteen liittyviä tehtäviä on lisätty viime vuosina. Koululaitosten välisistä eroista saadaan käsitys kuvion 5 avulla, jossa on keskiarvoistettu vuosien 2004–2013 kokeissa esiintyneiden tehtäväkategorioiden osuudet.



Kuvio 5. Pääsykokeiden ja ylioppilaskokeiden tehtävätyyppien osuus kokeissa keskimäärin vuosina 2004–2013. Lyhenteiden merkitykset: YO = kevään ylioppilaskokeet, MAT = matematiikan ja tilastotieteen pääsykokeet, INS = Dia-yhteisvalinnan insinöörikokeen matematiikan osuus, AMK = ammattikorkeakoulujen tekniikan ja liikenteen alan pääsykokeen matemaattinen osuus.

Kuvion 5 perusteella voidaan tehdä päätelmiä pääsykokeiden ja ylioppilaskokeiden painotusten keskinäisistä eroista. Ylioppilaskokeiden osalta on mielenkiintoista tarkastella miten hyvin kokeet vastaavat korkeakoulujen pääsykoevaatimuksiin (tutkimuskysymys 1.2). Näyttää siltä, että ylioppilaskokeet onnistuvat monissa tehtäväkategorioiden osuuksissa asettumaan korkeakoulujen välimaastoon, mikä olisi luultavasti tavoittelemisen arvoista, jotta jatko-opintoihin opiskelu olisi mahdollisimman tasapuolista ja laaja-alaista. Kuvan 5 perusteella ominaisuustietoa koskevien tehtävien määrä on kuitenkin aavistuksen liian pieni edellä mainitun tavoitteen toteutumisen kannalta, sillä kaikissa pääsykokeissa näiden tehtävien keskimääräinen osuus on ollut suurempi. Keskimäärin tarkasteltujen korkeakoulujen pääsykokeissa esiintyy noin 14,5 % ominaisuustehtäviä, mikä on lähes kuusi prosenttiyksikköä enemmän kuin ylioppilaskokeissa. Ero tarkoittaa sitä, että ylioppilaskokeisiin tulisi sisällyttää keskimäärin melkein yksi tehtävä enemmän ominaisuuskategorian tehtäviä, jotta ylioppilaskokeet vastaisivat paremmin korkeakoulujen pääsykokeita. Ylioppilaskokeisiin sisältyvä tehtävien valikointi kuitenkin tekee ongelmalliseksi niiden suoran vertaamisen pääsykokeiden rakenteeseen.

Selvin ero pääsykokeisiin syntyy todistustehtävien osuuksissa. Ylioppilaskokeiden tehtävissä on nimittäin noin 9 % todistustehtäviä kun taas matematiikan ja tilastotieteen sekä Dia-yhteisvalinnan pääsykokeissa vastaava osuus on keskimäärin noin 4 % ja ammattikorkeakoulussa todistustehtävät puuttuvat kokonaan. Ylioppilaskokeiden runsasta todistustehtävien osuutta voidaan luultavasti perustella mahdollisuudella valikoida tehtäviä, sillä käytännössä minään tutkimusaikavälin vuonna kokelaan ei ole ollut pakko vastata todistamista edellyttäneeseen tehtävään, jos muihin tehtäväkategorioihin kuuluneet tehtävät ovat tuntuneet helpommilta. Todistustehtävien vastausprosentit ovatkin keskimäärin pieniä: kaikkien todistustehtävien keskimääräinen vastausprosentti oli tutkimusaikavälillä ainoastaan 28,7 %. Todistustehtävät ovat tyypillisesti sijainneet ylioppilaskokeiden viimeisten tehtävien joukossa, mikä viestii siitä, että niiden hallintaa pidetään syventävien kurssien asiana tai harrastuneisuuden osoituksena.

7.1.6 Tehtävätyypit opetussuunnitelmien tavoitteiden heijastajina

Luvussa 4 tarkasteltiin tutkimuskohteena olevien oppilaitosten opetussuunnitelmia ja niissä esiintyviä matemaattisen osaamisen tavoitteita. Ylioppilaskokeiden ja korkeakoulujen pääsykokeiden analyysi paljasti, että ne eivät yleensä toista opetussuunnitelmien antamaa kuvaa opetuksen painotuksista, kun tarkastellaan matemaattisen osaamisen piirteitä.

Lukion ja korkeakoulujen opetussuunnitelmia selkeästi erottanutta yritteliäisyyden säiettä ei voida arvioida tämän aineiston perusteella, joten siltä osin ei voida sanoa mitään. Kognitiivisiin matemaattisen osaamisen alueisiin sen sijaan kokeiden tehtävätyypit tarjoavat tarkastelumahdollisuuden. Ammattikorkeakoulujen pääsykoe heijasteli ainoana opetussuunnitelman tavoitteita. Lukion opetussuunnitelma ei vastaa painotuksiltaan ylioppilaskokeita, sillä proseduraaliseen sujuvuuteen liittyviä tehtäviä on ylioppilaskokeissa runsaasti, mutta opetussuunnitelmissa tämä säie saa vähiten huomiota. Myös käsitteelliseen ymmärtämiseen ja mukautuvaan päättelyyn liittyvien tehtävien määrä ylioppilaskokeissa poikkeaa siitä, minkä verran lukion opetussuunnitelma niitä painottaa. Painotus näiden säikeiden osalta on opetussuunnitelmassa selkeästi isompi kuin ylioppilaskokeissa.

Dia-yhteisvalinnan ja TTY:n opetussuunnitelmien välillä on selkeitä eroja matemaattisen taitavuuden painotuksissa. Pääsykokeet vastaavat paremmin "matematiikan"-kursseja kuin "insinöörimatematiikan"-kursseja opiskelevien tutkinto-ohjelmien opetusta. Kokeiden uudistuminen on kuitenkin parantanut pääsykokeiden ja opetussuunnitelmien vastaavuutta. Tämä käy ilmi lisääntyneestä proseduraalisen sujuvuuden testaamisesta, sillä opetussuunnitelmassa tämä matemaattisen taitavuuden säie saa paljon huomiota. Strateginen kompetenssi on kuitenkin selkeästi yliedustettuna pääsykokeissa, jos sitä verrataan opetussuunnitelmiin. Matematiikan näkeminen työkaluna on opetussuunnitelmien perusteella TTY:n opetuksessa keskeistä, joten proseduraalisen sujuvuuden ja strategisen kompetenssin korostaminen on pääsykokeissa kuitenkin perusteltua.

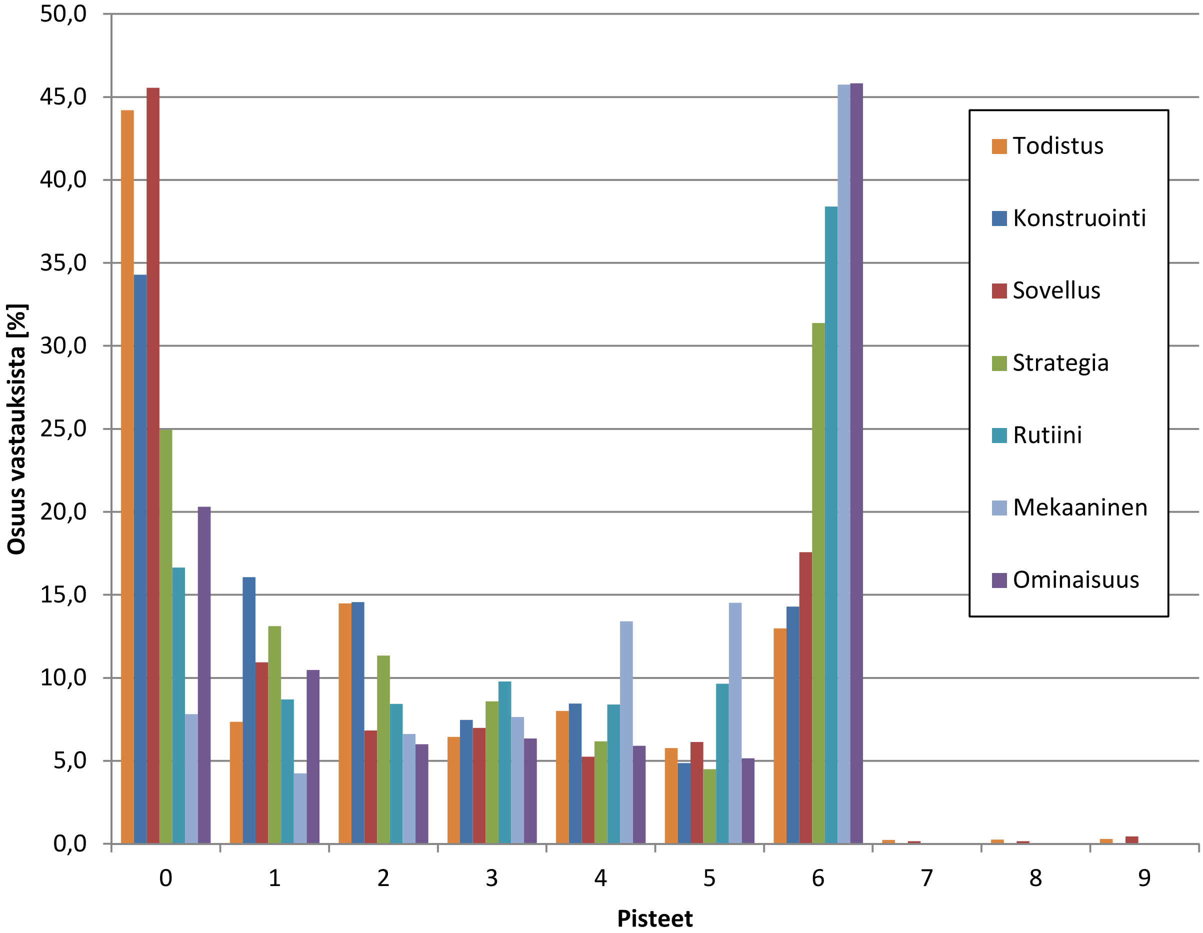
Matematiikan ja tilastotieteen pääsykokeet poikkeavat selvästi opetussuunnitelman hengestä ja ero on todennäköisesti kasvanut uudistusten myötä. Käsitteellisen ymmärtämisen testaaminen on vähentynyt, vaikka tämä säie on selvästi esillä opetussuunnitelmissa. Proseduraalinen sujuvuus on sen sijaan hyvin edustettuna niin opetuksen alkuvaiheissa kuin pääsykokeissa. Mukautuvaan päättelyyn liittyviä tehtäviä on matematiikan pääsykokeissa vähän verrattuna siihen, että yliopisto-opinnot painottuvat nimenomaan tälle alueelle. Strategisen kompetenssin korostaminen pääsykokeissa saattaa tosin olla perusteltua nimenomaan mukautuvaan päättelyyn liittyvien valmiuksien kannalta.

7.2 Matemaattinen osaaminen koetulosten perusteella

7.2.1 Matemaattinen osaaminen ylioppilaskokeissa

Tallila (2013, 95–122) on esittänyt pro gradu -työnsä liitteissä vuosien 2004–2012 keväiden ylioppilaskokeiden tehtäväkohtaiset pistetaulukot. Pistetaulukot on alun perin koonnut ylioppilaslautakunnan entinen puheenjohtaja Aatos Lahtinen. Näiden taulukoiden avulla voidaan arvioida yleisellä tasolla lukion pitkän matematiikan suorittaneiden matemaattista taitotasoa. Tarkastelussa ei erotella pakollisen ja ylimääräisen kokeen suorittaneita, koska tarkoitus on ainoastaan saada kokonaiskuva matematiikan osaamisen tasosta. On todennäköistä, että joitakin eroja olisi syntynyt näiden kahden ryhmän välille, mutta kuten Tallila (2013, 77) toteaa tutkimuksessaan, ylimääräisenä ja pakollisena kirjoittavien ero on yllättävän pieni. Pakollisena kirjoittavat menestyvät tyypillisesti tehtävissä vain hieman paremmin.

Tarkasteltaessa kokelaiden matemaattista osaamista eri tehtäväkategorioiden suhteen, havaitaan, että kognitiivisesti kompleksisemmista tehtävistä saadaan yleensä vähemmän täysiä pisteitä (Kuvio 6). Täysien pisteiden osuudet noudattavat teoreettisten mallien perusteella tehtyä luokittelua, sillä tehtäväkategorioiden järjestys on sama. Eri tehtäväkategorioissa saavutetut täydet pisteet eivät kuitenkaan noudata lineaarisuutta kognitiivisen kompleksisuuden suhteen kuvion 6 pohjana olevan kategorisoinnin tapauksessa. Toinen havainto, joka voidaan tehdä kuviosta 6, koskee osaamisen ääripäitä. Ominaisuus- ja sovellustehtävien osaaminen on muihin tehtäväkategorioihin nähden selvästi polarisoitunut: niistä saadaan paljon nollia pisteitä täysien pisteiden osuuteen nähden. Toisia tehtäväkategorioita vasten tarkasteltuna nimittäin näissä kahdessa tulisi olla merkittävästi vähemmän nollaan pisteeseen jääneitä vastauksia, jotta kuvio 6 olisi symmetrinen. Luonnollisesti voidaan myös ajatella, että kuuden pisteen vastauksia on suhteellisesti ylimäärin. Miksi siis ominaisuus- ja sovelluskategoriat poikkeavat muista?

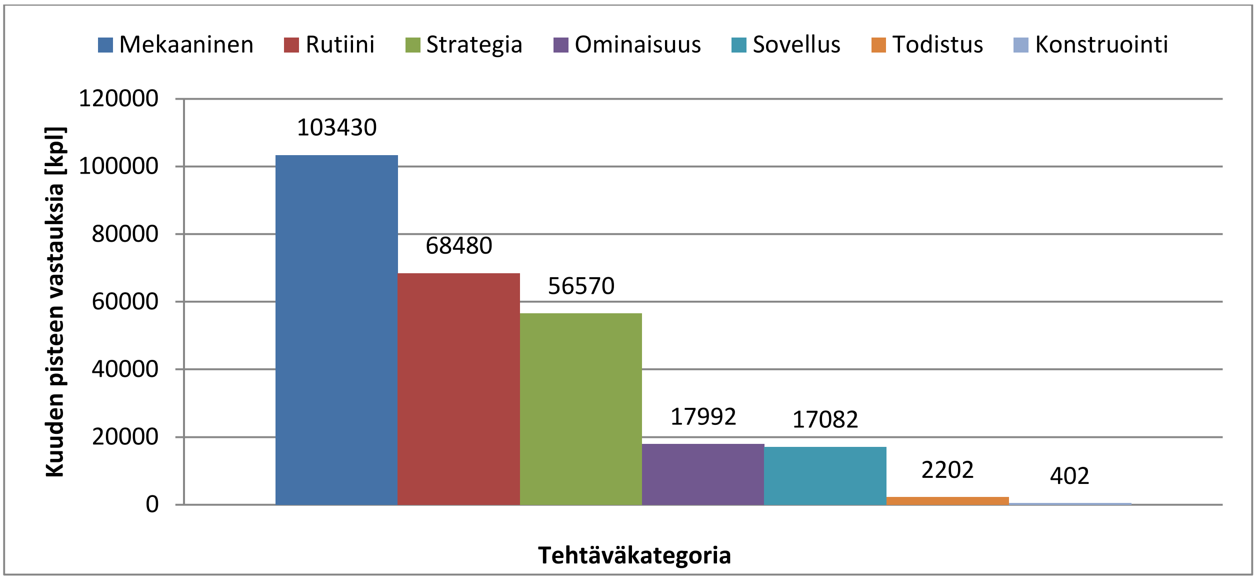


Kuvio 6. Ylioppilaskokeiden eri tehtäväkategorioissa saavutetut pisteet vuosina 2004–2012.

Kuvion 6 tarkastelussa tulee huomioida, että vastausosuudet kertovat suoraan osaamisesta ainoastaan niiden kokelaiden osalta, jotka kyseisiin tehtäviin ovat vastanneet. Yleisestä osaamisen tasosta voitaisiin tehdä varmempia argumentteja, jos ylioppilaskokeissa ei olisi valinnan mahdollisuutta tehtävien suhteen. On kuitenkin oletettavaa, että kokelas jättää harvoin vastaamatta tehtävään josta saisi täydet pisteet. Näin ollen kuuden pisteen vastausten lukumäärä on otettava huomioon tarkastelussa. Kuvion 6 tueksi on myös mielekästä tarkastella tehtäväkategorioiden keskimääräisiä vastausprosentteja. Näin voidaan päätellä jotakin tehtäväkategorioiden osaamisesta. Edellä mainitut tiedot löytyvät taulukosta 1 ja kuviosta 7.

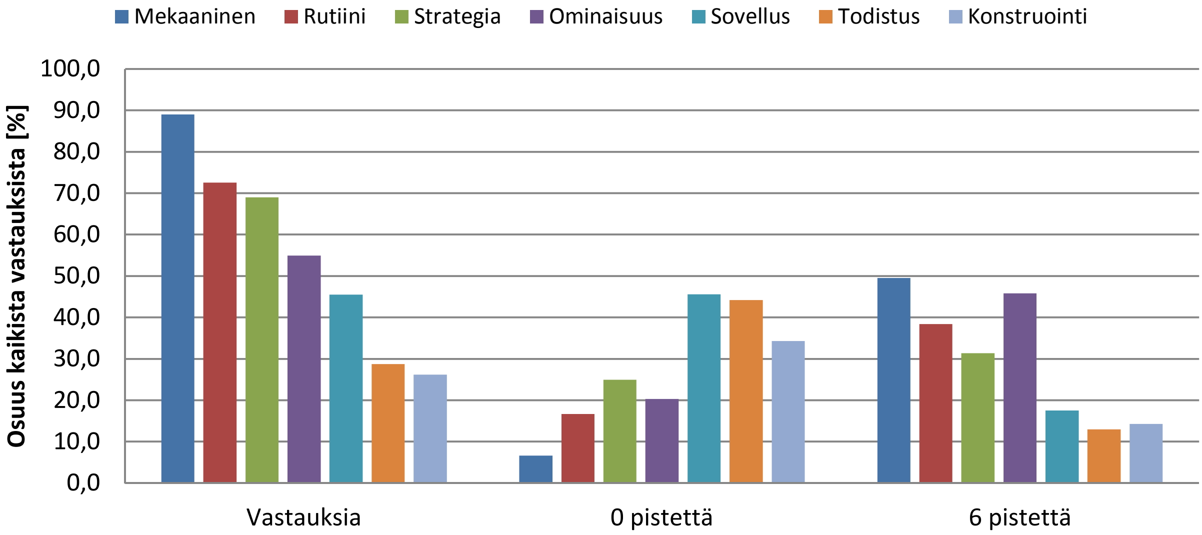
Taulukko 1. Ylioppilaskokeiden vastausprosentit tehtäväkategorioittain vuosina 2004–2012.

Pisteet	Ominai-suus	Mekaani-nen	Rutii-ni	Strate-gia	Sovel-lus	Konst-ruointi	Todis-tus
Vastaus-%	55,0	89,1	72,6	69,0	45,5	26,2	28,7



Kuvio 7. Kuuden pisteen vastausten lukumäärä tehtäväkategorioittain vuosina 2004–2012. Kategoriat eivät ole keskenään vertailukelpoisia, koska niihin liittyviä tehtäviä on ollut eri määrä.

Taulukosta 1 havaitaan, että ylioppilaskokeiden vastausprosentit noudattelevat pääasiassa tehtäväkategorioiden oletettua kognitiivista kompleksisuutta. Ainoa selkeä poikkeus on ominaisuustehtävien vastausprosentti. Sen perusteella ominaisuustehtävien vaikeustason voitaisiin arvioida sijoittuvan strategia- ja sovellustehtävien väliin. Kokeita analysoitaessa huomasikin, että ominaisuustehtävät sijoittuvat tyypillisesti kokeen puoliväliin tai tämän jälkeen. Tehtäväkategorioiden ja tehtävänumeroiden välillä oli selvästi yhteys: taulukon 1 vastausprosenttien suuruusjärjestys noudattelee tyypillistä tehtävien sijoittelua koesarjaan. Mekaaniset tehtävät siis yleensä sijoitetaan ensimmäisiksi ja sovellus-, konstruointi- ja todistustehtävät painottuvat tyypillisesti viimeisten tehtävien joukkoon. Poikkeuksia toki on, etenkin kokeen viimeisten tehtävien osalta, sillä muun muassa mekaanisia tehtäviä sijoitettiin myös kokeiden loppupuolelle. Ylioppilaskokeissa viimeisten tehtävien joukossa ylipäänsä esiintyi kaikkien kategorioiden tehtäviä.



Kuvio 8. Vastausprosenttien, nollien pisteiden ja kuuden pisteen osuuksien vertailua. Pistemäärien osuuksia on verrattu kaikkiin kyseiseen tehtäväkategoriaan vastanneisiin.

Kuviossa 8 on esitetty taulukon 1 vastausprosentit suuruusjärjestyksessä tehtäväkategorioittain ja havainnollistettu yhteyttä arvosteluasteikon ääripäihin (9 pisteen tehtävien osuuksilla ei ole käytännössä merkitystä tässä tarkastelussa). Edelleen voidaan havaita, että ominaisuustehtävien keskimääräinen vastausprosentti asettuu suuruudessaan strategia- ja sovellustehtävien väliin, kuten todettiin jo taulukon 1 yhteydessä. Kuviosta 8 käy nyt selvemmin ilmi ominaisuuskategorian erikoisuus kuin aiemmista esityksistä. Jos oletetaan, että vastausprosenttien ja tehtävien vaikeuden (siten ollen saatujen pisteiden) välillä on jokin tietty korrelaatio, niin ominaisuustehtävät poikkeavat selvästi tässä muista kategorioista.

Ominaisuuskategorian poikkeavuutta voidaan yrittää pohtia ja arvailla, mutta tämän tutkimuksen perusteella ei ole mahdollista esittää varmaa selitystä edellä esitetylle ilmiölle. Yksi mahdollinen selitys voisi olla, että ominaisuustehtävät poikkeavat itsearvioinnin kannalta muista tehtävistä. On kenties helpompaa arvioida omaa osaamistaan ominaisuustehtävän kohdalla ja jättää näin ollen vastaamatta näihin tehtäviin, jos ei ole varma vastauksesta. Tämä on luonnollista kun muistetaan, että ominaisuustehtävät liittyvät käsitteellisen ymmärtämisen säikeeseen Kilpatrickin ym. mallissa. On mahdollista, että käsitteellisen ymmärryksen itsearviointi on helpompaa kuin muihin säikeisiin liittyvien taitojen.

Ominaisuuskategorian erityistä käyttäytymistä kuvioissa 6 ja 8 voidaan yrittää selittää myös tehtävien luonteella. Kuviosta 6 havaitaan, että ominaisuustehtävistä jaetaan neljää ja viittä pistettä vähemmän kuin voisi olettaa muiden kategorioiden pisteytyksiin verratessa. Näin ollen pisteytyksessä korostuu huonompien pisteiden osuus. Tämä voi olla seurausta ominaisuustehtävien ankarasta luonteesta: joko niiden osaamisessa tai arvostelussa ilmenee polarisaatiota.

7.2.2 Matemaattisen osaamisen profiili Tampereen yliopiston matematiikan ja tilastotieteen valintakokeissa verrattuna ylioppilaskokeisiin

Tampereen yliopiston opiskelijavalintajärjestelmästä (VALTSU) saatujen valintakoetilastojen analyysillä pyritään vastaamaan tutkimuskysymyksiin 2.1, 2.2, 2.3 ja 3.1. Analyysin suoritus on kuvattu luvussa 6.3. Tilastoaineistoa jouduttiin karsimaan, sillä joissakin tapauksissa pisteytyksiä ei ollut eritelty tehtäväkohtaisesti. Aineiston edustavuutta arvioitiin tarkastelemalla taulukkoa 2. Siitä huomataan, että aineistoon jäi karsimisen jälkeen suhteellisen paljon pitkässä matematiikassa arvosanoja E tai L kirjoittaneita.

Taulukko 2. Aineiston jakautuminen ylioppilaskirjoituksissa menestymisen mukaan ja aineiston frekvenssit karsimisen jälkeen. Muutos-rivillä on verrattu aineiston koon muutosta alkuperäisiin frekvensseihin. Pitkän ja lyhyen matematiikan kirjoittaneiden osuus ei ole yhteensä 100 prosenttia, koska pääsykokeisiin osallistuvista aivan kaikilla ei ole ylioppilastaustaa. Alkuperäisessä aineistossa oli 1362 tapausta.

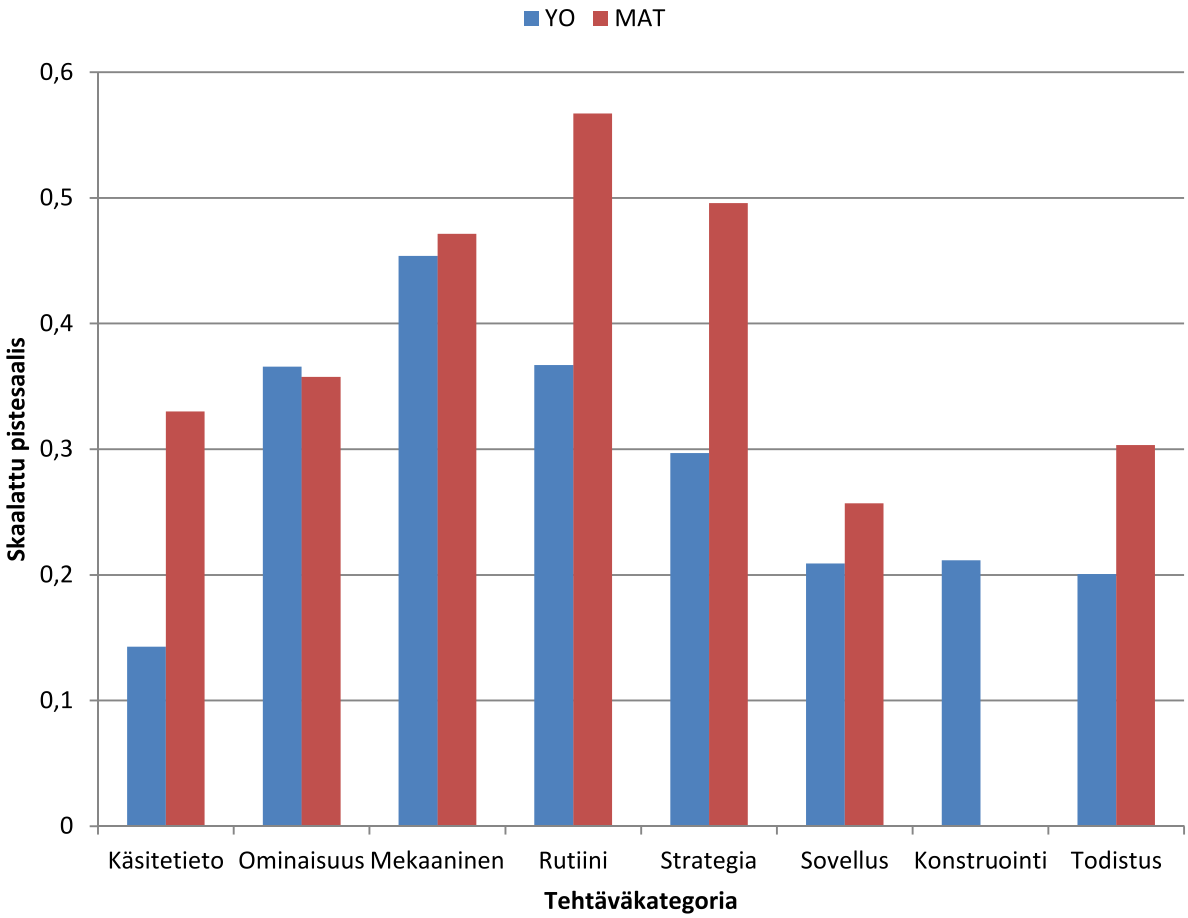
	Arvosana	I	A	B	C	M	E	L	Summa	Osuus [%]
Pitkä	Kaikki	2	34	121	235	519	102	50	1061	77,9
	Valikoidut	2	29	98	178	409	95	48	859	63,1
Muutos		0,00 %	14,71 %	19,01 %	24,26 %	21,19 %	6,86 %	4,00 %		
Lyhyt	Kaikki	0	2	9	21	64	73	57	226	16,6
	Valikoidut	0	2	9	17	59	63	51	201	14,8
Muutos		0,00 %	0,00 %	0,00 %	19,05 %	7,81 %	13,70 %	10,53 %		

Valintakoevastauksien pisteytykset analysoitiin ensin tehtäväkategorioiden keskiarvojen ja niiden hajonnan suhteen. Tulokset on koottu taulukkoon 4.

Taulukko 3. Matematiikan ja tilastotieteen pääsykoetilastojen analyysiin kelpuutettiin 1120 tapausta 1362:sta. Kaikkina tutkimusaikavälin vuosina ei kuitenkaan esiintynyt kaikkia tehtäväkategorioita, joten tutkimusaineistossa oli joidenkin kategorioiden osalta paljonkin puuttuvia tapauksia. Tehtävien pisteet on skaalattu välille 0–1. Konstruointitehtävät on jouduttu jättämään tarkastelun ulkopuolelle aineiston vähyyden vuoksi.

		Käsitetieto	Ominaisuus	Mekaaninen	Rutiini	Strategia	Sovellus	Todistus
N	Tapaukset	153	750	838	620	657	962	199
	Hylätty	967	370	282	500	463	158	921
Keskiarvo		0,330	0,358	0,471	0,567	0,496	0,257	0,303
Keskihajonta		0,425	0,345	0,338	0,364	0,371	0,301	0,339

Valintakokeissa menestymistä voidaan tarkastella vertaamalla eri tehtäväkategorioiden pisteytyksiä ylioppilaskokeisiin. Tällöin saadaan kuva valintakokeissa esiintyneiden tehtävien vaikeustasosta tehtäväkategorioittain. Toisaalta vertailu saattaa kertoa myös hakijoiden valikoituneisuudesta matemaattisen osaamisen suhteen. Kuviossa 9 on esitetty ylioppilaskokeiden ja matematiikan ja tilastotieteen valintakokeiden keskimääräinen pisteytys tehtäväkategorioittain.



Kuvio 9. Ylioppilaskokeen (kevääť 2004–2012) pisteytysten vertailu matematiikan ja tilastotieteen valintakokeiden (2004–2013) pisteytyksiin. Ylioppilaskokeissa ja pääsykokeissa oli molemmissa vain yksi puhtaasti käsitetietoa vaatinut tehtävä, joten tältä osin tilasto ei ole riittävä päätelmien tekemiseksi. Pisteytysten skaalaus on tehty asteikolle 0–1.

Kuviosta 9 havaitaan, että tehtäväkategorioiden pisteprofiilit muistuttavat toisiaan, mutta valintakokeissa osaaminen painottuu kognitiivisesti kompleksisempia kategorioita kohti. Ylioppilaskokeissa saadaan yleensä eniten pisteitä mekaanisista tehtävistä, mutta valintakokeissa tässä kategoriassa menestytään vasta kolmanneksi parhaiten. Matematiikan (ja tilastotieteen) valintakokeissa nimittäin parhaiten osataan rutiinitehtävät ja toiseksi parhaiten strategiatehtävät.

Valintakokeissa on jaettu vuosina 2004–2013 pisteitä keskimäärin samalla tavalla ominaisuus-, mekaanisissa- ja sovellustehtävissä verrattuna ylioppilaskokeiden pistemääriin. Tehtäväkategorioista, joiden tarkasteluun oli riittävästi tilastomateriaalia, rutiini-, strategia- ja todistustehtävät erottuvat selvästi ylioppilas- ja valintakokeiden pisteytyksissä. Näissä kolmessa kategoriassa menestyttiin paremmin matematiikan (ja tilastotieteen) valintakokeissa kuin ylioppilaskokeissa.

Tutkimuskysymys 2.2 liittyi matematiikan osaamisen negatiiviseen kehitykseen ja kysymykseen sen selittämisestä edellisten tulosten perusteella. Ylioppilaskokeiden osalta näyttää siltä, että merkittävimmät muutokset koskevat mekaanisia-, strategia-, konstruointi- ja todistustehtäviä. Todistus- ja strategiatehtävät ovat vähentyneet tutkimusaikavälillä, jolloin puolestaan mekaaniset- ja konstruointitehtävät ovat lisääntyneet. Kuvion 8 vastausprosenttien ja kuvion 9 pistesaaliiden perusteella ylioppilaskokeet ovat siis muuttuneet kokelaille helpompaan suuntaan. Tämä ei tue oletusta siitä, että kokeiden vaatimustaso selittäisi osaamisen heikkenemistä.

Samaa kysymystä matemaattisen osaamisen negatiivisesta kehityksestä kokeissa arvioitujen ominaisuuksien funktiona voidaan tarkastella matematiikan ja tilastotieteen pääsykokeissa. Niissä käsitteellisen ymmärtämisen säikeeseen liittyvät tehtävät (käsitetieto- ja ominaisuustehtävät) ovat selvästi vähentyneet tutkimusaikavälillä. Samaan aikaan proseduraaliseen sujuvuuteen liittyvät tehtävät (mekaaniset- ja rutiinitehtävät) ovat lisääntyneet samoin kuin strategiatehtävät. Käsitetieto- ja ominaisuustehtävät osataan matematiikan ja tilastotieteen pääsykokeissa selkeästi huonommin kuin mekaaniset-, rutiini- ja strategiatehtävät (kuvio 9), joten tämäkään ei selitä osaamisen negatiivista kehitystä. Näyttäisi siltä, että myös pääsykokeissa hakijoille helpompien tehtäväkategorioiden osuus on kasvanut tutkimusaikavälillä 2004–2013.

Matemaattisen osaamisen arvioinnissa on siis ainakin ylioppilaskokeiden ja matematiikan ja tilastotieteen pääsykokeiden perusteella siirrytty tehtävätyyppeihin, joissa yleisesti ottaen menestytään paremmin ja joihin vastataan mieluummin. Luultavasti taustalla on korjausliike, joka on tehty vastauksena matemaattisen osaamisen heikkenemiseen. Lisäksi näyttää siltä, että matematiikan perusteiden heikossa hallinnassa ei ole kyse näennäisilmiöstä, joka johtuisi testauksen painopisteiden muutoksesta, koska nimenomaan painopiste on siirtynyt perusteisiin päin. Oletettavasti tämän pitäisi myös kannustaa perusteiden syvällisempään hallintaan. Toisaalta vaatimustason lasku voi kääntyä itseään vastaan ja vähentää kiinnostusta matematiikan oppimiseen.

7.3 Matematiikan ja tilastotieteen pääsykokeisiin osallistuneiden matemaattisen osaamisen tyypittely

Tutkimuksen yksi tavoite liittyi matemaattisen osaamisen tyypittelyyn (tutkimuskysymys 2.3). SPSS -tilasto-ohjelmalla suoritetussa K-means -klusterianalyysissä saatiin esiin matematiikan ja tilastotieteen (vuosina 2004–2009) ja matematiikan (vuosina 2010–2013) valintakokeisiin osallistuneiden hyvin erilaiset osaamistyypit tehtäväkategorioiden suhteen. Klusterianalyysin perusteella voitiin pelkistää tilastoaineistosta viisi erilaista ryhmää, jotka poikkeavat selvästi toisistaan matemaattisessa osaamisessa. Analyysi toistettiin SPSS:llä ryhmien määrää (2-8) vaihtelemalla ja arvioimalla ryhmien keskinäisiä suhteita. Ryhmät muotoutuivat kaikkein luonnollisimmin, kun niiden lukumääräksi valittiin viisi (taulukko 4). Käsitetietotehtävät jouduttiin jättämään klusterianalyysin ulkopuolelle, koska ryhmien välille ei muodostunut tilastollisesti merkitsevää eroa yksisuuntaisessa varianssianalyysissä (ANOVA), ($F = 1{,}462,\ p = .212$) tämän tehtäväkategorian osalta. Tähän vaikutti erityisesti se, että käsitetietoa vaadittiin puhtaasti vain yhdessä tehtävässä vuosina 2004–2013. Konstruointitehtäviä puolestaan ei ollut yhtään kappaletta, joten tämäkin kategoria jouduttiin jättämään pois lopullisesta tarkastelusta.

Taulukko 4. Lopulliset klusterikeskukset SPSS:llä suoritetussa K-means -klusterianalyysissä. Taulukossa on korostettu lihavoinnilla keskimääräistä selkeästi korkeampaa ja alleviivauksella heikompaa osaamista klusterien karakterisoinnin helpottamiseksi.

	Klusteri				
	Osaajat	Kurssiopiskelijat	Laskijat	Heikot	Strategistit
Ominaisuus	**,56**	,29	,41	,33	**,43**
Mekaaninen	**,78**	,21	**,84**	,16	,46
Rutiini	**,71**	,65	**,82**	,09	,54
Strategia	**,77**	,36	,29	,32	**,91**
Sovellus	**,73**	,15	,12	,11	,29
Todistus	,33	,26	,30	,28	**,36**

Matemaattisen osaamisen suhteen erilaiset ryhmät nimettiin taulukosta 4 saatavan informaation perusteella seuraavasti: ”osaajat”, ”kurssiopiskelijat”, ”laskijat”, ”heikot” ja ”strategistit”. Kaikkiin ryhmiin yhdistyi runsaasti tapauksia (taulukko 5), mutta myös vaihtelua esiintyi ryhmien suuruudessa. Kurssiopiskelijat ja laskijat kattavat aineistosta 49 prosenttia, kun taas toisaalta osaajien ryhmä on suhteelliselta osuudeltaan kaikista pienin (13 %).

Taulukko 5. Klustereiden koko.

Klusteri	Osaajat	110
	Kurssiopiskelijat	206
	Laskijat	199
	Heikot	163
	Strategistit	160
Yhteensä		838

Kuvataan seuraavaksi klusterianalyysin perusteella saatujen ryhmien ominaisuuksia matematiikan osaamisen suhteen. Ryhmien ominaisuuksia verrataan Joutsenlahden (2005) väitöskirjatutkimukseen, jossa hän esitteli lukiolaisten matemaattisen ajattelun piirteitä yhteiskunnan, opettajan ja opiskelijan näkökulmasta. Taulukossa 6 on esitetty ryhmien vastaavuudet ja prosenttiosuudet Joutsenlahden (2005) esittämään verrattuna. Joutsenlahti on nimennyt ryhmät lukion kurssiarvosanojen ja ylioppilaskoemenestyksen vastaavuuden perusteella. Tässä tutkimuksessa klusterit kuvaavat staattisempia osaamistyyppejä, joten ne on nimetty eri tavalla.

Taulukko 6. Klusterien vastaavuus ja osuuksien vertailu.

Klusteri	osuus [%]	osuus [%]	Joutsenlahti (2005, 218–222)
Osaajat	13	40	Menestyjät
Kurssiopiskelijat	25	10—20	Pettyjät
Laskijat	24	26	Suoriutujat
Heikot	19	14	Luovuttajat
Strategistit	19	<10	Kypsyjät

”Kurssiopiskelijat” ovat luultavasti opiskelleet tavoitteenaan kurssien läpäiseminen, sillä konseptuaalisen ymmärryksen heikko taso, joka ilmenee ominaisuustehtävissä, kielii ulkoaopettelusta ja rutiinien kehittämisestä. On täysin mahdollista, että tämän ryhmän jäsenet osaavat kurssien loppukokeissa mekaanisia tehtäviä, mutta ulkoa opetellut menetelmät eivät palaudu muistista virheettöminä kun aikaa on kulunut niiden opiskelusta. ”Kurssiopiskelijat” osaavat kohtuullisesti rutiinitehtäviä, sillä rutiininomaisten ongelmien ratkaisustrategiat palautuvat mieleen, vaikka todennäköisesti ajattelun kehittymättömyys kostautuu virheinä näissä tehtävissä. Edellisten hypoteesien tekeminen tästä ryhmästä perustuu erityisesti oletukseen rutiinitehtävien osaamisen säilymisestä. Joutsenlahden (2005, 218–222) tarkastelussa tähän ryhmään on eniten yhtymäkohtia ”pettyjissä.” Hänen mukaan pettyjien ajattelu painottuu matematiikan ”työkalupakki”-näkökulmaan ja on sisältörajoittunutta, mikä tarkoittaa kohtalaista tai monipuolista hallintaa rajatuilla matematiikan osa-alueilla. Pettyjille oli tyypillistä Joutsenlahden (2005, 220) mukaan hyvät kurssiarvosanat, mutta heikko osaaminen ylioppilaskokeissa. Kurssiopiskelijat -ryhmä ja Joutsenlahden (2005) pettyjät-ryhmä eroavat toisistaan proseduraalisen tiedon hallinnan osalta. Eroa kuitenkin selittää se, että Joutsenlahden mukaan tämän ryhmän edustajien matematiikan hallinta tulee esille ainoastaan kun käsitteet ja menetelmät ovat etukäteen tiedossa ja harjoiteltavissa. Tämä puoltaa tulkintaa kurssiopiskelijoiden heikosta menestyksestä pääsykokeiden mekaanisissa- ja ominaisuustehtävissä, mikäli oletus ryhmien samuudesta pitää paikkansa.

Toiseksi suurin ryhmä on ”laskijat”, jonka matemaattista osaamista voi luonnehtia konseptuaalisen ymmärryksen ja proseduraalisen sujuvuuden säikeisiin rajoittuneeksi. Tämän ryhmän edustajat menestyvät mekaanisissa tehtävissä ja rutiiniongelmissa jopa paremmin kuin ryhmä ”osaajat”. Ryhmän ”laskijat” edustajilla on matematiikasta luultavasti hyvin laskemispainotteinen kuva, sillä he näkevät matematiikan tärkeimpänä tavoitteena laskemisen. Näin ollen he ovat sallineet itselleen jo varhain vapautuksen kognitiivisesti kompleksisempien asioiden ymmärtämisestä. Tämä voi olla seurausta koulutuksen näyttäytymisestä hyvin laskemispainotteisena, koska strategisen kompetenssin ja mukautuvan päättelyn säikeet eivät ole saaneet opiskelukokemuksissa riittävää painoarvoa. Ylioppilaskokeet kannustavat mekaanisten- ja rutiinitehtävien harjoitteluun, koska niiden osuus on niin suuri (ks. luku 7.1.1) Joutsenlahden (2005, 218–222) ”suoriutujat”-ryhmä muistuttaa monessa suhteessa ”laskijoita.” Suoriutujille on tyypillistä heikko konseptuaalisen ymmärryksen taso, mutta toisaalta proseduraalisen tiedon hallintaan keskittyminen on johtanut tämän säikeen vahvistumiseen. Joutsenlahti (2005, 219—220) havaitsi tämän ryhmän edustajien ajattelevan matematiikkaa ”työkalupakkina”, mikä on hyvin linjassa ryhmän ”osaajat” kanssa. Yhteneväisyyttä ryhmien välillä lisää myös suoriutujien heikko ongelmanratkaisutehtävien osaaminen, mikä liittyy oletettavasti strategia- ja sovellustehtävien heikkoon hallintaan. Joutsenlahden (2005) mukaan ongelmat näissä tehtävissä johtuvat puutteista algoritmien ja strategioiden hallinnassa.

Ryhmän ”heikot” suoritukset ovat koko matemaattisen osaamisen alueella huolestusta herättäviä. He saavuttavat lähes kaikissa tehtäväkategorioissa heikompia oppimistuloksia kuin muut. Erityisen huolestuttava on rutiinitehtävien osaamisen taso (.09), koska yleisesti ottaen muut opiskelijat menestyvät tässä kategoriassa kohtuullisesti tai hyvin. Tämä saattaa olla seurausta jatkuvista laiminlyönneistä matematiikan oppimista kohtaan, mutta toisaalta kyse voi olla opetuksen ja oppimistyylien kohtaamattomuudesta. Joutsenlahden (2005, 218—222) tutkimuksessa havaittiin täysin ”heikkojen”-ryhmää vastaava ”luovuttajien” ryhmä. Luovuttajille tyypillinen lyhytjänteisyys matematiikan opiskelua kohtaan selittää luultavasti tämän ryhmän heikkoa menestystä.

Ryhmään ”strategistit” kuuluvat puolestaan osoittavat paikoitellen erinomaista osaamista, vaikka osaaminen onkin jossain määrin rajautunutta. Tämän ryhmän edustajat osaavat jostakin syystä strategiatehtäviä poikkeuksellisen hyvin, selvästi paremmin kuin mikään muu ryhmä. Ominaisuus- ja todistustehtävissäkin ”strategistit” menestyvät keskimääräistä paremmin, mutta todistustehtävien tarkasteluun tässä yhteydessä tarvittaisiin lisätutkimuksia, koska erot ryhmien välillä ovat hyvin pieniä. ”Strategistien” kohdalla opetuksessa tulisi jatkossa keskittyä soveltamistaitojen kehittämiseen, koska heillä on todennäköisesti potentiaalia kyetä pohjatietojen ja -taitojen perusteella tähän. Tämän ryhmän edustajat ovat myös mahdollisia matemaattisten alojen osaajia, koska heidän ajattelunsa pohjautuu todennäköisesti heuristiseen lähestymistapaan. ”Strategisteissa” on selkeitä yhtymäkohtia Joutsenlahden (2005, 218—219) havaitsemaan ”kypsyjien” ryhmään. Erityisesti näitä kahta ryhmää yhdistää strategiatietojen keskimääräistä parempi hallinta, mutta myös muilta osin kuvaukset ovat linjassa toistensa kanssa. Joutsenlahden (2005, 218—219) mukaan kypsyjille on tyypillistä matemaattisen ajattelun kehittyminen lukion loppuvaiheessa, mikä juontuu ”parantuneista opiskelutottumuksista, jatko-opintotavoitteiden selkiytymisestä, oppisisältöjen jäsentymisestä ja linkittymisestä toisiinsa omatoimisen harjoittelun myötä.” Kypsyjien ryhmä oli Joutsenlahden tarkastelussa hyvin sukupuolittunut ryhmä, sillä siihen kuului ainoastaan poikia.

Viimeinen ryhmä nimettiin ”osaajiksi”, koska heidän matemaattinen osaaminen on tasaisen varmaa jokaisella alueella, kun suhteutetaan matematiikan ja tilastotieteen pääsykokeissa menestyminen koko hakijajoukkoon. ”Osaajat” eivät ole kaikessa matematiikan osaamisessa parhaimpia, sillä ryhmät ”laskijat” ja ”strategistit” menestyvät paremmin osassa tehtäväkategorioista. ”Osaajat” ovat luultavasti kuitenkin opetuksen kannalta tavoittelemisen arvoinen ryhmä, koska heidän laaja-alainen osaamisensa heijastuu matematiikan oppimismahdollisuuksiin aivan eri tavalla kuin muilla ryhmillä. Joutsenlahden (2005, 218—222) tutkimuksessa vastaava ryhmä on nimetty ”menestyjiksi.” Menestyjien ja osaajien ryhmät ovat täysin vastaavat osaamispiirteitä tarkasteltaessa. Joutsenlahden mukaan menestyjien ryhmän edustajille on tyypillistä, että he näkevät matematiikan merkityksellisenä ja ovat valmiita tekemään pitkäjänteistä työtä oppimisen eteen. Tämän ryhmän kohdalla voi perustellusti olettaa, että koulutus on onnistunut myös affektiivisten ominaisuuksien positiivisessa kehittämisessä.

7.4 Tehtäväkategorisoinnin ominaisuuksia

7.4.1 Kategoriasysteemin toimivuus käytännössä

Yksi tämän tutkimuksen tavoitteista oli kehittää matemaattista osaamista ja ajattelua koskeva tehtäväkategorisointi, joka ottaisi huomioon erityisesti ratkaisuprosessin. Sen käyttämisessä ilmeni luonnollisesti muutamia ongelmia, joihin tulisi kiinnittää huomiota luokittelusysteemin jatkokäyttöä ajatellen. Ensinnäkin tehtävien luokittaminen vaatii sisäistynyttä käsitystä melko laajasta luokittelusysteemistä, joten sen käyttäminen vaatii perehtyneisyyttä. Tehtävien luokittaminen on myös varsin hidasta tämän luokittelusysteemin avulla, koska siinä tulee tarkastella monipuolisesti tehtävien ratkaisuja ja niissä vaadittavaa ajattelua. Näin ollen esimerkiksi laajojen oppikirjatarkastelujen tekeminen tämän luokittelun avulla voi osoittautua työlääksi.

Ajattelun, jota tehtävä vaatii, arviointi ei ole yksiselitteistä, koska se edellyttää tehtävän kohderyhmän tuntemista. On siis otettava huomioon tehtävää ratkaisevan opiskelijan matemaattisen ymmärryksen taso, mikä voi olla jopa mieletöntä isossa kohdejoukossa, koska opiskelijoiden osaamistasoissa voi olla paljon vaihtelua. Osaamistyyppien olemassa olo vahvistaa tätä oletusta taitojen vaihtelusta. Erityisesti tulkinta välillä rutiini – rutinoitumaton – sovellus voi tuottaa ongelmia, jos ratkaisijoiden joukko on hyvin heterogeeninen.

Luokittelun toimivuutta voitiin arvioida paremmin vasta kun sitä käytettiin tarkoitukseensa. Tässä yhteydessä nousi esiin huomioita, joista yksi koski erään tehtäväkategorian tarpeellisuutta. Tehtävien luokitussysteemin taustalla on mielekästä olla jokin kaikkia kategorioita yhdistävä ominaisuus – esimerkiksi matemaattinen ajattelu – jonka eroista kategoriat kertovat. Luokittelun yhteydessä heräsi epäilys konstruointikategorian tarpeellisuudesta, sillä siihen luokittuvien tehtävien tyyppi oli hyvin kapea-alainen verrattuna muihin kategorioihin. On siis kyseenalaista onko kyseessä riittävän erillinen ja laaja matemaattinen ajattelu. On kuitenkin vaikeata luokitella konstruointitehtäviä suoraan muihinkaan kategorioihin, sillä konstruointitehtävissä on usein kyse intuitiivisen ja induktiivisen järkeilyn yhdistämisestä, mikä kuuluu Kilpatrickin ym. mallissa mukautuvaan päättelyyn. Samalla tavalla konstruointitehtävät liittyvät Wilsonin taksonomian analyysitasoon, joten niiden ratkaiseminen on kognitiivisesti kompleksista. Todistuskategoriaan näitä tehtäviä ei tietenkään voida yhdistää ellei sitä muokattaisi oleellisesti erilaiseksi. Luonnollisimmin konstruointitehtävät voitaisiin ehkä yhdistää sovellustehtäviin, jos tämän kategorian kuvausta muokattaisiin vastaavasti. Konstruointitehtäväkategorialla oli tässä tutkimuksessa paikkansa ainakin jossain mielessä, sillä se toistui Dia-yhteisvalinnassa muita tarkastelun kohteita enemmän. Luokittelusysteemin jatkokehittelyn kannalta konstruointikategoria on kuitenkin syytä saattaa kriittisen tarkastelun kohteeksi.

7.4.2 Tehtäväkategorioiden ominaisuuksia

Tampereen yliopiston opiskelijavalintajärjestelmästä (VALTSU) saatujen tilastojen perusteella voitiin arvioida tehtäväkategorioiden yhteyttä toisiinsa. Tehtäväkategorioiden välisiä korrelaatioita ja niiden tilastollista merkitsevyyttä tutkimalla voidaan päätellä miten hyvin luokittelumalli onnistui erottelemaan tehtävien vaatimaa matemaattista osaamista. Tehtäväkategorioiden välille on toki syytä olettaa myös positiivinen korrelaatio, jos ne kuuluvat samaan Kilpatrickin ym. mallin säikeeseen. Pearsonin korrelaatiokertoimet on esitetty taulukossa 7.

Taulukko 7. Tehtäväkategorioiden Pearsonin korrelaatiokertoimet. Korrelaatiokertoimia, jotka ovat arvoltaan yli 0,30, on korostettu tulkitsemisen helpottamiseksi. Tilastollinen merkitsevyys on esitetty p-rivillä. Tapausten lukumäärä on puolestaan eritelty N-rivillä.

		Käsitetieto	**Ominaisuus**	**Mekaaninen**	**Rutiini**	**Strategia**	**Sovellus**	**Todistus**
Käsitetieto	k		0,**317****	0,223**	0,139	0,271**	0,202*	
	p		0,000	0,006	0,086	0,001	0,012	
	N		153	153	153	153	153	
Ominaisuus	k			0,**344****	0,**303****	0,275**	0,**362****	0,**328****
	p			0,000	0,000	0,000	0,000	0,002
	N			468	250	287	592	84
Mekaaninen	k				0,**554****	0,094*	0,219**	0,257**
	p				0,000	0,016	0,000	0,000
	N				620	657	838	199
Rutiini	k					–0,010	0,189**	0,**365****
	p					0,821	0,000	0,000
	N					523	620	115
Strategia	k						0,**457****	0,**460****
	p						0,000	0,000
	N						657	115
Sovellus	k							0,**380****
	p							0,000
	N							199
Todistus	k							
	p							
	N							
** Korrelaatio on tilastollisesti merkitsevä (99 % luottamustaso)								
*Korrelaatio on tilastollisesti melkein merkitsevä (95 % luottamustaso)								

Todistus- ja käsitetietokategorioiden tehtäviä ei esiintynyt samoina vuosina, joten korrelaatiota ei voitu laskea näiden välille. Niissä tapauksissa, joissa korrelaatiot oli mahdollista laskea, aineiston koko oli riittävä, sillä lähes kaikissa tapauksissa korrelaatiot olivat tilastollisesti merkitseviä. Kuten taulukosta 7 huomataan, korrelaatiot olivat yhtä tapausta lukuun ottamatta aina positiivisia, ja tässä strategia- ja rutiinitehtävien tapauksessakin

$(k = -.01, p = .82)$ negatiivinen korrelaatio oli todella pieni ja tilastollisesti ei-merkitsevä. Tämä havainto puoltaa Kilpatrickin ym. (2001) matemaattisen taitavuuden mallia, jossa kaikki säikeet ovat yhteenkietoutuneet eli ne vaikuttavat toisiinsa positiivisella tavalla. Tehtäväkategoriat korreloivat säikeiden sisäisten kategorioiden (esimerkiksi käsitetieto- ja ominaisuustehtävät) välillä jonkin verran, kuten voidaan olettaa. Mekaanisten- ja rutiinitehtävien välillä korrelaatio $(k = .55, p = .00)$ on jopa melko voimakas.

Kognitiivisen kompleksisuuden taso näyttäisi taulukon 7 perusteella vaikuttavan siihen, miten paljon kategoria korreloi muiden kategorioiden kanssa. Todistus- ja sovelluskategoriat korreloivat voimakkaimmin muiden kanssa. Oletettavasti tämä liittyy siihen, että matematiikassa "perustietojen" hallinta edistää matematiikan syvällisempien asioiden oppimista. Näyttää myös siltä, että ominaisuuskategorian hallinta edistää kaikkien muiden kategorioiden osaamista, sillä ominaisuuskategoria selvästi korreloi jonkin verran kaikkien kategorioiden kanssa. Ainoastaan todistuskategoriassa korrelointi muihin nähden on vielä voimakkaampaa jokaisessa tapauksessa.

Taulukosta 7 voi havaita yllättäviäkin korrelaatioita – tai oikeastaan niiden puuttumisen. Rutiini- ja strategiatehtävien korreloimattomuus on nimittäin hämmästyttävää, koska luokittelusysteemiä rakennettaessa molempiin kategorioihin liitettiin Wilsonin taksonomian kategoria "taito ratkaista rutiiniongelmia." Tämä oli ainoa Wilsonin taksonomian kategoria, joka liitettiin tässä tutkimuksessa kahteen luokittelusysteemin kategoriaan ja näin ollen niiden välille olisi voinut etukäteen odottaa jonkinlaista korrelaatiota. Näiden tulosten perusteella vaikuttaa siltä, että strategioiden hallinta on taitona selvästi erillinen ruutiininomaiseen, suoraviivaiseen, ongelmanratkaisuun nähden. Analyysin tulokset ovatkin osittain ristiriitaisia Kilpatrickin ym. matemaattisen taitavuuden mallin kanssa. Kilpatrickin ym. (2001) mukaan proseduraalinen sujuvuus liittyy strategiseen kompetenssiin proseduurien valinnan kannalta. Yhteys on ilmeisesti niin heikko, että se ei vaikuta tehtävissä menestymisen korrelointiin proseduraalista sujuvuutta ja strategista kompetenssia edustavien tehtäväkategorioiden välillä.

8 YHTEENVETO JA POHDINTAA

Kootaan seuraavaksi tässä tutkielmassa esiin nousseita huomioita ja tärkeimpiä tuloksia.

8.1 Johtopäätökset

Tutkimuksen tarkoituksena oli analysoida lukion ja korkeakoulutuksen välistä nivelvaihetta matematiikan oppimistulosten ja vaatimusten näkökulmasta. Vaatimukset tulivat esille niin ylioppilaskokeiden kuin korkeakoulujen pääsykokeiden rakenteessa ja oppilaitosten opetussuunnitelmissa. Oppimistulokset puolestaan nostivat mielenkiintoisia havaintoja matemaattisen osaamisen rakentumisesta ja erilaisista tyypiteltävistä osaamisryhmistä.

On ilmeistä, että ylioppilaskirjoituksissa on selviä painotuksia tietyn tyyppisen matemaattisen osaamisen suhteen. Luokitteluanalyysin perusteella mekaaniset tehtävät ja rutiiniongelmat ovat vahvasti edustettuna, niitä on molempia keskimäärin noin kolme ja puoli viidestätoista tehtävästä eli ylioppilaskokeissa on mahdollista osoittaa osaamisensa 70 prosenttisesti näiden tehtävätyyppien hallinnalla. Tämä painotus saattaa näkyä lukiossa niin, että osa opiskelijoista näkee matematiikan suurelta osin näiden tehtävätyyppien edustamana ajatteluna ja taitoina. Ylioppilaskokelaiden taitoja testataan strategia- ja sovellustehtävillä selvästi edellä mainittuja vähemmän, mutta näidenkin kategorioiden tehtäviä esiintyy kumpaakin keskimäärin noin kahden ja puolen tehtävän edestä.

Matematiikan pääsykokeiden tuloksia tarkasteltiin klusterianalyysin keinoin, koska tavoitteena oli tyypitellä kokeisiin osallistuneiden matemaattista osaamista. Näin saatiin muodostettua ryhmittely, jossa oli paljon yhtymäkohtia Joutsenlahden (2005) esittelemään tyypittelyyn. Tulosten toistettavuus on tutkimukselle olennainen ominaisuus, ja päätyminen Joutsenlahden kanssa samoihin johtopäätöksiin erilaisella tutkimuksen toteutuksella vahvistaa käsitystä siitä, että lukion suorittaneet opiskelijat voidaan tyypitellä osaamisen perusteella viiteen ryhmään.

Osaamisen jaottelussa esiin nousseet ryhmät nimettiin seuraavasti: osaajat, kurssiopiskelijat, laskijat, heikot ja strategistit. Osaajat ovat nimensä mukaisesti matematiikan monipuolisia taitajia. He eivät kuitenkaan ole ehdottoman ylivertaisia jokaisessa osaamisen alueessa, mutta joka tapauksessa suoriutuvat hyvin riippumatta tehtävätyypistä. Kurssiopiskelijat sen sijaan suoriutuvat heikosti tai keskinkertaisesti, ainoastaan rutiininomaisten tehtävien hallinta on kohtuullisella tasolla. Matematiikka näyttäytyy heille todennäköisesti työkalupakkina, jonka hallinta tarkoittaa toistettujen rutiiniongelmien ratkaisemista. Laskijat puolestaan keskittyvät niin paljon matematiikan laskemisnäkökulmaan, että he menestyvät erinomaisesti mekaanisissa tehtävissä ja rutiinitehtävissä, mutta eivät harjaannu strategioiden tai sovellusten osalta. Käsitteellisen ymmärryksen kohtuullinen taso on todennäköisesti seurausta proseduraalisen tiedon hyvästä tasosta, sillä näiden osaamisalueiden välillä on pieni positiivinen korrelaatio. Heikot-ryhmään kuuluvat sananmukaisesti vaatimattomia oppimistuloksia kaiken tyyppisissä tehtävissä esittävät opiskelijat. Erityisesti rutiininomaisten tehtävien hallinta on huolestuttavan heikkoa. Viimeinen analyysissä havaittu ryhmä nimettiin strategisteiksi. Strategistit hallitsevat erinomaisesti tehtävät, joissa keskeinen osa ratkaisua on oikean ratkaisustrategian valinta. Tämä taito auttaa todennäköisesti myös todistustehtävien ratkaisemisessa, sillä näiden tehtävätyyppien osaamisen välillä havaittiin positiivinen korrelaatio.

Osaamistyyppien suhteelliset osuudet eroavat toisistaan, kun verrataan lukiolaisia matematiikan (ja tilastotieteen) pääsykokeisiin osallistuneisiin. Joutsenlahden (2005) tutkimuksen perusteella noin 40 % lukion opiskelijoista kuuluisi tässä tutkimuksessa määriteltyyn osaajien ryhmään. Pääsykokeissa tämä ryhmä on kuitenkin huomattavasti pienempi (13 %). Samalla kurssiopiskelijoiden määrä on pääsykokeissa selkeästi suurempi. Eroa voidaan selittää suoravalinnan vaikutuksilla, koska osaajat ovat todennäköisesti hyvin edustettuna valintaryhmässä, jonka ei tarvitse ylioppilaskokeen tuloksen perusteella osallistua pääsykokeisiin. Strategistien (19 %) osuus pääsykokeissa on ylioppilaskokeiden vastaavaa osuutta (alle 10 %) jonkin verran suurempi. Joutsenlahti (2005) on esittänyt, että tämä ryhmä löytää matematiikan merkityksellisyyden lukion loppupuolella. Tätä taustaa vasten matematiikkaa ja tilastotiedettä opiskelemaan hakevissa voisi olettaa olevan keskimääräistä enemmän strategisteja, mikä selittäisi prosenttiosuuksien eroa ja sitä, että kyseessä on sama ryhmä opiskelijoita kuin Joutsenlahti on havainnut.

Jokainen ryhmä poikkeaa matemaattisessa osaamisprofiilissa toisistaan ja on todennäköistä, että jokaisessa ryhmässä asenteet ja motivaatio matematiikan opiskelua kohtaan ovat hyvin erilaisia. Oppijan affektiiviset ominaisuudet ovat siis yhtä lailla osa matemaattista osaamista ja siksi tämä tutkimus tulee nähdä osana suurempaa tutkimuskenttää, jossa nämä seikat on otettu huomioon. Ulkoisilla tekijöillä voi olla ratkaiseva vaikutus matematiikan oppimiseen formaalissa opetuksessa, mistä hyvänä esimerkkinä mainittakoon lukion kurssimuotoisuus, valinnaisena aineena kirjoittaminen ylioppilastutkinnossa ja perhetaustan vaikutukset. On ilmeistä, että matematiikan oppimisen tutkimus on monisyistä ja haastavaa, mutta samalla tarpeellista mielekkäämmän ja paremman opetuksen järjestämiseksi.

8.2 Tutkimustulosten luotettavuus

Tässä tutkimuksessa luotettavuuden arvioinnin kriittisimmät kohdat liittyvät tehtävien luokittamiseen ja analyysien yleistettävyyteen. Tehtävien luokittelussa pyrittiin eroon subjektiivisten tulkintojen aiheuttamista virheistä. Luokittelusysteemin rakentamisessa lähtökohdaksi otettiin, että se edustaisi matemaattista osaamista teoreettisista näkökulmista mahdollisimman kattavasti. Luokittelusysteemiä testattiin muutaman kokeen avulla, jolloin voitiin tarkentaa tehtäväkategorioiden kuvauksia täsmällisemmiksi. Tämän jälkeen koko ylioppilaskoe- ja pääsykoeaineisto luokitettiin ja tehtiin vielä pieniä muutoksia kategoriamääritelmiin. Luokittelusysteemin kehittäminen koko prosessin ajan teki siitä luotettavamman, sillä tulkinnanvaraisten luokitusten määrää voitiin näin pienentää. Toinen analyysikerta koko aineistolle varmensi tehtävien luokittelua, sillä suuressa osassa tehtävistä päädyttiin samoihin luokituksiin, mutta erilaisiakin tulkintoja tehtävien luokittelusta esiintyi. Näissä tapauksissa eri analyysikertojen luokittelun vertailu johti parempaan tarkkuuteen, kun eriäviä luokituksia pohdittiin tarkkaan määritelmien perusteella.

Luokittelun luotettavuutta olisi voitu parantaa käyttämällä ulkopuolisia luokittelijoita. Näin olisi nähty ehkä vielä selvemmin tehtäväkategorioiden määrittelyn toimivuus käytännössä. Tässä tutkimuksessa luokittelun on tehnyt ainoastaan tutkija itse, joten luokittelussa on saattanut olla läsnä näkemys tehtäväkategorioiden luonteesta, joka ei kuitenkaan ole selvä määritelmien perusteella ulkopuoliselle. Toinen luokittelun luotettavuuteen vaikuttanut parannus olisi voinut olla tehtävien irrottaminen koekontekstista. Tällä olisi voinut olla vaikutusta luokitteluun, sillä tehtävän liittäminen tiettyyn oppilaitokseen tai paikkaan kokeessa on saattanut tiedostamatta vaikuttaa luokituksiin.

Tehtävät luokiteltiin kvantifioivan sisällönanalyysin keinoin, mikä tarkoittaa sitä, että yleistettävyyden periaatetta tai luotettavuustestejä ei voida pitää välttämättöminä. (Eskola & Suoranta, 166). Luokittelutulosten testaus haluttiin kuitenkin tehdä, jotta niiden luotettavuutta voitaisiin jotenkin arvioida. Analyysitulosten kannalta tehtävien luokittelussa ei yleensä päästy tilastollisesti merkitseviin tuloksiin. Tähän vaikutti erityisesti aineiston pieni koko. Ylioppilas- ja pääsykokeissa tehtävien määrä on niin pieni, että tältä osin tilastollista merkitsevyyttä ei olisi voitu parantaa. Oppilaitosten välisten erojen merkitsevyyttä testattiin Mannisen (1978, 195—198) esittämällä kahden riippumattoman prosenttiluvun testillä. Oppilaitosten erot tehtävätyyppien painotuksissa olivat parhaimmillaankin ainoastaan tilastollisesti melkein merkitseviä (liite 5). Aikavälien 2004—2009 ja 2010—2013 eroa tarkasteltiin samalla testillä, mutta tulokset eivät olleet tältäkään osalta tilastollisesti merkitseviä yhtä poikkeusta lukuun ottamatta. Näiden huomioiden perusteella ylioppilas- ja pääsykokeiden vertailuun on suhtauduttava kriittisesti ja pidettävä havaittuja eroja ainoastaan suuntaa antavina.

Tehtäväkategorioiden tarkastelu matematiikan ja tilastotieteen pääsykoetulosten avulla selvitti kategorioiden välisiä suhteita huomattavasti luotettavammin (taulukko 7). Tehtäväkategorioiden väliset korrelaatiot olivat toisaalta pieniä ja korrelaatiot tilastollisesti merkitseviä valtaosassa tapauksista, mikä viestii riittävän erillisistä kategorioista. Taulukon 7 perusteella havaittiin tehtäväkategorioiden ja Kilpatrickin ym. (2001) matemaattisen taitavuuden mallin liittyvän toisiinsa, mikä viestii kategoriamäärittelyn ja teoriataustan kiinteästä suhteesta.

8.3 Jatkotutkimuksen aiheita

Yleensä tutkimuksen aikana herää uusia aiheeseen liittyviä kysymyksiä, eikä tämä tutkimus muodostanut tässä suhteessa poikkeusta muista. Tämän tutkimuksen aiheesta voisi jatkaa tarkastelemalla matemaattisen osaamisen tyyppiryhmiä jostakin uudesta näkökulmasta, sillä niiden olemassaolo on tämän ja aiemman tutkimuksen perusteella hyvin todennäköistä. Esiintyykö näitä ryhmiä jo peruskoulun matematiikassa vai päädyttäisiinkö oleellisesti erilaisiin osaamistyyppeihin?

Ylioppilaskokeiden analyysin perusteella ominaisuus- ja sovelluskategorian tehtävät poikkesivat muista kategorioista, mikä voisi olla mielenkiintoinen jatkotutkimuksen aihe. Varsinkin ominaisuustehtävien tuloksien poikkeuksellisuus nostaa esiin kysymyksiä. Onko niin, että opiskelijat tiedostavat oman osaamisensa ominaisuustehtävissä helpommin kuin muun tyyppisissä tehtävissä vai onko kyse kenties itseluottamuksen puutteesta näissä tehtävissä, jolloin tämän tyyppisiä tehtäviä välteltäisiin ylioppilaskokeissa? Tähän aiheeseen perehtymällä saataisiin tietoa, joka voisi hyödyttää matematiikan opetuksen tutkimusta avartamalla taustalla vaikuttavia syy-seuraus -suhteita.

Ylioppilaskokeissa 2012 keväästä lähtien sallittujen symbolisten laskinten vaikutuksia kokeiden mittaamien taitojen painotuksiin voisi olla mielekästä tutkia. Yhteiskunnan digitalisoituminen vaikuttaa väistämättä matemaattiseen ajatteluumme. On oletettavaa, että rutiinilaskujen ja symbolisen manipuloinnin suorittamiseen suhtaudutaan uudella tavalla kun käytössä on laskin, joka käytännössä tekee mitättömäksi perinteisen laskutaidon ja laskuissa vaaditun huolellisuuden. Olisikin mielenkiintoista tarkastella erityisesti ylioppilaskokeita tämän uudistuksen suhteen. Aikanaan myös tietokoneiden tuleminen ylioppilaskokeisiin tarkoittaa väistämättä velvollisuutta pohtia sen seurauksia matemaattisen osaamisen vaatimuksiin.

Tässä tutkimuksessa tehtiin taustaoletus lukio-opetuksen ja ylioppilaskokeiden vastaavuudesta matemaattisen osaamisen kannalta. Samoin korkeakoulujen pääsykokeista välittynyttä kuvaa matematiikan osaamisen vaatimuksista pidettiin koulutuksen mukaisena. Opetussuunnitelmat antavat opetuksesta kuitenkin kokeista poikkeavan kuvan. Mikä siis lopulta on opetuksen todellisuus? Näitä opetuksen ja arvioinnin suhteita tarkastelemalla voitaisiin kehittää ylioppilas- ja pääsykokeita yhä paremmin koulutusta ja tavoittelemisen arvoista osaamista vastaaviksi.

LÄHTEET

Boberg, J. 1999. Cluster analysis. A mathematical approach with applications to protein structures. Turku: Department of Computer Science.

Diplomi-insinööri- ja arkkitehtikoulutuksen yhteisvalinta 2013. Pääsykoearkisto, insinöörivalinnan matematiikan koe. Tulostettu 26.5.2013 http://dia.fi/paeaesykoearkisto.aspx

Eskola, J. & Suoranta, J. 1998. Johdatus laadulliseen tutkimukseen. Tampere: Vastapaino.

Fielding, A. 2007. Cluster and classification techniques for the biosciences. Cambridge: Cambridge university press.

Geary, D. 1996. Biology, Culture, and Cross-National Differences in Mathematical Ability. Teoksessa R. Sternberg & T. Ben-Zeev (toim.). The Nature of Mathematical Thinking. Mahwah: Erlbaum. 145–166.

Hartigan, J. 1975. Clustering algorithms. New York: Wiley.

Hautamäki, J., Säkkinen, T., Tenhunen, M., Ursin, J., Vuorinen, J., Kamppi, P. & Knubb-Manninen, G. 2012. Lukion tuottamat jatkokoulutusvalmiudet korkeakoulutuksen näkökulmasta. Jyväskylä: Koulutuksen arviointineuvosto.

Heikkilä, T. 2008. Tilastollinen tutkimus. Helsinki: Edita.

Hirsijärvi, S., Remes, P. & Sajavaara, P. 2009. Tutki ja kirjoita. Helsinki: Tammi.

Hähkiöniemi, M. & Viholainen, A. 2004. Lukion ja korkeakoulujen matematiikka. Lukion pitkä matematiikka pohjana korkeakoulutason matematiikan opinnoille. Jyväskylän yliopisto. Opettajankoulutuslaitos. Pro gradu -tutkielma.

IBM SPSS Statistics. Algorithms – Quick cluster algorithms. Viitattu 11.9.2013. http://pic.dhe.ibm.com/infocenter/spssstat/v20r0m0/nav/0

Joutsenlahti, J. 2005. Lukiolaisten tehtäväorientoituneen matemaattisen ajattelun piirteitä. 1990-luvun pitkän matematiikan opiskelijoiden matemaattisen osaamisen ja uskomusten ilmentämänä. Tampereen yliopisto. Opettajankoulutuslaitos. Väitöskirja

Johnson, R., Wichern, D. 2002. Applied multivariate statistical analysis. Upper Saddle River: Pearson Education.

Jyväskylän ammattikorkeakoulu 2013. Tekniikan ja liikenteen ala. Viitattu 3.9.2013. http://www.jamk.fi/koulutus/tutkinnot/nuoret/tekniikanjaliikenteenala

Karelia ammattikorkeakoulu 2009. Opinto-opas 2009–2010. Viitattu 30.8.2013. http://kronos.pkamk.fi/opiskelijapalvelut/opiskelu/opinto_opas_2009_2010.htm

Kilpatrick. J., Swafford. J. & Findell, B. (toim.) 2001. Adding it up: Helping children learn mathematics. Washington DC: National Academy Press.

Kivelä, S. 2012. Matematiikan ylioppilastehtävät. MatTa-sivusto. Tulostettu 6.8.2013. https://matta.hut.fi/matta/yoteht/index.html

Korhonen, H. 1998. Peruskoulun matematiikan oppimistulosten kansallinen arviointi 1998. Opetushallitus. Helsinki: Yliopistopaino.

Lukion opetussuunnitelman perusteet 2003. Vammala: Opetushallitus.

Manninen, P. 1975. Tilastotiedettä yhteiskuntatieteilijöille. Helsinki: Gaudeamus.

Miller, K. & Paredes, D. 1996. On the Shoulders of Giants: Cultural Tools and Mathematical Development. Teoksessa R. Sternberg & T. Ben-Zeev (toim.). The Nature of Mathematical Thinking. Mahwah: Erlbaum. 83–118.

Mullis, I., Martin, M., Foy, P. & Arora, A. 2012. TIMSS 2011 International Results in Mathematics. Chestnut Hill, MA: TIMSS & PIRLS International Study Center, Boston College. Viitattu 26.8.2013.
http://timssandpirls.bc.edu/timss2011/downloads/T11_IR_Mathematics_FullBook.pdf

Mullis, I., Martin, M., Ruddock, G., O'Sullivan, C. & Preuschoff, C. 2009. TIMSS 2011 assessment frameworks. Chestnut Hill, MA: TIMSS & PIRLS International Study Center, Boston College. Viitattu 23.8.2013. http://timssandpirls.bc.edu/timss2011/downloads/TIMSS2011_Frameworks.pdf

OECD 2004. Learning for Tomorrow's World – First Results from PISA 2003. Viitattu 28.8.2013. http://www.oecd.org/edu/school/programmeforinternationalstudentassessmentpisa/34002216.pdf

OECD 2013a. PISA 2012 Assessment and Analytical Framework: Mathematics, Reading, Science, Problem Solving and Financial Literacy. OECD Publishing. Tulostettu 27.8.2013. http://dx.doi.org/10.1787/9789264190511-en

OECD 2013b. OECD Programme for International Student Assessment (PISA), About PISA. Viitattu 27.8.2013. http://www.oecd.org/pisa/aboutpisa/

Opetushallitus 2013a. Lukiokoulutuksen opetussuunnitelman perusteet, nuorten lukiokoulutus. Viitattu 3.9.2013. http://www.oph.fi/saadokset_ja_ohjeet/opetussuunnitelmien_ja_tutkintojen_perusteet/lukiokoulutus

Opetushallitus 2013b. Lukion opetussuunnitelman perusteet 2003. Tulostettu 3.9.2013. http://www.oph.fi/download/47345_lukion_opetussuunnitelman_perusteet_2003.pdf

Opiskelupaikka.fi -sivusto. AMK - Tekniikan ja liikenteen ala. Viitattu 30.8.2013. http://www.opiskelupaikka.fi/Koulutus/Ammattikorkeakoulu/AMK-Tekniikan-ja-liikenteen-ala

Saimaan ammattikorkeakoulu 2005. Nuorten tutkinnot - Aikaisempia valintakoetehtäviä, tekniikan koulutusala. Viitattu 25.6.2013. http://www.saimia.fi/fi-FI/images/docs/haku/LT_tehtavat_K2005.pdf

Schoenfeld, A. 2007. Assessing mathematical proficiency. New York: Cambridge university press.

Tallila, T. 2013. Hallitseeko ylioppilaskokelas pitkän matematiikan? Pitkän matematiikan tehtävien aihealuejaottelua ja tehtäväkohtaisten pisteiden analysointia. Jyväskylän yliopisto. Matematiikan ja tilastotieteen laitos. Pro gradu -tutkielma.

TAMK - Tampereen ammattikorkeakoulu 2013. Valintakoearkisto, Tekniikan ja liikenteen ala. Tulostettu 25.6.2013.
http://www.tamk.fi/cms/hakumm.nsf/lupGraphics/Teknvalinta07koe.pdf/$file/Teknvalinta07koe.pdf

Tampereen yliopisto 2013. Matematiikan ja tilastotieteen tutkinto-ohjelma. Viitattu 3.9.2013.
https://www10.uta.fi/opas/koulutus.htm?opsId=102&uiLang=fi&lang=fi&lvv=2013&koulid=19

TTY 2013. TTY - Opinto-opas 2013–2014 - Perus. Viitattu 4.9.2013.
http://www.tut.fi/wwwoppaat/opas2013-2014/perus/tutkinnot/index.html

Tuomi, J. & Sarajärvi, A. 2009. Laadullinen tutkimus ja sisällönanalyysi. Jyväskylä: Tammi.

Töttö, P. 2004. Syvällistä ja pinnallista: teoria, empiria ja kausaalisuus sosiaalitutkimuksessa. Tampere: Vastapaino.

VALTSU. Tampereen yliopiston opiskelijavalintajärjestelmä.

Wilson, J. 1971. Evaluation of learning in secondary school mathematics. Teoksessa B. Bloom. T. Hasting & G. Madaus (toim.). Handbook on formative and summative evaluation of student learning. New York: McGraw-Hill. 643–695.

LIITTEET

Liite1. Tehtäväluokittelu - ylioppilaskirjoitukset

Koe	**Käsitetieto**	**Ominaisuustehtävä**	**Mekaaninen tehtävä**	**Rutiiniongelma**	**Strategiatehtävä**	**Sovellustehtävä**	**Konstruointitehtävä**	**Todistukset**	Yhteensä
2004 kevät	1	1	2	1	4 1/2	4	0	1 1/2	15
2005 kevät	0	1	2	3 1/2	4	4 1/2	0	0	15
2006 kevät	0	3 1/3	1 2/3	4	2 1/2	2 1/2	0	1	15
2007 kevät	0	5/6	3 1/3	3 1/2	1 1/2	1 5/6	0	4	15
2008 kevät	0	1	3 3/4	4 3/4	3 1/2	1/2	1/2	1	15
2009 kevät	11/12	1	3 1/6	3 7/12	1 1/2	3	0	1 5/6	15
2010 kevät	5/6	1/4	3 2/3	2 1/4	3	3 1/2	1/4	1 1/4	15
2011 kevät	0	2 1/6	4 1/6	4 5/12	1 1/2	1 3/4	1/2	1/2	15
2012 kevät	0	1 1/4	3 1/3	2 1/3	2	3 1/6	1	1 11/12	15
2013 kevät	1/2	1	3 5/12	5 1/4	1	3 1/12	0	3/4	15
Keskiarvo	**1/4**	**1 1/3**	**3 1/6**	**3 3/4**	**2 2/7**	**2 2/3**	**1/4**	**1 3/8**	**15**
Hajonta	**0,39**	**0,91**	**0,82**	**1,01**	**1,03**	**1,16**	**0,35**	**1,16**	
Osuus [%]	**1,7**	**8,0**	**21,1**	**24,9**	**15,2**	**17,7**	**1,7**	**9,8**	**100**

Liite 2. Tehtäväluokittelu – teknillinen yliopisto

Koe	Käsitetieto	Ominaisuustehtävä	Mekaaninen tehtävä	Rutiiniongelma	Strategiatehtävä	Sovellustehtävä	Konstruointitehtävä	Todistukset	Summa
2001	1/2	0	0	1 1/2	1	1 1/2	1 1/2	0	6
2002	0	1/2	1	1 1/2	1 1/2	1	1/2	0	6
2003	0	1/3	0	2 1/6	1/2	3	0	0	6
2004	0	1 1/2	0	1 1/4	1 1/4	1	1	0	6
2005	0	0	1/4	1 1/2	1/4	3 1/2	1/2	0	6
2006	0	5/6	1/2	2	1/2	1/2	2/3	1	6
2007	0	1	0	1 1/2	1	2 1/2	0	0	6
2008	0	1	0	1/2	2 1/3	0	1 1/6	1	6
2009	0	1	0	0	1 1/2	3	0	1/2	6
2010	1/4	0	1 1/2	3/4	1 1/2	1 1/2	0	1/2	6
2011	0	1/2	2	1/2	1 3/4	1 1/4	0	0	6
2012	1/4	1/2	1 1/2	1 1/12	1/2	1 2/3	1/2	0	6
2013	0	1/4	1 3/4	1 1/2	0	2	0	1/2	6
Keskiarvo (01-13)	0	4/7	2/3	1 1/5	1	1 5/7	4/9	1/4	6
Hajonta (01-13)	0,16	0,47	0,78	0,62	0,67	1,04	0,52	0,39	
Osuus [%] (01-13).	1,3	9,5	10,9	20,2	17,4	28,7	7,5	4,5	100
Keskiarvo (04-13)	**0**	**2/3**	**3/4**	**1**	**1**	**1 2/3**	**3/8**	**1/3**	**6**
Hajonta (04-13)	**0,11**	**0,49**	**0,83**	**0,61**	**0,74**	**1,09**	**0,45**	**0,41**	
Osuus [%] (04-13)	**0,83**	**10,97**	**12,50**	**17,64**	**17,64**	**28,19**	**6,39**	**5,83**	**100**

Koe	**Käsitetieto**	**Ominaisuustehtävä**	**Mekaaninen tehtävä**	**Rutiiniongelma**	**Strategiatehtävä**	**Sovellustehtävä**	**Konstruointitehtävä**	**Todistukset**	Yhteensä
2004	0	0	2	1	1	2	0	0	6
2005	0	0	2	1	2	1	0	0	6
2006	0	1	1 1/2	1 1/2	1	1	0	0	6
2007	0	1	1 1/2	1/2	2	1	0	0	6
2008	0	1 1/3	1	2 1/3	1	1/3	0	0	6
2009	0	2 1/3	2/3	2	1	0	0	0	6
2010	0	1	1	2	1	1	0	0	6
2011	1	2	1	1	0	1	0	0	6
2012	0	1	2	2	1	0	0	0	6
2013	0	1 1/2	1	1	1 1/2	1	0	0	6
Keskiarvo	**0**	**1 1/9**	**1 3/8**	**1 3/7**	**1 1/7**	**5/6**	**0**	**0**	**6**
Hajonta	**0,32**	**0,75**	**0,50**	**0,61**	**0,58**	**0,59**	**0,00**	**0,00**	
Osuus [%]	**1,7**	**18,6**	**22,8**	**23,9**	**19,2**	**13,9**	**0,0**	**0,0**	**100**

Liite 4. Tehtäväluokittelu - yliopisto

Koe	Käsitetieto	Ominaisuustehtävä	Mekaaninen tehtävä	Rutiiniongelma	Strategiatehtävä	Sovellustehtävä	Konstruointitehtävä	Todistukset	Summa
2004	1 1/2	2 5/6	2/3	2 1/2	1/2	2	0	0	10
2005	1 5/12	2 3/4	2/3	1 2/3	5/6	2 2/3	0	0	10
2006	0	2 1/4	2 3/8	1/8	1/2	2 1/4	1/2	2	10
2007	1/4	4 1/2	1	2 1/4	0	2	0	0	10
2008	1	1	2	1	3	2	0	0	10
2009	1/2	2	3	1/2	1	3	0	0	10
2010 (yhteis)	0	0	1	1	1	1	0	1	5
2011 (yhteis)	0	0	1	1	2	1	0	0	5
2012 (yhteis)	0	0	2	1	1	1	0	0	5
2013 (yhteis)	0	0	1	1	1	2	0	0	5
Osuus [%]	**5,5**	**16,1**	**17,4**	**15,5**	**15,7**	**25,4**	**0,5**	**4,0**	**100**

Liite 5. Prosenttijakaumat ja niiden tilastollinen testaus

Kahden korreloimattoman otoksen tilastollisessa testauksessa käytetään testisuuretta z, joka määritellään:

$$z = \frac{p_1 - p_2}{\sqrt{\frac{(n_1 - n_2)}{n_1 n_2} \cdot p \cdot (100 - p)}},$$

missä p_1 ja p_2 ovat otosten prosenttiosuudet, n_1 ja n_2 otosten suuruudet ja p otosten suuruudella painotettu keskiarvo. p voidaan laskea prosenttiosuuksien ja otosten suuruuden avulla:

$$p = \frac{n_1 p_1 + n_2 p_2}{n_1 + n_2}$$

(Manninen 1975, 195—198.) Tehdään seuraavat hypoteesit:

H_0: tehtäväkategorioiden prosenttiosuus on sama kahdessa oppilaitoksessa.

H_1: tehtäväkategorioiden prosenttiosuudet ovat eri suuret.

Nyt H_0:n hylkäämiseen liittyvät seuraavat luottamustasot ja testisuureen kriittiset (itseis)arvot Heikkilän (2008, 108) mukaan:

Luottamustaso	Kriittinen arvo	Merkintä
90 %	1,64	*
95 %	1,96	**
99 %	2,58	***
99,9 %	3,30	****

JAKAUMAT [%]	Käsitetieto	Ominaisuus	Mekaaninen	Rutiini	Strategia	Sovellus	Konstruointi	Todistus	lkm
YO	2,17	8,55	20,32	23,05	16,66	18,54	1,50	9,21	150
MAT	4,67	15,33	19,71	16,04	15,83	23,92	0,50	4,00	80
INS	1,28	9,51	10,90	20,19	17,41	28,74	7,48	4,49	60
AMK	1,67	18,61	22,78	23,89	19,17	13,89	0,00	0,00	60

Oppilaitosten vertailu

TESTISUURE	Käsitetieto	Ominaisuus	Mekaaninen	Rutiini	Strategia	Sovellus	Konstruointi	Todistus
YO - MAT	-1,05	-1,57	0,11	1,25	0,16	-0,96	0,68	1,44
YO - INS	0,42	-0,22	1,62	0,45	-0,13	-1,63	-2,22**	1,15
YO - AMK	0,23	-2,07**	-0,39	-0,13	-0,43	0,81	0,95	2,43**
MAT - INS	1,12	1,02	1,41	-0,64	-0,25	-0,64	-2,23**	-0,14
MAT - AMK	0,97	-0,51	-0,44	-1,16	-0,52	1,48	0,55	1,57
INS - AMK	-0,17	-1,43	-1,74*	-0,49	-0,25	1,99**	2,16**	1,66

Aikavälien 2004–2009 ja 2010–2013 vertailu oppilaitoksittain

TESTISUURE	Käsitetieto	Ominaisuus	Mekaaninen	Rutiini	Strategia	Sovellus	Konstruointi	Todistus
YO	0,04	-0,28	0,99	0,16	-1,12	0,16	1,17	-0,60
MAT	-1,29	-2,51**	0,88	0,71	1,73	0,16	-0,41	0,34
INS	0,87	-1,17	2,99***	-0,28	-0,33	-0,20	-1,11	-0,45
AMK	1,24	0,70	-0,29	0,16	-0,74	-0,25	-	-

Lyhennykset:

YO = ylioppilastutkinto

MAT = matematiikan ja tilastotieteen pääsykokeet

INS = Dia-yhteisvalinnan insinöörihaun matematiikan koe

AMK = ammattikorkeakoulujen tekniikan ja liikenteen hakukohteen yhteisvalinnan matemaattinen osuus.