TAMPEREEN YLIOPISTO
Pro gradu -tutkielma

Väinö Friman

Matematiikan formalisointi Nicolas Bourbakin mukaan

Matematiikan, tilastotieteen ja filosofian laitos
Matematiikka
Maaliskuu 2007

Tampereen yliopisto

Matematiikan, tilastotieteen ja filosofian laitos

FRIMAN, VÄINÖ: Matematiikan formalisointi Nicolas Bourbakin mukaan

Pro gradu -tutkielma, 51 s.

Matematiikka

Maaliskuu 2007

Tiivistelmä

Tässä tutkielmassa peryhdytään Nicolas Bourbakin kehittämään matematiikan formalisointiin. Bourbaki loi formalisointinsa tarkoituksena luoda mahdollisimman yksinkertaisten oletusten avulla kattava järjestelmä, josta voidaan johtaa käytännössä kaikki matematiikka.

Tutkielmassa operoidaan kahdella tasolla: matemaattisella ja metamatemaattisella. Meta-tasolla kuvaillaan ja määritellään itse matematiikkaa, ja pääosa tutkielman sisällöstä keskittyykin meta-tason operaatioiden tarkasteluun. Matemaattinen taso rakentuu meta-tason tarkastelujen kautta. Matematiikan kuvailemiseen käytetään määrittelyjä ja kriteerejä, jotka kuuluvat metamatematiikkaan.

Nicolas Bourbaki oli salanimi ryhmälle ranskalaisia matemaatikkoja, tutkielman johdanto-luvussa kerrotaankin lyhyesti ryhmän toimintaan ja vaiheisiin liittyvästä historiasta. Aiheen käsittely tapahtuu luvussa 2, ja kolmannessa luvussa, joka on myös viimeinen, pohditaan formalisoinnin heikkouksia ja vahvuuksia verrattuna nykyiseen matemaattiseen käytäntöön.

Käsittely kattaa Nicolas Bourbakin kirjan *Elements of Mathematics Theory of Sets* ensimmäisen luvun *Description of Formal Mathematics.* Tutkielma seuraa alkutekstiä verraten uskollisesti.

Asiasanat: Nicolas Bourbaki, formalisointi, predikaattilogiikka

Sisältö

1 Johdanto

Tässä tutkielmassa peryhdytään Nicolas Bourbakin kehittämään matematiikan formalisointiin. Bourbaki loi formalisointinsa tarkoituksena luoda mahdollisimman yksinkertaisiten oletusten avulla kattava järjestelmä, josta voidaan johtaa käytännössä kaikki matematiikka.

Tutkielmassa operoidaan kahdella tasolla: matemaattisella ja metamatemaattisella. Meta-tasolla kuvaillaan ja määritellään itse matematiikkaa, ja pääosa tutkielman sisällöstä keskittyykin meta-tason operaatioiden tarkasteluun. Matemaattinen taso rakentuu meta-tason tarkastelujen kautta. Matematiikan rakenne määrittyy tutkielman edetessä. Sellaisia matematiikan käsitteitä kuin lause, määritelmä tai todistus ei oleteta tunnetuiksi, vaan ne kuvaillaan meta-tasolla. Tähän formaalin matematiikan kuvailemiseen käytetään luonnollista kieltä, tämän tutkielman tapauksessa suomea.

Tietyn käsitteen kuvaileminen metamatemaattisella tasolla voidaan samaistaa määritelmään matemaattisella tasolla. Kuvaileminen tapahtuu matematiikan ulkopuolella, kun taas määritelmä on matematiikan käsite. Tässä tutkielmassa käsitteen metamatemaattisesta kuvailemisesta käytetään nimitystä määrittely. Lauseiden vastineina metamatematiikassa toimivat kriteerit, jotka ovat keinoja helpottaa formaalin matematiikan esittämistä ja asioiden käsittelemistä. Näitä kriteerejä ei voi todistaa paikkansapitäviksi sanan matemaattisessa merkityksessä. Todistus on matematiikan käsite, ja täten käytettävissä vain matematiikan sisällä. Kriteerit taasen ovat metamatemaattinen apukeino matematiikan kuvailemisessa.

Esitetyt kriteerit kuitenkin perustellaan, jotta lukija voi varmistua niiden paikkansapitävyydestä. Osa perusteluista on varsin triviaaleja, mutta myöhemmin esitetyissä kriteereissä lopputulos on harvoin ilmeinen. Perustelut kuuluvat metamatematiikkaan, mutta niissä hyödynnetään matemaattisia merkintätapoja, kuten indeksointia, ja matemaattisia periaatteita, kuten induktiota.

Useita käsitteitä ei kuvata eksplisiittisesti, vaan niiden merkitys tarkentuu tutkielman edetessä. Esimerkiksi disjunktio $\vee$ saa merkityksensä tai-operaattorina alaluvussa 2.3.1, mutta sen ominaisuuksia kuvataan heti alaluvun 2.1 alusta alkaen.

Nicolas Bourbakiin liittyy värikäs historia, joka kuuluu matemaatikkojen folkloreen. Tätä historiaa käsitellään lyhyesti alaluvussa 1.1. Varsinainen formalisoinnin esittäminen ja käsittely tapahtuu luvussa 2. Alaluvuissa 2.1 ja 2.2 kuvaillaan perusteet, joille alaluvuissa 2.3, 2.4 ja 2.5 aletaan rakentaa predikaattilogiikkaa. Alaluvussa 2.3 lisätään struktuuriin negaatio ja disjunktio, ja näiden avulla implikaatio, konjunktio ja ekvivalenssi. Alaluvussa 2.4 kuvaillaan kvanttorit ja niiden käyttämiseen liittyvät säännöt. Viimeisenä alaluvussa 2.5 lisätään rakenteeseen yhtäsuuruus. Luvussa 3 pohditaan yhteenvetona lyhyesti formalisoinnin heikkouksia ja vahvuuksia verrattuna nykyiseen matemaattiseen käytäntöön.

1.1 Nicolas Bourbaki

1.1.1 Synty

Todistus on kaiken matematiikan perusta. Nykyaikana matematiikkaa opiskelevalle aksiomaattinen menetelmä ja sen käyttö ovat itsestäänselvyyksiä. Aksiomatisointi sinänsä ei ole uusi keksintö, varhaisin kattava tietyn matematiikan alan aksiomatisointi on Eukleideen geometrian aksiomatisointi teoksessa *Alkeet*. Todistuksen, aksiomatisoinnin ja formalismin merkitys on vaihdellut antiikin ajoista näihin päiviin. Nykyisen käytännön vakiintumiseen on vaikuttanut suuresti Nicolas Bourbakin työ. Bourbaki aloitti 1940-luvulla *Elements de Mathematique* -kirjasarjan kirjoittamisen ja julkaisemisen kunnianhimoisena tavoitteenaan matematiikan tärkeimpien osa-alueiden perusteellinen aksiomatisointi.

Kaikkien matematiikan alojen kattava formalismi tuntuu valtavalta tehtävältä yhdelle henkilölle, mikä pitää paikkansa myös Bourbakin tapauksessa. Nicolas Bourbaki ei ollut yksi henkilö, vaan nimi ryhmälle Pariisin Ecole Normale Superieuresta 1930-luvulla valmistuneita matemaatikkoja [2]. Ensimmäinen maailmansota oli tuhonnut kokonaisen sukupolven ranskalaisia, mikä näkyi myös tieteiden piirissä. Matematiikkaa hallitsivat eläkeikää lähestyvät professorit, jotka olivat loistavia matemaatikkoja, mutteivät enää kyenneet pysymään oppialan kehityksen vauhdissa. Vastavalmistuneet matematiikot olivat tyytymättömiä tilanteeseen, ja yhtenä tämän tyytymättömyyden seurauksena syntyi kollektiivinen matemaatikko Nicolas Bourbaki.

Bourbaki-ryhmän jäsenet toimivat 1930-luvulla eri puolilla Ranskaa yliopistoissa tutkimus- ja opetustehtävissä ja olivat huomanneet monia puutteita analyysin kursseilla yleisesti käytetyssä oppikirjassa [8]. Ryhmän alkuperäisenä tavoitteena olikin kirjoittaa nykyaikaisempi ja täsmällisempi oppikirja. Kokoontuessaan pohtimaan oppikirjan muotoa ryhmän jäsenet huomasivat pian, ettei pelkän yhden oppikirjan kirjoittaminen millään riittäisi, vaan koko matematiikan perusteet pitäisi kirjoittaa selkeään, täsmälliseen muotoon.

Tavoitteena oli myös muodostaa yhtenäinen formalismi, joka toimisi kaikissa matematiikan alueissa. Usko matematiikan yhtenäisyyteen näkyy selkeästi myös kirjasarjan nimessä. Tavallisesti ranskan kielessä matematiikka kirjoitetaan monikollisessa muodossa, mathématiques. Bourbaki -ryhmä valitsi nimeen yksiköllisen muodon mathématique korostaakseen tieteenalan yhtenäisyyttä.

1.1.2 Henkilö

Nimi Bourbaki tulee Napoleon III:n armeijan kenraalilta Charles Bourbakilta [2], jonka sotilaalliset ansiot olivat vähintäänkin kyseenalaiset [7, s. 26]. Osmo Pekonen [6, s. 61] kertoo ryhmän perustajajäseniin kuuluneen Andre Weilin Bourbakille kehittelemästä hyvin värikkäästä henkilöhistoriasta. Nicolas Bourbaki oli Poldavian Kuninkaallisen Tiedeakatemian kanoninen jäsen ja Nancagon yliopiston professori. Nimi Nancago oli yhdistelmä Nancystä ja Chigagosta, joiden yliopistoissa oli ryhmän jäseniä viroissa. Kun Encyclopedia Britannicassa julkaistiin artikkeli, jossa Bourbakin väitettiin olevan nimi ryhmälle ranskalaisia matemaatikkoja, Bourbaki lähetti toimitukselle vihaisen kirjeen ja alkoi levittää huhua, jonka mukaan artikkelin kirjoittaja oli pseudonyymi ryhmälle toimittajia [3].

Weil oli joutua Bourbakin takia ongelmiin Suomessa toisen maailmansodan aikana. Hän oli saapunut Suomeen Lars Ahlforsin ja Rolf Nevanlinnan vieraaksi välttääkseen asepalveluksen kotimaassaan Ranskassa. Liiallinen mielenkiinto ilmatorjuntapatteriin talvisodan syttymispäivänä vei Weilin vankilaan, ja Ahlforsin ja Nevanlinnan todistelujen avulla ranskalaismatemaatikko tyydyttiin vain karkoittamaan Suomesta vakoojana teloittamisen sijaan [6, s. 55].

1.1.3 Vaikutus

Bourbakin ensimmäiset kirjat julkaistiin aikana, jolloin matematiikassa oli painotettu intuitiota formalismin kustannuksella. Bourbakin tapauksessa tilanne oli päinvastainen, formalismi ja täsmällisyys olivat ryhmän jäsenten mielestä olennaisinta matematiikassa. Kirjojen teksti on tämän ajattelun konkretisoituma. Mitä tarpeetonta ei ole otettu mukaan, ja tarpeellinenkin on esitetty mahdollisimman yleisessä ja tiiviissä muodossa. Vaikka esitystyyliä arvosteltiin suuresti, sen tehokkuuden ansiosta useita käsitteitä ja merkintöjä vakiintui yleiseen matemaattiseen käyttöön. Käsitteet injektio, surjektio ja bijektio ovat Bourbakin käyttöönottamia, kuten myös merkinnät tyhjälle joukolle, $\emptyset$, ja implikaatiolle, $\Rightarrow$ (ks. esimerkiksi [2], [6] tai [8]).

Bourbaki-ryhmän toiminta jatkui pitkään aktiivisena, mutta alkoi vähitellen hiipua tultaessa 1980-luvulle. Monet ryhmän aikanaan kritisoiduista oivalluksista olivat muuttuneet yleisesti hyväksytyiksi käytänteiksi matematiikassa. Formalismin tärkeyden tunnustaa jokainen nykymatemaatikko. Aivan viime aikoina on Bourbakin formalisoinnille löytynyt uusia mahdollisuuksia matemaattisten lauseiden todistamisessa tietokoneella [4]. Tietokone ei kykene intuitioon, vaan vaatii mahdollisimman täsmällisen formalisoinnin pystyäkseen todistamaan matemaattisia lauseita. Esimerkki tällaisesta tiukasta formalisoinnista löytyy Boubrakin teoksista. Ennen toista maailmansotaa oppikirjan kirjoittamisena alkaneen projektin vaikutus matematiikkaan jatkuu.

2 Matematiikan formalisointi

Formaalin matematiikan perusyksikkö on *matemaattinen teoria* $\mathscr{T}$. Teorian käsitettä ei tässä vaiheessa pystytä määrittelemään tarkasti, vaan kuva käsitteestä rakentuu tutkielman edetessä. Kutakin teoriaa yksilöiviä piirteitä ovat

- aksioomat
- skeemat
- erityiset merkit.

Alaluvussa 2.1 selvitellään erityisten merkkien vaikutusta matemaattiseen teoriaan termien ja relaatioiden määrittelyn kautta. Alaluku 2.2 käsittelee yleisesti aksioomia ja skeemoja, ja alaluvuissa 2.3, 2.4 ja 2.5 tarkastelun kohteena on minkälaisia skeemoja vaaditaan loogiseen, kvantifioituun tai identiteetilliseen teoriaan.

2.1 Termit ja relaatiot

2.1.1 Merkit ja merkkijonot

Määrittely 2.1. Matemaattisessa teoriassa $\mathscr{T}$ *merkillä* tarkoitetaan

1. loogisia merkkejä : $\square$, τ, $\vee$ tai $\neg$.
2. kirjaimia,
3. kyseiseen teoriaan liittyviä erityisiä merkkejä.

Loogisilla merkeillä ei vielä tässä vaiheessa ole mitään erityistä merkitystä, vaan niiden tarkoitus selviää formaalin matematiikan kuvailun edetessä. Osa merkeistä voi olla lukijalle tuttu toisista yhteyksistä, ja esimerkiksi disjunktio $\vee$ ja negaatio $\neg$ ovat samanlaisessa asemassa kuin logiikassa yleensäkin. Merkkiä $\square$ ei pidä sekoittaa modaalilogiikassa käytettyyn välttämättömyys-operaattoriin.

Kirjaimilla tarkoitetaan latinalaisen aakkoston isoja ja pieniä kirjaimia. Kirjaimilla voi olla aksentti-merkkejä, joten myös A', A'', $A'''\ldots$ ovat kirjaimia. Tämän mukaisesti kirjaimia on rajattomasti, joten missä tahansa vaiheessa on mahdollista ottaa käyttöön kirjain, jota ei esiinny aikaisemmissa tarkasteluissa.

Erityiset merkit ovat yksi matemaattisia teorioita toisistaan erottavia piirteitä. Joukko-opissa eli joukkojen teoriassa (engl. Theory of Sets) erityisiä merkkejä ovat muun muassa $\in$ ja $=$. Osaa erityisistä merkeistä sanotaan *relationaalisiksi* ja toisia *substantiivisiksi*. Kun erityinen merkki esitellään ensimmäistä kertaa matemaattisessa teoriassa, kerrotaan samalla kumpaan luokkaan se kuuluu.

Määrittely 2.2. *Merkkijono* teoriassa $\mathscr{T}$ muodostetaan kirjoittamalla teorian $\mathscr{T}$ merkkejä peräkkäin. Tiettyjä merkkejä voidaan liittää toisiinsa pareittain rivien yläpuolelle sijoitetuilla *linkeillä*. Merkkijono on *ensimmäistä lajia*, jos se alkaa loogisella merkillä τ tai substatiivisella erityisellä merkillä, tai jos se koostuu yhdestä kirjaimesta. Muissa tapauksissa merkkijono on *toista lajia*.

Esimerkki 2.1. Olkoon s teorian $\mathscr{T}$ erityinen merkki. Nyt

$$\neg \vee sABsAC$$

on merkkijono teoriassa $\mathscr{T}$.

Merkkijonon muodostamiselle ei ole rajoituksia, mitkä tahansa peräkkäin kirjoitetut matemaattisen teorian $\mathscr{T}$ merkit muodostavat merkkijonon teoriassa $\mathscr{T}$. Teoriaan $\mathscr{T}$ liittyy sääntöjä, joiden avulla tietyt merkkijonot määritellään *termeiksi* ja toiset *relaatioiksi* teoriassa $\mathscr{T}$. Ne merkkijonot, jotka eivät ole termejä tai relaatioita teoriassa $\mathscr{T}$, eivät ole teorian $\mathscr{T}$ kannalta merkityksellisiä. Kuten muidenkin käsitteiden kohdalla, termeihin ja relaatioihin ei tarvitse kiinnittää tässä vaiheessa tarkempaa merkitystä.

Tässä tutkielmassa käytetään relaatio-sanaa erilaisessa merkityksessä verrattuna yleiseen matemaattiseen kirjoitukseen. Syynä tähän on lähdeuskollisuus; Bourbaki käyttää samassa merkityksessä englanninkielen sanaa relation. Relaatio siis ei ole tässä tutkielmassa karteesisen tulojoukon osajoukko, vaan sen merkitys on lähempänä lausetta tai väitettä.

Samoin kuten formaalin matematiikan merkkien kuvaileminen, termit ja relaatiot määrittelevien sääntöjen kuvaileminen ei kuulu formaaliin matematiikkaan. Sääntöjä kuvatessa käytetään muun muassa määrittelemättömiä merkkijonoja ja määrittelemättömiä kirjaimia. Tekstissä puhutaan yksinkertaisuuden vuoksi merkkijonosta A ja kirjaimesta x, vaikka tarkoitetaan itse asiassa merkkijonoa, jota merkitään kirjaimella A ja kirjainta, jota merkitään kirjaimella x.

Pelkkien puhtaiden merkkijonojen käyttö ei ole käytännössä järkevää. Tekstin lukemisen ja kirjoittamisen helpottamiseksi otetaan käyttöön lyhennysmerkintöjä, jotka eivät kuulu formaaliin matematiikkan. Näitä lyhennysmerkintöjä esitellään *määritelmien* avulla.

Määritelmä 2.1. Merkillä $\Rightarrow$ tarkoitetaan merkkijonoa $\neg\vee$.

Huomautus 2.1. Määritelmissä esitellään merkintä, joka edustaa tiettyä merkkijonoa. Kyseessä on siis lyhyempi tapa esittää tietty merkkijono, eikä määritelmä sinänsä tuo lisää struktruuria matemaattiseen teoriaan. Bourbaki käyttää määritelmää siis samassa merkityksessä kuin yleensäkin matematiikassa.

Määrittely 2.3. Olkoot A ja B merkkijonoja. Merkinnällä AB tarkoitetaan merkkijonoa, joka saadaan, kun merkkijonon A oikealle puolelle kirjoitetaan merkkijono B. Samalla periaatteella voidaan yhdistää myös useampia merkkijonoja ja merkkejä. Esimerkiksi merkinnällä $\vee A \in B$ tarkoitetaan merkkijonoa, joka saadaan, kun kirjoitetaan vasemmalta oikealla merkki $\vee$, merkkijono A, merkki $\in$ ja merkkijono B.

Määrittely 2.4. Olkoon A merkkijono ja x kirjain. Merkinnällä $\tau_x(A)$ (lue: merkkijonon A x-termi) tarkoitetaan merkkijonoa, joka saadaan seuraavalla tavalla: muodostetaan merkkijono τA, yhdistetään jokainen merkkijonossa A esiintyvä x linkeillä merkkijonon A vasemmalla puolella olevaan merkkiin τ. Sen jälkeen korvataan merkkijonossa A esiintyvät kirjaimet x loogisella merkillä $\square$. Lopputulokseksi saadussa merkkijonossa ei esiinny kirjainta x.

Esimerkki 2.2. Merkinnällä $\tau_x(\vee \neg \in xy = xy)$ tarkoitetaan merkkijonoa

$$\tau \vee \neg \in \square y = \square y$$

Loogisten merkkien τ ja $\square$ merkitys selviää osittain formatiivisen konstruktion määrittelyn yhteydessä alaluvussa 2.1.3 ja lopullisesti kvanttoreiden määrittelyn yhteydessä alaluvussa 2.4.

Määrittely 2.5. Olkoot A ja B merkkijonoja ja x kirjain. Merkinnällä $(B|\, x)A$ (Lue: B korvaa x:n A:ssa) tarkoitetaan merkkijonoa, joka saadaan, kun merkkijonossa A korvataan jokainen kirjain x merkkijonolla B.

2.1.2 Korvauskriteerit

Puhtaassa formaalissa matematiikassa olisi vain eksplisiittisesti kirjoitettuja merkkijonoja. Määritelmillä esitetyt lyhennysmerkinnät ovat jo sinänsä askel pois tuosta formaalista matematiikasta, muttei kuitenkaan vielä riittävä. Merkkijonojen lisäksi täytyy pystyä lyhentämään myös merkkijonoille tehtäviä operaatioita. Näiden operaatioiden lyhentämiseksi esitellään *kriteerejä*, jotka kertovat määrittelmättömien merkkijonojen avulla tiettyjen merkkijonolle tehtävien operaatioiden lopputuloksen. Nämä kriteerit esitellään käyttäen matemattisten merkintöjen lisäksi luonnollista kieltä, eikä niitä voi todistaa oikeiksi sanan matemaattisessa merkityksessä.

Kriteerien esittämisen yhteydessä voidaan selvittää, kuinka määrittelyjen ja aikaisempien kriteerien perusteella voidaan vakuuttua esitetyn kriteerin paikkansapitävyydestä. Tällaista selvitystä kustutaan kriteerin *perusteluksi.* Seuraavassa esitellään viisi kriteeriä, joita kutsutaan *korvauskriteereiksi.* Näiden kriteerien perustelut ovat yksinkertaisia, esimerkkinä on perusteltu kriteeri **KK 4**. Bourbaki on perustellut kriteerin **KK 2** [1, s. 19].

KK 1. *Olkoon A ja B merkkijonoja ja x ja x' kirjaimia. Jos kirjainta x' ei esiinny merkkijonossa A, niin merkkijono $(B|\, x)A$ on identtinen merkkijonon $(B|\, x')(x'|\, x)A$ kanssa.*

KK 2. *Olkoot A, B ja C merkkijonoja, ja olkoot x ja y eri kirjaimia. Jos y ei esiinny merkkijonossa B, niin merkkijono $(B|\,x)(C|\,y)A$ on identtinen merkkijonon*

$$((B|\,x)C|\,y)(B|\,x)A$$

kanssa.

KK 3. *Olkoon A merkkijono, ja olkoot x ja x' kirjaimia. Jos merkkijonossa A ei esiinny kirjainta x', niin merkkijono $\tau_x(A)$ on identtinen merkkijonon $\tau_{x'}((x'|\,x)A)$ kanssa.*

KK 4. *Olkoot A ja B merkkijonoja, ja olkoot x ja y erillisiä kirjaimia. Jos merkkijonossa B ei esiinny kirjainta x, niin merkkijono $(B|\,y)\tau_x(A)$ on identtinen merkkijonon $\tau_x((B|\,y)A)$ kanssa.*

Perustelu. Kriteerin perustelemiseksi näytetään merkkijonojen $(B|\,y)\tau_x(A)$ ja $\tau_x((B|\ \,y)A)$ olevan identtisiä. Molemmissa tapauksissa operoinnin kohteena on merkkijono A. Ensimmäisessä tapauksessa merkkijonosta A muodostetaan ensiksi x-termi, missä sitten korvataan jokainen kirjain y merkkijonolla B. Lopputuloksena olevassa merkkijonossa kaikki muut merkkijonon A merkit lukuunottamatta kirjaimia x ja y ovat ennallaan. Jokaisen merkkijonossa A esiintyneen kirjaimen x paikalla on looginen merkki $\square$, ja koska x ja y ovat eri kirjaimia, niin kaikkien merkkijonossa A esiintyneiden kirjainten y paikalla on merkkijono B. Toisessa tapauksessa ensiksi korvataan merkkijonon A kirjaimet y merkkijonolla B ja tästä saadusta merkkijonosta muodostetaan x-termi. Nyt jokaisen merkkijonossa A esiintyneen kirjaimen y paikalla on merkkijono B, kuten ensimmäisessäkin tapauksessa. Koska merkkijonossa B ei esiinny kirjainta x, niin kaikkien merkkijonossa A esiintyneiden kirjainten x paikalla on looginen merkki $\square$, aivan kuten ensimmäisessäkin tapauksessa. Täten molemmilla tavoilla saaduissa merkkijonoissa on täysin samat merkit samassa järjestyksessä, joten merkkijonot ovat identtisiä.

KK 5. *Olkoot A, B ja C merkkijonoja, olkoon x kirjain ja olkoon s erityinen merkki. Merkkijonolla A' tarkoitetaan merkkijonoa $(C|\,x)A$ ja merkkijonolla B' merkkijonoa $(C|\,x)B$. Merkkijonot*

$$(C|\,x)(\neg A), \quad (C|\,x)(\vee AB), \quad (C|\,x)(\Rightarrow AB) \quad \textit{ja} \quad (C|\,x)(sAB)$$

ovat pareittain identtisiä merkkijonojen $\neg A'$, $\vee A'B'$, $\Rightarrow A'B'$ ja $sA'B'$ kanssa.

Huomautus 2.2. Tästä eteenpäin kahden merkkijonon tai kirjaimen ollessa identtisiä voidaan sanoa niiden olevan samoja.

2.1.3 Formatiivinen konstruktio

Edellisissä luvuissa on esitelty matemaattisen teorian merkit ja merkkijonot, sekä määritelty joitakin lyhennysmerkintöjä. Seuraava askel matemaattisen teorian kuvailemisessa on esitellä keino erottaa mielekkäät merkkijonot merkityksettömistä. Tätä varten määritetään *formatiivisen konstruktion* käsite. Määrittelyssä on merkkijonon lajilla keskeinen asema. Tämä käsite on esitelty määrittelyssä 2.2.

Huomautus 2.3. Formatiivinen konstruktio ei ole määritelmien tapainen lyhennysmerkintä, eikä myöskään korvauskriteerien tapainen tiettyjen operaatioiden lopputulos. Alaluvussa 2.1.1 kuvailtiin, mitä tarkoitetaan kirjaimilla formaalissa matematiikassa, samoin nyt kuvaillaan formatiivisen konstruktion avulla, mitä tarkoitetaan termillä ja relaatiolla.

Määrittely 2.6. Formatiivinen konstruktio teoriassa $\mathscr{T}$ on luettelo merkkijonoja. Jokaiselle konstruktion merkkijonolle A tulee pitää paikkansa yksi seuraavista ehdoista:

1. A on kirjain.
2. Luettelossa esiintyy ennen merkkijonoa A sellainen toisen lajin merkkijono B, että A on $\neg B$.
3. Luettelossa esiintyy ennen merkkijonoa A sellaiset toisen lajin merkkijonot B ja C, että A on $\vee BC$.
4. Luettelossa esiintyy ennen merkkijonoa A sellaiset toisen lajin merkkijono B ja kirjain x, että A on $\tau_x(B)$.
5. Teoriassa $\mathscr{T}$ on erityinen merkki s, ja luettelossa esiintyy ennen merkkijonoa A sellaiset ensimmäisen lajin merkkijonot B ja C, että A on sBC.

Määrittely 2.7 (Termit ja relaatiot teoriassa $\mathscr{T}$)**.** Teorian $\mathscr{T}$ formatiivisessa konstruktiossa esiintyviä ensimmäisen lajin merkkijonoja sanotaan *termeiksi* teoriassa $\mathscr{T}$ ja toisen lajin merkkijonoja *relaatioiksi* teoriassa $\mathscr{T}$.

Tämän määrittelyn mukaan siis relaatioita ovat ne formatiivisessa konstruktiossa esiintyvät merkkijonot, jotka alkavat merkillä $\neg$, $\vee$ tai relationaalisella erityisellä merkillä. Termejä ovat taasen ne merkkijonot, jotka alkavat merkillä τ, substantiivisella merkillä, tai koostuvat yhdestä kirjaimesta.

Vaikka tässä vaiheessa ei ole sinänsä mitään tarvetta liittää termeihin ja relaatioihin lisämerkityksiä, se saattaa olla asian omaksumisen kannalta hyödyllistä. Intuitiivisesti voidaan ajatella, että merkkijonot, jotka ovat termejä, edustavat objekteja ja merkkijonot, jotka ovat relaatioita, edustavat näihin objekteihin liittyviä väittämiä. Tarkastellaan määrittelyn 2.6 ehtoja näiden intuitiivisten merkitysten valossa. Ehdot $1-3$ ja 5 ovat selkeitä ja helposti käsittettäviä, minkä johdosta ne käsitellään ensiksi. Neljäs ehto vaatii huolellisempaa tarkastelua, ja se käsitelläänkin viimeisenä. Seuraavat johtopäätökset eivät ole suoraa seurasta määrittelystä 2.6, vaan ne ovat eräs tapa selittää määrittelyn merkitystä matemaattisen teorian kannalta.

Ensimmäisen ehdon mukaan kirjaimet edustavat objekteja. Toisen ehdon mukaan merkkijonon B ollessa väittämä merkkijono $\neg B$ on myös väittämä. Kolmannen ehdon mukaan merkkijonojen B ja C ollessa väittämiä, myös merkkijono $\vee BC$ on väittämä. Viidennen ehdon mukaan, kun merkkijonot B ja C ovat objekteja ja erityinen merkki s on relationaalinen, merkkijono sBC on objekteja B ja C koskeva väittämä. Vastaavasti, jos s on substantiivinen erityinen merkki, niin sBC on objekti, joka riippuu objekteista B ja C.

Neljännen ehdon mukaan kun merkkijono B on väittämä ja x kirjain, niin $\tau_x(B)$ on objekti. Tarkemmin sanottuna $\tau_x(B)$ on sellainen objekti, jolla on merkkijonon B kirjaimeen x liittämät ominaisuudet. Esimerkiksi tarkastellaan tilannetta, jossa merkkijono B on $\in xy$. Nyt $\tau_x(B)$ on merkkijono $\tau \in \square y$, eli toisin sanoen sellainen objekti, joka kuuluu objektiin y. Tässä vaiheessa ei oteta kantaa siihen, onko tällaista objektia olemassa. Näin konstruoidun merkkijonon alussa sijaitseva τ kertoo, että kyseessä on termi. Kirjaimen x paikalle laitettu looginen merkki $\square$ kertoo, minkä objektin suhteen $\tau_x(B)$ on termi. Koska $\tau_x(B)$ kuvaa yleistä termiä, jolla on merkkijonon B kirjaimeen x liittämät ominaisuudet, ei merkkijonoon $\tau_x(B)$ jätetä kirjainta x, vaan sen paikalle laitetaan merkki $\square$ ikään kuin tyhjäksi paikaksi. Periaatteessa merkin $\square$ paikalle voitaisiin laittaa merkki τ. Kuitenkin koska ensimmäinen merkki määrää merkkijonon lajin, ja sitä kautta sen, onko kyseessä mahdollisesti termi vai relaatio, tällaisessa tilanteessa pitäisi myös merkkijonon alkuun laittaa merkki, joka tekisi merkkijonosta ensimmäisen lajin merkkijonon. Merkki τ pitää yhdistää linkeillä merkkiin $\square$, jotta pystytään erottamaan eri merkkeihin τ liittyvät merkit $\square$. Tämä tarve on ilmeinen tarkasteltaessa merkkijonoa $\tau_x(\vee BC)$, missä A on merkkijono $\in zx$, B merkkijono $\in \tau_x(A)y$ ja C merkkijono $= xy$. Lopputuloksena on merkkijono

$$\tau \vee (\in (\tau \in z\square)y)(= \square y).$$

Esimerkki 2.3. Seuraava merkkijonojen luettelo muodostaa formatiivisen konstruktion joukkojen teoriassa $\mathscr{T}$, missä $\in$ ja $=$ ovat relationaalisia merkkejä:

$$x \tag{2.1}$$
$$y \tag{2.2}$$
$$\in xy \tag{2.3}$$
$$= xy \tag{2.4}$$
$$\neg \in xy \tag{2.5}$$

$$\vee\neg \in xy = xy \tag{2.6}$$

$$\tau \vee \neg \in \square y = \square y \tag{2.7}$$

Jokaiselle luettelon merkkijonolle pätee jokin määrittelyn 2.6 viidestä ehdosta. Merkkijonoille (2.1) ja (2.2) pätee ensimmäinen ehto, molemmat ovat kirjaimia. Merkkijonossa (2.3) $\in$ on teorian $\mathscr{T}$ erityinen merkki, jota edeltää kaksi ensimmäisen lajin merkkijonoa x ja y. Merkkijono toteuttaa siis ehdon 5. Sama koskee myös merkkijonoa (2.4). Merkkijonolle (2.5) pätee ehto 2, sillä merkkijono $\in xy$ on toisen lajin merkkijono, koska $\in$ on relationaalinen merkki teoriassa $\mathscr{T}$. Merkkijono $\neg \in xy$ on toisen lajin merkkijono. Merkki $=$ on relationaalinen merkki teoriassa $\mathscr{T}$, joten myös merkkijono $= xy$ on toista lajia. Siis merkkijonolle (2.6) pätee kolmas ehto. Merkkijono $\vee\neg \in xy = xy$ on toisen lajin merkkijono, ja x on kirjain, joten merkkijono (2.7) toteuttaa neljännen ehdon.

Jos merkkijono A on relaatio, niin se esiintyy formatiivisessa konstruktiossa, ei ole kirjain eikä ala merkillä τ. Lisäksi sille pätee jokin seuraavista:

- Formatiivisessa konstruktiossa merkkijonoa A edeltää sellainen merkkijonoa B, että A on $\neg B$.
- Formatiivisessa konstruktiossa merkkijonoa A edeltävät sellaiset kaksi merkkijonoa B ja C, että A on $\vee BC$.
- Formatiivisessa konstruktiossa merkkijonoa A edeltävät sellaiset kaksi merkkijonoa B ja C, että A on sBC, missä s on relationaalinen merkki.

2.1.4 Formatiiviset kriteerit

Seuraavassa esitellään ja perustellaan kriteerejä, jotka ovat seurausta määrittelystä 2.6. Tarkastelun kohteena formatiivisissa kriteereissä on, kuinka erilaiset operaatiot relaatiolle tai termille A vaikuttavat sen asemaan teoriassa $\mathscr{T}$. Toisin sanoen tutkitaan esimerkiksi, onko relaatio, josta on tietyt kirjaimet korvattu merkkijonolla, yhä relaatio.

FK 1. *Jos A ja B ovat relaatioita teoriassa $\mathscr{T}$, niin $\vee AB$ on relaatio teoriassa $\mathscr{T}$.*

Perustelu. Koska A ja B ovat relaatioita, ne esiintyvät jossakin formatiivisessa konstruktiossa. Tarkastellaan sellaista merkkijonojen luetteloa, joka saadaan kirjoitettaessa ensin merkkijonon A sisältävän konstruktion merkkijonot ja niiden perään merkkijonon B sisältävän konstruktion merkkijonot. Nyt saatu uusi merkkijonojen luettelo on on formatiivinen konstruktio, sillä jokainen merkkijono täyttää konstruktioiden yhteenliittämisen jälkeen saman ehdon kuin ennen sitä. Tämän konstruktion perään kirjoitetaan merkkijono $\vee AB$. Nyt saatu luettelo on formatiivinen konstruktio, koska A ja B

ovat toisen lajin merkkijonoja. $\vee AB$ on toisen lajin merkkijono, joka esiintyy formatiivisessa konstruktiossa. Täten se on relaatio teoriassa $\mathscr{T}$.

Seuraavat kolme kriteeriä voidaan perustella vastaavalla tavalla.

FK 2. *Jos A on relaatio teoriassa $\mathscr{T}$, niin $\neg A$ on relaatio teoriassa $\mathscr{T}$.*

FK 3. *Jos A on relaatio teoriassa $\mathscr{T}$ ja x kirjain, niin $\tau_x(A)$ on termi teoriassa $\mathscr{T}$.*

FK 4. *Jos A ja B ovat termejä teoriassa $\mathscr{T}$ ja s relationaalinen merkki, niin sAB on relaatio teoriassa $\mathscr{T}$. Vastaavasti jos s on substatiivinen merkki, niin sAB on termi teoriassa $\mathscr{T}$.*

Seuraavan kriteerin perustelu nojaa aikaisempiin formatiivisiin kriteereihin sekä määritelmään 2.1.

FK 5. *Jos A ja B ovat relaatioita teoriassa $\mathscr{T}$, niin $\Rightarrow AB$ on relaatio teoriassa $\mathscr{T}$.*

Perustelu. Merkkijono $\Rightarrow AB$ tarkoittaa määritelmän 2.1 mukaan merkkijonoa $\vee\neg AB$. Kriteerin **FK 2** perusteella $\neg A$ on relaatio teoriassa $\mathscr{T}$. Nyt kriteerin **FK 1** mukaan merkkijono $\neg A \vee B$, eli $\Rightarrow AB$ on relaatio teoriassa $\mathscr{T}$.

Tähän asti sekä korvauskriteerien että formatiivisten kriteerien perustelut ovat olleet yksinkertaisia. Formatiiviset kriteerit **FK 6**, **FK 7** ja **FK 8** eivät ole yhtä itsestäänselviä, vaan vaativat huolellisempia tarkasteluja. Aina seuraavan kriteerin perustelussa käytetään hyväksi edellisiä kriteerejä. Eräänlaisena tavoitteena on kriteeri **FK 8**, jonka mukaan voimme korvata relaatiossa tai termissä olevan kirjaimen termillä lopputuloksen pysyessä vastaavasti relaationa tai terminä.

Kaikissa kolmessa kriteerissä tutkitaan luetteloa merkkijonoja, jotka on saatu korvaamalla alkuperäisen formatiivisen konstruktion kaikista merkkijonoista kirjain joko toisella kirjaimella tai termillä. Tämä uusi merkkijonojen luettelo tulee osoittaa formatiiviseksi konstruktioksi. Käytännössä tämä tapahtuu tutkimalla uuden luettelon mielivaltaista merkkijonoa A'_i, joka siis on saatu alkuperäisen konstruktion merkkijonosta A_i korvaamisen avulla. Koska A_i esiintyy formatiivisessa konstruktiossa, se toteuttaa jonkin määrittelyn 2.6 ehdoista. Kussakin tapauksessa merkkijonon A'_i tulee myös toteuttaa sama ehto. Perusteluissa käydään läpi kaikki vaihtoehdot; merkkijono A voi olla kirjain, sitä voi edeltää sellaiset merkkijonot B ja C, että A on joko $\neg B$, $\vee BC$ tai sBC, missä s on erityinen merkki teoriassa $\mathscr{T}$. Edellä mainittujen ehtojen toteaminen on yksinkertaista ja etenee samoin kaikissa kolmessa perustelussa. Viimeisenä tutkitaan tapaus, jossa z on kirjain, ja B sellainen merkkijono, että A on $\tau_z(B)$. Tässä tarkastelussa ongelmia tuottaa kirjain z, joka voi olla sama kuin korvattava kirjain tai korvaava kirjain, tai se saattaa esiintyä korvaavassa termissä. Merkkijonon laji on tärkeätä formatiivisessa konstruktiossa. Lukijaa kehoitetaakin pitämään mielessä sekä määrittelyn 2.6 ehdot että korvauskriteerit **KK 1** – **KK 5** mahdollisimman tarkasti.

FK 6. *Muodostakoon merkkijonot A_1, A_2, ... , A_n teorian $\mathscr{T}$ formatiivisen konstruktion, ja olkoot x ja y kirjaimia. Oletetaan, että kirjainta y ei esiinny missään formatiivisen konstruktion merkkijonossa A_i, missä $i = 1, 2, \ldots,$ n. Tällöin merkkijonot $(y|\,x)A_1$, $(y|\,x)A_2$, ..., $(y|\,x)A_n$ muodostavat teorian $\mathscr{T}$ formatiivisen konstruktion.*

Perustelu. Kriteerin perustelemiseksi tulee näyttää, että jälkimmäisen luettelon mielivaltainen merkkijono $(y|\,x)A_i$ (merkitään A_i') toteuttaa määrittelyn 2.6 ehdot. Todetaan alkuun, että jos x ja y ovat samoja kirjaimia, niin oletuksen mukaan kirjainta x ei esiinny missään merkkijonossa A_i. Tällöin $(y|\,x)A_i$ on sama merkkijono kuin A_i ja jälkimmäinen merkkijonojen sarja sama kuin alkuperäinenkin, ja täten kriteeri pitää paikkansa.

Jos A_i on kirjain, niin $(y|\,x)A_i$ joko pysyy alkuperäisenä kirjaimena, tai on kirjain y. Molemmissa tapauksissa merkkijono toteuttaa ensimmäisen ehdon. Olkoon A_i muotoa $\neg A_j$, missä A_j on toisen lajin merkkijono, joka edeltää merkkijonoa A_i formatiivisessa konstruktiossa. Tällöin merkkijonojen A_1', A_2', ..., A_n' luettelossa on olemassa toisen lajin merkkijono $(y|\,x)A_j$, joka edeltää merkkijonoa $(y|\,x)A_i$. Koska A_i on identtinen merkkijonon $\neg A_j$ kanssa, niin $(y|\,x)A_i$ on identtinen merkkijonon $(y|\,x)\neg A_j$ kanssa. Kriteerin **KK 5** mukaan merkkijono $(y|\,x)\neg A_j$ on identtinen merkkijonon $\neg(y|\,x)A_j$. Nyt merkkijono $(y|\,x)A_i$ toteuttaa toisen ehdon. Samanlainen päättely pätee myös, jos A_i on muotoa $\vee A_j A_k$ tai $sA_l A_m$, missä s on teorian $\mathscr{T}$ erityinen merkki, A_j ja A_k merkkijonoa A_i edeltäviä toisen lajin merkkijonoja ja A_l ja A_m merkkijonoa A_i edeltäviä ensimmäisen lajin merkkijonoja.

Olkoon nyt A_i muotoa $\tau_z(A_j)$, missä A_j on merkkijonoa A_i edeltävä toisen lajin merkkijono ja z kirjain. Nyt on kolme mahdollista tilannetta, joita tulee tarkastella erikseen. Kussakin tapauksessa pitää merkkijonon $(y|\,x)A_i$ toteuttaa määrittelyn 2.6 neljäs ehto. Täytyy siis näyttää, että merkkijonoa A_i' edeltää sellainen toisen lajin merkkijono A_j', että A_i' on $\tau_z(A_j')$, missä z on kirjain. Kolme mahdollista tilannetta ovat seuraavat:

1. z on eri kirjain kuin x tai y. Nyt merkkijono $(y|\,x)A_i$ on identtinen merkkijonon $(y|\,x)\tau_z(A_j)$ kanssa. Kriteerin **KK 4** perusteella tämä taasen on identtinen merkkijonon $\tau_z((y|\,x)A_j)$ kanssa. Koska A_j on formatiivisessa konstruktiossa merkkijonoa A_i edeltävä toisen lajin merkkijono, niin $(y|\,x)A_j$ on luettelossa A_1', A_2', ..., A_n' merkkijonoa $(y|\,x)A_i$ edeltävä toisen lajin merkkijono. Siispä merkkijono $(y|\,x)A_i$ toteuttaa määrittelyn 2.6 neljännen ehdon.

2. z on identtinen kirjaimen x kanssa. Merkkijono A_i on identtinen merkkijonon $\tau_z(A_j)$ kanssa, jossa ei määrittelyn 2.4 mukaan siis esiinny kirjainta z. Siispä merkkijonossa A_i ei esiinny myöskään kirjainta x, joten merkkijono $(y|\,x)A_i$ on identtinen merkkijonon A_i kanssa. Koska x ja z ovat sama kirjain, niin A'_i on identtinen merkkijonon $\tau_x(A_j)$ kanssa. Koska kirjainta y ei esiinny merkkijonossa A_j, niin kriteerin **KK 3** mukaan $\tau_x(A_j)$ on identtinen merkkijonon $\tau_y((y|\,x)A_j)$, eli toisin sanoen merkkijonon[1] $\tau_y(A'_j)$ kanssa. Nyt siis merkkijonoa A'_i edeltää luettelossa A'_1, A'_2, ..., A'_n sellainen merkkijono A'_j, että A'_i on $\tau_y(A'_j)$. Täten $(y|x)A_i$ toteuttaa määrittelyn 2.6 neljännen ehdon.

3. z on identtinen kirjaimen y kanssa. Koska kirjainta y ei alkuperäisen oletuksen mukaan esiinny missään konstruktion merkkijonoista, merkkijono A_i, eli merkkijono $\tau_z(A_j)$, on määrittelyn 2.4 mukaan identtinen merkkijonon τA_j kanssa. Nyt siis merkkijono $(y|\,x)A_i$ on identtinen merkkijonon $\tau(y|\,x)A_j$ kanssa. Tämä merkkijono on identtinen merkkijonon $\tau_u((y|\,x)A_j)$ kanssa, kun kirjain u ei esiinny merkkijononssa $(y|\,x)A_j$. Myös tässä tapauksessa merkkijono $(y|\,x)A_i$ toteuttaa neljännen ehdon.

Siispä merkkijono $(y|\,x)A_i$ toteuttaa jonkin formatiivisen konstruktion ehdoista kaikissa tapauksissa, ja siten merkkijonojen A'_1, A'_2, ... ,A'_n luettelo on formatiivinen konstruktio.

Kriteerin **FK 6** mukaan merkkijonojen luettelo, joka on saatu korvaamalla jokin formatiivisessa konstruktiossa esiintyvä kirjain toisella, on myös formatiivinen konstruktio, jos korvaavaa kirjainta ei esiinny missään konstruktion merkkijonoista.

FK 7. *Olkoon A merkkijono ja x ja y kirjaimia. Jos A on relaatio teoriassa $\mathscr{T}$, niin $(y|\,x)A$ on relaatio teoriassa $\mathscr{T}$. Vastaavasti, jos A on termi teoriassa $\mathscr{T}$, niin $(y|\,x)A$ on termi teoriassa $\mathscr{T}$.*

Perustelu. Jos x ja y ovat sama kirjain, niin $(y|\,x)A$ on merkkijono A, ja kriteeri pitää paikkansa. Oletetaan nyt, että x ja y ovat eri kirjaimia. Koska A on relaatio tai termi, se esiintyy formatiivisessa konstruktiossa. Olkoon A_1, A_2, ... , A_n formatiivinen konstruktio, jossa merkkijono A esiintyy. Nyt tulee näyttää, että kun A_t on tässä konstruktiossa esiintyvä relaatio, niin myös A'_t on relaatio, ja jos A_t on konstruktiossa eiintyvä termi, niin myös A'_t on

[1]Bourbakin kirjassa on tässä kohtaa [1, s. 22] painovirhe; merkkijonoa $\tau_x(A_j)$ väitetään identtiseksi merkkijonon $\tau_y(A_j)$ kanssa, todellisuudessa $\tau_x(A_j)$ on identtinen merkkijonon $\tau_y(A'_j)$ kanssa.

termi. Oletetaan[2] nyt, että kriteeri pätee merkkijonoille A_1, A_2, ... , A_{i-1}, ja tutkitaan merkkijonoa A_i. Olkoon A_i kirjain ja siten myös termi. Nyt myös $(y|\,x)A_i$ on kirjain ja siten termi. Oletetaan, että merkkijonoa A_i edeltävät sellaiset relaatiot A_j ja A_k, että A_i on identtinen merkkijonon $\vee A_jA_k$ kanssa. Nyt merkkijono $(y|\,x)A_i$ on identtinen merkkijonon $(y|\,x) \vee A_jA_k$ kanssa. Tämä taasen on identtinen merkkijonon $\vee(y|\,x)A_j(y|\,x)A_k$ kanssa kriteerin **KK 5** perusteella. Oletuksen mukaan relaatiot A_j ja A_k toteuttavat kriteerin, joten merkkijonot $(y|\,x)A_j$ ja $(y|\,x)A_k$ ovat relaatioita. Nyt kriteerin **FK 1** perusteella $\vee(y|\,x)A_j(y|\,x)A_k$ on relaatio. Samanlainen päättely pätee myös, jos merkkijonoa A_i edeltää sellainen relaatio A_j, että A_i on identtinen merkkijonon $\neg A_j$ kanssa, tai jos merkkijonoa A_i edeltävät sellaiset termit A_j ja A_k, että A_i on identtinen merkkijonon sA_jA_k kanssa, missä s on teorian $\mathscr{T}$ erityinen merkki.

Oletetaan, että merkkijonoa A_i edeltää sellainen relaatio A_j, että A_i on identtinen merkkijonon $\tau_z(A_j)$ kanssa, missä z on kirjain. Nyt on kolme mahdollista tilannetta:

1. z on eri kirjain kuin x tai y. Merkkijono $(y|\,x)A_i$ on identtinen merkkijonon $(y|\,x)\tau_z(A_j)$ kanssa. Tämä merkkijono on kriteerin **KK 4** mukaan identtinen merkkijonon $\tau_z((y|\,x)A_j)$ kanssa, koska z ja y ovat eri kirjaimia. Oletuksen mukaan relaatio A_j toteuttaa kriteerin, joten myös $(y|\,x)A_j$ on relaatio, ja kriteerin **FK 3** perusteella $\tau_z((y|\,x)A_j)$ on termi. Siis $\tau_z(A'_j)$ eli A'_i on termi[3]

2. z on identtinen kirjaimen x kanssa. A_i on merkkijono $\tau_z(A_j)$. Koska merkkijonossa A_i ei esiinny kirjainta z, niin merkkijono $(y|\,x)A_i$ on identtinen merkkijonon A_i kanssa. A_i on termi ja identtinen merkkijonon A'_i kanssa. Täten $(y|\,x)A_i$ on termi.

3. z on identtinen kirjaimen y kanssa. Nyt ei voida soveltaa kriteeriä **KK 4**, koska kirjaimen x korvaava merkkijono y sisältää merkin z; kyseessä on sama kirjain. Tiedämme oletuksen perusteella, että kriteeri pätee kaikille merkkijonoa A_i edeltäville merkkijonoille, ja että merkkijono A_j on merkkijonoa A_i edeltävä relaatio. Tutkitaan konstruktiota A_1, A_2, ..., A_j. Olkoon u sellainen kirjain, jota ei esiinny missään konstruktion merkkijonossa. Lisäksi u on eri kirjain kuin x tai y. Kriteerin

[2] Tässä metamatemaattisessa perustelussa käytetään hyväksi induktioperiaatetta. Periaatteen käyttäminen ei ole ongelmatonta, koska ei ole ilmeistä, että induktioperiaatteen avulla perusteltu kriteeri todellakin pätee kaikissa tapauksissa. Bourbaki käsittelee ongelmaa johdannossaan [1, s. 11]. Periaatteessa ongelma voitaisiin välttää osittain olemalla käyttämättä kriteerejä, mikä tekisi matemaattisen tekstin lukemisen käytännössä mahdottomaksi. Bourbaki vetoaakin luottamaan "matemaatikkojen maalaisjärkeen", jonka mukaan induktioperiaatteen voidaan uskoa pitävän paikkansa käsitellyssä tilanteessa.

[3] Myös tässä kohdassa on Bourbakin kirjassa [1, s. 22] painovirhe. Lopputuloksena merkkijono A_i todetaan termiksi. Tämä kuitenkin on oletettu jo aikaisemmin, ja pitäisikin todeta merkkijono A'_i termiksi, mikä on vaatimus kriteerin pätemiselle.

FK 6 perusteella merkkijonojen $(u|\,y)A_1$, $(u|\,y)A_2$, ..., $(u|\,y)A_j$ luettelo on teorian $\mathscr{T}$ formatiivinen konstruktio. Merkitään merkkijonoa $(u|\,y)A_1$ merkkijonolla A_1'', merkkijonoa $(u|\,y)A_2$ merkkijonolla A_2'' ja niin edelleen. Koska tässä uudessa konstruktioissa ei esiinny kirjainta y, voidaan käyttää kriteeriä **FK 6** uudestaan. Nyt siis myös sarja $(y|\,x)A_1''$, $(y|\,x)A_2''$, ..., $(y|\,x)A_j''$ on teorian $\mathscr{T}$ formatiivinen konstruktio. Koska on oletettu kriteerin **FK 7** pitävän paikkansa merkkijonoa A_i edeltävillä merkkijonoilla, niin merkkijono $(y|\,x)A_j''$ on relaatio. Tästä seuraa, että $\tau_u((y|\,x)A_j'')$ on termi teoriassa $\mathscr{T}$. Kriteerin **KK 4** mukaisesti tämä merkkijono $\tau_u((y|\,x)A_j'')$ on identtinen merkkijonon $(y|\,x)\tau_u(A_j'')$ kanssa, joka siis on merkkijono $(y|\,x)\tau_u((u|\,y)A_j)$. Tämä merkkijono on kriteerin **KK 3** mukaisesti identtinen merkkijonon $(y|\,x)\tau_y(A_j)$, ja edelleen merkkijonon $(y|\,x)\tau_z(A_j)$ kanssa, joka on merkkijono $(y|\,x)A_i$. Nyt siis merkkijono $(y|\,x)A_i$ on termi teoriassa $\mathscr{T}$.

Nyt on näytetty, että relaatiosta tai termistä voidaan korvata kirjain toisella lopputuloksen säilyessä vastaavasti relaationa tai terminä.

FK 8. *Olkoon A relaatio teoriassa $\mathscr{T}$ (vastaavasti termi), x kirjain ja T termi teoriassa $\mathscr{T}$. Nyt $(T|\,x)A$ on relaatio teoriassa $\mathscr{T}$ (vastaavasti termi).*

Perustelu. Kriteerin perustelua hankaloittaa se, että termissä T saattaa esiintyä samoja kirjaimia, kuin merkkijonossa A. Tämä ongelma voidaan kuitenkin kiertää seuraavalla menettelyllä. Koska A on relaatio tai termi, se esiintyy formatiivisessa konstruktiossa. Olkoon sarja A_1, A_2, ..., A_n konstruktio, jossa A esiintyy. Olkoot x_1, x_2, ..., x_p kaikki merkkijonossa T esiintyvät eri kirjaimet. Liitetään nyt jokaiseen kirjaimeen x_i sellainen kirjain x_i', joka on eri kirjain kuin mikään kirjaimista x_1, x_2, ..., x_p tai kirjaimista, jotka esiintyvät merkkijonoissa A_1, A_2, ..., A_n. Tehdään kirjainten x_1', x_2', ..., x_p' valinta siten, että kirjaimet ovat myös keskenään eri kirjaimia. Nyt kriteerin **FK 7** mukaan merkkijono

$$(x_1'|\,x_1)(x_2'|\,x_2)\ldots(x_p'|\,x_p)T$$

on termi teoriassa $\mathscr{T}$, jota merkitään T'. Verrataan merkkijonoja $(T|\,x)A$ ja $(T'|\,x)A$. Merkkijonot ovat identtisiä lukuunottamatta kirjaimia x korvaavia merkkijonoja T ja T'. Koska merkkijonon T' kirjaimia x_i' ei esiinny merkkijonossa T, niin korvaamalla kirjaimet x_i' kirjaimilla x_i saadaan kriteerin **KK 1** perusteella merkkijono T. Merkkijonon T' kirjaimia ei esiinny merkkijonossa A, joten korvaamalla merkkijonon $(T'|\,x)A$ merkit x_i' merkeillä x_i saadaan merkkijono $(T|\,x)A$. Toisin sanoen merkkijono

$$(x_1|\,x_1')(x_2|\,x_2')\ldots(x_p|\,x_p')((x_1'|\,x_1)(x_2'|\,x_2)\ldots(x_p'|\,x_p)T|\,x)A \tag{2.8}$$

on identtinen merkkijonon $(T|\,x)A$ kanssa. Jos pystytään osoittamaan, että $(T'|\,x)A$ on termi tai relaatio, kriteeristä **FK 7** seuraa, että merkkijono (2.8) on vastaavasti termi tai relaatio. Tämä tarkoittaa sitä, että myös merkkijono

$(T|\,x)A$ on samaten relaatio tai termi. Tämän perusteella voidaan jatkossa olettaa, että merkkijonon T kirjaimia ei esiinny missään formatiivisen konstruktion merkkijonoissa A_i.

Näytetään, että jos merkkijono A_t on relaatio tai termi, niin merkkijono $(T|\,x)A_t$ on vastaavasti relaatio tai termi. Oletetaan, että tämä pitää paikkansa merkkijonoille A_1, A_2, …, A_{i-1}, ja tarkastellaan merkkijonoa A_i. Jos A_i on kirjain ja siten termi, merkkijono $(T|\,x)A_i$ on joko alkuperäinen kirjain tai merkkijono T. Molemmissa tapauksissa $(T|\,x)A_i$ on termi.

Olkoon s teorian $\mathscr{T}$ relationaalinen (vastaavasti substatiivinen) merkki ja merkkijonot A_j ja A_k merkkijonoa A_i edeltäviä termejä. Olkoon A_i muotoa sA_jA_k, ja siis relaatio (vastaavasti termi). Nyt $(T|\,x)A_i$ on identtinen merkkijonon $(T|\,x)sA_jA_k$ kanssa. Tämä merkkijono on kriteerin **KK 5** perusteella identtinen merkkijonon $s(T|\,x)A_j(T|\,x)A_k$ kanssa. Oletuksen mukaan kriteeri pätee merkkijonoille $(T|\,x)A_j$ ja $(T|\,x)A_k$, joten nämä merkkijonot ovat termejä. Nyt kriteerin **FK 4** perusteella merkkijono $(T|\,x)A_i$ on relaatio (vastaavasti termi). Perustelu on samanlainen, jos A_i on muotoa $\neg A_j$ tai $\vee A_jA_k$.

Olkoon nyt A_i muotoa $\tau_z(A_j)$, missä A_j on merkkijonoa A_i edeltävä relaatio ja x kirjain. Jälleen on tutkittavana kolme tapausta:

1. z on eri kirjain kuin x tai mikään merkkijonossa T esiintyvistä kirjaimista. $(T|\,x)A_i$ on merkkijono $(T|\,x)\tau_z(A_j)$, joka kriteerin **KK 4** perusteella on identtinen merkkijonon $\tau_z((T|\,x)A_j)$ kanssa. Oletuksen perusteella merkkijono $(T|\,x)A_j$ on relaatio, joten $(T|\,x)A_i$ termi, ja kriteeri pitää paikkansa.

2. z on sama kirjain kuin x. Koska A_i on merkkijono $\tau_z(A_j)$, siinä ei määrittelyn 2.4 mukaan esiinny kirjainta z, eikä täten myöskään kirjainta x. Siispä $(T|\,x)A_i$ on identtinen merkkijonon A_i kanssa ja täten termi. Kriteeri siis pitää paikkansa.

3. z esiintyy merkkijonossa T. Nyt siis kirjainta z ei esiinny merkkijonossa A_j, ja A_i on siis merkkijono τA_j. Nyt $(T|\,x)\tau A_j$ on merkkijono $\tau(T|\,x)A_j$. Oletuksen mukaan tiedetään, että $(T|\,x)A_j$ on relaatio. Olkoon u sellainen kirjain, jota ei esiinny merkkijonossa $(T|\,x)A_j$. Nyt merkkijono $\tau(T|\,x)A_j$ on identtinen merkkijonon $\tau_u((T|\,x)A_j)$ kanssa, joka kriteerin **FK 3** mukaisesti on termi. Mutta tämä merkkijono on merkkijono $(T|\,x)A_i$, ja kriteeri pätee tässäkin tapauksessa.

Nyt on osoitettu, että jos relaation tai termin jokin kirjain korvataan termillä, niin saatu uusi merkkijono on vastaavasti relaatio tai termi. Jos A on kirjainta x koskeva väittämä, niin $(T|\,x)A$ on vastaava objektia T koskeva väittämä. Jos taas A on kirjaimesta x riippuva objekti, niin $(T|\,x)A$ on objekti, joka riippuu vastaavalla tavalla objektista T.

2.1.5 Yhteenveto

Teorian $\mathscr{T}$ erityiset merkit määrittävät teorian termit ja relaatiot, sillä vain erityiset merkit operoivat ensimmäisen lajin merkkijonoilla. Kuten seuraavasta esimerkistä nähdään, ilman erityisiä merkkejä teoriassa $\mathscr{T}$ ei ole relaatioita. Loogisten merkkien avulla voidaan siis konstruoida lisää väittämiä ja objekteja erityisten merkkien määrittämistä väittämistä ja objekteista.

Esimerkki 2.4. Olkoon $\mathscr{T}$ teoria, jossa ei ole erityisiä merkkejä. Tutkitaan teorian $\mathscr{T}$ merkkijonoa A, joka esiintyy formatiivisessa konstruktiossa. Ainoa formatiivisen konstruktion ehdoista, joka voi täyttyä, on ensimmäinen. Sekä toisessa että kolmannessa ehdossa vaaditaan, että merkkijonoa A edeltäisi yksi tai useampi toisen lajin merkkijono. Toisen lajin merkkijonon aloittava merkki on joko $\neg$, $\vee$ tai relationaalinen merkki. Kaksi ensimmäistä tapausta eivät ole mahdollisia; ne vaatisivat aikaisemmin esiintyvän toisen lajin merkkijonon. Koska teoriassa $\mathscr{T}$ ei ole erityisiä merkkejä, toinen ja kolmas ehto eivät voi toteutua. Neljäs ehto koskee erityisiä merkkejä, joita tarkasteltavassa teoriassa ei ole. Täten teoriassa $\mathscr{T}$ ei ole relaatioita, ja ainoat termit ovat yksittäisiä kirjaimia.

Formatiivisen konstruktion määrittelystä nähdään, että negaatio ja disjunktio operoivat toisen lajin merkkijonoilla, siis relaatioilla. Tämä sopii hyvin yhteen termiin ja relaatioon liitetyn intuitiivisen merkityksen kanssa; negaatiota tai disjunktiota ei ole mielekästä kohdistaa objektiin, vaan väitteeseen.

Tähän asti merkkijonojen A ja B disjunktiota on merkitty $\vee AB$ ja näiden välisestä implikaatiosta on käytetty merkintää $\Rightarrow AB$. Merkinnät ovat olleet tarpeellisia merkkijonon lajin määrittelyn vuoksi. Tästä eteenpäin voidaan merkkijonojen A ja B disjunktiota ja näiden välistä implikaatiota merkitä yleisemmin käytetyillä tavoilla $A \vee B$ ja $A \Rightarrow B$.

2.2 Lauseet

Edellisessä luvussa esiteltiin, kuinka erityiset merkit vaikuttavat teoriaan $\mathscr{T}$. Jatkamme teorian käsitteen esittelemistä aksioomien ja skeemojen kuvailemisella.

2.2.1 Aksioomat

Määrittely 2.8. Aksioomat ovat teorian $\mathscr{T}$ relaatioita, ja ne jakautuvat *eksplisiittisiin* ja *implisiittisiin* aksioomiin. Eksplisiittiset aksioomat esitellään auki kirjoitettuina, niissä esiintyvät kirjaimet ovat teorian $\mathscr{T}$ *vakioita*. Implisiittiset aksioomat syntyvät *skeemojen* avulla. Skeema on sääntö, jolle pätevät seuraavat ehdot:

1. Sääntöä käyttämällä saadaan aikaiseksi relaatio teoriassa $\mathscr{T}$.

2. Jos T on termi teoriassa $\mathscr{T}$, x kirjain ja R relaatio, joka on syntynyt tiettyä skeemaa käyttämällä, niin samaa skeemaa käyttämällä tulee kyetä muodostamaan myös relaatio $(T|\,x)R$.

Eksplisiittisten aksioomien avulla ei voida tehdä yleispäteviä sääntöjä, koska eksplisiittisissä aksioomissa esiintyvät kirjaimet ovat teorian vakioita, ja siten tarkasti määriteltyjä objekteja. Implisiittisiä aksioomia tarvitaan, kun halutaan tietyn ominaisuuden pitävän paikkansa tarkemmin määrittelemättömälle objektille. Skeeman avulla määritellään sääntö, joka pätee kaikille teorian objekteille. Jälkimmäinen vaatii, että jos implisiittisestä aksioomasta korvataan jokin kirjain jollakin objektilla, niin saatu relaatio on aksiooma. Tämä ehto varmistaa, että sääntö tosiaankin pätee kaikille objekteille. Kaikki teorian $\mathscr{T}$ skeeman avulla luodut relaatiot ovat teorian $\mathscr{T}$ implisiittisiä aksioomia. Alaluvussa 2.3.1 esitellään skeemat, joiden avulla saadaan määriteltyä negaatioon ja disjunktioon liittyvät ominaisuudet kaikille teorian $\mathscr{T}$ objekteille.

2.2.2 Todistus

Määrittely 2.9. Teorian $\mathscr{T}$ demonstratiivinen teksti koostuu kahdesta osasta: teorian $\mathscr{T}$ relaatioista ja termeistä koostuvasta avustavasta formatiivisesta konstruktiosta ja teorian $\mathscr{T}$ *todistuksesta.* Todistus on luettelo teorian $\mathscr{T}$ relaatioita R, jotka esiintyvät avustavassa formatiivisessa konstruktiossa, ja joille pätee vähintäänkin yksi seuraavista ehdoista:

1. Relaatio R on teorian $\mathscr{T}$ eksplisiittinen aksiooma
2. Relaatio R saadaan soveltamalla teorian $\mathscr{T}$ skeemaa avustavassa formatiivisessa konstruktiossa esiintyvään termiin tai relaatioon.
3. Todistuksessa on kaksi sellaista relaatiota R edeltävää relaatiota S ja T, että T on identtinen relaation $S \Rightarrow R$ kanssa.

Huomautus 2.4. Avustava formatiivinen konstruktio tarvitaan, jotta voidaan tietää luettelossa esiintyvien merkkijonojen olevan relaatioita. Käytännössä luettelon merkkijonojen todetaan olevan relaatioita formatiivisten kriteerien implisiittisellä käytöllä, eikä todistusten yhteydessä avustavaa formatiivista konstruktiota kirjoiteta eksplisiittisesti.

Määrittely 2.10. Todistuksessa esiintyviä relaatioita sanotaan teorian $\mathscr{T}$ *lauseiksi.* Lausetta voidaan sanoa myös todeksi relaatioksi tai todeksi väittämäksi. Olkoon R relaatio teoriassa $\mathscr{T}$, x kirjain ja T termi teoriassa $\mathscr{T}$. Nyt jos $(T|\,x)R$ on lause teoriassa $\mathscr{T}$, sanotaan, että T on relaation R ratkaisu, tai että T toteuttaa relaation R. Tässä relaatiota R pidetään kirjaimesta x riippuvana relaationa.

Relaation R sanotaan olevan epätosi teoriassa $\mathscr{T}$, jos sen negaatio $\neg R$ on on teorian $\mathscr{T}$ lause. Jos sama relaatio on sekä tosi että epätosi teoriassa $\mathscr{T}$, sanotaan teorian $\mathscr{T}$ olevan *ristiriitainen*.

Sekä relaation totuus että epätotuus riippuvat kyseessä olevan teorian kehitysasteesta. Relaatio muuttuu todeksi, kun se saadaan lisättyä todistukseen. Alunperin epätosi relaatio saatetaan myöhemmässä vaiheessa saada lisättyä todistukseen, jolloin täytyy koko tarkasteltavaa teoriaa muuttaa. Tätä hyödynnettään myöhemmin muun muassa todistettaessa relaatiota lauseeksi vastaesimerkillä.

Aikaisemmin on käyty läpi korvauskriteerejä, jotka ovat käsitelleet merkkijonon tiettyjen merkkien korvaamista toisilla, ja formatiivisia kriteerejä, jotka käsittelevät erilaisten operaatioiden vaikutuksia merkkijonon asemaan teoriassa $\mathscr{T}$. Kaikkien relaatioiden todistaminen määritelmän perusteella ei olisi mielekästä, joten seuraavaksi esitellään *deduktiivisia* kriteerejä, joiden avulla voidaan lyhentää ja selkeyttää todistuksia.

K 1 (Syllogismi)**.** *Olkoon merkkijonot A ja B teorian $\mathscr{T}$ relaatioita. Jos A ja $A \Rightarrow B$ ovat teorian $\mathscr{T}$ lauseita, niin B on teorian $\mathscr{T}$ lause.*

Perustelu. Olkoon merkkijonojen luettelo R_1, R_2, $\ldots$, R_n teorian $\mathscr{T}$ todistus, jossa relaatio A esiintyy, ja olkoon merkkijonojen luettelo S_1, S_2, $\ldots$, S_l todistus, jossa relaatio $A \Rightarrow B$ esiintyy. Kirjoittamalla nämä luettelot peräkkäin saadaan uusi luettelo T_1, T_2, $\ldots$, T_m, jossa esiintyvät relaatiot A ja $A \Rightarrow B$. Jokainen alkuperäisten todistusten relaatioista toteutti ainakin yhden määrittelyn 2.9 ehdoista. Relaatiot toteuttavat samat ehdot myös uudessa luettelossa, missä kaksi todistusta on kirjoitettu peräkkäin. Siispä luettelo T_1, T_2, $\ldots$, T_m on todistus. Nyt voidaan lisätä merkkijono B luettelon perään, jolloin saatu luettelo $T_1, T_2, \ldots, T_m, B$ on teorian $\mathscr{T}$ todistus, ja täten relaatio B on teorian $\mathscr{T}$ lause.

2.2.3 Korvaukset teoriassa

Määrittely 2.11. Olkoon $\mathscr{T}$ teoria, A_1, A_2, $\ldots$, A_n sen eksplisiittiset aksioomat, x kirjain ja T termi teoriassa $\mathscr{T}$. Merkinnällä $(T|\,x)\mathscr{T}$ tarkoitetaan teoriaa, jonka merkit ja skeemat ovat samat kuin teoriassa $\mathscr{T}$, ja jonka eksplisiittiset aksioomat ovat $(T|\,x)A_1$, $(T|\,x)A_2$, $\ldots$, $(T|\,x)A_n$.

K 2. *Olkoon A teorian $\mathscr{T}$ lause, T termi teoriassa $\mathscr{T}$ ja x kirjain. Nyt $(T|\,x)A$ on teorian $(T|\,x)\mathscr{T}$ lause.*

Perustelu. Olkoon merkkijonojen luettelo $R_1, R_2, \ldots, R_n$ teorian $\mathscr{T}$ todistus, jossa relaatio A esiintyy. Tutkitaan sarjaa $(T|\,x)R_1$, $(T|\,x)R_2$, $\ldots$, $(T|\,x)R_n$, joka siis sisältää merkkijonon $(T|\,x)A$. Kaikki sarjan merkkijonot $(T|\,x)R_i$ ovat relaatioita kriteerin **FK 8** mukaan. Kriteerin todistamiseksi täytyy näyttää, että tämä luettelo on teorian $(T|\,x)\mathscr{T}$ todistus, jolloin siis $(T|\,x)A$ on teorian $(T|\,x)\mathscr{T}$ lause. Tutkitaan todistuksen mielivaltaista termiä R_k, joka siis on joko eksplisiittinen aksiooma, saatu soveltamalla teorian $\mathscr{T}$ skeemaa tai sitä edeltää kaksi relaatiota R_i ja R_j, missä R_j on $R_i \Rightarrow R_k$. Tarkastellaan jokainen tapaus erikseen. Jos R_k on teorian $\mathscr{T}$ eksplisiittinen aksiooma, niin $(T|\,x)R_k$ on teorian $(T|\,x)\mathscr{T}$ eksplisiittinen aksiooma. Jos R_k on teorian $\mathscr{T}$ implisiittinen aksiooma, niin määrittelyn 2.8 mukaisesti myös $(T|\,x)R_k$ on teorian $\mathscr{T}$ implisiittinen aksiooma, ja siten myös teorian $(T|\,x)\mathscr{T}$ implisiittinen aksiooma. Viimeisessä tapauksessa relaatiota $(T|\,x)R_k$ edeltää relaatiot $(T|\,x)R_i$ ja $(T|\,x)R_j$, missä $(T|\,x)R_j$ on $(T|\,x)(R_i \Rightarrow R_k)$, mikä on kriteerin **KK 5** mukaisesti identtinen relaation $(T|\,x)R_i \Rightarrow (T|\,x)R_k$ kanssa. Nyt on siis näytetty, että kaikissa tapauksissa relaatio $(T|\,x)R_k$ toteuttaa ainakin yhden todistuksen ehdoista. Siispä sarja $(T|\,x)R_1, (T|\,x)R_2, \ldots, (T|\,x)R_n$ on teorian $(T|\,x)\mathscr{T}$ todistus, ja relaatio $(T|\,x)A$ teorian $(T|\,x)\mathscr{T}$ lause.

K 3. *Olkoon A lause teoriassa $\mathscr{T}$, T termi teoriassa $\mathscr{T}$ ja x sellainen kirjain, joka ei ole teorian $\mathscr{T}$ vakio. Nyt $(T|\,x)A$ on teorian $\mathscr{T}$ lause.*

Perustelu. Tämä kriteeri seuraa suoraan edellisestä kriteeristä, jonka mukaan $(T|\,x)A$ on teorian $(T|\,x)\mathscr{T}$ lause. Kirjain x ei ole vakio, joten se ei esiinny teorian $\mathscr{T}$ eksplisiittisissä aksioomissa. Siispä teoria $(T|\,x)\mathscr{T}$ on sama kuin teoria $\mathscr{T}$.

Kriteerin perusteella lauseessa esiintyvä kirjain voidaan korvata objektilla, ja lopputulokseksi saatu merkkijono on lause, kunhan korvattu kirjain ei ole erityisesti määritelty objekti eli vakio. Jos tarkasteltavassa teoriassa ei ole eksplisiittisiä aksioomia, niin silloin teoriassa ei ole myöskään vakioita, jolloin kriteeriä voidaan käyttää ilman rajoituksia kirjaimen x suhteen. Tätä seikkaa hyödynnetään kriteerien perusteluissa alaluvuissa 2.3 ja 2.4.

2.2.4 Teorioiden vertailu

Määrittely 2.12. Teorian $\mathscr{T}'$ sanotaan olevan *vahvempi* kuin teoria $\mathscr{T}$, jos kaikki teorian $\mathscr{T}$ merkit ovat teorian $\mathscr{T}'$ merkkejä, kaikki teorian $\mathscr{T}$ skeemat ovat teorian $\mathscr{T}'$ skeemoja ja kaikki teorian $\mathscr{T}$ eksplisiittiset aksioomat ovat teorian $\mathscr{T}'$ lauseita. Jos $\mathscr{T}'$ on vahvempi kuin $\mathscr{T}$, niin voidaan sanoa myös teorian $\mathscr{T}$ olevan heikompi kuin $\mathscr{T}'$

Vahvemmassa teoriassa on siis käytössä heikomman teorian koko struktuuri, jonka lisäksi vahvemalla teorialla voi olla ominaisuuksia, joita ei ole heikommalla teorialla. Erottavia tekijöitä voivat olla kukin kolmesta teoriaa yksilöivästä piirteestä: eksplisiittiset aksioomat, skeemat tai erityiset merkit. Seuraavassa kriteerissä osoitetaan, että kaikki heikomman teorian lauseet ovat lauseita myös vahvemmassa teoriassa.

K 4. *Olkoon teoria $\mathscr{T}'$ vahvempi kuin teoria $\mathscr{T}$. Nyt kaikki teorian $\mathscr{T}$ lauseet ovat teorian $\mathscr{T}'$ lauseita.*

Perustelu. Olkoon luettelo $R_1, R_2, \ldots, R_n$ teorian $\mathscr{T}$ mielivaltainen todistus. Nyt tulee näyttää, että jokainen luettelon relaatio on lause myös teoriassa $\mathscr{T}'$. Oletetaan, että kriteeri pätee relaatiota R_k edeltäville relaatioille. Koska R_k on lause teoriassa $\mathscr{T}$, niin se täyttää jonkin määrittelyn 2.9 kolmesta ehdosta. Tarkastellaan kukin tapaus erikseen.

Jos R_k on teorian $\mathscr{T}$ eksplisiittinen aksiooma, se on teorian $\mathscr{T}'$ lause määrittelyn 2.12 mukaisesti. Jos taasen R_k on saatu soveltamalla teorian $\mathscr{T}$ skeemaa, niin koska määrittelyn 2.12 mukaan teorian $\mathscr{T}$ skeemat ovat myös teorian $\mathscr{T}'$ skeemoja. Voidaan soveltaa samaa skeemaa teoriassa $\mathscr{T}'$, jolloin R_k on lause teoriassa $\mathscr{T}'$. Viimeisenä on tapaus, jossa relaatiota R_k edeltää relaatiot R_i ja R_j, missä R_j on relaatio $R_i \Rightarrow R_k$. Oletuksen mukaan kriteeri pätee relaatiota R_k edeltäville relaatioille, joten relaatiot R_i ja $R_i \Rightarrow R_k$ ovat teorian $\mathscr{T}'$ lauseita, jolloin kriteerin **K 1** mukaan myös relaatio R_k on lause. Siis R_k on teorian $\mathscr{T}'$ lause kaikissa tapauksissa.

K 5. *Olkoon $\mathscr{T}$ teoria, A_1, A_2, …, A_n sen eksplisiittiset aksioomat, a_1, a_2, …, a_h sen vakiot ja T_1, T_2, …, T_h sen termejä. Oletetaan, että kaikilla $i = 1, 2, \ldots, n$ relaatiot*

$$(T_1|\, a_1)(T_2|\, a_2)\ldots(T_h|\, a_h)A_i$$

ovat teorian $\mathscr{T}'$ lauseita. Oletetaan lisäksi, että kaikki teorian $\mathscr{T}$ merkit ovat teorian $\mathscr{T}'$ merkkejä ja kaikki teorian $\mathscr{T}$ skeemat teorian $\mathscr{T}'$ skeemoja. Jos nyt A on teorian $\mathscr{T}$ lause, niin $(T_1|\, a_1)(T_2|\, a_2)\ldots(T_h|\, a_h)A$ teorian $\mathscr{T}'$ lause.

Perustelu. Tutkitaan teoriaa $(T_1|\, a_1)(T_2|\, a_2)\ldots(T_h|\, a_h)\mathscr{T}$. Määrittelyn 2.11 ja oletuksen mukaan tämän teorian skeemat ja merkit ovat samat kuin teorian $\mathscr{T}'$ skeemat ja merkit. Teorian $(T_1|\, a_1)(T_2|\, a_2)\ldots(T_h|\, a_h)\mathscr{T}$ eksplisiittiset aksioomat ovat relaatiot

$$(T_1|\, a_1)(T_2|\, a_2)\ldots(T_h|\, a_h)A_i, \text{ missä } i = 1, 2, \ldots, n.$$

Nämä relaatiot ovat oletuksen mukaan lauseita teoriassa $\mathscr{T}'$. Siispä määrittelyn 2.12 perusteella $\mathscr{T}'$ on vahvempi kuin teoria $(T_1|\, a_1)(T_2|\, a_2)\ldots(T_h|\, a_h)\mathscr{T}$. Nyt jos A on lause teoriassa $\mathscr{T}$, niin kriteerin **K 2** mukaan

$$(T_1|\, a_1)(T_2|\, a_2)\ldots(T_h|\, a_h)A$$

on teorian $(T_1|\, a_1)(T_2|\, a_2)\ldots(T_h|\, a_h)\mathscr{T}$ lause. Koska teoria $\mathscr{T}'$ on vahvempi kuin teoria $(T_1|\, a_1)(T_2|\, a_2)\ldots(T_h|\, a_h)\mathscr{T}$, niin voidaan soveltaa kriteeriä **K 4**. Nyt siis $(T_1|\, a_1)(T_2|\, a_2)\ldots(T_h|\, a_h)A$ on teorian $\mathscr{T}'$ lause.

Teorian $\mathscr{T}$ eksplisiittiset aksioomat ovat väitteitä, joiden oletetaan pätevän niissä esiintyville vakioille. Teorian $\mathscr{T}$ lause A ilmaisee ominaisuuden, joka on seurausta teorian $\mathscr{T}$ eksplisiittistä ja implisiittistä aksioomista. Kriteeri **K 5** toteaa, että mikäli teoriaa $\mathscr{T}$ vahvemmassa teoriassa $\mathscr{T}'$ on olemassa sellaiset objektit T_1, T_2, … T_h, joilla on samat ominaisuudet kuin teorian $\mathscr{T}$ vakioilla a_1, a_2, …, a_h, niin näillä objekteilla on myös ominaisuus A.

2.3 Loogiset teoriat

2.3.1 Loogisen teorian aksioomat

Loogisista merkeistä negaatio $\neg$ sai yleisesti matematiikassa siihen liitetyn merkityksensä alaluvussa 2.2.2 relaation epätotuuden määrittelyn yhteydessä. Seuraavassa liitetään disjunktio-operaattoriin ominaisuudet, joiden avulla se saa normaalin matemaattisen merkityksensä, ja samalla myös implikaatio saa merkityksensä.

Määrittely 2.13. Teoriaa $\mathscr{T}$ sanotaan *loogiseksi teoriaksi*, jos seuraavat skeemat **S 1**-**S 4** tuottavat implisiittisiä aksioomia.

S 1. *Jos A on relaatio teoriassa $\mathscr{T}$, niin relaatio $(A \vee A) \Rightarrow A$ on teorian $\mathscr{T}$ (implisiittinen) aksiooma.*

S 2. *Jos A ja B ovat teorian $\mathscr{T}$ relaatioita, relaatio $A \Rightarrow (A \vee B)$ on teorian $\mathscr{T}$ aksiooma.*

S 3. *Jos A ja B ovat teorian $\mathscr{T}$ relaatioita, relaatio $(A \vee B) \Rightarrow (B \vee A)$ on teorian $\mathscr{T}$ aksiooma.*

S 4. *Jos A, B ja C ovat teorian $\mathscr{T}$ relaatioita, relaatio*

$$(A \Rightarrow B) \Rightarrow ((C \vee A) \Rightarrow (C \vee B))$$

on teorian $\mathscr{T}$ aksiooma.

Esitetyt säännöt **S 1** - **S 4** ovat skeemoja, määrittelyn 2.8 ehdot pätevät kaikille näille säännöille. Näytetään, että sääntö **S 3** on skeema. Kriteereiden **FK 1** ja **FK 5** perusteella $(A \vee B) \Rightarrow (B \vee A)$ on relaatio, kun A ja B ovat relaatioita. Siis määrittelyn 2.8 ensimmäinen ehto pätee. Olkoon nyt R relaatio, joka on saatu soveltamalla sääntöä **S 3**. Nyt on olemassa sellaiset teorian $\mathscr{T}$ relaatiot A ja B, että R on $(A \vee B) \Rightarrow (B \vee A)$. $(T|\,x)R$ on siis relaatio $(T|\,x)((A \vee B) \Rightarrow (B \vee A))$, joka kriteerin **KK 5** perusteella on identtinen relaation $((T|\,x)A \vee (T|\,x)B) \Rightarrow ((T|\,x)B \vee (T|\,x)A)$ kanssa. Kriteerin **FK 8** mukaan sekä $(T|\,x)A$ että $(T|\,x)B$ ovat teorian $\mathscr{T}$ relaatioita, joten relaatio $((T|\,x)A \vee (T|\,x)B) \Rightarrow ((T|\,x)B \vee (T|\,x)A)$ saadaan myös soveltamalla sääntöä **S 3** relaatioihin $(T|\,x)A$ ja $(T|\,x)B$. Siis **S 3** täyttää myös määrittelyn 2.8 toisen ehdon, ja täten on skeema. Bourbaki on näyttänyt säännön **S 2** skeemaksi [1, s. 28], muut säännöt voidaan osoittaa skeemoiksi vastaavilla päättelyillä, . Tästä eteenpäin teorialla $\mathscr{T}$ tarkoitetaan loogista teoriaa.

Esimerkki 2.5. Näytetään, että loogisen teorian $\mathscr{T}$ ristiriitaisuudesta seuraa, että kaikki teorian $\mathscr{T}$ relaatiot ovat teorian $\mathscr{T}$ lauseita. Olkoon $\mathscr{T}$ ristiriitainen teoria, eli teoriassa $\mathscr{T}$ relaatiot A ja $\neg A$ ovat lauseita. Olkoon B teorian $\mathscr{T}$ mielivaltainen relaatio. Skeeman **S 2** mukaan relaatio $\neg A \Rightarrow (\neg A \vee B)$

on teorian $\mathscr{T}$ lause. Koska oletuksen mukaan $\neg A$ on teorian $\mathscr{T}$ lause, niin kriteerin **K 1** mukaan myös $(\neg A \vee B)$ on teorian $\mathscr{T}$ lause. Määritelmän 2.1 mukaan lause $(\neg A \vee B)$ on lause $A \Rightarrow B$. Oletuksen mukaan relaatio A on lause, joten voidaan soveltaa uudestaan kriteeriä **K 1**, mikä osoittaa, että relaatio B on teorian $\mathscr{T}$ lause.

2.3.2 Seurauksia aksioomista

Seuraavassa esitellään ja perustellaan lisää päättelyjä yksinkertaistavia kriteerejä, jotka ovat seurausta loogisen teorian skeemoista.

K 6. *Olkoon A, B ja C lauseita teoriassa $\mathscr{T}$. Jos $A \Rightarrow B$ ja $B \Rightarrow C$ ovat lauseita teoriassa $\mathscr{T}$, niin $A \Rightarrow C$ on lause teoriassa $\mathscr{T}$.*

Perustelu. Kriteerin **FK 2** mukaan merkkijonon A ollessa relaatio myös $\neg A$ on relaatio. Nyt soveltamalla skeemaa **S 4** relaatioihin B, C ja $\neg A$ relaatio

$$(B \Rightarrow C) \Rightarrow ((\neg A \vee B) \Rightarrow (\neg A \vee C))$$

on lause teoriassa $\mathscr{T}$. Määritelmän 2.1 mukaan lause on identtinen lauseen

$$(B \Rightarrow C) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$$

kanssa. Koska myös $B \Rightarrow C$ on lause teoriassa $\mathscr{T}$, niin relaatio

$$(A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$$

on lause teoriassa $\mathscr{T}$ kriteerin **K 1** perusteella. Koska $(A \Rightarrow B)$ on lause teoriassa $\mathscr{T}$, kriteerin **K 1** mukaan $A \Rightarrow C$ on lause teoriassa $\mathscr{T}$.

K 7. *Jos A ja B ovat relaatioita teoriassa $\mathscr{T}$, niin relaatio $B \Rightarrow (A \vee B)$ on lause teoriassa $\mathscr{T}$.*

Perustelu. Skeeman **S 2** mukaan relaatio $B \Rightarrow (B \vee A)$ on lause, ja skeeman **S 3** mukaan myös relaatio $(B \vee A) \Rightarrow (A \vee B)$ on lause. Nyt voidaan soveltaa näihin lauseisiin kriteeriä **K 6**, mikä täydentää perustelun.

K 8. *Jos A on relaatio teoriassa $\mathscr{T}$, $A \Rightarrow A$ on lause teoriassa $\mathscr{T}$.*

Perustelu. Skeeman **S 2** mukaan $A \Rightarrow (A \vee A)$ on lause, ja skeeman **S 1** mukaisesti $(A \vee A) \Rightarrow A$ on lause. Nyt voidaan soveltaa kriteeriä **K 6** näihin lauseisiin, jolloin relaatio $A \Rightarrow A$ on lause teoriassa $\mathscr{T}$.

K 9. *Jos A on relaatio teoriassa $\mathscr{T}$ ja B teorian $\mathscr{T}$ lause, niin relaatio $A \Rightarrow B$ on teorian $\mathscr{T}$ lause.*

Perustelu. Koska $\neg A$ ja B ovat relaatioita teoriassa $\mathscr{T}$, kriteerin **K 7** mukaan relaatio $B \Rightarrow (\neg A \vee B)$ on lause teoriassa $\mathscr{T}$. Toisin sanoen siis $B \Rightarrow (A \Rightarrow B)$ on teorian $\mathscr{T}$ lause. Nyt kriteerin **K 1** mukaan $(A \Rightarrow B)$ on teorian $\mathscr{T}$ lause.

Jos väittämä B on totta, niin implikaatio $A \Rightarrow B$ on kriteerin mukaan totta riippumatta siitä, onko väittämä A totta. Tämä implikaation ominaisuus on suora seuraus implikaation määritelmästä ja loogisen teorian aksioomista.

K 10. *Jos A on relaatio teoriassa $\mathscr{T}$, niin relaatio $A \vee \neg A$ on lause teoriassa $\mathscr{T}$.*

Perustelu. Kriteerin **K 8** mukaan relaatio $A \Rightarrow A$ on lause teoriassa $\mathscr{T}$. Siis määritelmän 2.1 mukaan relaatio $\neg A \vee A$ on lause teoriassa $\mathscr{T}$. Sovelletaan skeemaa **S 3** relaatioihin $\neg A$ ja A, jolloin relaatio $(\neg A \vee A) \Rightarrow (A \vee \neg A)$ teorian $\mathscr{T}$ lause. Sovelletaan kriteeriä **K 1** lauseisiin $\neg A \vee A$ ja $(\neg A \vee A) \Rightarrow (A \vee \neg A)$, jolloin relaatio $A \vee \neg A$ on lause teoriassa $\mathscr{T}$.

K 11. *Jos A on relaatio teoriassa $\mathscr{T}$, niin $A \Rightarrow \neg\neg A$ on teorian $\mathscr{T}$ lause.*

Perustelu. Koska A on relaatio, myös $\neg A$ on relaatio. Sovelletaan kriteeriä **K 10** relaatioon $\neg A$, jolloin relaatio $\neg A \vee \neg\neg A$ on lause teoriassa $\mathscr{T}$. Siis määritelmän 2.1 mukaan $A \Rightarrow \neg\neg A$ on lause teoriassa $\mathscr{T}$.

K 12. *Jos A ja B ovat teorian $\mathscr{T}$ relaatioita, niin $(A \Rightarrow B) \Rightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$ on teorian $\mathscr{T}$ lause.*

Perustelu. Kriteerin **K 11** mukaan $B \Rightarrow \neg\neg B$ on lause teoriassa $\mathscr{T}$. Sovelletaan skeemaa **S 4** relaatioihin B, $\neg\neg B$ ja $\neg A$, jolloin relaatio

$$(B \Rightarrow \neg\neg B) \Rightarrow ((\neg A \vee B) \Rightarrow (\neg A \vee \neg\neg B))$$

on lause teoriassa $\mathscr{T}$. Sovelletaan kriteeriä **K 1** näihin lauseisiin, jolloin relaatio

$$(\neg A \vee B) \Rightarrow (\neg A \vee \neg\neg B) \tag{2.9}$$

on lause teoriassa $\mathscr{T}$. Skeeman **S 3** mukaan myös relaatio

$$(\neg A \vee \neg\neg B) \Rightarrow (\neg\neg B \vee \neg A) \tag{2.10}$$

on lause teoriassa $\mathscr{T}$. Nyt sovelletaan kriteeriä **K 6** lauseisiin (2.9) ja (2.10), jolloin

$$(\neg A \vee B) \Rightarrow (\neg\neg B \vee \neg A) \tag{2.11}$$

on lause teoriassa $\mathscr{T}$. Määritelmän 2.1 mukaan relaatio (2.11) on identtinen relaation $(A \Rightarrow B) \Rightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$ kanssa, joka täten on lause teoriassa $\mathscr{T}$.

K 13. *Olkoon A, B ja C teorian $\mathscr{T}$ relaatioita. Jos $A \Rightarrow B$ on teorian $\mathscr{T}$ lause, niin relaatio $(B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$ on teorian $\mathscr{T}$ lause.*

Perustelu. Kriteerin **K 12** mukaan relaatio $(A \Rightarrow B) \Rightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$ on lause teoriassa $\mathscr{T}$, ja oletuksen mukaan relaatio $(A \Rightarrow B)$ on lause teoriassa $\mathscr{T}$. Sovelletaan kriteeriä **K 1** näihin lauseisiin, jolloin relaatio $\neg B \Rightarrow \neg A$ on lause teoriassa $\mathscr{T}$. Skeeman **S 4** mukaan myös relaatio

$$(\neg B \Rightarrow \neg A) \Rightarrow ((C \vee \neg B) \Rightarrow (C \vee \neg A))$$

on lause teoriassa $\mathscr{T}$. Sovelletaan kriteeriä **K 1** näihin lauseisiin, jolloin relaatio $(C \vee \neg B) \Rightarrow (C \vee \neg A)$ on lause teoriassa $\mathscr{T}$. Skeeman **S 3** mukaan relaatiot $(\neg B \vee C) \Rightarrow (C \vee \neg B)$ ja $(C \vee \neg A) \Rightarrow (\neg A \vee C)$ ovat lauseita teoriassa $\mathscr{T}$. Sovelletaan kriteeriä **K 6** lauseisiin $(\neg B \vee C) \Rightarrow (C \vee \neg B)$ ja $(C \vee \neg B) \Rightarrow (C \vee \neg A)$, jolloin relaatio $(\neg B \vee C) \Rightarrow (C \vee \neg A)$ on lause teoriassa $\mathscr{T}$. Sovelletaan uudestaan kriteeriä **K 6**, tällä kertaa lauseisiin $(\neg B \vee C) \Rightarrow (C \vee \neg A)$ ja $(C \vee \neg A) \Rightarrow (\neg A \vee C)$, jolloin relaatio $(\neg B \vee C) \Rightarrow (\neg A \vee C)$, eli relaatio $(B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$, on lause teoriassa $\mathscr{T}$.

Tästä eteenpäin voidaan käyttää jo esiteltyjä korvauskriteerejä ja formatiivisia kriteerejä ilman erityistä mainintaa, jos erehdyksen vaara ei ole ilmeinen. Sama pätee myös deduktiivisille kriteereille **K 1** – **K 6**. Esimerkiksi jos relaatiot A ja $A \Rightarrow B$ ovat lauseita teoriassa $\mathscr{T}$, niin voidaan ilman erillistä viittausta kriteeriin **K 1** todeta relaation B olevan lause teoriassa $\mathscr{T}$.

2.3.3 Todistusmenetelmiä

Seuraavassa esitellään neljä todistusmenetelmää, ja perustellaan kriteerit, joihin ne nojaavat. Kukin menetelmä perustuu edellä esitettyjen kriteereiden sekä loogisen teorian aksioomien avulla johdettuihin deduktiivisiin kriteereihin. Ensimäisenä on vuorossa *lisäoletuksen menetelmä*, joka perustuu seuraavaan kriteeriin:

K 14. *Olkoon A relaatio teoriassa $\mathscr{T}$, ja olkoon $\mathscr{T}'$ teoria, joka on saatu lisäämällä relaatio A teorian $\mathscr{T}$ aksioomiin. Jos B on teorian $\mathscr{T}'$ lause, niin $A \Rightarrow B$ on teorian $\mathscr{T}$ lause.*

Perustelu. Koska B on lause teoriassa $\mathscr{T}'$, se esiintyy jossakin teorian $\mathscr{T}'$ todistuksessa. Olkoon luettelo B_1, B_2, $\ldots$, B_n tämä todistus. Nyt tulee osoittaa, että relaation B_k ollessa mielivaltainen edellä mainitun todistuksen relaatio, niin $A \Rightarrow B_k$ on lause teoriassa $\mathscr{T}$. Oletetaan, että kriteeri pätee relaatioille, jotka edeltävät relaatiota B_i todistuksessa, ja näytetään, että $A \Rightarrow B_i$ on teorian $\mathscr{T}$ lause. Jos B_i on teorian $\mathscr{T}'$ eksplisiittinen aksiooma, niin on kaksi mahdollista tapausta:

1. B_i on teorian $\mathscr{T}$ eksplisiittinen aksiooma.

2. B_i on teorian $\mathscr{T}$ relaatio A.

Ensimmäisessä tapauksessa $A \Rightarrow B_i$ on lause teoriassa $\mathscr{T}$ kriteerin **K 9** perusteella. Toisessa tapauksessa $A \Rightarrow B_i$ on relaatio $A \Rightarrow A$, joka on kriteerin **K 8** perusteella lause teoriassa $\mathscr{T}$. Jos B_i on teorian $\mathscr{T}'$ implisiittinen aksiooma, niin se on myös teorian $\mathscr{T}$ implisiittinen aksiooma, ja $A \Rightarrow B_i$ on kriteerin **K 9** mukaan lause teoriassa $\mathscr{T}$. Lopuksi pitää tutkia tilanne, jossa relaatiota B_i edeltää relaatiot B_j ja $B_j \Rightarrow B_i$. Oletuksen mukaan relaatiot $A \Rightarrow B_j$ ja $A \Rightarrow (B_j \Rightarrow B_i)$ ovat teorian $\mathscr{T}$ lauseita. Kriteerin **K 13** mukaan relaatio

$$(B_j \Rightarrow B_i) \Rightarrow (A \Rightarrow B_i)$$

on lause teoriassa $\mathscr{T}$. Nyt kriteerin **K 6** mukaan $A \Rightarrow (A \Rightarrow B_i)$ on lause teoriassa $\mathscr{T}$. Siispä relaatio $\neg A \vee (A \Rightarrow B_i)$ on lause teoriassa $\mathscr{T}$, ja soveltamalla skeemaa **S 3** relaatio $(A \Rightarrow B_i) \vee \neg A$ on lause teoriassa $\mathscr{T}$. Sovelletaan skeemaa **S 2** relaatioon $\neg A$, jolloin relaatio $\neg A \Rightarrow (\neg A \vee B_i)$, eli relaatio $\neg A \Rightarrow (A \Rightarrow B_i)$, on lause teoriassa $\mathscr{T}$. Kun vielä sovelletaan skeemaa **S 4** relaatioihin $\neg A$, $A \Rightarrow B_i$ ja $A \Rightarrow B_i$, niin relaatio

$$[(A \Rightarrow B_i) \vee \neg A] \Rightarrow [(A \Rightarrow B_i) \vee (A \Rightarrow B_i)]$$

on lause teoriassa $\mathscr{T}$. Koska $(A \Rightarrow B_i) \vee \neg A$ on lause teoriassa $\mathscr{T}$, niin relaatio $(A \Rightarrow B_i) \vee (A \Rightarrow B_i)$ on myös lause teoriassa $\mathscr{T}$. Tästä seuraa skeeman **S 1** perusteella, että relaatio $A \Rightarrow B_i$ on teorian $\mathscr{T}$ lause. Nyt on osoitettu, että kaikille todistuksen B_1, B_2, $\ldots$, B_n relaatioille B_k pitää paikkansa, että $A \Rightarrow B_k$ on lause teoriassa $\mathscr{T}$, ja täten kriteeri on perusteltu.

Kriteerissä **K 14** relaatio A on lisäoletus, jonka oletetaan pitävän paikkansa. Kun tämä oletus tehdään, siirrytään operoimaan teoriassa $\mathscr{T}'$ alkuperäisen teorian $\mathscr{T}$ sijasta. Jos nyt tässä uudessa teoriassa pystytään osoittamaan relaatio B lauseeksi, niin silloin implikaatio $A \Rightarrow B$ on lause alkuperäisessä teoriassa $\mathscr{T}$. Toisin sanoen jos olettamalla, että A on totta, saadaan osoitettua, että myös B on totta, niin implikaatio $A \Rightarrow B$ on totta. Jos A ei ole totta, niin implikaatio on tosi mnääritelmänsä perusteella. Kriteerien perusteluissa tätä todistusmenetelmää käytetään sanomalla, että oletetaan relaation A pitävän paikkansa, tai sanomalla, että tehdään lisäoletus A. Perusteluissa ei mainita eksplisiittisesti teoriaa $\mathscr{T}'$, vaikka se on todistuksen kannalta välttämätön.

Seuraava todistusmenetelmä on *reductio ad absurdum* eli todistus vastaoletuksen avulla. Sen perustana on seuraava kriteeri:

K 15. *Olkoon A relaatio teoriassa $\mathscr{T}$, ja olkoon $\mathscr{T}'$ teoria, joka saadaan liittämällä $\neg A$ teorian $\mathscr{T}$ aksioomiin. Jos teoria $\mathscr{T}'$ on ristiriitainen, niin A on lause teoriassa $\mathscr{T}$.*

Perustelu. Koska $\mathscr{T}'$ on ristiriitainen looginen teoria, niin esimerkin 2.5 perusteella kaikki merkkijonot, jotka ovat relaatioita teoriassa $\mathscr{T}'$, ovat myös lauseita teoriassa $\mathscr{T}'$. Koska A on relaatio teoriassa $\mathscr{T}$, on se relaatio myös teoriassa $\mathscr{T}'$, ja täten myös lause teoriassa $\mathscr{T}'$. Nyt sekä A, että $\neg A$ ovat lauseita teoriassa $\mathscr{T}'$. Kriteerin **K 14** perusteella $\neg A \Rightarrow A$ on lause teoriassa $\mathscr{T}$. Sovelletaan skeemaa **S 4** relaatioihin $\neg A$, A ja A, jolloin siis

$$(A \vee \neg A) \Rightarrow (A \vee A)$$

on kriteerin **K 1** perusteella lause teoriassa $\mathscr{T}$. Kriteerin **K 10** perusteella $A \vee \neg A$ on lause teoriassa $\mathscr{T}$, joten myös $A \vee A$ on lause teoriassa $\mathscr{T}$. Skeeman **S 1** mukaan A on lause teoriassa $\mathscr{T}$.

Relaatio A voidaan osoittaa todeksi olettamalla, että se ei pidä paikkaansa, ja osoittamalla, että näin päädytään ristiriitaan. Tällöin relaatio $\neg A$ ei voi olla totta, jolloin relaation A täytyy olla totta. Kuten edellisenkin kriteerin kohdalla, myös vastaoletusta tehdessä operoidaan siis teoriassa $\mathscr{T}'$. Kun on pystytty osoittamaan, että teoria $\mathscr{T}'$ on ristiriitainen, niin voidaan hylätä se mahdollisuus, että A ei olisi totta. Tämän jälkeen tarkasteluja jatketaan teoriassa $\mathscr{T}$, missä relaation A siis täytyy olla totta.

Seuraavat kriteerit osoitetaan paikkansapitäviksi edellä esitettyjen todistumenetelmien avulla. Kriteerien perustelut sivuutetaan tässä, Bourbaki on esittänyt pääpiirteet perusteluista [1, s. 31].

K 16. *Jos A on relaatio teoriassa $\mathscr{T}$, niin $(\neg\neg A) \Rightarrow A$ on lause teoriassa $\mathscr{T}$.*

K 17. *Jos A ja B ovat relaatioita teoriassa $\mathscr{T}$, niin*

$$((\neg B) \Rightarrow (\neg A)) \Rightarrow (A \Rightarrow B)$$

on lause teoriassa $\mathscr{T}$.

Kolmas menetelmä on *tapausten disjunktio*, joka perustuu seuraavaan kriteeriin:

K 18. *Olkoot A, B ja C relaatioita teoriassa $\mathscr{T}$. Jos relaatiot $A \vee B$, $A \Rightarrow C$ ja $B \Rightarrow C$ ovat lauseita teoriassa $\mathscr{T}$, niin C on lause teoriassa $\mathscr{T}$.*

Perustelu. Soveltamalla skeemaa **S 4** ensiksi relaatioihin B, C ja A ja sitten relaatioihin A, C ja C nähdään, että

$$(B \Rightarrow C) \Rightarrow ((A \vee B) \Rightarrow (A \vee C))$$

ja

$$(A \Rightarrow C) \Rightarrow ((C \vee A) \Rightarrow (C \vee C))$$

ovat lauseita teoriassa $\mathscr{T}$. Koska $A \Rightarrow C$ ja $B \Rightarrow C$ ovat lauseita teoriassa $\mathscr{T}$, niin $(A \vee B) \Rightarrow (A \vee C)$ ja $(C \vee A) \Rightarrow (C \vee C)$ ovat lauseita teoriassa $\mathscr{T}$. Koska $A \vee B$ on lause, niin $A \vee C$ on lause. Skeeman **S 3** mukaisesti $(A \vee C) \Rightarrow (C \vee A)$ on lause, joten myös $C \vee A$ on lause. Nyt myös $C \vee C$ on lause. Nyt skeeman **S 1** mukaan C on lause teoriassa $\mathscr{T}$.

Jos väitteiden A ja B disjunktio pitää paikkansa, niin väitteen C todistamiseksi riittää, että pystytään osoittamaan väitteen C seuraavan sekä väitteestä A, että väitteestä B. Tällaisessa tilanteessa ei siis tarvitse tietää kumpi väitteistä A ja B pitää paikkansa.

Viimeisenä käsitellään *lisävakion menetelmä*.

K 19. *Olkoon x kirjain ja A ja B relaatioita teoriassa $\mathscr{T}$. Oletetaan, että x ei ole teorian $\mathscr{T}$ vakio, ja että se ei esiinny relaatiossa B. Oletetaan vielä, että teoriassa $\mathscr{T}$ on sellainen termi T, että relaatio $(T|\,x)A$ on lause teoriassa $\mathscr{T}$. Olkoon $\mathscr{T}'$ teoria, joka on saatu lisäämällä relaatio A teorian $\mathscr{T}$ aksioomiin. Jos B on lause teoriassa $\mathscr{T}'$, niin B on lause teoriassa $\mathscr{T}$.*

Perustelu. Koska B on lause teoriassa $\mathscr{T}'$, niin $A \Rightarrow B$ on lause teoriassa $\mathscr{T}$. Koska x ei ole teorian $\mathscr{T}$ vakio, niin kriteerin **K 3** mukaan $(T|\,x)(A \Rightarrow B)$ on lause teoriassa $\mathscr{T}$. Kirjain x ei myöskään esiinny relaatiossa B, joten kriteerin **KK 5** perusteella relaatio $(T|\,x)(A \Rightarrow B)$ on identtinen relaation $((T|\,x)A) \Rightarrow B$ kanssa. $(T|\,x)A$ on lause teoriassa $\mathscr{T}$, joten niin on myös B.

Tämän kriteerin perusteella voidaan todistuksen avuksi ottaa mielivaltainen objekti x, jolla on tietyt relaation A määrittelemät ominaisuudet. Esimerkiksi todistuksessa voidaan valita mielivaltainen luonnollinen luku n. Tällöin siis relaatio A olisi $n \in \mathbb{N}$. Kriteerissä on oletettu, että $(T|\,x)A$ on lause teoriassa $\mathscr{T}$, mikä tarkoittaa sitä, että objektilla T on relaation A määrittelemä ominaisuus. Lausetta $(T|\,x)A$ sanotaan *legitimaatio lauseeksi*, ja se takaa, että halutunlainen objekti on olemassa.

2.3.4 Konjunktio

Määrittely 2.14. Olkoot A ja B merkkijonoja. Merkkijonolla $A \wedge B$ (lue: A ja B) tarkoitetaan merkkijonoa $\neg((\neg A) \vee (\neg B))$.

Seuraavassa esitellään uuteen merkintään liittyviä korvaus-, formatiivisia sekä deduktiivisia kriteerejä.

KK 6. *Olkoot A, B ja T merkkijonoja, ja olkoon x kirjain. Nyt merkkijono $(T|\,x)(A \wedge B)$ on identtinen merkkijonon $((T|\,x)A) \wedge ((T|\,x)B)$ kanssa.*

Perustelu. Tämä seuraa suoraan kriteeristä **KK 5**.

FK 9. *Jos A ja B ovat relaatioita teoriassa $\mathscr{T}$, niin $A \wedge B$ on relaatio teoriassa $\mathscr{T}$.*

Perustelu. Tämä seuraa suoraan kriteereistä **FK 1**, **FK 2**.

K 20. *Jos A ja B ovat lauseita teoriassa $\mathscr{T}$, niin $A \wedge B$ on lause teoriassa $\mathscr{T}$.*

Perustelu. Käytetään perustelussa todistusta vastaoletuksen avulla. Oletetaan, että $\neg(A \wedge B)$ on lause teoriassa $\mathscr{T}'$. Määrittelyn 2.14 mukaan siis

$$\neg\neg((\neg A) \vee (\neg B))$$

on lause teoriassa $\mathscr{T}'$. Kriteerin **K 16** mukaan $(\neg A) \vee (\neg B)$ on lause teoriassa $\mathscr{T}'$. Määritelmän 2.1 mukaan siis $A \Rightarrow (\neg B)$ on lause teoriassa $\mathscr{T}'$. Koska A on lause teoriassa $\mathscr{T}'$, niin myös $\neg B$ on lause teoriassa $\mathscr{T}'$. Oletuksen mukaan myös B on lause teoriassa $\mathscr{T}'$, ja siispä teoria $\mathscr{T}'$ on ristiriitainen. Nyt $A \wedge B$ on lause.

K 21. *Jos A ja B ovat relaatioita teoriassa $\mathscr{T}$, niin relaatiot $(A \wedge B) \Rightarrow A$ ja $(A \wedge B) \Rightarrow B$ ovat lauseita teoriassa $\mathscr{T}$.*

Perustelu. Relaatiot $(\neg A) \Rightarrow ((\neg A) \vee (\neg B))$ ja $(\neg B) \Rightarrow ((\neg A) \vee (\neg B))$ ovat lauseita skeeman **S 2** ja kriteerin **K 7** perusteella. Nyt kriteerin **K 11** perusteella $((\neg A) \vee (\neg B)) \Rightarrow (\neg\neg((\neg A) \vee (\neg B)))$ on lause. Määrittelyn 2.14 mukaisesti siis $((\neg A) \vee (\neg B)) \Rightarrow (\neg(A \wedge B))$ on lause. Nyt sekä $((\neg A)) \Rightarrow (\neg(A \wedge B))$, että $((\neg B)) \Rightarrow (\neg(A \wedge B))$ ovat lauseita. Kriteerin **K 17** perusteella seuraa, että $(A \wedge B) \Rightarrow A$ ja $(A \wedge B) \Rightarrow B$ ovat lauseita teoriassa $\mathscr{T}$.

Määrittely 2.15. Merkinnöillä $A \wedge B \wedge C$ ja $A \vee B \vee C$ tarkoitetaan vastaavasti relaatioita $A \wedge (B \wedge C)$ ja $A \vee (B \vee C)$. Samaa periaatetta käyttäen voidaan konstruoida disjunktio ja konjunktio, kun relaatioita on n kappaletta.

2.3.5 Ekvivalenssi

Määrittely 2.16. Olkoot A ja B merkkijonoja. Merkkijonolla $A \Leftrightarrow B$ tarkoitetaan merkkijonoa $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$.

Alaluvun 2.3.4 tapaan myös tähän merkintään liittyy uusia kriteerejä.

KK 7. *Olkoot A, B ja T merkkijonoja, ja olkoon x kirjain. Merkkijono $(T|\,x)(A \Leftrightarrow B)$ on identtinen merkkijonon $(T|\,x)A \Leftrightarrow (T|\,x)B$ kanssa.*

Perustelu. Tämä seuraa suoraan kriteereistä **KK 5** ja **KK 6**.

FK 10. *Jos A ja B ovat relaatioita teoriassa $\mathscr{T}$, niin $A \Leftrightarrow B$ on relaatio teoriassa $\mathscr{T}$.*

Perustelu. Tämä seuraa suoraan kriteereistä **FK 5** ja **FK 9**.

Määrittely 2.17. Jos $A \Leftrightarrow B$ lause teoriassa $\mathscr{T}$, niin sanotaan, että A ja B ovat *ekvivalentit* teoriassa $\mathscr{T}$.

Jos x on kirjain, joka ei ole vakio teoriassa $\mathscr{T}$, ja jos A ja B ovat ekvivalentit relaatiot, jotka liittävät kirjaimeen x joitain ominaisuuksia, niin kaikki ne teorian $\mathscr{T}$ termit, jotka toteuttavat toisen relaation, toteuttavat myös toisen. Jos kaksi relaatiota halutaan todistaa ekvivalenteiksi, tulee todistaa, että $A \Rightarrow B$ ja $B \Rightarrow A$. Tämä seuraa kriteereistä **K 20** ja **K 21**. Seuraavassa esitellään ekvivalenssiin liittyviä tuloksia. Kriteerien perustelut ovat suoraviivaisia seurauksia määrittelystä 2.16 sekä aiemmista kriteereistä. Ensimmäisen kriteerin perustelu käydään läpi, loput perustelut sivuutetaan.

K 22. *Olkoot A, B ja C relaatioita teoriassa $\mathscr{T}$. Nyt seuraavat pitävät paikkansa:*

1. *$A \Leftrightarrow A$ on lause.*[4]
2. *Jos $A \Leftrightarrow B$ on lause teoriassa $\mathscr{T}$, niin $B \Leftrightarrow A$ on lause teoriassa $\mathscr{T}$.*
3. *Jos $A \Leftrightarrow B$ ja $B \Leftrightarrow C$ ovat lauseita teoriassa $\mathscr{T}$, niin $A \Leftrightarrow C$ on lause teoriassa $\mathscr{T}$.*

Perustelu.

1. Kriteerin **K 8** perusteella $A \Rightarrow A$ on lause. Sovelletaan kriteeriä **K 20** lauseisiin $A \Rightarrow A$ ja $A \Rightarrow A$. Tällöin määrittelyn 2.16 perusteella $A \Leftrightarrow A$ on lause.
2. Määrittelyn 2.16 perusteella $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$ on lause. Toisin sanoen $\neg(\neg(A \Rightarrow B) \vee \neg(B \Rightarrow A))$ on lause. Nyt skeeman **S 3** perusteella $\neg(\neg(B \Rightarrow A) \vee \neg(A \Rightarrow B))$ on lause. Siispä $B \Leftrightarrow A$ on lause teoriassa $\mathscr{T}$.
3. Määrittelyn 2.16 perusteella $A \Rightarrow B$, $B \Rightarrow C$, $C \Rightarrow B$ ja $B \Rightarrow A$ ovat lauseita. Nyt kriteerin **K 6** perusteella $A \Rightarrow C$ ja $C \Rightarrow A$ ovat lauseita. Siispä $A \Leftrightarrow C$ on lause teoriassa $\mathscr{T}$.

K 23. *Olkoot A ja B ekvivalentteja relaatioita teoriassa $\mathscr{T}$, ja olkoon C relaatio teoriassa $\mathscr{T}$. Nyt seuraavat relaatiot ovat lauseita teoriassa $\mathscr{T}$:*

$$\begin{aligned} \neg A \Leftrightarrow \neg B, &\qquad (A \Rightarrow C) \Leftrightarrow (B \Rightarrow C), \\ (C \Rightarrow A) \Leftrightarrow (C \Rightarrow B), &\qquad (A \wedge C) \Leftrightarrow (B \wedge C), \\ (A \vee C) \Leftrightarrow (B \vee C) & \end{aligned}$$

[4] Tämä kohta on kirjoittajan lisäämä. Bourbaki on jättänyt tämän erikseen mainitsematta, vaikka tulosta käytetään myöhemmin alaluvussa 2.5.2.

K 24. *Olkoot A, B, ja C relaatioita teoriassa $\mathscr{T}$. Seuraavat relaatiot ovat lauseita teoriassa $\mathscr{T}$:*
$(\neg\neg A) \Leftrightarrow A$, $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow ((\neg B) \Rightarrow (\neg A))$, $(A \wedge A) \Leftrightarrow A$, $(A \wedge B) \Leftrightarrow (B \wedge A)$, $(A \wedge (B \wedge C)) \Leftrightarrow ((A \wedge B) \wedge C)$, $(A \vee A) \Leftrightarrow A$, $(A \vee B) \Leftrightarrow \neg((\neg A) \wedge (\neg B))$, $(A \vee (B \vee C)) \Leftrightarrow ((A \vee B) \vee C)$, $(A \vee B) \Leftrightarrow (B \vee A)$, $(A \wedge (B \vee C)) \Leftrightarrow ((A \wedge B) \vee (A \wedge C))$, $(A \vee (B \wedge C)) \Leftrightarrow ((A \vee B) \wedge (A \vee C))$, $(A \wedge (\neg B)) \Leftrightarrow \neg(A \Rightarrow B)$, $(A \vee B) \Leftrightarrow ((\neg A) \Rightarrow B)$.

K 25. *Jos A on lause teoriassa $\mathscr{T}$ ja B relaatio teoriassa $\mathscr{T}$, niin relaatio $(A \wedge B) \Leftrightarrow B$ on lause teoriassa $\mathscr{T}$. Jos $\neg A$ on lause teoriassa $\mathscr{T}$, niin $(A \vee B) \Leftrightarrow B$ on lause teoriassa $\mathscr{T}$.*

Tästä lähtien kriteerejä **K 1** – **K 25** voidaan käyttää kriteerien perusteluissa ilman erillistä viittausta.

2.4 Kvantifioidut teoriat

2.4.1 Kvanttoreiden määrittely

Määrittely 2.18. Jos R on merkkijono ja x kirjain, merkkijonolla $(\exists x)R$ (lue: on olemassa sellainen x, että R) tarkoitetaan merkkijonoa $(\tau_x(R)|\,x)R$. Merkkijonolla $(\forall x)R$ (lue: kaikilla x pätee R) tarkoitetaan taasen merkkijonoa $\neg((\tau_x(\neg R)|\,x)\neg R)$. Symbolia $\exists$ kutsutaan *eksistenssikvanttoriksi* ja symbolia $\forall$ *universaalikvanttoriksi*.

Tässä vaiheessa logiikassa normaalisti kvanttoreihin liitetyt ominaisuudet eivät vielä ole selviä. Seuraavassa perustellaan kriteerejä, joiden avulla kvanttoreihin liitetään niiden normaaleja ominaisuuksia. Kvanttoreiden tarkka merkitys määrittyy skeeman **S 5** avulla alaluvussa 2.4.2.

KK 8. *Olkoon R merkkijono, ja olkoot x ja x' kirjaimia. Merkkijonolla R' tarkoitetaan merkkijonoa $(x'|\,x)R$. Jos kirjainta x' ei esiinny merkkijonossa R, niin $(\exists x)R$ on identtinen merkkijonon $(\exists x')R'$ ja $(\forall x)R$ merkkijonon $(\forall x')R'$ kanssa.*

Perustelu. Nyt kriteerin **KK 1** perusteella $(\tau_x(R)|\,x)R$ on identtinen merkkijonon $(\tau_x(R)|\,x')R'$ kanssa, ja kriteerin **KK 3** perusteella $\tau_x(R)$ identtinen merkkijonon $\tau_{x'}(R')$ kanssa. Siispä $(\exists x)R$ on identtinen merkkijonon $(\exists x')R'$ kanssa. Merkkijono $(\forall x')R'$ tarkoittaa merkkijonoa $\neg((\exists x')\neg R')$, joka edellisen kohdan perusteella on identtinen merkkijonon $\neg((\exists x)\neg R)$, ja edelleen merkkijonon $(\forall x)R$ kanssa.

KK 9. *Olkoot R ja U merkkijonoja, ja olkoot x ja y eri kirjaimia. Merkkijonolla R' tarkoitetaan merkkijonoa $(U|\,y)R$. Jos x ei esiinny merkkijonossa U, niin $(U|\,y)(\exists x)R$ on identtinen merkkijonon $(\exists x)R'$ ja $(U|\,y)(\forall x)R$ merkkijonon $(\forall x)R'$ kanssa.*

Perustelu. Koska x ei esiinny merkkijonossa U, kriteerin **KK 2** perusteella relaatio $(U|\,y)(\tau_x(R)|\,x)R$ on identtinen merkkijonon

$$(((U|\,y)\tau_x(R))|\,x)(U|\,y)R$$

kanssa, joka kriteerin **KK 4** perusteella on identtinen merkkijonon

$$((\tau_x(R'))|\,x)R'$$

kanssa. Siispä $(U|\,y)(\exists x)R$ on identtinen merkkijonon $(\exists x)R'$. Sama tulos saadaan pätemään universaalikvanttorille vastaavasti kuin edellisen kriteerin tapauksessa.

FK 11. *Jos R on relaatio teoriassa $\mathscr{T}$ ja x kirjain, niin $(\exists x)R$ ja $(\forall x)R$ ovat relaatioita teoriassa $\mathscr{T}$.*

Perustelu. Tulos seuraa suoraan kriteereistä **FK 3**, **FK 8** ja **FK 2**.

K 26. *Olkoon $\mathscr{T}$ looginen teoria, R relaatio teoriassa $\mathscr{T}$ ja x kirjain. Nyt relaatiot $(\forall x)R$ ja $\tau_x(\neg R|\,x)R$ ovat ekvivalentteja teoriassa $\mathscr{T}$.*

Perustelu. $(\forall x)R$ tarkoitaa merkkijonoa $\neg((\tau_x(\neg R)|\,x)\neg R)$, joka on kriteerin **KK 5** perusteella identtinen merkkijonon $((\tau_x(\neg R)|\,x)\neg\neg R)$ kanssa. $\neg\neg R$ on ekvivalentti relaation R kanssa, joten $(\forall x)R$ on ekvivalentti relaation $\tau_x(\neg R|\,x)R$ kanssa teoriassa $\mathscr{T}$.

K 27. *Jos R on lause loogisessa teoriassa $\mathscr{T}$, ja x ei ole teorian $\mathscr{T}$ vakio, niin $(\forall x)R$ on lause teoriassa $\mathscr{T}$.*

Perustelu. Koska R on lause teoriassa $\mathscr{T}$, $\tau_x(\neg R)$ on termi teoriassa $\mathscr{T}$ ja x ei ole teorian $\mathscr{T}$ vakio, niin kriteerin **K 3** perusteella $(\tau_x(\neg R)|\,x)R$ on lause teoriassa $\mathscr{T}$. Kriteerin **K 26** perusteella $(\forall x)R$ on lause teoriassa $\mathscr{T}$.

Kriteerin **K 28** mukaan jos R on objektiin x liittyvä tosi väittämä, eikä x ole erityisesti määritelty objekti, niin väittämä R pitää paikkansa kaikille objekteille. Jos taasen x on teorian vakio, niin silloin väittämä R koskee tiettyä erityisesti määriteltyä objektia, eikä väittämän R voida sanoa pätevän mille tahansa objektille.

K 28. *Olkoon $\mathscr{T}$ looginen teoria, R relaatio teoriassa $\mathscr{T}$ ja x kirjain. Nyt relaatiot $\neg(\forall x)R$ ja $(\exists x)(\neg R)$ ovat ekvivalentteja teoriassa $\mathscr{T}$.*

Perustelu. $\neg(\forall x)R$ tarkoittaa merkkijonoa $\neg\neg(\exists x)(\neg R)$, joka on ekvivalentti relaation $(\exists x)(\neg R)$ kanssa teoriassa $\mathscr{T}$. Siis relaatiot $\neg(\forall x)R$ ja $(\exists x)(\neg R)$ ovat ekvivalentteja teoriassa $\mathscr{T}$.

2.4.2 Kvantifioidun teorian aksioomat

Kvantifioitu teoria on matemaattinen teoria, jossa skeemat **S 1** – **S 4** sekä seuraava skeema **S 5** tuottavat implisiittisia aksioomia.

S 5. *Jos R on relaatio teoriassa $\mathscr{T}$, T termi teoriassa $\mathscr{T}$ ja x kirjain, niin relaatio $(T|\,x)R \Rightarrow (\exists x)R$ on aksiooma.*

Jotta tämä sääntö olisi todellakin skeema täytyy ensinnäkin näyttää, että sen käytöstä seuraa relaatio teoriassa $\mathscr{T}$. Toiseksi tulee näyttää, että jos T on termi teoriassa T, x kirjain ja R relaatio, joka on luotu käyttämällä skeemaa, niin myös relaatio $(T|\,x)R$ voidaan konstruoida käyttämällä skeemaa. Ensimmäinen kohta on triviaali. Toisen ehdon täyttämiseksi oletetaan, että A on aksiooma, joka on saatu käyttämällä sääntöä **S 5**. Nyt siis on olemassa R, joka on relaatio teoriassa $\mathscr{T}$, T, joka on termi teoriassa $\mathscr{T}$ ja sellainen kirjain x, että A on $(T|\,x)R \Rightarrow (\exists x)R$. Olkoon U termi teoriassa $\mathscr{T}$ ja y kirjain. Tulee osoittaa, että $(U|\,y)A$ voidaan konstruoida suoraan soveltamalla sääntöä **S 5**. Oletetaan ensiksi, että x ja y ovat eri kirjaimia, ja että x ei esiinny relaatiossa U. Merkkijonolla R' tarkoitetaan merkkijonoa $(U|\,y)R$ ja merkkijonolla T' merkkijonoa $(U|\,y)T$. Nyt sovelletaan sääntöä **S 5** relaatioon R', termiin T' ja kirjaimeen x. Nyt siis $(T'|\,x)R' \Rightarrow (\exists x)R'$, eli

$$((U|\,y)T|\,x)(U|\,y)R \Rightarrow (\exists x)(U|\,y)R \tag{2.12}$$

on aksiooma. Kriteerin **KK 2** peusteella $((U|\,y)T|\,x)(U|\,y)R$ on identtinen merkkijonon $(U|\,y)(T|\,x)R$ kanssa, ja kriteerin **KK 9** perusteella $(\exists x)(U|\,y)R$ on identtinen merkkijonon $(U|\,y)(\exists x)R$ kanssa. Siispä merkkijono (2.12) on identtinen merkkijonon

$$(U|\,y)((T|\,x)R \Rightarrow (\exists x)R)$$

kanssa, toisin sanoen siis relaation $(U|\,y)A$ kanssa. Tarkastellaan vuorostaan tilannetta, jossa x ja y ovat sama kirjain tai x esiintyy merkkijonossa U. Olkoon x' sellainen kirjain, joka ei esiinny merkkijonossa U ja on eri kirjain kuin x. Kriteerin **KK 1** perusteella $(U|\,y)(T|\,x)R$ on identtinen merkkijonon $(U|\,y)(T|\,x')(x'|x)R$ kanssa. Nyt voidaan käyttää kriteeriä **KK 2**, jolloin $(U|\,y)(T|\,x')(x'|x)R$ on identtinen merkkijonon

$$((U|\,y)T|\,x')(U|\,y)(x'|x)R$$

kanssa. Toisaalta $(U|\,y)(\exists x)R$ on kriteerin **KK 8** perusteella identtinen merkkijonon $(U|\,y)(\exists x')(x'|\,x)R$, joka taasen on kriteerin **KK 9** perusteella identtinen merkkijonon

$$(U|\,y)(\exists x')(x'|\,x)R$$

kanssa. Merkkijonolla R'' tarkoitetaan merkkijonoa $(U|\,y)(x'|\,x)R$. Jos siis x ja y ovat sama kirjain, tai jos x esiintyy merkkijonossa U, niin $(U|\,y)A$, eli $(U|\,y)((T|\,x)R \Rightarrow (\exists x)R)$, on identtinen merkkijonon

$$((T'|\,x')(U|\,y)R'') \Rightarrow ((U|\,y)(\exists x')R'') \tag{2.13}$$

kanssa. Merkkijono (2.13) saadaan soveltamalla sääntöä **S 5** relaatioon R'', termiin T ja kirjaimeen x'.

Nyt on näytetty, että relaatio $(U|\,y)A$ voidaan kaikissa tapauksissa konstruoida suoraan käyttämällä sääntöä **S 5**, mistä seuraa, että **S 5** on skeema.

Skeema **S 5** liittää eksistenssikvanttoriin normaalin objektin olemassaoloon liittyvän merkityksen. Skeeman mukaan jos termi T on relaatio R ratkaisu, niin silloin on olemassa sellainen objekti x, joka toteuttaa relaation R. $\tau_x(R)$ on määritelty sellaiseksi termiksi, joka toteuttaa relaation R, jos kyseinen termi on olemassa. Nyt siis $(\tau_x(R)|\,x)R$ on väittämä, jonka mukaan tämä termi toteuttaa relaation R. Ainoa tapaus, jolloin tämä väittämä ei ole totta, on se, ettei relaatiota R toteuttavaa objektia ole olemassa.

2.4.3 Kvanttoreiden ominaisuuksia

Tästä eteenpäin tarkastellaan ainoastaan kvantifioituja teorioita $\mathscr{T}$. Teorialla $\mathscr{T}_0$ tarkoitetaan teoriaa, jolla on samat merkit kuin teorialla $\mathscr{T}$, jolla on vain skeemat **S 1** $-$ **S 5**, eikä yhtään eksplisiittistä aksioomaa. Koska teoriassa $\mathscr{T}_0$ ei ole eksplisiittisia aksioomia, ei siinä ole myöskään vakioita. Koska teoria $\mathscr{T}$ on vahvempi kuin $\mathscr{T}_0$, niin jos pystytään todistamaan jokin relaatio lauseeksi teoriassa $\mathscr{T}_0$, niin sama relaatio on lause myös teoriassa $\mathscr{T}$. Tämän ansiosta tietyissä perusteluissa voidaan olettaa, ettei perustelussa esiintyvä kirjain x ole vakio.

K 29. *Olkoon R relaatio teoriassa $\mathscr{T}$ ja x kirjain. Nyt relaatiot $\neg(\exists x)R$ ja $(\forall x)(\neg R)$ ovat ekvivalentteja.*

Perustelu. Riittää, että osoitetaan kriteerin pitävän paikkansa teoriassa $\mathscr{T}_0$. Koska R on relaatio, niin $R \Leftrightarrow (\neg\neg R)$ on lause. Koska x ei ole vakio, kriteerin **K 3** perusteella relaatiot

$$(\exists x)R \Rightarrow (\tau_x(R)|\,x)(\neg\neg R) \quad \text{ja} \quad (\exists x)(\neg\neg R) \Rightarrow (\tau_x(\neg\neg R)|\,x)R$$

ovat lauseita. Sovelletaan skeemaa **S 5** ensiksi relaatioon $(\neg\neg R)$, termiin $\tau_x(R)$ ja kirjaimeen x, ja sitten relaatioon R, termiin $\tau_x(\neg\neg R)$ ja kirjaimeen x. Tällöin relaatiot

$$(\exists x)R \Rightarrow (\exists x)(\neg\neg R) \quad \text{ja} \quad (\exists x)(\neg\neg R) \Rightarrow (\exists x)R$$

ovat lauseita. Tällöin $(\exists x)R \Leftrightarrow (\exists x)(\neg\neg R)$ on lause. Koska nyt $(\exists x)(\neg\neg R)$ on ekvivalentti relaation $\neg\neg(\exists x)(\neg\neg R)$ eli toisin sanoen relaation $\neg(\forall x)(\neg R)$ kanssa, niin relaatiot $\neg(\exists x)R$ ja $(\forall x)(\neg R)$ ovat ekvivalentteja.

Kriteerit **K 28** ja **K 29** auttavat todistamaan toisen kvanttorin ominaisuuksia toiselle todistettujen ominaisuuksien avulla. Seuraava kriteeri liittää universaalikvanttoriin normaalin merkityksen.

K 30. *Olkoon R relaatio teoriassa $\mathscr{T}$, T termi teoriassa $\mathscr{T}$ ja x kirjain. Nyt relaatio $(\forall x)R \Rightarrow (T|\,x)R$ on lause teoriassa $\mathscr{T}$.*

Perustelu. Käyttämällä skeemaa **S 5** relaatioon $\neg R$, termiin T ja kirjaimeen x saadaan aksiooma $(T|\,x)(\neg R) \Rightarrow (\tau_x(\neg R)|\,x)(\neg R)$. Tämä relaatio on identtinen relaation $(\neg(T|\,x)R) \Rightarrow (\neg(\tau_x(\neg R)|\,x)R)$ kanssa. Kriteerin **K 17** perusteella $(\tau_x(\neg R)|\,x)R \Rightarrow (T|\,x)R$ on lause teoriassa $\mathscr{T}$. Tämä on kriteerin **K 26** perusteella relaatio $(\tau_x(\neg R)|\,x)R$ on ekvivalentti relaation $(\forall x)R$ kanssa. Siis $(\forall x)R \Rightarrow (T|\,x)R$ on lause teoriassa $\mathscr{T}$.

Kriteereistä **K 26**, **K 27** ja **K 30** seuraa, että kun R on relaatio ja x ei ole vakio, niin on sama sanotaanko, että R on tosi, vai että $(\forall x)R$ on tosi. Tämä merkitsee, että jos relaatio sisältää väittämän määrittelemättömästä objektista x, ja tämä väittämä on tosi, niin silloin väittämä on tosi kaikille objekteille. Kolmas tapa sanoa sama asia, on antaa seuraava metamatemaattinen sääntö: jos T on termi teoriassa $\mathscr{T}$, niin $(T|\,x)R$ on lause teoriassa $\mathscr{T}$. Seurauksena näistä kriteereistä voidaan perustella seuraavat kriteerit:

K 31. *Olkoon R ja S relaatioita teoriassa $\mathscr{T}$ ja x kirjain, joka ei ole vakio teoriassa $\mathscr{T}$. Jos $R \Rightarrow S$ on lause teoriassa $\mathscr{T}$, niin*

$$(\forall x)R \Rightarrow (\forall x)S \quad \textit{ja} \quad (\exists x)R \Rightarrow (\exists x)S$$

ovat lauseita teoriassa $\mathscr{T}$. Jos R ja S ovat ekvivalentteja, eli $R \Leftrightarrow S$ on lause teoriassa $\mathscr{T}$, niin

$$(\forall x)R \Leftrightarrow (\forall x)S \quad \textit{ja} \quad (\exists x)R \Leftrightarrow (\exists x)S$$

ovat lauseita teoriassa $\mathscr{T}$.

Perustelu. Oletetaan, että $R \Rightarrow S$ on lause teoriassa $\mathscr{T}$. Tehdään lisäoletus $(\forall x)R$. Nyt R, ja siten myös S, on totta. Ja koska S on totta, niin myös $(\forall x)S$ on totta. Nyt siis kriteerin **K 14** perusteella $(\forall x)R \Rightarrow (\forall x)S$ on lause teoriassa $\mathscr{T}$. Eksistenssikvanttorin tapaus saadaan johdettua kriteerin **K 29** avulla. Koska $R \Leftrightarrow S$ on lause teoriassa $\mathscr{T}$, niin $S \Rightarrow R$ on lause teoriassa $\mathscr{T}$, jolloin myös $(\forall x)S \Rightarrow (\forall x)R$ on lause teoriassa $\mathscr{T}$. Siispä $(\forall x)R \Leftrightarrow (\forall x)S$ on lause teoriassa $\mathscr{T}$. Jälleen eksistenssikvanttoria koskeva tulos saadaan perusteltua kriteerin **K 29** avulla.

K 32. *Olkoon R ja S relaatioita teoriassa $\mathscr{T}$ ja x kirjain. Relaatiot*

$$(\forall x)(R \wedge S) \Leftrightarrow ((\forall x)R \wedge (\forall x)S) \quad \textit{ja} \quad (\exists x)(R \vee S) \Leftrightarrow ((\exists x)R \vee (\exists x)S)$$

ovat lauseita teoriassa $\mathscr{T}$.

Perustelu. Jälleen riittää todistaa kriteerit heikommassa teoriassa $\mathscr{T}_0$, jolloin voidaan olettaa, ettei x ole vakio. Jos $(\forall x)(R \wedge S)$ on totta, niin $(R \wedge S)$ on totta. Täten myös R ja S ovat totta. Nyt myös $(\forall x)R$ ja $(\forall x)S$ ovat totta, joten $(\forall x)R \wedge (\forall x)S$ on totta. Toinen suunta voidaan osoittaa vastaavalla tavalla. Eksistenssikvanttorin tapaus seuraa taas kriteeristä **K 29**.

On hyvä huomata, että vastaavat väitteet eivät pidä paikkaansa, jos disjunktion ja konjunktion paikat vaihdetaan. Toisin sanoen siitä, että $(\forall x)(R \vee S)$ on lause, ei voi päätellä, että $((\forall x)R \vee (\forall x)S)$ on lause. $(\forall x)(R \vee S)$ väittää, että kaikille objekteille pitää paikkansa joko väittämä R tai S. Toisaalta taas $((\forall x)R \vee (\forall x)S)$ väittää, että kaikille objekteille pätee R tai kaikille objekteille pätee S, mikä sulkee pois esimerkiksi sellaisen vaihtoehdon, jossa R pätee yhdelle objektille, ja muille objekteille pätee S. Samoin myöskään siitä, että $((\exists x)R \wedge (\exists x)S)$ on lause, ei voi päätellä, että $(\exists x)(R \wedge S)$ on lause. Väittämän $(\exists x)(R \wedge S)$ mukaan on olemassa sellainen x, joka toteuttaa molemmat väittämät R ja S. Väittämän $((\exists x)R \wedge (\exists x)S)$ mukaan on olemassa sellainen x, joka toteuttaa väittämän R, ja sellainen x, joka toteuttaa väittämän S. Nyt x voi kuitenkin tarkoittaa eri objektia kummassakin tapauksessa, eikä siis välttämättä ole olemassa sellaista objektia x, joka toteuttaisi molemmat väittämät R ja S yhtä aikaa. Seuraava kriteeri kertoo, kuinka yllä kuvattuja tapauksia voi käsitellä.

K 33. *Olkoon R ja S relaatioita teoriassa $\mathscr{T}$ ja x sellainen kirjain, jota ei esiinny relaatiossa R. Nyt relaatiot*

$$(\forall x)(R \vee S) \Leftrightarrow (R \vee (\forall x)S) \quad \textit{ja} \quad (\exists x)(R \wedge S) \Leftrightarrow (R \wedge (\exists x)S)$$

ovat lauseita teoriassa $\mathscr{T}$.

Perustelu. Perustellaan kriteeri teoriassa $\mathscr{T}_0$. Olkoon $\mathscr{T}'$ teoria, joka on saatu lisäämällä relaatio $(\forall x)(R \vee S)$ teorian $\mathscr{T}_0$ aksioomiin. Koska nyt teoriassa $\mathscr{T}'$ relaatio $R \vee S$ on lause, niin myös $(\neg\neg R) \vee S$ on lause. Tämä on identtinen relaation $(\neg R \Rightarrow S)$ kanssa. Jos nyt $\neg R$ on lause teoriassa $\mathscr{T}'$, niin S, ja siten myös $(\forall x)S$, on lause teoriassa $\mathscr{T}'$. Siispä $(\neg R \Rightarrow (\forall x)S)$ on lause teoriassa $\mathscr{T}'$. Toisin sanoen $R \vee (\forall x)S$ on lause teoriassa $\mathscr{T}'$, jolloin $(\forall x)(R \vee S) \Rightarrow (R \vee (\forall x)S)$ on lause teoriassa $\mathscr{T}_0$. Vastaavasti jos $R \vee (\forall x)S$ liitetään teorian $\mathscr{T}_0$ aksioomiin, niin saadussa teoriassa $\mathscr{T}'$ $R \vee S$ on lause, ja siten myös $(\forall x)(R \vee S)$ on lause. Nyt siis $(R \vee (\forall x)S) \Rightarrow (\forall x)(R \vee S)$ on lause teoriassa $\mathscr{T}_0$, ja kriteeri on perusteltu universaalikvanttorin osalta. Kriteerin **K 29** avulla perustellaan kriteerin eksistenssikvanttoria koskeva osa.

K 34. *Olkoon R relaatio teoriassa $\mathscr{T}$ ja x ja y kirjaimia. Relaatiot*

1. $(\forall x)(\forall y)R \Leftrightarrow (\forall y)(\forall x)R$
2. $(\exists x)(\exists y)R \Leftrightarrow (\exists y)(\exists x)R$

3. $(\exists x)(\forall y)R \Rightarrow (\forall y)(\exists x)R$

ovat lauseita teoriassa $\mathscr{T}$*.*

Perustelu. Perustellaan kriteeri teoriassa $\mathscr{T}_0$, jolloin x ja y eivät ole vakioita. Jos $(\forall x)(\forall y)R$ on totta, niin $(\forall y)R$, ja siten myös R on totta. Mutta nyt myös $(\forall x)R$ on totta, ja samoin myös $(\forall y)(\forall x)R$ on totta. Samanlaisella päättelyllä voidaan näyttää, että jos $(\forall y)(\forall x)R$ on totta, niin $(\forall x)(\forall y)R$ on totta. Siis relaatio 1 on lause teoriassa $\mathscr{T}$. Ensimmäisestä relaatiosta seuraa käyttämällä kriteeriä **K 29**, että relaatio 2 on lause teoriassa $\mathscr{T}$. $(\forall y)R \Rightarrow R$ on lause, koska aina kun R on totta, myös $(\forall y)R$ on totta. Nyt kriteerin **K 31** perusteella $(\exists x)(\forall y)R \Rightarrow (\exists x)R$ on lause. Kriteerin käyttö vaatii, että x ei ole vakio. Tämä pitää paikkansa, koska operoidaan teoriassa $\mathscr{T}_0$, jossa ei ole vakioita. Nyt jos $(\exists x)(\forall y)R$ on totta, niin myös $(\exists x)R$ on totta. Siispä $(\forall y)(\exists x)R$ on totta, joten $(\exists x)(\forall y)R \Rightarrow (\forall y)(\exists x)R$ on lause teoriassa $\mathscr{T}_0$.

Edellisen kriteerin kolmas lause on todellakin implikaatio, sama lause käännettynä, eli $(\forall y)(\exists x)R \Rightarrow (\exists x)(\forall y)R$, ei pidä paikkaansa. Esimerkkinä tällaisesta tapauksesta on ero jatkuvuuden ja tasaisen jatkuvuuden välillä, ks. esim [5, s. 203].

2.4.4 Rajoitetut kvanttorit

Määrittely 2.19. Olkoon A ja B merkkijonoja ja x kirjain. Merkkijonolla $(\exists_A x)R$ tarkoitetaan merkkijonoa $(\exists x)(A \wedge R)$, ja merkkijonolla $(\forall_A x)R$ tarkoitetaan merkkijonoa $\neg(\exists_A x)(\neg R)$. Lyhennysmerkkejä $\exists_A$ ja $\forall_A$ kutsutaan *rajoitetuiksi kvanttoreiksi*.

Rajoitetut kvanttorit ovat tärkeitä todistuksissa, joissa ollaan kiinnostuneita objektista x, jolla on jokin tietty ominaisuus. Tämän ominaisuuden kertoo relaatio A. Relaatio $(\exists_A x)R$ on väittämä, jonka mukaan on olemassa sellainen objekti x, jolla on relaation A kertoma ominaisuus, ja joka toteuttaa relaation R. Siis on olemassa x, jolle $A \wedge R$ on totta. Relaatio $(\forall_A x)R$ on väittämä, jonka mukaan ei ole olemassa sellaista objektia x, jolla on relaation A kertoma ominaisuus, ja joka ei toteuta väittämää R. Toisin sanoen kaikilla objekteilla x, joilla on relaation A kertoma ominaisuus, on myös relaation R kertomat ominaisuudet. Käytännössä näitä merkkejä ei käytetä, vaan ne ovat tapa formalisoida todistuksissa usein vastaantuleva tilanne. Esimerkiksi kun oletetaan, että on olemassa positiivinen kokonaisluku n, niin oletetaan, että $(\exists_A n)R$ on lause. Tässä A on relaatio $n \in \mathbb{Z}$, ja R on relaatio $n > 0$.

Seuraavassa esitetään rajoitettujen kvanttoreiden käyttöön liittyviä kriteerejä, jotka ovat suoraa seurausta normaaleihin kvanttoreihin ja konjuktioon liittyvistä kriteereistä. Kriteerien perustelut sivuutetaan.

KK 10. *Olkoot* A *ja* R *merkkijonoja ja* x *ja* x' *kirjaimia.* A' *tarkoittaa merkkijonoa* $(x' | x)A$ *ja* R' *merkkijonoa* $(x' | x)R$*. Jos kirjainta* x *ei esiinny* *merkkijonoissa A ja R, niin $(\exists_A x)R$ on identtinen merkkijonon $(\exists_{A'} x')R'$ kanssa, ja $(\forall_A x)R$ on identtinen merkkijonon $(\forall_{A'} x')R'$ kanssa.*

KK 11. *Olkoon A, R ja U merkkijonoja ja x ja y eri kirjaimia. R' tarkoittaa merkkijonoa $(U|\,y)R$ ja A' merkkijonoa $(U|\,y)A$. Jos kirjain x ei esiinny merkkijonossa U, niin $(U|\,y)(\exists_A x)R$ on identtinen merkkijonon $(\exists_{A'} x)R'$*[5] *kanssa, ja $(U|\,y)(\forall_A x)R$ merkkijonon $(\forall_{A'} x)R'$ kanssa.*

FK 12. *Olkoon A ja R relaatioita teoriassa $\mathscr{T}$ ja x kirjain. Nyt $(\exists_A x)R$ ja $(\forall_A x)R$ ovat relaatioita teoriassa $\mathscr{T}$.*

Seuraavassa esitellään ja perustellaan rajoitettujen kvanttorien käyttöön todistuksissa liittyviä deduktiivisia kriteerejä. Kriteerin **K 35** avulla perustellaan kriteerit **K 36** ja **K 37**, joiden avulla lisäoletuksen menetelmä ja reductio ad absurdum yleistyvät käytettäviksi myös rajoitettujen kvanttoreiden kanssa.

K 35. *Olkoon A ja R relaatioita teoriassa $\mathscr{T}$ ja x kirjain. Nyt relaatiot $(\forall_A x)R$ ja $(\forall x)(A \Rightarrow R)$ ovat ekvivalentteja teoriassa $\mathscr{T}$.*

Perustelu. $(\forall_A x)R$ on identtinen relaation $\neg(\exists x)(A \wedge (\neg R))$ kanssa. Relaatio $(A \wedge (\neg R))$ on määrittelyn 2.14 mukaan ekvivalentti relaation $\neg((\neg A) \vee R)$, toisin sanoen relaation $\neg(A \Rightarrow R)$ kanssa. Nyt siis $(A \wedge (\neg R)) \Leftrightarrow \neg(A \Rightarrow R)$ on lause, ja täten kriteerin **K 31** ja määrittelyn 2.16 perusteella

$$(\neg(\exists x)(A \wedge (\neg R))) \Leftrightarrow (\neg(\exists x)\neg(A \Rightarrow R))$$

on lause teoriassa $\mathscr{T}_0$. Nyt $(\neg(\exists x)\neg(A \Rightarrow R))$ on määrittelyn 2.18 mukaan identtinen relaation $(\forall x)(A \Rightarrow R)$ kanssa. Nyt siis on näytetty, että $(\forall_A x)R$ ja $(\forall x)(A \Rightarrow R)$ ovat ekvivalentteja teoriassa $\mathscr{T}_0$, ja täten myös teoriassa $\mathscr{T}$.

K 36. *Olkoon A ja R relaatioita teoriassa $\mathscr{T}$ ja x kirjain. Olkoon $\mathscr{T}'$ teoria, joka on saatu lisäämällä A teorian $\mathscr{T}$ aksioomiin. Jos x ei ole teorian $\mathscr{T}$ vakio, ja jos R on lause teoriassa $\mathscr{T}'$, niin $(\forall_A x)R$ on lause teoriassa $\mathscr{T}$.*

Perustelu. Kriteerin **K 14** perusteella $A \Rightarrow R$ on lause teoriassa $\mathscr{T}$, ja tällöin kriteerin **K 27** perusteella $(\forall x)(A \Rightarrow R)$ on lause teoriassa $\mathscr{T}$. Kriteerin **K 35** perusteella $(\forall x)(A \Rightarrow R)$ on ekvivalentti relaation $(\forall_A x)R$ kanssa. Siispä $(\forall_A x)R$ on lause teoriassa $\mathscr{T}$.

K 37. *Olkoon A ja R relaatioita teoriassa $\mathscr{T}$ ja x kirjain. Olkoon $\mathscr{T}'$ teoria, joka on saatu liittämällä relaatiot A ja $\neg R$ teorian $\mathscr{T}$ aksioomiin. Jos x ei ole teorian $\mathscr{T}$ vakio, ja jos $\mathscr{T}'$ ristiriitainen, niin $(\forall_A x)R$ on lause teoriassa $\mathscr{T}$.*

[5] Bourbaki on merkinnyt [1, s. 41] $(\exists_{A'} x')R'$ ja $(\forall_{A'} x')R'$, mikä lienee kirjoitusvirhe. Merkintää x' ei ole tämän kriteerin osalta määritelty millään tavoin.

Perustelu. Kuten jo kriteerin **K 35** perustelussa todettiin, relaatio $A \wedge (\neg R)$ on identtinen relaation $\neg(A \Rightarrow R)$ kanssa. Siis voidaan sanoa, että teoria $\mathscr{T}'$ on saatu lisäämällä teorian $\mathscr{T}$ aksioomiin relaatio $\neg(A \Rightarrow R)$. Nyt teorian $\mathscr{T}'$ ristiriitaisuudesta seuraa kriteerin **K 15** perusteella, että $(A \Rightarrow R)$ on lause teoriassa $\mathscr{T}$. Tästä seuraa samoin kuin kriteerin **K 36** perustelussa, että $(\forall_A x)R$ on lause teoriassa $\mathscr{T}$.

Rajoitetuilla kvanttoreilla on vastaavat ominaisuudet kuin normaaleillakin kvanttoreilla. Seuraavassa esitellään kriteerit, jotka vastaavat sisällöltään ja perusteluiltaan kriteerejä **K 29** – **K 34**. Kriteerien perustelut sivuutetaan.

K 38. *Olkoon A ja R relaatioita teoriassa $\mathscr{T}$ ja x kirjain. Nyt relaatiot*

$$\neg(\forall_A x)R \Leftrightarrow (\exists_A x)(\neg R) \quad \textit{ja} \quad \neg(\exists_A x)R \Leftrightarrow (\forall_A x)(\neg R)$$

ovat lauseita teoriassa $\mathscr{T}$.

K 39. *Olkoon A, R ja S relaatioita teoriassa $\mathscr{T}$ ja x kirjain, joka ei ole teorian $\mathscr{T}$ vakio. Jos relaatio $A \Rightarrow (R \Rightarrow S)$ on lause teoriassa $\mathscr{T}$, niin relaatiot*

$$(\exists_A x)R \Rightarrow (\exists_A x)S \quad \textit{ja} \quad (\forall_A x)R \Rightarrow (\forall_A x)S$$

ovat lauseita teoriassa $\mathscr{T}$. Vastaavasti jos relaatio $A \Rightarrow (R \Leftrightarrow S)$ on lause teoriassa $\mathscr{T}$, niin relaatiot

$$(\exists_A x)R \Leftrightarrow (\exists_A x)S \quad \textit{ja} \quad (\forall_A x)R \Leftrightarrow (\forall_A x)S$$

ovat lauseita teoriassa $\mathscr{T}$.

K 40. *Olkoon A, R ja S relaatioita teoriassa $\mathscr{T}$ ja x kirjain. Nyt relaatiot*

$$(\forall_A x)(R \wedge S) \Leftrightarrow ((\forall_A x)R \wedge (\forall_A x)S) \quad \textit{ja} \quad (\exists_A x)(R \vee S) \Leftrightarrow ((\exists_A x)R \vee (\exists_A x)S)$$

ovat lauseita teoriassa $\mathscr{T}$.

K 41. *Olkoon A, R ja S relaatioita teoriassa $\mathscr{T}$ ja x kirjain, joka ei esiinny relaatiossa R. Nyt relaatiot*

$$(\forall_A x)(R \vee S) \Leftrightarrow (R \vee (\forall_A x)R) \quad \textit{ja} \quad (\exists_A x)(R \wedge S) \Leftrightarrow (R \wedge (\exists_A x)S)$$

ovat lauseita teoriassa $\mathscr{T}$.

K 42. *Olkoon A, B ja R relaatioita teoriassa $\mathscr{T}$ ja x ja y kirjaimia. Jos x ei esiinny relaatiossa B, ja jos y ei esiinny relatiossa A, niin relaatiot*

1. $(\forall_A x)(\forall_B y)R \Leftrightarrow (\forall_B y)(\forall_A x)R$
2. $(\exists_A x)(\exists_B y)R \Leftrightarrow (\exists_B y)(\exists_A x)R$
3. $(\exists_A x)(\forall_B y)R \Rightarrow (\forall_B y)(\exists_A x)R$

ovat lauseita teoriassa $\mathscr{T}$.

2.5 Identiteetilliset teoriat

2.5.1 Identiteetillisen teorian aksioomat

Määrittely 2.20. Teoriaa $\mathscr{T}$, jossa on relationaalinen erityinen merkki $=$, ja jossa skeemat **S 1** $-$ **S 5** sekä seuraavat skeemat **S 6** ja **S 7** tuottavat implisiittisiä aksioomia, sanotaan *identiteetilliseksi teoriaksi.*

Määrittelyn 2.6 mukaisesti erityisellä merkillä operoidaan ensimmäisen lajin merkkijonoon, toisin sanoen siis termiin. Kriteerin **FK 4** perusteella tiedetään, että jos T ja U ovat termejä teoriassa $\mathscr{T}$, niin $= TU$ on relaatio teoriassa T. Tätä relaatiota kutsutaan *yhtäsuuruus-relaatioksi.* Relaatiota voidaan merkitä myös $T = U$ tai $(T) = (U)$.

Huomautus 2.5. Alaluvussa 2.3.5 esiteltiin kahden relaation välinen ekvivalenssi. Yhtäsuuruus taasen koskee kahta termiä, ja kyseessä on siten eri asia.

Määrittely 2.21. Jos A on merkkijono, ja ollaan kiinnostuneita tietystä kirjaimesta x, joka saattaa esiintyä tai olla esiintymättä merkkijonossa A, niin voidaan kirjoittaa $A\langle x\rangle$. Tällöin voidaan kirjoittaa myös $A\langle B\rangle$, kun tarkoitetaan merkkijonoa $(B|\,x)A$.

S 6. *Olkoon x kirjain ja T ja U termejä teoriassa $\mathscr{T}$, ja olkoon $R\langle x\rangle$ relaatio teoriassa $\mathscr{T}$. Nyt relaatio $(T = U) \Rightarrow (R\langle T\rangle \Leftrightarrow R\langle U\rangle)$ on aksiooma.*

S 7. *Jos R ja S ovat relaatioita teoriassa $\mathscr{T}$, ja x on kirjain, niin relaatio*

$$((\forall x)(R \Leftrightarrow S)) \Rightarrow (\tau_x(R) = \tau_x(S)) \tag{2.14}$$

on aksiooma.

Näytetään, että sääntö **S 7** on skeema. Nähdään helposti, että (2.14) on relaatio teoriassa $\mathscr{T}$, kun R ja S ovat relaatioita teoriassa $\mathscr{T}$ ja x kirjain. Olkoon A aksiooma, joka on saatu soveltamalla sääntöä **S 7**, toisin sanoen A on identtinen relaation (2.14) kanssa. Nyt tulee näyttää, että jos V on termi ja y kirjain, niin relaatio $(V|\,y)A$ saadaan myös soveltamalla sääntöä **S 7**. Nyt siis $(V|\,y)A$ on merkkijono

$$(V|\,y)((\forall x)(R \Leftrightarrow S)) \Rightarrow (\tau_x(R) = \tau_x(S)). \tag{2.15}$$

Kriteerin **KK 5** perusteella tämä on identtinen relaation

$$((V|\,y)(\forall x)(R \Leftrightarrow S)) \Rightarrow (V|\,y)((\tau_x(R) = \tau_x(S))), \tag{2.16}$$

ja saman kriteerin perusteella edelleen relaation

$$((V|\,y)(\forall x)(R \Leftrightarrow S)) \Rightarrow ((V|\,y)\tau_x(R) = (V|\,y)\tau_x(S)) \tag{2.17}$$

kanssa. Nyt voidaan olettaa, että x ja y ovat eri kirjaimia, ja että kirjainta x ei esiinny termissä V. Nyt kriteerien **KK 4**, **KK 5**, **KK 7** ja **KK 9** perusteella relaatio (2.17) on identtinen relaation

$$((\forall x)((V|\,y)R \Leftrightarrow (V|\,y)S)) \Rightarrow (\tau_x((V|\,y)R) = \tau_x((V|\,y)S)) \tag{2.18}$$

kanssa. Relaatio (2.18) voidaan konstruoida soveltamalla sääntöä **S 7** relaatioihin $(V|\,y)R$, $(V|\,y)S$ ja kirjaimeen x. Siispä **S 7** on skeema. Bourbaki on näyttänyt säännön **S 6** skeemaksi [1, s. 44-45][6].

Skeema **S 6** kertoo, että jos kaksi objektia ovat yhtä suuria, niin silloin niillä on myös samat ominaisuudet. Siis jos T ja U ovat yhtä suuria, niin T toteuttaa väittämän R täsmälleen silloin, kun U toteuttaa saman väittämän. Skeeman **S 7** mukaan jos kaikilla objekteilla x väittämät R ja S ovat ekvivalentteja, niin sellainen objekti, joka toteuttaa väittämän R on yhtä suuri, kuin sellainen objekti, joka toteuttaa väittämän S. Skeeman kannalta ei ole merkitystä, onko tällaisia objekteja olemassa.

Määrittely 2.22. Relaatiota $\neg(= TU)$ merkitään $T \neq U$ tai $(T) \neq (U)$.

K 43. *Olkoon x kirjain, T ja U termejä teoriassa $\mathscr{T}$ ja $R\langle x\rangle$ relaatio teoriassa $\mathscr{T}$. Nyt relaatiot*

$$(T = U) \wedge (R\langle T\rangle) \quad ja \quad (T = U) \wedge (R\langle U\rangle)$$

ovat ekvivalentteja.

Perustelu. Tehdään lisäoletus, että $(T = U) \wedge (R\langle T\rangle)$ on totta. Nyt skeeman **S 6** perusteella $(R\langle T\rangle)$ ja $(R\langle U\rangle)$ ovat ekvivalentteja. Lisäoletuksen perusteella $(R\langle T\rangle)$ on totta, joten myös $(R\langle U\rangle)$ ja siten myös $(T = U) \wedge (R\langle U\rangle)$ on totta. Ekvivalenssin toinen suunta perustellaan vastaavalla tavalla.

2.5.2 Yhtäsuuruuden ominaisuuksia

Tästä eteenpäin tarkastellaan vain identiteetillisiä teorioita. Kuten aikaisemminkin, jos $\mathscr{T}$ on tällainen teoria, niin $\mathscr{T}_0$ on teoria, jolla on samat merkit kuin teorialla $\mathscr{T}$, ja jonka ainoat aksioomat ovat skeemojen **S 1** − **S 7** tuottamat aksioomat. Jälleen $\mathscr{T}_0$ on heikompi kuin $\mathscr{T}$, eikä siinä ole vakioita. Seuraavassa todistetaan yhtäsuuruuden perusominaisuudet refleksiivisyys, symmetrisyys ja transitiivisyys lauseiksi teoriassa $\mathscr{T}_0$.

Lause 2.1. $x = x$.

[6] Bourbakin kirjassa on sivulla 45 rivillä 2 painovirhe; $(V|\,x)A$ sijasta pitäisi lukea $(V|\,y)A$.

Todistus. Olkoon S relaatio $x = x$. Kaikille relaatioille R pitää paikkansa, että $R \Leftrightarrow R$ on totta. Kriteerin **K 27** perusteella nyt myös $(\forall x)(R \Leftrightarrow R)$ on totta. Soveltamalla skeemaa **S 7** relaatioihin R ja R sekä kirjaimeen x nähdään, että $\tau_x(R) = \tau_x(R)$ on totta. $\tau_x(R) = \tau_x(R)$ on identtinen kriteerin **KK 5** perusteella relaation $(\tau_x(R)|\, x)S$ kanssa, joka täten on myös totta. Koska päättely pätee kaikille relaatioille R, voidaan olettaa, että R on relaatio $\neg S$. Nyt siis $(\tau_x(\neg S)|\, x)S$ on totta. Kriteerin **K 26** perusteella $(\forall x)S$ on totta teoriassa $\mathscr{T}_0$. Nyt kriteerin **K 30** perusteella S on totta teoriassa $\mathscr{T}_0$. $\square$

Huomautus 2.6. Lause 2.1 ei vielä kerro, että kaikki termit ovat yhtä suuria itsensä kanssa, vaan tarvitaan seuraavanlainen päättely. Koska $x = x$ on totta, niin $(\forall x)x = x$ on totta. Nyt jos T on termi, niin kriteerin **K 30** perusteella $T = T$ on totta. Seuraavien lauseiden kohdalla vastaava päättely sivuutetaan.

Lause 2.2. $(x = y) \Leftrightarrow (y = x)$.

Todistus. Oletetaan, että relaatio $(x = y)$ on totta. Sovelletaan nyt skeemaa **S 6** termeihin x ja y sekä relaatioon $y = x$. Siispä

$$(x = y) \Rightarrow ((x|\, y)(y = x) \Leftrightarrow (y|\, y)(y = x))$$

on totta. Määrittelyn 2.5 perusteella siis

$$(x = y) \Rightarrow ((x = x) \Leftrightarrow (y = x))$$

on totta. Oletuksen perusteella $(x = x) \Leftrightarrow (y = x)$ on totta, ja koska $x = x$ on totta lauseen 2.1 perusteella, niin myös $y = x$ on totta. Ekvivalenssin toinen suunta todistetaan vastaavasti. $\square$

Lause 2.3. $((x = y) \wedge (y = z)) \Rightarrow (x = z)$.

Todistus. Oletetaan, että $x = y$ ja $y = z$ ovat totta. Sovelletaan skeemaa **S 6** termeihin x ja y sekä relaatioon $y = z$, jolloin relaatio

$$(x = y) \Rightarrow ((x = z) \Leftrightarrow (y = z))$$

on totta. Nyt $(x = z) \Leftrightarrow (y = z)$ on totta, ja oletuksesta seuraa, että myös $x = z$ on totta. Siispä lause on todistettu. $\square$

K 44. *Olkoon x kirjain ja T, U ja $V\langle x\rangle$ termejä teoriassa $\mathscr{T}_0$. Nyt relaatio $(T = U) \Rightarrow (V\langle T\rangle = V\langle U\rangle)$ on lause teoriassa $\mathscr{T}_0$.*

Perustelu. Olkoon y ja z keskenään eri kirjaimia, jotka ovat myös eri kirjaimia kuin x ja relaatioissa T, U ja V esiintyvät kirjaimet. Tehdään lisäoletus $y = z$. Nyt voidaan siveltaa skeemaa **S 6** termeihin y ja z sekä relaatioon $(x|\, z)(V\langle y\rangle = V\langle z\rangle)$, jolloin

$$((y|\, z)(V\langle y\rangle = V\langle z\rangle)) \Leftrightarrow ((z|\, z)(V\langle y\rangle = V\langle z\rangle))$$

on totta. Siis

$$(V\langle y\rangle = V\langle y\rangle) \Leftrightarrow (V\langle y\rangle = V\langle z\rangle)$$

on totta. Lauseen 2.1 mukaan $(V\langle y\rangle = V\langle y\rangle)$ on totta, joten $(V\langle y\rangle = V\langle z\rangle)$ on totta. Nyt relaatio

$$(y = z) \Rightarrow (V\langle y\rangle = V\langle z\rangle) \tag{2.19}$$

on totta teoriassa $\mathscr{T}_0$. Tarkoittakoon A lausetta (2.19). Relaatio $(T|\, y)(U|\, z)A$ on

$$(T = U) \Rightarrow (V\langle T\rangle = V\langle U\rangle). \tag{2.20}$$

Täten myös relaatio (2.20) on lause teoriassa $\mathscr{T}_0$.

Määrittely 2.23. Olkoot T ja U termejä teoriassa $\mathscr{T}$. Relaatiota, joka on muotoa $T = U$ kutsutaan *yhtälöksi*. Termiä V relaatiossa $\mathscr{T}$ sanotaan yhtälön $T = U$ *ratkaisuksi*, jos $T\langle V\rangle = U\langle V\rangle$ on lause teoriassa $\mathscr{T}$.

Määrittely 2.24. Olkoon T ja U termejä teoriassa $\mathscr{T}$ ja $x_1, x_2, \ldots, x_n$ kirjaimet, jotka esiintyvät termissä T mutta eivät termissä U. Jos relaatio

$$(\exists x_1)(\exists x_2)\ldots(\exists x_n)(T = U)$$

on lause teoriassa $\mathscr{T}$, niin sanotaan, että U *voidaan esittää muodossa* T teoriassa $\mathscr{T}$. Olkoon V relaation R, joka on kirjaimesta x riippuva relaatio, ratkaisu. Jos kaikki relaation R ratkaisut voidaan esittää muodossa V, niin termin V sanotaan olevan relaation R *yleinen* tai *täydellinen ratkaisu*.

2.5.3 Funktionaaliset relaatiot

Määrittely 2.25. Olkoon R relaatio teoriassa $\mathscr{T}$ ja x kirjain. Olkoon y ja z eri kirjaimia, jotka ovat myös eri kirjaimia kuin x, eivätkä esiinny merkkijonossa R. Nyt merkkijono

$$(\forall y)(\forall z)(((y|\, x)R \wedge (z|\, x)R) \Rightarrow (y = z)) \tag{2.21}$$

on relaatio. Jos relaatio (2.21) on lause teoriassa $\mathscr{T}$, niin sanotaan, että R on *yksiarvoinen* kirjaimen x suhteen teoriassa $\mathscr{T}$. Relaation (2.21) kirjoittamisen sijasta voidaan sanoa, että on olemassa korkeintaan yksi sellainen x, että R.

Jos halutaan osoittaa, että R on yksiarvoinen, tulee osoittaa, että $y = z$ teoriassa, joka on saatu lisäämällä teorian $\mathscr{T}$ aksioomiin $((y|\, x)R \wedge (z|\, x)R)$, missä y ja z ovat eri kirjaimia, jotka ovat myös eri kirjaimia kuin x, eivätkä esiinny relaatiossa R eikä teorian $\mathscr{T}$ eksplisiittisissä aksioomissa.

K 45. *Olkoon R relaatio teoriassa $\mathscr{T}$ ja x kirjain, joka ei ole teorian $\mathscr{T}$ vakio. Jos R on yksiarvoinen kirjaimen x suhteen teoriassa $\mathscr{T}$, niin relaatio $R \Rightarrow (x = \tau_x(R))$ on lause teoriassa $\mathscr{T}$. Vastaavasti jos jollakin termillä T teoriassa $\mathscr{T}$, jossa ei esiinny kirjainta x, $R \Rightarrow (x = T)$ on lause teoriassa $\mathscr{T}$, niin R on yksiarvoinen kirjaimen x suhteen teoriassa $\mathscr{T}$.*

Perustelu. Oletetaan, että R on yksiarvoinen kirjaimen x suhteen. Nyt on osoitettava, että $R \Rightarrow (x = \tau_x(R))$ on lause teoriassa $\mathscr{T}$. Tehdään lisäoletus R, jolloin myös $(T|\, x)R$, missä T on termi teoriassa $\mathscr{T}$, on totta. Nyt sovelletaan skeemaa **S 5** relaatioon R, termiin T ja kirjaimeen x. Nähdään, että relaatio $(\exists x)R$ on lause. Määrittelyn 2.18 perusteella siis $(\tau_x(R)|\, x)R$ on lause. Nyt

$$R \wedge (\tau_x(R)|\, x)R$$

on lause. Tämä voidaan kirjoittaa muodossa

$$((x|\, x)R) \wedge ((\tau_x(R)|\, x)R)$$

Nyt koska R on yksiarvoinen kirjaimen x suhteen, niin

$$(\forall y)(\forall z)(((y|\, x)R \wedge (z|\, x)R) \Rightarrow (y = z))$$

on lause. Kriteerin **K 30** perusteella

$$(x|\, y)(\tau_x(R)|\, z)(((y|\, x)R \wedge (z|\, x)R) \Rightarrow (y = z))$$

on lause. Tästä seuraa, että myös

$$((x|\, x)R) \wedge ((\tau_x(R)|\, x)R) \Rightarrow (x = \tau_x(R))$$

on lause. Siispä $x = \tau_x(R)$ on lause. Siispä relaation R yksiarvoisuudesta seuraa, että $R \Rightarrow (x = \tau_x(R))$ on totta.

Oletetaan vuorostaan, että $R \Rightarrow (x = \tau_x(R))$ on totta. Olkoon y ja z eri kirjaimia, jotka ovat myös eri kirjaimia kuin x, eivätkä esiinny relaatiossa R eikä teorian $\mathscr{T}$ eksplisiittisissä aksioomissa. Koska x ei ole teorian $\mathscr{T}$ vakio eikä esiinny termissä T, niin relaatiot

$$(y|\, x)R \Rightarrow (y|\, x)(x = T) \quad \text{ja} \quad (z|\, x)R \Rightarrow (z|\, x)(x = T),$$

eli toisin sanoen relaatiot

$$(y|\, x)R \Rightarrow (y = T) \quad \text{ja} \quad (z|\, x)R \Rightarrow (z = T)$$

ovat lauseita teoriassa $\mathscr{T}$. Tehdään lisäoletukset $(y|\, x)R$ ja $(z|\, x)R$. Nyt relaatiot $y = T$ ja $z = T$ ovat lauseita teoriassa $\mathscr{T}$. Lauseiden 2.2 ja 2.3 perusteella $y = z$ on lause teoriassa $\mathscr{T}$. Nyt siis

$$((y|\, x)R \wedge (z|\, x)R) \Rightarrow (y = z)$$

on totta. Kriteerin **K 27** perusteella

$$(\forall y)(\forall z)(((y|\, x)R \wedge (z|\, x)R) \Rightarrow (y = z))$$

on totta, ja siten R on yksiarvoinen kirjaimen x suhteen teoriassa $\mathscr{T}$.

Määrittely 2.26. Olkoon R relaatio teoriassa $\mathscr{T}$. Jos relaatio

$$((\exists x)R) \wedge (\forall y)(\forall z)(((y|\,x)R \wedge (z|\,x)R) \Rightarrow (y = z)) \tag{2.22}$$

on lause teoriassa $\mathscr{T}$, sanotaan, että R on *funktionaalinen relaatio kirjaimen x suhteen* teoriassa $\mathscr{T}$.

Relaatio (2.22) voidaan esittää myös sanomalla, että on olemassa tarkalleen yksi sellainen x, että R.

K 46. *Olkoon R relaatio teoriassa $\mathscr{T}$ ja x kirjain, joka ei ole teorian $\mathscr{T}$ vakio. Jos R on funktionaalinen relaatio kirjaimen x suhteen teoriassa $\mathscr{T}$, niin $R \Leftrightarrow (x = \tau_x(R))$ on lause teoriassa $\mathscr{T}$. Vastaavasti jos jollakin termillä T, jossa ei esiinny kirjainta x, relaatio $R \Leftrightarrow (x = T)$ on lause teoriassa $\mathscr{T}$, niin R on funktionaalinen relaatio kirjaimen x suhteen teoriassa $\mathscr{T}$.*

Perustelu. Olkoon R funktionaalinen kirjaimen x suhteen teoriassa $\mathscr{T}$. Silloin $R \Rightarrow (x = \tau_x(R))$ on lause kriteerin **K 45** perusteella. Koska R on funktionaalinen relaatio, niin $(\exists x)R$ on lause teoriassa $\mathscr{T}$. Sovelletaan skeemaa **S 6** kirjaimeen x, termeihin x ja $\tau_x(R)$ ja relaatioon $R\langle x\rangle$, jolloin

$$(x = \tau_x(R)) \Rightarrow ((x|\,x)R \Leftrightarrow (\tau_x(R)|\,x)R),$$

eli toisin sanoen

$$(x = \tau_x(R)) \Rightarrow (R \Leftrightarrow (\exists x)R)$$

on lause teoriassa $\mathscr{T}$. Tekemällä lisäoletuksen $x = \tau_x(R)$ seuraa, että R on lause teoriassa $\mathscr{T}$. Siispä $R \Leftrightarrow (x = \tau_x(R))$ on lause teoriassa $\mathscr{T}$.

Oletetaan nyt, että $R \Leftrightarrow (x = T)$ on lause teoriassa $\mathscr{T}$. Kriteerin **K 45** perusteella R on yksiarvoinen kirjaimen x suhteen teoriassa $\mathscr{T}$. Nyt relaatio $(T|\,x)R \Leftrightarrow (T|\,x)(x = T)$, eli $(T|\,x)R \Leftrightarrow (T = T)$ on lause teoriassa $\mathscr{T}$. Lauseen 2.1 perusteella $T = T$ on lause teoriassa $\mathscr{T}$, joten myös $(T|\,x)R$ on lause teoriassa $\mathscr{T}$. Soveltamalla skeemaa **S 5** relaatioon R, termiin T ja kirjaimeen x nähdään, että $(\exists x)R$ on lause teoriassa $\mathscr{T}$. Nyt relaatio

$$((\exists x)R) \wedge (\forall y)(\forall z)(((y|\,x)R \wedge (z|\,x)R) \Rightarrow (y = z))$$

on lause teoriassa $\mathscr{T}$, ja täten relaatio R on funktionaalinen kirjaimen x suhteen teoriassa $\mathscr{T}$.

Määrittely 2.27. Jos relaatio R on fuktionaalinen kirjaimen x suhteen teoriassa $\mathscr{T}$, niin R on ekvivalentti kriteerin **K 43** perusteella relaation $x = \tau_x(R)$ kanssa, joka on monesti helpompi käsitellä. Termiä $\tau_x(R)$ varten esitellään lyhennyssymboli Σ. Tällaista symbolia kutsutaan *funktionaaliseksi symboliksi.*

Esimerkki 2.6. Tutkitaan teoriaa, jossa väite ”y on positiivinen kokonaisluku” on totta. Nyt relaatio ”x on reaaliluku, ja $y = e^x$” on funktionaalinen relaatio. Tätä relaatiota vastaa funktionaalinen symboli $\ln y$.

K 47. *Olkoon x kirjain, joka ei ole teorian $\mathscr{T}$ vakio, ja olkoot $R\langle x\rangle$ ja $S\langle x\rangle$ relaatioita teoriassa $\mathscr{T}$. Jos $R\langle x\rangle$ on funktionaalinen relaatio kirjaimen x suhteen teoriassa $\mathscr{T}$, niin relaatio $S\langle \tau_x(R)\rangle$ on ekvivalentti relaation $(\exists x)((R\langle x\rangle) \wedge (S\langle x\rangle)$ kanssa.*

Perustelu. Kriteereistä **K 46** ja **K 43** seuraa, että $((R\langle x\rangle) \wedge (S\langle x\rangle)$ on ekvivalentti relaation $((R\langle x\rangle) \wedge (S\langle \tau_x(R)\rangle)$ kanssa. Koska relaatiossa $S\langle \tau_x(R)\rangle$ ei esiinny kirjainta x, niin

$$(\exists x)(R\langle x\rangle) \wedge (S\langle \tau_x(R)\rangle)$$

on kriteerin **K 33** perusteella ekvivalentti relaation

$$(S\langle \tau_x(R)\rangle) \wedge (\exists x)R$$

kanssa. Koska R on funktionaalinen kirjaimen x suhteen teoriassa $\mathscr{T}$, niin $(\exists x)R$ on totta, mistä tulos seuraa.

3 Yhteenveto

Luvussa 2 on konstruoitu predikaattilogiikka Bourbakin esittämällä tavalla. Seuraavana askeleena Bourbaki aksiomatisoi joukko-opin oman predikaattilogiikan formalisoinnin avulla. Joukko-oppi taas toimii muiden matematiikan osa-alueiden aksiomatisoinnin pohjana.

Suurin ero verrattuna yliopistossa nykyisin logiikan peruskursseissa käytettävään esitykseen on Bourbakin tarkka erottelu metamatemaattisen ja matemaattisen tason välillä. Erottelun seurauksena formalismi on kankea, eikä sitä ole kovin helppo seurata. Toisaalta esitys on perusteellinen, ja kun formalisoinnin idea selviää lukijalle, kokonaisuus on looginen. Määrittelyt ovat yksiselitteisiä, ja esitetyt kriteerit ovat joko välttämättömiä predikaattilogiikan ominaisuuksien määrittelemiseksi tai toisten kriteerien perustelemiseksi.

Onko jako matemaattisen ja metamatemaattisen tason välillä tarpeellinen? Loppujen lopuksi erottelun suurimpana ansiona on formalisoinnissa tapahtuvien epämääräisyyksien siirtäminen matematiikan ulkopuolelle. Matematiikan sisällä sallitut operaatiot on määritelty erittäin tarkasti, mutta metamatematiikan puolella sääntöjä ei ole. Sinänsä metamatematiikassa operointi vastaa hyvin pitkälle normaalia matematiikassa operointia, mutta vaatimukset päättelyjen perusteluille ja oikeutuksille ovat löyhemmät.

Bourbakin formalisointia ei voi arvioida pelkästään vertaamalla nykykäytäntöihin. Jos uskoo matematiikan kehitykseen ja tieteelliseen menetelmään, niin on helppo vakuuttua nykyisen yleisen matemaattisen käytännön olevan "parempi" kuin Bourbakin esittämä vaihtoehto. Pitäisi pystyä perehtymään 1940-luvun aikaiseen ja sitä varhaisempaan, varsinkin ranskalaiseen, matemaattiseen kirjallisuuteen, jotta voisi paremmin ymmärtää Bourbakin valintoja. Valitettavasti sellainen tutkimus ei mahdu tämän tutkielman laajuuteen.

Riippumatta siitä pitääkö Bourbakin formalisointia parhaana mahdollisena, kyseessä on mielenkiintoinen lähestymistapa. Uuden näkökulman saaminen tuttuunkin aiheeseen parantaa monesti yleistä ymmärrystä aiheesta. Ensimmäisen logiikan kurssin sisällöksi Bourbakin formalismista ei ole, mutta hieman logiikkaan perehtyneelle se tarjonnee kiinnostavan kokonaisuuden.

Viitteet

[1] Bourbaki, Nicolas, *Elements of mathematics theory of sets*. Paris: Hermann, 1968.

[2] Borel, Armand, *25 years with Nicolas Bourbaki*, http://www.ega-math.narod.ru/Bbaki/Bourb3.htm, 1995, tarkistettu 9.11.2006.

[3] *Nicolas Bourbaki*, Duke Math News, http://www.math.duke.edu/math_news/October94.html, 1994, tarkistettu 9.11.2006.

[4] *Proof and Beauty*, The Economist, 4/2/2005, Vol. 375 Issue 8420, p73.

[5] Myrberg, Lauri, *Differentiaali- ja integraalilaskenta korkeakouluja varten*, Helsinki: Kirjayhtymä, 1974.

[6] Pekonen, Osmo, *Bourbaki in Memorian*, kirjassa "Symbolien metsässä", toim. Osmo Pekonen, Gummerus, 1992.

[7] Regan, Geoffrey, *Päin mäntyä: kirja sotilaallisista tunaroinneista*, Gummerus, 2004.

[8] Richer, Émilie, *Nicolas Bourbaki*, http://planetmath.org/encyclopedia/NicolasBourbaki.html, 2003, tarkistettu 9.11.2006.