TAMPEREEN YLIOPISTO
Pro gradu-tutkielma

Moradi Mohammad Ali

Derivaatta

Matematiikan, tilastotieteen ja filosofian laitos
Matematiikka
Joulukuu 2006

Tampereen yliopisto

Matematiikan, tilastotieteen ja filosofian laitos

Moradi Mohammad Ali: Derivaatta

Pro gradu-tutkielma, 63 s.

Matematiikka

Joulukuu 2006

Tiivistelmä

Derivaatasta kirjoitettu tutkielma sisältää 35 asiaa, joihin sisältyy derivaatan määritelmä ja muutama muu määritelmä, huomautuksia ja yhteensä 32 lausetta.

Lauseet koostuvat derivaatan keskeisimmistä lauseista ja muista lauseista, joiden avulla voidaan määrittää joidenkin funktioiden derivaatta. Jotkut määritelmät ovat lyhyitä funktioiden määritelmiä. Huomautuksissa on tapauksia, joihin eivät päde jotkut lauseet, ja muita poikkeustapauksia. Loppuun olen sisällyttänyt harjoituksia.

Sisältö

1 Johdanto

Tämä moniste on tarkoitettu luettavaksi henkilöille, joille derivaatan pääasiat. Ja sen muodostaminen ovat varsin tuttuja ja jotka ovat työskennelleet näiden asioiden parissa. Tavoitteena on ollut esittää yleiskatsaus asioista, joita voi käyttää usein derivaatan yhteydessä.

On selvä, että derivaatta on tärkeä asia matematiikassa. Mm. muuttujan muutoksesta johtunut funktion arvon muutos, funktion kasvavuus, funktion laskevuus, funktion maksimi, funktion minimi, funktion kasvavuuden ja laskevuuden käyttö teollisuudessa ja päivän asioissa, nopeus ja kiihtyvyys fysiikassa ja monet muut derivaatan sovellutukset ovat asioita, jotka ilmaisevat derivaatan tunnistamisen tarpeen.

Ennestään ja myös silloin, kun toimin opettajana, ajattelin, että erilaisia matemaattisia asioita kohdattaessa onnistutaan paremmin, jos tiedetään suhteellisen paljon derivaatan sovelluksista useissa mainituissa asioissa, mutta ei taulukoitujen kaavojen tapaan. Mutta olen huomannut, että tällaisia yhteenvetoja on tehty harvoin ja niitä tarvittaessa täytyy käyttää monia lähteitä.

Tässä olen yrittänyt derivaatan määrittelyn ja derivaatan tärkeiden lauseiden esittämisen ohella tutkia joitakin tiettyjä funktioita ja niiden derivaattoja lyhyesti.

Eri aiheiden käsittelemisen syvyys riippuu aiheesta ja tarpeesta, jota olen tuntenut. Siksi joitakin aiheita olen käsitellyt lyhyemmin ja joitakin aiheita syvemmin. On selvää, että jos olisin käsitellyt kaikki aiheet tarkasti, tästä monisteesta olisi tullut paksu kirja.

Kuitenkin tämä moniste koostuu 35 aiheesta, joihin sisältyy 32 lausetta ja muutama määrittely ja huomautus. Minä olen käyttänyt kuutta luotettavaa kirjaa, joiden käytössä olen yrittänyt vaihtaa niiden asioita mahdollisimman vähän. Joitakin lauseita olen todistanut perusteellisemmin ja joissakin todistuksissa olen tehnyt muutoksia.

Minun suomen kielen taitoni on heikko. Pyydän anteeksi lukijoilta, jos olen käyttänyt matemaattisia ilmaisuja väärin ja jos minulla on kieliopillisia virheitä.

Lopuksi kiitän ohjaajaani,yliassistentti Pentti Haukkasta, joka on yrittänyt parhaansa mukaan auttaa minua tämän gradun teossa. Kiitän myös Jarmo Niemelää, joka on auttanut minua Latexilla kirjoittamisessa.

2 Derivaatan määritelmä

Olkoon reaalifunktio f määritelty välillä (a, b). Olkoot x ja c kaksi erisuurta pistettä väliltä (a, b). Tarkastellaan osamäärää:

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c}.$$

Me haluamme tarkastella osamäärää, kun x lähestyy c:tä.

Määritelmä 2.1. Olkoon f välillä (a, b) määritelty funktio, ja olkoon $c \in (a, b)$. Sanotaan, että f on derivoituva pisteessä c, jos on olemassa raja-arvo

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}.$$

Tämä raja-arvo on f:n derivaatta pisteessä c, ja merkitään $f'(c)$. Siis

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}.$$

Me löydämme tästä prosessista uuden funktion f', jonka määrittelyjoukossa f on derivoituva.

Funktio f' on 1.kertaluvun derivaatta, ja merkitään sitä näin:

$$f'(c), \quad Df(c), \quad \frac{d}{dx}(c), \quad \frac{dy}{dx}\Big|_{x=c} \qquad (y = f(x)).$$

Esimerkki 2.1. Derivoi funktio $f(x) = x^2$ pisteessä c.

Ratkaisu. Määritelmän mukaan saadaan:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \\ &= \lim_{x \to c} \frac{x^2 - c^2}{x - c} \\ &= \lim_{x \to c} (x + c) = 2c. \end{aligned}$$

3 Derivaatta ja jatkuvuus

Tarkastellaan derivaatan ja jatkuvuuden suhdetta alla olevissa lauseissa.

Lause 3.1. *Ks. [1, s. 105]*

Olkoon funktio f määritelty välillä (a, b) ja derivoituva pisteessä $c \in (a, b)$. Tällöin jatkuva funktio f^* (riippuu c:sta ja f:sta) pisteessä c on olemassa ja

$$f(x) - f(c) = (x - c)f^*(x), \tag{3.1}$$

kaikilla x:lla välillä (a,b), missä $f^*(c) = f'(c)$.

Käänteisesti, jos jatkuvalle funktiolle f^* pätee yhtälö (3.1) pisteessä c, funktio f on derivoituva pisteessä c ja $f^*(c) = f'(c)$.

Todistus. Koska $f'(c)$ on olemassa, voidaan määritellä f^* välillä (a, b) näin:

$$f^*(x) = \frac{f(x) - f(c)}{x - c}, \qquad \text{jos} \qquad x \neq c,$$

$$f^*(c) = f'(c).$$

Silloin

$$\lim_{x \to c} f^*(x) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c},$$

eli

$$\lim_{x \to c} f^*(x) = f^*(c).$$

Tällä tavalla funktio f^* on jatkuva pisteessä c, ja yhtälö (3.1) on voimassa kaikilla x:lla.

Käänteisesti jos jatkuvalle funktiolle f^* pätee yhtälö (3.1) pisteessä c, jaetaan se $(x - c)$:llä ja lähestytään pisteestä x pisteeseen c ja huomataan, että $f'(c)$ on olemassa ja se on yhtä kuin $f^*(c)$. □

Lause 3.2. *Ks. [3, s. 188]*

Olkoon funktio f derivoituva pisteessä c. Tällöin f on jatkuva siinä pisteessä.

Todistus. Funktio f on derivoituva pisteessä c, joten

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}.$$

Selvästi

$$f(x) - f(c) = \frac{f(x) - f(c)}{x - c}(x - c), \qquad x \neq c.$$

Nyt

$$\lim_{x \to c}[f(x) - f(c)] = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \lim_{x \to c}(x - c) = f'(c) \cdot 0 = 0,$$

ja

$$\lim_{x \to c}[f(x) - f(c)] = 0 \Longrightarrow \lim_{x \to c} f(x) = f(c).$$

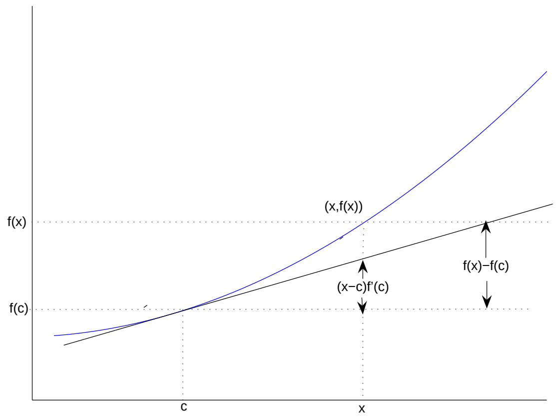
Siis jatkuvien funktioiden määritelmän perusteella f on jatkuva. □

Huomautus 3.1.

(a) Lauseen 3.1 yhtälöllä (3.1) on geometrinen tulkinta, täten voidaan saada hyvä käsitys derivaatasta. Koska f^* on jatkuva pisteessä c, $f^*(x)$ on melkein yhtä kuin $f^*(c)$, kun x on c:n lähellä. Jos funktio $f^*(x)$ sijaan sijoitamme $f'(c)$ yhtälöön (3.1) saamme

$$f(x) \approx f(c) + f'(c)(x - c),$$

mikä on hyvä arvo, kun $(x - c)$ on pieni. Jos f on derivoituva pisteessä c, on f melkein lineaarinen pisteen c läheisyydessä.



kuva 1

(b) Kuten ollaan havaittu kaikki derivoituvat funktiot ovat jatkuvia. Mutta edellisen lauseen vastakohta ei ole tosi, sillä on olemassa monia jatkuvia funktioita, jotka eivät ole derivoituvia. Esimerkiksi saksalaisen Weierstrassin esittämä funktio

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cos(2^n x), \qquad x \in \mathbb{R},$$

on jatkuva kaikissa pisteissä $x \in \mathbb{R}$, mutta ei ole derivoituva missään pisteessä. Myös voidaan mainita funktioita, jotka ovat jatkuvia, mutta eivät ole derivoituvia joissakin pisteissä. Esimerkiksi:

(i) Funktio $f(x) = |x| + |x-1|$, on jatkuva nollassa ja yhdessä, mutta ei ole derivoituva näissä pisteissä.

(ii) Funktio $f(x) = |x - \alpha|$, on jatkuva pisteessä α, mutta ei ole derivoituva siinä pisteessä.

4 Derivaatta ja laskutoimitukset

Tarkastellaan summan, tulon ja osamäärän derivaattaa alla olevassa lauseessa.

Lause 4.1. *Ks. [4, s. 223]*

Olkoot funktiot f ja g määritelty välillä (a, b) ja derivoituvia pisteessä $c \in (a, b)$. Tällöin $f \pm g$, $f \cdot g$ ja $f/g (g \neq 0)$ ovat derivoituvia pisteessä c, ja niiden derivaatat ovat:

(I) $(f \pm g)'(c) = f'(c) \pm g'(c)$,

(II) $(fg)'(c) = f'(c)g(c) + f(c)g'(c)$,

(III) $(f/g)'(c) = \frac{f'(c)g(c) - f(c)g'(c)}{g^2(c)} \qquad (g \neq 0)$.

Todistus.

(I) Tämä osa on todistettavissa helposti määritelmän perusteella.

(II) Muodostetaan erotus:

$$(fg)(x) - (fg)(c) = f(x)g(x) - f(c)g(c),$$

lisätään ja vähennetään oikealle puolelle $f(x)g(c)$, jolloin

$$\begin{aligned}(fg)(x) - (fg)(c) &= f(x)g(x) - f(c)g(c) + f(x)g(c) - f(x)g(c) \\ &= f(x)[g(x) - g(c)] + g(c)[f(x) - f(c)],\end{aligned}$$

jos jaetaan $(x - c)$:lla ja lähestytään pisteestä x pisteettä c, niin

$$(fg)'(c) = f'(c)g(c) + f(c)g'(c).$$

(III) Samalla tavalla

$$\begin{aligned}(f/g)(x) - (f/g)(c) &= \frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(c)}{g(c)} \qquad (g \neq 0) \\ &= \frac{f(x)g(c) - g(x)f(c) + f(x)g(x) - f(x)g(x)}{g(x)g(c)} \\ &= \frac{g(x)[f(x) - f(c)] - f(x)[g(x) - g(c)]}{g(x)g(c)},\end{aligned}$$

jaetaan $(x - c)$:lla, ja kun $x \to c$, niin saadaan

$$(f/g)'(c) = \frac{f'(c)g(c) - f(c)g'(c)}{g^2(c)}.$$

□

Huomautus 4.1.

(a) Lauseen 4.1 vastakohta ei ole tosi. Eli on mahdollista, että $f \pm g$ tai $f \cdot g$ ovat derivoituvia määrittelyjoukossa pisteessä c, mutta f ja g eivät ole derivoituvia siinä pisteessä. Esimerkiksi:

(i)

$$f(x) = \begin{cases} 1/x, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases} \qquad g(x) = -f(x).$$

Silloin $f + g$ on derivoituva pisteessä $x = 0$, mutta f ja g eivät ole derivoituvia siinä pisteessä.

(ii)

$$f(x) = \begin{cases} x \sin(1/x), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases} \qquad g(x) = x.$$

Silloin fg on derivoituva pisteessä $x = 0$, mutta f ei ole derivoituva siinä pisteessä.

(b) Lauseen 4.1 toistamisesta saadaan, että jos $f(x) = x^n$ ($n \in \mathbb{N}$), niin $f'(x) = nx^{n-1}$ kaikilla x:lla.

5 Yhdistetyn funktion derivaatta

Tarkastellaan ketjusäännöllä funktion $(g \circ f)$ derivaattaa, joka on f:n ja g:n yhdistetty funktio.

Lause 5.1. *(Ketjusääntö) Ks. [1, s. 107]*

Olkoon funktio f määritelty avoimessa välissä S ja funktio g määritelty $f(S)$:ssä. Tarkastelemme funktiota $(g \circ f)(x) = g[f(x)]$, joka on määritelty välillä S.

Oletetaan, että on olemassa piste $c \in S$, jossa $f(c)$ on $f(S)$:n sisäpiste. Jos funktio f on derivoituva pisteessä c ja funktio g on derivoituva pisteessä $f(c)$, niin funktio $(g \circ f)$ on derivoituva pisteessä c ja

$$(g \circ f)'(c) = g'[f(c)]f'(c).$$

Todistus. Käytämme lausetta 3.1,

$$f(x) - f(c) = (x - c)f^*(x), \tag{5.1}$$

kaikilla $x \in S$, missä f^* on jatkuva pisteessä c ja $f^*(c) = f'(c)$. Samoin voidaan kirjoittaa:

$$g(y) - g[f(c)] = [y - f(c)]g^*(y),$$

kaikilla y:lla jossakin avoimessa osavälissä T, joka sisältää $f(c)$:n.

Nyt g^* on jatkuva pisteessä $f(c)$ ja $g^*[f(c)] = g'[f(c)]$. Valitsemme luvun $x \in S$ siten, että $y = f(x) \in T$. Siis

$$g[f(x)] - g[f(c)] = [f(x) - f(c)]g^*[f(x)] = (x - c)f^*(x)g^*[f(x)]. \tag{5.2}$$

Yhdistetyn funktion jatkuvuuslauseen nojalla tiedetään, että kun $x \to c$, tällöin $g^*[f(x)] \to g^*[f(c)] = g'[f(c)]$.

Jaetaan yhtälö (5.2) $(x - c)$:lla ja lähistytään pisteestä x pisteeseen c, jolloin saadaan

$$\lim_{x \to c} \frac{g[f(x)] - g[f(c)]}{x - c} = g'[f(c)]f'(c).$$

□

Esimerkki 5.1. Laske funktion h derivaatta, kun

$$h(x) = (2x^3 + 4x^2 - 2)^9.$$

Ratkaisu. Olkoon

$$h(x) = g[f(x)] = g(u) = u^9, \qquad u = f(x) = 2x^3 + 4x^2 - 2.$$

Saadaan

$$h'(x) = g'[f(x)]f'(x) = g'(u)u'(x),$$

koska

$$u'_x = f'(x) = 6x^2 + 8x \qquad \text{ja} \qquad g'(u) = 9u^8 = 9(2x^3 + 4x^2 - 2),$$

niin

$$h'(x) = 9(2x^3 + 4x^2 - 2)(6x^2 + 8x).$$

Esimerkki 5.2. Olkoon

$$f(x) = \left(\frac{2x+1}{3x-1}\right)^4.$$

Laske lauseen 5.1 nojalla funktion f derivaatta.

Ratkaisu. Merkitään

$$f(x) = h[g(x)] = (g(x))^4, \qquad g(x) = \frac{2x+1}{3x-1},$$

joten

$$\begin{aligned} f'(x) = h'[g(x)]g'(x) &= 4\,(g(x))^3\,g'(x) \\ &= 4\left(\frac{2x+1}{3x-1}\right)^3 \frac{(3x-1)(2) - (2x+1)(3)}{(3x-1)^2} \\ &= -\frac{20(2x+1)^3}{(3x-1)^5}. \end{aligned}$$

6 Käänteisfunktion derivaatta

Tarkastellaan käänteisfunktiota f^{-1}, jossa f on aidosti monotoninen ja jatkuva.

Lause 6.1. *K.s [2, s. 135]*
Olkoon funktio f aidosti monotoninen ja jatkuva välillä I (siten, että on olemassa f^{-1} ja $D(f^{-1})$ on välillä J) ja olkoon x_0 välin I sisäpiste ja f derivoituva siten, että $f'(x_0) \neq 0$. Tällöin funktio f^{-1} on derivoituva pisteessä $y_0 = f(x_0)$ ja se on yhtä kuin $1/f'(x_0)$.

Todistus. Koska x_0 on I:n sisäpiste, voidaan valita α ja β välistä I ja $\alpha < x_0 < \beta$, jolloin $f(x_0)$ on J_1:n suljetun välin sisäpiste ja J:n päätepisteet ovat $f(\alpha)$ ja $f(\beta)$ siksi, että f on aidosti monotoninen ja jatkuva välillä $[\alpha, \beta]$. Siis J_1 sisältyy J:hin ja $y_0 = f(x_0)$ on J:n sisäpiste.

Nyt derivaatan määritelmän nojalla saadaan:

$$\lim_{y \to y_0} \left(\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} \right) = \lim_{y \to y_0} \left(\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{f[f^{-1}(y)] - f[f^{-1}(y_0)]} \right),$$

f^{-1} on jatkuva pisteessä y_0, siis

$$\lim_{y \to y_0} f^{-1}(y) = f^{-1}(y_0) = x_0,$$

joten

$$\lim_{y \to y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)}.$$

Oletuksen mukaan $f'(x_0) \neq 0$, joten

$$\lim_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} = \frac{1}{f'(x_0)},$$

ja

$$[f^{-1}(y_0)]' = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

□

Esimerkki 6.1. Olkoon funktio $y = f(x) = x^n$ (n on positiivinen kokonaisluku) määritelty välillä $[0, +\infty)$. Silloin $f^{-1}(y) = y^{1/n}$ välillä $[0, +\infty)$. Jos $y_0 > 0$ ja $x_0 = y_0^{1/n}$, tällöin $x_0 > 0$ ja $f'(x_0) = nx_0^{n-1}$, joten

$$[f^{-1}(y_0)]' = \frac{1}{nx_0^{n-1}} = \frac{1}{ny_0^{(n-1)/n}} = (1/n)y_0^{-1+1/n}.$$

7 Toispuoleiset ja äärettömät derivaatat

Ylhäällä on tarkasteltu tapausta, että funktio f on derivoituva pisteessä c, joka on sisäpiste, ja $f'(c)$ on äärellinen. Joidenkin funktioiden derivaatat pisteessä c eivät ole äärellisiä. Lisäksi laajennetaan asiaa niin, että tutkitaan derivaattaa välin päätepisteissä.

Määritelmä 7.1. Olkoon funktio f määritelty suljetulla välillä S ja jatkuva pisteessä $c \in S$. Tällöin sanotaan, että f on oikealta derivoituva pisteessä c, jos oikeanpuoleinen raja-arvo $\lim_{x \to c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$ on olemassa, ja $\lim_{x \to c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$

voi olla äärellinen tai $-\infty$ ja $+\infty$. Tämä raja-arvo on oikeanpuoleinen derivaatta ja merkitään

$$\lim_{x \to c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = f'_+(c).$$

Määritellään vasemmanpuoleinen derivaatta myös samalla tavalla ja merkitään $f'_-(c)$.

Lopuksi oletetaan, että c on S:n sisäpiste, jolloin funktion f derivaatta on $f'(c) = \pm\infty$, jos sen oikeapuolinen ja vasemmanpuolinen derivaatat ovat $\pm\infty$. Siis funktiolla f on derivaatta (äärellinen tai ääretön) pisteessä c, jos

$$f'_+(c) = f'_-(c) = f'(c).$$

Esimerkki 7.1. Tarkastellaan funktion f derivaattaa pisteessä $x = 1$ ja $x = 0$, kun

$$f(x) = \begin{cases} x, & x < 1, \\ 1, & x \geq 1. \end{cases}$$

Ratkaisu.

I. Jos $x = 1$, saadaan:

$$f'_+(1) = \lim_{x \to 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{1 - 1}{x - 1} = 0,$$

$$f'_-(1) = \lim_{x \to 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1^-} \frac{x - 1}{x - 1} = 1.$$

Koska $f'_+(1) \neq f'_-(1)$, niin funktiolla f ei ole derivaattaa pisteessä $x = 1$.

II. Jos $x = 0$, saadaan:

$$f'_+(0) = \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x - 0}{x - 0} = 1,$$

$$f'_-(0) = \lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{x - 0}{x - 0} = 1.$$

Siis $f'_+(0) = f'_-(0)$ ja funktiolla f on derivaatta pisteessä $x = 0$.

8 Derivaatta suljetulla välillä

Olkoon funktio f määritelty suljetulla välillä $[a, b]$. Sanotaan, että f on derivoituva pisteessä a, jos

$$f'_+(a) = \lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a},$$

on olemassa.

Samoin funktion f derivaatta pisteessä b on määritelty näin:

$$f'_{-}(b) = \lim_{x \to b^-} \frac{f(x) - f(b)}{x - b}.$$

Jos funktio f on derivoituva pisteissä a ja b ja kaikissa muissa pisteissä välillä $[a, b]$, niin sanotaan, että funktio f on derivoituva välillä $[a, b]$.

Esimerkki 8.1. Näytettävä, että funktio f on derivoituva välillä $[0, 1]$, kun

$$f(x) = x^{3/2}.$$

Ratkaisu. Olkoon $x_0 \in (0, 1)$. Saadaan

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{x \to x_0} \frac{x^{3/2} - x_0^{3/2}}{x - x_0} \\
&= \lim_{x \to x_0} \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{x_0})(x + \sqrt{x x_0} + x_0)}{x - x_0} \\
&= \frac{3x_0}{2\sqrt{x_0}} = (3/2)\sqrt{x_0}.
\end{aligned}$$

Pisteissä 0 ja 1 voi kirjoittaa:

$$f'_{+}(0) = \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x\sqrt{x}}{x} = 0,$$

$$f'_{-}(1) = \lim_{x \to 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1^-} \frac{x\sqrt{x} - 1}{x - 1} = 3/2,$$

joten funktio f on derivoituva välillä $[0, 1]$.

9 Nollasta eroavan funktion derivaatta

Tutkitaan funktiota f tässä osassa, kun $f'(c) \neq 0$. Eli $f'(c) > 0$, $f'(c) < 0$ tai $f'(c) = +\infty$, $f'(c) = -\infty$.

9.1 Derivaatan merkki

Olkoon funktio f määritelty välillä $[a, b]$ ja c välin $[a, b]$ sisäpiste ja funktiolla f derivaatta pisteessä c. Tällöin f:n positiivinen derivaatta tarkoittaa f:n kasvavuutta ja f:n negatiivinen derivaatta tarkoittaa f:n vähenevyyttä. Tutkitaan tätä asiaa möyhemmin.

9.2 Derivaatan merkki päätepisteissä

Olkoon funktio f määritelty välillä $[a, b]$ ja derivoituva pisteissä a, b.

I. Jos $f'(a) > 0$, on olemassa sellainen $\delta > 0$, että kaikilla $x \in (a, a+\delta)$, $f(a) < f(x)$, ja f:n kasvavuus alkaa a:sta.

   Jos $f'(a) < 0$, on olemassa sellainen $\delta > 0$, että kaikilla $x \in (a, a+\delta)$, $f(a) > f(x)$, ja f:n vähenevyys alkaa a:sta.

II. Jos $f'(b) > 0$, on olemassa sellainen $\delta > 0$, että kaikilla $x \in (b-\delta, b)$, $f(b) > f(x)$ ja f:n kasvavuus loppuu b:hen.

   Jos $f'(b) < 0$, on olemassa sellainen $\delta > 0$, että kaikilla $x \in (b-\delta, b)$, $f(b) < f(x)$ ja f:n vähenevyys loppuu b:hen.

Lause 9.1. *Ks. [1, s. 108]*
Oletetaan, että funktio f määritelty avoimella välillä (a, b) ja että jossakin pisteessä c välillä (a, b) on olemassa $f'(c) > 0$ tai $f'(c) = +\infty$. Tällöin pisteellä c on sellainen ympäristö $U \subseteq (a, b)$, että kaikilla $x \in U$:

$$\begin{array}{llll} \textit{jos} & x > c & \textit{niin} & f(x) > f(c), \\ \textit{jos} & x < c & \textit{niin} & f(x) < f(c). \end{array}$$

Todistus.

(I) Jos $f'(c)$ on äärellinen ja positiivinen, voi kirjoittaa:

$$f(x) - f(c) = (x - c) f^*(x), \tag{9.1}$$

missä f^* on jatkuva pisteessä c ja $f^*(c) = f'(c) > 0$.

Koska funktio f^* on jatkuva pisteessä c ja $f^*(c) > 0$, niin on olemassa sellainen pisteen c ympäristö $U \subseteq (a, b)$, että $f^*(x) > 0$, kun $x \in U$, joten yhtälön (9.1) vasemmanpuolen $(f(x) - f(c))$ merkki on sama kuin $(x - c)$:een merkki. Eli

$$\begin{array}{llll} \text{jos} & x > c & \text{niin} & f(x) > f(c), \\ \text{jos} & x < c & \text{niin} & f(x) < f(c). \end{array}$$

(II) Oletetaan, että $f'(c) = +\infty$, on sellainen ympäristö U, että

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} > 1.$$

Siis jakajan ja jaettavan merkit ovat samat ja saadaan sama tulos kuin osan (I) tulos.

$\square$

Myös voidaan todistaa tätä lausetta vastaava lause, jos $f'(c) < 0$ tai $f'(c) = -\infty$ pisteessä $c \in (a, b)$.

10 Derivaatan nollakohdat ja paikalliset ääriarvot

Määritelmä 10.1. Olkoon reaalifunktio f määritelty välillä S ja $a \in S$. Tällöin pisteessä a on paikallinen maksimipiste, jos sillä on sellainen ympäristö U, että

$$f(x) \leq f(a), \quad \text{kun } x \in U \cap S.$$

Siis a on f:n paikallinen maksimikohta ja $f(a)$ on f:n paikallinen maksimi.

Myös pisteessä a on paikallinen minimipiste, jos sillä on sellainen ympäristö U, että

$$f(x) \geq f(a), \qquad \text{kun } x \in U \cap S.$$

Siis a on f:n paikallinen minimikohta ja $f(a)$ on f:n paikallinen minimi.

Maksimi on aito, jos $f(x) < f(a)$ kaikilla $x \in U \cap S$, myös minimi on aito, jos $f(x) > f(a)$ kaikilla $x \in U \cap S$.

Lause 10.1. *Ks. [1, s. 109]*

Olkoon funktio f määritelty avoimella välillä (a, b) ja olkoon sillä paikallinen maksimi tai paikallinen minimi sisäpisteessä c välillä (a, b).

Jos f:lla on derivaatta (äärellinen tai ääretön) pisteessä c, tällöin $f'(c)$:n pitää olla nolla.

Todistus. Jos $f'(c)$ on positiivinen tai $+\infty$, funktiolla f ei voi olla paikallista ääriarvoa pisteessä c lauseen 9.1 nojalla.

Samoin jos $f'(c)$ on negatiivinen tai $-\infty$, funktiolla f ei voi olla paikallista ääriarvoa pisteellä c. Siis $f'(c)$ voi olla vain nolla. □

Huomautus 10.1.

(a) Löytääksemme paikallisen ääriarvon, tieto $f'(c) = 0$ ei riitä, joten lauseen 10.1 vastakohta on epätosi. Esimerkiksi funktion $f(x) = x^3$ derivaatta pisteella $x = 0$ on nolla, mutta nollan lähistössä f on kasvava.

(b) On mahdollista, että jollakin funktiolla on paikallinen ääriarvo pisteessä c, vaikka sillä ei ole derivaattaa siinä pisteessä. Esimerkiksi funktiolla $f(x) = |x|$ on minimi pisteessä $x = 0$, mutta siinä pisteessä ei ole derivaattaa.

(c) Oletetaan lauseessa 10.1, että funktiolla f on derivaatta pisteessä c ja c on sisäpiste. On olemassa sellainen funktio, jonka päätepisteissä on maksimi tai minimi, mutta funktion derivaatta ei ole nolla. Esimerkiksi jos funktio $f(x) = x$ on annettu välillä $a \leq x \leq b$, f:lla on maksimi ja minimi päätepisteissä, mutta sen derivaatta ei ole nolla missään pisteessä.

Lause 10.2. *Ks. [3, s. 194]*

Olkoon funktio f derivoituva välillä $[a, b]$ ja olkoot $f'(a)$, $f'(b)$ erimerkkisiä. Tällöin on olemassa sellainen piste $c \in (a, b)$, että $f'(c) = 0$.

Todistus. Jos $f'(a) < 0$ ja $f'(b) > 0$, on olemassa δ_1, $\delta_2 > 0$ siten, että

$$\forall x(a \leq x < a + \delta_1 \Longrightarrow f(x) < f(a)), \tag{10.1}$$

$$\forall x(b - \delta_2 < x \leq b \Longrightarrow f(x) < f(b)). \tag{10.2}$$

Koska f on derivoituva välillä $[a, b]$, se on jatkuva, joten sillä on paikallinen minimi. Eli on olemassa sellainen piste c välillä $[a, b]$, että kaikilla $x \in [a, b]$

$$f(c) \leq f(x). \tag{10.3}$$

Kaavojen (10.1) ja (10.2) nojalla $c \neq a$ ja $c \neq b$. Eli $a < c < b$, toisaalta on selvää, että jos $x > c$, niin

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0,$$

ja

$$f'(c) \geq 0, \tag{10.4}$$

myös jos $x < c$, niin

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0,$$

ja

$$f'(c) \leq 0, \tag{10.5}$$

joten kaavoista (10.4) ja (10.5) saadaan $f'(c) = 0$. □

Jos valitaan $f'(a) > 0$ ja $f'(b) < 0$, funktio f saa maksimin ja todistus jatkuu samalla tavalla.

11 Rollen lause ja väliarvolause

On selvä, että jos jokin "sileä" käyrä leikkaa x-akselin välin $[a, b]$ päätepisteissä, sillä pitää olla "käännepiste" a ja b:n välillä.

Tätä asiaa voidaan tutkia Rollen lauseella seuraavasti:

Lause 11.1. *Ks. [3, s. 196]*

Olkoon funktiolla f derivaatta (äärellinen tai ääretön) kaikissa pisteissä avoimella välillä (a, b) ja olkoon se jatkuva molemmissä päätepisteissä. Tällöin jos $f(a) = f(b)$, on olemassa vähintään yksi sisäpiste c siten, että $f'(c) = 0$.

Todistus.

(I) Jos funktio f on vakio välillä $[a, b]$ kaikilla x:lla eli $f(a) = f(b) = f(x)$, tällöin $f'(x) = 0$, väitös seuraa tästä.

(II) Jos funktio f ei ole vakio välillä $[a, b]$, on olemassa sellainen piste $x_1 \in [a, b]$, että $f(x_1) \neq f(a) = f(b)$.

Koska funktio f on jatkuva välillä $[a, b]$, niin sillä on maksimi ja minimi välillä $[a, b]$. Nyt

(i) Jos $f(x_1) > f(a) = f(b)$, tällöin f saa maksimin välillä $[a, b]$. Eli on olemassa sellainen piste c välillä (a, b),että $f(x) \leq f(c)$ kaikilla x:lla.

(ii) Jos $f(x_1) < f(a) = f(b)$, tällöin f saa minimin. Eli on olemassa sellainen piste d välillä (a, b), että $f(x) \geq f(d)$.

Siis f saa maksimin tai minimin jossakin sisäpisteessä, ja lauseen 10.2 viimeisen osan nojalla$f'(c) = 0$ tai $f'(d) = 0$.

□

Lause 11.2 (Lagrangen väliarvolause)**.** *Ks. [3, s. 197]*

Olkoon funktio f jatkuva välillä $[a, b]$ ja derivoituva välillä (a, b). Tällöin on olemassa piste $c \in (a, b)$ siten, että

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(c).$$

Todistus. Määritellään funktio ϕ välillä $[a, b]$ seuraavasti:

$$\phi(x) = [f(b) - f(a)]x - (b - a)f(x).$$

Funktio ϕ on jatkuva välillä $[a, b]$ ja se on derivoituva välillä (a, b) ja $\phi(a) = \phi(b)$. Siis Rollen lause toteutuu ϕ:lla ja voidaan löytää sellainen piste $c \in (a, b)$, että $\phi'(c) = 0$. Täten

$$\phi'(c) = [f(b) - f(a)] - (b - a)f'(c) = 0,$$

ja

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(c).$$

□

11.1 Väliarvolauseen seuraus

I. Oletetaan, että funktio f toteuttaa väliarvolauseen ehdot ja $f'(x) = 0$ kaikilla $x \in (a, b)$. Tällöin f on vakio.

Todistus. Oletetaan, että x_1, $x_2 (x_1 < x_2)$ ovat kaksi erisuurta pistettä välillä $[a, b]$. Lauseen 11.2 nojalla voi kirjoittaa

$$f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1)f'(c) = 0,$$

joten $f(x_2) = f(x_1)$ ja f on vakio. □

II. Jos funktio f toteuttaa väliarvolauseen ja $f'(x) > 0$ kaikilla $x \in (a, b)$, f on aidosti kasvava välillä $[a, b]$.

Todistus. Väliarvolauseen mukaan välin $[a, b]$ kahdelle erilliselle pisteelle x_1 ja $x_2 (x_2 > x_1)$ voi kirjoittaa:

$$f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1)f'(c) \Longrightarrow f(x_2) > f(x_1) \qquad (x_2 > x_1),$$

joten f on aidosti kasvava välillä $[a, b]$.

Samoin, jos $f'(x) < 0$ voi todistaa, että f on aidosti vähenevä. □

III. Jos kahden funktion derivaatta on sama välillä (a, b), funktioiden erotus on vakio.

IV. Jos funktio f on jatkuva välillä $[a, b]$ ja kaikissa sisäpisteissä $x \in [a, b]$ funktiolla f on sellainen derivaatta, että $m \leq f'(x) \leq M$ (m, M ovat vakioita), tällöin

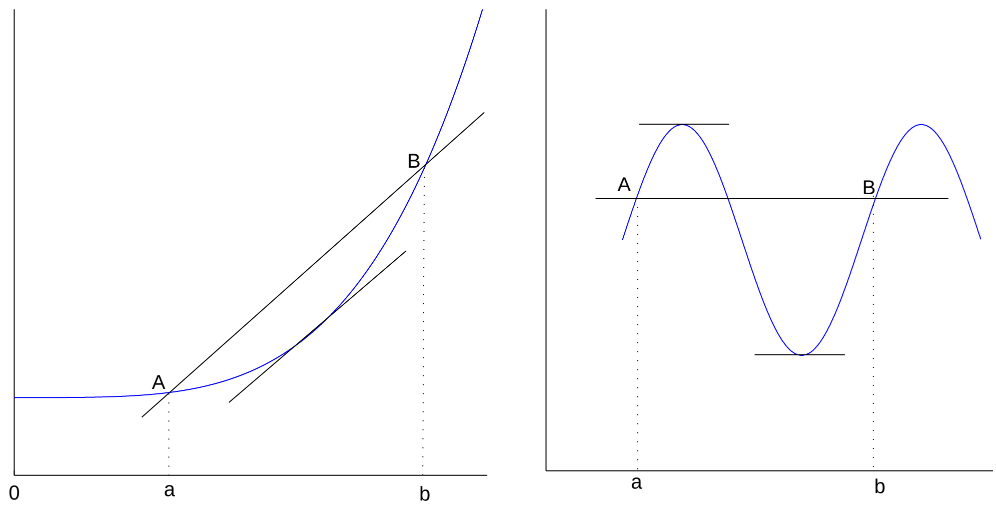
$$m(b - a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b - a).$$

V. Jos funktio f on jatkuva välillä $[a, b]$ ja kaikilla sisäpisteillä $x \in [a, b]$ on sellainen derivaatta, että $|f'(x)| \leq M$ (M on vakio), tällöin

$$|f(b) - f(a)| \leq M(b - a).$$

11.2 Väliarvolauseen geometrinen tulkinta

Väliarvolauseen mukaan, käyrän kahden pisteen A ja B välissä on vähintään yksi käyrän piste, jossa piirretty tangentti on yhdensuuntainen pisteiden A ja B kautta kulkevan suoran kanssa.



kuva 2

Lause 11.3 (Yleinen tai Cauchyn väliarvolause)**.** *Ks. [1, s. 110]*

Oletetaan, että funktiot f ja g ovat derivoituvia (äärellinen tai ääretön) välillä (a, b) ja että molemmat ovat jatkuvia päätepisteissä a ja b ja että $f'(x)$ ja $g'(x)$ eivät ole äärettömiä yhtäaikaisesti missään sisäpisteessä. Nyt jossakin sisäpisteessä c voi kirjoittaa:

$$f'(c)[g(b) - g(a)] = g'(c)[f(b) - f(a)].$$

Todistus. Asetetaan

$$h(x) = f(x)[g(b) - g(a)] - g(x)[f(b) - f(a)].$$

Jos $f'(x)$ ja $g'(x)$ ovat äärellisiä yhtäaikaisesti, niin $h'(x)$ on äärellinen. Jos jompikumpi $f'(x)$:sta ja $g'(x)$:sta on ääretön, niin $h'(x)$ on ääretön (oletuksen mukaan $f'(x)$, $g'(x)$ eivät ole äärettömiä yhtäaikaisesti). Myös funktio h on jatkuva päätepisteillä ja

$$h(a) = h(b) = f(a)g(b) - g(a)f(b).$$

Rollen lauseen 11.1 nojalla joillekin pisteille c saamme $h'(c) = 0$. Siis

$$h'(c) = f'(c)[g(b) - g(a)] - g'(c)[f(b) - f(a)],$$

joten

$$f'(c)[g(b) - g(a)] = g'(c)[f(b) - f(a)].$$

□

Lause 11.4. *Ks. [1, s. 111]*

Oletetaan, että funktiolla f ja g on derivaatta (äärellinen tai ääretön) jokaisessa pisteessä välillä (a, b) ja niillä on raja- arvo päätepisteissä $f(a+)$,

$g(a+)$, $f(b-)$ ja $g(b-)$ siten, että nämä raja- arvot ovat äärellisiä. Oletetaan, että $f'(x)$ ja $g'(x)$ eivät ole äärettömiä yhtäaikaisesti missään sisäpisteessä. Tällöin jossakin sisäpisteessä c,

$$f'(c)[g(b-) - g(a+)] = g'(c)[f(b-) - f(a+)].$$

Todistus. Määritellään uudet funktiot F ja G välillä $[a, b]$ seuraavasti:

$$F(x) = f(x), \qquad G(x) = g(x), \qquad \text{jos} \qquad x \in (a, b);$$

$$F(a) = f(a+), \qquad G(a) = g(a+), \qquad F(b) = f(b-), \qquad G(b) = g(b-),$$

jolloin F ja G ovat jatkuvia välillä $[a, b]$ ja lauseen 11.3 nojalla

$$F'(c)[G(b) - G(a)] = G'(c)[F(b) - F(a)],$$

ja

$$f'(c)[g(b-) - g(a+)] = g'(c)[f(b-) - f(a+)].$$

□

Lause 11.5 (Derivaatan keskiarvolause tai f':n keskiominaisuus)**.** *Ks. [3, s. 195]*

Olkoon funktio f derivoituva välillä $[a, b]$ ja $f'(a) \neq f'(b)$. Tällöin jokaisella reaaliluvulla k, joka on $f'(a)$:n ja $f'(b)$:n välissä, on piste c siten, että $f'(c) = k$.

Todistus. Asetetaan

$$g(x) = f(x) - kx. \tag{11.1}$$

On selvää, että funktio g on derivoituva välillä $[a, b]$ ja

$$g'(a) = f'(a) - k, \qquad g'(b) = f'(b) - k.$$

Koska k on $f'(a)$:n ja $f'(b)$:n välillä, $g'(a)$ ja $g'(b)$ ovat erimerkkisiä. Nyt lauseen 10.2 nojalla on olemassa piste c välillä (a, b) siten, että $g'(c) = 0$. Siis yhtälön (11.1) mukaan

$$g'(c) = f'(c) - k = 0,$$

ja

$$f'(c) = k.$$

□

Lause 11.6. *Ks. [1, s. 112]*

Oletetaan, että funktiolla f on derivaatta (äärellinen tai ääretön) välillä (a, b) ja f on jatkuva päätepisteissä a ja b. Jos $f'(x) \neq 0$ kaikilla x:lla, funktio f on aidosti monotoninen välillä $[a, b]$.

Todistus. Olkoot x_1 ja $x_2(x_2 > x_1)$ kaksi erisuurta pistettä välillä $[a, b]$. Tällöin oletuksen mukaan $f'(x) \neq 0$ kaikilla $x \in (x_1, x_2)$ ja lauseen 11.2 nojalla voi kirjoittaa:

$$f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1)f'(x).$$

Nyt

(I) Jos $f'(x) = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} > 0$, tällöin $f(x_2) > f(x_1)$, joten f on monotonisesti kasvava.

(II) Jos $f'(x) = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} < 0$, niin $f(x_2) < f(x_1)$, joten f on monotonisesti vähenevä ja lopuksi f on aidosti monotoninen.

□

Lause 11.7. *Ks. [1, s. 112]*
Olkoon f' on monotoninen avoimella välillä (a, b). Tällöin f' on jatkuva välillä (a, b).

Todistus. Oletetaan, että f' ei ole jatkuva jossakin pisteessä $c \in (a, b)$. Valitaan suljettu väli $[\alpha, \beta]$, joka on osa välistä (a, b) siten, että piste c on välin $[\alpha, \beta]$ sisäpiste. Koska f' on monotoninen välillä $[\alpha, \beta]$ ja oletamme, että se ei ole jatkuva pisteessä c, niin f' jättää pois joitakin arvoja $f'(\alpha)$:n ja $f'(\beta)$:n välistä. Tämä on ristiriita lauseen 11.5 kanssa (f':n keskiominaisuus). Näin ollen meidän oletus ei ole tosi. Siis f' on jatkuva välillä (a, b). □

12 Korkeammat derivaatat

Määritelmä 12.1. Olkoon funktio f derivoituva pisteessä c välillä I ja olkoon myös olemassa derivaattafunktion f' derivaatta siinä pisteessä. Tällöin derivaattafunktion f' derivaattaa merkitään f'':llä ja sitä kutsutaan toiseksi derivaataksi tai 2. kertaluvun derivaataksi.

Funktiolla f voi olla derivaattoja toistuvalla prosessilla f,f',f'',$f^{(3)}$,...,$f^{(n)}$ siten, että $f^{(n)}$ on n. kertaluvun derivaatta $n \in \mathbb{N}$.

Silloin jokaisella n:llä voi olla $f^{(n)}$, jos on olemassa $f^{(n-1)}$, joka on pisteen c ympäristössä ja $f^{(n-1)}$ on derivoituva pisteessä c.

13 Taylorin yhtälö ja sen jäännös

Tiedetään, että jos f on derivoituva pisteessä c, f näyttää melkein lineaariselta lähellä c:tä ja yhtälö

$$f(x) = f(c) + (x - c)f'(c),$$

on “melkein” tosi, kun $(x-c)$ on pieni.

Taylorin lause sanoo, että jos funktiolla f on n. kertaluvun derivaatta, sitä voidaan approksimoida $(n-1)$-asteisella polynomilla. Lisäksi Taylorin lause antaa hyödyllistä tietoa virheestä, joka syntyy approksimoinnissa.

Lause 13.1. *(Taylorin lause) Ks. [1, s. 113]*

Oletetaan, että f:llä on äärellinen n. kertaluvun derivaatta $f^{(n)}$ avoimella välillä (a,b) ja funktio $f^{(n-1)}$ on jatkuva suljetulla välillä $[a,b]$. Olkoon $c \in (a,b)$. Tällöin jokaiselle $x \in (a,b)$, $x \neq c$, on olemassa sisäpiste x_1, joka on x:n ja c:n välissä siten, että

$$f(x) = f(c) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k + \frac{f^{(n)}(x_1)}{n!}(x-c)^n.$$

Lause 13.2. *Ks. [1, s. 113]*

Olkoot funktioilla f ja g äärelliset n. kertaluvun derivaatat avoimen välin (a,b) jokaisessa pisteessä. Myös ne olkoot jatkuvia suljetulla välillä $[a,b]$, ja olkoon $c \in [a,b]$. Tällöin jokaiselle $x \in [a,b]$, $x \neq c$, on olamassa sisäpiste x_1, joka on x:n ja c:n välissä siten, että

$$\left[f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k\right] g^{(n)}(x_1) = f^{(n)}(x_1)\left[g(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{g^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k\right].$$

Jos asetamme $g(x) = (x-c)^n$, niin $g^{(k)}(c) = 0$, $0 \leq k \leq n-1$ ja $g^{(n)}(x) = n!$. Tällöin ylhäällä oleva yhtälö palautuu Taylorin lauseeksi.

Todistus. Yksinkertaisuuden vuoksi oletetaan, että $b > c$ ja $x > c$, x asetetaan kiinteäksi ja määritellään uudet funktiot F ja G seuraavasti:

$$F(t) = f(t) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k, \tag{13.1}$$

$$G(t) = g(t) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{g^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k, \tag{13.2}$$

jokaisella $t \in [c,x]$. Tällöin F ja G ovat jatkuvia välillä $[c,x]$ ja niillä on äärellinen derivaatta avoimella välillä (c,x). Lisäksi lauseen 11.3 nojalla voidaan johtaa:

$$F'(x_1)[G(x) - G(c)] = G'(x_1)[F(x) - F(c)], \qquad x_1 \in (x,c).$$

Asettaen $F(x) = f(x)$ ja $G(x) = g(x)$ saamme:

$$F'(x_1)[g(x) - G(c)] = G'(x_1)[f(x) - F(c)]. \tag{13.3}$$

Nyt derivoimalla $F(t)$ ja $G(t)$ yhtälöistä (13.1) ja (13.2) saadaan:

$$F'(t) = \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t), \tag{13.4}$$

$$G'(t) = \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} g^{(n)}(t). \tag{13.5}$$

Sijoitetaan $t = c$ yhtälöihin (13.1) ja (13.2) ja $t = x_1$ yhtälöihin (13.4) ja (13.5), ja sitten sijoitetaan saadut arvot yhtälöön (13.3):

$$\begin{aligned} &\frac{(x-x_1)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(x_1) \left[g(x) - g(c) - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{g^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k \right] \\ &= \frac{(x-x_1)^{n-1}}{(n-1)!} g^{(n)}(x_1) \left[f(x) - f(c) - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k \right], \end{aligned} \tag{13.6}$$

joten

$$\left[f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k \right] g^{(n)}(x_1) = f^{(n)}(x_1) \left[g(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{g^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k \right].$$

□

13.1 Taylorin erilaiset muodot ja niiden jäännökset

I. Olkoon funktion f $(n-1)$. kertaluvun derivaatta jatkuva välillä $[a, a+h]$ ja $f^{(n)}$ on välillä $(a, a+h)$. Tällöin, jos reaaliluku θ on $0 < \theta < 1$, voidaan kirjoittaa:

$$\begin{aligned} f(a+h) &= f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2!} f''(a) + \dots \\ &+ \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) + \frac{h^n (1-\theta)^{n-p}}{p[(n-1)!]} f^{(n)}(a + \theta h), \end{aligned} \tag{13.7}$$

missä p on positiivinen kokonaisluku.

Jos ylhäällä olevaan yhtälöön sijoitetaan

$$a = c, \qquad a + h = x, \qquad x_1 = a + \theta h, \qquad p = n, \qquad h = x - c,$$

saadaan Taylorin alkuperäinen lause (lause 13.1).

On selvää, että ylhäällä olevan yhtälön jäännös on:

$$R_n = \frac{h^n (1-\theta)^{n-p}}{p[(n-1)!]} f^{(n)}(a + \theta h),$$

(Eskolomichen jäännös).

(i) Jos sijoitetaan $p = 1$ ylhäällä olevaan yhtälöön, saadaan

$$R_n = \frac{h^n(1-\theta)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(a+\theta h),$$

(Cauchyn jäännös).

(ii) Jos yhtälöön (13.7) sijoitetaan $p = n$, saadaan

$$R_n = \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(a+\theta h),$$

(Lagrangen jäännös).

II. Laittaen $a = 0$, $h = x$ yhtälöön (13.7) jokaisella $x \in (0, h)$ saadaan

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \dots \\ &\quad + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(0) + \frac{x^n(1-\theta)^{n-p}}{p[(n-1)!]}f^{(n)}(\theta x), \end{aligned} \tag{13.8}$$

joka on Macloren lause ja Eskolomich–Rochen jäännös. Silloin

(i) Jos $p = 1$

$$R_n = \frac{x^n(1-\theta)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(\theta x),$$

(Cauchyn jäännös).

(ii) Jos $p = n$

$$R_n = \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(\theta x),$$

(Lagrangen jäännös).

Lause 13.3. *(Leibnizin lause korkeammilla derivaatoilla) Ks. [2, s. 138]*
Olkoot funktiot f ja g määritelty välillä (a, b) ja olkoot ne derivoituvia pisteessä $x_0 \in (a, b)$. Tällöin funktiolla (fg) on n. kertaluvun derivaatta pisteessä x_0 siten, että

$$\begin{aligned} (fg)^{(n)}(x_0) &= f(x_0)g^{(n)}(x_0) + \binom{n}{1} f'(x_0)g^{(n-1)}(x_0) + \dots \\ &\quad + \binom{n}{n-1} f^{(n-1)}(x_0)g'(x_0) + f^{(n)}(x_0)g(x_0). \end{aligned} \tag{13.9}$$

Tiedetään, että

$$\binom{n}{r} = \frac{n(n-1)\dots(n-r+1)}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!},$$

ja myös

$$\binom{n}{r} + \binom{n}{r+1} = \binom{n+1}{r+1}.$$

Todistus. Todistamme induktiivisella tavalla seuraavasti:

(I) Jos $n = 1$, tämä lause on lauseen 4.1 (II)-osa. Siis se on tosi.

(II) Oletetaan, että lause on tosi, jos $n = k$. Siis

$$(fg)^{(k)}(x_0) = f(x_0)g^{(k)}(x_0) + \binom{k}{1} f'(x_0)g^{(k-1)}(x_0) + \dots + \binom{k}{k-1} f^{(k-1)}(x_0)g'(x_0) + f^{(k)}(x_0)g(x_0). \tag{13.10}$$

(III) Todistetaan lause,kun $n = k + 1$. Koska $(fg)^{(k)}$ on olemassa, niin derivoidaan yhtälö (13.10) seuraavasti:

$$[(fg)^{(k)}]' = f(x_0)g^{(k+1)}(x_0) + f'(x_0)g^{(k)}(x_0) + \binom{k}{1} f'(x_0)g^{(k)}(x_0) + \dots + \binom{k}{k-1} f^{(k)}(x_0)g'(x_0) + f^{(k)}(x_0)g'(x_0) + f^{(k+1)}(x_0)g(x_0),$$

joten

$$(fg)^{(k+1)}(x_0) = f(x_0)g^{(k+1)}(x_0) + \binom{k+1}{1} f'(x_0)g^{(k)}(x_0) + \dots + \binom{k+1}{k} f^{(k)}(x_0)g'(x_0) + f^{(k+1)}(x_0)g(x_0).$$

□

14 Hopitalin sääntö

Hopitalin sääntöä käytetään usein raja-arvon laskemiseen.

Lause 14.1. *K.s [4, s. 239], [5, s. 135]*

Olkoot reaaliset funktiot f ja g derivoituva välillä (a, b) ja $g'(x) \neq 0$ aina, kun $x \in (a, b)$, missä $-\infty \leq a < b \leq +\infty$.

Olkoon

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^+} g(x) = 0. \tag{14.1}$$

Jos

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A, \tag{14.2}$$

niin

$$\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)} = A. \tag{14.3}$$

Lause on tosi myös tapauksessa $\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$ *ja* $\lim_{x\to a^+} g(x) = \pm\infty$ *(mutta tätä emme todista).*

Todistus. Todistetaan tämä lause kahdessa vaiheessa.

(I) Alussa oletetaan, että $-\infty < A < +\infty$ ja valitaan reaaliluvut q ja r siten, että $A < q$ ja $A < r < q$. Tällöin on olemassa piste c_1 välillä (a, b) siten, että $a < x < c_1$ ja yhtälön (14.2) nojalla saadaan

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} < r. \tag{14.4}$$

Selvästi x:n lisäksi on olemassa toinen piste y a:n ja c_1:n välissä siten, että $a < x < y < c_1$, jolloin lauseen 11.3 mukaan jollekin pisteelle $t \in (x, y)$ voi kirjoittaa:

$$\frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)} = \frac{f'(t)}{g'(t)} < r. \tag{14.5}$$

Nyt oletetaan, että yhtälö (14.1) on pätevä. Tällöin epäyhtälöstä (14.5) saadaan

$$\frac{f(y)}{g(y)} < r < q, \tag{14.6}$$

joten epäyhtälön (14.6) mukaan voi sanoa, että jokaiselle reaaliluvulle q, jos $A < q$ on olemassa piste c_1, joka $a < x < c_1$ ja $\frac{f(x)}{g(x)} < q$.

Samoin jos $-\infty < A < +\infty$ ja valitaan $p < A$ saadaan piste c_2 välillä (a, b) siten, että $\frac{f(x)}{g(x)} > p$.

(II) Olemme tutkineet, että jos valitaan $A < q$, pisteellä c_1 $(a < x < c_1)$ saadaan $\frac{f(x)}{g(x)} < q$, ja jos valitaan $p < A$, pisteellä c_2 $(a < x < c_2)$ saadaan $\frac{f(x)}{g(x)} > p$. Nyt oletetaan, että $\epsilon > 0$ ja $q = A + \epsilon$ ja $p = A - \epsilon$. Tällöin

$$\frac{f(x)}{g(x)} < A + \epsilon \qquad a < x < c_1,$$

ja

$$\frac{f(x)}{g(x)} > A - \epsilon \qquad a < x < c_2.$$

Siis olettaen, että $\alpha = \min\{c_1, c_2\}$ voi kirjoittaa:

$$|\frac{f(x)}{g(x)} - A| < \epsilon, \qquad a < x < \alpha,$$

ja

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = A.$$

$\square$

15 Eksponenttifunktio

Esitellään lyhyesti eksponenttifunktiota ja tarkastellaan sen derivaattaa.

Joidenkin matematiikan kirjojen mukaan seuraava sarja on suppeneva

$$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \tag{15.1}$$

Seuraavaksi tarkastellaan funktiota, joka esittää yllä olevaa sarjaa.

Määritelmä 15.1. Funktiota, joka on sarjan (15.1) muotoa, nimitetään eksponenttifunktioksi ja merkitään sitä $E(x)$. Siis

$$E(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \qquad (n \in \mathbb{N}). \tag{15.2}$$

Jos $x = 0$, $E(0) = 1$, ja jos $x = 1$, niin

$$E(1) = 1 + 1 + 1/2! + \dots + 1/n! + \dots \tag{15.3}$$

$E(1)$:n arvo on suppeneva Neperin luvulle e, joka on 2:n ja 3:n välissä.

Luku e on eksponenttifunktion kantaluku ja sen arvo on

$$\lim_{n \to \infty} (1 + 1/n)^n.$$

Siis $E(1) = e$ (todistus sivuutetaan), kirjoitamme ilman todistusta eksponenttifunktiolle seuraavat asiat:

I. $E(x_1 + x_2) = E(x_1) \times E(x_2)$,

II. $E(x_1 + x_1 + \dots + x_n) = E(x_1) \times E(x_2) \times \dots \times E(x_n)$,

III. $E(x) = e^x$,

IV. $E(x) \times E(-x) = E(0) = 1$.

Joskus merkitään funktiota $E(x)$ merkinnällä $\exp x$ eli $E(x) = e^x = \exp x$.

16 Eksponenttifunktion derivaatta

Lause 16.1. *Ks. [3, s. 243]*
Funktio $E(x)$ on jatkuva ja derivoituva kaikissa asteissa jokaisella x:lla, ja sen derivaatta on yhtä kuin $E(x)$.

Todistus. Oletetaan tunnetuksi, että suppeneva sarja voidaan derivoida termeittäin. Siis

$$E'(x) = \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \dots\right)',$$

$$\begin{aligned} E'(x) &= 0 + 1 + \frac{2x}{2!} + \frac{3x}{3!} + \cdots + \frac{nx^{n-1}}{n!} + \frac{(n+1)x^n}{(n+1)!} + \dots \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} \dots \end{aligned}$$

joten $E'(x) = e^x$.
Samoin voidaan saada n. kertaluvun derivaataksi

$$E^{(n)}(x) = E(x) = e^x.$$

□

17 Logaritmifunktio

Koska eksponenttifunktio E on aidosti kasvava joukossa $\mathbb{R}$ ja sen arvojoukko on $\mathbb{R}_+$, niin sillä on käänteisfunktio E^{-1} siten, että sen määrittelyjoukko on $\mathbb{R}_+$. Käänteisfunktio E^{-1} on aidosti kasvava ja sitä merkitään L:llä tai ln:llä $(log_e x)$.

Määritelmä 17.1. Logaritmifunktio (e-kantainen logaritmifunktio) L on eksponenttifunktion E käänteisfunktio. Siis jos

$$y = E(x) = e^x,$$

niin

$$L(E(x)) = L(y) = E^{-1}(y) = x, \qquad x \in \mathbb{R},$$

ja

$$E(L(y)) = E(x) = y, \qquad y > 0.$$

Eli

$$E(x) = y \Longleftrightarrow L(y) = x \qquad \text{tai} \qquad e^x = y \Longleftrightarrow \ln y = x.$$

18 Logaritmifunktion derivaatta

Lause 18.1. *Ks. [3, s. 246]*

Funktio E on derivoituva ja myös funktio L on derivoituva sen ominaisuuden takia. Ja jos $y = lnx$, $x > 0$, tällöin

$$y' = (\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

Todistus. Koska $y = E(x) = e^x$, niin $y' = E'(x) = e^x$ ja lauseen 6.1 nojalla $(E^{-1}(y))' = \frac{1}{E'(x)}$, joten:

$$[L(E(x))]' = (L(y))' = (\ln y)' = (E^{-1}(y))' = \frac{1}{E'(x)} = \frac{1}{e^x} = \frac{1}{y}.$$

Siis

$$(\ln y)' = \frac{1}{y}. \tag{18.1}$$

Logaritmifunktiota $L(x)$ tai $\log_e x$ (luonnollinen logaritmi) merkitään joskus $\ln x$:llä ja yhtälönn (18.1) mukaan, jos $y = \ln x$, niin $y' = \frac{1}{x}$. □

18.1 Logaritmifunktion korkeammat derivaatat

Lause 18.2. *Ks. [2, s. 147]*

Olkoon funktio $f(x) = \ln x$ logaritmifunktio välillä $(0, +\infty)$. Tällöin n. kertaluvun derivaatta on:

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{18.2}$$

Todistus. Todistamme lauseen induktiivisesti seuraavasti:

(I) Testaamme lauseen, kun $n = 1$:

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n} \Longrightarrow f'(x) = \frac{1}{x}.$$

(II) Oletetaan, että kun $n = k$, lause on tosi, eli jos $n = k$,

$$f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{x^k}. \tag{18.3}$$

(III) Todistamme lauseen, kun $n = k + 1$. Derivoimme yhtälöä (18.3) näin

$$\begin{aligned}
[f^{(k)}(x)]' &= \left(\frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{x^k}\right)' \\
&= (-1)^{k-1}(k-1)!\frac{-kx^{k-1}}{x^{2k}} \\
&= \frac{-(-1)^{k-1}(k-1)!k}{x^{2k-k+1}} \\
&= \frac{(-1)^k k!}{x^{k+1}},
\end{aligned}$$

jos sijoitamme $(k+1)$:n sijaan n:n, saamme:

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}.$$

□

19 Yleinen eksponenttifunktio

Määritelmä 19.1. Funktio $f(x) = a^x$, jokaisella positiivisella reaaliluvulla a ja kaikilla reaaliluvuilla x. Funktio määritellään näin:

$$a^x = E(x \ln a) = \exp(x \ln a) = e^{x \ln a}.$$

On selvää, että funktion maalijoukko on positiivisten reaalilukujen joukko eli $a^x > 0$, $x \in \mathbb{R}$.

20 Yleisen eksponenttifunktion derivaatta

Lause 20.1. *Ks. [2, s. 151]*

Funktio $f(x) = a^x$ on derivoituva määrittelyjoukossaan ja sen derivaatta on:

$$f'(x) = a^x \ln a, \qquad a > 0.$$

Todistus. Lauseen 5.1 ja eksponenttifunktion derivaatan nojalla voidaan kirjoittaa:

Koska

$$f(x) = a^x = E(x \ln a) = \exp{(x \ln a)},$$

niin

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}f(x) &= \frac{d}{dx}[\exp(x\ln a)]\\ &= \exp'(x\ln a)\frac{d}{dx}(x\ln a)\\ &= \exp(x\ln a)\ln a = a^x\ln a.\end{aligned}$$

$\square$

21 Yleinen logaritmifunktio

Määritelmä 21.1. Yleinen logaritmifunktio on yleisen eksponenttifunktion käänteisfunktio, eli

$$f(y) = a^y = x,\ a > 0 \iff f^{-1}(x) = \log_a x = y,\ x > 0.$$

22 Yleisen logaritmifunktion derivaatta

Lause 22.1. *Ks. [6, s. 725]*

Jos funktio f on yleinen logaritmifunktio ja määritelty välillä $(0, +\infty)$*, tällöin sen derivaatta on:*

$$y = \log_a x \Longrightarrow y' = \frac{1}{x\ln a} \qquad a > 0,\ a \neq 1.$$

Todistus. Tiedetään logaritmin säännöistä, että

$$y = \log_a x = \log_e x \cdot \log_a e = \frac{1}{\ln a}\ln x.$$

Lauseen 18.1 nojalla voidaan johtaa:

$$y' = \left(\frac{1}{\ln a}\ln x\right)' = (\frac{1}{\ln a})\frac{1}{x} = \frac{1}{x\ln a}, \qquad a \neq 1,\ a > 0.$$

$\square$

23 Trigonometriset funktiot

Määritelmä 23.1. Alhaalla esitetyt sarjat ovat suppenevia kaikkialla, ne ovat jatkuvia kaikilla x:lla ja niillä on n-asteinen derivaatta $f^{(n)}$, jossa $n \in \mathbb{N}$. Eli voidaan määritellä seuraavasti:

$$\begin{aligned} \cos x = C(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \\ &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots, \qquad x \in \mathbb{R}, \end{aligned} \tag{23.1}$$

$$\begin{aligned} \sin x = S(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots, \qquad x \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{23.2}$$

24 Trigonometristen funktioiden derivaatta

Nyt tarkastelemme lyhyesti alkuperäisiä trigonometrisia funktioita eikä puututa yksityiskohtiin.

Lause 24.1. *Ks. [3, s. 249]*

Jatkuvat funktiot $\cos x$ *ja* $\sin x$ *ovat derivoituva, kaikilla reaaliluvuilla, ja niiden derivaatat ovat seuraavat:*

(I) jos $y = \cos x$*, tällöin* $y' = -\sin x$*,*

(II) ja jos $y = \sin x$*, tällöin* $y' = \cos x$*.*

Todistus.

(I) Määritelmän mukaan voidaan kirjoittaa:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots$$

Jos derivoimme, saamme:

$$\begin{aligned} (\cos x)' &= 0 - \frac{2x}{2!} + \frac{4x^3}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{2nx^{2n-1}}{(2n)!} + \ldots \\ &= -x + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots \\ &= -(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots) \\ &= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{(2n-1)!}, \end{aligned}$$

Jos sijoitetaan $m = n - 1$, saadaan $2m + 1 = 2n - 1$, ja jos $n = 1$, niin $m = 0$, joten

$$y' = (\cos x)' = -\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m+1}}{(2m+1)!} = -\sin x.$$

(II) Samoin koska määritelmän nojalla on

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots$$

niin derivoinnilla saadaan, että

$$\begin{aligned} y' = (\sin x)' &= 1 - \frac{3x^2}{3!} + \frac{5x^4}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{(2n+1)x^{2n}}{(2n+1)!} + \ldots \\ &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots \\ &= \cos x. \end{aligned}$$

□

Huomautus 24.1.

(a) Määritellään funktiot $\tan x$, $\cot x$, $\sec x$ ja $\csc x$ funktioiden $\cos x$ ja $\sin x$ avulla seuraavalla tavalla:

(i) $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$, $\quad \cos x \neq 0 \quad (x \neq \pi/2 + n\pi, n \in \mathbb{Z})$,
(ii) $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$, $\quad \sin x \neq 0 \quad (x \neq n\pi, n \in \mathbb{Z})$,
(iii) $\sec x = \frac{1}{\cos x}$, $\quad \cos x \neq 0 \quad (x \neq \pi/2 + n\pi, n \in \mathbb{Z})$,
(iv) $\csc x = \frac{1}{\sin x}$, $\quad \sin x \neq 0 \quad (x \neq n\pi, n \in \mathbb{Z})$.

Funktiot $\tan x$ ja $\sec x$ ovat jatkuvia ja ne ovat derivoituvia kaikilla x:lla paitsi, kun $x = \pi/2 + n\pi, n \in \mathbb{Z}$. Samoin $\cot x$ ja $\csc x$ ovat jatkuvia ja ne ovat derivoituvia kaikilla x:llä paitsi, kun $x = n\pi, n \in \mathbb{Z}$. Voidaan derivoida helposti yllä olevat funktiot lauseen 4.1 (III)-osan perustella seuraavasti:

1. $D(\tan x) = 1 + \tan^2 x$,
2. $D(\cot x) = -(1 + \cot^2 x)$,
3. $D(\sec x) = \sec x \tan x$,
4. $D(\csc x) = -\csc x \cot x$.

(b) Jos funktio u on derivoituva pisteessä x, voidaan kirjoittaa lauseen 5.1 nojalla alla olevat derivaatat:

(i) $D_x(\sin u) = \cos u D_x u$,

(ii) $D_x(\cos u) = -\sin u D_x u$,

(iii) $D_x(\tan u) = (1 + \tan^2 u)D_x u$,

(iv) $D_x(\cot u) = -(1 + \cot^2 u)D_x u$.

25 Trigonometriset käänteisfunktiot

Tiedetään, että:

I. cos on aidosti vähenevä välillä $[0, \pi]$ arvojoukkona $[-1, +1]$.

II. sin on aidosti kasvava välillä $[-\pi/2, \pi/2]$ arvojoukkona $[-1, +1]$.

III. tan on aidosti kasvava välillä $[-\pi/2, \pi/2]$ ja sen maalijoukko on $(-\infty, +\infty)$.

IV. cot on aidosti vähenevä välillä $[0, \pi]$ ja sen maalijoukko on $(-\infty, +\infty)$.

Siis voidaan määrittää niiden käänteisfunktiot näin:

(i) $\cos^{-1}$ tai arccos (arkuskosini) välillä $[-1, +1]$, maalijoukkona $[0, \pi]$, eli jos $y = \cos x$, tällöin $\cos^{-1} y = \arccos y = x$.

(ii) $\sin^{-1}$ tai arcsin (arkussini) välillä $[-1, +1]$, maalijoukkona $[-\pi/2, \pi/2]$, eli jos $y = \sin x$, tällöin $\sin^{-1} y = \arcsin y = x$.

(iii) $\tan^{-1}$ tai arctan (arkustangentti) välillä $(-\infty, +\infty)$, maalijoukkona $(-\pi/2, \pi/2)$, eli jos $y = \tan x$, tällöin $\tan^{-1} y = \arctan y = x$.

(iv) $\cot^{-1}$ tai arccot (arkuskotangentti) välillä $(-\infty, +\infty)$, maalijoukkona $(0, \pi)$, eli jos $y = \cot x$, tällöin $\cot^{-1} y = \operatorname{arccot} y = x$.

26 Trigonometristen käänteisfunktioiden derivaatta

Lause 26.1. *Ks. [3, s. 255]*
Funktiot $\arccos x$ *ja* $\arcsin x$ *välillä* $(-1, +1)$ *ja funktiot* $\arctan x$ *ja* $\operatorname{arccot} x$ *välillä* $(-\infty, +\infty)$ *ovat derivoituvia ja niiden derivaatat saadaan seuraavasti:*

(I) Jos $y = \arccos x$, *tällöin* $y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $x \in (-1, +1)$,

(II) Jos $y = \arcsin x$, *tällöin* $y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $x \in (-1, +1)$,

(III) Jos $y = \arctan x$, *tällöin* $y' = \frac{1}{1+x^2}$,

(IV) Jos $\quad y = \operatorname{arccot} x,$ $\quad$ *tällöin* $\quad y' = -\frac{1}{1+x^2}.$

Todistus.

(I) Funktio $y = \arccos x$ on määritelty välillä $(-1, +1)$ ja käänteisfunktion määritelmän mukaan saadaan

$$x = \cos y \qquad \text{ja} \qquad \frac{dx}{dy} = -\sin y.$$

Koska lauseen 6.1 perusteella

$$\frac{dx}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = 1,$$

niin

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{dx/dy} = \frac{1}{-\sin x} = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 y}},$$

joten

$$y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad x \in (-1, +1).$$

Myös voidaan todistaa lauseen (II), (III), (IV) osat helposti samalla tavalla.

$\square$

Huomautus 26.1.

(a) Jos funktio u on derivoituva pisteessä x, voidaan kirjoittaa lauseen 5.1 perusteella seuraavat derivaatat:

(i) $D_x(\arccos u) = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} D_x u, \qquad u \in (-1, +1),$

(ii) $D_x(\arcsin u) = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} D_x u, \qquad u \in (-1, +1),$

(iii) $D_x(\arctan u) = \frac{1}{1+u^2} D_x u,$

(iv) $D_x(\operatorname{arccot} u) = -\frac{1}{1+u^2} D_x u.$

(b) Funktiolla sec on käänteisfunktio

$$\sec^{-1} x = \operatorname{arcsec} x = \cos^{-1}(1/x) = \arccos(1/x), \qquad |x| \geq 1.$$

Ja funktiolla csc on käänteisfunktio

$$\csc^{-1} x = \operatorname{arccsc} x = \sin^{-1}(1/x) = \arcsin(1/x), \qquad |x| \geq 1.$$

(c) Osan (b) ja lauseen 26.1 nojalla saadaan funktioiden $\operatorname{arcsec} x$ ja $\operatorname{arccsc} x$ derivaatat seuraavasti:

(i) $D(\operatorname{arcsec} x) = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}, \qquad |x| > 1,$

(ii) $D(\operatorname{arccsc} x) = -\frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}, \qquad |x| > 1.$

(d) Jos funktio u on derivoituva pisteessä x, saadaan seuraavat derivaatat:

(i) $D_x(\sec u) = \sec u \tan u D_x u,$

(ii) $D_x(\csc u) = -\csc u \cot u D_x u,$

(iii) $D_x(\operatorname{arcsec} u) = \frac{1}{|u|\sqrt{u^2-1}} D_x u, \qquad |u| > 1,$

(iv) $D_x(\operatorname{arccsc} u) = -\frac{1}{|u|\sqrt{u^2-1}} D_x u, \qquad |u| > 1.$

27 Hyperboliset funktiot

Määritelmä 27.1. Hyperboliset funktiot määritellään eksponenttifunktioiden e^x ja e^{-x} avulla. Niille käytetään nimityksiä hyperbelisini(hyperbolinen sini)(sinh), hyperbelikosini (cosh), hyperbelitangentti (tanh), ja hyperbelikotangentti (coth) ja ne määritellään seuraavasti:

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \qquad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$

$$\tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \qquad \coth x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}, \qquad x \neq 0.$$

Hyperboliset funktiot ovat yhteydessä yksikköhyperbeliin $x^2 - y^2 = 1$ niin kuin trigonometriset funktiot ovat yhteydessä yksikköympyrään. Hyperbolisini on pariton ja hyperbolicosini on parillinen, eli

$$\sinh(-x) = -\sinh x \qquad \text{ja} \qquad \cosh(-x) = \cosh x.$$

Kaksi muuta hyperbolista funktiota määritellään seuraavasti:

$$\operatorname{sech} x = \frac{2}{e^x + e^{-x}}, \qquad \operatorname{csch} x = \frac{2}{e^x - e^{-x}}, \qquad x \neq 0.$$

28 Hyperbolisten funktioiden derivaatta

Lause 28.1. *Ks. [6, s. 804]*

Hyperboliset funktiot ovat derivoituvia kaikissa määrittelyjoukon pisteissä seuraavasti:

$$\begin{aligned} D(\sinh x) &= \cosh x, & D(\cosh x) &= \sinh x, \\ D(\tanh x) &= \operatorname{sech}^2 x, & D(\coth x) &= -\operatorname{csch}^2 x, \\ D(\operatorname{sech} x) &= -\operatorname{sech} x \tanh x, & D(\operatorname{csch} x) &= -\operatorname{csch} x \coth x. \end{aligned}$$

Todistus. Hyperboliset funktiot voidaan derivoida helposti e^x:n derivaatan lauseen 4.1 avulla, joten

$$D(\sinh x) = D(\frac{e^x - e^{-x}}{2}) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x.$$

Samoin

$$D(\cosh x) = D(\frac{e^x + e^{-x}}{2}) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh x.$$

Myös voidaan derivoida muut funktiot samalla tavalla. $\square$

Huomautus 28.1. Jos funktio u on derivoituva pisteessä x, saadaan seuraavat derivaatat:

$$\begin{aligned} D_x(\sinh u) &= \cosh u D_x u, & D_x(\cosh u) &= \sinh u D_x u, \\ D_x(\tanh u) &= \operatorname{sech}^2 u D_x u, & D_x(\coth u) &= -\operatorname{csch}^2 u D_x u, \\ D_x(\operatorname{sech} u) &= -\operatorname{sech} u \tanh u D_x u, & D_x(\operatorname{csch} u) &= -\operatorname{csch} u \coth u D_x u. \end{aligned}$$

29 Hyperboliset käänteisfunktiot

Koska hyperboliset funktiot $\sinh x$, $\tanh x$, $\coth x$ ja $\operatorname{csch} x$ ovat bijektioita, monotonisia ja jatkuvia määrittelyjoukossaan, niin niillä on käänteisfunktio. Mutta $\cosh x$ ja $\operatorname{sech} x$ eivät ole bijektioita, siis niillä ei ole käänteisfunktioita määrittelyjoukossaan, sitä varten määritellään $\cosh x$ ja $\operatorname{sech} x$, kun $x \geq 0$.

Määritelmä 29.1. Hyperbolisten funktioiden kääteisfunktioita sanotaan areafunktioiksi ja ne määritellään seuraavasti:

I. $y = \operatorname{arsinh} x = \sinh^{-1} x \iff x = \sinh y,$

II. $y = \operatorname{artanh} x = \tanh^{-1} x \iff x = \tanh y,$

III. $y = \operatorname{arcoth} x = \coth^{-1} x \iff x = \coth y,$

IV. $y = \operatorname{arcsch} x = \operatorname{csch}^{-1} x \iff x = \operatorname{csch} y,$

V. $y = \operatorname{arcosh} x = \cosh^{-1} x \iff x = \cosh y, \qquad y \geq 0,$

VI. $y = \operatorname{arsech} x = \operatorname{sech}^{-1} x \iff x = \operatorname{sech} y, \qquad y \geq 0.$

30 Hyperbolisten käänteisfunktioiden derivaatta

Lause 30.1. *Ks. [6, s. 820]*

Hyperbolisten käänteisfunktioiden derivaatat saadaan seuraavasti:

(I) $D(\operatorname{arsinh} x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \qquad x \in \mathbb{R},$

(II) $D(\operatorname{arcosh} x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \qquad x > 1,$

(III) $D(\operatorname{artanh} x) = \frac{1}{1-x^2} \qquad |x| < 1,$

(IV) $D(\operatorname{arcoth} x) = \frac{1}{1-x^2} \qquad |x| > 1,$

(V) $D(\operatorname{arsech} x) = -\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}} \qquad 0 < x < 1,$

(VI) $D(\operatorname{arcsch} x) = -\frac{1}{|x|\sqrt{1+x^2}} \qquad x \neq 0.$

Todistus.

(I) Olkoon $y = \operatorname{arsinh} x$, jolloin

$$x = \sinh y \qquad \text{ja} \qquad D_y x = \cosh y.$$

Koska lauseen 6.1 mukaan

$$D_x y = \frac{1}{D_y x},$$

niin

$$D_x y = \frac{1}{\cosh y} = \frac{1}{\sqrt{1 + \sinh^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} \qquad (\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1).$$

Siis

$$D(arsinhx) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$

Voidaan todistaa helposti lauseen muut kohdat samalla tavalla. □

Huomautus 30.1. Jos funktiolla u on derivaatta pisteessä x, niin voidaan kirjoittaa alhaalla olevat derivaatat.

(i) $D_x(\operatorname{arsinh} u) = \frac{D_x u}{\sqrt{u^2+1}}$,

(ii) $D_x(\operatorname{arcosh} u) = \frac{D_x u}{\sqrt{u^2-1}}$, $\qquad u > 1,$

(iii) $D_x(\operatorname{artanh} u) = \frac{D_x u}{1-u^2}$, $\qquad |u| < 1,$

(iv) $D_x(\operatorname{arcoth} u) = \frac{D_x u}{1-u^2}$, $\qquad |u| > 1,$

(v) $D_x(\operatorname{arsech} u) = -\frac{D_x u}{u\sqrt{1-u^2}}$, $\qquad 0 < u < 1,$

(vi) $D_x(\operatorname{arcsch} u) = -\frac{D_x u}{|u|\sqrt{1+u^2}}$, $\qquad u \neq 0.$

31 Vektoriarvoisten funktioiden derivaatat

Tarkastelemme vektorifunktioiden derivaattaa lyhyesti tässä osassa eikä puututa yksityiskohtiin.

Olkoon vektorifunktio $\boldsymbol{f}\colon (a,b) \to \mathbb{R}^n$ määritelty avoimella välillä (a,b) joukossa $\mathbb{R}$. Funktion $\boldsymbol{f} = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$ jokainen osa f_k on reaalifunktio välillä (a,b). Tällöin funktio $\boldsymbol{f}$ on derivoituva pisteellä c välillä (a,b), jos f_k on derivoituva pisteessä c, ja määritellään funktion derivaatta seuraavasti:

$$\boldsymbol{f}'(c) = (f_1'(c), f_2'(c), \ldots, f_n'(c)).$$

Eli $\boldsymbol{f}(c)$ saadaan derivoimalla $\boldsymbol{f}$:n jokainen osa pisteessä c. Monet derivoimislauseet toteutuvat myös vektorifunktioiden derivoinnissa. Alhaalla on muutama esimerkki derivoimislauseiden toteutumisesta ja vektorifunktioille.

I. Olkoot funktiot $\boldsymbol{f}$ ja $\boldsymbol{g}$ vektorifunktioita ja derivoituvia pisteessä c, lisäksi funktio λ on reaalifunktio ja derivoituva pisteessä c. Tällöin summa $\boldsymbol{f} + \boldsymbol{g}$, tulo $\lambda \boldsymbol{f}$ ja pistetulo $\boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{g}$ ovat derivoituvia pisteessä c ja voidaan kirjoittaa:

   (i) $(\boldsymbol{f} + \boldsymbol{g})'(c) = \boldsymbol{f}'(c) + \boldsymbol{g}'(c)$,

   (ii) $(\lambda \boldsymbol{f})' = \lambda'(c)\boldsymbol{f}(c) + \lambda(c)\boldsymbol{f}'(c)$,

   (iii) $(\boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{g})'(c) = \boldsymbol{f}'(c) \cdot \boldsymbol{g}(c) + \boldsymbol{f}(c) \cdot \boldsymbol{g}'(c)$.

   Ylhäällä oleva lause voidaan todistaa helposti tarkistamalla asia, mutta ei esitetä sen todistusta tässä vaiheessa.

II. Lause 5.1 (ketjusääntö) pätee tässä asiassa samoin kuin tavallisille funktioille. Eli jos funktio $\boldsymbol{f}$ on vektorifunktio ja u on reaalifunktio, niin yhdistetyn funktio $\boldsymbol{g} = \boldsymbol{f}[u(x)]$ derivaatta pisteessä c on

   (i) $\boldsymbol{g}'(c) = \boldsymbol{f}'[u(c)]u'(c)$.

   Yllä oleva lauseke toteutuu, jos $\boldsymbol{f}$:n määrittelyjoukko sisältää $u(c)$:n ympäristön ja $u'(c)$ ja $\boldsymbol{f}'[u(c)]$ ovat olemassa samanaikaisesti.

III. Lause 11.2 (Lagrangen väliarvolause) ei päde vektorifunktioilla. Esimerkiksi jos $\boldsymbol{f}(t) = (\cos t, \sin t)$ jokaisella reaaliluvulla t, niin

$$\boldsymbol{f}(2\pi) - \boldsymbol{f}(0) = 0,$$

   mutta $\boldsymbol{f}'(t)$ ei ole koskaan nolla, ja $\|\boldsymbol{f}'(t)\| = 1$ kaikilla t:lla.

32 Osittaisderivaatta

Haluamme vain esittää tätä asiaa pääpiirtein emmekä aio tutkia asiaa yksityiskohteisesti. Olkoon joukko S avoin joukko euklidisessa avaruudessa $\mathbb{R}^n$, ja funktio $f\colon S \to \mathbb{R}$ reaalifunktio joukossa S. Oletetaan, että

$$X = (x_1, x_2, \dots, x_n) \qquad \text{ja} \qquad C = (c_1, c_2, \dots, c_n),$$

ovat kaksipistettä joukossa S.

Oletetaan, että jos $i \neq k$, niin $x_i = c_i$, ja jos $i = k$, $x_k \neq c_k$, eli paitsi k:s osa, kahden pisteen kaikki osat ovat samoja. Tällöin

$$\lim_{x_k \to c_k} \frac{f(X) - f(C)}{x_k - c_k},$$

on k:nnen koordinaatin osittaisderivaatta, jos se on olemassa, merkitään sitä näin:

$$d_k f(C) \qquad \text{tai} \qquad f_k(C) \qquad \text{tai} \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(C).$$

Voidaan määrittää n funktiota $D_1 f, D_2 f, \dots, D_n f$ ylhäällä olevalla prosessilla pisteissä C ja X joukossa S.

Osittaisderivaatan suoritus on sama kuin yleisen derivaatan. Oletetaan, että funktiolla $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ on yksi muuttuja ja muut muuttujat ovat vakioita. Eli jos funktio g on seuraavasti:

$$g(x_k) = f(c_1, c_2, \dots, c_k - 1, x_k, c_k + 1, \dots, c_n),$$

sen osittaisderivaatta $D_k f(C)$ on yhtä kuin sen yleinen derivaatta $g'(c_k)$.

Olennainen asia on se, että osittaisderivaatta pisteessä c ei osoita f:n jatkuvuutta siinä pisteessä, eli on mahdollista, että monen muuttujan funktio on derivoituva kaikilla muuttujilla pisteessä c, mutta se ei ole jatkuva siinä pisteessä. Esimerkiksi alhaalla on kahden muuttujan funktio, joka on derivoituva jokaisella muuttujalla pisteessä $(1, 2)$, mutta se ei ole jatkuva siinä pisteessä:

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 + 2y, & (x, y) \neq (1, 2), \\ 0, & (x, y) = (1, 2), \end{cases}$$

$$\begin{aligned} D_1 f(1, 2) = D_x(1, 2) &= \lim_{x \to 1} \frac{f(x, 2) - f(1, 2)}{x - 1} \\ &= \lim_{x \to 1} \frac{x^2 + 4 - 5}{x - 1} \\ &= \lim_{x \to 1}(x + 1) = 2, \\ D_2(1, 2) = D_y(1, 2) &= \lim_{y \to 2} \frac{f(1, y) - f(1, 2)}{y - 2} \\ &= \lim_{y \to 2} \frac{1 + 2y - 5}{y - 2} = 2. \end{aligned}$$

Mutta koska

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)} f(x,y) \neq f(1,2),$$

niin f ei ole jatkuva pisteessä $(1,2)$.

Jos funktion f osittaisderivaatat ovat $D_1 f, D_2 f, \ldots, D_n f$ avoimessa joukossa S, tällöin voi tarkastella saatujen funktioiden derivaattaa uudestaan. Tätä sanotaan toisen asteen osittaisderivaataksi. Esimerkiksi funktion $D_k f$ osittaisderivaatta r:nnen muuttujan suhteen merkitään $D_{r,k} f$, eli $D_{r,k} f = D_r(D_k f)$.

Samoin saadaan

$$D_{r,k} f = \frac{\partial^2 f}{\partial_{x_r} \partial_{x_k}}, \qquad D_{p,q,r} f = \frac{\partial^3 f}{\partial_{x_p} \partial_{x_q} \partial_{x_r}}.$$

Joskus esitetään toisen asteen osittaisderivaatat helposti seuraavalla tavalla:

$$\begin{aligned}
f_{xx}(a,b) &= \lim_{h\to 0} \frac{f_x(a+h,b) - f_x(a,b)}{h}, \\
f_{xy}(a,b) &= \lim_{h\to 0} \frac{f_y(a+h,b) - f_y(a,b)}{h}, \\
f_{yy}(a,b) &= \lim_{k\to 0} \frac{f_y(a,b+k) - f_y(a,b)}{k}, \\
f_{yx}(a,b) &= \lim_{k\to 0} \frac{f_x(a,b+k) - f_x(a,b)}{k}.
\end{aligned}$$

Toinen olennainen asia on se, että osittaisderivaatan järjestyksen muutos saattaa muuttaa osittaisderivaatan tulosta, mutta aina ei tapahdu näin.

Esimerkki 32.1. Alhaalla osoitetaan, että funktion f osittaisderivaatan järjestyksen muutos xy:sta yx:ään, muuttaa osittaisderivaatan tulosta, eli $f_{xy} \neq f_{yx}$:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Ratkaisu. Derivoidaan $f(x,y)$ pisteessä $(0,0)$.

I. Koska

$$f_{xy}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f_y(h,0) - f_y(0,0)}{h},$$

ja $$f_y(0,0) = \lim_{k\to 0} \frac{f(0,k) - f(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{0}{k} = 0,$$

ja $$f_y(h,0) = \lim_{k\to 0} \frac{f(h,k) - f(h,0)}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{hk(h^2-k^2)}{k(h^2+k^2)} = h,$$

niin

$$f_{xy} = \lim_{h\to 0} \frac{h-0}{h} = 1.$$

II. Koska

$$f_{yx}(0,0) = \lim_{k\to 0} \frac{f_x(0,k) - f_x(0,0)}{k},$$

ja
$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = 0,$$

ja
$$f_x(0,k) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,k) - f(0,k)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{hk(h^2-k^2)}{h(h^2+k^2)} = -k,$$

niin

$$f_{yx} = \lim_{k\to 0} \frac{-k-0}{k} = -1.$$

Siis

$$f_{xy} \neq f_{yx}.$$

Esimerkki 32.2. Tässä esimerkissä funktion osittaisderivaatan järjestyksen muutos ei muuta osittaisderivaatan tulosta, eli $f_{xy} = f_{yx}$, kun

$$f(x,y) = x^3y + e^{xy^2}.$$

Ratkaisu. Voidaan kirjoittaa

$$f_y = x^3 + 2xye^{xy^2},$$

ja

$$f_{xy} = 3x^2 + 2ye^{xy^2} + 2xy^3e^{xy^2}. \tag{32.1}$$

Toisaalta

$$f_x = 3x^2y + y^2e^{xy^2},$$

ja

$$f_{yx} = 3x^2 + 2ye^{xy^2} + 2xy^3e^{xy^2}. \tag{32.2}$$

Kaavojen (32.1) ja (32.2) perusteella $f_{xy} = f_{yx}$.

Lause 32.1. *Ks. [3, s. 549]*

Olkoon f_x olemassa (a,b):n ympäristössä ja olkoon myös $f_y(a,b)$ olemassa. Tällöin (a,b):n ympäristön jokaisessa pisteessä $(a+h, b+k)$ saadaan

$$f(a+h,b+k) - f(a,b) = hf_x(a+\theta h, b+k) + k[f_y(a,b) + \eta],$$

missä $0 < \theta < 1$ ja η on k:n jokin funktio siten, että kun $k \to 0$, niin $\eta \to 0$.

Todistus. Voidaan kirjoittaa

$$f(a+h,b+k)-f(a,b) = f(a+h,b+k)-f(a,b+k)+f(a,b+k)-f(a,b). \tag{32.3}$$

Koska f_x on olemassa (a,b):n ympäristössä, niin Lagrangen väliarvolauseen nojalla:

$$f(a+h,b+k)-f(a,b+k) = hf_x(a+\theta h, b+k), \qquad 0<\theta<1. \tag{32.4}$$

Koska f_y on olemassa, niin

$$\lim_{k\to 0}\frac{f(a,b+k)-f(a,b)}{k} = f_y(a,b),$$

joten

$$f(a,b+k)-f(a,b) = k[f_y(a,b)+\eta], \tag{32.5}$$

missä $\eta \to 0$, kun $k \to 0$.

Yhtälöiden (32.3), (32.4) ja (32.5) perusteella voidaan johtaa

$$f(a+h,b+k)-f(a,b) = hf_x(a+\theta h,b+k)+k[f_y(a,b)+\eta],$$

missä $0<\theta<1$ ja kun $k\to 0,\ \eta\to 0$. □

32.1 Derivoituvuus

Olkoot $(x,y),(x+\delta x, y+\delta y)$ ovat f:n määrittelyjoukossa. Tiedetään, että f:n kasvu, eli δf on f:n muutos pisteestä (x,y) pisteeseen $(x+\delta x, y+\delta y)$ ja se voidaan määritellä

$$\delta f = f(x+\delta x, y+\delta y) - f(x,y).$$

Funktio f on derivoituva pisteessä (x,y), jos voidaan kirjoittaa

$$\delta f = A\delta x + B\delta y + \delta x\phi(\delta x,\delta y) + \delta y\psi(\delta x,\delta y), \tag{32.6}$$

missä A ja B ovat vakioita ja riippumattomia δx:stä ja δy:stä ja ϕ,ψ ovat sellaisia δx:n ja δy:n funktioita, että

$$\text{kun} \qquad (\delta x,\delta y)\to(0,0), \qquad \text{niin} \qquad \phi\to 0, \qquad \psi\to 0.$$

Nimitetään $(A\delta x + B\delta y)$:tä f:n differentiaaliksi pisteessä (x,y) ja merkitään sitä df:llä, siis

$$df = A\delta x + B\delta y.$$

Ottaen huomioon yhtälö (32.6) saadaan:

$$\text{jos} \qquad (\delta x,\delta y)\to(0,0),$$

$$f(x+\delta x, y+\delta y) - f(x,y) \to 0 \qquad \text{eli} \qquad f(x+\delta x, y+\delta y) \to f(x,y),$$

joten funktio f on jatkuva pisteessä (x,y). Siis jokainen derivoituva funktio on jatkuva. Jos yhtälössä (32.6) $\delta y = 0$, tällöin

$$\delta f = A\delta x + \delta x \phi(\delta x, 0).$$

Jakamalla ylhäällä oleva yhtälö δx:llä ja kun $\delta x \to 0$, saadaan

$$\frac{\partial f}{\partial x} = A.$$

Samoin

$$\frac{\partial f}{\partial y} = B.$$

Siis A ja B ovat osittaisderivaattoja x:n ja y:n suhteen.

Näin ollen jokaisella derivoituvalla funktiolla on 1.asteen osittaisderivaatat. Mutta vastakohta lausuma ei ole totta, eli on mahdollista, että funktio f on jatkuva jossakin pisteessä ja funktiolla f on 1.asteen osittaisderivaatat, mutta se ei ole derivoituva siinä pisteessä.

Funktion f differentiaali on määritelty seuraavasti:

$$df = A\delta x + B\delta y = \frac{\partial f}{\partial x}\delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\delta y.$$

Jos valitaan $f = x$, saadaan $dx = \delta x$ ja jos valitaan $f = y$, saadaan $dy = \delta y$. Siis f:n differentiaali pisteessä (x,y) on:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = f_x dx + f_y dy. \tag{32.7}$$

Huomautus 32.1.

(a) Jos yhtälössä (32.6) sijoitetaan h ja k, δx:n ja δy:n paikalle, funktio f on derivoituva määrittelyjoukon pisteessä (a,b) siten, että

$$df = f(a+h, b+k) - f(a,b) = Ah + Bk + h\phi(h,k) + k\psi(h,k), \tag{32.8}$$

missä $A = f_x, B = f_y$ ja ϕ, ψ ovat h:n ja k:n jotkut funktiot, että kun $(h,k) \to (0,0)$, niin $\phi \to 0$, $\psi \to 0$.

(b) On havaittu, että jokainen jossakin pisteessä derivoituva funktio on jatkuva ja sillä on osittaisderivaatat siinä pisteessä. Lisäksi derivoituvaan funktioon pätee yhtälö (32.6).

Olkoon funktio f ja olkoot sen osittaisderivaatat jatkuvia pisteessä (x,y) ja

$$\begin{aligned}\delta f &= f(x+\delta x, y+\delta y) - f(x,y)\\ &= \{f(x+\delta x, y+\delta y) - f(x, y+\delta y)\} + \{f(x, y+\delta y) - f(x,y)\},\end{aligned}$$

Käyttäen yhden muuttujan funktion Lagrangen väliarvolausetta saadaan

$$\delta f = \delta x f_x(x+\theta_1\delta x, y+\delta y)+\delta y f_y(x, y+\theta_2\delta y), \qquad 0<\theta_1<1,\ 0<\theta_2<1.$$

Koska f_x, f_y ovat jatkuvia pisteessä (x, y), niin

$$\delta f = \delta x(f_x+\phi)+\delta y(f_y+\psi),$$

missä kun $(\delta x, \delta y) \to (0,0)$, niin $\phi \to 0,\ \psi \to 0$.

Siis

$$\delta f = f_x\delta x + f_y\delta y + \phi\delta x + \psi\delta y.$$

Esimerkki 32.3. Olkoon

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

on osoitettava, että funktio f on jatkuva pisteessä $(0,0)$ ja sillä on osittaisderivaatta siinä pisteessä, mutta se ei ole derivoituva siinä pisteessä.

Ratkaisu.

I. Merkitään $x = r\cos\theta$ ja $y = r\sin\theta$, jolloin

$$\left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| = r|\cos\theta\sin\theta| \leq r \to 0, \qquad kun \qquad r \to 0.$$

Eli

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0 = f(0,0),$$

joten f on jatkuva pisteessä $(0,0)$.

II.

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0}{h} = 0,$$

ja

$$f_y(0,0) = \lim_{k\to 0}\frac{f(0,0+k)-f(0,0)}{k} = \lim_{h\to 0}\frac{0}{k} = 0.$$

III. Jos f on derivoituva pisteessä $(0,0)$, on oltava:

$$df = f(0+h, 0+k) - f(0,0) = Ah + Bk + \phi h + \psi k,$$

$$df = f(h,k) - f(0,0) = Ah + Bk + \phi h + \psi k, \tag{32.9}$$

missä kun $(h,k) \to (0,0)$, niin $\phi \to 0$ ja $\psi \to 0$.

Sijotetaan $A = f_x(0,0) = 0$ ja $B = f_y(0,0) = 0$ yhtälöön (32.9), siis

$$\frac{hk}{\sqrt{h^2+k^2}} = h\phi + k\psi. \tag{32.10}$$

Jos $k = mh, (m > 0)$, kun $h \to 0$ saadaan:

$$\frac{m}{\sqrt{1+m^2}} = \phi + m\psi,$$

ja

$$\lim_{h\to 0} \frac{m}{\sqrt{1+m^2}} = \lim_{h\to 0}(\phi + m\psi),$$

siksi

$$\lim_{h\to 0} \frac{m}{\sqrt{1+m^2}} = \frac{m}{\sqrt{1+m^2}} > 0,$$

ja

$$\lim_{h\to 0}(\phi + m\psi) = 0,$$

niin tämä on ristiriita. Siis f ei ole derivoituva pisteessä $(0,0)$.

Huomaa! Jos voidaan näyttää, että funktio f ei ole jatkuva pisteessä $(0,0)$, niin voidaan sanoa, että f ei ole derivoituva siinä pisteessä.

Lause 32.2. *Ks. [3, s. 556]*
Olkoon (a,b) funktion f määrittelyjoukossa.

(a) Jos f_x on jatkuva pisteessä (a,b),

(b) f_y on olemassa.

Tällöin funktio f on derivoituva pisteessä (a,b).

Todistus. Oletuksen (a) osan perusteella f_x on olemassa (a,b):n erässä ympäristössä. Oletetaan, että piste $(a+h, b+k)$ on mielivaltainen piste siitä ympäristöstä. Siis

$$\begin{aligned} df &= f(a+h,b+k) - f(a,b) \\ &= f(a+h,b+k) - f(a,b+k) + f(a,b+k) - f(a,b). \end{aligned} \tag{32.11}$$

Lagrangen väliarvolauseen nojalla:

$$f(a+h,b+k) - f(a,b+k) = hf_x(a+\theta h, b+k), \tag{32.12}$$

missä $0 < \theta < 1$ ja θ on riippuva h:sta ja k:sta.

Koska f_x on jatkuva pisteessä (a,b), niin

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} f_x(a+\theta h, b+k) = f_x(a,b).$$

Siis

$$f_x(a+\theta h, b+k) = f_x(a,b) + \phi(h,k), \tag{32.13}$$

missä $\phi(h,k) \to 0$, kun $(h,k) \to (0,0)$.

Ehdon (b) perusteella koska $f_y(a,b)$ on olemassa, niin

$$\lim_{k\to 0} \frac{f(a,b+k) - f(a,b)}{k} = f_y(a,b),$$

ja

$$\frac{f(a,b+k) - f(a,b)}{k} = f_y(a,b) + \psi(h,k), \tag{32.14}$$

missä $\psi(h,k) \to 0$, kun $(h,k) \to 0$.

Yhtälöiden (32.11), (32.12), (32.13) ja (32.14) nojalla saadaan:

$$df = hf_x(a,b) + kf_y(a,b) + h\phi(h,k) + k\psi(h,k).$$

Eli f on derivoituva pisteessä (a,b).

Myös jos f_y on jatkuva pisteessä (a,b) ja f_x on olemassa, samalla tavalla voidaan todistaa, että funktio f on derivoituva pisteessä (a,b). □

Huomaa, että on mahdollista, että f on derivoituva jossakin pisteessä (a,b), mutta kumpikaan osittaisderivaatta ei ole jatkuva siinä pisteessä.

Esimerkki 32.4. Olkoon

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2\sin(1/x) + y^2\sin(1/y), & xy \neq 0, \\ x^2\sin(1/x), & x \neq 0,\ y = 0, \\ y^2\sin(1/y), & x = 0,\ y \neq 0, \\ 0, & x = y = 0. \end{cases}$$

Funktion f osittaisderivaatat ovat:

$$f_x(x,y) = \begin{cases} 2x\sin(1/x) - \cos(1/x), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

$$f_y(x,y) = \begin{cases} 2y\sin(1/y) - \cos(1/y), & y \neq 0, \\ 0, & y = 0, \end{cases}$$

jotka ovat epäjatkuvia pisteessä $(0,0)$.

Koska

$$f(h,k) - f(0,0) = 0h + 0k + h(h\sin(1/h)) + k(k\sin(1/k)),$$

ja kun $(h,k) \to 0$, niin $h\sin(1/h) \to 0$ ja $k\sin(1/k) \to 0$, joten f on derivoituva pisteessä $(0,0)$.

Lopuksi jos f ei ole derivoituva pisteessä (a,b), tällöin sen osittaisderivaatat eivät voi olla jatkuvia siinä pisteessä.

33 Implisiittifunktio

Määritelmä 33.1. Olkoon f kahden muuttujan funktio, ja olkoon $y = \varphi(x)$ funktio, jonka muuttuja on x. Oletetaan, että jokaisella x:lla on määritelty $\varphi(x)$ ja $f(x, \varphi(x)) = 0$, eli $y = \varphi(x)$ on yhtälön $f(x, y) = 0$ ratkaisu. Tällöin $y = \varphi(x)$ on implisiittifunktio, joka määritellään yhtälöllä $f(x, y) = 0$.

Täytyy ottaa huomioon, että yhtälöä $f(x, y) = 0$ ei voi määritellä aina muodossa funktio y, jonka muuttuja on x.

On mahdollista, että yhtälö ei määrittele yhtään funktioita tai se pätee moneen funktioon. Esimerkiksi yhtälö $x^2 + y^2 - 5 = 0$ voi ainakin määritellä kaksi funktiota $y = -\sqrt{5 - x^2}$ ja $y = \sqrt{5 - x^2}$, mutta $x^2 + y^2 + 5 = 0$ ei määrittele funktiota koskaan.

On mahdollista, että ratkaistaan jokin yhtälö ja löydetään $y = \varphi(x)$ helposti, mutta useimmiten yhtälön ratkaisu on vaikea, eli ei voi löytää implisiittifunktiota $y = \varphi(x)$ yhtälöstä $f(x, y) = 0$. Tässä asiassa funktion y olemassaolo on oleellistä, ja sen yhteydessä on olemassa lause, mutta lauseen tarkastelu ei ole meidän keskustelun aiheena.

34 Implisiittifunktion derivaatta

Oletetaan, että yhtälö $f(x, y) = 0$ määrittelee funktion $y = \varphi(x)$ siten, että y on derivoituva x:n suhteen. Tällöin y:n derivaatta voidaan saada derivoimalla yhtälö x:n suhteen.

Voidaan laskea implisiittifunktion derivaatta kahdella menetelmällä:

I. Derivoidaan y x:n suhteen tulon, yhdistetyn ja potenssifunktion derivoimissäännöllä.

Esimerkki 34.1. Oletetaan, että alhaalla olevassa yhtälöllä on olemassa ainakin yksi derivoituva funktio $y = \varphi(x)$

$$2x^3y^3 + x^3 = y^4 - 8.$$

Ratkaisu. Derivoidaan yhtälö x:n suhteen:

$$6x^2y^3 + 6x^3y^2\frac{dy}{dx} + 3x^2 = 4y^3\frac{dy}{dx}$$

$$\text{ja} \qquad 6x^2y^3 + 3x^2 + (6x^3y^2 - 4y^3)\frac{dy}{dx} = 0,$$

joten

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{6x^2y^3 + 3x^2}{6x^3y^2 - 4y^3}.$$

II. Voidaan derivoida y x:n suhteen alla olevan yhtälön avulla, joka on saatu yhdistetyn funktion säännöllä. Jos $f(x,y)=0$, niin

$$f_x + f_y \frac{dy}{dx} = 0. \tag{34.1}$$

Ratkaistetaan alla oleva esimerkki tällä menetelmällä:

$$\begin{aligned} f(x,y) &= 2x^3y^3 + x^3 - y^4 + 8 = 0, \\ f_x + f_y \frac{dy}{dx} &= 6x^2y^3 + 3x^2 + (6x^3y^2 - 4y^3)\frac{dy}{dx} = 0, \end{aligned}$$

joten

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{6x^2y^3 + 3x^2}{6x^3y^2 - 4y^3}.$$

Huomautus 34.1. Jos funktion $f(x,y)$ korkeamman asteen derivaatta on jatkuva, niin funktion $y=\varphi(x)$ korkeamman asteen derivaatta voidaan saada derivoimalla yhtälö (34.1) sillä ehdolla, että aina $f_y \neq 0$. Eli

$$f_{xx} + f_{xy}\frac{dy}{dx} + (f_{xy} + f_{yy}\frac{dy}{dx})\frac{dy}{dx} + f_y\frac{d^2y}{dx^2} = 0,$$

ja

$$f_{xx} + 2f_{xy}\frac{dy}{dx} + f_{yy}(\frac{dy}{dx})^2 + f_y\frac{d^2y}{dx^2} = 0. \tag{34.2}$$

Jos aina on $f_y \neq 0$, niin voidaan tehdä korkeammat derivaatat.

Nyt lasketaan esimerkin (34.1) toisen asteen derivaatta ylhäällä olevalla menetelmällä:

Koska

$$f(x,y) = 2x^3y^3 + x^3 - y^4 + 8 = 0,$$

ja

$$f_x + f_y\frac{dy}{dx} = 6x^2y^3 + 3x^2 + (6x^3y^2 - 4y^3)\frac{dy}{dx} = 0,$$

niin

$$\begin{aligned} f_{xx} + 2f_{xy}\frac{dy}{dx} + f_{yy}(\frac{dy}{dx})^2 + f_y\frac{d^2y}{dx^2} &= 12xy^3 + 6x + 2(18x^2y^2)\frac{dy}{dx} \\ &\quad + (12x^3y - 12y^2)(\frac{dy}{dx})^2 \\ &\quad + (6x^3y^2 - 4y^3)\frac{d^2y}{dx^2} = 0. \end{aligned}$$

35 Kompleksimuuttujafunktion derivaatta

Tarkastellaan lyhyesti kompleksifunktioiden derivaattaa. Kompleksifunktiot on määritelty kompleksitason osajoukossa ja niillä on vektorifunktioiden kautta määrittely- ja maalijoukkona $\mathbb{R}^2$:n osajoukko.

Tiedetään, että yhteenlasku, vähennyslasku, kertalasku ja jakolasku seuraavat usein yleisestä reaalilukujen säännöstä. Sitä varten tässä jakaminen on mahdollista, joten voidaan tarkistaa derivaatan originaalinen osamäärä

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$

Määritelmä 35.1. Olkoon kompleksifunktio f määritelty avoimessa joukossa $S \subseteq \mathbb{C}$ ja olkoon $z_0 \in S$. Tällöin sanotaan, että f on derivoituva, jos on olemassa

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0},$$

ja merkitään

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$

Jos $f'(z)$ on olemassa, niin määritellään myös korkeamman asteen derivaatat f'', $f^{(3)}, \ldots, f^{(n)}$ samalla tavalla.

Huomautus 35.1. Jos kompleksifunktiot ovat määritelty avoimessa joukossa S, alhaalla olevia asioita tarkastellaan kuten reaalifunktioilla.

(a) Funktio f on derivoituva pisteessä z_0, jos ja vain jos on olemassa pisteessä z_0 jatkuva funktio f^* siten, että

$$f(z) - f(z_0) = (z - z_0) f^*(z), \tag{35.1}$$

kaikilla $z \in S$, missä $\quad f^*(z_0) = f'(z_0)$.

Huomaa! Olettaen $g(z) = f^*(z_0) - f'(z)$ yhtälö (35.1) voidaan kirjoittaa seuraavasti:

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0) f'(z_0) + (z - z_0) g(z),$$

missä $g(z) \to 0$, kun $z \to z_0$. Tämä on funktion f Taylorin ensimmäisen asteen kaava.

(b) Jos kompleksifunktio f on derivoituva pisteessä z_0, niin se on jatkuva pisteessä z_0.

(c) Jos kompleksifunktiot f ja g ovat derivoituva pisteessä z_0, tällöin niiden summa, erotus, tulo ja osamäärä ovat derivoituvia lauseen 4.1 nojalla sillä ehdolla, että $g \neq 0$, kun tarkastellaan osamäärä g/g.

(d) Jos kompleksifunktion g määrittelyjoukko sisältää $f(z_0)$:n ympäristön ja molemmat $f'(z_0)$ ja $g'(f(z_0))$ ovat olemassa, niin ketjusäännön nojalla saadaan:

$$(g \circ f)'(z_0) = g'[f(z_0)]f'(z_0).$$

(e) Jos $f(z) = z^n$, niin $f'(z) = nz^{n-1}$, missä n on positiivinen tai negatiivinen ja $z \neq 0$. Jos $f(z) = z$, tällöin $f'(z) = 1$ jokaisella $z \in \mathbb{C}$. Lisäksi voidaan derivoida kompleksipolynomit ja kompleksirationaaliset funktiot.

36 Cauchyn–Riemannin yhtälöt

Olkoon kompleksifunktio f määritelty kompleksimuuttujalla. Tällöin saadaan, että

$$f(z) = u(z) + iv(z),$$

missä funktiot u ja v ovat reaalifunktioita, joilla on kompleksimuuttuja. Voidaan tarkastella funktioita u ja v siten, että jokainen niistä on kahden muuttujen funktio, eli

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y), \qquad z = x + iy.$$

Jos merkitään $f = u + iv$, niin u on reaaliosa ja v on imaginaariosa. Esimerkiksi jos

$$f(z) = 3z + 1 = 3(x + iy) + 1,$$

niin

$$u(x) = 3x + 1, \qquad v(x, y) = 3y.$$

Lause 36.1. *Ks. [1, s. 118]*

Olkoon funktio $f = u + iv$ määritelty avoimessa kompleksitason joukossa S siten, että on olemassa $f'(z)$ jollakin z_0:illa joukossa S. Tällöin osittaisderivaatat ovat $D_1u(z_0)$, $D_2u(z_0)$, $D_1v(z_0)$ ja $D_2v(z_0)$, ja saadaan

$$f'(z_0) = D_1u(z_0) + iD_1v(z_0), \tag{36.1}$$

$$f'(z_0) = D_2v(z_0) - iD_2u(z_0), \tag{36.2}$$

ja

$$D_1u(z_0) = D_2v(z_0), \qquad D_1v(z_0) = -D_2u(z_0),$$

eli

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Todistus. Huomautuksen 35.1(a) mukaan

$$f(z) - f(z_0) = (z - z_0)f^*(z), \tag{36.3}$$

missä $\quad f^*(z_0) = f'(z_0)$.

Sijoittaen $f^*(z) = A(z) + iB(z)$, $\quad z_0 = a + ib$, $\quad z = x + iy$, missä $A(z)$ ja $B(z)$ ovat reaalisia ja

$$A(z) \to A(z_0), \qquad B(z) \to B(z_0), \qquad \text{kun} \qquad z \to z_0.$$

Koska

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y) \qquad \text{ja} \qquad f(z_0) = u(a,b) + iv(a,b),$$

niin sijoittamalla ne yhtälöön (36.3) saadaan

$$\begin{aligned} &u(x,y) + iv(x,y) - u(a,b) - iv(a,b) \\ &\qquad = (x + iy - a - ib)[A(x+iy) + iB(x+iy)]. \end{aligned} \tag{36.4}$$

Sijoitetaan $y = b$ yhtälöön (36.4) ja kirjoitetaan:

$$u(x,b) - u(a,b) + i[v(x,b) - v(a,b)] = (x-a)A(x+ib) + i(x-a)B(x+ib),$$

ja

$$u(x,b) - u(a,b) = (x-a)A(x+ib), \qquad v(x,b) - v(a,b) = (x-a)B(x+ib).$$

Jaetaan viimeinen yhtälö $(x-a)$:llä ja saadaan:

$$\frac{u(x,b) - u(a,b)}{x-a} = A(x+ib), \qquad \frac{v(x,b) - v(a,b)}{x-a} = B(x+ib).$$

Kun x lähestyy a:ta eli $x \to a$ saadaan:

$$D_1u(z_0) = A(z_0), \qquad D_1v(z_0) = B(z_0).$$

Koska

$$f^*(z_0) = A(z_0) + iB(z_o) \qquad \text{ja} \qquad f^*(z_0) = f'(z_0),$$

niin

$$f'(z_0) = A(z_0) + iB(z_o) = D_1u(z_0) + iD_1v(z_0),$$

mistä yhtälö (36.1) seuraa.

Nyt haluamme todistaa yhtälön (36.2). Sitä varten sijoitamme $x = a$ yhtälöön (36.4), sitten jaetaan niiden tulokset $(y-b)$:llä ja viime kädessä $y \to b$, joten

$$u(a,y) - u(a,b) = -(y-b)B(a+iy), \qquad v(a,y) - v(a,b) = (y-b)A(a+iy).$$

Kun jaetaan yhtälöt $(y-b)$:llä ja $y \to b$, niin

$$D_2u(z_0) = -B(z_0), \qquad D_2v(z_0) = A(z_0).$$

Koska

$$f^*(z_0) = A(z_0) + iB(z_o) \qquad \text{ja} \qquad f^*(z_0) = f'(z_0),$$

niin

$$f'(z_0) = D_2v(z_0) - iD_2u(z_0).$$

Lopuksi saadaan:

$$D_1u(z_0) = D_2v(z_0), \qquad D_1v(z_0) = -D_2u(z_0).$$

□

Esimerkki 36.1. Olkoon $f(z) = R_e z$ määrittelty joukossa $S = \mathbb{C}$. Tutki lauseen 36.1 asiantilaa.

Ratkaisu. Koska

$$f(z) = u(z) + iv(z) = u(x,y) + iv(x,y), \qquad z = x + iy,$$

niin

$$u(x,y) = x, \qquad v(x,y) = 0,$$

ja

$$D_1u(x,y) = 1, D_2v(x,y) = 0 \Longrightarrow D_1u(x,y) \neq D_2v(x,y).$$

Toisaalta

$$D_2u(x,y) = 0, \qquad D_1v(x,y) = 0,$$

joten lause 36.1 ei päde funktioon f.

Esimerkki 36.2. Tutki Cauchyn–Riemannin yhtälöiden voimassaoloa, kun funktiona on $f(z) = z^3$.

Ratkaisu. Koska $z = x + iy$, niin

$$\begin{aligned} f(z) = z^3 &= (x+iy)^3 \\ &= x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3). \end{aligned}$$

Siis

$$u(x,y) = x^3 - 3xy^2, \qquad v(x,y) = 3x^2y - y^3.$$

Toisaalta

$$D_1u(x,y) = 3x^2 - 3y^2 \qquad D_1v(x,y) = 6xy,$$

samoin

$$D_2u(x,y) = -6xy \qquad D_2v(x,y) = 3x^2 - 3y^2,$$

joten

$$D_1u(x,y) = D_2v(x,y) \qquad \text{ja} \qquad D_1v(x,y) = -D_2u(x,y),$$

lopuksi Cauchyn–Riemannin lause pätee funktioon f.

Lause 36.2. *Ks. [1, s. 119]*

Olkoon funktio $f = u + iv$ derivoituva jokaisessa pisteessä avoimessa kiekossa D, jonka keskipiste on (a, b). Jos jokainen u, v ja $|f|$ on vakio joukossa D, niin f on vakio joukossa D. Samoin f on vakio, jos $f'(z) = 0$ kaikilla $z \in D$.

Todistus. Oletetaan, että u on vakio D:ssä. Cauchyn-Riemannin mukaan $D_2 v = D_1 v = 0$. Käyttaen kaksi kertaa yksiulotteista väliarvolausetta jossakin y':ssa b:n ja y:n välissä saadaan:

$$v(x, y) - v(x, b) = (y - b)D_2 v(x, y') = 0.$$

Jossakin x':ssa a:n ja x:n välissä saadaan:

$$v(x, b) - v(a, b) = (x - a)D_1 v(x', b) = 0.$$

Ylhäällä olevasta yhtälöstä saadaan:

$$v(x, y) = v(x, b), \qquad v(x, b) = v(a, b),$$

joten

$$v(x, y) = v(a, b),$$

ja v on vakio D:ssä.

Samoin voidaan todistaa, että u on vakio, jos v on vakio.

Nyt oletamme, että $|f|$ on vakio, jolloin $|f|^2 = u^2 + v^2$ on vakio D:ssä ja osittaisderivaatan perusteella

$$uD_1 u + vD_1 v = 0, \tag{36.5}$$

$$uD_2 u + vD_2 v = 0. \tag{36.6}$$

Cauchyn–Riemannin lauseen nojalla voidaan kirjoittaa:

$$D_1 u = D_2 v, \qquad D_1 v = -D_2 u,$$

ja

$$vD_1 u = vD_2 v, \qquad uD_1 v = -uD_2 u.$$

Vähennetään viimeiset yhtälöt toisistaan ja saadaan:

$$vD_1 u - uD_1 v = vD_2 v + uD_2 u.$$

Koska yhtälön (36.6) perusteella oikea puoli on yhtä kuin nolla, niin

$$vD_1 u - uD_1 v = 0. \tag{36.7}$$

Yhtälöiden (36.5) ja (36.7) avulla jättäen $D_1 v$ pois, saadaan:

$$(u^2 + v^2)D_1 u = 0.$$

Jos $u^2 + v^2 = 0$, niin $u = v = 0$, joten $f = 0$. Jos $u^2 + v^2 \neq 0$, niin $D_1 u = 0$ ja u on vakio, joten f on vakio.

Lopuksi jos $f' = 0$, molemmat osittaisderivaatat $D_1 v$ ja $D_2 v$ ovat nollia D:ssä. Samoin tulee todistetuksi, että f on vakio D:ssä. □

Huomaa! Lauseen 36.1 perusteella funktion f derivaatan olemassaolo pisteessä c merkitsee osittaisderivaattojen D_1u, D_2u, D_1v ja D_2v olemassaoloa pisteessä c ja Cauchyn-Riemannin yhtälöiden pätemistä funktioon. Mutta osittaisderivaattojen olemassaolo pisteessä c ja Cauchyn-Riemannin yhtälöiden päteminen funktioon ei merkitse funktion derivaatan olemassaoloa pisteessä c.

Esimerkki 36.3. Olkoon $f = u + iv$, missä

$$u(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3-y^3}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

$$v(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Ensin tarkastellaan Cauchyn-Riemannin yhtälöä pisteessä $(0,0)$ ja sitten tutkitaan funktion f derivaattaa pisteessä $(0,0)$.

Ratkaisu.

I.

$$D_1u(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{u(0+h,0)-u(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^3/h^2 - 0}{h} = h/h = 1,$$

$$D_2u(0,0) = \lim_{k\to 0} \frac{u(0,0+k)-u(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{-k^3/k^2 - 0}{k} = -k/k = -1.$$

Samoin saadaan

$$D_1v(0,0) = 1, \qquad D_2v(0,0) = 1.$$

Siis

$$D_1u(0,0) = D_2v(0,0) \qquad D_1v(0,0) = -D_2u(0,0),$$

ja Cauchyn-Riemannin yhtälöt pätevät funktioon.

II. Sijoitamme $x = 0$ funktioon $f = u + iv$ ja saadaan:

$$f(z) = -y + iy, \qquad z = iy, \qquad f(0) = 0.$$

Siis

$$\frac{f(z)-f(0)}{z-0} = \frac{-y+iy}{iy} = 1 + i.$$

Sijoittaen $y = x$ funktioon $f = u + iv$ saamme:

$$f(z) = ix, \qquad z = x + ix, \qquad f(0) = 0.$$

Siis

$$\frac{f(z)-f(0)}{z-0} = \frac{ix}{x+ix} = \frac{1+i}{2},$$

joten funktio f ei ole derivoituva pisteessä $(0,0)$.

37 Harjoitustehtäviä

1. Osoitetaan, että funktio f on derivoituva kaikilla x:llä paitsi kun $x = 1$ ja $x = 0$, kun
$$f(x) = |x| + |x - 1|.$$

2. Laske funktion f derivaatta pisteessä $x = 0$, kun
$$f(x) = x^2|x|.$$

3. Osoitettava, että funktio f on derivoituva pisteessä $x = 0$, mutta $\lim_{x\to 0} f'(x) \neq f'(0)$ (f' ei ole jatkuva pisteessä $x = 0$), kun
$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(1/x), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

4. Näytettävä, että jos $0 < \alpha < \beta < \pi/2$, on olemassa $\theta \in (\alpha, \beta)$ siten, että:
$$\frac{\sin\beta - \sin\alpha}{\cos\beta - \cos\alpha} = -\cot\theta.$$

5. Tutkittava, että päteekö Rollen lause alla oleviin funktioihin.
   (a) $f(x) = x^3 - 4x$ välillä $[-2, 2]$,
   (b) $f(x) = (x - a)^m(x - b)^n$, $x \in [a, b]$, $m, n \in \mathbb{N}$,
   (c) $f(x) = 1 - (x - 1)^{2/3}$ välillä $[0, 2]$.

6. Osoitettava, että jos $0 < u < v$, niin
$$\frac{v - u}{1 + v^2} < \tan^{-1} v - \tan^{-1} u < \frac{v - u}{1 + u^2}.$$

7. Olkoon funktiolla f, f' ja f'' välillä $[a, b]$. Oletetaan,että $f(a) = f(b) = 0$ ja pisteessä $c \in [a, b]$, $f(c) > 0$.

   Todista, että on olemassa $\delta \in (a, b)$ siten, että $f''(\delta) < 0$.

   Ohje: käytä funktiossa f väliarvolausetta jokaisella välillä $[a, c]$ ja $[c, b]$.

8. Olkoon f'' jatkuva välillä $[a, b]$. Osoita, että:
$$f(c) - f(a)\frac{b - c}{b - a} - f(b)\frac{c - a}{b - a} = \frac{1}{2}(c - a)(c - b)f''(\delta), \qquad \delta, c \in [a, b].$$

   Ohje: Määrittele
$$\varphi(x) = (b-a)f(x) - (b-x)f(a) - (x-a)f(b) - (1/2)(b-a)(x-a)(x-b)A.$$

   $\varphi(x)$:ssä A on luku siten, että $c \in (a, b)$, $\varphi(c) = 0$.

9. Todista lause:

   Olkoot f:lla ja g:llä n-asteen derivaatta välillä (a, b) ja

   $$f(c) = f'(c) = \cdots = f^{(n-1)}(c) = 0,$$

   ja myös

   $$g(c) = g'(c) = \cdots = g^{(n-1)}(c) = 0,$$

   jollakin sisäpisteellä c välillä (a, b), mutta $g^{(n)}(x)$ ei ole koskaan nolla. Tällöin

   $$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}.$$

   (Huomaa! Ei oleteta, että $f^{(n)}$ ja $g^{(n)}$ ovat jatkuva.)

   Vihje: Merkitään

   $$F(x) = f(x) - \frac{(x-c)^{n-1} f^{(n-1)}(c)}{(n-1)!},$$

   ja

   $$G(x) = g(x) - \frac{(x-c)^{n-1} g^{(n-1)}(c)}{(n-1)!}.$$

   Sen jälkeen käytetään lauseen 13.2 tulosta.

10. Näytettävä,että voidaan kirjoittaa väliarvolause näin:

    $$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x + \theta h).$$

    Jos $0 < \theta < 1$, laske θ x:n ja h:n funktiona, kun:

    a) $f(x) = x^2$, b) $f(x) = e^x$, c) $f(x) = x^3$.

11. Löydettävä pisteet, joissa funktio ei ole derivoituva, kun

    a) $f(x) = \sin|x|$, b) $f(x) = e^{|x|}$,
    c) $f(x) = |x| + |x-1|$, d) $f(x) = |\sin x|$,
    e) $f(x) = |x^2 - 1|$, f) $f(x) = |x^3 - 8|$.

12. Olkoot funktio f pisteessä a, funktio g pisteessä $f(a)$ ja funktio h pisteessä $(g \circ f)(a)$ derivoituvia. Löydettävä $(h \circ g \circ f)'(a)$ ja sitten todistettava se.

13. Tutki, että päteekö väliarvolause alla olevaan funktioon annetulla välillä.

    Jos väliarvolause pätee, näytä piste c, jossa alla oleva yhtälö pätee:

    $$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c).$$

    Jos väliarvolause ei päde, esitettävä miksi se ei päde.

    a) $f(x) = x^2 \quad x \in [-1, 2]$, b) $f(x) = 1/x \quad x \in [-1, 1]$,
    c) $f(x) = \sin x \quad x \in [0, \pi]$, d) $f(x) = 1/x \quad x \in [1, 3]$,
    e) $f(x) = |x| \quad x \in [-1, 2]$, f) $f(x) = \cos x \quad x \in [0, \pi]$.

14. Laske raja-arvot Hopitalin lauseen nojalla, kun

    a) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$, b) $\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x^2}$,
    c) $\lim_{x\to 0^+} \frac{\log x}{x}$, d) $\lim_{x\to \infty} \frac{x^2}{e^{3x}}$,
    e) $\lim_{x\to 0^+} x^x$, f) $\lim_{x\to \infty} x^{(1/x)}$,
    g) $\lim_{x\to 0^+} x \log x$, h) $\lim_{x\to \infty} (1 - \frac{1}{x})^x$.

15. Todista jonkin Taylorin muodon perusteella, että:

    $$C(x_1 + x_2) = C(x_1)C(x_2) - S(x_1)S(x_2),$$

    $$S(x_1 + x_2) = S(x_1)C(x_2) + C(x_1)S(x_2),$$

    ($C(x) = \cos x$ ja $S(x) = \sin x$).

16. Olkoon funktio f vektorifunktio ja olkoon se derivoituva jokaisessa pisteessä välillä (a, b) ja olkoon sen normi $\|f\|$. Todista, että

    $$\boldsymbol{f}(t)\boldsymbol{f'}(t) = 0 \qquad t \in (a, b).$$

17. Olkoon f määritelty $\mathbb{R}^2$:ssä seuraavasti:

    $$f(x,y) = \begin{cases} y\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

    Laske ensimmäisen ja toisen asteen osittaisderivaatta pisteessä $(0, 0)$, jos ne ovat olemassa.

18. Osoitettava, että funktiolla f on osittaisderivaatta pisteessä $(0,0)$, mutta se ei ole jatkuva siinä pisteessä, kun

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

19. a) Jos

$$f(x,y) = \sqrt{|xy|},$$

laske $f_x(0,0)$ ja $f_y(0,0)$.

b) Jos

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3-y^3}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

laske $f_x(0,0)$, $f_y(0,0)$, f_x ja f_y.

20. Tutki osittaisderivaatan järjestyksen muutos xysta yx:ään alla olevassa funktiossa pisteessä $(0,0)$.

a) $f(x,y) = e^x(\cos y + x \sin y)$, b) $f(x,y) = |x^2 - y^2|$.

Viitteet

[1] Tom M. Apostol. *Mathematical Analysis.* Second edition.

California Institute of Technology. Addison-Wesley Publishing Company, 1974.

[2] T. M. Flett, Sc.D. *Mathematical Analysis.*

McGraw-Hill Publishing Company Limited London, 1966.

[3] S.C. Malik & Savita Arora. *Mathematical Analysis.*

Persiankielen käännös: Ismaeil Rzaei Hagigi. *Analiz Riazi.*

Tabriz: Tabriz University 1383_H(2004).

[4] Kenneth A. Ross. *Elementary Analysis: The theory of calculus.*

Persiankielinen käännös: Dr. Bahman Honary, Dr. Fatameh Ghane, Dr. SHirin Hejazian. *Analiz moqaddemati: Nazariehe hesaban.*

Mashhad Emamraza University 1381_H(2002).

[5] Walter Rudin, *Principles of Mathematical Analysis.* 3rd ed.

Persiankielinen käännös: Dr. Aliakber Aalemzadeh. *Osool analiz riazi.*

Tehran Entasharat Elmi wa Fanni 1384_H(2005).

[6] Louis Leithold, *The calculus with analytic geometry.*

Persiankielinen käännös: Dr. Mahdi Behzad, Dr. Mohsen Razaqi, Siamak Kazemi, Eslam Nazami. *Hesaban defarancial wa antigaral wa hendasahe tahlili.*

Tehran University: Markaz Nashr Daneshgahi 1383_H(2004).