TAMPEREEN YLIOPISTO
Pro gradu -tutkielma

Milja Mäkelä

Laplace-muunnoksesta

Matematiikan, tilastotieteen ja filosofian laitos
Matematiikka
Toukokuu 2006

Tampereen yliopisto

Matematiikan, tilastotieteen ja filosofian laitos

MÄKELÄ, MILJA: Laplace-muunnoksesta

Pro gradu -tutkielma, 43 s.

Matematiikka

Toukokuu 2006

TIIVISTELMÄ

Tämä on tutkielma Laplace-muunnoksesta. Laplace-muunnoksella on integraalimuunnoksena monia käytännön sovelluksia matematiikassa ja fysiikassa ja se tarjoaa erittäin käyttökelpoisen vaihtoehdon esimerkiksi differentiaaliyhtälöiden ratkaisuun. Perusidea muunnoksen takana on yksinkertainen: muunnetaan vaikea ratkaistavana oleva ongelma muunnoksen avulla helpommin ratkaistavaksi, jolloin uuden ongelman ratkaisu voidaan käänteisen muunnoksen avulla muuntaa takaisin alkuperäisen ongelman ratkaisuksi.

Tutkielmassa esitetään Laplace-muunnoksen määritelmä, sekä tärkeimmät ominaisuudet ja tulokset muunnosta koskien. Kiinnostuksen kohteena on kompleksinen muunnos, jolla on paremmat käytännön sovellusmahdollisuudet, kuin sen reaalisella vastineella. Ensimmäisessä luvussa listataan tarvittavat esitiedot ja painotus on nimenomaan välittömästi tutkielman aiheen perustan muodostavalla teorialla. Topologian ja kompleksianalyysin perusteet jätetäänkin lukijan taitojen varaan. Toinen luku aloittaa varsinaisen aiheen, eli Laplace-muunnoksen käsittelyn. Tässä luvussa esitetään muunnoksen määritelmä ja tärkeimmät ominaisuudet, sekä havainnollistetaan lukijalle muunnoksen olemusta esimerkkien avulla. Kolmas luku omistetaan käänteiselle Laplace-muunnokselle ja luvun kuluessa lukijalle esitetään monia eri tapoja käänteismuunnoksen löytämiseksi. Suuren osan luvusta muodostaa käänteisen muunnoskaavan johtaminen, jossa tarvittava Fourier'n integraali johdetaan myös. Viimeinen luku käsittelee muunnoksen sovelluksia ja sitoo yhteen aiemmissa kappaleissa esitetyn teorian havainnollistamalla esimerkkien avulla muunnoksen käyttöä ja merkitystä matematiikassa. Päälähteenä tutkielmassa on käytetty H.A. Priestleyn kirjaa Introduction to Complex Analysis ja käänteismuunnoskaavan todistus noudattelee M.G. Smithin kirjaa Laplace Transform Theory.

asiasanat: kompleksianalyysi, Laplace-muunnos

Sisältö

Johdanto

Laplace-muunnos on Fourier-muunnoksen rinnalla ehkä käyttökelpoisin integraalimuunnos. Nämä kaksi muunnosta ovatkin hyvin lähellä toisiaan ja Laplace-muunnoksen voidaan ajatella olevan eräs Fourier-muunnoksen erikoistapaus. Tässä tutkielmassa esitetään Laplace-muunnoksen tärkeimmät ominaisuudet ja havainnollistetaan lukijalle muunnoksen hyödyllisyyttä ja käyttöä.

Laplace-muunnos on erittäin käyttökelpoinen monissa fysiikan ja matematiikan sovelluksissa. Muunnos yksinkertaistaa esimerkiksi differentiaaliyhtälöiden ratkaisua. Idea muunnoksen menestyksen takana on yksinkertainen: muunnetaan ratkaistavana oleva yhtälö Laplace-muunnoksen avulla helpommin ratkaistavaksi yhtälöksi ja ratkaistaan se, jolloin soveltamalla käänteismuunnosta ratkaisuun saadaan vastaus alkuperäiseen ongelmaan. Tässä tutkielmassa keskitytään Laplace-muunnoksen teoriaan ja ominaisuuksiin, vaikkakin luvussa 4 käydään lyhyesti esimerkkien kautta läpi Laplace-muunnoksen sovellusmahdollisuuksia. Sovellusten esittely on melkeinpä välttämätöntä, kun ottaa huomioon Laplace-muunnoksen hyvin käytännönläheisen luonteen.

Lukijalta edellytetään topologian ja kompleksianalyysin perusteiden tuntemista ja vaikka jotkin jatkon kannalta keskeiset merkinnät esitelläänkin kappaleessa 1, niin monet yleisesti vakiintuneet merkinnät jätetään lukijan taitojen varaan. Päälähteenä tutkielmassa on käytetty Priestleyn kirjaa *Introduction to Complex Analysis* [4].

Luvussa 1 esitetään lyhyesti ne määritelmät ja lauseet, joita tarvitaan Laplace-muunnoksen ja sen ominaisuuksien käsittelyssä. Siinä keskitytään erityisesti niiden tulosten esittelyyn, jotka mahdollisesti putoavat kompleksianalyysin peruskurssin ja tämän tutkielman aihepiirin väliin.

Luku 2 omistetaan Laplace-muunnoksen esittelylle. Se aloitetaan muunnoksen määritelmällä, sekä pohdinnalla siitä, millaisten funktioiden Laplace-muunnos on olemassa. Luvun lopussa käydään läpi Laplace-muunnoksen tärkeimpiä ominaisuuksia, sekä havainnollistetaan ideaa esimerkkien avulla.

Laplace-muunnoksen esittelyn jälkeen on luonnollista esitellä käänteinen Laplace-muunnos, kuten tehdään myös tässä. Luvussa 3 paneudutaan erilaisiin keinoihin, joiden avulla on mahdollista löytää vastaus alkuperäiseen ongelmaan, kun muunnoksen ratkaisu tiedetään. Käänteismuunnoskaavan johtaminen muodostaakin olennaisen osan luvun kokonaisuudesta.

Viimeisessä luvussa eli luvussa 4 sovelletaan edellisissä kappaleissa esiteltyä teoriaa varsinaisten ongelmien ratkaisuun ja lukuisten esimerkkien avulla havainnollistetaan Laplace-muunnoksen käyttökelpoisuutta matemaattisten ongelmien ratkaisussa. Luvun esimerkit ovat puhtaasti matemaattisia, mutta kuitenkin esimerkiksi fysikaalisten ongelmien ratkaisumenettely ei olennaisesti eroa luvun esimerkeistä.

1 Tarvittavia esitietoja

Laurentin kehitelmällä on keskeinen merkitys Laplace-muunnoksen kannalta, joten aloitetaan sen esittelyllä.

Lause 1.1 (Laurentin kehitelmä)**.** *Olkoon* $A = \{z \in \mathbb{C} : R <\mid z - a \mid< S\}$*, missä* $0 \leq R < S \leq \infty$*, ja olkoon funktio* f *holomorfinen joukossa* A*. Merkitään jatkossa* $f \in H(A)$*. Tällöin*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n \qquad (z \in A),$$

missä

$$c_n = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int\limits_{\gamma} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}\, dw,$$

kun γ *on polku, joka muodostuu* a*-keskipisteisestä ja* r*-säteisestä ympyrästä. Merkitään tällöin* $\gamma = \gamma(a;r)\,(R < r < S)$*. Lisäksi* γ *voi olla mikä tahansa sulkeutuva polku, joka on homotooppinen ympyräkehän* $\gamma(a;r)$ *kanssa.*

Todistus. Ks. [4, s. 196]. □

Funktion Laurentin kehitelmä on yksikäsitteinen.

Määritelmä 1.1. Funktiolla $f(z) = h(z)/k(z)$ on kertalukua m oleva *napa* pisteessä a, jos löytyy sellainen $r > 0$, että

i) funktiot h ja k ovat holomorfisia r-säteisessä kiekossa, jonka keskipiste on a, eli $h, k \in H(D(a;r))$,

ii) $h(a) \neq 0$,

iii) funktiolla k on kertalukua m oleva nollakohta pisteessä a, eli $k(a) = k'(a) = \ldots = k^{(m-1)}(a) = 0$ ja $k^m(a) \neq 0$, sekä $k(z) = (z-a)^m g(z)$, missä g on holomorfinen puhkaistussa a-keskipisteisessä ja r-säteisessä kiekossa (merkitään $g \in H(D'(a;r))$) ja $g(a) \neq 0$.

Määritelmä 1.2. Oletetaan, että funktiolla f on kertalukua m oleva napa pisteessä a. Napa on *yksinkertainen*, jos $m = 1$, ja muuten se on *moninkertainen*. Napa on *näkyvä* (engl. overt), jos se on välittömästi nähtävissä funktiosta f. Tällöin $f(z) = (z-a)^{-m} g(z)$, missä $g \in H(D'(a;r))$ jollakin $r > 0$ ja $g(a) \neq 0$. Muutoin napa on *piilotettu* (engl. covert).

Määritelmä 1.3. Polku, jonka kuva on pisteestä u pisteeseen v kulkeva jana, missä $u, v \in \mathbb{C}$, määritellään funktiona

$$\gamma(t) = (1-t)u + tv, \quad \text{missä } t \in [0,1].$$

Janalle kuuluvat pisteet voidaan puolestaan määritellä joukkona

$$\gamma^*(t) = \{\gamma(t) \mid t \in [0,1]\}.$$

Samoin positiivisesti tai negatiivisesti suunnistettu ympyrän kaari voidaan määritellä funktion

$$\gamma(t) = a + r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}, \quad t \in [\theta_1, \theta_2]$$

avulla, kun $a \in \mathbb{C}$, $r > 0$ ja $0 \leq \theta_1 - \theta_2 \leq 2\pi$. Kaarelle kuuluvat pisteet voidaan määritellä joukkona

$$\gamma^*(t) = \{\gamma(t) \mid t \in [\theta_1, \theta_2]\}.$$

Kaarimonikulmio (engl. contour) on äärellisen monesta edellämainitun tyyppisestä polusta koostuva yksinkertainen umpinainen polku.

Apulause 1.2 (ks. [4, s. 211])**.** *Olkoon γ positiivisesti suunnistettu kaarimonikulmio. Oletetaan, että funktio f on holomorfinen sekä kaarimonikulmion γ sisäpisteissä että käyrällä lukuunottamatta sisäpistettä a, missä funktiolla f on kertalukua m oleva napa. Olkoon*

$$f(z) = \sum_{n=-m}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

funktion f Laurentin kehitelmä pisteen a ympäristössä. Tällöin

$$\int_\gamma f(z)\, dz = 2\pi \mathrm{i} c_{-1}.$$

Todistus. Lauseen 1.1, mukaan

$$c_n = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_\gamma \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}\, dw,$$

jolloin

$$c_{-1} = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_\gamma f(w)\, dw,$$

mistä seuraa väite. □

Määritelmä 1.4. Oletetaan, että funktio f on holomorfinen pisteen a puhkaistussa ympäristössä. Oletetaan vielä, että funktiolla f on napa pisteessä a. Tällöin funktion f Laurentin kehitelmän potenssin $(z-a)^{-1}$ kerroin c_{-1} on funktion f *residy* pisteessä a (merkitään $\mathrm{res}\{f(z); a\}$).

Lause 1.3 (residylause)**.** *Olkoon f holomorfinen positiivisesti suunnistetun kaarimonikulmion γ käyrällä ja sisäpisteissä lukuunottamatta kaarimonikulmion γ sisäpisteisiin kuuluvia äärellistä määrää olevia napoja $a_1, \dots, a_N$. Tällöin*

$$\int_\gamma f(z)\, dz = 2\pi \mathrm{i} \sum_{k=1}^{N} \operatorname{res}\{f(z); a_k\}.$$

Todistus. Ks. [4, s. 211]. □

Olennainen osa residylauseen käyttöä on residyn laskeminen, johon paneudutaan seuraavaksi. Residyn määritelmän mukaisesti voidaan etsiä funktion Laurentin kehitelmä navan ympäristössä, jolloin kerroin c_{-1} on kyseinen residy, mutta laskemista kuitenkin helpottaa suuresti seuraava tulos.

Lause 1.4 (residyn laskeminen yksinkertaisessa navassa)**.** *Oletetaan että $f \in H(D(a;r))$ ja että funktiolla f on yksinkertainen napa pisteessä a. Tällöin*

i) funktion $f(z) = g(z)/(z-a)$ residy näkyvässä yksinkertaisessa navassa a on $\operatorname{res}\{f(z); a\} = g(a)$ ja

ii) funktion $f(z) = h(z)/k(z)$ residy piilotetussa yksinkertaisessa navassa a on $\operatorname{res}\{f(z); a\} = h(a)/k'(a)$, kun $h, k \in H(D(a;r))$, $h(a) \neq 0$, $k(a) = 0$ ja $k'(a) \neq 0$.

Todistus (vrt. [4, s. 214]). Kirjoitetaan $f(z)$ muodossa $\sum_{n=-1}^{\infty} c_n (z-a)^n$ kiekossa $D'(a;r)$. Tällöin $\lim_{z\to a} f(z) = c_{-1}/(z-a) + c_0$, eli

$$\operatorname{res}\{f(z); a\} = \lim_{z\to a} (z-a) f(z). \tag{1.1}$$

Nyt kohdassa i) funktio $f(z) = g(z)/(z-a)$, jolloin sijoittamalla se yhtälöön 1.1 saadaan väitetty tulos. Samoin kohdan ii) tulos saadaan sijoittamalla $f(z) = h(z)/k(z)$ yhtälöön 1.1, jolloin

$$\operatorname{res}\{f(z); a\} = \lim_{z\to a} (z-a) \frac{h(z)}{k(z)} = h(a) \lim_{z\to a} \frac{z-a}{k(z)-k(a)} = \frac{h(a)}{k'(z)}.$$

Funktio $k(z)$ saatiin korvata erotuksella $k(z) - k(a)$, sillä $\lim_{z\to a} k(z) = 0 = 0 - 0 = \lim_{z\to a} k(z) - \lim_{z\to a} k(a) = \lim_{z\to a}(k(z) - k(a))$. □

Lause 1.5. *Olkoon funktiolla f kertalukua $m > 1$ oleva näkyvä napa pisteessä a. Siis $f(z) = g(z)/(z-a)^m$, missä $g \in H(D(a;r))$ ja $g(a) \neq 0$. Tällöin*

$$\operatorname{res}\{f(z); a\} = \frac{1}{(m-1)!} g^{(m-1)}(a).$$

Todistus (vrt. [4, s. 214]). Cauchyn integraalikaavan yleistyksen [4, s. 154] mukaan

$$
\begin{aligned}
g^{(m-1)}(a) &= \frac{(m-1)!}{2\pi \mathrm{i}} \int\limits_{\gamma(a;r/2)} \frac{g(z)}{(z-a)^m}\, dz \\
&= \frac{(m-1)!}{2\pi \mathrm{i}} \int\limits_{\gamma(a;r/2)} f(z)\, dz \\
&= \frac{(m-1)!}{2\pi \mathrm{i}} 2\pi \mathrm{i} c_{-1} \\
&= \operatorname{res}\{f(z); a\}(m-1)!.
\end{aligned}
$$

□

Residyn laskemiseksi piilotetussa moninkertaisessa navassa ei ole olemassa selkeää kaavaa, vaan silloin funktio tulee kehittää navan ympäristössä Laurentin kehitelmäksi tai sitten funktio pitää sieventää siten, että napa muuntuu näkyväksi.

Määritelmä 1.5. Reaalivälillä määritelty kompleksifunktio f on *sileä* (engl. smooth), jos sillä on jatkuva derivaatta sen määrittelyvälillä. Edelleen funktio f on *paloittain sileä* (engl. piecewise smooth), jos funktiot f ja f' ovat paloittain jatkuvia jokaisella funktion määrittelyvälin suljetulla ja rajoitetulla osavälillä.

2 Laplace-muunnos

Laplace-muunnos on eräs integraalimuunnos. Integraalimuunnoksilla on monia fysiikan sovelluksia, eikä Laplace-muunnos ole poikkeus. Pierre-Simon Laplace oli kiinnostunut kehittämään matemaattisia työkaluja fysiikan ongelmien ratkaisemiseksi ja nimenomaan tähän kategoriaan myös Laplace-muunnos sopii hyvin. Muunnoksen idea on, että vaikea ratkaistavana oleva ongelma muunnetaan Laplace-muunnoksen avulla helpommin ratkaistavaksi ongelmaksi. Kun on saatu ratkaisu tähän muunnokseen, voidaan käänteisen Laplace-muunnoksen avulla löytää vastaus alkuperäiseen ongelmaan. Tässä luvussa keskitytään Laplace-muunnoksen ominaisuuksiin ja määritelmiin, kun taas käänteinen muunnos jätetään seuraavan luvun aihepiiriin.

Määritelmä 2.1. Olkoon f kompleksifunktio, joka on määritelty muuttujan t arvoilla $[0, \infty)$. Tällöin määritellään, että

$$\mathfrak{L}[f(t)] = \int_0^\infty f(t)\mathrm{e}^{-pt}\,dt = F(p),$$

on funktion f *Laplace-muunnos*, kun $p \in \mathbb{C}$, jos integraali on olemassa.

Tilanteesta riippuen funktion f muunnoksesta on usein selkeämpää käyttää merkintää $\mathfrak{L}[f(t)]$ matemaattisesti oikean merkinnän $(\mathfrak{L}f)(t)$ sijaan. Tämän vuoksi tässä tutkielmassa sallitaan Priestleyn [4, s. 257] tapaan epäkorrekti merkintä $\mathfrak{L}[f(t)]$.

Määritelmässä muunnettava funktio f on siis muuttujan t funktio, joka muunnetaan muuttujan p funktioksi Laplace-muunnoksen avulla. Tutkielmassa tullaan noudattamaan tämän määritelmän merkintätapaa, jolloin muunnettavaa funktiota merkitään pienellä kirjaimella ja sen muunnosta puolestaan vastaavalla suurella kirjaimella.

Laplace-muunnoksen pohjaksi voidaan ottaa joko Riemannin tai Lebesguen integraali. Siis myös epäoleellisen Riemannin integraalin on oltava olemassa tulofunktiolle $f(t)\mathrm{e}^{-pt}$, jotta funktion $f(t)$ Laplace-muunnos olisi olemassa. Tässä tutkielmassa integraali tarkoittaa Riemannin integraalia, mutta samoihin tuloksiin päästään myös Lebesguen integraalin avulla, jolloin vain perustelut eroavat hieman.

Laplace-muunnoksessa muuttujan p voidaan myös määritellä olevan reaaliluku, mutta määrittelyn laajentamisella kompleksilukuihin on etuna käänteismuunnoksen löytämisen helpottuminen, sekä lisäksi kompleksimuunnos on mielekkäämpi sovellusten kannalta [3, s. 131], joten tässä tutkielmassa tullaan keskittymään ainoastaan kompleksisiin muunnoksiin.

2.1 Laplace-muunnosten olemassaolosta

Laplace-muunnos on olemassa aina kun epäoleellinen Riemannin integraali

$$\lim_{R\to\infty}\int_0^R f(t)\mathrm{e}^{-pt}\,dt$$

on olemassa eli integraali suppenee [1, s. 268].

Seuraava lause esittää tuloksen, jonka mukaan Laplace-muunnos on olemassa aina kun tietyt oletukset ovat voimassa.

Lause 2.1 (Laplace-muunnoksen olemassaolo)**.** *Oletetaan, että*

i) Funktio f on paloittain jatkuva välillä $[0,\infty)$,

ii) Funktio f toteuttaa ehdon $|f(t)| \leq M\mathrm{e}^{\alpha t}$, $t \geq T$, missä M ja T ovat positiivisia vakioita ja $\alpha \in \mathbb{R}$.

Tällöin integraali $F(p) = \int_0^\infty f(t)\mathrm{e}^{-pt}\,dt$ on olemassa, jos $\mathrm{Re}\,p > \alpha$.

Todistus (vrt. [1, s. 272]). Oletuksesta *ii)* seuraa, että

$$\left|\int_0^\infty f(t)\mathrm{e}^{-pt}\,dt\right| \leq \int_0^\infty |f(t)\mathrm{e}^{-pt}|\,dt = \int_0^\infty |f(t)|\mathrm{e}^{-\mathrm{Re}\,pt}\,dt \leq M\int_0^\infty \mathrm{e}^{-(\mathrm{Re}\,p-\alpha)t}\,dt.$$

Viimeinen integraali on olemassa, jos $\mathrm{Re}\,p - \alpha > 0$ eli $\mathrm{Re}\,p > \alpha$. □

Siis lauseen 2.1 oletukset ovat riittävä ehto Laplace-muunnoksen olemassaololle. Muunnos on olemassa eli muunnoksessa oleva integraali suppenee melko usein, sillä integraalissa oleva eksponenttifunktio vähenee hyvin nopeasti, kun $t \to \infty$. Mikäli kuitenkin funktio f kasvaa erittäin nopeasti, kuten esimerkiksi $\mathrm{e}^{\mathrm{e}^t}$, sillä ei ole Laplace-muunnosta [4, s. 258].

2.2 Laplace-muunnoksia

Seuraavaksi esitellään muutamien yleisten funktioiden Laplace-muunnoksia.

Esimerkki 2.1 (vrt. [4, s. 274, teht.], [1, s. 269, esim. 12.1])**.** Osoitetaan, että $\mathfrak{L}[1] = 1/p$. Kun $\lim_{R\to\infty}\mathrm{e}^{-pR} = 0$ eli $\mathrm{Re}\,p > 0$, niin

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}[1] &= \int_0^\infty 1\mathrm{e}^{-pt}\,dt = -\frac{1}{p}\lim_{R\to\infty}\Big/_0^R \mathrm{e}^{-pt}\\ &= -\frac{1}{p}\left(\lim_{R\to\infty}\mathrm{e}^{-pR} - \mathrm{e}^0\right) = -\frac{1}{p}(0-1)\\ &= \frac{1}{p}.\end{aligned}$$

Esimerkki 2.2 (vrt. [4, s. 274, teht.]). Osoitetaan induktion avulla, että $\mathfrak{L}[t^n] = n!/p^{n+1}$, missä $n = 1, 2, \ldots$.

1° Todistetaan ensin, että väite pätee, kun $n = 1$, jolloin

$$\mathfrak{L}[t] = \int_0^\infty t\mathrm{e}^{-pt}\,dt.$$

Kun nyt merkitään $u' = \mathrm{e}^{-pt}$ ja $v = t$, jolloin $u = -\frac{1}{p}\mathrm{e}^{-pt}$ ja $v' = 1$, niin osittaisintegroinnin mukaan

$$\int u'v\,dt = uv - \int uv'\,dt.$$

Siis

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty t\mathrm{e}^{-pt}\,dt &= \Big/_{\!0}^{\infty} -\frac{t}{p}\mathrm{e}^{-pt} - \int_0^\infty -\frac{1}{p}\mathrm{e}^{-pt}\,dt \\
&= -\frac{1}{p}\left(\lim_{R\to\infty} R\mathrm{e}^{-pR} - 0\right) + \Big/_{\!0}^{\infty} -\frac{1}{p^2}\mathrm{e}^{-pt} \\
&= -\frac{1}{p}\lim_{R\to\infty} R\mathrm{e}^{-pR} - \frac{1}{p^2}\lim_{R\to\infty}\mathrm{e}^{-pR} + \frac{1}{p^2}.
\end{aligned}$$

Nyt kun $R \to \infty$, niin $\mathrm{e}^{-pR} \to 0$, jos $\operatorname{Re} p > 0$. Samoin $R\mathrm{e}^{-pR} \to 0$, kun $\operatorname{Re} p > 0$, mikä on todistettavissa L'Hospitalin säännön (∞/∞) avulla. Siis $\mathfrak{L}[t] = 1/p^2$ [1, s. 274].

2° Tehdään induktio-oletus, että väite pätee kun $n = k$, jolloin $\mathfrak{L}[t^k] = k!/p^{k+1}$. Todistetaan, että väite pätee, kun $n = k + 1$. Tällöin

$$\mathfrak{L}[t^{k+1}] = \int_0^\infty t^{k+1}\mathrm{e}^{-pt}\,dt.$$

Ratkaistaan integraali osittaisintegroinnin avulla. Tällöin kun $u' = \mathrm{e}^{-pt}$ ja $v = t^{k+1}$ eli $u = -\frac{1}{p}\mathrm{e}^{-pt}$ ja $v' = (k+1)t^k$, niin

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty t^{k+1}\mathrm{e}^{-pt}\,dt &= -\frac{1}{p}\Big/_{\!0}^{\infty} t^{k+1}\mathrm{e}^{-pt} + \frac{k+1}{p}\int_0^\infty t^k\mathrm{e}^{-pt}\,dt \\
&= -\frac{1}{p}\lim_{R\to\infty} R^{k+1}\mathrm{e}^{-pR} + \frac{k+1}{p}\mathfrak{L}[t^k].
\end{aligned}$$

Nyt $R^{k+1}\mathrm{e}^{-pR} \to 0$, kun $R \to \infty$ ja $\operatorname{Re} p > 0$, mikä on todistettavissa L'Hospitalin säännön (∞/∞) avulla. Käyttäen lisäksi induktio-oletusta saadaan

$$\mathfrak{L}[t^{k+1}] = \frac{k+1}{p} \cdot \frac{k!}{p^{k+1}} = \frac{k+1!}{p^{(k+1)+1}}.$$

3° Väite seuraa induktioperiaatteesta.

Esimerkki 2.3 (vrt. [4, s. 274, teht.], [1, s. 269, esim. 12.2])**.** Etsitään funktion $y = \mathrm{e}^{-at}$ Laplace-muunnos, kun $a \in \mathbb{C}$. Laplace-muunnoksen määritelmän mukaan

$$\mathfrak{L}[\mathrm{e}^{-at}] = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-at}\mathrm{e}^{-pt}\,dt = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-(a+p)t}\,dt.$$

Viimeinen integraali suppenee, kun $\mathrm{Re}\,(a+p) > 0$ eli $\mathrm{Re}\,p > -\mathrm{Re}\,a$, jolloin (vrt. esim. 2.1)

$$\mathfrak{L}[\mathrm{e}^{-at}] = \frac{1}{a+p}.$$

Esimerkki 2.4 (vrt. [4, s. 274, teht.])**.** Etsitään funktion $y = \cos wt$ Laplace-muunnos, kun $w \in \mathbb{C}$. Tällöin määritelmää, Eulerin kaavaa [4, s. 81] ja esimerkkiä 2.1 käyttäen saadaan

$$\begin{aligned}
\mathfrak{L}[\cos wt] &= \int_0^\infty \cos wt\,\mathrm{e}^{-pt}\,dt = \frac{1}{2}\int_0^\infty (\mathrm{e}^{\mathrm{i}wt} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}wt})\mathrm{e}^{-pt}\,dt \\
&= \frac{1}{2}\left(\int_0^\infty \mathrm{e}^{-(p-\mathrm{i}w)t}\,dt + \int_0^\infty \mathrm{e}^{-(p+\mathrm{i}w)t}\,dt\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-\mathrm{i}w} + \frac{1}{p+\mathrm{i}w}\right) \\
&= \frac{p+\mathrm{i}w+p-\mathrm{i}w}{2(p-\mathrm{i}w)(p+\mathrm{i}w)} = \frac{p}{p^2+w^2}.
\end{aligned}$$

Muunnos on olemassa, jos molempien eksponenttifunktioiden integraalit suppenevat. Integraali

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-(p-\mathrm{i}w)t}\,dt$$

suppenee, jos $\mathrm{Re}\,(p-\mathrm{i}w) > 0$ eli $\mathrm{Re}\,p > \mathrm{Re}\,(\mathrm{i}\mathrm{Re}\,w + \mathrm{i}^2\mathrm{Im}\,w)$. Tällöin $\mathrm{Re}\,p > -\mathrm{Im}\,w$. Samoin

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-(p+\mathrm{i}w)t}\,dt$$

suppenee, jos $\mathrm{Re}\,p > \mathrm{Im}\,w$. Yhdistämällä nämä kaksi ehtoa saadaan ehto $\mathrm{Re}\,p > |\mathrm{Im}\,w|$ funktion $y = \cos wt$ Laplace-muunnoksen olemassaololle.

Muiden trigonometristen funktioiden muunnokset saadaan esimerkin 2.4 mukaisesti.

Esimerkki 2.5 (vrt. [4, s. 257])**.** Funktion $y = \sin wt$ Laplace-muunnos

$$\mathfrak{L}[\sin wt] = \frac{w}{p^2+w^2}, \qquad \text{kun } \mathrm{Re}\,p > |\mathrm{Im}\,w|.$$

2.3 Laplace-muunnoksen ominaisuuksia

Lause 2.2 (ks. [4, s. 258]). *Oletetaan, että tarvittavat Laplace-muunnokset ovat olemassa. Tällöin*

1) $\mathfrak{L}[af(t) + bf(t)] = \mathfrak{L}[af(t)] + \mathfrak{L}[bf(t)]$, *missä* $a, b \in \mathbb{C}$,

2) $\mathfrak{L}[f(t/a)] = aF(pa)$,

3) $\mathfrak{L}[\mathrm{e}^{-at}f(t)] = F(p + a)$,

4) $\mathfrak{L}[f(t - a)H(t - a)] = \mathrm{e}^{-pa}F(p)$, *missä* H *on Heavisiden funktio, joka on määritelty siten, että* $H(t) = 0$, *kun* $t < 0$, *ja* $H(t) = 1$, *kun* $t \geq 0$.

Todistus. Johdetaan jokainen lauseen 2.2 kohta erikseen.

1) Laplace-muunnoksen lineaarisuus seuraa suoraan integraalin lineaarisuudesta, jolloin

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}[af(t) + bf(t)] &= \int_0^\infty (af(t) + bf(t))\, dt = a \int_0^\infty f(t)\, dt + b \int_0^\infty f(t)\, dt \\ &= a\mathfrak{L}[f(t)] + \mathfrak{L}[af(t)],\end{aligned}$$

kun $a, b \in \mathbb{C}$.

2) Laplace-muunnoksen määritelmän mukaan

$$\mathfrak{L}[f(t/a)] = \int_0^\infty f(t/a)\mathrm{e}^{-pt}\, dt.$$

Tehdään sijoitus $u = t/a$, jolloin

$$\int_0^\infty f(t/a)\mathrm{e}^{-pt}\, dt = a \int_0^\infty f(u)\mathrm{e}^{-pau}\, du = aF(pa).$$

Vrt. [1, s. 278].

3) Suoraan Laplace-muunnoksen määritelmän mukaan

$$\mathfrak{L}[\mathrm{e}^{-at}f(t)] = \int_0^\infty f(t)\mathrm{e}^{-at}\mathrm{e}^{-pt}\, dt = \int_0^\infty f(t)\mathrm{e}^{-(a+p)t}\, dt = F(p + a).$$

Vrt. [1, s. 277].

4) Aluksi saadaan

$$\mathfrak{L}[f(t-a)H(t-a)] = \int_0^\infty f(t-a)H(t-a)\mathrm{e}^{-pt}\,dt = \int_a^\infty f(t-a)\mathrm{e}^{-pt}\,dt.$$

Tehdään sijoitus $u = t - a$, jolloin

$$\int_a^\infty f(t-a)\mathrm{e}^{-pt}\,dt = \int_0^\infty f(u)\mathrm{e}^{-pu-pa}\,du = \mathrm{e}^{-pa}\int_0^\infty f(u)\mathrm{e}^{-pu}\,du = \mathrm{e}^{-pa}F(p).$$

Siis väite todistettu. Vrt. [1, s. 278].

□

Esimerkki 2.6 (vrt. [4, s. 274, teht. 3])**.** Todistetaan induktiolla, että

$$\mathfrak{L}[(1-\mathrm{e}^{-\alpha t})^n] = \frac{n!\alpha^n}{p(p+\alpha)\ldots(p+n\alpha)} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Selkeästi väite pätee, kun $n = 0$, sillä $\mathfrak{L}[1] = 1/p$.

1° Todistetaan, että väite pätee, kun $n = 1$. Muunnoksen lineaarisuuden nojalla

$$\mathfrak{L}[1-\mathrm{e}^{-\alpha t}] = \mathfrak{L}[1] - \mathfrak{L}[\mathrm{e}^{-\alpha t}] = \frac{1}{p} - \frac{1}{p+\alpha} = \frac{\alpha}{p(p+\alpha)}.$$

Siis väite pätee, kun $n = 1$.

2° Tehdään induktio-oletus, että väite pätee, kun $n = k$ eli

$$\mathfrak{L}[(1-\mathrm{e}^{-\alpha t})^k] = \frac{k!\alpha^k}{p(p+\alpha)\ldots(p+k\alpha)}.$$

Todistetaan, että väite pätee, kun $n = k+1$. Lineaarisuuden nojalla

$$\mathfrak{L}[(1-\mathrm{e}^{-\alpha t})^{k+1}] = \mathfrak{L}[(1-\mathrm{e}^{-\alpha t})^k] - \mathfrak{L}[\mathrm{e}^{-\alpha t}(1-\mathrm{e}^{-\alpha t})^k],$$

joka induktio-oletusta ja lausetta 2.2(3) käyttäen saadaan muotoon

$$\begin{aligned}&\frac{k!\alpha^k}{p(p+\alpha)\ldots(p+k\alpha)} - \frac{k!\alpha^k}{(p+\alpha)((p+\alpha)+\alpha)\ldots((p+\alpha)+k\alpha)}\\ &= \frac{k!\alpha^k(p+(k+1)\alpha) - k!\alpha^k p}{p(p+\alpha)\ldots(p+(k+1)\alpha)} = \frac{(k+1)!\alpha^{k+1}}{p(p+\alpha)\ldots(p+(k+1)\alpha)},\end{aligned}$$

jolloin on todistettu, että väite pätee, kun $n = k+1$.

3° Väite seuraa induktioperiaatteesta.

Jotkin muunnettavista funktioista ovat jaksollisia, jolloin $f(t) = f(t+T)$, missä T on jakson pituus. Tällaisten funktioiden muuntamisessa on apuna seuraava tulos.

Lause 2.3. *Olkoon f välillä $[0,\infty)$ määritelty jaksollinen funktio, jonka jakson pituus on T. Oletetaan vielä, että funktion f Laplace-muunnos on olemassa, kun* $\operatorname{Re} p > 0$. *Tällöin*

$$F(p) = \frac{1}{1-\mathrm{e}^{-pT}} \int_0^T f(t)\mathrm{e}^{-pt}\,dt.$$

Todistus (vrt. [4, s. 274, teht. 4], [1, s. 294]). Tutkitaan funktiota ϕ, joka rajoittaa funktion f vain yhteen jaksoon. Määritellään funktio ϕ siis seuraavasti:

$$\phi(t) = \begin{cases} f(t) & \text{kun } 0 \leq t < T, \\ 0 & \text{muualla.} \end{cases}$$

Käyttäen hyväksi Heavisiden funktiota voidaan ϕ kirjoittaa myös muodossa $\phi(t) = f(t) - H(t-T)f(t-T)$. Nyt funktion ϕ Laplace-muunnos Φ on olemassa aina kun funktion f muunnos on olemassa, jolloin

$$\Phi(p) = F(p) - \mathrm{e}^{-pT}F(p) = (1-\mathrm{e}^{-pT})F(p), \tag{2.1}$$

joka saadaan soveltamalla lauseen 2.2 tulosta. Nyt $\operatorname{Re} p > 0$, joten $\mathrm{e}^{-pT} < 1$, mistä taas seuraa, että $1-\mathrm{e}^{-pT} > 0$. Yhtälö 2.1 voidaan siis jakaa puolittain erotuksella $1-\mathrm{e}^{-pT}$, mistä seuraa väite, kun huomataan, että

$$\Phi(p) = \int_0^\infty \phi(t)\mathrm{e}^{-pt}\,dt = \int_0^T \phi(t)\mathrm{e}^{-pt}\,dt + \int_T^\infty \phi(t)\mathrm{e}^{-pt}\,dt = \int_0^T f(t)\mathrm{e}^{-pt}\,dt.$$

□

Seuraavaksi esitetään ja todistetaan funktion derivaatan Laplace-muunnos, joka on välttämätön työkalu muunnosta käytettäessä. Myöhemmin luvussa 4 havainnollistetaan tuloksen käyttöä differentiaaliyhtälöitä ratkaistaessa.

Lause 2.4 (vrt. [4, s. 258]). *Oletetaan, että*

i) funktiot $f', \ldots, f^{(n)}$ ovat olemassa ja funktioiden $f, f', \ldots, f^{(n)}$ Laplace-muunnokset ovat olemassa,

ii) funktio $f^{(n)}$ on jatkuva välillä $[0,\infty)$ ja

iii) $f^{(k)}(t)\mathrm{e}^{-pt} \to 0$, kun $t \to \infty$ ja $k = 1, \ldots, n-1$, *missä $n \in \mathbb{Z}$. Tällöin*

$$\mathfrak{L}[f^{(n)}(t)] = p^n F(p) - \sum_{i=1}^{n} p^{n-i} f^{(i-1)}(0).$$

Todistus. Todistetaan induktiolla.

1° Todistetaan ensin, että väite pätee, kun $n = 1$. Osittaisintegrointia käyttäen

$$\begin{aligned}
\mathfrak{L}[f'(t)] &= \int_0^\infty f'(t)\mathrm{e}^{-pt}\,dt \\
&= \Big/_0^\infty f(t)\mathrm{e}^{-pt} + p\int_0^\infty f(t)\mathrm{e}^{-pt}\,dt \\
&= -f(0) + pF(p) \\
&= p^1 F(p) - \sum_{i=1}^{1} p^{1-i} f^{(i-1)}(0).
\end{aligned}$$

Vrt. [8, s. 11].

2° Tehdään induktio-oletus, että väite pätee, kun $n = k$ eli

$$\mathfrak{L}[f^{(k)}(t)] = p^k F(p) - \sum_{i=1}^{k} p^{k-i} f^{(i-1)}(0).$$

Todistetaan, että väite pätee, kun $n = k + 1$. Merkitään $u' = f^{(k+1)}(t)$ ja $v = \mathrm{e}^{-pt}$, jolloin $u = f^{(k)}(t)$ ja $v' = -p\mathrm{e}^{-pt}$. Osittaisintegroinnin ja induktio-oletuksen avulla

$$\begin{aligned}
\mathfrak{L}[f^{(k+1)}(t)] &= \int_0^\infty f^{(k+1)}(t)\mathrm{e}^{-pt}\,dt \\
&= \Big/_0^\infty f^{(k)}(t)\mathrm{e}^{-pt} + p\int_0^\infty f^{(k)}(t)\mathrm{e}^{-pt}\,dt \\
&= \lim_{R\to\infty} f^{(k)}(R)\mathrm{e}^{-pR} - f^{(k)}(0) \\
&\quad + p\left[p^k F(p) - \sum_{i=1}^{k} p^{k-i} f^{(i-1)}(0)\right] \\
&= p^{k+1}F(p) - \sum_{i=1}^{k} p^{(k+1)-i} f^{(i-1)}(0) - f^{(k)}(0) \\
&= p^{k+1}F(p) - \sum_{i=1}^{k+1} p^{(k+1)-i} f^{(i-1)}(0),
\end{aligned}$$

olettaen, että kaikki oletukset ovat voimassa.

3° Väite pätee induktioperiaatteen mukaisesti.

□

Lause 2.5 (Laplace-muunnoksen derivaatta [4, s. 259]). *Oletetaan, että* $y = F(p)$ *on funktion* f *Laplace-muunnos, kun* $\operatorname{Re} p > a$. *Tällöin* F *on holomorfinen, kun* $\operatorname{Re} p > a$, *ja*

$$\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}p^k} F(p) = (-1)^k \mathfrak{L}[t^k f(t)], \qquad \textit{missä } k \in \mathbb{N}.$$

Todistus. Todistetaan induktiolla.

1° Todistetaan ensin, että väite pätee, kun $k = 1$. Olkoon p sellainen kompleksiluku, että $\operatorname{Re} p > c$ ja merkitään $\operatorname{Re} p - c = 2\lambda$. Olkoon edelleen h sellainen luku, että $|h| < \lambda$, jolloin $\operatorname{Re}(p + h) > c + \lambda$. Tällöin

$$\left| \frac{F(p+h) - F(p)}{h} + \int_0^\infty t f(t) \mathrm{e}^{-pt}\, dt \right| = \left| \int_0^\infty f(t) \mathrm{e}^{-pt} \left(\frac{\mathrm{e}^{-ht} - 1}{h} + t \right) dt \right|.$$

Sijoittamalla termin e^{-ht} sarjakehitelmä $\sum_{n=0}^\infty (-ht)^n / n!$ saadaan

$$\begin{aligned}
&\left| \int_0^\infty f(t) \mathrm{e}^{-pt} \left(\frac{\sum_{n=0}^\infty \frac{(-ht)^n}{n!} - 1}{h} + t \right) dt \right| \\
&= \left| \int_0^\infty f(t) \mathrm{e}^{-pt} \sum_{n=2}^\infty \frac{(-ht)^n}{n! h}\, dt \right| \\
&= \left| \int_0^\infty f(t) \mathrm{e}^{-pt} \sum_{n=2}^\infty \frac{(ht)^n}{n! h}\, dt \right| \\
&\leq \int_0^\infty \left| f(t) \mathrm{e}^{-pt} \right| \left(\frac{t^2 |h|}{2!} + \frac{t^3 |h|^2}{3!} + \frac{t^4 |h|^3}{4!} + \dots \right) dt \\
&\leq |h| \int_0^\infty \left| f(t) \mathrm{e}^{-pt} \right| t^2 \mathrm{e}^{t|h|}\, dt \\
&\leq |h| \int_0^\infty \left| f(t) \mathrm{e}^{-ct} t^2 \mathrm{e}^{-\lambda t} \right| dt.
\end{aligned}$$

Viimeinen integraali lähestyy nollaa, kun $h \to \infty$, sillä $|f(t)\mathrm{e}^{-ct}|$ on integroituva oletuksen mukaisesti ja $t^2 \mathrm{e}^{-\lambda t}$ on rajoitettu välillä $[0, \infty)$. Siis $\mathrm{d}/\mathrm{d}p\, F(p)$ on olemassa ja $\mathfrak{L}[t f(t)] = \mathrm{d}/\mathrm{d}p\, F(p)$. Vrt. [4, s. 259].

2° Tehdään induktio-oletus, että väite pätee, kun $k = n$ eli

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}p^n}F(p) = (-1)^n\mathfrak{L}[t^n f(t)].$$

Todistetaan, että väite pätee, kun $k = n+1$, jolloin induktio-oletusta käyttäen saadaan

$$\frac{\mathrm{d}^{n+1}}{\mathrm{d}p^{n+1}}F(p) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}p^n}F(p) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}(-1)^n\mathfrak{L}[t^n f(t)] = (-1)^n\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\mathfrak{L}[t^n f(t)].$$

Merkitään, että $\mathfrak{L}[t^n f(t)] = \mathfrak{L}[g(t)] = G(p)$. Kohdan 1 perusteella $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}G(p) = -\mathfrak{L}[tg(t)]$, jolloin siis

$$(-1)^n\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\mathfrak{L}[t^n f(t)] = (-1)^n(-1)\mathfrak{L}[t \cdot t^n f(t)] = (-1)^{n+1}\mathfrak{L}[t^{n+1} f(t)].$$

3° Väite seuraa induktioperiaatteesta.

□

Lause 2.6 (Integraalifunktion Laplace-muunnos)**.** *Oletetaan, että funktion f Laplace-muunnos F on olemassa. Tällöin*

$$\mathfrak{L}\left[\int_0^t f(\tau)\,d\tau\right] = \frac{F(p)}{p}.$$

Todistus (vrt. [8, s. 12]). Nyt $f(\tau)$ on funktion $\int_0^t f(\tau)\,d\tau$ derivaatta, mistä seuraa, että lauseen 2.4 mukaan

$$F(p) = \mathfrak{L}[f(\tau)] = p\mathfrak{L}\left[\int_0^t f(\tau)\,d\tau\right] - \int_0^0 f(\tau)\,d\tau = p\mathfrak{L}\left[\int_0^t f(\tau)\,d\tau\right].$$

Tällöin

$$\mathfrak{L}\left[\int_0^t f(\tau)\,d\tau\right] = \frac{F(p)}{p}.$$

□

Tässä luvussa on esitelty esimerkein yleisimpien funktioiden Laplace-muunnoksia sekä muunnoksen ominaisuuksia, joiden avulla voidaan muodostaa uusia muunnoksia jo tunnettuista. Seuraavissa kappaleissa tullaan viittaamaan toistuvasti näihin tuloksiin ja aliluvun 2.2 perusteella tunnettuja muunnoksia käytetään uudelleen. Käytännössä eri funktioiden Laplace-muunnoksista on olemassa laajoja taulukoita, jolloin säästetään paljon aikaa teknisistä laskuista.

3 Laplacen käänteismuunnos

Laplace-muunnoksen käytön kannalta on olennaista muistaa, että se pitää myös voida kääntää. Tällöin on löydettävä sellainen funktio f, että $F(p) = \mathfrak{L}[f(t)]$, kun $F(p)$ tunnetaan. Helpoin tapa on yksinkertaisesti tutkia, minkä funktion Laplace-muunnos tunnettu $F(p)$ on, käyttämällä hyväksi tunnettuja muunnoksia. Esimerkkejä tästä löytyy tämän luvun alussa. Tämän menetelmän käyttömahdollisuudet ovat kuitenkin hyvin rajalliset, joten loppuluvussa keskitytään syvällisempien menetelmien käyttöön.

Esimerkki 3.1 (vrt. [4, s. 275, teht. 6])**.** Etsitään funktion $F(p) = (p(p+1)(p+2))^{-1}$ käänteismuunnos käyttäen osamurtokehitelmää. Tällöin

$$\frac{1}{p(p+1)(p+2)} = \frac{1}{2p} - \frac{1}{p+1} + \frac{1}{2(p+2)} = \mathfrak{L}\left[\frac{1}{2} - \mathrm{e}^{-t} + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2t}\right].$$

Siis

$$f(t) = \frac{1}{2} - \mathrm{e}^{-t} + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2t}.$$

Esimerkki 3.2 (vrt. [1, s. 307, teht. 22])**.** Etsitään funktion $F(p) = (p^2-1)^{-2}$ käänteismuunnos käyttäen osamurtokehitelmää, jolloin

$$\frac{1}{(p^2-1)^2} = \frac{1}{(p+1)^2(p-1)^2} = -\frac{1}{4}\frac{1}{p-1} + \frac{1}{4}\frac{1}{(p-1)^2} + \frac{1}{4}\frac{1}{p+1} + \frac{1}{4}\frac{1}{(p+1)^2}.$$

Koska Laplace-muunnos on lineaarinen toimitus, voidaan jokaisen termin käänteismuunnos etsiä erikseen. Käyttämällä lauseen 2.5 tulosta saadaan termien $(4(p-1)^2)^{-1}$ ja $(4(p+1)^2)^{-1}$ käänteismuunnoksiksi $\frac{1}{4}\mathfrak{L}[t\mathrm{e}^{t}]$ ja $\frac{1}{4}\mathfrak{L}[t\mathrm{e}^{-t}]$ vastaavasti. Muiden termien käänteismuunnokset saadaan suoraan esimerkin 2.3 tavoin. Tällöin käänteismuunnos voidaan ilmaista muodossa

$$F(p) = \frac{1}{4}(-\mathfrak{L}[\mathrm{e}^{t}] + \mathfrak{L}[t\mathrm{e}^{t}] + \mathfrak{L}[\mathrm{e}^{-t}] + \mathfrak{L}[t\mathrm{e}^{-t}]).$$

Siis

$$f(t) = \frac{1}{4}(-\mathrm{e}^{t} + t\mathrm{e}^{t} + \mathrm{e}^{-t} + t\mathrm{e}^{-t}).$$

Käänteismuunnoksen löytämistä varten voidaan johtaa myös käänteinen muunnoskaava. Sen todistamiseksi tarvitaan kuitenkin Fourier'n integraalia, jonka todistamiseksi puolestaan tarvitaan seuraavia apulauseita.

Apulause 3.1 (Riemannin ja Lebesguen lemma)**.** *Oletetaan, että Φ on paloittain jatkuva funktio välillä $[a,b]$. Tällöin, kun $\lambda \to \infty$,*

$$I_1 = \int_a^b \Phi(t)\sin\lambda t\,dt \to 0 \quad \textit{ja} \quad I_2 = \int_a^b \Phi(t)\cos\lambda t\,dt \to 0.$$

Todistus (vrt. [2, aliluku 9.5.1]). Todistetaan ensimmäinen tulos, jolloin toinen voidaan todistaa samoin. Käytetään todistuksessa merkintää $I_1 = I$. Todistuksessa voidaan olettaa, että Φ on jatkuva, sillä funktion ollessa paloittain jatkuva voidaan todistus suorittaa jokaiselle osavälille erikseen. Huomataan, että funktio $y = \sin \lambda t$ on jaksollinen funktio, joka suurilla parametrin λ arvoilla saa positiivisia ja negatiivisia arvoja vaihtaen merkkiä aina tasaisin välein. Tämän välin pituus riippuu parametristä λ ja on π/λ. Funktion Φ jatkuvuuden vuoksi integroitavan funktion $z = \Phi(t) \sin \lambda t$ peräkkäiset positiiviset ja negatiiviset aallot miltei kumoavat toisensa, sillä parametrin λ kasvaessa suureksi aallonpituus lyhenee hyvin pieneksi. Jatkuvan funktion arvot eivät välillä, jonka pituus $h \to 0$, voi erota toisistaan kovin paljoa. Tästä seuraa, että funktio Φ ei suurilla parametrin λ arvoilla muuta paljoakaan integraalia ja juuri tähän perustuu väite. Määritellään nyt muuttuja $t = \tau + h$, missä siis $h = \pi/\lambda$, jolloin pätee $\sin \lambda t = -\sin \lambda \tau$. Sijoitetaan tämä muuttuja integraaliin I, jolloin arvioitavalle integraalille saadaan kaksi yhtäpitävää muotoa

$$\begin{cases} I = -\int\limits_{a-h}^{b-h} \Phi(\tau + h) \sin \lambda \tau \, d\tau, \\ I = \int\limits_a^b \Phi(t) \sin \lambda t \, dt. \end{cases}$$

Kun nyt vaihdetaan ensimmäisessä yhtälössä muuttuja τ muuttujaksi t ja lasketaan yhtälöparin yhtälöt yhteen, saadaan

$$\begin{aligned} 2I &= -\int\limits_{a-h}^{b-h} \Phi(t+h) \sin \lambda t \, dt + \int\limits_a^b \Phi(t) \sin \lambda t \, dt \\ &= -\int\limits_{a-h}^{a} \Phi(t+h) \sin \lambda t \, dt + \int\limits_a^{b-h} -\Phi(t+h) \sin \lambda t \, dt \\ &\quad + \int\limits_a^{b-h} \Phi(t) \sin \lambda t \, dt + \int\limits_{b-h}^{b} \Phi(t) \sin \lambda t \, dt \\ &= -\int\limits_{a-h}^{a} \Phi(t+h) \sin \lambda t \, dt + \int\limits_a^{b-h} (\Phi(t) - \Phi(t+h)) \sin \lambda t \, dt \\ &\quad + \int\limits_{b-h}^{b} \Phi(t) \sin \lambda t \, dt. \end{aligned}$$

Oletuksen mukaisesta funktion Φ jatkuvuudesta seuraa, että löytyy sellainen positiivinen vakio M, että tutkittavalla välillä $|\Phi(t)| \leq M$, mistä seuraa, että

$$\begin{aligned} 2\,|I| &\leq \int\limits_{a-h}^{a} |\Phi(t+h)|\,|\sin \lambda t|\;dt + \int\limits_{a}^{b-h} |\Phi(t) - \Phi(t+h)|\,|\sin \lambda t|\;dt \\ &\quad + \int\limits_{b-h}^{b} |\Phi(t)|\,|\sin \lambda t|\;dt \\ &\leq \int\limits_{a-h}^{a} M\,dt + \int\limits_{a}^{b-h} |\Phi(t) - \Phi(t+h)|\;dt + \int\limits_{b-h}^{b} M\,dt \\ &= 2Mh + \int\limits_{a}^{b-h} |\Phi(t) - \Phi(t+h)|\;dt. \end{aligned}$$

Olkoon $\epsilon > 0$. Tällöin voidaan λ valita niin suureksi, että koko integrointivälillä $|\Phi(t) - \Phi(t+h)| < \epsilon/(b-a)$ ja lisäksi $Mh = M\pi/\lambda < \epsilon/2$. Tällöin

$$|I| < \epsilon/2 + \epsilon/2 - \frac{h\epsilon}{2(b-a)} < \epsilon.$$

Siis $\lim_{\lambda\to\infty} I = 0$, sillä ϵ voidaan valita mielivaltaisen pieneksi. Täsmälleen samaan tapaan voidaan todistaa myös, että

$$I_2 = \int\limits_{a}^{b} \Phi(t) \cos \lambda t\,dt \to 0,$$

kun $\lambda \to \infty$. □

Käytetään tästä eteenpäin funktion f vasemman ja oikeanpuoleisista raja-arvoista pisteessä t merkintöjä $f(t-)$ ja $f(t+)$ vastaavasti.

Apulause 3.2 (Dirichlet'n integraali)**.** *Oletetaan, että f on välillä $[b, c]$ paloittain sileä funktio, jolloin sillä on äärellinen määrä epäjatkuvuuskohtia. Oletetaan vielä, että $x \in [b, c]$. Tällöin*

$$\lim_{m\to\infty} \int\limits_{b}^{c} f(u) \frac{\sin\{(2m+1)(x-u)\}}{x-u}\,du = \frac{\pi}{2}\left(f(x+) + f(x-)\right).$$

Todistus (vrt. [6, s. 108]). Olkoon a mikä tahansa positiivinen luku. Tällöin $f(x+t)/t$ on paloittain jatkuva funktio sekä välillä $b - x \leq t \leq -a$, että $a \leq t \leq c - x$. Nyt siis apulauseen 3.1 mukaan integraali voidaan kirjoittaa muodossa

$$\lim_{m\to\infty} \int\limits_{-a}^{a} f(x+t) \frac{\sin\{(2m+1)t\}}{t}\,dt.$$

Suoritetaan todistus kahdessa osassa, koska

$$\begin{aligned}\int_{-a}^{a} f(x+t)\frac{\sin\{(2m+1)t\}}{t}\,dt &= \int_{0}^{a} \frac{\sin\{(2m+1)t\}}{t}\left(f(x+t)+f(x-t)\right)dt \\ &= \int_{0}^{a} f(x+t)\frac{\sin\{(2m+1)t\}}{t}\,dt \\ &\quad + \int_{0}^{a} f(x-t)\frac{\sin\{(2m+1)t\}}{t}\,dt.\end{aligned}$$

Aloitetaan summan ensimmäisestä integraalista. Olkoon $\Phi(t) = (f(x+t) - f(x+))/t$, joka on paloittain jatkuva funktio. Toisin sanoen voidaan kirjoittaa $f(x+t) = t\Phi(t) + f(x+)$, jolloin

$$\begin{aligned}\int_{0}^{a} f(x+t)\frac{\sin\{(2m+1)t\}}{t}\,dt &= \int_{0}^{a} t\Phi(t)\frac{\sin\{(2m+1)t\}}{t}\,dt \\ &\quad + \int_{0}^{a} f(x+)\frac{\sin\{(2m+1)t\}}{t}\,dt.\end{aligned}$$

Nyt lauseen 3.1 mukaan summan ensimmäinen integraali on nolla. Tällöin tehtäväksi jää ratkaista jälkimmäinen, kun $(2m+1) \to \infty$ eli $m \to \infty$. Siis

$$\begin{aligned}\lim_{m\to\infty}\int_{0}^{a} f(x+)\frac{\sin\{(2m+1)t\}}{t}\,dt &= \lim_{m\to\infty} f(x+)\int_{0}^{a} \frac{\sin\{(2m+1)t\}}{t}\,dt \\ &= f(x+)\int_{0}^{\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt.\end{aligned}$$

Voidaan todistaa, että integraali nollasta äärettömään $(\sin t)/t$ on $\pi/2$, joten todistuksen ensimmäisen osan tulokseksi saadaan

$$\int_{0}^{a} f(x+t)\frac{\sin\{(2m+1)t\}}{t}\,dt = \frac{\pi}{2}f(x+). \tag{3.1}$$

Suoritetaan todistuksen toinen osa samaan tapaan. Olkoon $\Phi(t) = (f(x-t) - f(x-))/t$ eli $f(x-t) = t\Phi(t) + f(x-)$. Nyt Φ on paloittain jatkuva funktio, jolloin

$$\int_0^a f(x-t)\frac{\sin\{(2m+1)t\}}{t}\,dt = \int_0^a t\Phi(t)\frac{\sin\{(2m+1)t\}}{t}\,dt + \int_0^a f(x-)\frac{\sin\{(2m+1)t\}}{t}\,dt.$$

Summan ensimmäinen integraali on jälleen lauseen 3.1 mukaan nolla. Käyttäen nyt samaa päättelyä kuin edellä, saadaan

$$\int_0^a f(x-t)\frac{\sin\{(2m+1)t\}}{t}\,dt = \frac{\pi}{2}f(x-). \tag{3.2}$$

Yhdistämällä tulokset 3.1 ja 3.2 saadaan väite. □

Lause 3.3 (Fourier'n integraali)**.** *Oletetaan, että f on paloittain sileä funktio ja*

$$\int_0^\infty |f(t)|\,dt < \infty$$

eli integraali suppenee. Merkitään vielä $f(t) = (f(x+) + f(x-))/2$, jos funktiolla f on epäjatkuvuuskohta pisteessä t. Tällöin funktion arvoksi otetaan vasemman ja oikean puoleisten raja-arvojen aritmeettinen keskiarvo. Näiden oletusten ollessa voimassa pätee Fourier'n integraali

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{T} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda t}\,d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(u)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda u}\,du.$$

Todistus (vrt. [6, s. 107]). Olkoon a mielivaltaisen pieni reaaliluku ja b vastaavasti mielivaltaisen suuri reaaliluku. Olkoon λ lisäksi mikä tahansa muu reaaliluku, jolloin määritellään luku η siten, että $\lambda = 2m + 1 + 2\eta$, missä $0 \le \eta \le 1$. Tutkitaan nyt integraalia

$$\begin{aligned}
&\int_a^b \frac{\sin\{\lambda(t-u)\}}{t-u}f(u)\,du - \int_a^b \frac{\sin\{(2m+1)(t-u)\}}{t-u}f(u)\,du \\
&\qquad = \int_a^b \left[\frac{\sin\{\lambda(t-u)\} - \sin\{(2m+1)(t-u)\}}{t-u}\right] f(u)\,du \\
&\qquad = 2\int_a^b \frac{1}{t-u}\sin\left\{\frac{\lambda(t-u) - (2m+1)(t-u)}{2}\right\}
\end{aligned}$$

$$\times \cos\left\{\frac{\lambda(t-u)+(2m+1)(t-u)}{2}\right\} f(u)\,du$$
$$= 2\int_a^b \frac{\sin\{\eta(t-u)\}}{t-u}\cos\{(2m+1+\eta)(t-u)\}\, f(u)\,du.$$

Merkitään
$$\Phi(u) = \frac{\sin\{\eta(t-u)\}}{t-u} f(u).$$
Nyt Φ on paloittain jatkuva välillä $[a,b]$, jolloin edellisen yhtälöketjun viimeisin integraali täyttää lauseen 3.1 oletukset ja
$$2\int_a^b \frac{\sin\{\eta(t-u)\}}{t-u}\cos\{(2m+1+\eta)(t-u)\}\, f(u)\,du \to 0,$$
kun $m \to \infty$. Siis on oltava
$$\int_a^b \frac{\sin\{\lambda(t-u)\}}{t-u} f(u)\,du - \int_a^b \frac{\sin\{(2m+1)(t-u)\}}{t-u} f(u)\,du \to 0,$$
kun $m \to \infty$ eli $\lambda \to \infty$. Koska tällöin lauseen 3.2 mukaan vasemman puolen toinen integraali on $\pi/2(f(t+)+f(t-))$, pitää myös päteä
$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_a^b \frac{\sin\{\lambda(t-u)\}}{t-u} f(u)\,du = \frac{\pi}{2}\left(f(t+)+f(t-)\right). \tag{3.3}$$

Osoitetaan seuraavaksi, että integraalin ylä- ja alarajojen voidaan antaa lähestyä ääretöntä ilman, että se vaikuttaisi tulokseen. Mikäli integraali
$$\int_b^\infty |f(t)|\,dt$$
on olemassa, saadaan
$$\begin{aligned}
\left|\int_b^\infty \frac{\sin\{\lambda(t-u)\}}{t-u} f(u)\,du\right| &\le \int_b^\infty \left|\frac{1}{t-u}\right| |\sin\{\lambda(t-u)\}|\,|f(u)|\,du \\
&\le \int_b^\infty \left|\frac{1}{t-u}\right| |f(u)|\,du \\
&\le \frac{1}{t}\int_b^\infty |f(u)|\,du,
\end{aligned}$$

missä $b > 2t$. Ylärajan b voidaan siis antaa lähestyä ääretöntä. Samoin, jos integraali

$$\int_{-\infty}^{a} |f(t)|\, dt$$

on olemassa, voidaan sallia $a \to -\infty$. Näin yhtälön 3.3 integraalille on saatu uudet integroimisrajat ja pätee

$$\lim_{\lambda\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin\{\lambda(t-u)\}}{t-u} f(u)\, du = \frac{\pi}{2}\left(f(t+) + f(t-)\right).$$

Koska $\int_0^\lambda \cos t\tau\, d\tau = 1/t(\sin\lambda t - \sin 0) = (\sin\lambda t)/t$, voidaan integraali kirjoittaa edelleen muodossa

$$\lim_{\lambda\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_0^\lambda \cos\alpha(t-u)\, d\alpha\right] f(u)\, du = \frac{\pi}{2}\left(f(t+) + f(t-)\right). \tag{3.4}$$

Todistetaan seuraavaksi, että integraalien järjestystä voidaan vaihtaa. Kirjoitetaan $\Phi(u,\alpha) = \cos\alpha(t-u)f(u)$ ja tutkitaan itseisarvoa

$$\begin{aligned}
&\left|\int_0^\infty \left[\int_0^\lambda \Phi(u,\alpha)\, d\alpha\right] du - \int_0^\lambda \left[\int_0^\infty \Phi(u,\alpha)\, du\right] d\alpha\right| \\
&= \left|\int_0^b \left[\int_0^\lambda \Phi(u,\alpha)\, d\alpha\right] du + \int_b^\infty \left[\int_0^\lambda \Phi(u,\alpha)\, d\alpha\right] du\right. \\
&\quad \left. - \int_0^\lambda \left[\int_0^b \Phi(u,\alpha)\, du\right] d\alpha - \int_0^\lambda \left[\int_b^\infty \Phi(u,\alpha)\, du\right] d\alpha\right| \\
&= \left|\int_b^\infty \left[\int_0^\lambda \Phi(u,\alpha)\, d\alpha\right] du - \int_0^\lambda \left[\int_b^\infty \Phi(u,\alpha)\, du\right] d\alpha\right| \\
&\leq \int_b^\infty \left[\int_0^\lambda |\Phi(u,\alpha)|\, d\alpha\right] du + \int_0^\lambda \left[\int_b^\infty |\Phi(u,\alpha)|\, du\right] d\alpha \\
&\leq \int_b^\infty \left[\int_0^\lambda |f(u)|\, d\alpha\right] du + \int_0^\lambda \left[\int_b^\infty |f(u)|\, du\right] d\alpha \\
&= 2\lambda \int_b^\infty |f(u)|\, du.
\end{aligned}$$

Annetaan luku ϵ. Nyt kiinteää lukua λ kohti voidaan luku b valita niin suureksi, että

$$\int_b^\infty |f(u)|\, du \leq \frac{\epsilon}{2\lambda}.$$

Tällöin yhtälöketjun oikea puoli saadaan niin pieneksi kuin halutaan, mistä seuraa

$$\int_0^\infty \left[\int_0^\lambda \Phi(u,\alpha)\, d\alpha \right] du = \int_0^\lambda \left[\int_0^\infty \Phi(u,\alpha)\, du \right] d\alpha.$$

Samanlaista päättelyä käyttäen voidaan todistaa, että

$$\int_{-\infty}^0 \left[\int_0^\lambda \Phi(u,\alpha)\, d\alpha \right] du = \int_0^\lambda \left[\int_{-\infty}^0 \Phi(u,\alpha)\, du \right] d\alpha.$$

Tämän vuoksi integroimisjärjestys yhtälössä 3.4 voidaan vaihtaa, jolloin saatu yhtälö on eräs Fourier'n integraalin muoto

$$\lim_{\lambda\to\infty} \int_0^\lambda \left[\int_{-\infty}^\infty \cos\alpha(t-u)\, d\alpha \right] f(u)\, du = \frac{\pi}{2}\left(f(t+)+f(t-)\right).$$

Sijoittamalla tähän yhtälöön $\cos\alpha(t-u) = (\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha(t-u)} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha(t-u)})/2$ saadaan johdettua Fourier'n integraalin kompleksimuoto

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \lim_{T\to\infty} \int_{-T}^T \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda t}\, d\lambda \int_{-\infty}^\infty f(u)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda u}\, du,$$

missä $f(t)$ on vasemman ja oikean puoleisten raja-arvojen aritmeettinen keskiarvo pisteessä t. Väite on siis todistettu. $\square$

Fourier'n integraalista voidaan johtaa käännöskaava Laplace-muunnoksille. Tämä ei olisi mahdollista, jos alkuperäinen muunnettava funktio olisi muunnettu funktioksi, jonka muuttuja on reaaliarvoinen sen sijaan että se olisi kompleksiarvoinen (vrt. määritelmä 2.1).

Lause 3.4 (vrt. [4, s. 261]). *Olkoon f paloittain sileä funktio välillä $[0,\infty)$. Olkoon $F(p)$ olemassa, kun $\mathrm{Re}\, p > c \geq 0$. Tällöin, kun $t > 0$,*

$$\frac{1}{2}(f(t+)+f(t-)) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \lim_{R\to\infty} \int_{\sigma-\mathrm{i}R}^{\sigma+\mathrm{i}R} F(p)\mathrm{e}^{pt}\, dp, \qquad (\sigma > c).$$

Todistus (vrt. [6, s. 30]). Johdetaan Fourier'n integraalista. Oletetaan, että funktio I on paloittain sileä ja että sillä on äärellinen määrä epäjatkuvuuskohtia välillä $(-\infty, \infty)$. Oletetaan vielä, että $\int_{-\infty}^{\infty} |I(t)|\, dt < \infty$. Tällöin

$$I(t) = \frac{1}{2\pi} \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda t}\, d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} I(u)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda u}\, du, \tag{3.5}$$

joka voidaan myös kirjoittaa kahden funktion avulla, jolloin

$$I(t) = (2\pi)^{-1/2} \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} G(\lambda)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda t}\, d\lambda \quad \text{ja} \tag{3.6}$$

$$G(\lambda) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} I(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda t}\, dt, \tag{3.7}$$

missä G on siis funktion I Fourier-muunnos. Fourier'n integraalissa λ on reaalimuuttuja, mutta jos alkuperäisten oletusten lisäksi $|I(t)| \leq K\mathrm{e}^{-\alpha t}$, kun $t \to \infty$, missä $K, \alpha > 0$, ja samoin $|I(t)| \leq L\mathrm{e}^{\beta t}$, kun $t \to -\infty$, missä $L, \beta > 0$, niin yhtälön 3.7 integraali on olemassa, jos $-\alpha < \mathrm{Im}\,\lambda < \beta$. Määritetyt lisäoletukset siis takaavat, että tämä integraali suppenee myös edellämainitussa kompleksitason osassa (vrt. lause 2.1). Näiden oletusten vallitessa voidaan käsittelyä laajentaa määrittelemällä λ kompleksimuuttujaksi. Yhtälö 3.6 voidaan nyt kirjoittaa muodossa

$$I(t) = (2\pi)^{-1/2} \lim_{R\to\infty} \int_{-R+\mathrm{i}\gamma}^{R+\mathrm{i}\gamma} G(\lambda)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda t}\, d\lambda, \tag{3.8}$$

missä $-\alpha < \gamma < \beta$. Sijoitetaan yhtälöön 3.7 $\lambda = \mathrm{i}p$, jolloin $p = -\mathrm{i}\lambda$ ja $d\lambda = -(1/\mathrm{i})dp$, sekä valitaan $I(t) = (2\pi)^{1/2} f(t)H(t)$, missä $H(t)$ on Heavisiden funktio. Tämä valittu funktio toteuttaa nyt funktiolle I aikaisemmin asetetut oletukset, sillä f on paloittain sileä funktio välillä $[0, \infty)$ lauseen oletusten mukaisesti. Tulo $f(t)H(t)$ on tällöin paloittain sileä välillä $(-\infty, \infty)$. Valitulla funktiolla on myös vaadittava äärellinen määrä epäjatkuvuuskohtia, sillä funktiolla f on Laplace-muunnos, mikä edellyttää epäjatkuvuuskohtien määrän äärellisyyttä. Tällöin

$$G(\mathrm{i}p) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} (2\pi)^{1/2} f(t)H(t)\mathrm{e}^{-pt}\, dt = \int_{0}^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{-pt}\, dt = \mathfrak{L}[f(t)].$$

Samoin voidaan tehdä sijoitus ja laskea uudet integrointirajat yhtälöön 3.8, jolloin

$$\begin{aligned}(2\pi)^{1/2} f(t)H(t) &= -(2\pi)^{-1/2} \lim_{R\to\infty} \int\limits_{-\mathrm{i}(-R+\mathrm{i}\gamma)}^{-\mathrm{i}(R+\mathrm{i}\gamma)} G(\mathrm{i}p)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\mathrm{i}p)t} \frac{dp}{\mathrm{i}} \\ &= (2\pi)^{-1/2} \lim_{R\to\infty} \int\limits_{\gamma-\mathrm{i}R}^{\gamma+\mathrm{i}R} \mathfrak{L}[f(t)]\mathrm{e}^{pt} \frac{dp}{\mathrm{i}}.\end{aligned}$$

Siis

$$f(t)H(t) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \lim_{R\to\infty} \int\limits_{\gamma-\mathrm{i}R}^{\gamma+\mathrm{i}R} \mathfrak{L}[f(t)]\mathrm{e}^{pt}\, dp. \tag{3.9}$$

Nyt siis $f(t)H(t) = 0$, kun $t < 0$, ja $f(t)H(t) = f(t)$, kun $t \geq 0$. Tästä seuraa, että β saa olla kuinka suuri tahansa. Yhtälö 3.9 on näin Laplacen käänteismuunnoskaava, kun $\gamma > c$. Tällöin γ myös toteuttaa sille aikaisemmin asetetut ehdot ja kuuluu välille $[-\alpha, \infty)$, vaikka α olisi mikä tahansa positiivinen luku, sillä lauseen määritelmän mukaan $c > 0$. □

Käänteismuunnoskaavassa selkeästi $f(t+) = f(t-)$, jos funktio f on jatkuva kohdassa t. Jos $F(p) = \mathfrak{L}[f(t)]$, niin f on funktion F käänteismuunnos eli $f(t) = \mathfrak{L}^{-1}[F(p)]$. Käänteismuunnoksen suoraan soveltaminen ei kuitenkaan ole useinkaan käytännöllistä, vaan käänteismuunnoksen f löytämiseksi esitellään muita taloudellisempia keinoja ja niistä ensimmäisenä residylauseen yhteys käänteismuunnokseen. Ensin kuitenkin esitetään lause, jonka mukaan käänteinen Laplace-muunnos on yksikäsitteinen. Toisin sanoen käänteismuunnos on aina sama riippumatta siitä, mitä työkalua sen löytämiseksi käytetään.

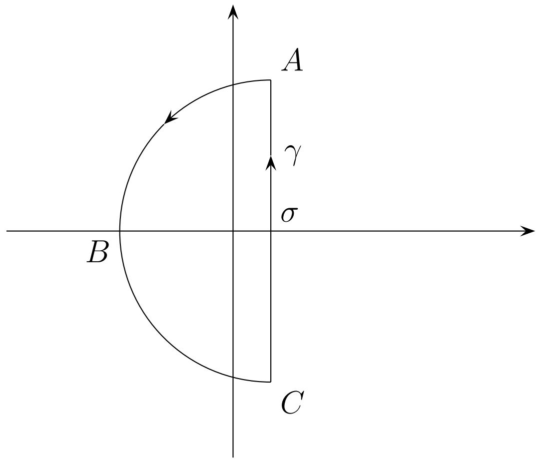
Lause 3.5 (Lerch'n lause [7]). *Jos $\mathfrak{L}[f_1(t)] = \mathfrak{L}[f_2(t)]$, niin tällöin $f_1(t) - f_2(t) = n(t)$, missä n on jokin nollafunktio.*

Edellinen lause osoittaa, että kaksi saman funktion käänteismuunnosta eroavat toisistaan korkeintaan nollafunktion verran eli niiden arvot poikkeavat toisistaan vain yksittäisissä pisteissä.

Lause 3.6 (Laplacen käänteismuunnos residylauseen avulla). *Olkoon funktio F holomorfinen kaikkialla paitsi äärellistä määrää olevissa navoissa $a_1, \ldots a_n$. Oletetaan lisäksi, että löytyy sellaiset vakiot M ja k (> 0), että $|F(p)| \leq M|p|^{-k}$, kun $|p|$ on suuri. Tällöin, kun $t > 0$ ja $\operatorname{Re} p > \operatorname{Re} a_j$ $(j = 1, \ldots, n)$, niin*

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \lim_{R\to\infty} \int\limits_{\sigma-\mathrm{i}R}^{\sigma+\mathrm{i}R} F(p)\mathrm{e}^{pt}\, dp = \sum_{j=1}^{n} \operatorname{res}\{F(p)\mathrm{e}^{pt}; a_j\} \qquad (\sigma > \operatorname{Re} a_j).$$

Todistus (vrt. [4, s. 261]). Integroidaan $F(p)\mathrm{e}^{pt}$ puoliympyrästä ja janasta muodostuvan kaarimonikulmion reunan yli (Ks. kuva 1).



Kuva 1: Integroimispolku lauseen 3.6 todistukseen.

Residylauseen avulla
(3.10)

$$\int_\gamma F(p)\mathrm{e}^{pt}\,dp = \int_{\sigma-\mathrm{i}R}^{\sigma+\mathrm{i}R} F(p)\mathrm{e}^{pt}\,dp + \int_{ABC} F(p)\mathrm{e}^{pt}\,dp = 2\pi\mathrm{i}\sum_{j=1}^{n}\mathrm{res}\{F(p)\mathrm{e}^{pt};a_j\}.$$

Kaaren ABC yhtälö on $p = \sigma + R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, missä $\theta \in [\pi/2, 3\pi/2]$, ja kun R on riittävän suuri

$$|p| = |\sigma + R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}| \geq ||\sigma| - |R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}|| = |\sigma - R| = R - \sigma.$$

Todistetaan nyt, että integraali kaarta ABC pitkin on nolla. Oletusten mukaan, kun R on riittävän suuri

$$\begin{aligned}
\left|\int_{ABC} F(p)\mathrm{e}^{pt}\,dp\right| &\leq \int_{\pi/2}^{3\pi/2} |F(p)||\mathrm{e}^{(\sigma+R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})t}\mathrm{i}R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}|\,d\theta \\
&\leq \int_{\pi/2}^{3\pi/2} M(R-\sigma)^{-k}|\mathrm{e}^{(\sigma+R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})t}|R\,d\theta \\
&= \int_{\pi/2}^{3\pi/2} M(R-\sigma)^{-k}|\mathrm{e}^{t\sigma}||\mathrm{e}^{tR(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)}|R\,d\theta \\
&= \int_{\pi/2}^{3\pi/2} M(R-\sigma)^{-k}\mathrm{e}^{t\sigma}\mathrm{e}^{tR\cos\theta}R\,d\theta
\end{aligned}$$

$$\leq \int_{\pi/2}^{3\pi/2} M(R-\sigma)^{-k} e^{t\sigma - tR\cos\theta} R\, d\theta$$

$$= 2\int_{\pi/2}^{\pi} M(R-\sigma)^{-k} e^{t\sigma - tR\cos\theta} R\, d\theta$$

$$= 2M e^{t\sigma} \int_{0}^{\pi/2} (R-\sigma)^{-k} e^{-tR\sin\varphi} R\, d\varphi, \qquad (\varphi = \theta - \pi/2).$$

Oletetaan, että $k > 1$. Tällöin, kun $R \to \infty$, niin $(R-\sigma)^{-k} e^{-tR\sin\varphi} R \to R^{1-k} e^{-tR\sin\varphi}$, joka puolestaan lähestyy nollaa. Tästä seuraa, että koko integraali lähestyy nollaa, kun $R \to \infty$. Tällöin yhtälöstä 3.10 seuraa väite. Todistus ei kuitenkaan päde, jos $0 < k \leq 1$, koska tällöin integroitavassa funktiossa oleva tekijä R^{1-k} ei enää lähesty nollaa. Sovelletaankin nyt Jordanin epäyhtälöä, jonka mukaan $2R\varphi/\pi \leq R\sin\varphi$, kun $\varphi \in (0, \pi/2]$, mistä seuraa, että $e^{-R\sin\varphi} \leq e^{-2R\varphi/\pi}$. Edellisen yhtälöketjun viimeinen integraali saadaan nyt muotoon

$$2Me^{t\sigma} \int_{0}^{\pi/2} (R-\sigma)^{-k} e^{-tR\sin\varphi} R\, d\varphi \leq 2RMe^{t\sigma}(R-\sigma)^{-k} \int_{0}^{\pi/2} e^{-2tR\varphi/\pi}\, d\varphi$$
$$= \frac{M\pi}{t}(R-\sigma)^{-k}(1 - e^{-tR}),$$

joka puolestaan lähestyy nollaa, kun $R \to \infty$. □

Residylause on erittäin käyttökelpoinen käänteismuunnoksia etsittäessä.

Esimerkki 3.3 (vrt. [4, s. 275, teht. 6])**.** Etsitään funktion $g(p) = ((p^2 + 4)(p^2+1)^2)^{-1}$ käänteismuunnos $\mathfrak{L}^{-1}[g(p)]$ residyiden avulla. Nyt funktio g täyttää lauseen 3.6 oletukset, joten

$$\frac{1}{(p^2+4)(p^2+1)^2} = \frac{1}{(p^2+4)(p^2-i^2)^2} = \frac{1}{(p^2+4)(p-i)^2(p+i)^2},$$

jolloin funktiolla g on piilotettu yksinkertainen napa pisteessä $p = \pm 2i$, sekä näkyvä kertalukua $m = 2$ oleva napa pisteessä $p = \pm i$. Lauseen 3.6 nojalla $\mathfrak{L}^{-1}[g(p)] = \operatorname{res}\{g(p)e^{pt}; 2i\} + \operatorname{res}\{g(p)e^{pt}; -2i\} + \operatorname{res}\{g(p)e^{pt}; i\} + \operatorname{res}\{g(p)e^{pt}; -i\}$. Lauseen 1.4 mukaan

$$\operatorname{res}\{g(p)e^{pt}; 2i\} = \frac{e^{2it}}{4i((2i)^2+1)^2} = \frac{e^{2it}}{36i}$$

ja samoin

$$\operatorname{res}\{g(p)e^{pt}; -2i\} = \frac{e^{-2it}}{-4i((-2i)^2+1)^2} = -\frac{e^{-2it}}{36i}.$$

Lauseen 1.5 nojalla taas

$$\operatorname{res}\{g(p)\mathrm{e}^{pt};\mathrm{i}\} = \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\frac{\mathrm{e}^{pt}}{(p^2+4)(p+\mathrm{i})^2}\right]_{p=\mathrm{i}} = -\frac{t\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}{12} - \frac{\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}{36}.$$

Samoin

$$\operatorname{res}\{g(p)\mathrm{e}^{pt};-\mathrm{i}\} = \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\frac{\mathrm{e}^{pt}}{(p^2+4)(p-\mathrm{i})^2}\right]_{p=-\mathrm{i}} = -\frac{t\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}}{12} + \frac{\mathrm{i}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}}{36}.$$

Siis

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}^{-1}[g(p)] &= \frac{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}t}-\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}t}}{36\mathrm{i}} - \frac{t(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t})}{12} - \frac{\mathrm{i}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t})}{36} \\ &= \frac{1}{18}\sin 2t - \frac{t}{6}\cos t + \frac{1}{18}\sin t.\end{aligned}$$

Esimerkki 3.4 (vrt. [4, s. 275, teht. 6])**.** Etsitään funktion $g(p) = 6(p^4 + 10p^2 + 9)^{-1}$ käänteismuunnos. Funktiolla g on neljä ensimmäistä kertalukua olevaa piilotettua napaa, jolloin

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}^{-1}[g(p)] &= \operatorname{res}\{g(p)\mathrm{e}^{pt};\mathrm{i}\} + \operatorname{res}\{g(p)\mathrm{e}^{pt};-\mathrm{i}\} \\ &\quad + \operatorname{res}\{g(p)\mathrm{e}^{pt};3\mathrm{i}\} + \operatorname{res}\{g(p)\mathrm{e}^{pt};-3\mathrm{i}\}.\end{aligned}$$

Lauseen 1.4 mukaan

$$\begin{aligned}\operatorname{res}\{g(p)\mathrm{e}^{pt};\mathrm{i}\} &= \frac{6\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}{16\mathrm{i}}, &\qquad \operatorname{res}\{g(p)\mathrm{e}^{pt};-\mathrm{i}\} &= -\frac{6\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}}{16\mathrm{i}}, \\ \operatorname{res}\{g(p)\mathrm{e}^{pt};3\mathrm{i}\} &= -\frac{6\mathrm{e}^{\mathrm{i}3t}}{48\mathrm{i}}, &\qquad \operatorname{res}\{g(p)\mathrm{e}^{pt};-3\mathrm{i}\} &= \frac{6\mathrm{e}^{-\mathrm{i}3t}}{48\mathrm{i}},\end{aligned}$$

jolloin

$$\mathfrak{L}^{-1}[g(p)] = \frac{6(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t})}{16\mathrm{i}} - \frac{6(\mathrm{e}^{\mathrm{i}3t}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}3t})}{48\mathrm{i}} = \frac{3}{4}\sin t - \frac{1}{4}\sin 3t.$$

Jos funktio muodostuu kahden helpommin käännettävän funktion tulosta, voidaan sen käänteismuunnos etsiä käyttäen seuraavaa tulosta.

Lause 3.7 (vrt. [4, s. 264])**.** *Oletetaan, että funktioilla f ja g on Laplace-muunnokset F ja G vastaavasti, kun $\operatorname{Re} p > c$. Tällöin $FG = H$, kun $\operatorname{Re} p > c$, missä h on funktioiden f ja g konvoluutio, kun*

$$h(y) = \int_0^y f(t)g(y-t)\,dt \qquad (y \geq 0).$$

Todistus (vrt. [6, s. 43]). Valitaan $p_0 \in A = \{p \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} p > c\}$ ja tutkitaan kaksoisintegraalia

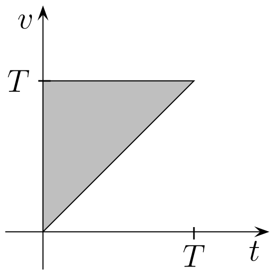
$$I_T = \int\limits_0^T f(t)\mathrm{e}^{-p_0 t}\,dt \int\limits_0^{T-t} g(u)\mathrm{e}^{-p_0 u}\,du = \int\limits_0^{T-t}\int\limits_0^T f(t)g(u)\mathrm{e}^{-p_0(t+u)}\,dt\,du.$$

Kun nyt tehdään sijoitus $v = u + t$, saadaan

$$I_T = \int\limits_t^T\int\limits_0^T f(t)g(v-t)\,\mathrm{e}^{-p_0 v}\,dt\,dv.$$

Vaihdetaan integroimisjärjestys, jolloin tulee laskea uudet integroimisrajat. Edellä $0 \le t \le T$ ja $t \le v \le T$, jolloin v riippuu muuttujasta t. Vaihtamalla riippuvuus toisinpäin saadaan $0 \le v \le T$ ja $0 \le t \le v$ (ks. kuva 2). Siis vaihtamalla integroimisjärjestystä ja -rajoja

$$I_T = \int\limits_0^v\int\limits_0^T f(t)g(v-t)\mathrm{e}^{-p_0 v}\,dv\,dt = \int\limits_0^v f(t)g(v-t)\,dt\int\limits_0^T \mathrm{e}^{-p_0 v}\,dv. \tag{3.11}$$

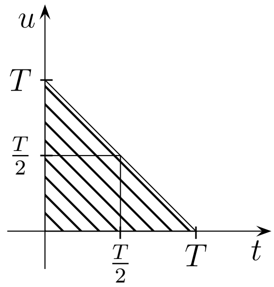


Kuva 2: Integroimismuuttujan vaihto lauseen 3.7 todistuksessa.

Toisaalta voidaan funktion I_T ajatella olevan kaksoisintegraali yli kolmion muotoisen alueen, kun $0 \le t \le T$ ja $0 \le u \le T - t$ (ks. kuva 3), joka puolestaan voidaan jakaa kolmeen osa-alueeseen.

Tällöin

$$I_T = \int\limits_0^{T/2} f(t)\mathrm{e}^{-p_0 t}\,dt\int\limits_0^{T/2} g(u)\mathrm{e}^{-p_0 u}\,du + \int\limits_0^{T/2} f(t)\mathrm{e}^{-p_0 t}\,dt\int\limits_{T/2}^{T-t} g(u)\mathrm{e}^{-p_0 u}\,du$$
$$+ \int\limits_{T/2}^{T} f(t)\mathrm{e}^{-p_0 t}\,dt\int\limits_0^{T-t} g(u)\mathrm{e}^{-p_0 u}\,du.$$



Kuva 3: Integroimisalueen jako osa-alueisiin lauseen 3.7 todistuksessa.

Nyt huomataan, että integraalit $F(p_0)$ ja $G(p_0)$ suppenevat absoluuttisesti. Tällöin voidaan annettua $\epsilon > 0$ kohti löytää sellainen T_0, että kun $T/2 > T_0$, niin

$$\int_{T/2}^{\infty} |f(t)\mathrm{e}^{-a_0 t}|\,dt < \epsilon \quad \text{ja} \quad \int_{T/2}^{\infty} |g(t)\mathrm{e}^{-a_0 t}|\,dt < \epsilon, \quad (a_0 \in A),$$

jolloin

$$\left| \int_0^{T/2} f(t)\mathrm{e}^{-p_0 t}\,dt \int_{T/2}^{T-t} g(u)\mathrm{e}^{-p_0 u}\,du \right| \leq 2\epsilon \int_0^{\infty} |f(t)\mathrm{e}^{-a_0 t}|\,dt$$

ja

$$\left| \int_{T/2}^{T} f(t)\mathrm{e}^{-p_0 t}\,dt \int_0^{T-t} g(u)\mathrm{e}^{-p_0 u}\,du \right| \leq 2\epsilon \int_0^{\infty} |g(t)\mathrm{e}^{-a_0 t}|\,dt.$$

Nämä integraalit lähestyvät nollaa, kun $T \to \infty$, sillä ϵ voidaan valita mielivaltaisen pieneksi. Siis funktio I_T on rajoitettu eli

$$|I_T| \leq \left| \int_0^{T/2} f(t)\mathrm{e}^{-p_0 t}\,dt \int_0^{T/2} g(u)\mathrm{e}^{-p_0 u}\,du \right| + 2\epsilon \int_0^{\infty} |f(t)\mathrm{e}^{-a_0 t}|\,dt + 2\epsilon \int_0^{\infty} |g(t)\mathrm{e}^{-a_0 t}|\,dt,$$

mistä seuraa, että

$$\lim_{T \to \infty} I_T = G(p_0)F(p_0).$$

Toisaalta, kun lasketaan funktion I_T raja-arvo, kun $T \to \infty$, yhtälön 3.11 mukaan, saadaan

$$\lim_{T \to \infty} I_T = \int_0^{v} f(t)g(v-t)\,dt \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-p_0 v}\,dv.$$

Nyt kun edelliset kaksi tulosta yhdistetään, saadaan väite, sillä p_0 on mikä tahansa joukon A piste. $\square$

Viimeisimmän esimerkin käänteismuunnoksen olisi voinut löytää myös osamurtokehitelmän avulla ja onkin hyvä huomata, että usein käyttökelpoisia työkaluja käänteismuunnoksen löytämiseksi on useita. Lisäksi ongelmaa voidaan lähestyä vielä uudesta näkökulmasta. Nimittäin tarkasteltava funktio voidaan myös kehittää sarjaksi, jolloin tehtäväksi jää sarjan käänteismuunnoksen etsiminen, mikä käsitellään seuraavaksi.

Lause 3.8. *Olkoon f paloittain sileä funktio välillä $[0, \infty)$. Olkoon $F(p)$ olemassa, kun $\operatorname{Re} p > c \geq 0$, ja ilmaistavissa muodossa*

$$F(p) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n p^{-n-1},$$

missä yhtälön oikea puoli suppenee, kun $|p| > \epsilon$. Tällöin, kun $t > 0$,

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} t^n.$$

Todistus (vrt. [4, s. 265]). Oletuksen mukaan $g(p) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n p^{-n-1}$ suppenee, kun $|p| > \epsilon$. Tällöin myös $\sum |a_n p^{-n-1}| = \sum |a_n||p|^{-n-1}$ suppenee. Toisin sanoen $\sum |a_n| r^{-n-1}$ suppenee, kun $r > \epsilon$. Käännöslauseen mukaan

$$f(t) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \lim_{R \to \infty} \int_{\sigma - \mathrm{i}R}^{\sigma + \mathrm{i}R} g(p) \mathrm{e}^{pt} \, dp, \quad \text{kun } \sigma > \epsilon.$$

Nyt g on holomorfinen, kun $|p| > \epsilon$. Lisäksi, kun valitaan S siten, että $|p| \geq S > \epsilon$, niin

$$|g(p)| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| S^{-n} |p|^{-1} = |p|^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| S^{-n},$$

jolloin kun valitaan integrointipolku γ kuten kuvassa 4, niin lauseen 3.6 tapaan integraali kaarimonikulmion kaaren yli on nolla. Siis

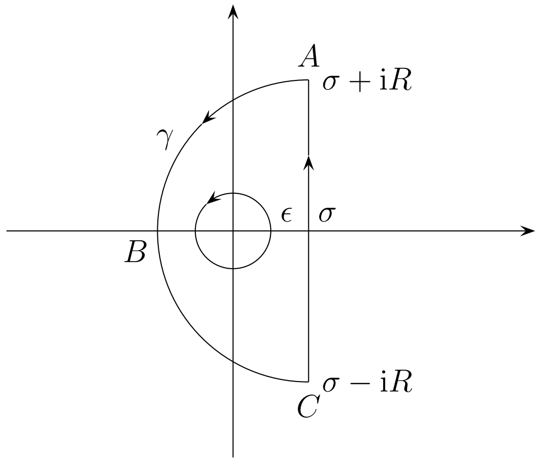
$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{ABC} g(p) \mathrm{e}^{pt} \, dp = 0.$$

Tällöin

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \lim_{R \to \infty} \int_{\sigma - \mathrm{i}R}^{\sigma + \mathrm{i}R} g(p) \mathrm{e}^{pt} \, dp = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \lim_{R \to \infty} \int_{\gamma} g(p) \mathrm{e}^{pt} \, dp.$$

Funktion g holomorfisuudesta seuraa, että deformaatiolauseen mukaan voidaan uudeksi integroimispoluksi valita $\gamma(0; S)$, kun $\sigma > S > \epsilon$, jolloin

(3.12)
$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \lim_{R \to \infty} \int_{\gamma} g(p) \mathrm{e}^{pt} \, dp = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\gamma(0;S)} g(p) \mathrm{e}^{pt} \, dp = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\gamma(0;S)} \sum_{n=0}^{\infty} a_n p^{-n-1} \mathrm{e}^{pt} \, dp.$$



Kuva 4: Integroimispolku lauseen 3.8 todistukseen.

Ympyräpolulla $\gamma(0;S)$ $|e^{pt}| \leq K$ eräällä vakiolla K, jolloin

$$|a_n p^{-n-1} e^{pt}| \leq K|a_n p^{-n-1}| \leq K|a_n|S^{-n-1}.$$

Siis $|a_n p^{-n-1} e^{pt}| \leq M_n$ ja $\sum M_n$ suppenee, jolloin integraalin ja summan paikkaa voidaan vaihtaa (vrt. [4, s. 161]) ja yhtälö 3.12 saadaan muotoon

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma(0;S)} p^{-n-1} e^{pt}\, dp = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{t^n}{n!},$$

jossa viimeinen välivaihe on saatu käyttäen Cauchyn integraalikaavaa derivaatoille [4, s. 157]. Siis väite on todistettu. □

Esimerkki 3.5 (vrt. [4, s. 274, teht. 4])**.** Olkoon

$$f(t) = \begin{cases} 2t/T & \text{kun } 0 \leq t \leq T/2, \\ 2(1-t/T) & \text{kun } T/2 \leq t \leq T. \end{cases}$$

Osoitetaan, että

$$f(t) = \frac{2}{T}\left(tH(t) + 2\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(t - \frac{1}{2}Tn\right) H\left(t - \frac{1}{2}Tn\right)\right),$$

kun $t \geq 0$ ja H on Heavisiden funktio. Muodostetaan funktion f Laplace-muunnos, joka sievennetään sopivaan muotoon. Tämän jälkeen etsitään sievennetyn muunnoksen käänteismuunnos. Funktion f jakson pituus on T, jolloin sen Laplace-muunnos lauseen 2.3 perusteella on

$$(1 - e^{-pT})F(p) = \int_0^T f(t) e^{-pt}\, dt = \int_0^{T/2} f(t) e^{-pt}\, dt + \int_{T/2}^{T} f(t) e^{-pt}\, dt.$$

Funktion f määritelmän ja osittaisintegroinnin avulla

$$
\begin{aligned}
(1-\mathrm{e}^{-pT})F(p) &= \frac{2}{T}\int_0^{T/2} t\mathrm{e}^{-pt}\,dt + 2\int_{T/2}^{T} \mathrm{e}^{-pt}\,dt - \frac{2}{T}\int_{T/2}^{T} t\mathrm{e}^{-pt}\,dt \\
&= \frac{2}{T}\left(\Big/_{0}^{T/2} -\frac{1}{p}t\mathrm{e}^{-pt} + \int_0^{T/2}\frac{1}{p}\mathrm{e}^{-pt}\,dt \right) - \frac{2}{p}\Big/_{T/2}^{T} \mathrm{e}^{-pt} \\
&\quad - \frac{2}{T}\left(\Big/_{T/2}^{T} -\frac{1}{p}t\mathrm{e}^{-pt} + \int_{T/2}^{T}\frac{1}{p}\mathrm{e}^{-pt}\,dt \right) \\
&= -\frac{2}{Tp^2}\mathrm{e}^{-\frac{T}{2}p} + \frac{2}{Tp^2} + \frac{2}{Tp^2}\mathrm{e}^{-pT} - \frac{2}{Tp^2}\mathrm{e}^{-\frac{T}{2}p}.
\end{aligned}
$$

Toisin sanoen

$$
F(p) = (1-\mathrm{e}^{-pT})^{-1}\left(-\frac{2}{Tp^2}\mathrm{e}^{-\frac{T}{2}p} + \frac{2}{Tp^2} + \frac{2}{Tp^2}\mathrm{e}^{-pT} - \frac{2}{Tp^2}\mathrm{e}^{-\frac{T}{2}p} \right).
$$

Kehitetään seuraavaksi tekijä $(1-\mathrm{e}^{-pT})^{-1}$ sarjaksi, jolloin

$$
\begin{aligned}
F(p) &= \left(1+\mathrm{e}^{-pT}+\mathrm{e}^{-2pT}+\mathrm{e}^{-3pT}+\dots\right) \\
&\quad \left(-\frac{2}{Tp^2}\mathrm{e}^{-\frac{T}{2}p} + \frac{2}{Tp^2} + \frac{2}{Tp^2}\mathrm{e}^{-pT} - \frac{2}{Tp^2}\mathrm{e}^{-\frac{T}{2}p} \right) \\
&= \frac{2}{Tp^2}\Big(-\mathrm{e}^{-\frac{T}{2}p} + 1 + \mathrm{e}^{-pT} - \mathrm{e}^{-\frac{T}{2}p} - \mathrm{e}^{-\frac{3T}{2}p} + \mathrm{e}^{-pT} \\
&\quad + \mathrm{e}^{-2pT} - \mathrm{e}^{-\frac{3T}{2}p} - \mathrm{e}^{-\frac{5T}{2}p} + \mathrm{e}^{-2pT} - \mathrm{e}^{-\frac{5T}{2}p} + \dots \Big) \\
&= \frac{2}{T}\left(\frac{1}{p^2} + \frac{2}{p^2}\left(-\mathrm{e}^{-\frac{T}{2}p} + \mathrm{e}^{-pT} - \mathrm{e}^{-\frac{3T}{2}p} + \dots \right) \right) \\
&= \frac{2}{T}\left(\frac{1}{p^2} + 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{p^2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}Tnp} \right).
\end{aligned}
$$

Lauseen 3.8 mukaan

$$
f(t) = \frac{2}{T}\left(tH(t) + 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \left(t-\frac{1}{2}Tn\right) H\left(t-\frac{1}{2}Tn\right) \right),
$$

mikä oli todistettava.

4 Laplace-muunnosten sovelluksia

Laplace-muunnosten sovellusmahdollisuudet ulottuvat hyvin laajalle eri fysiikan aihealueilla. Muunnos soveltuu erinomaisesti erilaisten systeemien mallintamiseen, jotka ovat lepotilassa ennen ajanhetkeä $t = 0$. Tässä luvussa keskitytään lähinnä muunnoksen sovellusmahdollisuuksien matemaattiseen perustaan, sillä Laplace-muunnos on erittäin käyttökelpoinen erilaisten differentiaali- ja differenssiyhtälöiden, sekä integraaliyhtälöiden ratkaisussa. Tavoitteena on käyttää aikaisemmissa luvuissa esiteltyjä tuloksia ja havainnollistaa muunnoksen hyödyllisyyttä matematiikassa ja varsinkin sovelletussa matematiikassa.

4.1 Differentiaaliyhtälöistä

Laplace-muunnos on erityisen hyödyllinen työkalu differentiaaliyhtälöitä ratkaistaessa. Muunnoksen käyttökelpoisuus perustuu osittain siihen, että yhtälön yleistä ratkaisua ei ole tarpeen etsiä, vaan alkuehdot voidaan ottaa jo alussa huomioon. Tämä on huomattava etu perinteiseen ratkaisumenetelmään verrattuna. Tässä aliluvussa ratkaistaan erilaisia differentiaaliyhtälöitä Laplace-muunoksen avulla. Aloitetaan yksinkertaisella esimerkillä.

Esimerkki 4.1 (vrt. [4, s. 275, teht. 9])**.** Ratkaistaan vakiokertoiminen differentiaaliyhtälö

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} + 6\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + 13y = 0, \quad \text{kun } y(0) = y'(0) = 1.$$

Etsitään Laplace-muunnokset puolittain, jolloin muunnoksen lineaarisuuden vuoksi jokaisen termin Laplace-muunnos voidaan etsiä erikseen. Lauseen 2.4 tulosta ja alkuehtoja käyttämällä

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}\left[\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}\right] &= p^2\mathfrak{L}[y(t)] - py(0) - y'(0) = p^2\mathfrak{L}[y(t)] - p - 1 \quad \text{ja} \\ 6\mathfrak{L}\left[\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right] &= 6p\mathfrak{L}[y(t)] - 6y(0) = 6p\mathfrak{L}[y(t)] - 6. \end{aligned}$$

Lisäksi $\mathfrak{L}[13y(t)] = 13\mathfrak{L}[y(t)]$ ja $\mathfrak{L}[0] = 0$, jolloin uusi yhtälö on

$$p^2\mathfrak{L}[y(t)] - p - 1 + 6p\mathfrak{L}[y(t)] - 6 + 13\mathfrak{L}[y(t)] = 0,$$

mistä $\mathfrak{L}[y(t)]$ on helppo ratkaista. Siis

$$\mathfrak{L}[y(t)] = \frac{7+p}{p^2+6p+13} = \frac{7+p}{(p+3)^2+2^2} = \frac{p+3}{(p+3)^2+2^2} + 2\frac{2}{(p+3)^2+2^2}.$$

Nyt etsitään käänteismuunnos, jonka avulla saadaan suoraan vastaus alkuperäiseen ongelmaan. Esimerkkien 2.4 ja 2.5, sekä lauseen 2.2(3) perusteella

$$y(t) = \mathrm{e}^{-3t}\cos 2t + 2\mathrm{e}^{-3t}\sin 2t.$$

Jos ratkaistavana oleva differentiaaliyhtälö sisältää paloittain määriteltyjä funktioita, käytetään ratkaisussa hyväksi Heavisiden funktiota.

Esimerkki 4.2 (vrt. [1, s. 326, teht. 13]). Ratkaistaan differentiaaliyhtälö

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} + y(t) = \begin{cases} t & \text{kun } 0 \leq t < 2, \\ 2 & \text{kun } t \geq 2 \end{cases}$$

käyttäen Laplace-muunnosta, kun $y(0) = 1$ ja $y'(0) = 0$. Nyt yhtälön oikea puoli voidaan kirjoittaa uudelleen käyttäen hyväksi Heavisiden funktiota, jolloin

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} + y(t) = t - (t-2)H(t-2). \tag{4.1}$$

Otetaan Laplace-muunnokset puolittain, jolloin muunnoksen lineaarisuuden vuoksi jokaisen termin muunnos voidaan laskea erikseen. Nyt siis käyttäen hyväksi lauseen 2.4 tulosta ja alkuehtoja saadaan

$$\mathfrak{L}\left[\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}\right] = p^2 \mathfrak{L}[y(t)] - py(0) - y'(0) = p^2 \mathfrak{L}[y(t)] - p.$$

Lisäksi esimerkin 2.2 ja lauseen 2.2(4) perusteella tiedetään, että

$$\mathfrak{L}[t] = \frac{1}{p^2} \qquad \text{ja} \qquad \mathfrak{L}[(t-2)H(t-2)] = \frac{\mathrm{e}^{-2p}}{p^2}.$$

Nyt yhtälön 4.1 Laplace-muunnos on

$$p^2 \mathfrak{L}[y(t)] - p + \mathfrak{L}[y(t)] = \frac{1}{p^2} - \frac{\mathrm{e}^{-2p}}{p^2},$$

josta voidaan ratkaista $\mathfrak{L}[y(t)]$, jolloin

$$\mathfrak{L}[y(t)] = \frac{1}{p^2(p^2+1)} - \frac{\mathrm{e}^{-2p}}{p^2(p^2+1)} + \frac{p}{p^2+1}. \tag{4.2}$$

Tehtäväksi jää etsiä funktion $\mathfrak{L}[y(t)]$ käänteismuunnos, joka on alkuperäisen differentiaaliyhtälön ratkaisu. Koska termeittäin kääntäminen on sallittua, voidaan aloittaa etsimällä käänteismuunnos $\mathfrak{L}^{-1}[(p^2(p^2+1))^{-1}]$. Siis

$$\mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{1}{p^2(p^2+1)}\right] = \mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{1}{p^2(p+\mathrm{i})(p-1)}\right],$$

jolloin residyt kussakin navassa ovat lauseiden 1.5 ja 1.4 mukaan

$$\operatorname{res}\left\{\frac{\mathrm{e}^{pt}}{p^2(p+\mathrm{i})(p-\mathrm{i})}; 0\right\} = \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\frac{\mathrm{e}^{pt}}{p^2+1}\right]_{p=0} = t,$$

$$\operatorname{res}\left\{\frac{\mathrm{e}^{pt}}{p^2(p+\mathrm{i})(p-\mathrm{i})};\mathrm{i}\right\} = \left[\frac{\mathrm{e}^{pt}}{p^2(p+\mathrm{i})}\right]_{p=\mathrm{i}} = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}{-2\mathrm{i}} \quad \text{ja}$$

$$\operatorname{res}\left\{\frac{\mathrm{e}^{pt}}{p^2(p+\mathrm{i})(p-\mathrm{i})};-\mathrm{i}\right\} = \left[\frac{\mathrm{e}^{pt}}{p^2(p-\mathrm{i})}\right]_{p=-\mathrm{i}} = \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}}{2\mathrm{i}}$$

eli

$$\mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{1}{p^2(p^2+1)}\right] = t - \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}{2\mathrm{i}} + \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}}{2\mathrm{i}} = t - \sin t \quad (\text{merkitään } f(t)).$$

Tämän tuloksen ja lauseen 2.2(4) avulla saadaan yhtälön 4.2 oikean puolen toisen termin käänteismuunnokseksi

$$\mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{\mathrm{e}^{-2p}}{p^2(p^2+1)}\right] = f(t-2)H(t-2).$$

Lisäksi, koska esimerkin 2.4 mukaisesti $\mathfrak{L}^{-1}[p/(p^2+1)] = \cos t$, niin ratkaisuksi saadaan

$$\begin{aligned} y(t) &= f(t) - f(t-2)H(t-2) + \cos t \\ &= t - \sin t - (t-2)H(t-2) + \sin(t-2)H(t-2) + \cos t \end{aligned}$$

eli

$$y(t) = \begin{cases} t - \sin t + \cos t & \text{kun } 0 \le t < 2, \\ -\sin t + 2 + \sin(t-2) + \cos t & \text{kun } 2 \le t, \end{cases}$$

mikä voidaan todistaa oikeaksi sijoittamalla se yhtälöön 4.1.

Esimerkki 4.3 (vrt. [4, s. 276, teht. 13])**.** Ratkaistaan muuttujakertoiminen differentiaaliyhtälö

$$tf''(t) + (1+t)f'(t) + f(t) = t^2 \quad (t \ge 0)$$

käyttäen Laplace-muunnosta. Otetaan Laplace-muunnokset puolittain, jolloin muunnoksen lineaarisuuden vuoksi voidaan jokainen termi muuntaa erikseen. Tällöin käyttäen lauseita 2.5 ja 2.4

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}[tf''(t)] &= -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}(p^2\mathfrak{L}[f(t)] - pf(0) - f'(0)) \\ &= -2p\mathfrak{L}[f(t)] - p^2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\mathfrak{L}[f(t)] + f(0), \\ \mathfrak{L}[f'(t)] &= p\mathfrak{L}[f(t)] - f(0), \\ \mathfrak{L}[tf'(t)] &= -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}(p\mathfrak{L}[f(t)] - f(0)) = -\mathfrak{L}[f(t)] - p\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\mathfrak{L}[f(t)] \quad \text{ja} \\ \mathfrak{L}[t^2] &= \frac{2}{p^3}. \end{aligned}$$

Yhtälön Laplace-muunnos on siis

$$-2p\mathfrak{L}[f(t)] - p^2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\mathfrak{L}[f(t)] + p\mathfrak{L}[f(t)] - p\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\mathfrak{L}[f(t)] = \frac{2}{p^3},$$

joka voidaan sieventää muotoon

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}F(p) + \frac{1}{p+1}F(p) = -\frac{2}{p^4(p+1)}.$$

Ratkaistavaksi jää ensimmäisen kertaluvun lineaarinen differentiaaliyhtälö. Kerrotaan yhtälö puolittain lausekkeella $\mathrm{e}^{\int \frac{1}{p+1}\,dp} = p+1$. Tällöin

$$(p+1)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}F(p) + F(p) = -\frac{2}{p^4}.$$

Yhtälön vasen puoli koostuu tulon derivaatasta, jolloin

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}(F(p)(p+1)) = -\frac{2}{p^4}.$$

Kun otetaan integraalit muuttujan p suhteen puolittain, saadaan

$$F(p) = \frac{2}{3}\frac{1}{p^3(p+1)} + A\frac{1}{p+1}, \quad \text{(A vakio)},$$

mistä seuraa, että

$$f(t) = \frac{2}{3}\mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{1}{p^3(p+1)}\right] + A\mathrm{e}^{-t}.$$

Lauseen 3.6 avulla saadaan viimeinen käänteismuunnos ratkaistuksi, sillä funktiolla $(p^3(p+1))^{-1}$ on kertalukua kolme oleva näkyvä napa pisteessä $p=0$, sekä yksinkertainen näkyvä napa pisteessä $p=-1$, jolloin lauseiden 1.5 ja 1.4 avulla

$$\operatorname{res}\left\{\frac{\mathrm{e}^{pt}}{p^3(p+1)}; 0\right\} = \frac{1}{2}t^2 - t + 1 \quad \text{ja} \quad \operatorname{res}\left\{\frac{\mathrm{e}^{pt}}{p^3(p+1)}; -1\right\} = -\mathrm{e}^{-t}.$$

Siis

$$f(t) = \frac{1}{3}t^2 - \frac{2}{3}t + \frac{2}{3} - \frac{2}{3}\mathrm{e}^{-t} + A\mathrm{e}^{-t},$$

joka on ratkaistavana olleen muuttujakertoimisen differentiaaliyhtälön yleinen ratkaisu.

Esimerkki 4.4 (vrt. [4, s. 276, teht. 12]). Osoitettava, että $x(t) = (a^2 + (b^2+c^2)\cos\omega t)/\omega^2$, missä $\omega^2 = a^2+b^2+c^2$, kun tiedetään, että

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}p} &= bz - cy, \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}p} &= cx - az, \\ \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}p} &= ay - bx \end{cases}$$

ja $x(0) = 1$, sekä $y(0) = z(0) = 0$. Otetaan ensin yhtälöryhmän jokaisesta yhtälöstä Laplace-muunnos puolittain, jolloin sijoittamalla yhtälöihin alkuehdot saadaan

$$\begin{cases} p\mathfrak{L}[x] - 1 & = b\mathfrak{L}[z] - c\mathfrak{L}[y], \\ p\mathfrak{L}[y] & = c\mathfrak{L}[x] - a\mathfrak{L}[z], \\ p\mathfrak{L}[z] & = a\mathfrak{L}[y] - b\mathfrak{L}[x]. \end{cases}$$

Tavoitteena on siis ratkaista $\mathfrak{L}[x]$, joten ratkaistaan ensin alimmasta yhtälöstä $\mathfrak{L}[z]$, sijoitetaan se ylempiin yhtälöihin, ratkaistaan $\mathfrak{L}[y]$ toisesta yhtälöstä ja sijoitetaan se ylimpään yhtälöön. Tällöin ylin yhtälö voidaan sieventää muotoon

$$p\mathfrak{L}[x] = \frac{ab}{p}\left(\frac{cp+ab}{p^2+a^2}\mathfrak{L}[x]\right) - \frac{b^2}{p}\mathfrak{L}[x] - \left(\frac{c^2p+abc}{p^2+a^2}\mathfrak{L}[x]\right) + 1$$

eli

$$\mathfrak{L}[x] = \frac{p^2+a^2}{p(p^2+a^2+b^2+c^2)} = \frac{(p^2+a^2)(a^2+b^2+c^2)}{p(p^2+a^2+b^2+c^2)(a^2+b^2+c^2)}.$$

Edelleen funktion $x(t)$ Laplace-muunnos voidaan sieventää muotoon

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}[x] = & \left(\frac{a^2}{a^2+b^2+c^2}\right)\left(\frac{1}{p}\right) + \left(\frac{b^2}{a^2+b^2+c^2}\right)\left(\frac{p}{p^2+(a^2+b^2+c^2)}\right) \\ & + \left(\frac{c^2}{a^2+b^2+c^2}\right)\left(\frac{p}{p^2+(a^2+b^2+c^2)}\right), \end{aligned}$$

mistä seuraa, että

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{a^2}{a^2+b^2+c^2} + \frac{b^2}{a^2+b^2+c^2}\cos\sqrt{a^2+b^2+c^2}\,t \\ &+ \frac{c^2}{a^2+b^2+c^2}\cos\sqrt{a^2+b^2+c^2}\,t \\ &= \frac{a^2+(b^2+c^2)\cos\omega t}{\omega^2}, \end{aligned}$$

kun merkitään $\omega^2 = a^2+b^2+c^2$. Väite on nyt todistettu.

Laplace-muunnosta käytetään myös osittaisdifferentiaaliyhtälöiden ratkaisuun. Tällöin ideana on ottaa Laplace-muunnokset toisen muuttujan suhteen alkuperäisestä osittaisdifferentiaaliyhtälöstä, jolloin saavutetaan tavallinen differentiaaliyhtälö. Tämä taas voidaan ratkaista perinteisin differentiaaliyhtälöiden ratkaisumenetelmin. Näin saadaan selville ratkaistavan kahden muuttujan funktion Laplace-muunnos, josta käänteismuunnoksen avulla saadaan selville vastaus alkuperäiseen ongelmaan.

Esimerkki 4.5 (vrt. [4, s. 277, teht. 17])**.** Ratkaistaan funktio $u(x,t)$, kun tiedetään, että

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = t\mathrm{e}^{-x}, \quad \text{missä } x, t > 0. \tag{4.3}$$

Lisäksi tiedetään, että $u(x,0) = 0$, $u_t(x,0) = x$ ja $u(0,t) = 1 - \mathrm{e}^{-t}$. Otetaan differentiaaliyhtälöstä Laplace-muunnokset muuttujan t suhteen puolittain, jolloin yhtälö 4.3 voidaan kirjoittaa muodossa

$$p^2 U(x,p) - pu(x,0) - u_t(x,0) - \frac{\mathrm{d}^2 U}{\mathrm{d}x^2} = \frac{1}{p^2}\mathrm{e}^{-x},$$

kun

$$\int_0^\infty \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\mathrm{e}^{-pt}\,dt = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\int_0^\infty u\mathrm{e}^{-pt}\,dt.$$

Seuraavaksi sijoitetaan saatuun yhtälöön alkuehdot, jolloin saadaan

$$p^2 U(x,p) - \frac{\mathrm{d}^2 U}{\mathrm{d}x^2} = \frac{1}{p^2}\mathrm{e}^{-x} + x,$$

joka taas on tavallinen differentiaaliyhtälö, kun käsitellään muuttujaa p vakiona. Vastaavan homogeenisen differentiaaliyhtälön

$$p^2 U(x,p) - \frac{\mathrm{d}^2 U}{\mathrm{d}x^2} = 0$$

ratkaisu on $U(x,p)_c = A(p)\mathrm{e}^{px} + B(p)\mathrm{e}^{-px}$, missä A ja B ovat muuttujan p funktioita. Lisäksi kokeilemalla yksityisratkaisuksi funktiota $y = C\mathrm{e}^{-x} + Dx$ saadaan kertoimiksi $C = (p^2(p^2-1))^{-1}$ ja $D = p^{-2}$. Tällöin yksityisratkaisu on $U(x,p)_p = (p^2(p^2-1))^{-1}\mathrm{e}^{-x} + p^{-2}x$, mistä seuraa

$$U(x,p) = U(x,p)_c + U(x,p)_p = A(p)\mathrm{e}^{px} + B(p)\mathrm{e}^{-px} + \frac{1}{p^2(p^2-1)}\mathrm{e}^{-x} + \frac{1}{p^2}x.$$

Ratkaistaan seuraavaksi kertoimet A ja B. Täyttääkseen lauseen 3.6 oletukset on löydyttävä sellaiset vakiot k ja M, että suurella muuttujan $|p|$ arvolla $|U(x,p)| \leq M|p|^{-k}$. Tästä seuraa, että $A(p) = 0$, koska $|\mathrm{e}^{px}|$ kasvaa rajatta, kun $|p| \to \infty$. Lisäksi viimeisestä alkuehdosta $u(0,t) = 1 - \mathrm{e}^{-t}$ seuraa, että $U(0,p) = 1/p - 1/(p+1) = 1/p(p+1)$, jolloin on oltava

$$B(p) + \frac{1}{p^2(p^2-1)} = \frac{1}{p(p+1)}, \quad \text{eli } B(p) = \frac{p^2-p-1}{p^2(p^2-1)}.$$

Siis

$$U(x,p) = \frac{p^2-p-1}{p^2(p^2-1)}\mathrm{e}^{-px} + \frac{1}{p^2(p^2-1)}\mathrm{e}^{-x} + \frac{1}{p^2}x = F(p)\mathrm{e}^{-px} + \mathrm{e}^{-x}G(p) + xK(p).$$

Tällöin
$$u(x,t) = f(t-x)H(t-x) + \mathrm{e}^{-x}g(t) + xt,$$
missä H on Heavisiden funktio, kun otetaan käänteismuunnokset muuttujan t suhteen puolittain, jolloin muuttujaa x kohdellaan kuin vakiota. Ratkaistaan funktiot f ja g käyttäen residylausetta 3.6. Funktiolla F on näkyvä kertalukua $m = 2$ oleva napa pisteessä $p = 0$, sekä näkyvät yksinkertaiset navat pisteessä $p = \pm 1$. Siis
$$\begin{aligned} f(t) = &\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\frac{p^2\mathrm{e}^{pt} - p\mathrm{e}^{pt} - \mathrm{e}^{pt}}{p^2-1}\right]_{p=0} + \left[\frac{p^2\mathrm{e}^{pt} - p\mathrm{e}^{pt} - \mathrm{e}^{pt}}{p^2(p+1)}\right]_{p=1} \\ &+ \left[\frac{p^2\mathrm{e}^{pt} - p\mathrm{e}^{pt} - \mathrm{e}^{pt}}{p^2(p-1)}\right]_{p=-1} = 1 + t - \cosh t, \end{aligned}$$
sekä samoin
$$g(t) = \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\frac{\mathrm{e}^{pt}}{p^2-1}\right]_{p=0} + \left[\frac{\mathrm{e}^{pt}}{p^2(p+1)}\right]_{p=1} + \left[\frac{\mathrm{e}^{pt}}{p^2(p-1)}\right]_{p=-1} = -t + \sinh t.$$
Edellisistä tuloksista seuraa, että
$$u(x,t) = H(t-x) + (t-x)H(t-x) - \cosh(t-x)H(t-x) - t\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{-x}\sinh t + xt,$$
joka voidaan kirjoittaa muodossa
$$u(x,t) = \begin{cases} -t\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{-x}\sinh t + xt & \text{kun } 0 < t < x, \\ 1 + t - x - \cosh(t-x) - t\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{-x}\sinh t + xt & \text{kun } t \geq x. \end{cases}$$
Tulos voidaan todistaa oikeaksi sijoittamalla se yhtälöön 4.3.

4.2 Integraaliyhtälöistä

Integraaliyhtälöllä tarkoitetaan yhtälöä, joka on muotoa

$$y(t) = f(t) + \int_a^b k(x,t)y(x)\,dx, \tag{4.4}$$

missä f ja k ovat tunnettuja funktioita, sekä a ja b ovat joko tunnettuja vakioita tai muuttujan t funktioita. Funktiota y pyritään ratkaisemaan. Integraaliyhtälöiden ratkaiseminen Laplace-muunnoksen avulla ei kuitenkaan ole aina kannattavaa, sillä useissa tapauksissa muunnos osoittautuu vaikeammin ratkaistavaksi kuin alkuperäinen yhtälö. Kuitenkin, jos yhtälö 4.4 on muotoa
$$y(t) = f(t) + \int_0^t k(t-x)y(x)\,dx,$$
on yhtälö konvoluutiotyyppiä, jolloin ratkaisu löydetään luonnollisesti helposti konvoluution avulla [5, s. 92].

Esimerkki 4.6 (vrt. [4, s. 275, teht. 8]). Ratkaistaan integraaliyhtälö

$$y(t) = 1 + \int_0^t x\mathrm{e}^{-x} y(t-x)\,dx \quad (t > 0).$$

Otetaan Laplace-muunnokset puolittain, jolloin

$$\mathfrak{L}[y(t)] = \frac{1}{p} + \mathfrak{L}\left[\int_0^t x\mathrm{e}^{-x} y(t-x)\,dx\right].$$

Merkitään $f(x) = x\mathrm{e}^{-x}$, jolloin konvoluution (lause 3.7) avulla

$$\mathfrak{L}\left[\int_0^t x\mathrm{e}^{-x} y(t-x)\,dx\right] = \mathfrak{L}[h(t)] = \mathfrak{L}[f(x)]\mathfrak{L}[y(t)] = \frac{\mathfrak{L}[y(t)]}{(p+1)^2}.$$

Tästä seuraa

$$\mathfrak{L}[y(t)] = \frac{(p+1)^2}{p^2(p+2)},$$

jolloin residylauseen avulla (lause 3.6) saadaan selville käänteismuunnos eli vastaus alkuperäiseen ongelmaan. Muunnoksella on kertalukua $m = 2$ oleva näkyvä napa pisteessä $p = 0$, sekä näkyvä yksinkertainen napa pisteessä $p = -2$. Tällöin lauseiden 1.5 ja 1.4 mukaan

$$\begin{aligned}
\mathrm{res}\{\mathfrak{L}[y(t)]\mathrm{e}^{pt}; 0\} &= \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\frac{\mathrm{e}^{pt}(p+1)^2}{p+2}\right]_{p=0} = \frac{2t+3}{4}, \\
\mathrm{res}\{\mathfrak{L}[y(t)]\mathrm{e}^{pt}; -2\} &= \frac{\mathrm{e}^{-2t}(-2+1)^2}{(-2)^2} = \frac{\mathrm{e}^{-2t}}{4},
\end{aligned}$$

jolloin

$$y(t) = \frac{\mathrm{e}^{-2t}}{4} + \frac{t}{2} + \frac{3}{4}.$$

4.3 Differenssiyhtälöistä

Differenssiyhtälöllä tarkoitetaan yhtälöä, joka sisältää ratkaistavan funktion $f(t)$ siirtymiä $f(t-a)$. Tällaisten funktioiden ratkaiseminen Laplace-muunnoksen avulla on kannattavampaa kuin edellä integraalifunktioiden ratkaiseminen. Differenssiyhtälöiden ratkaisutapa eroaa differentiaaliyhtälöiden ratkaisusta ainoastaan siinä, että siirtymäfunktiota muunnettaessa on muistettava, että $\mathfrak{L}[f(t-a)] = \mathfrak{L}[H(t-a)f(t-a)] = \mathrm{e}^{-ap}F(p)$, missä funktio H on Heavisiden funktio. Ratkaistavat yhtälöt voivat myös olla differentiaali-, integraali- ja differenssiyhtälöiden yhdistelmiä.

Esimerkki 4.7. Ratkaistaan differenssiyhtälö $y_{t-1} - y_t = t^2$ Laplace-muunnoksen avulla. Aloitetaan ottamalla Laplace-muunnokset puolittain. Merkitään $y_{t-1} = f(t-1)$ ja sekä $y_t = f(t)$, jolloin vastaavat Laplace-muunnokset ovat $\mathfrak{L}[f(t-1)] = \mathrm{e}^{-p}F(p)$ ja $\mathfrak{L}[f(t)] = F(p)$. Laplace-muunnoksen määritelmän mukaan $f(t-1) = 0$, jos $t < 1$. Tässä tapauksessa $y_t = -t^2$. Laplace-muunnoksen avulla ratkaistava yhtälö muuntuu muotoon

$$\mathrm{e}^{-p}F(p) - F(p) = (-1)^2 \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}p^2} p^{-1}.$$

Tästä voidaan ratkaista funktio $F(p)$, jolloin ottamalla käänteismuunnos saadaan vastaus alkuperäiseen differenssiyhtälöön. Siis

$$F(p) = \frac{2}{p^3(\mathrm{e}^{-p} - 1)} = -\frac{2}{p^3} - \frac{2}{p^3}\mathrm{e}^{-p} - \frac{2}{p^3}\mathrm{e}^{-2p} - \frac{2}{p^3}\mathrm{e}^{-3p} - \ldots,$$

jossa viimeinen muoto on saatu kehittämällä tekijä $(\mathrm{e}^{-p} - 1)^{-1}$ sarjaksi. Seuraavaksi saadaan vastaus käyttämällä hyväksi tulosta $\mathfrak{L}[H(t-a)f(t-a)] = \mathrm{e}^{-ap}F(p)$ ja lausetta 3.8, jolloin

$$f(t) = \begin{cases} -t^2 & , 0 \le t < 1, \\ -t^2 - (t-1)^2 & , 1 \le t < 2, \\ -t^2 - (t-1)^2 - (t-2)^2 & , 2 \le t < 3, \\ \vdots & . \end{cases}$$

Toisin sanoen

$$f(t) = -t^2 - H(t-1)(t-1)^2 - H(t-2)(t-2)^2 - H(t-3)(t-3)^2 - \ldots.$$

Viitteet

[1] Beerends, R.J., ter Morsche, H.G., van den Berg, J.C., van den Vrie, E.M., *Fourier and Laplace Transforms*, The Press Syndicate of the University of Cambridge, Cambridge, 2003.

[2] Courant, R., *Differential and Integral Calculus* [www-dokumentti], Päivitetty 15.5.2003 [Viitattu 13.10.2005],
URL http://kr.cs.ait.ac.th/~radok/math/mat6/startdiall.htm.

[3] Jaeger, J.C., *Introduction to the Laplace Transformation*, The University Press, Aberdeen, 1966.

[4] Priestley, H.A., *Introduction to Complex Analysis*, 2nd ed., Oxford University Press Inc., New York, 2003.

[5] Shafii-Mousavi, M., *The Essentials of Laplace Transforms*, Research and Education Association, New Jersey, 1991.

[6] Smith, M.G., *Laplace Transform Theory*, D Van Nostrand Company Ltd., London, 1966.

[7] Weisstein, E.W., *Laplace Transform* [www-dokumentti], MathWorld-A Wolfram Web Resource, 2002, Päivitetty 28.9.2005 [Viitattu 13.10.2005],
URL http://mathworld.wolfram.com/LaplaceTransform.html.

[8] Väisälä, K., *Laplace-muunnos*, Teknillisen Korkeakoulun Ylioppilaskunta, Helsinki, 1964.