TAMPEREEN YLIOPISTO
Pro gradu -tutkielma

Olli Savolainen

Determinantin määritelmistä ja ominaisuuksista

Matematiikan, tilastotieteen ja filosofian laitos
Matematiikka
Heinäkuu 2005

Tampereen yliopisto

Matematiikan, tilastotieteen ja filosofian laitos

SAVOLAINEN, OLLI: Determinantin määritelmistä ja ominaisuuksista

Pro gradu -tutkielma, 61 s.

Matematiikka

Heinäkuu 2005

TIIVISTELMÄ

Tutkielmassa determinantti määritellään kahdella tavalla, permutatiivisesti ja aksiomaattisesti. Tutkielma sisältää kolme lukua. Ensimmäisessä luvussa determinantti määritellään permutatiivisesti ja toisessa aksiomaattisesti. Lisäksi toisessa luvussa osoitetaan, että edellä mainitut determinantin määritelmät ovat keskenään ekvivalentit. Kolmannessa luvussa lasketaan joitakin determinantteja, kuten Vandermonden determinantti.

Jotta determinantti voidaan määritellä permutatiivisesti, luvussa 1 määritellään muun muassa käsitteet sykli, transpositio ja merkki sekä johdetaan niihin liittyviä lauseita. Luvussa 2 aksiomaattisesti määritelty determinantti on n-lineaarinen alternoiva funktio. Tällöin, kun determinantin määrittelee aksiomaattisesti, identiteettimatriisin determinantti määritellään ykköseksi.

Tutkielman pääpaino on luvussa 2: determinantti määritellään aksiomaattisesti ensin 2×2- ja sitten $n \times n$-matriiseille. Luvussa 2.2 tutkitaan 2×2-matriisin geometrista tulkintaa. Determinantin ominaisuuksia johdetaan aksiomaattisesta lähtökohdasta luvuissa 2.4-2.6.

Tutkielmassa on käytetty päälähdekirjoina Stephen H. Friedbergin teosta Linear Algebra ja William C. Brownin kirjaa Matrices and Vector Spaces.

Sisältö

Johdanto

Tämä tutkielma käsittelee kahta, permutatiivista ja aksiomaattista determinantin määritelmää sekä niistä johdettuja tuloksia. Jokaiselle neliömatriisille, jonka alkiot ovat reaali- tai kompleksilukuja, voidaan määritellä determinantti, joka on reaali- tai kompleksiluku. On mielenkiintoista, miten paljon yksi ainoa luku voi kertoa matriisista. Esimerkiksi matriisin kääntyvyys voidaan päätellä determinantin arvosta. Tulon säilyminen on yksi tärkeä determinantin ominaisuus. Tämä tarkoittaa sitä, että jos kahden matriisin tulo on määritelty, niin näiden matriisien tulon determinantti on sama kuin kyseisistä matriiseista erikseen laskettujen determinanttien tulo. Sen sijaan determinantti ei ole lineaarinen transformaatio, sillä se ei säilytä yhteenlaskua eikä skalaarilla kertomista. Toisin sanoen

$$\det(AB) = \det(A)\det(B),$$

mutta

$$\det(A + B) \neq \det(A) + \det(B) \text{ ja } \det(cA) \neq c\det(A),$$

vaikka matriisien A ja B yhteenlasku olisi määritelty.

Ensimmäisessa luvussa determinantti määritellään permutatiivisesti heti sen jälkeen, kun ollaan ensin määritelty permutaatioihin liittyviä käsitteitä ja johdettu niihin liittyviä tuloksia. Esimerkiksi käsitteitä sykli, transpositio ja merkki tarvitaan, kun determinantti määritellään tällä tavalla.

Toisessa luvussa determinantti määritellään kolmella aksioomalla. Luvussa 2.1 määritellään käsitteitä ja esitetään tuloksia, joita tarvitaan luvuissa 2.3-2.6. Luvussa 2.2 determinantti määritellään aksiomaattisesti 2×2-matriiseille. Lisäksi luvussa 2.2.2 tutkitaan 2×2-matriisin determinantin geometrista sovellusta. Tässä luvussa huomataan, että itseisarvo determinantista vastaa tietyllä tavalla määriteltyä suunnikkaan alaa tasokoordinaatistossa. Luvussa 2.3 determinantti määritellään aksiomaattisesti $n \times n$-matriiseille ja luvussa 2.4 huomataan, että kyseinen määritelmä on ekvivalentti luvussa 1 esitetyn determinantin määritelmän kanssa, kun determinantti määriteltiin permutaatioiden avulla. Lisäksi luvuissa 2.4-2.5 käydään läpi determinantin tärkeimpiä ominaisuuksia aksiomaattisesta lähtökohdasta ja luvussa 2.6 johdetaan niin sanottu Cramerin sääntö yhtälöryhmän ratkaisemiseksi determinanttien avulla.

Viimeisessä eli kolmannessa luvussa lasketaan lisää joitakin determinantteja, kuten Vandermonden determinantti.

Tutkielman pääpaino on aksiomaattisesti määritellyssä determinantissa: determinantin ominaisuuksia johdetaan nimenomaan tästä oletuksesta. Mutta toisaalta permutatiivisesti määritelty determinantti tuo lisää syvyyttä kyseisen käsitteen moninaisuuteen.

Tässä tutkielmassa kunnalla $\mathbb{F}$ tarkoitetaan reaalilukujen kuntaa $\mathbb{R}$ tai kompleksilukujen kuntaa $\mathbb{C}$. Tutkielma seuraa pääasiassa teoksia [3] ja [1]. Esimerkit ovat kirjoittajan omia, ellei toisin mainita. Jotkin esimerkit on otettu suoraan lähdekirjasta, koska niitä parempia esimerkkejä on vaikea keksiä kyseisen aihealueen takia.

Vaikka determinantti kuuluu lineaarialgebran peruskäsitteisiin, esimerkiksi Tampereen yliopiston kurssilla Lineaarialgebra I, jolla seurataan lähdettä [2], determinantti määritellään tylsästi suoraan sarakekehitelmänä ilman kummempia perusteluja. Tutkielmassa sarakekehitelmä johdetaan determinantin permutatiivisesta ja aksiomaattisesta määritelmästä. Lukijalta odotetaan perustietoja matriisilaskennasta ja lineaarialgebrasta.

1 Determinantin permutatiivinen määritelmä

1.1 Permutaatioista ja niiden ominaisuuksista

Määritellään aluksi permutaation käsite ja johdetaan siihen liittyviä tuloksia, joita tarvitaan myöhemmin tässä luvussa, kun määritellään determinantin käsite sekä johdetaan siihen liittyviä tuloksia. Luvussa 1 viitataan teokseen [1, s. 155-171], jos ei toisin mainita.

Merkitään $\Delta(n) = \{1, 2, 3, ..., n\}$. Kokoa n oleva permutaatio, n-permutaatio, määritellään seuraavasti.

Määritelmä 1.1. *n-permutaatio* on bijektio lähtöjoukolta $\Delta(n)$ maalijoukolle $\Delta(n)$.

Otetaan käyttöön symboli S_n tarkoittamaan joukkoa, joka sisältää kaikki n-permutaatiot. Toisin sanoen $S_n = \{\sigma : \Delta(n) \mapsto \Delta(n) |\ \sigma \text{ on bijektio}\}$. Joukkoa S_n kutsutaan *symmetriseksi ryhmäksi* luvun n suhteen.

On helppo laskea, kuinka monta alkiota joukko S_n sisältää. Muodostetaan bijektio $\sigma : \Delta(n) \mapsto \Delta(n)$. Koska $\Delta(n)$ on äärellinen joukko, niin riittää konstruoida kuvaus σ, joka on injektio joukolta $\Delta(n)$ joukolle $\Delta(n)$. Tämä on sallittua siksi, että kun σ on injektio, niin σ on surjektio, sillä jokaista maalijoukon alkiota $y \in \Delta(n)$ kohti on olemassa $y = \sigma(x)$ jollakin $x \in \Delta(n)$.

Kuvauksen σ arvo muuttujan arvolla 1, toisin sanoen $\sigma(1)$, voi olla mikä tahansa joukon $\Delta(n)$ n:stä alkiosta. Koska σ on injektio, niin kuvauksen arvolle $\sigma(2)$ on $n-1$ vaihtoehtoa ($\sigma(1) \neq \sigma(2)$), kun $\sigma(1)$ on kiinnitetty. Kun $\sigma(1)$ ja $\sigma(2)$ on valittu, kuvauksen arvolle $\sigma(3)$ on $n-2$ vaihtoehtoa, kun $\sigma(1) \neq \sigma(3)$ ja $\sigma(2) \neq \sigma(3)$. Jatkamalla vastaavalla tavalla saadaan $n(n-1)(n-2)\cdots(3)(2)(1) = n!$ erilaista kuvausta σ. Täten S_n on äärellinen joukko, joka sisältää $n!$ alkiota. Yhtäpitävästi voidaan sanoa, että on olemassa täsmälleen $n!$ joukon $\Delta(n)$ erillistä permutaatiota.

Toisaalta on olemassa näppärämpi tapa ilmaista joukon $\Delta(n)$ permutaatiot. Olkoon $\sigma \in S_n$. Oletetaan, että $\sigma(1) = j_1, \sigma(2) = j_2, \ldots, \sigma(n) = j_n$. Koska σ on bijektio, niin $\Delta(n) = \{j_1, \ldots, j_n\}$. Funktio σ voidaan esittää nyt $2 \times n$-matriisina

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_n \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Huomautus. Matriisimerkintä (1) ei ole tavanomainen matriisi. Siksi nyt, koska σ on bijektio, niin sillä ei ole väliä, missä järjestyksessä alkio $i \in \Delta(n)$ ja sitä vastaava kuva $\sigma(i) \in \Delta(n)$ ovat matriisissa (1). Esimerkiksi

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ j_1 & j_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ j_2 & j_1 \end{pmatrix}.$$

Esimerkki 1.4 löytyy lähdekirjasta. Esimerkit 1.2 ja 1.3 ovat osittain samoja kuin kirjassa.

Esimerkki 1.2. Joukon S_3 permutaatiot voidaan esittää matriiseina

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$

$$\sigma_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \sigma_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \sigma_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Esimerkiksi $\sigma_3(1) = 2$, $\sigma_3(2) = 1$ ja $\sigma_3(3) = 3$.

Esimerkki 1.3. Joukko S_4 sisältää 24 permutaatiota, ja ne voidaan esittää matriiseina

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix},$$

$$\sigma_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \sigma_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \sigma_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\sigma_7 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \sigma_8 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \sigma_9 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix},$$

$$\sigma_{10} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \sigma_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \sigma_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\sigma_{13} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \sigma_{14} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \sigma_{15} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix},$$

$$\sigma_{16} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \sigma_{17} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \sigma_{18} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\sigma_{19} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \sigma_{20} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \sigma_{21} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$

$$\sigma_{22} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \sigma_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \sigma_{24} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Esimerkiksi $\sigma_{13}(1) = 3$, $\sigma_{13}(2) = 1$, $\sigma_{13}(3) = 2$ ja $\sigma_{13}(4) = 4$.

Huomataan, että n-permutaatiot ovat bijektioita, jotka indeksoituvat äärelliseltä n erillistä alkiota sisältävältä joukolta vastaavalle n:n erillisen alkion joukolle. Olkoon $T=\{A_1, \ldots, A_n\}$, jossa $A_1, \ldots, A_n$ ovat erillisiä. Jos $\sigma \in S_n$, niin σ on bijektio joukolta T joukolle T, kun $\sigma(A_i) = A_{\sigma(i)}$ aina, kun $i = 1, \ldots, n$. Edellä esitettyä tapaa käytetään monissa yhteyksissä matematiikassa.

Esimerkki 1.4. Olkoon

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3×3-identiteettimatriisi. Muodostetaan matriisista I_3 kuusi permutaatiomatriisia ottamalla kaikki mahdolliset permutaatiot matriisin I_3 pystyriveistä. Tehdään asia systemaattisella tavalla ja jaetaan matriisi I_3 sarakkeisiin: $I_3 = [\boldsymbol{\epsilon}_1|\boldsymbol{\epsilon}_2|\boldsymbol{\epsilon}_3]$. Edellä $\boldsymbol{\epsilon} = \{\boldsymbol{\epsilon}_1, \boldsymbol{\epsilon}_2, \boldsymbol{\epsilon}_3\}$ on avaruuden $\mathbb{F}^3$ kanoninen kanta. Tämä tarkoittaa sitä, että vektorit $\boldsymbol{\epsilon}_1, \boldsymbol{\epsilon}_2$ ja $\boldsymbol{\epsilon}_3$ muodostavat avaruuden $\mathbb{F}^3$ kannan, kun kunkin pituus on yksi. Olkoon $\sigma(\boldsymbol{\epsilon}_i) = \boldsymbol{\epsilon}_{\sigma(i)}$ joukossa S_3, kun $\boldsymbol{\epsilon}$ on kanta. Nyt jokainen $\sigma \in S_3$ määrittelee uuden matriisin

$I(\sigma) = [\boldsymbol{\epsilon}_{\sigma(1)}|\boldsymbol{\epsilon}_{\sigma(2)}|\boldsymbol{\epsilon}_{\sigma(3)}]$. Käyttämällä samanlaista esitystapaa kuin esimerkissä 1.2 saadaan

$$I(\sigma_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, I(\sigma_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$I(\sigma_3) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, I(\sigma_4) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$I(\sigma_5) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, I(\sigma_6) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Permutaatioden avulla voidaan esittää ytimekkäästi lineaarialgebraan liittyviä tuloksia. Voidaan esimerkiksi havaita, ettei vektoreiden järjestyksellä ole merkitystä määriteltäessä avaruuden V kantaa. Tulos voidaan ilmaista permutaatioden avulla seuraavasti: jokaista $\sigma \in S_n$ kohti joukko $\{\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_n\}$ on avaruuden V kanta jos ja vain jos joukko $\{\boldsymbol{\alpha}_{\sigma_{(1)}}, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_{\sigma(n)}\}$ on avaruuden V kanta.

Koska n-permutaatiot ovat kuvauksia joukolta $\Delta(n)$ joukolle $\Delta(n)$, ne voidaan aina muodostaa. Voidaan osoittaa, että kahden bijektion yhdistetty kuvaus on edelleen bijektio. Näin ollen kahden minkä tahansa permutaation $\sigma, \tau \in S_n$ yhdistetty kuvaus $\sigma\tau$ on permutaatio joukossa S_n. Laskettaessa $\sigma\tau(j)$ mille tahansa $j \in \Delta(n)$ lasketaan ensin $\tau(j)$ matriisimerkinnän (1) mukaisesti ja vasta sen jälkeen $\sigma(\tau(j))$.

Esimerkki 1.5. Oletetaan, että

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ja } \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

ovat kaksi permutaatiota joukossa S_5. Käyttämällä matriisimerkintää (1) saadaan

$$\sigma\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \text{ja } \tau\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

On huomattava, ettei permutaatioden yhdistetty kuvaus ole yleisesti kommutatiivinen. Huomataan, että esimerkissä 1.5 $\sigma\tau \neq \tau\sigma$.

Permutaatioiden $\sigma, \tau \in S_n$ yhdistetty permutaatio voidaan helposti muodostaa kuvauksien σ ja τ matriisiesityksistä. On myös huomattava, ettei se ole tavanomainen matriisitulo.

Lause 1.6. *a)* $\sigma(\tau\gamma) = (\sigma\tau)\gamma$ *kaikilla* $\sigma, \tau, \gamma \in S_n$.

b) On olemassa sellainen yksikäsitteinen permutaatio $I \in S_n$*, että* $\sigma I = I\sigma = \sigma$ *kaikilla* $\sigma \in S_n$.

c) Jokaista $\sigma \in S_n$ *kohti on olemassa sellainen yksikäsitteinen* $\tau \in S_n$*, että* $\sigma\tau = \tau\sigma = I$.

Todistus. a)-kohta pitää paikkansa, sillä kuvausten yhdistäminen on assosiatiivinen. Nimittäin, kun nyt valitaan mielivaltainen $x \in \Delta(n)$, niin

$$\sigma(\tau\gamma)(x) = \sigma((\tau\gamma)(x)) = \sigma(\tau(\gamma(x))) = \sigma\tau(\gamma(x)) = ((\sigma\tau)\gamma)(x).$$

b)-kohdan permutaatio I on identtinen kuvaus joukolta $\Delta(n)$ joukolle $\Delta(n)$. Täten, kun

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n \end{pmatrix},$$

niin

$$\begin{aligned} \sigma I &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ j_1 & j_2 & j_3 & \cdots & j_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ j_1 & j_2 & j_3 & \cdots & j_n \end{pmatrix} = \sigma \end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned} I\sigma &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ j_1 & j_2 & j_3 & \cdots & j_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ j_1 & j_2 & j_3 & \cdots & j_n \end{pmatrix} = \sigma. \end{aligned}$$

Myös myöhemmin tässä luvussa edellä esitetyllä matriisilla I tullaan tarkoittamaan identtistä kuvausta joukolta $\Delta(n)$ joukolle $\Delta(n)$.

Kohdan c) todistamiseksi valitaan mielivaltainen $\sigma \in S_n$. Nyt τ on permutaation σ käänteispermutaatio σ^{-1}. Koska σ on bijektio, permutaatiolla σ on olemassa käänteispermutaatio $\sigma^{-1}:\Delta(n) \mapsto \Delta(n)$. Tällöin $\sigma^{-1}(i) = j$ jos ja vain jos $\sigma(j) = i$. Selvästi σ^{-1} on permutaatio joukossa $\Delta(n)$ ja $\sigma\sigma^{-1} = \sigma^{-1}\sigma = I$. $\square$

Kun S on epätyhjä joukko ja binäärioperaatio $(\alpha, \beta) \mapsto \alpha\beta$ on laskutoimitus joukossa S eli kuvaus joukolta $S \times S$ joukkoon S, niin tätä kokonaisuutta, joka toteuttaa lauseen 1.6 ehdot, kutsutaan algebrassa ryhmäksi. Nyt lauseen 1.6 perusteella S_n on äärellinen ryhmä, jossa kuvausten yhdistäminen toimii binäärioperaationa.

Koska determinantti tullaan myöhemmin määrittelemään permutaatioiden avulla ja jokaiseen permutaatioon liittyy plus- tai miinusmerkki myöhemmin esiteltävän määritelmän mukaisesti, permutaatioiden ominaisuuksista tarvitaan lisää tietoa. Jotta voidaan ymmärtää, mitä permutaation merkki tarkoittaa, ensin täytyy määritellä syklit ja transpositiot.

Määritelmä 1.7. Olkoon $\sigma \in S_n$. Tällöin permutaatiota σ kutsutaan *sykliksi*, jos on olemassa sellaiset r erillistä kokonaislukua $i_1, i_2, \ldots, i_r \in \Delta(n)$, että

a) $\sigma(i_1) = i_2, \sigma(i_2) = i_3, \ldots, \sigma(i_{r-1}) = i_r$ ja $\sigma(i_r) = i_1$,

b) $\sigma(j) = j$ kaikilla $j \in \Delta(n) \setminus \{i_1, \ldots, i_r\}$.

Luku r on syklin *pituus*.

Jos σ on sykli, jonka pituus on yksi, niin tällöin $\sigma = I$. Tämä tapaus ei ole kovin mielenkiintoinen. Oletetaan, että $\sigma \in S_n$ on sykli, jonka pituus r on vähintään kaksi. Tällöin σ on permutaatio, jonka kiertävässä osassa on r erillistä alkiota $i_1, i_2, \ldots, i_r$. Loput joukon $\Delta(n)$ alkiot kuvautuvat itselleen.

Esimerkki 1.8. Olkoot

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 6 & 3 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$
$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 6 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Nyt joukossa S_6 σ_1 on kolmen pituinen sykli ja σ_2 on kuuden pituinen sykli. Lisäksi σ_3 ei ole itse sykli, mutta se on kahden ja neljän pituisen syklin yhdistetty kuvaus, sillä

$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 6 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Olkoon σ r:n pituinen sykli joukossa S_n. Oletetaan, että $r > 1$ ja

$$\sigma(i_1) = i_2,\ \sigma(i_2) = i_3, \ldots, \sigma(i_{r-1}) = i_r \text{ ja } \sigma(i_r) = i_1.$$

Lyhennetään sitten yhtälön (1) matriisimerkintää ja kirjoitetaan tiiviimmin

$$\sigma = (i_1, i_2, \ldots, i_r). \tag{2}$$

Näin ollen esimerkissä 1.8

$$\sigma_1 = (2, 6, 4),\ \sigma_2 = (1, 6, 2, 3, 4, 5) \text{ ja } \sigma_3 = (1, 2)(3, 6, 5, 4).$$

On huomattava, ettei yhtälön (2) mukainen r:n pituinen sykli $(i_1, i_2, \ldots, i_r)$ ole yksikäsitteinen. Selvästi esimerkissä 1.8

$$\sigma_1 = (2, 6, 4) = (6, 4, 2) = (4, 2, 6).$$

Määritelmä 1.9. Kaksi sykliä ovat *erilliset* (engl. disjoint), jos

$$\{i_1, i_2, \ldots, i_r\} \cap \{j_1, j_2, \ldots, j_s\} = \emptyset.$$

Toisin sanoen σ ja τ ovat erilliset, jos esitystavoilla

$$(i_1, i_2, \ldots, i_r) \textit{ ja } (j_1, j_2, \ldots, j_s)$$

ei ole yhteisiä alkioita.

Esimerkissä 1.8 σ_3 on kahden erillisen syklin $(1, 2)$ ja $(3, 6, 5, 4)$ yhdistetty kuvaus. Tämä pätee yleisestikin paikkansa.

Lauseiden 1.10, 1.13 ja 1.14 todistuksia ei löydy lähdekirjasta.

Lause 1.10. *Jokainen permutaatio voidaan esittää järjestystä vaille yksikäsitteisesti erillisten syklien yhdistettynä kuvauksena.*

Todistus. Todistetaan väite induktiolla luvun n suhteen.

Tehdään ensin alkuaskel ja oletetaan, että $\sigma \in S_2$. Joukon S_2 permutaatiot ovat

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \textit{ ja } \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nyt σ_1 voidaan esittää yhden pituisten syklien yhdistettynä kuvauksena, kun taas σ_2 on sykli $(1, 2) = (2, 1)$.

Tehdään sitten induktioaskel. Oletetaan, että väite pitää paikkansa joukolle S_{n-m}, kun $n > m$, ja osoitetaan, että väite pitää paikkansa joukolle S_n. Olkoon $\sigma \in S_n$. Jos σ on sykli, niin asia on selvä. Muussa tapauksessa on olemassa sellaiset $i_1, \ldots, i_m$, että

$$\sigma = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_m & j_1 & \cdots & j_{n-m} \\ i_2 & i_3 & \cdots & i_1 & j_1' & \cdots & j_{n-m}' \end{pmatrix},$$

missä $\{j_1, \ldots, j_{n-m}) = (j_1', \ldots, j_{n-m}'\} = \{1, \ldots, n\} \setminus \{i_1, \ldots, i_m)$. Tällöin σ saadaan yhdistämällä permutaatiot

$$\tau = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_m & j_1 & \cdots & j_{n-m} \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_m & j_1' & \cdots & j_{n-m}' \end{pmatrix}$$

ja

$$\nu = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_m & j_1 & \cdots & j_{n-m} \\ i_2 & i_3 & \cdots & i_1 & j_1 & \cdots & j_{n-m} \end{pmatrix}.$$

Induktioaskeleen perusteella permutaatio

$$\tau' = \begin{pmatrix} j_1 & \cdots & j_{n-m} \\ j_1' & \cdots & j_{n-m}' \end{pmatrix}$$

voidaan esittää järjestystä vaille yksikäsitteisesti erillisten syklien yhdistettynä kuvauksena. Olkoot $\tau_1', \ldots, \tau_p'$ nämä syklit. Niitä vastaavat keskenään erilliset syklit

$$\tau_k = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_m & j_1'' & \cdots & j_{n-m}'' \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_m & j_1''' & \cdots & j_{n-m}''' \end{pmatrix},$$

missä $\{j_1'', \ldots, j_{n-m}'') = (j_1''', \ldots, j_{n-m}'''\} = \{1, \ldots, n\} \setminus \{i_1, \ldots, i_m)$ ja $k = 1, \ldots, p$. Nyt yhdistämällä syklit $\tau_1, \ldots, \tau_p$ ja ν saadaan σ, joka on järjestystä vaille yksikäsitteinen erillisten syklien yhdistetty kuvaus.

Siis alku- ja induktioaskeleen perusteella väite pitää paikkansa.

$\square$

Esimerkki 1.11. Olkoon

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 11 & 10 & 1 & 4 & 5 & 8 & 7 & 2 & 6 & 9 & 3 \end{pmatrix} \in S_{11}.$$

Tällöin $\sigma = (1, 11, 3)(2, 10, 9, 6, 8)$ on järjestystä vaille yksikäsitteinen erillisten syklien yhdistetty kuvaus.

Määritelmä 1.12. Sykliä, jonka pituus on kaksi, kutsutaan *transpositioksi* tai *2-sykliksi.*

Lause 1.13. *Sykli voidaan aina ilmaista transpositioiden yhdistettynä kuvauksena:*

$$(i_1, i_2, \dots, i_r) = (i_1, i_r)(i_1, i_{r-1})(i_1, i_{r-2}) \cdots (i_1, i_2).$$

Todistus. Olkoon σ r:n pituinen sykli joukossa S_n. Tällöin, kun $r \geq 2$, niin

$$\sigma = (i_1, i_2, \dots, i_r) = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_{r-1} & i_r & i_{r+1} & \cdots & i_n \\ i_2 & i_3 & \cdots & i_r & i_1 & i_{r+1} & \cdots & i_n \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_{r-1} & i_r & i_{r+1} & \cdots & i_n \\ i_r & i_2 & \cdots & i_{r-1} & i_1 & i_{r+1} & \cdots & i_n \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_{r-2} & i_{r-1} & i_r & i_{r+1} & \cdots & i_n \\ i_{r-1} & i_2 & \cdots & i_{r-2} & i_1 & i_r & i_{r+1} & \cdots & i_n \end{pmatrix}$$
$$\cdots \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & i_3 & \cdots & i_{r-1} & i_r & i_{r+1} & \cdots & i_n \\ i_2 & i_1 & i_3 & \cdots & i_{r-1} & i_r & i_{r+1} & \cdots & i_n \end{pmatrix}$$
$$= (i_1, i_r)(i_1, i_{r-1}), (i_1, i_{r-2}) \cdots (i_1, i_2).$$

Siis väite pätee pitää paikkansa. □

Näin ollen jokainen sykli on transpositioiden yhdistetty kuvaus. Yhdistämällä lauseet 1.10 ja 1.13 saadaan seuraava lause.

Lause 1.14. *Jokainen permutaatio joukossa S_n on transpositioiden yhdistetty kuvaus.*

Todistus. Lauseen 1.10 perusteella jokainen permutaatio voidaan esittää yksikäsitteisenä erillisten syklien yhdistettynä kuvauksena. Nyt lauseen 1.13 perusteella jokainen sykli on transpositioiden yhdistetty kuvaus. Niinpä jokainen permutaatio joukossa S_n on transpositioiden yhdistetty kuvaus. □

Identtinen kuvaus $I : \Delta(n) \mapsto \Delta(n)$ on minkä tahansa transposition yhdistetty kuvaus itsensä kanssa. Toisin sanoen $I = (a, b)(a, b)$ aina, kun $a, b \in \Delta(n)$. Permutaatioiden esitys transpositioiden yhdistettynä kuvauksena ei ole yksikäsitteinen.

Esimerkki 1.15. Olkoon (5,2,4,3,1) sykli joukossa S_{19}. Tällöin

$$(5,2,4,3,1) = (5,1)(5,3)(5,4)(5,2).$$

Mutta nyt myös $(5,2,4,3,1) = (4,3,1,5,2)$. Siksi

$$(5,2,4,3,1) = (4,2)(4,5)(4,1)(4,3).$$

Vaikka permutaation esitys transpositioiden yhdistettynä kuvauksena ei ole yksikäsitteinen, on olemassa tärkeä lause. Lauseen 1.16 todistus esitetään tutkielmassa hieman tarkemmin ja riisutummin kuin lähdekirjassa. Lisäksi lauseen 1.18 todistusta ei löydy lähdekirjasta.

Lause 1.16. *Olkoon $\sigma \in S_n$. Jos σ on parillismääräisen transpositioiden yhdistetty kuvaus, niin tällöin kun σ esitetään jonain muuna transpositioiden yhdistettynä kuvauksena, se sisältää aina parillisen määrä transpositioita. Vastaavasti, jos σ on paritonmääräisen transpositioiden yhdistetty kuvaus, niin tällöin kun σ esitetään jonain muuna transpositioiden yhdistettynä kuvauksena, se sisältää aina aina parittoman määrän transpositioita.*

Todistus. Olkoot $X_1, X_2, \ldots, X_n \in \mathbb{R}$. Määritellään muuttujien $X_1, X_2, \ldots, X_n$ määräämä polynomi P:

$$P(X_1, X_2, \ldots, X_n) = \prod_{i<j}(X_i - X_j). \tag{3}$$

Tulo käsittää kaikki erotukset $X_i - X_j$, kun $1 \leq i < j \leq n$. Määritellään sitten jokaista $\sigma \in S_n$ kohti, että

$$\sigma(P) = P(X_{\sigma(1)}, X_{\sigma(2)}, \ldots, X_{\sigma(n)}) = \prod_{i<j}(X_{\sigma(i)} - X_{\sigma(j)}). \tag{4}$$

Nyt siis $\sigma(P)$ on permutaatio polynomista P. Osoitetaan, että $\sigma(P) = \pm P$ aina, kun $\sigma \in S_n$.

Oletetaan, että $\sigma = (p,q)$ on transpositio joukossa S_n. Oletetaan lisäksi, että $1 \leq p < q \leq n$. Osoitetaan, että $\sigma(P) = -P$. Huomataan, että $\sigma(P)$ on saatu polynomista P vaihtamalla lukuja X_p ja X_q. Nyt siis $\sigma(P)$ ja P eroavat toisistaan lukujen X_p ja X_q perusteella. Listataan edellä mainitut polynomin P tekijät, jotka sisältävät joko luvun X_p tai X_q. Listataan ensin tekijät, joissa on X_p:

$$X_1 - X_p, X_2 - X_p, \ldots, X_{p-1} - X_p, \tag{5}$$

$$X_p - X_{p+1}, \ldots, X_p - X_{q-1}, \tag{6}$$

$$X_p - X_{q+1}, \ldots, X_p - X_n. \tag{7}$$

Listataan sitten tekijät, joissa on X_q:

$$X_1 - X_q, X_2 - X_q, \ldots, X_{p-1} - X_q, \tag{8}$$
$$X_{p+1} - X_q, \ldots, X_{q-1} - X_q, \tag{9}$$
$$X_q - X_{q+1}, \ldots, X_q - X_n. \tag{10}$$

Lisäksi polynomissa P on tekijä, joka sisältää sekä luvun X_p että X_q, nimittäin tekijä $X_p - X_q$.

Kun nyt muutetaan luku X_p luvuksi X_q, huomataan, että rivien (5) ja (8) sekä rivien (7) ja (10) muutokset kompensoivat toisensa. Ainoa muutos tapahtuu riveillä (6) ja (9). Koska sekä rivillä (6) että (9) on

$$(q-1) - (p+1) + 1 = q - p - 1$$

tekijää, niin

$$\sigma(P) = (-1)^{2(q-p-1)+1} P = -P. \tag{11}$$

Ollaan siis osoitettu, että yksittäinen transpositio vaihtaa polynomin P merkin.

Oletetaan sitten, että $\tau = \tau_1 \tau_2 \cdots \tau_m$ on permutaatio joukossa S_n, kun τ_i on transpositio ja $1 \leq i \leq m$. Nyt yhtälössä (4) määritellyn permutaation perusteella

$$\tau(P) = P(X_{\tau(1)}, X_{\tau(2)}, \ldots, X_{\tau(m)}) = \prod_{i<j} (X_{\tau(i)} - X_{\tau(j)}). \tag{12}$$

Jos m on parillinen, niin yhtälön (11) perusteella

$$\begin{aligned} \tau(P) &= \tau_1 \tau_2 \cdots \tau_m(P) = \tau_1 \tau_2 \cdots \tau_{m-1}(-P) \\ &= \tau_1 \tau_2(P) = \tau_1(-P) = -(-P) = P. \end{aligned}$$

Jos taas m on pariton, niin yhtälön (11) perusteella

$$\begin{aligned} \tau(P) &= \tau_1 \tau_2 \cdots \tau_m(P) = \tau_1 \tau_2 \cdots \tau_{m-1}(-P) \\ &= \tau_1 \tau_2(-P) = \tau_1(P) = -P. \end{aligned}$$

Olkoon r parillinen kokonaisluku ja olkoon s pariton kokonaisuluku. Tällöin

$$\tau_1 \tau_2 \cdots \tau_r(P) = P \neq -P = \tau_1 \tau_2 \cdots \tau_s(P),$$

aina, kun $P \neq 0$.

Siis väite pitää paikkansa. □

Määritelmä 1.17. Permutaation $\sigma \in S_n$ sanotaan olevan *parillinen*, jos σ saadaan yhdistettynä kuvauksena, jossa on parillinen määrä transpositioita. Permutaation $\sigma \in S_n$ sanotaan olevan *pariton*, jos σ saadaan yhdistettynä kuvauksena, jossa on pariton määrä transpositioita.

Lauseet 1.14 ja 1.16 takaavat sen, että jokainen permutaatio on joko parillinen tai pariton, muttei molempia. On huomattava, että identtinen kuvaus I on parillinen, koska $I = (a, b)(a, b)$ aina, kun $a, b \in \Delta(n)$. Toisaalta transpositio (a, b) on aina pariton.

Lause 1.18. *a) Kahden parillisen permutaation tulo on parillinen.*

b) Kahden parittoman permutaation tulo on parillinen.

c) Parillisen ja parittoman permutaation tulo on pariton (tai parittoman ja parillisen permutaation tulo on pariton).

Todistus. a) Olkoot $\sigma, \tau \in S_n$. Oletetaan, että sekä σ että τ voidaan esittää parillismääräisenä transpositioiden yhdistettynä kuvauksena. Tällöin σ ja τ sisältävät $p = 2m$ transpositiota, kun $m = 1, 2, 3 \ldots$ Nyt permutaatioden σ ja τ yhdistetyssä kuvauksessa on $p + p = 2m + 2m = 2 \cdot 2m$ transpositiota.

b) Olkoot $\sigma, \tau \in S_n$. Oletetaan, että sekä σ että τ voidaan esittää paritonmääräisenä transpositioiden yhdistettynä kuvauksena. Tällöin σ ja τ sisältävät $p = 2m + 1$ transpositiota, kun $m = 0, 1, 2 \ldots$ Nyt permutaatioden σ ja τ yhdistetyssä kuvauksessa on $p + p = 2m + 1 + 2m + 1 = 2(2m + 1)$ transpositiota.

c) Olkoot $\sigma, \tau \in S_n$. Oletetaan, että σ voidaan esittää parillismääräisenä transpositioiden yhdistettynä kuvauksena ja τ voidaan esittää paritonmääräisenä transpositioiden yhdistettynä kuvauksena. Tällöin σ sisältää $p = 2m$ ja τ sisältää $r = 2m + 1$ transpositiota. Nyt permutaatioden σ ja τ yhdistetyssä kuvauksessa on $p + r = 2m + 2m + 1 = 2 \cdot 2m + 1$ transpositiota. $\square$

Määritelmä 1.19. Olkoon $\sigma \in S_n$. Permutaation σ *merkki*, $\operatorname{sgn}(\sigma)$, määritellään:

$$\operatorname{sgn}(\sigma) = \begin{cases} 1 & \text{jos } \sigma \text{ on parillinen,} \\ -1 & \text{jos } \sigma \text{ on pariton.} \end{cases}$$

Kun σ vaihtelee joukossa S_n, merkki $\operatorname{sgn}(\sigma)$ määrittelee funktion

$$\operatorname{sgn}(*) : S_n \mapsto \{-1, 1\}.$$

On huomattava, että $\operatorname{sgn}(I) = 1$ ja $\operatorname{sgn}((a, b)) = -1$ aina, kun $a \neq b$ joukossa $\Delta(n)$. Palataan seuraavaksi esimerkkeihin 1.2 ja 1.3.

Esimerkit 1.20 ja 1.21 löytyvät lähdeteoksesta.

Esimerkki 1.20. Jaetaan joukossa S_3 kukin permutaatio transpositioihin:
$\sigma_1 = I$; siksi $\operatorname{sgn}(\sigma_1) = 1$,
$\sigma_2 = (2, 3)$; siksi $\operatorname{sgn}(\sigma_2) = -1$,
$\sigma_3 = (1, 2)$; siksi $\operatorname{sgn}(\sigma_3) = -1$,
$\sigma_4 = (1, 2, 3) = (1, 3)(1, 2)$; siksi $\operatorname{sgn}(\sigma_4) = 1$,
$\sigma_5 = (1, 3, 2) = (1, 2)(1, 3)$; siksi $\operatorname{sgn}(\sigma_5) = 1$,
$\sigma_6 = (1, 3)$; siksi $\operatorname{sgn}(\sigma_6) = -1$.

Esimerkki 1.21. Joukossa S_4 permutaatioiden transpositioihin jako antaa seuraavat merkit:

$$\begin{array}{lll}
\operatorname{sgn}(\sigma_1) = 1, & \operatorname{sgn}(\sigma_9) = 1, & \operatorname{sgn}(\sigma_{17}) = 1, \\
\operatorname{sgn}(\sigma_2) = -1, & \operatorname{sgn}(\sigma_{10}) = -1, & \operatorname{sgn}(\sigma_{18}) = -1, \\
\operatorname{sgn}(\sigma_3) = -1, & \operatorname{sgn}(\sigma_{11}) = -1, & \operatorname{sgn}(\sigma_{19}) = -1, \\
\operatorname{sgn}(\sigma_4) = 1, & \operatorname{sgn}(\sigma_{12}) = 1, & \operatorname{sgn}(\sigma_{20}) = 1, \\
\operatorname{sgn}(\sigma_5) = 1, & \operatorname{sgn}(\sigma_{13}) = 1, & \operatorname{sgn}(\sigma_{21}) = 1, \\
\operatorname{sgn}(\sigma_6) = -1, & \operatorname{sgn}(\sigma_{14}) = -1, & \operatorname{sgn}(\sigma_{22}) = -1, \\
\operatorname{sgn}(\sigma_7) = -1, & \operatorname{sgn}(\sigma_{15}) = -1, & \operatorname{sgn}(\sigma_{23}) = -1, \\
\operatorname{sgn}(\sigma_8) = 1, & \operatorname{sgn}(\sigma_{16}) = 1, & \operatorname{sgn}(\sigma_{24}) = 1.
\end{array}$$

1.2 Determinantin permutatiivinen määritelmä ja ominaisuuksia

Nyt, kun permutaatiot ja niiden ominaisuudet on määritelty, itse determinantti voidaan määritellä. Tässä tutkielmassa merkinnällä $M_{n\times n}$ tarkoitetaan kaikkien $n \times n$-matriisien joukkoa, kun matriisin alkiot ovat kunnasta $\mathbb{F}$.

Määritelmä 1.22. Olkoon $A = (a_{ij}) \in M_{n\times n}$. Tällöin matriisin A *determinantti*, merkitään $\det(A)$,

$$\det(A) = \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}.$$

Symboli $\sum_{\sigma\in S_n}$ tarkoittaa $n!$ eri permutaatiolausekkeen

$$\operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

summaamista yhteen joukossa S_n. Kun $A \in M_{n\times n}$, niin $\det(A)$ määrittelee funktion $\det(A) : M_{n\times n} \mapsto \mathbb{F}$. On huomattava, että $\det(A)$ on määritelty vain, kun A on neliömatriisi. Muilla kuin neliömatriiseilla ei ole determinanttia.

Esimerkki 1.23. Olkoon

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}.$$

Nyt joukko S_4 sisältää 24 permutaatiota $\sigma_1 = I, \sigma_2, \ldots, \sigma_{24}$, jotka listattiin esimerkissä 1.3. Näiden permutaatioiden merkit $\operatorname{sgn}(\sigma_i)$, kun $i = 1, \ldots, 24$, laskettiin esimerkissä 1.21. Määritelmästä 1.22 seuraa, että

$$\begin{aligned}
&\det(A) = \operatorname{sgn}(I)a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} + \operatorname{sgn}(\sigma_2)a_{11}a_{22}a_{34}a_{43} + \operatorname{sgn}(\sigma_3)a_{11}a_{23}a_{32}a_{44} \\
&+ \operatorname{sgn}(\sigma_4)a_{11}a_{23}a_{34}a_{42} + \operatorname{sgn}(\sigma_5)a_{11}a_{24}a_{43}a_{32} + \operatorname{sgn}(\sigma_6)a_{11}a_{24}a_{33}a_{42} \\
&+ \operatorname{sgn}(\sigma_7)a_{12}a_{21}a_{33}a_{44} + \operatorname{sgn}(\sigma_8)a_{12}a_{21}a_{34}a_{43} + \operatorname{sgn}(\sigma_9)a_{12}a_{23}a_{31}a_{44} \\
&+ \operatorname{sgn}(\sigma_{10})a_{12}a_{23}a_{34}a_{41} + \operatorname{sgn}(\sigma_{11})a_{12}a_{31}a_{43}a_{32} + \operatorname{sgn}(\sigma_{12})a_{12}a_{24}a_{33}a_{41} \\
&+ \operatorname{sgn}(\sigma_{13})a_{13}a_{21}a_{32}a_{44} + \operatorname{sgn}(\sigma_{14})a_{13}a_{21}a_{34}a_{42} + \operatorname{sgn}(\sigma_{15})a_{13}a_{22}a_{31}a_{44} \\
&+ \operatorname{sgn}(\sigma_{16})a_{13}a_{22}a_{34}a_{41} + \operatorname{sgn}(\sigma_{17})a_{13}a_{24}a_{31}a_{42} + \operatorname{sgn}(\sigma_{18})a_{13}a_{24}a_{32}a_{41} \\
&+ \operatorname{sgn}(\sigma_{19})a_{14}a_{21}a_{32}a_{43} + \operatorname{sgn}(\sigma_{20})a_{14}a_{21}a_{33}a_{42} + \operatorname{sgn}(\sigma_{21})a_{14}a_{22}a_{31}a_{43} \\
&+ \operatorname{sgn}(\sigma_{22})a_{14}a_{22}a_{33}a_{41} + \operatorname{sgn}(\sigma_{23})a_{14}a_{23}a_{31}a_{42} + \operatorname{sgn}(\sigma_{24})a_{14}a_{23}a_{32}a_{41} \\
&= a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} - a_{11}a_{22}a_{34}a_{43} - a_{11}a_{23}a_{32}a_{44} + a_{11}a_{23}a_{34}a_{42} + a_{11}a_{24}a_{43}a_{32} \\
&- a_{11}a_{24}a_{33}a_{42} - a_{12}a_{21}a_{33}a_{44} + a_{12}a_{21}a_{34}a_{43} + a_{12}a_{23}a_{31}a_{44} - a_{12}a_{23}a_{34}a_{41} \\
&- a_{12}a_{31}a_{43}a_{32} + a_{12}a_{24}a_{33}a_{41} + a_{13}a_{21}a_{32}a_{44} - a_{13}a_{21}a_{34}a_{42} - a_{13}a_{22}a_{31}a_{44} \\
&+ a_{13}a_{22}a_{34}a_{41} + a_{13}a_{24}a_{31}a_{42} - a_{13}a_{24}a_{32}a_{41} - a_{14}a_{21}a_{32}a_{43} + a_{14}a_{21}a_{33}a_{42} \\
&+ a_{14}a_{22}a_{31}a_{43} - a_{14}a_{22}a_{33}a_{41} - a_{14}a_{23}a_{31}a_{42} + a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}.
\end{aligned}$$

On huomattava, että matriisin A determinantti on summa kaikkien mahdollisten matriisin A alkioiden sellaisista tuloista, että kustakin rivistä ja sarakkeesta on otettu vain yksi alkio. Jos determinantin muodostaa suoraan määritelmän avulla, sen laskeminen on hyvin raskasta ja hankalaa silloinkin kun n on pieni. Jos $n = 4$, niin determinantin $\det(A)$ laskemiseksi täytyy summata yhteen $4! = 24$ eri permutaatiolauseketta. Jos taas $n = 5$, niin determinantin $\det(A)$ laskemiseksi täytyy summata yhteen $5! = 120$ eri permutaatiolauseketta. Myöhemmin tullaan huomaamaan, että on olemassa parempia ja nopeampia tapoja muodostaa determinantti kuin laskea suoraan määritelmän avulla. Seuraava lause on yksinkertainen seuraus tästä määritelmästä.

Lause 1.24. *Olkoon $A \in M_{n \times n}$.*

a) Jos matriisissa A on nollarivi tai -sarake, niin $\det(A) = 0$.

b) Jos A on ylä- tai alakolmiomatriisi, niin $\det(A)$ on diagonaalialkioiden tulo.

Todistus. a) Määritelmän 1.22 mukaan $\det(A)$ on kaikkien mahdollisten matriisin A alkioiden permutaatiolausekkeiden summa. Kutakin permutaatiolauseketta vastaa tietty merkki $\text{sgn}(*)$, kun jokaisesta rivistä ja sarakkeesta on otettu täsmälleen yksi alkio. Täten, jos matriisissa A on nollarivi tai -sarake, niin jokainen määritelmän 1.22 mukainen permutaatiolauseke on nolla. Niinpä $\det(A) = 0$.

b) Todistetaan väite alakolmiomatriiseille. Todistus yläkolmiomatriiselle menee vastaavasti. Oletetaan, että A on alakolmiomatriisi. Tällöin

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Todistetaan, että $\det(A) = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$. Tämä tulos on suora seuraus määritelmästä 1.22. Oletetaan, että $\sigma \in S_n$. Jos $\sigma(1) \neq 1$, niin $a_{1\sigma(1)} = 0$, koska A on alakolmiomatriisi. Täten ainoat määritelmän 1.22 permutaatiolausekkeet, jotka voivat olla erisuuria kuin nolla, ovat ne, joissa $\sigma(1) = 1$. Nyt, jos $\sigma(1) = 1$, niin $\sigma(2) \neq 1$. Jos $\sigma(2) > 2$, niin $a_{2\sigma(2)} = 0$, koska A on alakolmiomatriisi. Näin ollen ainoat nollasta eroavat permutaatiolausekkeet ovat ne, joissa $\sigma(1) = 1$ ja $\sigma(2) = 2$. Jatkamalla vastaavalla tavalla eteenpäin huomataan, että on olemassa ainoastaan yksi nollasta eroava permutaatiolauseke, nimittäin permutaatiolauseke, joka vastaa identtistä kuvausta I. Niinpä $\det A = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$. □

On syytä korostaa erästä lauseen 1.24 b)-kohdan erikoistapausta. Merkitään, että $\text{Diag}(d_1, \ldots d_n)$ on $n \times n$-diagonaalimatriisi, jossa alkio (i, i) on d_i

kaikilla $i = 1, \ldots, n$. Näin ollen

$$\mathrm{Diag}(d_1, \ldots, d_n) = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & d_n \end{pmatrix}.$$

Lauseesta 1.24 seuraa, että $\det(\mathrm{Diag}(d_1, \ldots, d_n)) = d_1 d_2 \cdots d_n$. Esimerkiksi identiteettimatriisin determinantti $\det(I) = 1$ aina, kun $n \geq 1$.

Seuraava lause osoittaa, että $\det(A)$ on riviensä suhteen multilineaarinen, n-lineaarinen funktio. Olkoon $A = (a_{ij}) \in M_{n\times n}$. Oletetaan, että matriisilla A on riviositus

$$A = \left(\begin{array}{c} R_1 \\ \hline R_2 \\ \hline \vdots \\ \hline R_n \end{array}\right).$$

Tässä $R_i = [a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}] \in M_{1\times n}$ kaikilla $1, \ldots, n$. Matriisi A voidaan myös osittaa riveiksi niin, että $A = (R_1; \ldots; R_n)$, missä puolipisteet ovat pilkkujen sijasta muistuttamassa siitä, että $R_1, \ldots, R_n$ ovat matriisin A rivejä. Matriisi A voidaan nyt kirjoittaa:

$$A = \left(\begin{array}{c} R_1 \\ \hline R_2 \\ \hline \vdots \\ \hline R_n \end{array}\right) = (R_1; R_2 \ldots; R_n).$$

Esitetään sitten edellä mainittu lause determinanteista.

Lause 1.25. *Olkoon* $A = (a_{ij}) = (R_1; \ldots; R_n) \in M_{n\times n}$.

a) Tällöin jokaista $x \in \mathbb{F}$ *kohti ja kaikilla* $i = 1, \ldots, n$

$$\det((R_1; \ldots; R_{i-1}; xR_i; R_{i+1}; \ldots; R_n)) = x \cdot \det(A).$$

b) Oletetaan, että jollakin $i \in \{1, \ldots, n\}$ $R_i = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}$, *kun* $\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in M_{1\times n}$. *Tällöin*

$$\begin{aligned}\det(A) = {} & \det((R_1; \ldots; R_{i-1}; \boldsymbol{b}; R_{i+1}; \ldots; R_n)) \\ & + \det((R_1; \ldots; R_{i-1}; \boldsymbol{c}; R_{i+1}; \ldots; R_n)).\end{aligned}$$

Todistus. Molemmat lauseen 1.25 kohdat seuraavat suoraan determinantin määritelmästä.

a) Tiedetään, että

$$(R_1; \dots; R_{i-1}; xR_i; R_{i+1}; \dots; R_n) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ xa_{i1} & xa_{i2} & \cdots & xa_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Niinpä

$$\begin{aligned} &\det((R_1; \dots; R_{i-1}; xR_i; R_{i+1}; \dots; R_n)) \\ &\quad = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots a_{(i-1)\sigma(i-1)} (xa_{i\sigma(i)}) a_{(i+1)\sigma(i+1)} \cdots a_{n\sigma(n)} \\ &\quad = x \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)} = x \det(A). \end{aligned}$$

b) Oletetaan, että jokin matriisin A rivi R_i on kahden rivivektorin $\boldsymbol{b}$ ja $\boldsymbol{c}$ summa, kun $\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in M_{1\times n}$. Olkoon $\boldsymbol{b} = (b_1, \dots, b_n)$ ja $\boldsymbol{c} = (c_1, \dots, c_n)$. Tällöin $R_i = (a_{i1}, \dots, a_{in}) = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} = (b_1 + c_1, \dots, b_n + c_n)$ ja

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_1 + c_1 & b_2 + c_2 & \cdots & b_n + c_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Niinpä

$$\begin{aligned}
\det(A) &= \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)} \\
&= \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots a_{i-1\sigma(i-1)} (b_{\sigma(i)} + c_{\sigma(i)}) a_{(i+1)\sigma(i+1)} \cdots a_{n\sigma(n)} \\
&= \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots a_{i-1\sigma(i-1)} b_{\sigma(i)} a_{(i+1)\sigma(i+1)} \cdots a_{n\sigma(n)} \\
&\quad + \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots a_{i-1\sigma(i-1)} c_{\sigma(i)} a_{(i+1)\sigma(i+1)} \cdots a_{n\sigma(n)} \\
&= \det((R_1; \ldots; R_{i-1}; \boldsymbol{b}; R_{i+1}; \ldots; R_n)) \\
&\quad + \det((R_1; \ldots; R_{i-1}; \boldsymbol{c}; R_{i+1}; \ldots; R_n)).
\end{aligned}$$

□

Kun matriisin A rivit riviä i lukuun ottamatta kiinnitetään, lauseesta 1.25 seuraa, että determinantti on lineaarinen funktio matriisin A rivin i suhteen. Multilineaarisiksi, n-lineaarisiksi funktioiksi kutsutaan n:n muuttujan funktioita, jotka ovat lineaarisia funktioita jokaisen muuttujan suhteen aina, kun loput muuttujat ovat kiinnitetty. Determinantti $\det((R_1; \ldots; R_n))$ on tyypillinen esimerkki multilineaarisista funktioista.

Esimerkki 1.26. Olkoon

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 11 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Tällöin $\det(A) = -3 \cdot 5 - 4 \cdot 11 = -59$. Toisaalta

$$\begin{pmatrix} -3 & 11 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \cdot 3 + 3 \cdot 1 & -2 \cdot (-1) + 3 \cdot 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Nyt lauseesta 1.25 seuraa, että

$$\begin{aligned}
-59 = \det(A) &= \det \begin{pmatrix} -6 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \\
&= -2 \det \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} + 3 \det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = -2 \cdot 19 + 3 \cdot (-7).
\end{aligned}$$

Lausetta 1.25 ei saa tulkita väärin. Lause ei tarkoita, että funktio

$$\det(*) : M_{n\times n} \mapsto \mathbb{F}$$

olisi lineaarinen transformaatio. Nimittäin determinantti $\det(*)$ ei säilytä yhteenlaskua eikä skalaarilla kertomista.

Lause 1.27. *Olkoon $A = (a_{ij}) = (R_1; \ldots; R_n) \in M_{n\times n}$. Jos $R_i = R_j$ joillakin arvoilla $i \neq j$, niin $\det(A) = 0$.*

Todistus. Oletetaan, että $R_i = R_j$ joillakin arvoilla $i \neq j$, kun $1 \leq i < j \leq n$. Matriisin A determinantti

$$\det(A) = \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots a_{i\sigma(i)} \cdots a_{j\sigma(j)} \cdots a_{n\sigma(n)}. \tag{13}$$

Pitää osoittaa, että yhtälön (13) permutaatiolausekkeiden summa on nolla. Täytyy osoittaa, että yhtälössä (13) jokaista permutaatiolauseketta kohti on olemassa merkkiä $\operatorname{sgn}(*)$ vaille täsmälleen samanlainen jokin toinen permutaatiolauseke.

Kiinnitetään $\sigma \in S_n$, ja olkoon τ transpositio $\tau = (\sigma(i), \sigma(j))$. Tällöin $\tau\sigma \in S_n$. Käsitellään yhtälön (13) kahta permutaatiolauseketta

$$\operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots a_{i\sigma(i)} \cdots a_{j\sigma(j)} \cdots a_{n\sigma(n)} \text{ ja} \tag{14}$$

$$\operatorname{sgn}(\tau\sigma) a_{1\tau\sigma(1)} \cdots a_{i\tau\sigma(i)} \cdots a_{j\tau\sigma(j)} \cdots a_{n\tau\sigma(n)}. \tag{15}$$

Koska $R_i = R_j$, niin $a_{i\tau\sigma(i)} = a_{i\sigma(j)} = a_{j\sigma(j)}$ ja $a_{j\tau\sigma(j)} = a_{j\sigma(i)} = a_{i\sigma(i)}$. Niinpä jotkin ristikkäistekijät kaavariveillä (14) ja (15) ovat samoja. Jos $p \in \Delta(n) \setminus \{i, j\}$, niin $\tau\sigma(p) = \sigma(p)$, koska τ vaikuttaa vain tekijöihin $\sigma(i)$ ja $\sigma(j)$. Voidaan päätellä, että

$$a_{1\sigma(1)} \cdots a_{i\sigma(i)} \cdots a_{j\sigma(j)} \cdots a_{n\sigma(n)} = a_{1\tau\sigma(1)} \cdots a_{i\tau\sigma(i)} \cdots a_{j\tau\sigma(j)} \cdots a_{n\tau\sigma(n)}.$$

Koska τ on transpositio, niin $\operatorname{sgn}(\tau\sigma) = -\operatorname{sgn}(\sigma)$. Niinpä permutaatiolausekkeet kaavariveillä (14) ja (15) kumoavat toisensa.

Oletetaan sitten, että ζ on permutaatio joukossa $S_n \setminus \{\sigma, \tau\sigma\}$. Nyt huomataan, että permutaatioiden ζ ja $(\zeta(i), \zeta(j))\zeta$ indeksit eroavat kaavariveillä (14) ja (15) esitettyjen permutaatioiden indekseistä. Sitten edetään samalla tavalla, kun permutaatioiden σ ja $\tau\sigma$ tapauksessa. Kun $\rho = (\zeta(i), \zeta(j))$, niin saadaan, että

$$\operatorname{sgn}(\rho\zeta) a_{1\rho\zeta(1)} \cdots a_{i\rho\zeta(i)} \cdots a_{j\rho\zeta(j)} \cdots a_{n\rho\zeta(n)}$$

kumoaa lausekkeen

$$\operatorname{sgn}(\zeta)a_{1\zeta(1)}\cdots a_{i\zeta(i)}\cdots a_{j\zeta(j)}\cdots a_{n\zeta(n)}.$$

Vastaavalla tavalla etsitään loput $n!-4$ permutaatiota, kunnes on käyty läpi kaikki permutaatiolausekeparit, jotka kumoavat toisensa.

Siis väite pitää paikkansa. □

On syytä alleviivata, että lauseiden 1.25 ja 1.27 ehdot yhdessä sen kanssa, että $\det(I)=1$, karakterisoivat yksikäsitteisesti determinantin. Tämä tarkoittaa sitä, että voidaan osoittaa, että jos $f: M_{n\times n}\mapsto \mathbb{F}$ on funktio, joka toteuttaa lauseiden 1.25 ja 1.27 ehdot sekä $f(I)=1$, niin $f(A)=\det(A)$ kaikilla matriiseilla $A\in M_{n\times n}$.

Determinantin ominaisuuksia voidaan johtaa permutatiivisen determinantin määritelmän avulla, ks. esimerkiksi [1, s. 170-195]. Sen sijaan, että determinanttiin liittyviä tuloksia johdettaisiin permutaatioiden avulla, luvussa 2 määritellään determinantti kolmen aksiooman avulla ja tullaan huomaamaan, että tällä tavalla määritelty determinantti on ekvivalentti permutatiivisesti määritellyn determinantin kanssa. Edellä mainitun lisäksi luvussa 2 käsitellään determinantin ominaisuuksia aksiomaattisesta lähtökohdasta.

2 Determinantin aksiomaattinen määritelmä

Tässä luvussa determinantti määritellään aksiomaattisesti 2×2- ja $n\times n$-matriiseille. Lisäksi johdetaan tuloksia näiden määritelmien perusteella. Kun oletetaan, että $n\times n$-matriisin alkiot kuuluvat kuntaan $\mathbb{F}$, ja kun $n\geq 2$, niin tälle $n\times n$-matriisille voidaan aina määritellä skalaari (kolmen aksiooman oletuksesta), jota kutsutaan determinantiksi. Lukija voi ymmärtää paremmin, mitä determinantin aksiomaattisella määritelmällä tarkoitetaan, kun käsitellään ensin erikoistapauksena 2×2-matriisin determinantin aksiomaattinen määritelmä ja tutkitaan sen geometrista sovellusta.

Ensimmäisessä alaluvussa määritellään käsitteitä ja esitetään sellaisten lauseiden tuloksia, joita tarvitaan alaluvuissa 2.3-2.6. Ellei toisin mainita, tässä luvussa seurataan teosta [3, s. 171-200].

2.1 Valmistelevia tarkasteluja

Tässä luvussa määritellään alkeismuunnokset ja alkeismuunnosmatriisit ja esitetään tärkeitä matriisin asteeseen liittyviä tuloksia, joita tarvitaan, kun todistetaan determinanttiin liittyviä lauseita. Määritelmät 2.1 ja 2.2 löytyvät kirjasta [2, s. 14 ja s. 50].

Määritelmä 2.1. Matriisilla A on kolme erilaista *alkeismuunnosta*:

1. kun matriisin A kaksi riviä vaihdetaan keskenään,
2. kun matriisin A jokin rivi kerrotaan nollasta eroavalla vakiolla,
3. kun jokin matriisin A vakiolla kerrottu rivi lisätään johonkin toiseen matriisin A riviin.

Määritelmä 2.2. $n \times n$-matriisia E kutsutaan *alkeismuunnosmatriisiksi*, jos se on saatu yhdellä alkeismuunnoksella $n \times n$-identiteettimatriisista I.

Määritelmä 2.3. Matriisin A aste $\operatorname{rank}(A)$ on matriisin lineaarisesti riippumattomien rivien lukumäärä.

Voidaan osoittaa (ks. esim. [2, s. 195]), että yhtäpitävä määritelmä saadaan tarkastelemalla sarakkeiden lukumäärää.

Lause 2.4. *Olkoon $A \in M_{n\times n}$. Tällöin*

$$\operatorname{rank}(A^t) = \operatorname{rank}(A).$$

Todistus. Ks. [3, s. 138]. □

Lause 2.5. *Jokainen kääntyvä matriisi A on alkeismuunnosmatriisien tulo:*

$$A = E_m E_{m-1} \cdots E_1.$$

Todistus. Ks. [3, s. 139]. □

Lause 2.6. *Olkoot A ja B sellaisia matriiseja, että niiden tulo AB on määritelty. Tällöin*

$$\operatorname{rank}(AB) \leq \operatorname{rank}(A) \text{ ja } \operatorname{rank}(AB) \leq \operatorname{rank}(B).$$

Todistus. Ks. [3, s. 139-140]. □

Lause 2.7. *Matriisi $A \in M_{n\times n}$ on kääntyvä jos ja vain jos* $\operatorname{rank}(A) = n$.

Todistus. Ks. [3, s. 132]. □

Lause 2.8. *Olkoon $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ yhtälöryhmä, jossa on n yhtälöä ja n muuttujaa. Tällöin matriisi A on kääntyvä jos ja vain jos yhtälöryhmällä $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ on yksikäsitteinen ratkaisu*

$$\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b}.$$

Todistus. Ks. [3, s. 152]. □

2.2 Aksiomaattinen 2×2-matriisin determinantti

2.2.1 Determinantin määritelmä 2×2-matriiseille

Määritelmä 2.9. Olkoon $A = (a_{ij}) \in M_{2\times 2}$. Tällöin matriisin A *determinantti* $\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Kirjoitetaan matriisi A riveittäin

$$A = \begin{pmatrix} A_{(1)} \\ A_{(2)} \end{pmatrix},$$

ja merkitään sen determinanttia

$$\det \begin{pmatrix} A_{(1)} \\ A_{(2)} \end{pmatrix}.$$

Lause 2.10. *Olkoon $A \in M_{2\times 2}$. Tällöin matriisin A determinantti toteuttaa seuraavat ehdot:*

a) Determinantti on lineaarinen funktio molempien rivien suhteen aina, kun toinen rivi on kiinnitetty. Tämä tarkoittaa sitä, että

$$\det \begin{pmatrix} cA_{(1)} + A'_{(1)} \\ A_{(2)} \end{pmatrix} = c \det \begin{pmatrix} A_{(1)} \\ A_{(2)} \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} A'_{(1)} \\ A_{(2)} \end{pmatrix}$$

ja

$$\det \begin{pmatrix} A_{(1)} \\ cA_{(2)} + A'_{(2)} \end{pmatrix} = c \det \begin{pmatrix} A_{(1)} \\ A_{(2)} \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} A_{(1)} \\ A'_{(2)} \end{pmatrix}$$

kaikilla kunnan $\mathbb{F}$ skalaareilla c.

b) Jos matriisin $A \in M_{2\times 2}$ rivit ovat identtiset, niin $\det(A) = 0$.

c) Jos I on 2×2-identiteettimatriisi, niin $\det(I) = 1$.

Todistus. Käytetään kuhunkin kohtaan määritelmää 2.9.

a) Olkoot $A_{(1)} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \end{pmatrix}, A'_{(1)} = \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} \end{pmatrix}$ ja $A_{(2)} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$. Tällöin

$$\begin{aligned}
\det \begin{pmatrix} cA_{(1)} + A'_{(1)} \\ A_{(2)} \end{pmatrix} &= \det \begin{pmatrix} ca_{11} + a'_{11} & ca_{12} + a'_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \\
&= (ca_{11} + a'_{11})a_{22} - (ca_{12} + a'_{12})a_{21} \\
&= c(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) + (a'_{11}a_{22} - a'_{12}a_{21}) \\
&= c \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \\
&= c \det \begin{pmatrix} A_{(1)} \\ A_{(2)} \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} A'_{(1)} \\ A_{(2)} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Samanlaisella päättelyllä voidaan osoittaa, että determinantti on lineaarinen myös toisen rivin suhteen.

b) Jos matriisin A rivit ovat identtiset, niin

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{11} & a_{12} \end{pmatrix}.$$

Niinpä $\det(A) = a_{11}a_{12} - a_{12}a_{11} = 0$.

c) Koska

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

niin $\det(I) = 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 = 1$.

□

Seuraava lause osoittaa, että lauseen 2.10 ominaisuudet karakterisoivat yksikäsitteisesti edellä määritellyn determinantin.

Lause 2.11. *Olkoon $\delta : M_{2\times2} \to \mathbb{F}$ mikä tahansa funktio, jolla on seuraavat ominaisuudet:*

a) δ on lineaarinen molempien rivien suhteen aina, kun toinen rivi on kiinnitetty,

b) jos matriisin $A \in M_{2\times2}$ rivit ovat identtiset, niin $\delta(A) = 0$,

c) jos I on 2×2-identiteettimatriisi, niin $\delta(I) = 1$.

Tällöin $\delta = \det$. Toisin sanoen $\delta(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ aina, kun $A \in M_{2\times2}$.

Todistus. Olkoon I 2×2-identiteettimatriisi, ja olkoot

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{ja} \qquad M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nyt ehdon b) perusteella $\delta(M_1) = \delta(M_2) = 0$. Todistetaan ensin, että $\delta(M_3) = -1$. Nyt käyttämällä ehtoja a) ja b) kaksi kertaa sekä ehtoa c) kerran saadaan, että

$$\begin{aligned}
0 = \delta \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} &= \delta \begin{pmatrix} 1+0 & 0+1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \delta \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \delta \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0+1 & 1+0 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0+1 & 1+0 \end{pmatrix} \\
&= \delta \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \delta(I) + \delta(M_1) + \delta(M_2) + \delta(M_3) \\
&= 1 + 0 + 0 + \delta(M_3).
\end{aligned}$$

Niinpä $\delta(M_3) = -1$.

Toisaalta, koska δ on lineaarinen molempien rivien suhteen aina, kun toinen rivi on kiinnitetty, niin

$$\begin{aligned}
\delta \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix} = \delta \begin{pmatrix} a_{11} \cdot 1 & 0 \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix} &= a_{11}\delta \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix} \\
&= a_{11}\delta \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22}\delta \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Vastaavanlaisella päättelyllä saadaan

$$\delta \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & 0 \end{pmatrix} = a_{11}a_{21}\delta \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \ \delta \begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix} = a_{12}a_{22}\delta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ja

$$\delta \begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ a_{21} & 0 \end{pmatrix} = a_{12}a_{21}\delta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Olkoon nyt A 2×2-matriisi, jonka alkiot ovat mielivaltaisia kunnan $\mathbb{F}$ alkioita. Tällöin kohtien a), b) ja c) perusteella

$$\begin{aligned}
\delta(A) &= \delta \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \delta \begin{pmatrix} a_{11} + 0 & 0 + a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \\
&= \delta \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \\
&= \delta \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 + a_{21} & a_{22} + 0 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ 0 + a_{21} & a_{22} + 0 \end{pmatrix} \\
&= \delta \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & 0 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ a_{21} & 0 \end{pmatrix} \\
&= a_{11}a_{22}\delta \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + a_{11}a_{21}\delta \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + a_{12}a_{22}\delta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} a_{12}a_{21}\delta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= a_{11}a_{22} \cdot \delta(I) + a_{11}a_{21} \cdot \delta(M_1) + a_{12}a_{22} \cdot \delta(M_2) + a_{12}a_{21} \cdot \delta(M_3) \\
&= a_{11}a_{22}(1) + a_{11}a_{21}(0) + a_{12}a_{22}(0) + a_{12}a_{21}(-1) \\
&= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \det(A).
\end{aligned}$$

Niinpä $\delta = \det$. □

2.2.2 Suunnikkaan ala

Tarkastellaan sitten 2×2-matriisin determinantin geometrista tulkintaa. Tullaan huomaamaan, että tietyllä tarkkuudella determinantin etumerkistä voidaan päätellä, miten suunnikas on sijoittunut tasokoordinaatistoon.

Lähdekirjassa kahden vektorin välinen kulma määritellään epämääräisesti ja huolimattomasti.

Kahden vektorin välinen kulma θ määritellään sisätulon avulla [2, s. 213]. Tällöin $0 \leq \theta \leq \pi$. Käsitellään tässä alaluvussa sellaisia vektoreita, jotka saavat alkunsa origosta.

Käsitellään järjestettyä kantaa $\beta = \{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\}$ avaruudessa $\mathbb{R}^2$, missä $\boldsymbol{u} = (a_1, a_2)$ ja $\boldsymbol{v} = (b_1, b_2)$. Merkitään determinanttia

$$\det \begin{pmatrix} \boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{v} \end{pmatrix}$$

skalaarilla

$$\det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix},$$

ja määritellään, että järjestetyn kannan β reaaliarvoinen *suunnistus* (engl. orientation)

$$\mathrm{O}\begin{pmatrix}\boldsymbol{u}\\ \boldsymbol{v}\end{pmatrix} = \frac{\det\begin{pmatrix}\boldsymbol{u}\\ \boldsymbol{v}\end{pmatrix}}{\left|\det\begin{pmatrix}\boldsymbol{u}\\ \boldsymbol{v}\end{pmatrix}\right|}. \tag{16}$$

Koska vektorit $\boldsymbol{u}$ ja $\boldsymbol{v}$ muodostavat avaruuden $\mathbb{R}^2$ kannan, yhtälön (16) oikeanpuoleisen termin osamäärän nimittäjä on erisuuri kuin nolla. Niinpä selvästi

$$\mathrm{O}\begin{pmatrix}\boldsymbol{u}\\ \boldsymbol{v}\end{pmatrix} = \pm 1.$$

On huomattava, että

$$\mathrm{O}\begin{pmatrix}\boldsymbol{e}_1\\ \boldsymbol{e}_2\end{pmatrix} = 1 \qquad \text{ja} \qquad \mathrm{O}\begin{pmatrix}\boldsymbol{e}_1\\ -\boldsymbol{e}_2\end{pmatrix} = -1,$$

kun $\boldsymbol{e}_1$ on kantavektori $\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}$ ja $\boldsymbol{e}_2$ kantavektori $\begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix}$.

Määritelmä 2.12. Koordinaatisto $\{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\}$ on *oikeakätinen*, jos

$$\mathrm{O}\begin{pmatrix}\boldsymbol{u}\\ \boldsymbol{v}\end{pmatrix} = 1.$$

Määritelmä 2.13. Koordinaatisto $\{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\}$ on *vasenkätinen*, jos

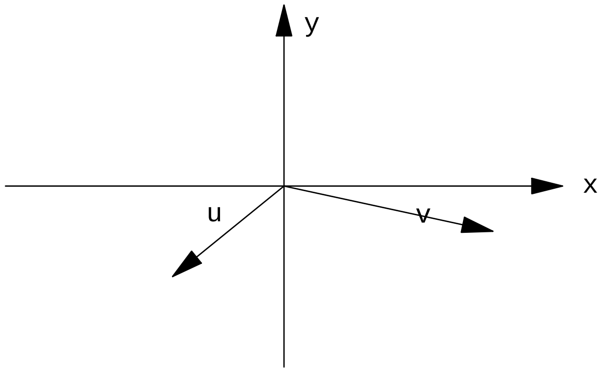
$$\mathrm{O}\begin{pmatrix}\boldsymbol{u}\\ \boldsymbol{v}\end{pmatrix} = -1.$$

Kuvat 1 ja 2 havainnollistavat määritelmiä 2.12 ja 2.13.

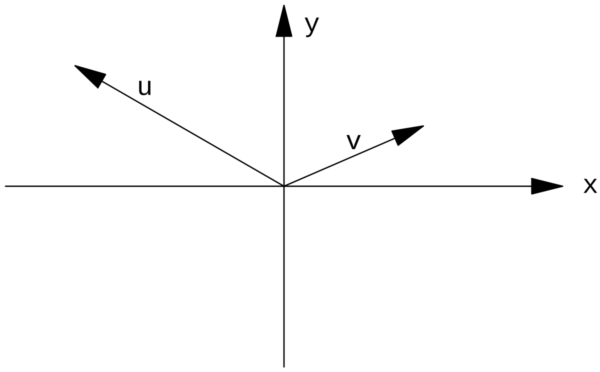
Nyt mikä tahansa järjestetty joukko $\{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\}$ avaruudessa $\mathbb{R}^2$ määrittelee suunnikkaan alan seuraavalla tavalla. Kun vektorit $\boldsymbol{u}$ ja $\boldsymbol{v}$ alkavat origosta tasossa $\mathbb{R}^2$, niin $\boldsymbol{u}$ ja $\boldsymbol{v}$ määräävät suunnikkaan, jossa ne ovat suunnikkaan vierekkäiset sivut. On huomattava, että jos joukko $\{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\}$ on lineaarisesti riippuva, toisin sanoen jos $\boldsymbol{u}$ ja $\boldsymbol{v}$ ovat samansuuntaisia, niin näiden määräämä suunnikas on suora, jonka ala on nolla.

Sovitaan, että jos joukko $\{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\}$ on lineaarisesti riippuva, niin

$$\mathrm{O}\begin{pmatrix}\boldsymbol{u}\\ \boldsymbol{v}\end{pmatrix} = 1.$$



Kuva 1: Oikeakätinen koordinaatisto.



Kuva 2: Vasenkätinen koordinaatisto.

Vektoreiden $\boldsymbol{u}$ ja $\boldsymbol{v}$ määräämän suunnikkaan alan

$$A\begin{pmatrix}\boldsymbol{u}\\ \boldsymbol{v}\end{pmatrix}$$

ja determinantin

$$\det\begin{pmatrix}\boldsymbol{u}\\ \boldsymbol{v}\end{pmatrix}$$

välillä on mielenkiintoinen yhteys, jota seuraavaksi tutkitaan. Ensiksi on kuitenkin syytä huomata, että koska determinantti

$$\det\begin{pmatrix}\boldsymbol{u}\\ \boldsymbol{v}\end{pmatrix}$$

voi olla myös negatiivinen, niin ei ole yleisesti voimassa, että

$$A\begin{pmatrix}\boldsymbol{u}\\\boldsymbol{v}\end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix}\boldsymbol{u}\\\boldsymbol{v}\end{pmatrix}.$$

Mutta osoitetaan, että

$$A\begin{pmatrix}\boldsymbol{u}\\\boldsymbol{v}\end{pmatrix}=\mathrm{O}\begin{pmatrix}\boldsymbol{u}\\\boldsymbol{v}\end{pmatrix}\det\begin{pmatrix}\boldsymbol{u}\\\boldsymbol{v}\end{pmatrix},$$

josta seuraa, että

$$A\begin{pmatrix}\boldsymbol{u}\\\boldsymbol{v}\end{pmatrix}=\left|\det\begin{pmatrix}\boldsymbol{u}\\\boldsymbol{v}\end{pmatrix}\right|.$$

Yhtälön

$$A\begin{pmatrix}\boldsymbol{u}\\\boldsymbol{v}\end{pmatrix}=\mathrm{O}\begin{pmatrix}\boldsymbol{u}\\\boldsymbol{v}\end{pmatrix}\det\begin{pmatrix}\boldsymbol{u}\\\boldsymbol{v}\end{pmatrix} \tag{17}$$

todistamiseksi kehitetään sopiva menettelytapa, joka voidaan yleistää epäsuorasti myös avaruuteen $\mathbb{R}^n$. Nyt, koska

$$\mathrm{O}\begin{pmatrix}\boldsymbol{u}\\\boldsymbol{v}\end{pmatrix}=\pm 1\neq 0,$$

niin yhtälön (17) molemmat puolet voidaan kertoa suunnistuksella

$$\mathrm{O}\begin{pmatrix}\boldsymbol{u}\\\boldsymbol{v}\end{pmatrix},$$

jolloin saadaan yhtälön (17) kanssa ekvivalenttinen muoto

$$\mathrm{O}\begin{pmatrix}\boldsymbol{u}\\\boldsymbol{v}\end{pmatrix}\cdot A\begin{pmatrix}\boldsymbol{u}\\\boldsymbol{v}\end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix}\boldsymbol{u}\\\boldsymbol{v}\end{pmatrix}. \tag{18}$$

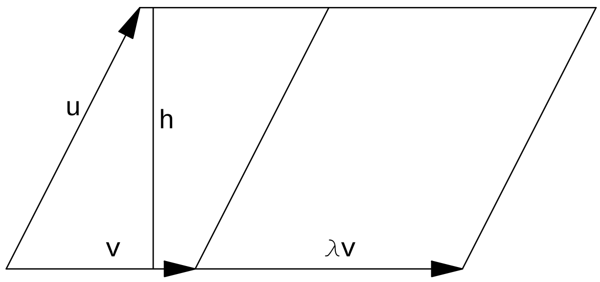
Todistetaan sitten, että funktio

$$\delta\begin{pmatrix}\boldsymbol{u}\\\boldsymbol{v}\end{pmatrix}=\mathrm{O}\begin{pmatrix}\boldsymbol{u}\\\boldsymbol{v}\end{pmatrix}\cdot A\begin{pmatrix}\boldsymbol{u}\\\boldsymbol{v}\end{pmatrix}$$

toteuttaa lauseen 2.11 ehdot.

a) Aloitetaan todistus osoittamalla, että

$$\delta\begin{pmatrix}\boldsymbol{u}\\\lambda\boldsymbol{v}\end{pmatrix}=\lambda\cdot\begin{pmatrix}\boldsymbol{u}\\\boldsymbol{v}\end{pmatrix}.$$



Kuva 3: Suunnikkaan alan riippuvuus kantasivusta ja korkeudesta.

Oletetaan, että $\lambda \neq 0$. Koska suunnikkaan korkeus h (ks. kuva 3) pysyy samana riippumatta siitä, määräävätkö $\boldsymbol{u}$ ja $\boldsymbol{v}$ vai $\boldsymbol{u}$ ja $\lambda\boldsymbol{v}$ suunnikkaan alan, niin saadaan

$$A\begin{pmatrix}\boldsymbol{u}\\ \lambda\boldsymbol{v}\end{pmatrix} = \mathit{kantasivu} \times \mathit{korkeus} = |\lambda|\,\|\boldsymbol{v}\|\,h = |\lambda| \cdot A\begin{pmatrix}\boldsymbol{u}\\ \boldsymbol{v}\end{pmatrix}.$$

Niinpä nyt

$$\begin{aligned}\delta\begin{pmatrix}\boldsymbol{u}\\ \lambda\boldsymbol{v}\end{pmatrix} &= \mathrm{O}\begin{pmatrix}\boldsymbol{u}\\ \lambda\boldsymbol{v}\end{pmatrix} \cdot A\begin{pmatrix}\boldsymbol{u}\\ \lambda\boldsymbol{v}\end{pmatrix} = \left[\frac{\lambda}{|\lambda|} \cdot \mathrm{O}\begin{pmatrix}\boldsymbol{u}\\ \boldsymbol{v}\end{pmatrix}\right]\left[|\lambda| \cdot A\begin{pmatrix}\boldsymbol{u}\\ \boldsymbol{v}\end{pmatrix}\right] \\ &= \lambda \cdot \mathrm{O}\begin{pmatrix}\boldsymbol{u}\\ \boldsymbol{v}\end{pmatrix} \cdot A\begin{pmatrix}\boldsymbol{u}\\ \boldsymbol{v}\end{pmatrix} = \lambda \cdot \delta\begin{pmatrix}\boldsymbol{u}\\ \boldsymbol{v}\end{pmatrix}. \qquad (19)\end{aligned}$$

Vastaavanlainen päättely osoittaa, että

$$\delta\begin{pmatrix}\lambda\boldsymbol{u}\\ \boldsymbol{v}\end{pmatrix} = \lambda \cdot \delta\begin{pmatrix}\boldsymbol{u}\\ \boldsymbol{v}\end{pmatrix}.$$

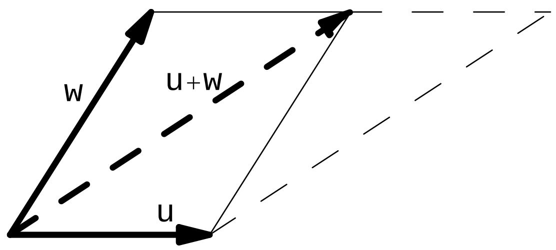
Osoitetaan seuraavaksi, että

$$\delta\begin{pmatrix}\boldsymbol{u}\\ a\boldsymbol{u} + b\boldsymbol{w}\end{pmatrix} = b \cdot \delta\begin{pmatrix}\boldsymbol{u}\\ \boldsymbol{w}\end{pmatrix} \qquad (20)$$

aina, kun vektorit $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^2$, ja aina, kun $a, b \in \mathbb{R}$. On huomattava, että koska vektoreiden $\boldsymbol{u}$ ja $\boldsymbol{w}$ ja vektoreiden $\boldsymbol{u}$ ja $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{w}$ määräämillä suunnikkailla on sama kantasivu ja korkeus, niin

$$A\begin{pmatrix}\boldsymbol{u}\\ \boldsymbol{w}\end{pmatrix} = A\begin{pmatrix}\boldsymbol{u}\\ \boldsymbol{u}+\boldsymbol{w}\end{pmatrix}.$$

Kuva 4 havainnollistaa edellistä tulosta. Jos $a = 0$, niin



Kuva 4: Vektoreiden $\boldsymbol{w}$ ja $\boldsymbol{u}$ sekä vektoreiden $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{w}$ ja $\boldsymbol{u}$ määräämät suunnikkaiden alat

$$\delta\begin{pmatrix}\boldsymbol{u}\\ a\boldsymbol{u}+b\boldsymbol{w}\end{pmatrix} = \delta\begin{pmatrix}\boldsymbol{u}\\ b\boldsymbol{w}\end{pmatrix} = b\cdot\delta\begin{pmatrix}\boldsymbol{u}\\ \boldsymbol{w}\end{pmatrix}$$

yhtälöketjun (19) perusteella. Jos $a \neq 0$, niin

$$\delta\begin{pmatrix}\boldsymbol{u}\\ a\boldsymbol{u}+b\boldsymbol{w}\end{pmatrix} = a\cdot\delta\begin{pmatrix}\boldsymbol{u}\\ \boldsymbol{u}+\frac{b}{a}\boldsymbol{w}\end{pmatrix} = a\cdot\delta\begin{pmatrix}\boldsymbol{u}\\ \frac{b}{a}\boldsymbol{w}\end{pmatrix} = b\cdot\delta\begin{pmatrix}\boldsymbol{u}\\ \boldsymbol{w}\end{pmatrix}.$$

Näin ollen yhtälö (20) pätee molemmissa tapauksissa.

Osoitetaan sitten, että lauseen 2.10 ensimmäinen ehto täytyy; toisin sanoen

$$\delta\begin{pmatrix}\boldsymbol{u}\\ c\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2\end{pmatrix} = c\cdot\delta\begin{pmatrix}\boldsymbol{u}\\ \boldsymbol{v}_1\end{pmatrix} + \delta\begin{pmatrix}\boldsymbol{u}\\ \boldsymbol{v}_2\end{pmatrix}$$

aina, kun $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \in \mathbb{R}^2$. Huomautetaan, että lähdekirjan todistuksessa ei ole lainkaan mukana skaalaria. Koska yhtälö toteutuu selvästi, kun $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$, niin oletetaan, että $\boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{0}$. Valitaan mikä tahansa sellainen vektori $\boldsymbol{w}$, että joukko $\{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}\}$ on lineaarisesti riippumaton. Tällöin jokaista vektoria $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \in \mathbb{R}^2$ kohti on olemassa sellaiset skalaarit a_i ja b_i, että $\boldsymbol{v}_i = a_i\boldsymbol{u}+b_i\boldsymbol{w}$, kun $i = 1, 2$. Nyt

$$\begin{aligned}\delta\begin{pmatrix}\boldsymbol{u}\\ c\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2\end{pmatrix} &= \delta\begin{pmatrix}\boldsymbol{u}\\ (ca_1+a_2)\boldsymbol{u}+(cb_1+b_2)\boldsymbol{w}\end{pmatrix} = (cb_1+b_2)\delta\begin{pmatrix}\boldsymbol{u}\\ \boldsymbol{w}\end{pmatrix}\\ &= c\cdot\delta\begin{pmatrix}\boldsymbol{u}\\ a_1\boldsymbol{u}+b_1\boldsymbol{w}\end{pmatrix} + \delta\begin{pmatrix}\boldsymbol{u}\\ a_2\boldsymbol{u}+b_2\boldsymbol{w}\end{pmatrix} = c\cdot\delta\begin{pmatrix}\boldsymbol{u}\\ \boldsymbol{v}_1\end{pmatrix} + \delta\begin{pmatrix}\boldsymbol{u}\\ \boldsymbol{v}_2\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Vastaavanlainen päättely osoittaa, että

$$\delta\begin{pmatrix} c\boldsymbol{u}_1+\boldsymbol{u}_2 \\ \boldsymbol{v} \end{pmatrix} = c\cdot\delta\begin{pmatrix} \boldsymbol{u}_1 \\ \boldsymbol{v} \end{pmatrix} + \delta\begin{pmatrix} \boldsymbol{u}_2 \\ \boldsymbol{v} \end{pmatrix}$$

aina, kun $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^2$.

b) Koska

$$A\begin{pmatrix} \boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{u} \end{pmatrix} = 0, \text{ niin } \delta\begin{pmatrix} \boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{u} \end{pmatrix} = \mathrm{O}\begin{pmatrix} \boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{u} \end{pmatrix}\cdot A\begin{pmatrix} \boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{u} \end{pmatrix} = 0$$

aina, kun $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^2$.

c) Nyt

$$\delta\begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1 \\ \boldsymbol{e}_2 \end{pmatrix} = \mathrm{O}\begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1 \\ \boldsymbol{e}_2 \end{pmatrix}\cdot A\begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1 \\ \boldsymbol{e}_2 \end{pmatrix} = 1\cdot 1 = 1.$$

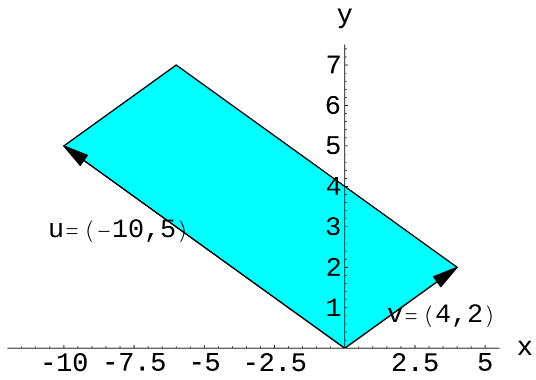
Nyt funktio δ toteuttaa lauseen 2.10 ehdot, ja näin ollen $\delta = \det$. Niinpä vektoreiden $\boldsymbol{u}$ ja $\boldsymbol{v}$ määräämän suunnikkaan ala on

$$\mathrm{O}\begin{pmatrix} \boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{v} \end{pmatrix}\cdot\det\begin{pmatrix} \boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{v} \end{pmatrix}.$$

Esimerkki 2.14. Vektoreiden $\boldsymbol{u} = (-10, 5)$ ja $\boldsymbol{v} = (4, 2)$ määräämän suunnikkaan ala

$$\left|\det\begin{pmatrix} \boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{v} \end{pmatrix}\right| = \left|\det\begin{pmatrix} -10 & 5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}\right| = |-40| = 40.$$

Kuva 5 havainnollistaa esimerkkiä 2.14.

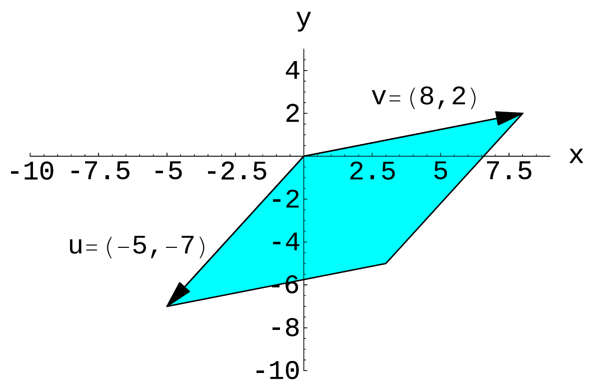


Kuva 5: Suunnikkaan ala, kun determinantti on negatiivinen

Esimerkki 2.15. Vektoreiden $\boldsymbol{u} = (-5, -7)$ ja $\boldsymbol{v} = (8, 2)$ määräämän suunnikkaan ala

$$\left|\det\begin{pmatrix}\boldsymbol{u}\\ \boldsymbol{v}\end{pmatrix}\right| = \left|\det\begin{pmatrix}-5 & -7\\ 8 & 2\end{pmatrix}\right| = |46| = 46.$$

Kuva 6 havainnollistaa esimerkkiä 2.15.



Kuva 6: Suunnikkaan ala, kun determinantti on positiivinen

2.3 Aksiomaattinen $n \times n$-matriisin determinantti

Lauseessa 2.11 2×2-matriisin determinantti karakterisoitiin kolmen ehdon avulla. Tässä luvussa tullaan määrittelemään $n \times n$-matriisin determinantti, jolle pätevät nämä samat ehdot.

Määritelmä 2.16. Funktion $\delta : M_{n\times n} \to \mathbb{F}$ sanotaan olevan *n-lineaarinen*, jos δ on lineaarinen jokaisen $n \times n$-matriisin rivin suhteen aina, kun loput $n-1$ riviä on kiinnitetty. Tämä tarkoittaa sitä, että

$$\delta \begin{pmatrix} A_{(1)} \\ \vdots \\ cA_{(i)} + A'_{(i)} \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{pmatrix} = c \cdot \delta \begin{pmatrix} A_{(1)} \\ \vdots \\ A_{(i)} \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} A_{(1)} \\ \vdots \\ A'_{(i)} \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{pmatrix} \text{ kaikilla } i = 1, 2, \ldots, n$$

aina, kun

$$\begin{pmatrix} A_{(1)} \\ \vdots \\ cA_{(i)} + A'_{(i)} \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{pmatrix}$$

kuuluu joukkoon $M_{n\times n}$.

Esimerkki 2.17 löytyy lähdeteoksesta.

Esimerkki 2.17. Lause 2.10 osoittaa, että funktio $\det : M_{2\times 2} \to \mathbb{F}$ on 2-lineaarinen, kun $\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Lause 2.18. *Kahden n-lineaarisen funktion lineaarikombinaatio on n-lineaarinen funktio.*

Todistus. Olkoot δ_1 ja δ_2 n-lineaarisia funktioita ja a ja b skalaareja. Jos δ

on lineaarikombinaatio $a\delta_1 + b\delta_2$, niin

$$\delta \begin{pmatrix} A_{(1)} \\ \vdots \\ cA_{(i)} + A'_{(i)} \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{pmatrix} = a \cdot \delta_1 \begin{pmatrix} A_{(1)} \\ \vdots \\ cA_{(i)} + A'_{(i)} \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{pmatrix} + b \cdot \delta_2 \begin{pmatrix} A_{(1)} \\ \vdots \\ cA_{(i)} + A'_{(i)} \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{pmatrix}$$

$$= a \left[c \cdot \delta_1 \begin{pmatrix} A_{(1)} \\ \vdots \\ A_{(i)} \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{pmatrix} + \delta_1 \begin{pmatrix} A_{(1)} \\ \vdots \\ A'_{(i)} \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{pmatrix} \right] + b \left[c \cdot \delta_2 \begin{pmatrix} A_{(1)} \\ \vdots \\ A_{(i)} \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{pmatrix} + \delta_2 \begin{pmatrix} A_{(1)} \\ \vdots \\ A'_{(i)} \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{pmatrix} \right]$$

$$= c \left[a \cdot \delta_1 \begin{pmatrix} A_{(1)} \\ \vdots \\ A_{(i)} \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{pmatrix} + b \cdot \delta_2 \begin{pmatrix} A_{(1)} \\ \vdots \\ A_{(i)} \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{pmatrix} \right] + \left[a \cdot \delta_1 \begin{pmatrix} A_{(1)} \\ \vdots \\ A'_{(i)} \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{pmatrix} + b \cdot \delta_2 \begin{pmatrix} A_{(1)} \\ \vdots \\ A'_{(i)} \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{pmatrix} \right]$$

$$= c \cdot \delta \begin{pmatrix} A_{(1)} \\ \vdots \\ A_{(i)} \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} A_{(1)} \\ \vdots \\ A'_{(i)} \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{pmatrix} \text{ kaikilla } i, \text{ kun } 1 \leq i \leq n.$$

Niinpä δ on n-lineaarinen funktio ja väite pitää paikkansa. □

Määritelmä 2.19. Kun $n = 1$, niin 1-lineaarinen funktio δ on *alternoiva*. Kun $n \geq 2$, niin n-lineaarinen funktio δ on *alternoiva*, jos $\delta(A) = 0$ aina, kun matriisin A kaksi vierekkäistä riviä ovat samat.

Lause 2.20. *Olkoon $\delta : M_{n\times n} \to \mathbb{F}$ alternoiva n-lineaarinen funktio. Tällöin,*

a) jos matriisi B on saatu $n \times n$-matriisista A vaihtamalla mitkä tahansa matriisin A kaksi riviä, niin $\delta(B) = -\delta(A)$, ja

b) jos $n \times n$-matriisissa A on kaksi identtistä riviä, niin $\delta(A) = 0$.

Todistus. a) Todistetaan ensin, että jos matriisi B on saatu matriisista A vaihtamalla kaksi matriisin A vierekkäistä riviä, niin $\delta(B) = -\delta(A)$. Oletetaan, että matriisi B on saatu matriisista A vaihtamalla matriisin A rivejä i ja $i+1$. Tällöin

$$A = \begin{pmatrix} A_{(1)} \\ \vdots \\ A_{(i)} \\ A_{(i+1)} \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{pmatrix} \text{ ja } B = \begin{pmatrix} A_{(1)} \\ \vdots \\ A_{(i+1)} \\ A_{(i)} \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{pmatrix}.$$

Nyt, koska σ on alternoiva n-lineaarinen funktio, niin

$$\begin{aligned} 0 = \delta \begin{pmatrix} A_{(1)} \\ \vdots \\ A_{(i)} + A_{(i+1)} \\ A_{(i)} + A_{(i+1)} \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{pmatrix} &= \delta \begin{pmatrix} A_{(1)} \\ \vdots \\ A_{(i)} \\ A_{(i)} + A_{(i+1)} \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} A_{(1)} \\ \vdots \\ A_{(i+1)} \\ A_{(i)} + A_{(i+1)} \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{pmatrix} \\ &= \delta \begin{pmatrix} A_{(1)} \\ \vdots \\ A_{(i)} \\ A_{(i)} \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} A_{(1)} \\ \vdots \\ A_{(i)} \\ A_{(i+1)} \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} A_{(1)} \\ \vdots \\ A_{(i+1)} \\ A_{(i)} \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} A_{(1)} \\ \vdots \\ A_{(i+1)} \\ A_{(i+1)} \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{pmatrix} \\ &= 0 + \delta(A) + \delta(B) + 0. \end{aligned}$$

Niinpä $\delta(B) = -\delta(A)$.

Oletetaan sitten, että matriisi B on saatu matriisista A vaihtamalla matriisin A rivejä i ja j, kun $i < j$. Aloitetaan vaihtamalla keskenään ensin matriisin A rivit i ja $i+1$, sitten rivit i ja $i+2$ ja niin edelleen, kunnes rivit ovat järjestyksessä

$$A_{(1)}, \ldots, A_{(i-1)}, A_{(i+1)}, \ldots, A_{(j)}, A_{(i)}, A_{(j+1)}, \ldots, A_{(n)}.$$

Kaiken kaikkiaan tarvitaan $j - i$ rivinsiirtoa, jotta päästään kyseiseen järjestykseen.

Vaihdetaan sitten keskenään ensin rivit $j-1$ ja j, sitten rivit $j-2$ ja j ja niin edelleen, kunnes rivit ovat järjestyksessä

$$A_{(1)}, \ldots, A_{(i-1)}, A_{(j)}, A_{(i+1)}, \ldots, A_{(j-1)}, A_{(i)}, A_{(j+1)}, \ldots, A_{(n)}.$$

Nyt tarvitaan $j-i-1$ rivinsiirtoa, jotta päästään edellä mainittuun järjestykseen.

Niipä nyt lauseen alussa esitetyn tuloksen perusteella

$$\delta(B) = (-1)^{j-i}(-1)^{j-i-1}\delta(A) = (-1)^{2(j-i)-1}\delta(A) = -\delta(A).$$

b) Oletetaan sitten, että matriisin A rivit i ja j ovat identtiset, kun $i < j$. Jos $j = i+1$, niin oletuksen perusteella $\delta(A) = 0$. Jos taas $j > i+1$, niin vaihdetaan rivejä $i+1$ ja j keskenään, jotta saadaan matriisi B, jossa kaksi vierekkäistä riviä ovat identtiset. Tällöin, koska δ on alternoiva, niin $\delta(B) = 0$. Lisäksi kohdan a) perusteella $\delta(B) = -\delta(A)$, joten $\delta(A) = 0$. $\square$

Määritelmä 2.21. Joukossa $M_{n\times n}$ määritelty *determinantti* on sellainen alternoiva n-lineaarinen funktio $\delta : M_{n\times n} \to \mathbb{F}$, että $\delta(I) = 1$.

Lauseen 2.22 todistus poikkeaa joiltakin osin lähdekirjan todistuksesta.

Lause 2.22. *Olkoon δ joukossa $M_{n\times n}$ määritelty alternoiva n-lineaarinen funktio. Määritellään jokaiselle $(n+1)\times(n+1)$-matriisille A ja kullekin j:n arvolle, kun $1 \leq j \leq n+1$,*

$$\epsilon_j(A) = \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i+j} a_{ij} \cdot \delta(\widetilde{A}_{ij}), \tag{21}$$

missä $\widetilde{A}_{ij}$ on matriisista A saatu $n\times n$-matriisi, kun matriisista A on poistettu i:s rivi ja j:s sarake. Tällöin ϵ_j on alternoiva $(n+1)$-lineaarinen funktio määrittelyjoukossa $M_{(n+1)\times(n+1)}$.

Todistus. Todistetaan ensin, että ϵ_j on $(n+1)$-lineaarinen funktio. Koska $\widetilde{A}_{ij}$ on saatu matriisista A poistamalla matriisista A i:s rivi ja j:s sarake, niin $\delta(\widetilde{A}_{ij})$ on riippumaton matriisin A rivistä i. Täten, koska δ on n-lineaarinen funktio, niin $\delta(\widetilde{A}_{ij})$ on lineaarinen funktio riviä i lukuun ottamatta jokaisen matriisin A rivin kanssa. Näin ollen $a_{ij} \cdot \delta(\widetilde{A}_{ij})$ on $(n+1)$-lineaarinen funktio, sillä kun nyt merkitään, että $\delta^{‘} = a_{ij}\delta(\widetilde{A}_{ij})$, niin

$$\delta^{\text{`}}\begin{pmatrix} A_{(1)} \\ \vdots \\ cA_{(k)} + A'_{(k)} \\ \vdots \\ A_{(i)} \\ \vdots \\ A_{(n+1)} \end{pmatrix} = a_{ij}\delta\begin{pmatrix} A_{(1)} \\ \vdots \\ cA_{(k)} + A'_{(k)} \\ \vdots \\ A_{(i-1)} \\ A_{(i+1)} \\ \vdots \\ A_{(n+1)} \end{pmatrix}$$

$$= a_{ij}\left[c\cdot\delta\begin{pmatrix} A_{(1)} \\ \vdots \\ A_{(k)} \\ \vdots \\ A_{(n+1)} \end{pmatrix} + \delta\begin{pmatrix} A_{(1)} \\ \vdots \\ A'_{(k)} \\ \vdots \\ A_{(n+1)} \end{pmatrix}\right]$$

$$= c\cdot a_{ij}\delta\begin{pmatrix} A_{(1)} \\ \vdots \\ A_{(k)} \\ \vdots \\ A_{(n+1)} \end{pmatrix} + a_{ij}\delta\begin{pmatrix} A_{(1)} \\ \vdots \\ A'_{(k)} \\ \vdots \\ A_{(n+1)} \end{pmatrix}$$

$$= c\cdot\delta^{\text{`}}\begin{pmatrix} A_{(1)} \\ \vdots \\ A_{(k)} \\ \vdots \\ A_{(n+1)} \end{pmatrix} + \delta^{\text{`}}\begin{pmatrix} A_{(1)} \\ \vdots \\ A'_{(k)} \\ \vdots \\ A_{(n+1)} \end{pmatrix}.$$

Niinpä nyt, koska

$$\epsilon_j(A) = \sum_{i=1}^{n+1}(-1)^{i+j}a_{ij}\cdot\delta(\widetilde{A}_{ij})$$

on $(n+1)$-lineaaristen funktioiden $a_{ij}\delta(\widetilde{A}_{ij})$ lineaarikombinaatio, niin ϵ_j on $(n+1)$-lineaarinen funktio soveltamalla lausetta 2.18.

Todistetaan sitten, että ϵ_j on alternoiva. Jos A on $(n+1)\times(n+1)$-matriisi, jossa on kaksi identtistä riviä k ja $k+1$, niin matriisilla $\widetilde{A}_{ij}$ on kaksi identtistä riviä aina, kun $i \neq k$ ja $i \neq k+1$. Niinpä $\delta(\widetilde{A}_{ij}) = 0$ aina, kun $i \neq k$ ja $i \neq k+1$. Näin ollen yhtälöön (21) jää vain kaksi summattavaa:

$$\epsilon_j(A) = (-1)^{k+j} a_{kj} \cdot \delta(\widetilde{A}_{kj}) + (-1)^{(k+1)+j} a_{(k+1)j} \cdot \delta(\widetilde{A}_{(k+1)j}).$$

Mutta nyt, koska matriisin A rivit k ja $k+1$ ovat samoja, niin $a_{kj} = a_{(k+1)j}$ ja $\widetilde{A}_{kj} = \widetilde{A}_{(k+1)j}$. Niinpä $\epsilon_j(A) = 0$, joten ϵ_j on alternoiva.

□

Seurauslause 1. *Olkoot δ ja ϵ_j samoja kuin lauseessa 2.22. Tällöin, jos δ on determinantti joukossa $M_{n\times n}$, niin ϵ_j on determinantti joukossa $M_{(n+1)\times(n+1)}$.*

Todistus. Olkoon $I = (i_{ij})$ $(n+1)\times(n+1)$-identiteettimatriisi. Olkoon lisäksi $\widetilde{I}$ $n \times n$-matriisi, joka on saatu matriisista I poistamalla i:s rivi ja j:s sarake. Tällöin $\widetilde{I}$ on $n \times n$-identiteettimatriisi. Koska $i_{ij} = 0$, kun $i \neq j$, ja $i_{jj} = 1$, niin

$$\begin{aligned} \epsilon_j(I) &= \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i+j} i_{ij} \cdot \delta(\widetilde{I}_{ij}) = (-1)^{j+j} \cdot \delta(\widetilde{I}_{jj}) \\ &= \delta(\widetilde{I}_{jj}) = 1. \end{aligned} \tag{22}$$

Yhtälön (22) viimeinen yhtäsuuruus pätee, koska δ on determinantti joukossa $M_{n\times n}$. Niinpä lauseen 2.22 ja yhtälön (22) perusteella ϵ_j on determinantti joukossa $M_{(n+1)\times(n+1)}$. □

Seurauslause 2. *On olemassa determinantti joukossa $M_{n\times n}$ aina, kun n on positiivinen kokonaisluku.*

Todistus. Todistetaan väite induktiolla luvun n suhteen. Tehdään ensin alkuaskel. Kun $n = 1$, funktio $\delta : M_{1\times 1} \to \mathbb{F}$, joka määritellään, että $\delta(A) = a_{11}$, on determinantti joukossa $M_{1\times 1}$. Nimittäin δ on alternoiva määritelmän 2.19 perusteella, δ on 1-lineaarinen, sillä

$$\delta(ca_{11} + a'_{11}) = ca_{11} + a'_{11} = c\delta(a_{11}) + \delta(a'_{11}),$$

ja lisäksi $\delta(i_{11}) = \delta(1) = 1$. Niinpä määritelmän 2.21 perusteella δ on determinantti joukossa $M_{1\times 1}$.

Tehdään sitten induktioaskel. Oletetaan, että on olemassa determinantti δ joukossa $M_{n\times n}$. Tällöin jokaista saraketta j kohti, kun $1 \leq j \leq n+1$, lauseessa 2.22 määritelty funktio ϵ_j on determinantti joukossa $M_{(n+1)\times(n+1)}$ seurauslauseen 1 perusteella.

Siis alkuaskeleen ja induktioaskeleen perusteella väite on tosi. $\square$

Määritelmä 2.23. Jos δ on determinantti joukossa $M_{n\times n}$, niin lauseessa 2.22 määriteltyä funktiota

$$\epsilon_j(A) = \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i+j} a_{ij} \cdot \delta(\widetilde{A}_{ij})$$

kutsutaan determinantin δ *sarakekehitelmäksi* saraketta j pitkin.

Määritelmä 2.24. Skalaaria $(-1)^{i+j} \cdot \delta(\widetilde{A}_{ij})$ kutsutaan matriisin A alkion a_{ij} *kofaktoriksi.*

Määritelmä 2.25. Alkiota $\delta(\widetilde{A}_{ij})$ kutsutaan matriisin A (i, j)-*osadeterminantiksi* (engl. minor). [1, s. 182]

2.4 Determinantin ominaisuuksia

Determinantilla on useita hyödyllisiä ominaisuuksia, joiden avulla sen laskeminen on helpompaa. Seuraavassa lauseeessa on esitetty joitakin ominaisuuksia.

Lause 2.26. *Jokaisella determinantilla δ joukossa $M_{n\times n}$ pätee:*

a) jos B on saatu matriisista A kertomalla matriisin A jonkin rivin kaikki alkiot skalaarilla c, niin $\delta(B) = c \cdot \delta(A)$,

b) jos matriisin A kaksi riviä ovat identtiset, niin $\delta(A) = 0$,

c) jos B on saatu matriisista A vaihtamalla kaksi riviä keskenään, niin $\delta(B) = -\delta(A)$,

d) jos matriisissa A on nollarivi, niin $\delta(A) = 0$,

e) jos B on saatu matriisista A lisäämällä matriisin A riviin j rivin i monikerta, kun $i \neq j$, niin $\delta(B) = \delta(A)$.

Todistus. Todistetaan ensin d)-kohta. Oletetaan, että matriisin A rivin i kaikki alkiot ovat nollia. Tällöin, koska δ on determinantti, niin n-lineaarisuuden perusteella

$$\delta(A) = \delta \begin{pmatrix} A_{(1)} \\ \vdots \\ 0 \cdot A_{(i)} \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{pmatrix} = \delta \begin{pmatrix} A_{(1)} \\ \vdots \\ -1 \cdot A_{(i)} + A_{(i)} \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{pmatrix} = -\delta \begin{pmatrix} A_{(1)} \\ \vdots \\ A_{(i)} \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} A_{(1)} \\ \vdots \\ A_{(i)} \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{pmatrix} = 0.$$

Todistetaan sitten a)-kohta. Oletetaan, että matriisi B on saatu matriisista A kertomalla matriisin A rivin $A_{(i)}$ kaikki alkiot skalaarilla c. Nyt determinantin δ n-lineaarisuuden ja d)-kohdan perusteella

$$\delta(B) = \delta \begin{pmatrix} A_{(1)} \\ \vdots \\ c \cdot A_{(i)} + \mathbf{0} \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{pmatrix} = c \cdot \delta(A) + \delta \begin{pmatrix} A_{(1)} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{pmatrix} = c \cdot \delta(A).$$

Kohdat b) ja c) ovat suoria seurauksia lauseesta 2.20, koska δ on determinantti.

Todistetaan lopuksi e)-kohta. Oletetaan, että B on saatu matriisista A lisäämällä matriisin A riviin j skalaarilla c kerrottu rivi i. Oletetaan, että $i < j$ (tapaus $j > i$ menee vastaavasti). Nyt, kun

$$A = \begin{pmatrix} A_{(1)} \\ \vdots \\ A_{(i)} \\ \vdots \\ A_{(j)} \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{pmatrix}, \text{ niin } B = \begin{pmatrix} A_{(1)} \\ \vdots \\ A_{(i)} \\ \vdots \\ cA_{(i)} + A_{(j)} \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{pmatrix}.$$

Niinpä n-lineaarisuuden ja kohdan b) perusteella

$$\delta(B) = \delta \begin{pmatrix} A_{(1)} \\ \vdots \\ A_{(i)} \\ \vdots \\ cA_{(i)} + A_{(j)} \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{pmatrix} = c \cdot \delta \begin{pmatrix} A_{(1)} \\ \vdots \\ A_{(i)} \\ \vdots \\ A_{(i)} \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} A_{(1)} \\ \vdots \\ A_{(i)} \\ \vdots \\ A_{(j)} \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{pmatrix} = c \cdot 0 + \delta(A) = \delta(A).$$

□

On huomattava, että lauseen 2.26 ominaisuudet a), c) ja e) näyttävät, miten determinantin arvo muuttuu, kun matriisiin sovelletaan alkeismuunnosta. Seuraavassa lauseessa edellä esitetyt ominaisuudet on esitetty alkeismuunnosmatriisien avulla. Seurauslauseen 3 todistusta ei löydy lähdekirjasta.

Seurauslause 3. *Olkoot E_1, E_2 ja E_3 määritelmän 2.1 tyyppiä 1, 2 ja 3 olevia alkeismuunnosmatriiseja joukossa $M_{n\times n}$. Tällöin, jos E_2 on saatu identiteettimatriisista I kertomalla jokin sen rivi nollasta eroavalla skalaarilla c, niin jokaisella determinantilla δ määrittelyjoukossa $M_{n\times n}$ pätee, että $\delta(E_1) = -1$, $\delta(E_2) = c$ ja $\delta(E_3) = 1$.*

Todistus. Oletetaan, että δ on mielivaltainen joukon $M_{n\times n}$ determinantti, ja

$$\boldsymbol{e}_i^t = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

on kantavektori avaruudessa $\mathbb{R}^n$, kun $1 \leq i \leq n$. Tällöin lauseen 2.26 perusteella

$$\delta(E_1) = \delta \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1^t \\ \vdots \\ \boldsymbol{e}_j^t \\ \vdots \\ \boldsymbol{e}_i^t \\ \vdots \\ \boldsymbol{e}_n^t \end{pmatrix} = -\delta \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1^t \\ \vdots \\ \boldsymbol{e}_i^t \\ \vdots \\ \boldsymbol{e}_j^t \\ \vdots \\ \boldsymbol{e}_n^t \end{pmatrix} = -\delta(I) = -1,$$

$$\delta(E_2) = \delta \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1^t \\ \vdots \\ c \cdot \boldsymbol{e}_i^t \\ \vdots \\ \boldsymbol{e}_n^t \end{pmatrix} = c\delta \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1^t \\ \vdots \\ \boldsymbol{e}_i^t \\ \vdots \\ \boldsymbol{e}_n^t \end{pmatrix} = c \cdot \delta(I) = c$$

ja

$$\delta(E_3) = \delta \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1^t \\ \vdots \\ \boldsymbol{e}_i^t \\ \vdots \\ c \cdot \boldsymbol{e}_i^t + \boldsymbol{e}_j^t \\ \vdots \\ \boldsymbol{e}_n^t \end{pmatrix} = \delta \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1^t \\ \vdots \\ \boldsymbol{e}_i^t \\ \vdots \\ c \cdot \boldsymbol{e}_i^t \\ \vdots \\ \boldsymbol{e}_n^t \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1^t \\ \vdots \\ \boldsymbol{e}_i^t \\ \vdots \\ \boldsymbol{e}_j^t \\ \vdots \\ \boldsymbol{e}_n^t \end{pmatrix}$$

$$= c \cdot \delta \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1^t \\ \vdots \\ \boldsymbol{e}_i^t \\ \vdots \\ \boldsymbol{e}_i^t \\ \vdots \\ \boldsymbol{e}_n^t \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1^t \\ \vdots \\ \boldsymbol{e}_i^t \\ \vdots \\ \boldsymbol{e}_j^t \\ \vdots \\ \boldsymbol{e}_n^t \end{pmatrix} = c \cdot 0 + \delta(I) = 1.$$

□

Seurauslauseen 3 tulosta tarvitaan myöhemmin, kun todistetaan determinantti yksikäsitteiseksi. Determinantin osoittaminen yksikäsitteiseksi vaatii lisäksi muita tuloksia, jotka esitetään seuraavaksi.

Lause 2.27. *Olkoon δ determinantti määrittelyjoukossa $M_{n\times n}$ ja olkoon A joukon $M_{n\times n}$ matriisi, jolla* $\operatorname{rank}(A) < n$. *Tällöin $\delta(A) = 0$.*

Todistus. Koska $\operatorname{rank}(A) < n$, niin matriisin A rivit ovat lineaarisesti riippuvia määritelmän 2.3 mukaan. Näin ollen on olemassa sellaiset skalaarit $c_1, \dots, c_n$, jotka eivät ole kaikki nollia, että

$$c_1 A_{(1)} + c_2 A_{(2)} + \ldots + c_n A_{(n)} = \mathbf{0}. \tag{23}$$

Menettämättä todistuksessa mitään oleellista voidaan olettaa, että $c_1 \neq 0$. Tällöin kertomalla yhtälö (23) puolittain luvulla c_1^{-1} saadaan, että

$$A_{(1)} + c_1^{-1}c_2A_{(2)} + \ldots + c_1^{-1}c_nA_{(n)} = \mathbf{0}.$$

Olkoon B sitten matriisi, joka on saatu matriisista A lisäämällä matriisin A ensimmäiseen riviin vektori

$$c_1^{-1}c_2A_{(2)} + \ldots + c_1^{-1}c_nA_{(n)}.$$

Nyt matriisin B ensimmäinen rivi on nollarivi, ja lauseen 2.26 kohdan d) perusteella $\delta(B) = 0$. Toisaalta lauseen 2.26 kohdan e) perusteella $\delta(B) = \delta(A)$. Niinpä $\delta(A) = 0$. □

Apulauseen 1 todistusta ei löydy kokonaisuudessaan kirjasta.

Apulause 1. *Jos E on alkeismuunnosmatriisi ja δ on determinantti määrittelyjoukossa $M_{n\times n}$, niin $\delta(EB) = \delta(E)\delta(B)$ aina, kun $B \in M_{n\times n}$.*

Todistus. On kolme tapausta. Oletetaan ensin, että kun matriisin B kertoo alkeismuunnosmatriisilla E_1 vasemmalta puolelta, matriisin B kaksi riviä vaihtuvat. Tällöin lauseen 2.26 kohdan c) perusteella $\delta(E_1B) = -\delta(B)$. Mutta toisaalta seurauslauseen 3 perusteella $\delta(E_1) = -1$. Niinpä $\delta(E_1B) = \delta(E_1)\delta(B)$

Oletetaan sitten, että kun matriisin B kertoo alkeismuunnosmatriisilla E_2 vasemmalta puolelta, matriisin B jonkin rivin kaikki alkiot tulee kerrottua skalaarilla c. Tällöin lauseen 2.26 kohdan a) perusteella $\delta(E_2B) = c \cdot \delta(B)$. Mutta toisaalta seurauslauseen 3 perusteella $\delta(E_2) = c$. Niinpä $\delta(E_2B) = \delta(E_2)\delta(B)$.

Oletetaan lopuksi, että kun matriisin B kertoo alkeismuunnosmatriisilla E_3 vasemmalta puolelta, matriisin B johonkin riviin i tulee lisättyä jonkin rivin j monikerta, kun $i \neq j$. Tällöin lauseen 2.26 kohdan e) perusteella $\delta(E_3B) = \delta(B)$. Mutta toisaalta seurauslauseen 3 perusteella $\delta(E_3) = 1$. Niinpä $\delta(E_3B) = \delta(E_3)\delta(B)$. □

Lause 2.28. *Olkoon δ determinantti määrittelyjoukossa $M_{n\times n}$, ja olkoot A ja B joukon $M_{n\times n}$ matriiseja. Tällöin $\delta(AB) = \delta(A) \cdot \delta(B)$.*

Todistus. Jos $\operatorname{rank}(A) < n$, niin lauseen 2.6 perusteella

$$\operatorname{rank}(AB) \leq \operatorname{rank}(A) < n.$$

Niinpä lauseen 2.27 perusteella $\delta(A) = 0$ ja $\delta(AB) = 0$. Näin ollen

$$\delta(AB) = \delta(A) \cdot \delta(B).$$

Jos $\operatorname{rank}(A) = n$, niin A on kääntyvä lauseen 2.7 perusteella, ja näin ollen se voidaan esittää lauseen 2.5 perusteella alkeismuunnosmatriiseiden tulona. Olkoon $A = E_m \cdots E_1$, missä E_i on alkeismuunnosmatriisi, kun $1 \leq i \leq m$. Nyt apulauseen 1 perusteella

$$\begin{aligned} \delta(AB) &= \delta(E_m \cdots E_1 B) = \delta(E_m)\delta(E_{m-1} \cdots E_1 B) = \cdots \\ &= \delta(E_m) \cdots \delta(E_1)\delta(B) = \delta(E_m \cdots E_1)\delta(B) = \delta(A) \cdot \delta(B). \end{aligned} \tag{24}$$

□

Seurauslause 4. *Olkoon δ determinantti määrittelyjoukossa $M_{n\times n}$ ja olkoon A kääntyvä matriisi joukossa $M_{n\times n}$. Tällöin $\delta(A) \neq 0$ ja $\delta(A^{-1}) = [\delta(A)]^{-1}$.*

Todistus. Lauseen 2.28 perusteella

$$\delta(A) \cdot \delta(A^{-1}) = \delta(AA^{-1}) = \delta(I) = 1.$$

Niinpä $\delta(A) \neq 0$ ja $\delta(A^{-1}) = [\delta(A)]^{-1}$. □

Seurauslause 5. *Olkoon δ determinantti määrittelyjoukossa $M_{n\times n}$ ja olkoon $A \in M_{n\times n}$. Tällöin seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä:*

a) *$\delta(A) = 0$,*

b) *A ei ole kääntyvä,*

c) *$\operatorname{rank}(A) < n$.*

Todistus. Seurauslause 4 sanoo, että jos $\delta(A) = 0$, niin A ei ole kääntyvä. Niinpä kohdasta a) seuraa, että kohta b) on voimassa. Toisaalta lauseen 2.7 perusteella kohdasta b) seuraa, että kohta c) on voimassa. Lisäksi lauseen 2.27 perusteella kohdasta c) seuraa, että kohta a) on voimassa. □

Lause 2.29. *On olemassa täsmälleen yksi determinantti määrittelyjoukossa $M_{n\times n}$.*

Todistus. Determinantin olemassaolo todistettiin seurauslauseessa 2.

Osoitetaan sitten, että jos δ_1 ja δ_2 ovat molemmat determinantteja määrittelyjoukossa $M_{n\times n}$, niin $\delta_1 = \delta_2$. Olkoon A mielivaltainen $n \times n$-matriisi. Jos $\operatorname{rank}(A) < n$, niin seurauslauseen 5 perusteella $\delta_1(A) = \delta_2(A) = 0$. Jos $\operatorname{rank}(A) = n$, niin A on kääntyvä, ja näin ollen se voidaan esittää lauseen 2.5 perusteella alkeismuunnosmatriiseiden tulona. Olkoon $A = E_m \cdots E_1$, missä E_i on alkeismuunnosmatriisi, kun $1 \leq i \leq m$. Koska nyt seurauslauseen 3 perusteella $\delta_1(E_i) = \delta_2(E_i)$ aina, kun $1 \leq i \leq m$, niin lauseen 2.28 perusteella

$$\begin{aligned}\delta_1(A) &= \delta_1(E_m \cdots E_1) = \delta_1(E_m) \cdots \delta_1(E_1) \\ &= \delta_2(E_m) \cdots \delta_2(E_1) = \delta_2(E_m \cdots E_1) = \delta_2(A).\end{aligned}$$

Niinpä $\delta_1 = \delta_2$. □

Lauseen 2.30 todistusta ei löydy sellaisenaan lähdekirjoista, mutta vrt. [5, s. 157-158].

Lause 2.30. *Luvussa 1 permutatiivisesti määritelty determinantti*

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

on ekvivalentti aksiomaattisesti määritellyn determinantin kanssa.

Todistus. Lauseen 1.25 perusteella permutatiivisesti määritelty determinantti on n-lineaarinen ja lauseen 1.27 perusteella permutatiivisesti määritelty determinantti on alternoiva. Lisäksi luvussa 1 on osoitettu, että jos det on permutatiivisesti määritelty determinantti, niin $\det(I) = 1$. Toisaalta lauseen 2.29 perusteella aksiomaattisesti määritelty determinantti on yksikäsitteinen. Näin ollen lause 2.30 on todistettu. □

Määritelmä 2.31. Määrittelyjoukossa $M_{n\times n}$ *yksikäsitteistä determinanttia* merkitään det.

Seurauslauseen 6 todistusta ei löydy lähdekirjasta.

Seurauslause 6. *Olkoon $A \in M_{n\times n}$. Tällöin kaikilla sarakkeilla j, kun $1 \leq j \leq n$,*

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \cdot \det(\widetilde{A}_{ij}),$$

missä $\widetilde{A}_{ij}$ on matriisista A saatu $(n-1) \times (n-1)$-matriisi, kun matriisista A on poistettu i:s rivi ja j:s sarake.

Todistus. Seurauslauseen 1 perusteella kaikilla j:n arvoilla, kun $1 \leq j \leq n$,

$$\epsilon_j(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \cdot \delta(\widetilde{A}_{ij})$$

on determinantti joukossa $M_{n\times n}$, jos δ on determinantti joukossa $M_{(n-1)\times(n-1)}$. Koska det on yksikäsitteinen determinantti joukossa $M_{(n-1)\times(n-1)}$, niin kaikilla j, kun $1 \leq j \leq n$,

$$\epsilon_j(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \cdot \det(\widetilde{A}_{ij}).$$

Lisäksi, koska determinanteilla $\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_n$ on sama määrittelyjoukko $M_{n\times n}$, niin

$$\epsilon_1 = \epsilon_2 = \cdots = \epsilon_n.$$

Niinpä kaikilla arvoilla j, kun $1 \leq j \leq n$, $\epsilon_j(A) = \det(A)$.

Siis väite pitää paikkansa. □

2.5 Determinantin laskemisesta

Seurauslauseen 6 perusteella $n \times n$-matriisin determinantti voidaan aina kehittää mitä tahansa saraketta pitkin. Kun $n > 2$, niin sarakekehitelmä sisältää n kappaletta $(n-1)\times(n-1)$-matriiseiden determinantteja. Sitten kunkin $(n-1)\times(n-1)$-matriisin determinantin voi kehittää taas mitä tahansa saraketta pitkin. Jatkamalla edellä mainitulla tavalla saadaan lopulta kehitettyä 2×2-matriiseja, joista determinantti voidaan laskea, kun tiedetään, että $\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

On huomattava, että determinantin laskeminen matriisista $\widetilde{A}_{ij}$ voidaan välttää aina, kun $a_{ij} = 0$. Nimittäin tällöin tulo $a_{ij}\det(\widetilde{A}_{ij})$ on nolla determinantin arvosta riippumatta. Siksi kannattaa aina kehittää determinantti sellaista saraketta pitkin, jossa on mahdollisimman paljon nollia.

Esimerkeissä 2.32 ja 2.33 determinantti lasketaan käyttäen hyväksi seurauslausetta 6 ja lausetta 2.26.

Esimerkki 2.32. Olkoon

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nyt laskettavaa tulee vähemmän, kun kehitetään determinantti kolmatta saraketta pitkin:

$$
\begin{aligned}
\det(A) &= \sum_{i=1}^{4}(-1)^{i+3}a_{i3}\cdot\det(\widetilde{A}_{i3}) \\
&= (-1)^{1+3}\cdot 0\cdot\det\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 2\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix} + (-1)^{2+3}\cdot 0\cdot\det\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & -1 & 2\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix} \\
&+ (-1)^{3+3}\cdot 1\cdot\det\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ -1 & 0 & 1\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix} + (-1)^{4+3}\cdot(-1)\cdot\det\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ -1 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 2\end{pmatrix} \\
&= \det\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ -1 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 2\end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Kehitetään sitten jäljelle jäänyt determinantti ensimmäistä saraketta pitkin:

$$
\begin{aligned}
\det(A) &= \det\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ -1 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 2\end{pmatrix} \\
&= (-1)^{1+1}\cdot 1\cdot\det\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix} + (-1)^{2+1}\cdot(-1)\cdot\det\begin{pmatrix}2 & 3\\ -1 & 2\end{pmatrix} \\
&+ (-1)^{2+1}\cdot 0\cdot\det\begin{pmatrix}2 & 3\\ 0 & 1\end{pmatrix} = 1+7=8.
\end{aligned}
$$

Esimerkki 2.33. Olkoon

$$
A = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 0\end{pmatrix}.
$$

Nyt determinantin laskemiseksi matriisista A kehitetään ensin determinantti neljättä saraketta pitkin. Tällöin saadaan

$$
\det(A) = (-1)^{1+4}\cdot 1\cdot\det\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ -1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ -1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}.
$$

Nyt käyttämällä hyväksi lausetta 2.26 sillä tavalla, että lisätään ensin matriisin A ensimmäinen rivi toiseen riviin ja lisätään sen jälkeen toinen rivi kolmanteen riviin saadaan

$$\begin{aligned}\det(A) &= -\det\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= -\det\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Kehitetään lopuksi determinantti ensimmäistä saraketta pitkin:

$$\det(A) = -\det\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -(-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot \det\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1.$$

Esimerkin 2.34 tulos ilman todistusta löytyy kirjasta [5, s. 163].

Esimerkki 2.34. Olkoon $A \in M_{n\times n}$. Tällöin kaikilla skalaareilla $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A).$$

Koska det on determinantti, niin toistamalla lauseen 2.26 kohtaa a) n kertaa saadaan

$$\begin{aligned}\det(\lambda A) &= \det\begin{pmatrix} \lambda A_{(1)} \\ \vdots \\ \lambda A_{(n)} \end{pmatrix} = \lambda \cdot \det\begin{pmatrix} A_{(1)} \\ \lambda A_{(2)} \\ \vdots \\ \lambda A_{(n)} \end{pmatrix} = \lambda \cdot \lambda \cdot \det\begin{pmatrix} A_{(1)} \\ A_{(2)} \\ \lambda A_{(3)} \\ \vdots \\ \lambda A_{(n)} \end{pmatrix} \\ &= \lambda \cdot \lambda \cdot \lambda \cdot \det\begin{pmatrix} A_{(1)} \\ A_{(2)} \\ A_{(3)} \\ \lambda A_{(4)} \\ \vdots \\ \lambda A_{(n)} \end{pmatrix} = \lambda \cdots \lambda \cdot \det\begin{pmatrix} A_{(1)} \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{pmatrix} \\ &= \lambda^n \det(A).\end{aligned}$$

Apulausetta 2 tarvitaan lauseen 2.35 todistamisessa. Tätä apulauseen todistusta ei löydy lähdekirjoista.

Apulause 2. *Olkoot* E_1, E_2 *ja* E_3 *tyyppiä* $1, 2$ *ja* 3 *olevia alkeismuunnosmatriiseja. Tällöin* $\det(E_i^t) = \det(E_i)$*, kun* $1 \leq i \leq 3$.

Todistus. Merkitään, että alkeismuunnosmatriisi $E = (e_{ij})$ ja sen transpoosi $E^t = (e_{ij}^t)$, kun $1 \leq i, j \leq n$.

Alkeismuunnosmatriisi E_1 on saatu identtiteettimatriisista I kahta riviä vaihtamalla. Olkoot nämä rivit i ja j. Tällöin matriisissa E_1 on alkiot $e_{ij} = 1$, $e_{ji} = 1$ ja $e_{kk} = 1$ aina, kun $k \neq i$ ja $k \neq j$. Matriisin E_1 loput alkiot ovat nollia. Voidaan päätellä, että $E_1^t = E_1$. Niinpä $\det(E_1^t) = \det(E_1)$.

Alkeismuunnosmatriisi E_2 on saatu identtiteettimatriisista I kertomalla jokin sen rivi skalaarilla $c \neq 0$. Oletetaan, että kyseessä on rivi i. Tällöin matriisissa E_2 on alkiot $e_{ii} = c$ ja $e_{kk} = 1$ aina, kun $k \neq i$. Matriisin E_2 loput alkiot ovat nollia. Voidaan päätellä, että $E_2^t = E_2$. Niinpä $\det(E_2^t) = \det(E_2)$.

Alkeismuunnosmatriisi E_3 on saatu identtiteettimatriisista I lisäämällä matriisin I jonkin rivin i monikerta johonkin toiseen riviin j. Tällöin matriisissa E_3 on alkiot $e_{jj} = 1$, $e_{ji} = c$ ja $e_{kk} = 1$. Matriisin E_3 loput alkiot ovat nollia. Toisaalta matriisin E_3 transpoosissa E_3^t on alkiot $e_{ii}^t = 1$, $e_{ij}^t = c$ ja $e_{kk}^t = 1$. Loput alkiot ovat nollia. Merkitään, että $\boldsymbol{e}_i^t$ on avaruuden $\mathbb{R}^n$ transponoitu kantavektori, kun $1 \leq i \leq n$. Nyt laskettaessa determinantti matriisille E_3^t n-lineaarisuuden perusteella saadaan

$$\det(E_3^t) = \det \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1^t \\ \vdots \\ c \cdot \boldsymbol{e}_j^t + \boldsymbol{e}_i^t \\ \vdots \\ \boldsymbol{e}_j^t \\ \vdots \\ \boldsymbol{e}_n^t \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1^t \\ \vdots \\ c \cdot \boldsymbol{e}_j^t \\ \vdots \\ \boldsymbol{e}_j^t \\ \vdots \\ \boldsymbol{e}_n^t \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1^t \\ \vdots \\ \boldsymbol{e}_i^t \\ \vdots \\ \boldsymbol{e}_j^t \\ \vdots \\ \boldsymbol{e}_n^t \end{pmatrix}$$

$$= c \cdot \det \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1^t \\ \vdots \\ \boldsymbol{e}_j^t \\ \vdots \\ \boldsymbol{e}_j^t \\ \vdots \\ \boldsymbol{e}_n^t \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1^t \\ \vdots \\ \boldsymbol{e}_i^t \\ \vdots \\ \boldsymbol{e}_j^t \\ \vdots \\ \boldsymbol{e}_n^t \end{pmatrix} = c \cdot 0 + \det(I) = 1.$$

Nyt seurauslauseen 3 perusteella $\det(E_3^t) = \det(E_3)$.

Siis väite pitää paikkansa. □

Lause 2.35. *Olkoon $A \in M_{n\times n}$. Tällöin* $\det(A^t) = \det(A)$.

Todistus. Jos A ei ole kääntyvä, niin lauseen 2.7 perusteella $\operatorname{rank}(A) < n$. Mutta koska lauseen 2.4 perusteella $\operatorname{rank}(A^t) = \operatorname{rank}(A)$, niin A^t ei ole kääntyvä. Niinpä $\det(A) = 0 = \det(A^t)$.

Jos taas A on kääntyvä, se voidaan esittää lauseen 2.5 perusteella alkeismuunnosmatriiseiden tulona, toisin sanoen $A = E_m \cdots E_2 E_1$, kun $E_1, E_2, \ldots, E_m$ ovat alkeismuunnosmatriiseja. Nyt apulauseen 2 perusteella $\det(E_i^t) = \det(E_i)$, kun $1 \le i \le 3$. Niinpä lauseen 2.28 perusteella

$$\begin{aligned} \det(A^t) &= \det(E_1^t \cdots E_m^t) = \det(E_1^t) \cdots \det(E_m^t) \\ &= \det(E_1) \cdots \det(E_m) = \det(E_m) \cdots \det(E_1) \\ &= \det(E_m \cdots E_1) = \det(A). \end{aligned}$$

□

Seurauslause 7. *Olkoon $A \in M_{n\times n}$. Tällöin kaikilla riveillä i, kun $1 \leq i \leq n$,*

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \cdot \det(\widetilde{A}_{ij}),$$

missä $\widetilde{A}_{ij}$ on matriisista A saatu $(n-1)\times(n-1)$-matriisi, kun matriisista A on poistettu i:s rivi ja j:s sarake.

Todistus. Lauseen tulos seuraa välittömästi lauseesta 2.35 ja seurauslauseesta 6. □

Lause 2.36. *Olkoon A $n\times n$-yläkolmiomatriisi. Tällöin* $\det(A)$ *on matriisin A diagonaalialkioiden tulo.*

Todistus. Olkoon A $n \times n$-yläkolmiomatriisi. Todistetaan väite induktiolla luvun n suhteen. Tehdään ensin alkuaskel. Oletetaan, että $n = 2$. Tällöin

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Niinpä $\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}\cdot 0 = a_{11}a_{22}$.

Tehdään sitten induktioaskel. Oletetaan, että väite pitää paikkansa $(n-1)\times(n-1)$-yläkolmiomatriiseille, ja olkoon A $n \times n$-yläkolmiomatriisi. Tällöin

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1(n-1)} & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2(n-1)} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Nyt laajentamalla determinantti ensimmäistä saraketta pitkin saadaan

$$\det(A) = a_{11} \cdot \det \begin{pmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2(n-1)} & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} = a_{11} \cdot (a_{22} \cdots a_{nn}),$$

koska $a_{i1} = 0$ aina, kun $2 \leq i \leq n$.

Siis alku- ja induktioaskeleen perusteella väite pitää paikkansa. □

Seurauslauseen 8 todistusta ei löydy lähdekirjasta.

Seurauslause 8. *Olkoon B $n \times n$-alakolmiomatriisi. Tällöin* $\det(B)$ *on matriisin B diagonaalialkioiden tulo.*

Todistus. Olkoon B $n \times n$-alakolmiomatriisi. Tällöin

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ b_{12} & b_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{1(n-1)} & b_{2(n-1)} & \cdots & 0 \\ b_{1(n)} & b_{2n} & & b_{nn} \end{pmatrix}.$$

Huomataan, että transponoimalla matriisi B saadaan yläkolmiomatriisi. Niinpä nyt lauseiden 2.35 ja 2.36 perusteella

$$\det(B) = \det(B^t) = b_{11}b_{22}\cdots b_{nn}.$$

□

2.6 Cramerin sääntö

Lause 2.37 (Cramerin sääntö). *Olkoon $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ yhtälöryhmä, jossa on n yhtälöä ja n tuntematonta. Lisäksi*

$$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^t \text{ ja } \boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)^t.$$

Tällöin, jos $\det(A) \neq 0$, *niin yhtälöryhmällä on yksikäsitteinen ratkaisu ja jokaista lukua k kohti, kun $1 \leq k \leq n$,*

$$x_k = [\det(A)]^{-1} \cdot \det(M_k),$$

missä M_k on matriisista A saatu $n \times n$-matriisi, kun matriisista A on korvattu sarake A_k vektorilla $\boldsymbol{b}$.

Todistus. Jos $\det(A) \neq 0$, niin seurauslauseen 5 ja lauseen 2.8 perusteella yhtälöryhmällä on yksikäsitteinen ratkaisu. Olkoon k kokonaisluku, kun $1 \leq k \leq n$, ja määritellään, että X_k on matriisi, joka on saatu $n \times n$-identiteettimatriisista korvaamalla sen k:s sarake vektorilla $\boldsymbol{x}$. Laajentamalla X_k saraketta k pitkin saadaan

$$\det(X_k) = x_k \cdot \det(I_{(n-1)\times(n-1)}) = x_k.$$

Nyt, kun $\boldsymbol{e}_i$ on kantavektori avaruudessa $\mathbb{R}^n$, niin matriisin tulosääntöjen perusteella

$$\begin{aligned} AX_k &= A(\boldsymbol{e}_1|\cdots|\boldsymbol{e}_{k-1}|\boldsymbol{x}|\boldsymbol{e}_{k+1}|\cdots|\boldsymbol{e}_n) \\ &= (A\boldsymbol{e}_1|\cdots|A\boldsymbol{e}_{k-1}|A\boldsymbol{x}|A\boldsymbol{e}_{k+1}|\cdots|A\boldsymbol{e}_n) \\ &= (A_1|\cdots|A_{k-1}|\boldsymbol{b}|A_{k+1}|\cdots|A_n) \\ &= M_k. \end{aligned}$$

Lauseen 2.28 perusteella

$$\det(M_k) = \det(AX_k) = \det(A)\det(X_k) = \det(A)\cdot x_k.$$

Näin ollen

$$x_k = [\det(A)]^{-1}\cdot\det(M_k).$$

□

3 Esimerkkejä determinanteista

Esimerkkien 3.1 ja 3.2 tulokset ilman todistusta löytyvät lähteestä [6, s. 28], kun taas esimerkkiä 3.3 ei löydy lähdekirjoista. Lisäksi esimerkin 3.4 ratkaisun pääkohdat seuraavat lähdettä [4].

3.1 Kaksi esimerkkiä determinanteista

Esimerkki 3.1. Olkoon

$$A = \begin{pmatrix} a+b & ab & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & a+b & ab & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a+b & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a+b & ab \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a+b \end{pmatrix}$$

$n\times n$-kolmidiagonaalimatriisi. Osoitettava, että jos $a\neq b$, niin

$$\det(A) = \frac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b}.$$

Ratkaisu. Todistetaan väite induktiolla luvun n suhteen.

Tehdään ensin alkuaskel. Kun $n = 1$, niin

$$\frac{a^{1+1} - b^{1+1}}{a - b} = \frac{(a+b)(a-b)}{a-b} = a + b = \det(A).$$

Kun taas $n = 2$, niin

$$\begin{aligned}\frac{a^{2+1} - b^{2+1}}{a - b} &= \frac{(a^2 + ab + b^2)(a-b)}{a-b} \\ &= a^2 + b^2 + ab = (a+b)^2 - ab = \det(A).\end{aligned}$$

Tehdään sitten induktioaskel. Oletetaan, että väite pitää paikkansa $(n-1) \times (n-1)$-matriisille $A_{(n-1)\times(n-1)}$ ja $(n-2) \times (n-2)$-matriisille $A_{(n-2)\times(n-2)}$. Nyt kehittämällä determinantti ensimmäistä riviä pitkin ja ottamalla oletukset huomioon saadaan

$$\begin{aligned}
\det(A) &= \det\begin{pmatrix} a+b & ab & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & a+b & ab & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a+b & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a+b & ab \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a+b \end{pmatrix} \\
&= (-1)^2(a+b)\det(A_{(n-1)\times(n-1)}) \\
&\quad + (-1)^3 ab \det\begin{pmatrix} 1 & ab & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a+b & ab & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a+b & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a+b & ab \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a+b \end{pmatrix} \\
&= (a+b)\frac{a^{(n-1)+1} - b^{(n-1)+1}}{a-b} - ab\det(A_{(n-2)\times(n-2)}) \\
&= (a+b)\frac{a^{(n-1)+1} - b^{(n-1)+1}}{a-b} - ab\frac{a^{(n-2)+1} - b^{(n-2)+1}}{a-b} \\
&= \frac{1}{a-b}((a+b)(a^n - b^n) - ab(a^{n-1} - b^{n-1})) \\
&= \frac{1}{a-b}(a^{n+1} - ab^n + ba^n - b^{n+1} - ba^n + ab^n) \\
&= \frac{1}{a-b}(a^{n+1} - b^{n+1}).
\end{aligned}$$

Siis alku- ja induktioaskeleen perusteella väite on tosi.

Esimerkki 3.2. Olkoon $\boldsymbol{a}^t = (-a_0, -a_1, \ldots, -a_{n-2})$ ja

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & I_{n-1} \\ \boldsymbol{a}^t & -a_{n-1} \end{pmatrix},$$

missä $\mathbf{0}$ on $(n-1)\times 1$-vektori ja I_{n-1} on $(n-1)\times(n-1)$-identiteettimatriisi. Kun $\lambda \in \mathbb{R}$, osoitettava, että

$$\begin{aligned} \det(\lambda I - A) &= \det \begin{pmatrix} \lambda & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda & -1 \\ a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-2} & \lambda + a_{n-1} \end{pmatrix} \\ &= \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + a_{n-2}\lambda^{n-2} + \cdots + a_2\lambda^2 + a_1\lambda^1 + a_0. \end{aligned}$$

Ratkaisu. Kehitetään $\det(\lambda I - A)$ ensimmäistä saraketta pitkin:

$$\begin{aligned} \det(\lambda I - A) &= (-1)^{n+1} a_0 (-1)^{n-1} + \lambda \det \begin{pmatrix} \lambda & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda & -1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-2} & \lambda + a_{n-1} \end{pmatrix} \\ &= a_0 + \lambda \det \begin{pmatrix} \lambda & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda & -1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-2} & \lambda + a_{n-1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Kehitetään jäljelle jäänyt determinantti edelleen ensimmäistä saraketta pitkin:

$$\det(\lambda I - A)$$

$$= a_0 + \lambda((-1)^{(n-1)+1}a_1(-1)^{n-2} + \lambda \det \begin{pmatrix} \lambda & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda & -1 \\ a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-2} & \lambda + a_{n-1} \end{pmatrix})$$

$$= a_0 + a_1\lambda + \lambda^2 \det \begin{pmatrix} \lambda & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda & -1 \\ a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-2} & \lambda + a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Huomataan, että luvun a_k kerroin on $(-1)^{(n-k)+1}(-1)^{(n-k)-1} = (-1)^{2(n-k)} = 1$ aina, kun $0 \leq k \leq n-1$. Jatkamalla samalla tavalla eteenpäin saadaan lopulta

$$\det(\lambda I - A) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + a_{n-2}\lambda^{n-2} + \cdots + a_2\lambda^2 + a_1\lambda^1 + a_0.$$

3.2 Determinantin laskeminen LU-hajotelman avulla

Oletetaan, että A voidaan esittää ala- ja yläkolmiomatriisin tulona, toisin sanoen

$$A = LU,$$

missä L on alakolmiomatriisi ja U on yläkolmiomatriisi. Tällöin lauseiden 2.36 ja 2.28 sekä seurauslauseen 8 perusteella

$$\det(A) = \det(LU) = (l_{11}l_{22}\cdots l_{nn}) \cdot (u_{11}u_{22}\cdots u_{nn}),$$

missä $l_{11}l_{22}\cdots l_{nn}$ ovat matriisin L ja $u_{11}u_{22}\cdots u_{nn}$ matriisin U diagonaalialkiot.

Esimerkki 3.3. Käyttämällä hyväksi matriisin tulosääntöä huomataan, että 2×2-matriisi

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

voidaan esittää LU-hajotelmana

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

josta determinantti ($= 1$) on helppo laskea.

Vastaavasti huomataan, että 3×3-matriisi

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

voidaan esittää LU-hajotelmana

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

josta determinantti ($= 1$) on myös helppo laskea.

Nyt vastaavanlainen $n \times n$-matriisi

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & 3 & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n-1 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \end{pmatrix}$$

voidaan esittää LU-hajotelmana

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & 3 & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n-1 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

josta determinantti ($= 1$) on myös helppo laskea.

3.3 Vandermonden determinantti

Esimerkki 3.4. Osoitettava, että

$$\det(A) = \det \begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ 1 & a_3 & a_3^2 & \cdots & a_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i).$$

Determinanttia kutsutaan *Vandermonden determinantiksi.*

Ratkaisu. Ratkaisussa sovelletaan lauseen 2.26 kohtia a) ja e). Kerrotaan ensimmäinen rivi luvulla -1 ja lisätään se muihin riveihin. Tällöin saadaan

$$\begin{aligned} \det(A) &= \det \begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_3 & a_3^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_1^{n-1} \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 0 & a_2 - a_1 & a_2^2 - a_1^2 & \cdots & a_2^{n-1} - a_1^{n-1} \\ 0 & a_3 - a_1 & a_3^2 - a_1^2 & \cdots & a_3^{n-1} - a_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_n - a_1 & a_n^2 - a_1^2 & \cdots & a_n^{n-1} - a_1^{n-1} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Tiedetään, että polynomi voidaan jakaa tekijöihin:

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}).$$

Nyt saatu determinantti voidaan kehittää ensimmäistä saraketta pitkin. Lisäksi huomataan, että kullakin rivillä on yksi yhteinen tekijä $a_j - a_1$, kun

$2 \leq j \leq n$. Saadaan

$$\det(A) = \det \begin{pmatrix} a_2 - a_1 & a_2^2 - a_1^2 & \cdots & a_2^{n-1} - a_1^{n-1} \\ a_3 - a_1 & a_3^2 - a_1^2 & \cdots & a_3^{n-1} - a_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_n - a_1 & a_n^2 - a_1^2 & \cdots & a_n^{n-1} - a_1^{n-1} \end{pmatrix}$$

$$= \det \begin{pmatrix} a_2 - a_1 & \cdots & (a_2 - a_1)(a_2^{n-2} + a_2^{n-3}a_1 + \ldots + a_2 a_1^{n-3} + a_1^{n-2}) \\ a_3 - a_1 & \cdots & (a_3 - a_1)(a_3^{n-2} + a_3^{n-3}a_1 + \ldots + a_3 a_1^{n-3} + a_1^{n-2}) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_n - a_1 & \cdots & (a_n - a_1)(a_n^{n-2} + a_n^{n-3}a_1 + \ldots + a_n a_1^{n-3} + a_1^{n-2}) \end{pmatrix}$$

Nyt lauseen 2.26 kohdan a) perusteella kultakin riviltä voidaan ottaa tekijä $a_j - a_1$ determinantin eteen, joten

$$\det(A) = \prod_{j=2}^{n}(a_j - a_1) \det \begin{pmatrix} 1 & \cdots & a_2^{n-2} + a_2^{n-3}a_1 + \ldots + a_2 a_1^{n-3} + a_1^{n-2} \\ 1 & \cdots & a_3^{n-2} + a_3^{n-3}a_1 + \ldots + a_3 a_1^{n-3} + a_1^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \cdots & a_n^{n-2} + a_n^{n-3}a_1 + \ldots + a_n a_1^{n-3} + a_1^{n-2} \end{pmatrix}.$$

Nyt käyttämällä hyväksi determinantin n-lineaarisuutta ja lauseen 2.26 kohtaa a) kunkin sarakkeen summan voi hajottaa kahdeksi tai useammaksi determinantiksi riippuen summattavien lukumäärästä. Huomataan, että kyseisistä determinanteista kaikki muut menevät nollaksi (koska niissä on kaksi samaa saraketta) paitsi ne determinantit, joissa on summalausekkeen ensimmäinen tekijä. Toisin sanoen saadaan

$$\det(A) = \prod_{j=2}^{n}(a_j - a_1) \det \begin{pmatrix} 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-2} \\ 1 & a_3 & a_3^2 & \cdots & a_3^{n-2} \\ 1 & a_4 & a_4^2 & \cdots & a_4^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-2} \end{pmatrix}.$$

Saatu matriisi on muuten sama, mutta astetta pienempi kuin se matriisi, josta tarkastelu lähti liikkeelle. Nyt jatkamalla päättelyä täsmälleen samalla tavalla väite saadaan todistettua: kerrotaan ensimmäinen rivi luvulla -1 ja lisätään se kaikkiin muihin riveihin. Saadaan

$$\det(A) = \prod_{j=2}^{n}(a_j - a_1)\prod_{j=3}^{n}(a_j - a_2)\det\begin{pmatrix} 1 & a_3 & a_3^2 & \cdots & a_3^{n-3} \\ 1 & a_4 & a_4^2 & \cdots & a_4^{n-3} \\ 1 & a_5 & a_5^2 & \cdots & a_5^{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-3} \end{pmatrix}.$$

Lopulta saadaan

$$\begin{aligned} \det(A) &= \prod_{j=2}^{n}(a_j - a_1)\prod_{j=3}^{n}(a_j - a_2)\cdots(\prod_{j=n-1}^{n}(a_j - a_{n-2}))(a_n - a_{n-1}) \\ &= \prod_{1\leq i<j\leq n}^{n}(a_j - a_i). \end{aligned}$$

Viitteet

[1] Brown, William C. *Matrices and Vector Spaces.* New York: Marcel Dekker, 1991.

[2] Edwards Jr,C.H.; Penney, David E. *Elementary Linear Algebra.* New Jersey: Prentice-Hall, 1988.

[3] Friedberg Stephen H.; Insel, Arnold J.; Spence, Lawrence E. *Linear Algebra.* New Jersey: Prentice-Hall, 1989.

[4] URL: http://users.utu.fi/hekavi/ROKL/VM.pdf [Viitattu 4.7.2005]

[5] Valenza, Robert J. Linear Algebra: *An introduction to Abstract Mathematics.* New York: Springer-Verlag, 1993.

[6] Zhang, Fuzhen. *Linear Algebra: Challenging Problems for Students.* Baltimore: The John Hopkins University Press, 1996.